

DÉPARTEMENT IMI  
JANVIER 2017

# Méthodes Multilevel Monte Carlo pour le pricing d'options en finance

Rayan SANHAJ  
Mohammed Hassen MIRI  
Lina FALK

Encadrés par :  
Mr. Ahmed Kebaier

De nombreuses applications en finance, en particulier le pricing d'instruments financiers reposent sur des simulations par la méthode de Monte Carlo. Celle-ci consiste à discrétiser numériquement l'équation différentielle stochastique qui régit l'évolution du prix et à l'estimer à partir de la simulation de plusieurs échantillons indépendants. La méthode Multilevel Monte Carlo, introduite récemment par M. Giles, professeur à l'université d'Oxford, exploite des propriétés de convergence forte permettant d'améliorer significativement la complexité numérique en combinant des simulations avec des niveaux de résolutions différents.

## Objectifs :

- Nous avons implémenté un algorithme de *pricing* d'options reposant sur la méthode de Multilevel Monte Carlo. Nous avons adapté l'algorithme à deux modèles stochastiques : celui de Black Stockes dont la solution peut être obtenue de manière analytique et celui d'Heston plus complexe.
- Nous avons considéré deux types d'options : européennes et asiatiques.
- Nous avons comparé les performances des deux méthodes de simulations en terme de précision, vitesse de convergence et complexité.
- Nous avons créé une interface graphique (site web) qui permet l'utilisation de cet algorithme dans le cadre du projet TDLOG.



## I. Evaluation d'options européennes selon le modèle de Black Stocks

### I.1 Le modèle Black Scholes

Une option est un produit dérivé qui relie un acheteur et un vendeur par un contrat. L'acheteur de l'option détient alors le droit, et non pas l'obligation, d'acheter, *call*, ou de vendre, *put*, un actif sous-jacent à un prix fixé à l'avance, *strike*, pendant un temps donné  $T$ . Cet actif sous-jacent peut être une action, une obligation, une matière première ou encore un contrat à terme sur n'importe lequel de ces produits. Ce contrat peut se faire dans une optique de spéculation sur le prix futur de l'actif sous-jacent, ou d'assurance contre une évolution défavorable de ce prix.

	Call	Put
Options européennes	$(S - K)^+$	$(K - S)^+$
Options asiatiques	$\left( \frac{S_{t_1} + \dots + S_{t_N}}{N} - K \right)^+$	$\left( K - \frac{S_{t_1} + \dots + S_{t_N}}{N} \right)^+$

Tableau 1 - *Payoff* de différentes options

L'objectif des méthodes de simulation en finance est de prévoir l'évolution des prix.

L'équation différentielle stochastique canonique s'écrit sous la forme :

$$dS_t = b(S_t)dt + a(S_t)dW_t, \quad S_0 = s_0, \quad 0 < t < T$$

où  $S$  modélise l'évolution d'un actif sous-jacent sur le marché.

Dans le modèle de Black-Scholes, l'évolution du prix vérifie l'équation suivante :

$$dS_t = r S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S_0 = s_0, \quad 0 < t < T$$

On peut montrer via la formule d'Itô que cette équation admet comme solution :

$$S_t = s_0 e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t}$$

En notant  $g$  la fonction qui, à une option, associe son *payoff*, à savoir le résultat d'une option à son échéance pour  $t=T$ , le prix théorique de l'option est donné par l'espérance sous probabilité risque neutre du *payoff* terminal :

$$C = E [ g(S_T) e^{-rT} ] = s_0 N(d_1) - K \exp(-rT) N(d_2)$$

où  $N$  : fonction de répartition de la loi  $N(0,1)$

$$d_1 = \frac{1}{\sigma \sqrt{T}} \left[ \ln \left( \frac{S_0}{K} \right) + \left( r + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T \right] \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

### I.2 Les méthodes Monte Carlo et Multilevel Monte Carlo

#### La méthode Monte Carlo.

- Discrétisation régulière du temps en  $n$  pas :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, t_i = i \frac{T}{n}$$

- En partant que l'équation différentielle stochastique initiale, le schéma d'Euler donne la discrétisation suivante :

$$S_{t_i}^n = S_{t_{i-1}}^n + \frac{T}{n} b(S_{t_{i-1}}^n) + a(S_{t_{i-1}}^n) (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$$

La simulation revient donc à la simulation des accroissements de  $W$ , à savoir  $W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$  qui suivent la loi normale

$$\mathcal{N} \left( 0, \frac{T}{n} \right), \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

- Estimation du *payoff* par la moyenne de  $N$  échantillons indépendants :

$$E [ e^{-rT} g(S_T) ] = \frac{1}{N} e^{-rT} \sum_{k=1}^N S_{T,k}^n$$

où :  $(S_{T,k}^n)_{1 \leq k \leq n}$  sont des échantillons iid de loi  $S_T^n$

#### La méthode Multilevel de Monte Carlo.

- Discrétisation géométrique du temps :

$$\forall l \in \{0, \dots, L\}, t_l = i \frac{T}{m^l}$$

où  $m$  est un entier non nul et  $L$  est définie de sorte  $m^L = n$ . Cette discrétisation permet un raffinement graduel, le pas de temps tendant à se réduire progressivement.

- Décomposition du la fonction du *payoff* :

Notons l'estimation de du *payoff* avec une schéma numérique  $\hat{p}_l$  de pas  $h_l$  on a :

$$E[\hat{p}_L] = E[\hat{p}_0] + \sum_{i=1}^L E[\hat{p}_i - \hat{p}_{i-1}]$$

On estime  $E[\hat{p}_0]$  par  $\hat{Y}_0 = \frac{1}{N_0} \sum \hat{p}_0^i$

On estime alors pour chaque  $l \in \{1, \dots, L\}$  indépendamment  $E[\hat{p}_l^i - \hat{p}_{l-1}^i]$  par :

$$\bar{Y}_l = \frac{1}{N_l} \sum_{i=1}^{N_l} (\hat{p}_l^i - \hat{p}_{l-1}^i)$$

L'estimation  $(\hat{p}_l^i - \hat{p}_{l-1}^i)$  vient de deux discrétisation de deux pas différents mais de la même simulation du mouvement Brownien.

Figure 1 - Évolution de l'erreur quadratique en fonction du temps de calcul pour l'option asiatique (bleu: Monte-Carlo classique, orange: Multilevel Monte-Carlo)

Temps de calcul (en s)	0.6	1
Ratio	4.43	4.95

Tableau 2 - Comparaison de l'erreur quadratique des deux méthodes

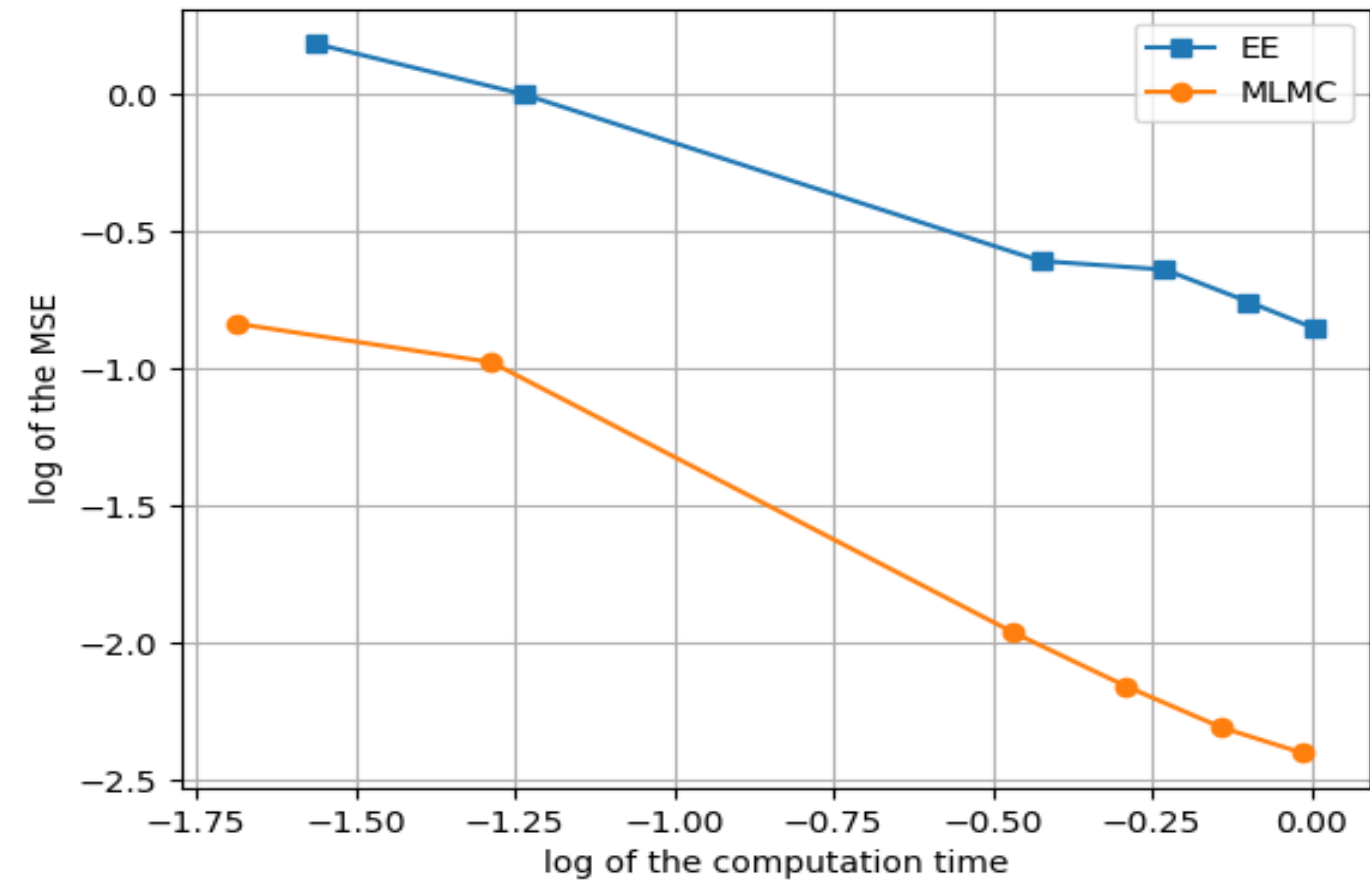


Figure 2 - Évolution de l'erreur quadratique en fonction du temps de calcul pour l'option européenne (bleu: Monte-Carlo classique, orange: Multilevel Monte-Carlo)

Temps de calcul (en s)	0.4	0.61
Ratio	4.42	3.70

Tableau 3 - Comparaison de l'erreur quadratique des deux méthodes

## II. Evaluation d'options européennes selon le modèle d'Heston

### II.1 Le modèle d'Heston

Le modèle d'Heston est un modèle à volatilité stochastique qui s'inspire à la fois du modèle CIR (Cox-Ingersoll-Ross) pour expliquer la dynamique de la volatilité et du modèle de Black-Scholes.

Le prix de l'actif  $S_t$  est déterminé par l'équation différentielle stochastique :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^S$$

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \xi \sqrt{v_t} dW_t^v$$

- $W_t^S, W_t^v$  sont deux processus de Wiener de corrélation  $\rho$
- $\mu$  : est le taux d'intérêt de l'actif
- $\theta$  : la moyenne du prix à long terme (la valeur de  $v_t$  lorsque  $t$  tend vers l'infini)

### II.2 Analyse de la complexité numérique

MLMC Euler Option européenne	MC Euler Option européenne
$O(n^2 \log^2(n))$	$O(n^3)$

Tableau 4 - Complexité temporelle selon le nombre  $n$  d'échantillons

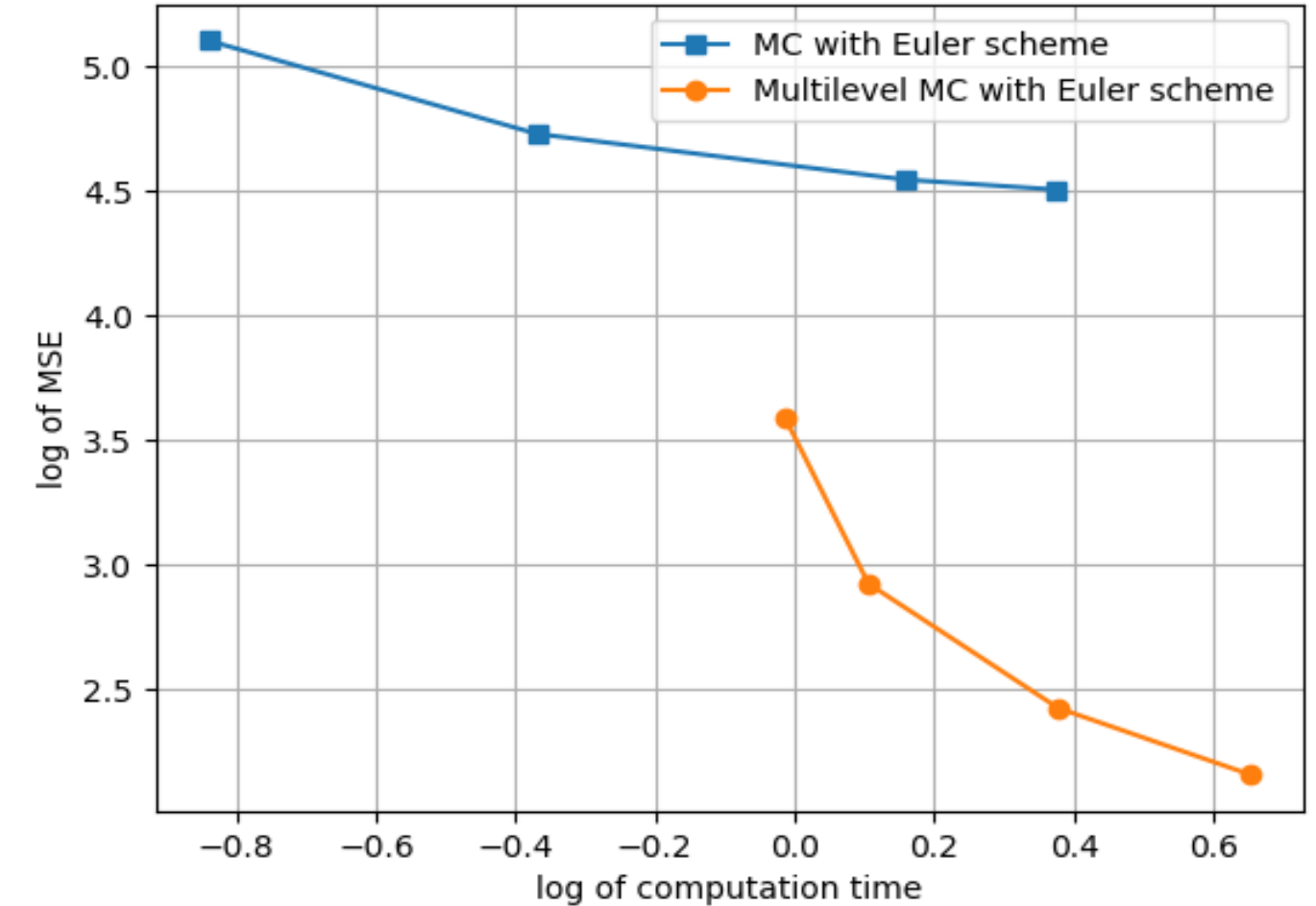


Figure 4 - Évolution de l'erreur quadratique en fonction du temps de calcul (bleu: Monte-Carlo classique, orange: Multilevel Monte-Carlo)

Temps de calcul (en s)	0.54	0.74
Ratio	2.72	2.22

Tableau 5 - Comparaison de l'erreur quadratique des deux méthodes

## III. Amélioration des performances par le schéma de discrétisation de Milstein

### III.1 Présentation du schéma de discrétisation de Milstein

Pour un cours d'actif sous-jacent qui suit l'équation différentielle stochastique suivante,

$$S_t = \mu(S_t) dt + \sigma(S_t) dW_t$$

le schéma de discrétisation de Milstein donne:

$$S_{t_{i+1}} = S_{t_i} + \mu(S_{t_i}) \Delta t_i + \sigma(S_{t_i}) \Delta W_i + \frac{1}{2} \sigma'(S_{t_i}) \sigma'(S_{t_i}) (\Delta W_i^2 - \Delta t_i)$$

où :  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$  et  $\Delta W_i = W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$

### III.2 Application aux modèles de Black Scholes et d'Heston

Dans le cas du modèle de Black-Scholes,  $\mu(S_t) = r S_t$  et

$\sigma(S_t) = \sigma S_t$ . Par conséquent,

$$S_{t_{i+1}} = S_{t_i} (1 + r \Delta t_i + \sigma \Delta W_i - \frac{1}{2} \sigma^2 \Delta t_i + \frac{1}{2} \sigma^2 \Delta W_i^2)$$

Dans le cas du modèle d'Heston, la volatilité du cours de l'actif sous-jacent varie en fonction du temps. Sous le schéma de Milstein, elle suit l'équation suivante:

$$v_{t_{i+1}} = v_{t_i} + \kappa(\theta - v_{t_i}) \Delta t_i + \xi \sqrt{v_{t_i}} \Delta W_i + \frac{1}{4} \xi^2 (\Delta W_i^2 - \Delta t_i)$$

L'évolution du prix de l'actif sous-jacent suit alors le schéma numérique suivant :

$$S_{t_{i+1}} = S_{t_i} \left( 1 + r \Delta t_i + \sqrt{v_{t_i}} \Delta W_i - \frac{1}{4} S_{t_i} \Delta t_i + \frac{1}{4} S_{t_i} \Delta W_i^2 \right)$$

### III.3 Comparaison des résultats

MLMC Milstein Option européenne	MC Milstein Option européenne
$O(n^2)$	$O(n^3)$

Tableau 6 - Complexité temporelle selon le nombre  $n$  d'échantillons

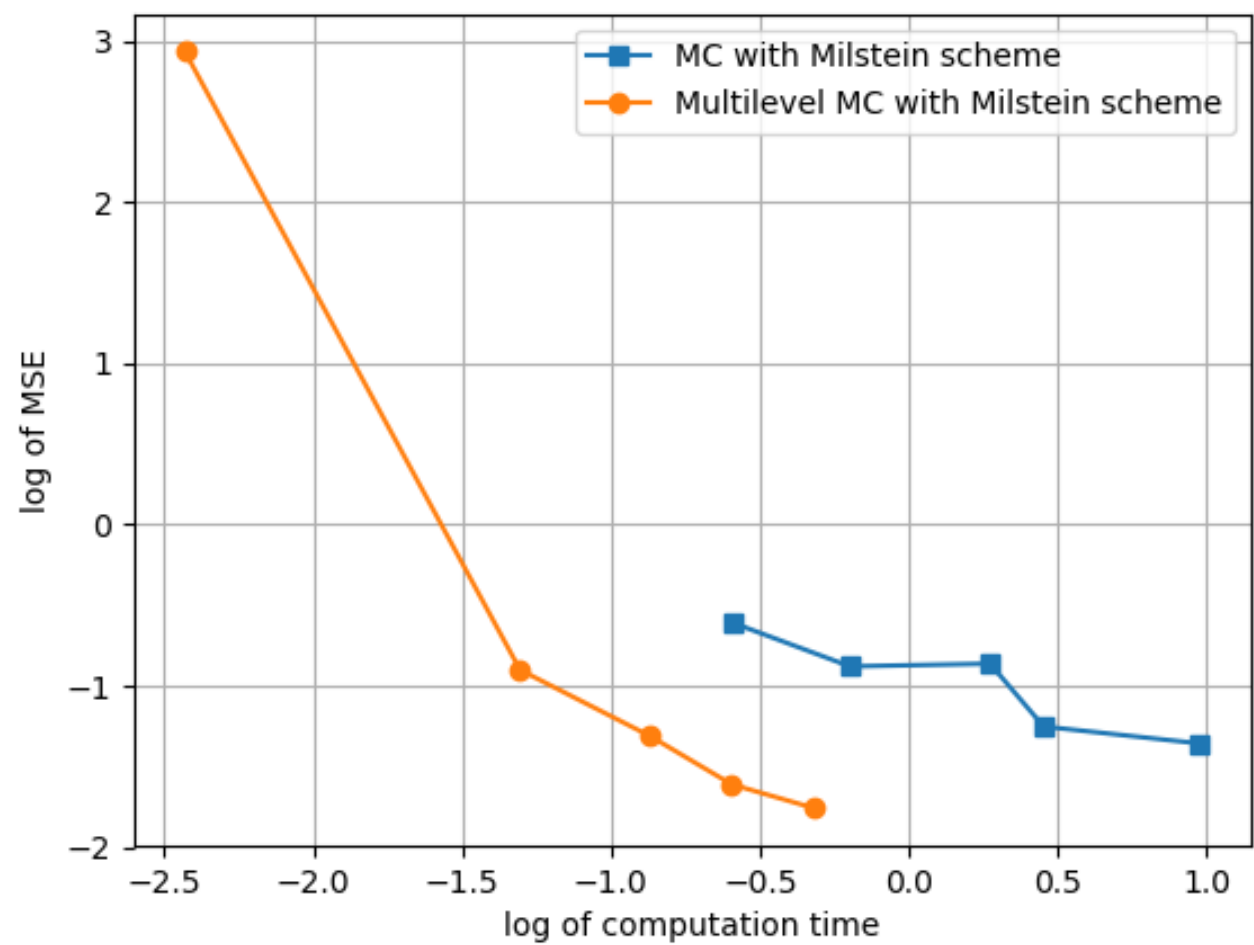


Figure 7- Évolution de l'erreur quadratique en fonction du temps de calcul (bleu: Monte-Carlo classique, orange: Multilevel Monte-Carlo)

Temps de calcul (en s)	1.28	2.3
Ratio	3.48	3.55

Tableau 7 - Comparaison de l'erreur quadratique des deux méthodes

### Bibliographie.

*Multilevel Monte Carlo Path Simulation*, 2008, Micheal B. Giles.

*Central Limit Theorem for the Multilevel Monte Carlo Euler method*, 2013, Mohamed Ben Alaya & Ahmed Kebaier.

*Multilevel Monte Carlo Simulation in Options Pricing*, 2014, Funmilayo Eniola Kazeem.