

Metode Penugasan (Assignment)

Pertemuan 9 dan 10

1. Pendahuluan

Masalah penugasan (assignment) merupakan kasus khusus dari masalah transportasi, dimana setiap sumber dan setiap tujuan hanya memiliki 1 unit barang. Ini berarti setiap sumber hanya bisa mengalokasikan barang itu ke satu tujuan saja.

Kasus penugasan lebih mudah dipahami dengan mengandaikannya sebagai sejumlah pekerjaan (sumber) yang akan didistribusikan ke sejumlah pekerja (tujuan). Masing-masing pekerja dapat mengerjakan semua jenis pekerjaan tetapi dengan bobot (upah, waktu, dll) yang berbeda. Masalah yang dihadapi adalah bagaimana mendistribusikan ke pekerja sehingga total bobotnya minimum.

2. Penyelesaian Masalah Penugasan

Masalah penugasan m pekerja ke n buah pekerjaan dapat dinyatakan sebagai masalah program linear sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \text{Meminimumkan} \quad & Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} \cdot X_{ij} \\ \text{Kendala} \quad & \sum_{j=1}^n X_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & \sum_{i=1}^m X_{ij} = 1 \quad j = 1, 2, \dots, n \\ & X_{ij} = 0 \text{ atau } 1, i = 1, 2, \dots, m ; j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Masalah penugasan juga dapat diselesaikan dengan metode transportasi. Untuk itu paling sedikit harus ditambahkan $(m-1)$ buah variabel semu. Permasalahannya adalah jumlah perhitungan yang harus dilakukan relatif banyak untuk setiap iterasinya. Algoritma lain yang lebih sederhana dan sering dipakai adalah algoritma Hungarian.

Prinsip dasar algoritma Hungarian sama dengan metode transportasi, yaitu:

1. Tentukan penyelesaian fisibel awal
2. Uji optimalisasinya, jika sudah optimal, proses dihentikan. Jika belum optimal, lakukan langkah 3
3. Revisi tabel untuk meningkatkan optimalitas. Kembali ke langkah 2.

1. Menentukan Penyelesaian Fisibel awal

Algoritma untuk membuat penyelesaian fisibel awal adalah sebagai berikut :

1. Dalam setiap baris, tentukan sel yang bobotnya terkecil. Kurangkan seluruh sel pada baris tersebut dengan sel yang bobotnya terkecil. Ulangi langkah 1 untuk setiap kolom.
2. Dengan menyelesaikan langkah 1- 2 maka setiap baris dan setiap kolom tabel pasti tidak ada yang negatif dan memuat paling sedikit sebuah nol. Elemen nol inilah yang merupakan variabel basis.

2. Uji Optimalitas

Tutup semua variabel basis (nol) dalam penyelesaian fisibel awal dengan kombinasi garis horizontal dan vertikal sesedikit mungkin. Jika tabel terdiri dari n baris dan n kolom maka paling banyak akan dibutuhkan n garis. Jika garis yang dibutuhkan untuk menutup semua nol dalam tabel $< n$, maka tabel belum optimal dan harus direvisi.

3. Merevisi Tabel

Perhatikan sel-sel tabel hasil uji optimalitas. Ada 3 jenis sel :

1. Jenis pertama adalah sel yang tidak tertutup garis. Semua sel tersebut pasti bernilai positif
 2. Jenis kedua adalah sel tertutup dengan sebuah garis, dan
 3. Jenis ketiga sel yang tertutup oleh perpotongan 2 buah garis horizontal dan vertikal
- Sel jenis kedua dan ketiga pasti mengandung nol.

Dalam merevisi tabel, sel yang berpengaruh dan nilainya harus direvisi adalah **sel jenis pertama** dan **ketiga**. Revisi dilakukan dengan menambah variabel basis (nol) dari jenis pertama dan kalau perlu mengurangi variabel basis dari sel jenis ketiga.

Algoritma untuk merevisi tabel adalah sebagai berikut:

1. Tentukan sel yang tidak tertutup garis dengan bobot terkecil. Misal bobotnya adalah c .
2. Kurangi setiap sel yang tidak tertutup garis dengan c
3. Tambahkan setiap sel yang tertutup 2 garis dengan c

Perhatikan bahwa dalam langkah 2 pasti terjadi penambahan sel yang berbobot nol, tetapi belum tentu ada sel yang tertutup oleh 2 garis yang bernilai nol. Oleh sebab itu belum tentu ada pengurangan basis dalam langkah 3

3. Merevisi Tabel.....(2)

Lakukan langkah pengujian dan revisi berulang-ulang hingga tabel optimal. Alokasi optimal ditunjukkan dengan elemen 0 pada tabel optimal

Untuk menentukan alokasi optimal, lakukan langkah-langkah berikut :

- 1. Carilah baris/kolom yang hanya memuat sebuah nol kemudian ambillah sel tersebut sebagai alokasi optimalnya.**
- 2. Hapuslah baris dan kolom yang sesuai dengan sel terpilih tersebut.**
- 3. Ulangi langkah 1-2 untuk elemen 0 lainnya hingga semua baris/kolom dialokasikan.**

Contoh

Seorang pelatih renang memiliki 4 orang perenang yang akan diterjunkan dalam lomba 400 meter gaya ganti perseorangan. Semua perenang dapat berenang dalam setiap gaya.. Waktu (dalam detik) yang dibutuhkan perenang dengan gaya yang ditentukan tampak pada tabel berikut. Tentukan alokasi gaya yg harus diberikan pelatih pada tiap perenang agar total waktunya minimum

Perenang	Punggung	Dada	Kupu2	Bebas
1	65	73	62	57
2	67	70	65	58
3	68	72	69	55
4	71	69	75	57

□ Menentukan Penyelesaian fisibel awal

	P	D	K	B
1	65	73	62	57
2	67	70	65	58
3	68	72	69	55
4	71	69	75	57

Tabel awal

	P	D	K	B
1	8	16	5	0
2	9	12	7	0
3	13	17	14	0
4	14	12	18	0

kurangkan tiap
baris dengan
elemen terkecil

	P	D	K	B
1	0	4	0	0
2	1	0	2	0
3	5	5	9	0
4	6	0	13	0

kurangkan tiap
kolom dengan
elemen terkecil

❖ Pengujian Optimalitas

Cek optimalitas : Tutup semua 0 dengan garis sesedikit mungkin

	P	D	K	B
1	0	4	0	0
2	1	0	2	0
3	5	5	9	0
4	6	0	13	0

Belum optimal karena hanya perlu 3 garis □ Revisi Tabel !!

Pilih Sel terkecil yg tidak tertutup garis = 1
Sel tidak tertutup garis □ dikurangi

Sel tertutup 2 garis □ ditambahi
Sel tertutup 1 garis □ tetap

	P	D	K	B
1	0	5	0	1
2	0	0	1	0
3	4	5	8	0
4	5	0	12	0

Jadi alokasi optimalnya adalah

- Perenang 1, gaya kupu2 (62 dtk)
- Perenang 2, gaya punggung (67dtk)
- Perenang 3, gaya bebas (55 dtk)
- Perenang 4, gaya dada (69 dtk)
- **Total = 253 detik**

Optimal !!



Fungsi Maksimumkan

Untuk menyelesaikan fungsi yang memaksimumkan dalam masalah penugasan, soal terlebih dahulu dijadikan fungsi meminimumkan dengan menegatifkan semua biaya. Setelah menjadi masalah meminimumkan, langkah selanjutnya adalah sama

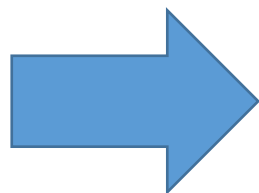
Contoh

Sekelompok mahasiswa yang terdiri dari 4 pria dan 4 wanita merencanakan suatu rekreasi bersama. Tingkat kebahagiaan antara pria ke- i dan wanita ke- j jika mereka berpacaran dinyatakan dalam tabel sebagai berikut : (data diambil dari sifat-sifat mereka)

	wanita			
	1	2	3	4
Pria	1	2	3	4
1	11	1	5	8
2	9	9	8	1
3	10	3	5	10
4	1	13	12	11

Masalah yang dihadapi adalah menentukan pasangan pria dan wanita selama rekreasi agar memaksimumkan jumlah total kebahagiaan semua pasangan.

		wanita			
		1	2	3	4
Pria	1	-11	-1	-5	-8
	2	-9	-9	-8	-1
	3	-10	-3	-5	-10
	4	-1	-13	-12	-11



		wanita			
		1	2	3	4
Pria	1	0	10	6	3
	2	0	0	1	8
	3	0	7	5	0
	4	12	0	1	2

		wanita			
		1	2	3	4
Pria	1	0	10	5	3
	2	0	0	0	8
	3	0	7	4	0
	4	12	0	0	2

Pasangan yang diasosiasikan secara tunggal adalah pria-3 dan wanita-4 (dengan kebahagiaan 10) dan pria-1 dan wanita-1 (kebahagiaan 11).

Jika baris-1, baris-3 dan kolom-1, dan kolom-4 dihilangkan tampak bahwa ada 2 alternatif penyelesaian;

- Alternatif-1 : pria-2 dengan wanita 2 (kebahagiaan =9) dan pria-4 dengan wanita -3 (kebahagiaan =12).
- Alternatif 2 : pria-2 dengan wanita-3 (kebahagiaan=8) dan pria 4 dengan wanita-2 (kebahagiaan=13)

Untuk semua alternatif tersebut, total kebahagiaan = 42



Kasus Tidak Seimbang

Kasus tidak seimbang terjadi jika jumlah pekerja tidak sama dengan jumlah pekerjaan.

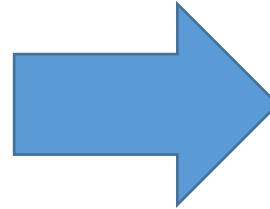
Sebelum menggunakan algoritma penugasan, soal harus terlebih dahulu diseimbangkan dengan menambahkan sejumlah pekerja atau pekerjaan semu (mana yang lebih sedikit) hingga menjadi seimbang. **Biaya pada sel semu = 0**

Contoh :

Tabel dibawah menunjukkan biaya yang harus dikeluarkan suatu perusahaan untuk mengalokasikan 4 orang pekerja pada 3 buah pekerjaan berbeda. Masing-masing pekerja bisa melakukan semua pekerjaan tersebut tetapi dengan biaya yang berbeda-beda. Carilah siapa yang harus melakukan tiap-tiap pekerjaan untuk meminimumkan biaya keseluruhan.

	Pekerjaan		
	1	2	3
Pekerja			
1	7	3	5
2	2	2	1
3	6	5	3
4	3	4	7

		Pekerjaan			
		1	2	3	4*
Pekerja	1	7	3	5	0
	2	2	2	1	0
	3	6	5	3	0
	4	3	4	7	0



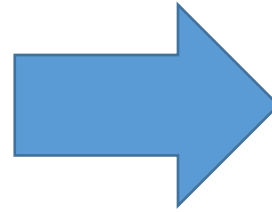
		Pekerjaan			
		1	2	3	4*
Pekerja	1	5	1	4	0
	2	0	0	0	0
	3	4	3	2	0
	4	1	2	6	0

Karena jumlah pekerja lebih banyak dari jumlah pekerjaan, tambahkan sebuah pekerjaan semu (pekerjaan-4) sehingga soal menjadi seimbang. Biaya pekerjaan-4 untuk semua pekerja = 0

Berikutnya algoritma penugasan dapat diterapkan. Elemen terkecil dalam baris = 0. maka pengurangan elemen terkecil tiap baris tidak menghasilkan perubahan tabel

kurangkan tiap kolom dengan
elemen terkecil

		Pekerjaan			
		1	2	3	4*
Pekerja	1	5	1	4	0
	2	0	0	0	0
	3	4	3	2	0
	4	1	2	6	0



		Pekerjaan			
		1	2	3	4*
Pekerja	1	4	0	3	0
	2	0	0	0	1
	3	3	2	1	0
	4	0	1	5	0

Uji optimalitas dilakukan dengan menutup semua nol. Jelas hanya dibutuhkan 2 garis, maka tabel harus direvisi

Elemen yang tidak tertutup garis yang terkecil adalah = 1, maka :

elemen **tidak tertutup garis dikurangkan** dengan 1, dan elemen yang **tertutup 2 garis tambahkan** dengan 1

		Pekerjaan			
		1	2	3	4*
Pekerja	1	4	0	3	0
	2	0	0	0	1
	3	3	2	1	0
	4	0	1	5	0

Elemen 0 yang tunggal terdapat pada kolom 3 (X23) dan baris 3 (X34), oleh karena itu **kedua sel ini dipilih**.
Baris 2 dan kolom 3 (karena X23 dipilih) serta baris 3 dan kolom 4 (karena X34 dipilih) dihilangkan dari proses.

Dari sisa nol yang belum diarsir jelas bahwa alokasi yang dipilih adalah sel X12 dan X41.

Jadi alokasi optimalnya adalah

Pekerja -1 mengerjakan pekerjaan -2 (biaya=3)

Pekerja -2 mengerjakan pekerjaan -3 (biaya -1)

Pekerja -3 tidak mendapatkan pekerjaan (karena pekerjaan semu)

Pekerja – 4 mengerjakan pekerjaan – 1 (biaya =3)

Total biaya = 3+1+3 =7

Terimakasih