Système d'équation linéaire

Matrice :

$$M = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2p} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{\mathbf{n}3} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

M *est une matrice d'ordre* $n \times p$.
n *le nombre des lignes et* ***p*** *le nombre des colonne.*
M est une matrice carre d'ordre n ssi n = p.

Si ***n = 1 M*** *s'appelle une vecteur ligne d'ordre* ***p****.*
Si ***p = 1 M*** *s'appelle une vecteur colonne d'ordre* ***n****.*
Une matrice carre avec $a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$ *s'appelle matrice diagonale et si les* $a_{ii} = 1$ *s'appelle matrice unité.*

Opération sur les matrices :

Addition : soit A et B deux matrice :
C = A+B n'existe pas si :
$n_A \times p_A \neq n_B \times p_B$.
Si $A = (a_{ij})$ *et* $B = (b_{ij})$ *de même ordre :*
$C = (a_{ij} + b_{ij})$.
Example : $C = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$.
$A + B = B + A$.
$A + B + C = (A + B) + C$
$\qquad\qquad = A + (B + C)$.

Produite réel :
Soit $A = (a_{ij})$ *et α un réel.*
$C = \alpha A = \alpha(a_{ij})$.
Example :$C = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix}$.

Multiplication de deux matrices :
C = AB n'existe pas si $p_A \neq n_B$.
Si $A = (a_{ij})$ $d'ordre\ n \times p$ *et*
$B = (b_{ij})$ $d'ordre\ p \times m$:
C = AB d'ordre $n \times m$.

Soit $A(a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \cdots \quad a_p)$ *et* $B \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$:

$AB = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \cdots + a_p b_p)$.

Soit $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ **et** $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

$AB \neq BA$
$A \times B \times C = (A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
$A(B + C) = AB + AC$
$A^2 = A \times A$.

$A^n = A \times A \times A \times \cdots \times A_n$
Soit M matrice carré d'ordre n et I_n *l'identité on a:*
$AI_n = I_n A = A$.

Déterminant d'une matrice carre d'ordre 2 ou 3 :

Matrice d'ordre 2 :

Soit $A\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb.$

Matrice d'ordre 3 :

Soit $A\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$.

$\det(A) = a\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix}$

Inverse d'une matrice carre d'ordre 2 ou 3 :

On général :

A et B inverse ssi $A \times B = I_n = B \times A$.

L'inverse de A est note $\boldsymbol{A^{-1}}$.

donc $A^{-1} \times A = A \times A^{-1} = I_n$.

A est inversible ssi $\det(A) \neq 0$.

$A \times B = I_n \leftrightarrow A^{-1} = B$.

$AB = \alpha I_n \leftrightarrow A^{-1} = \frac{1}{\alpha} B \quad \alpha \in \mathbb{R}$.

Matrice d'ordre 2 :

Si $A\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *avec* $\det(A) \neq 0$ *:*

On a $\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{det}\,(A)}\begin{pmatrix} \boldsymbol{d} & \boldsymbol{-b} \\ \boldsymbol{-c} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$.

Matrice d'ordre 3 :

Si $A\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ *avec* $\det(A) \neq 0$ **:**

On a $\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{det}(A)}\, \boldsymbol{t(com(A))}$ ***avec :***

$\boldsymbol{com(A)(comatrice\ de\ A)\ est}$:

$$com(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ b'' & c'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ a'' & c'' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ a'' & b'' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

le transposé noté t(A) ou $\boldsymbol{A^t}$ ***:***

$A\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$.

Système d'équation linéaire :

Système de deux équations à deux inconnus :

Soit $S\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

L'écriture matricielle de S est :

$\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$

$\rightarrow A \times X = C$

avec $A\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}, X\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, C\begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$.

Si A inversible et on a $\boldsymbol{X = A^{-1}C}$

Système de 3 équations à 3 inconnus :

Soit $S\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$

L'écriture matricielle de S est :

$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ d' \\ d'' \end{pmatrix}$

$\rightarrow A \times X = C$

avec $A\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}, X\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, C\begin{pmatrix} d \\ d' \\ d'' \end{pmatrix}$.

Si A inversible et on a $\boldsymbol{X = A^{-1}C}$.

Système de cramer :

Système de deux équations à deux inconnus :

Soit S $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ *et*

$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$

Si $\Delta \neq 0$ *S admet une unique solution :*

Soit $\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b$ *et*

$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$

Et on a $\begin{cases} \boldsymbol{x} = \frac{\Delta_x}{\Delta} \\ \boldsymbol{y} = \frac{\Delta_y}{\Delta} \end{cases}$

Si $\Delta = 0$ *et* $\Delta_{\boldsymbol{x}} \neq \boldsymbol{0}$:

$n'est\ pas\ de\ solution.$

Si $\Delta = 0$ *et* $\Delta_{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}$:

Infinité de solution.

Système de 3 équations à 3 inconnus :

Soit S $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$ *et*

$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$ *et* $\Delta_x = \begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$ *et*

$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix}$ *et* $\Delta_z = \begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}$.

Si $\Delta \neq 0$ *:*

$$\begin{cases} x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} \end{cases}$$

Si $\Delta = 0$ *et* $\Delta_{\boldsymbol{x}} \neq \boldsymbol{0}$:

$n'est\ pas\ de\ solution$**.**

Si $\Delta = 0$ *et* $\Delta_{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}$ *et* $\Delta_{\boldsymbol{y}} \neq \boldsymbol{0}$:

$n'est\ pas\ de\ solution$**.**

Si $\Delta = 0$ *et* $\Delta_{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}$ *et* $\Delta_{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{0}$:

Infinité de solution.