CONTINUITÉ

1)continuité en un point :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$:

si $\lim_{a} f(x) = f(a)$:

Donc f est continue en a.

si $\lim_{a^+} f(x) = f(a)$:

Donc f est continue à droite en a.

si $\lim_{a^-} f(x) = f(a)$:

Donc f est continue à gauche en a.

2) continuité en un intervalle:

- *Fonction polynôme toujours continue sur $\mathbb{R}$.*
- *Fonction rationnelle toujours continue sur son domaine définition.*
- *Fonction est continue sur D alors elle est continue en tous partie I de D.*
- *$\sqrt{f}$ est continue sur D si f continue sur D et $f \geq 0$ sur D.*
- *Si f et g continue sur D alors :*
  $f + g, f \times g$ et $|f|$ Continue sur D.
- *$\frac{f}{g}$ Continue sur D si f continue sur D, g continue sur D et g non nul sur D.*

Si f fonction définie sur $\mathbb{R}/\{a\}$ et si $\lim_{a} f = l$:

Donc f est prolongeable par continuité en 1

Sa prolongement est $g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq a \\ l \text{ si } x = 1 \end{cases}$

3)image d'un intervalle par une fonction continue :

Si f continue sur [a b] :

$f([a\ b]) = [\min\ max]$

Si f continue croissante :

$f([a\ b]) = [f(a)\ f(b)]$ $f([a\ b[) = [f(a)\ \lim_{b^-} f]$

$f(]a\ b]) = [\lim_{a^+} f\ f(b)]$ $f(]a\ b[) = [\lim_{a^+} f\ \lim_{b^-} f)]$

Si f continue décroissante :

$f([a\ b]) = [f(b)\ f(a)]$ $f([a\ b[) = [\lim_{b^-} f\ \ f(a)]$

$f(]a\ b]) = [f(b)\ \lim_{a^+} f]$ $f(]a\ b[) = [\lim_{b^-} f\ \lim_{a^+} f)]$

Si k comprise entre f(a) et f(b):
il existe au moins un réel $C \in [a\ b]$ telque $f(C) = k$ autrement dit :
l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution $C \in [a\ b]$.
Si f est monotone :
$f(x) = k$ admet une unique solution.

Si $f(a).f(b) < 0$:
L'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution $C \in [a\ b]$.
Si f est monotone :
$f(x) = 0$ admet une unique solution.

4)fonction réciproque :

Tout fonction strictement monotone sur I réalise une bijection de I sur $J = f(I)$.
***Fonction réciproque :** $f(x) = y \leftrightarrow f^{-1}(y) = x$.*

Si f est bijection et f et f^{-1} on même variation :
C_f et $C_{f^{-1}}$ *sont symétrique par rapport* $\Delta: y = x$