

Transportasi Solusi Optimal

Pertemuan 7

1. Metode Batu Loncatan (Stepping Stone Method)

Kita anggap bahwa pemecahan fisibel yang pertama sudah diperoleh. Kemudian kotak yang terisi kita sebut kotak basis, nilainya kita beri tanda buka dan tutup seperti (X_{ij}) , kalau baris i dan kolom j terisi.

Kotak yang tidak terisi kita sebut kotak bukan basis (nonbasis cell). Ingat, semua kotak memuat biaya angkut per unit barang sebesar C_{ij} kalau 1 unit barang diangkut dari tempat asal A_i ke tempat tujuan T_j .

S_i = Suplai atau persediaan di A_i

d_j = Permintaan barang dari T_j

$$Z = \sum C_{ij} \cdot X_{ij}$$

Contoh

Semen diangkut dari 3 pabrik yang berlokasi di A1, A2, dan A3. Ke 4 lokasi proyek yang memang membutuhkan semen. Pabrik 1,2, dan 3 masing-masing menghasilkan semen sebanyak 6 ribu ton, 8 ribu ton dan 10 ribu ton. Lokasi proyek 1,2, 3, dan 4 masing-masing minta semen sebanyak 4 ribu ton, 6 ribu ton dan 6 ribu ton. Biaya angkut dalam ratusan ribu rupiah dapat dilihat dalam tabel berikut

S \ T	T1	T2	T3	T4	S
A1	1	2	3	4	6
A2	4	3	2	0	8
A3	0	2	2	1	10
d	4	6	8	6	24

Pemecahan fisibel yang pertama dengan menggunakan NWCR (Metode Barat Laut)

	T1	T2	T3	T4	S
A1	1 4	2 2	3	4	6
A2	4	3 4	2 4	0	8
A3	0	2	2 4	1 6	10
d	4	6	8	6	24

$$\begin{aligned}
 Z1 &= C11.X11 + C12.X12 + C22.X22 + C23.X23 + C33.X33 + C34.X34 \\
 &= 1(4) + 2(2) + 3(4) + 2(4) + 2(4) + 1(6) \\
 &= 4 + 4 + 12 + 8 + 8 + 6 = 42
 \end{aligned}$$

Apakah Z1, sudah minimum?

Untuk menjawab ini harus kita hitung semua nilai **$Z_{ij} - C_{ij}$** sebagai uji optimalitas untuk **cell atau kotak bukan basis**, kalau ternyata semua nilai **$Z_{ij} - C_{ij} \leq 0$** , maka pemecahan sudah minimum , kalau tidak maka pemecahan dilanjutkan sampai semua **$Z_{ij} - C_{ij} \leq 0$**

Nilai $Z_{ij} - C_{ij}$ merupakan besarnya penurunan biaya angkut yang terjadi kalau ada 1 unit diangkut dari A_i ke T_j , disebut index perbaikan (improvement index). Cara menghitung $Z_{ij} - C_{ij}$ kita harus membuat jalur atau lintasan tertutup (closed loop) mulai dari kotak nonbasis yang akan dihitung nilai ($Z_{ij} - C_{ij}$) nya.

Penarikan garis lurus bisa menurut baris (horizontal) atau menurut kolom (vertikal). Menurut baris, bisa bergerak ke kiri atau ke kanan, sedangkan kalau menurut kolom bisa bergerak ke atas atau kebawah.

Dalam proses penarikan garis lurus dilakukan penjumlahan (+) dan pengurangan (-) **biaya dari cell** yang dilalui garis lurus, dimulai dengan (+) diakhiri dengan (-).

Dari suatu kotak nonbasis (i,j) ditarik garis lurus ke kotak basis yang terdekat (dari baris atau kolom yang sama), dengan syarat bahwa kotak yang dihubungi mempunyai pasangan (partner) di kolom /baris yang sama. Kalau tidak, harus dilewati atau diloncati, maksudnya agar garis bisa disambung, kemudian dapat kembali ke tempat asal atau semula dengan meninggalkan cell basis terdekat.

	T1	T2	T3	T4	S
A1	1	2	3	4	6
A2	4	3	2	0	8
A3	0	2	2	1	10
d	4	6	8	6	24

	T1	T2	T3	T4	S
A1	1	2	3	4	6
A2	4	3	2	0	8
A3	0	2	2	1	10
d	4	6	8	6	24

$$\begin{aligned}
 Z_{31}-C_{31} &= C_{33}-C_{23}+C_{22}-C_{12}+C_{11}-C_{31} \\
 &= 2-2+3-2+1-0 = \mathbf{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z_{32}-C_{32} &= C_{33}-C_{23}+C_{22}-C_{32} \\
 &= 2-2+3-2 = \mathbf{1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z_{21}-C_{21} &= C_{22}-C_{12}+C_{11}-C_{21} \\
 &= 3-2+1-4 = \mathbf{-2}
 \end{aligned}$$

	T1	T2	T3	T4	S
A1	1 4	2 2	3 *	4 *	6
A2	4	3 4	2 4	0 *	8
A3	0	2	2 4	1 6	10
d	4	6	8	6	24

$$\begin{aligned}
 Z_{13} - C_{13} &= C_{12} - C_{22} + C_{23} - C_{13} \\
 &= 2 - 3 + 2 - 3 = -2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z_{14} - C_{14} &= C_{12} - C_{22} + C_{23} - C_{33} + C_{34} - C_{14} \\
 &= 2 - 3 + 2 - 2 + 1 - 4 = -4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z_{24} - C_{24} &= C_{23} - C_{33} + C_{34} - C_{24} \\
 &= 2 - 2 + 1 - 0 = -1
 \end{aligned}$$

Ternyata tidak semua nilai $Z_{ij} - C_{ij} \leq 0$, masih ada yang positif dan lebih besar dari 0, jadi pemecahan belum optimum.

Sekarang kita harus memilih kotak yang harus masuk basis sehingga terisi (memuat nilai) dan kotak yang keluar atau meninggalkan basis.

Kriterianya sebagai berikut :

- Kotak dengan nilai $Z_{ij} - C_{ij}$ positif terbesar harus masuk basis, kalau ada lebih dari satu kotak pilih saja salah satu secara sembarang

$$\begin{aligned} Z_{31} - C_{31} &= C_{33} - C_{23} + C_{22} - C_{12} + C_{11} - C_{31} \\ &= 2 - 2 + 3 - 2 + 1 - 0 = \mathbf{2} \end{aligned}$$



Pilih ini karena positif terbesar

$$\begin{aligned} Z_{32} - C_{32} &= C_{33} - C_{23} + C_{22} - C_{32} \\ &= 2 - 2 + 3 - 2 = \mathbf{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{21} - C_{21} &= C_{22} - C_{12} + C_{11} - C_{21} \\ &= 3 - 2 + 1 - 4 = \mathbf{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{13} - C_{13} &= C_{12} - C_{22} + C_{23} - C_{13} \\ &= 2 - 3 + 2 - 3 = \mathbf{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{14} - C_{14} &= C_{12} - C_{22} + C_{23} - C_{33} + C_{34} - C_{14} \\ &= 2 - 3 + 2 - 2 + 1 - 4 = \mathbf{-4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{24} - C_{24} &= C_{23} - C_{33} + C_{34} - C_{24} \\ &= 2 - 2 + 1 - 0 = \mathbf{-1} \end{aligned}$$

- **Cara menentukan kotak yang keluar basis:**

- tulis kembali cara memperoleh nilai $Z_{ij} - C_{ij}$ terbesar

$$\begin{aligned} Z_{31} - C_{31} &= C_{33} - C_{23} + C_{22} - C_{12} + C_{11} - C_{31} \\ &= 2 - 2 + 3 - 2 + 1 - 0 = 2 \end{aligned}$$

- Perhatikan biaya dengan tanda (+)

(+) : C_{33} , C_{22} , C_{11} dengan variabel X_{33} , X_{22} , X_{11}

- Dari variabel2 (+) diatas cari yang nilainya terkecil, kotak dengan **nilai variabel terkecil** ini yang harus keluar dari basis.

$$\text{Min } (X_{33}, X_{22}, X_{11}) = (4, 4, 4)$$

Semua nilai sama, pilih salah satu misalnya $X_{11} = 4$.

Kotak yang masuk basis adalah kotak (3,1) dengan variabel X_{31} . Nilai variabel ini sama dengan nilai minimum yang dipilih ,yaitu **$X_{31} = X_{11} = 4$**

Nilai variabel dari cell lainnya yang terlibat dalam pembentukan jalur/lintas (loop) diperoleh dengan aturan sebagai berikut:

1. Kalau tanda biaya (+) \Rightarrow nilai variabel baru = nilai variabel lama – nilai minimum
2. Kalau tanda biaya (-) \Rightarrow nilai variabel baru = nilai variabel lama + nilai minimum

Nilai dari kotak lainnya yang tidak terlibat dalam pembentukan jalur atau lintasan tidak mengalami perubahan (tetap)

Jadi :

$$Z_{31} - C_{31} = \boxed{C_{33}} - \boxed{C_{23}} + \boxed{C_{22}} - \boxed{C_{12}} + \boxed{C_{11}} - C_{31}$$

$$\boxed{X_{33}} = X_{33} - 4 = 4 - 4 = 0$$

$$\boxed{X_{23}} = X_{23} + 4 = 4 + 4 = 8$$

$$\boxed{X_{22}} = X_{22} - 4 = 4 - 4 = 0$$

$$\boxed{X_{12}} = X_{12} + 4 = 2 + 4 = 6$$

$$\boxed{X_{11}} = X_{11} - 4 = 4 - 4 = 0 \Rightarrow \text{keluar basis, tidak perlu ditulis}$$

	T1	T2	T3	T4	S
A1	<div>1</div>	<div>2</div> 6	<div>3</div>	<div>4</div>	6
A2	<div>4</div>	<div>3</div> 0	<div>2</div> 8	<div>0</div>	8
A3	<div>0</div> 4	<div>2</div>	<div>2</div> 0	<div>1</div> 6	10
d	4	6	8	6	24

	T1	T2	T3	T4	S
A1	1	2	3	4	6
A2	4	3	2	0	8
A3	0	2	2	1	10
d	4	6	8	6	24

$$Z_{11} - C_{11} = C_{31} - C_{33} + C_{23} - C_{22} + C_{12} - C_{11}$$

$$= 0 - 2 + 2 - 3 + 2 - 1 = -2$$

$$Z_{13} - C_{13} = C_{12} - C_{22} + C_{23} - C_{13}$$

$$= 2 - 3 + 2 - 3 = -2$$

$$Z_{14} - C_{14} = C_{12} - C_{22} + C_{23} - C_{33} + C_{34} - C_{14}$$

$$= 2 - 3 + 2 - 3 + 1 - 4 = -4$$

$$Z_{21} - C_{21} = C_{31} - C_{33} + C_{23} - C_{21}$$

$$= 0 - 2 + 2 - 4 = -4$$

$$Z_{24} - C_{24} = C_{23} - C_{33} + C_{34} - C_{24}$$

$$= 2 - 2 + 1 - 0 = 1$$

$$Z_{32} - C_{32} = C_{33} - C_{23} + C_{22} - C_{32}$$

$$= 2 - 2 + 3 - 2 = 1$$

Masih terdapat 2 kotak yang bernilai positif yaitu kotak (3,2) dan (2,4).

Disini pilih yang (2,4) yang masuk basis.
Cari Min (X_{23}, X_{34}) = (8,6) → pilih yang minimum **(6)** dan harus keluar basis

$$X_{23} = X_{23} - 6 = 8 - 6 = 2$$

$$X_{33} = X_{33} + 6 = 0 + 6 = 6$$

	T1	T2	T3	T4	S
A1	<div>1</div> *	<div>2</div> 6	<div>3</div> *	<div>4</div> *	6
A2	<div>4</div> *	<div>3</div> 0	<div>2</div> 2	<div>0</div> 6	8
A3	<div>0</div> 4	<div>2</div> *	<div>2</div> 6	<div>1</div> *	10
d	4	6	8	6	24

$$Z_{11} - C_{11} = C_{31} - C_{33} + C_{23} - C_{22} + C_{12} - C_{11}$$

$$= 0 - 2 + 2 - 3 + 2 - 1 = -2$$

$$Z_{13} - C_{13} = C_{12} - C_{22} + C_{23} - C_{13}$$

$$= 2 - 3 + 2 - 3 = -2$$

$$Z_{14} - C_{14} = C_{12} - C_{22} + C_{24} - C_{14}$$

$$= 2 - 3 + 0 - 4 = -5$$

$$Z_{21} - C_{21} = C_{31} - C_{33} + C_{23} - C_{21}$$

$$= 0 - 2 + 2 - 4 = -4$$

$$Z_{32} - C_{32} = C_{33} - C_{23} + C_{22} - C_{32}$$

$$= 2 - 2 + 3 - 2 = 1$$

$$Z_{34} - C_{34} = C_{24} - C_{23} + C_{33} - C_{34}$$

$$= 0 - 2 + 2 - 1 = -1$$

Ternyata masih ada satu kotak dengan nilai $Z_{ij} - C_{ij}$ positif yaitu kotak (3,2) ? berarti kotak ini harus masuk basis.

Cari Min $(X_{33}, X_{22}) = (6, 0)$? pilih yang minimum **(0)** dan harus keluar basis

$$X_{33} = X_{33} - 0 = 6 - 0 = 6$$

$$X_{23} = X_{23} + 0 = 2 + 0 = 2$$

$$X_{22} = X_{22} - 0 = 0 - 0 = 0 \text{ ? keluar basis, tidak perlu ditulis}$$

	T1	T2	T3	T4	S
A1	1	2 6	3	4	6
A2	4	3	2 2	0 6	8
A3	0 4	2 0	2 6	1	10
d	4	6	8	6	24

$$Z_{22} - C_{22} = C_{32} - C_{33} + C_{23} - C_{22} = 2-2 + 2-3 = -1$$

$$Z_{34} - C_{34} = C_{24} - C_{23} + C_{33} - C_{34} = 0-2 + 2-1 = -1$$

Karena semua nilai **Zij – Cij ≤ 0**, maka pemecahan sudah optimum berarti jumlah biaya angkutan sudah minimum

$$Z_{11} - C_{11} = C_{31} - C_{32} + C_{12} - C_{11} = 0-2 + 2-1 = -1$$

$$Z_{13} - C_{13} = C_{12} - C_{32} + C_{33} - C_{13} = 2-2 + 2-3 = -1$$

$$Z_{13} - C_{13} = C_{12} - C_{32} + C_{33} - C_{13} = 2-2 + 2-3 = -1$$

$$\begin{aligned} Z_{14} - C_{14} &= C_{12} - C_{32} + C_{33} - C_{23} + C_{24} - C_{14} \\ &= 2-2 + 2-2 + 0 - 4 = -4 \end{aligned}$$

$$Z_{21} - C_{21} = C_{31} - C_{33} + C_{23} - C_{21} = 0-2 + 2-4 = -4$$

Dari Tabel 1

$$\begin{aligned} Z_{\min} = \mathbf{Z1} &= C11. X11 + C12.X12 + C22.X22 + C23.X23 + C33.X33 + C34.X34 \\ &= 1(4) + 2(2) + 3(4) + 2(4) + 2(4) + 1(6) = 42 \text{ ? alternatif 1} \end{aligned}$$

Dari Tabel 2

$$\begin{aligned} Z_{\min} = \mathbf{Z2} &= C12. X12 + C22.X22 + C23.X23 + C31.X31 + C33.X33 + C34.X34 \\ &= 2(6) + 3(0) + 2(8) + 0(4) + 2(0) + 1(6) = 34 \text{ ? alternatif 2} \end{aligned}$$

Dari Tabel 3

$$\begin{aligned} Z_{\min} = \mathbf{Z3} &= C12. X12 + C22.X22 + C23.X23 + C24.X24 + C31.X31 + C33.X33 \\ &= 2(6) + 3(0) + 2(2) + 0(6) + 0(4) + 2(6) = 28 \text{ ? alternatif 3} \end{aligned}$$

Dari Tabel 4

$$\begin{aligned} Z_{\min} = \mathbf{Z4} &= C12. X12 + C23.X23 + C24.X24 + C31.X31 + C32.X32 + C33.X33 \\ &= 2(6) + 2(2) + 0(6) + 0(4) + 2(0) + 2(6) = 28 \text{ ? alternatif 4} \end{aligned}$$

Secara keseluruhan $Z1 \geq Z2 \geq Z3 \dots\dots Zk$, yang terakhir $Zk = Z_{\min}$, nilainya terkecil (minimum)

2. Modified Distribution Method (MODI)

Prosedur MODI :

1. Untuk setiap tabel dengan pemecahan awal yang feasible, hitung nilai U_i dan V_j dengan rumus.
 $C_{ij} = U_i + V_j$ dimana untuk baris $i = 1$, $U_i = 0$
 C_{ij} = biaya angkut per unit barang dari daerah asal A_i ke tempat tujuan T_j
2. Hitung indeks perbaikan $l_{ij} = U_i + V_j - C_{ij}$, untuk semua kotak bukan basis. Kalau $l_{ij} \leq 0$, pemecahan sudah optimum. Kalau belum lanjutkan ke langkah 3
3. Gambarkan lintasan atau jalur tertutup (closed path) dari kotak dengan indeks perbaikan positif terbesar. Kotak ini masuk basis.
4. Beri tanda (+) kemudian secara bergantian pada biaya dari kotak yang membentuk lintasan seperti pada metode batu loncatan.
5. Bagi variabel yang berasal dari kotak dengan tanda (+), cari yang nilainya terkecil (minimum). Kotak ini yang harus keluar basis dan nilainya diperuntukkan bagi variabel dari kotak yang mempunyai nilai indeks perbaikan yang positif terbesar (kotak yang masuk basis).
6. Buat tabel yang baru, kemudian hitung nilai indeks perbaikan dari semua kotak bukan basis. Kalau semua nilainya sudah nol atau negatif, proses dihentikan sebab pemecahan sudah optimum dan jumlah biaya transport minimum

Contoh

	T1	T2	T3	S
A1	2	3	4	1
A2	2	1	3	2
A3	1	2	1	3
d	2	3	1	6

- Pemecahan fisibel awal

	T1	T2	T3	S
A1	1			1
A2	1	1		2
A3		2	1	3
d	2	3	1	6

$$\begin{aligned} Z &= C11. X11 + C21.X21 + C22.X22 + C32.X32 + C33.X33 \\ &= 2(1) + 2(1) + 1(1) + 2(2) + 1(1) = 10 \end{aligned}$$

1. Hitung U1, U2, U3 dan V1, V2, V3, hanya untuk **kotak dalam basis** (ingat **U1 = 0**)

	T1		T2		T3		S
A1	2	1	3		4		1
A2	2	1	1	1	3		2
A3	1		2	2	1	1	3
d	2		3		1		6

$$U1 + V1 = C11 \Rightarrow 0 + V1 = 2 \Rightarrow V1 = 2$$

$$U2 + V1 = C21 \Rightarrow U2 + 2 = 2 \Rightarrow U2 = 0$$

$$U2 + V2 = C22 \Rightarrow 0 + V2 = 1 \Rightarrow V2 = 1$$

$$U3 + V2 = C32 \Rightarrow U3 + 1 = 2 \Rightarrow U3 = 1$$

$$U3 + V3 = C33 \Rightarrow 1 + V3 = 1 \Rightarrow V3 = 0$$

Jadi $U1=0, U2=0, U3=1 ; V1=2, V2=1, V3=0$

2. Kemudian kita hitung $I_{ij} = U_i + V_j - C_{ij}$ dari kotak **bukan basis**

$$I_{12} = U1 + V2 - C12 = 0 + 1 - 3 = -2$$

$$I_{13} = U1 + V3 - C13 = 0 + 0 - 4 = -4$$

$$I_{23} = U2 + V3 - C23 = 0 + 0 - 3 = -3$$

$$I_{31} = U3 + V1 - C31 = 1 + 2 - 1 = 2 \quad (\text{terbesar, positif})$$

Karena belum semua $I_{ij} \leq 0$, maka pemecahan belum optimal. Proses dilanjutkan.

$I_{31} = 2$ (terbesar) \Rightarrow masuk basis. Kotak (3,1) masuk basis

	T1	T2	T3	S
A1	1			1
A2	1	1		2
A3	*	2	1	3
d	2	3	1	6

Pembentukan jalur tertutup kotak (3,1):

$C_{32} - C_{22} + C_{21} - C_{31}$? cari yang positif
kemudian liat **variabel basis** yg minimal

$\text{Min}(X_{32}, X_{21}) = \min(2, 1) = 1$? kotak (2,1) keluar basis

Nilai $X_{31} = X_{21} = 1$

$$X_{32} = X_{32} - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$X_{22} = X_{22} + 1 = 1 + 1 = 2$$

	T1		T2		T3		S
A1	2	1	3		4		1
A2	2		1	2	3		2
A3	1	1	2	1	1	1	3
D	2		3		1		6

$$Z2 = C11.X11 + C22.X22 + C31.X31 + C32.X32 + C33.X33$$

$$= 2(1) + 1(2) + 1(1) + 2(1) + 1(1) = 8$$

Untuk semua kotak basis harus dihitung :

$$U1 + V1 = C11 \Rightarrow 0 + V1 = 2 \Rightarrow V1=2$$

$$U2 + V2 = C22 \Rightarrow U2+V2 = 2$$

$$U3 + V1 = 1 \Rightarrow U3 + 2 = 1 \Rightarrow U3 = -1$$

$$U3 + V2 = 1 \Rightarrow -1+V2 = 1 \Rightarrow V2 = 2$$

$$U3 + V3 = 1 \Rightarrow -1 + V3 = 1 \Rightarrow V3 = 2$$

$$U2+V2 = 2 \Rightarrow U2+2 = 2 \Rightarrow U2=0$$

Indeks perbaikan harus dihitung untuk kotak bukan basis

$$I12 = U1+V2 - C12 = 0+2-3 = -1$$

$$I13 = U1 + V3 - C13 = 0 + 2 -4 = -2$$

$$I21 = U2 +V1 - C21 = 0 +2 - 3 = 0$$

$$I23 = U2 + V3 - C23 = 0+2-3 = -1$$

Karena semua indeks perbaikan. $I_{ij} \leq 0$, maka pemecahan sudah optimum $Z_{min} = 8$.

Suplai A1 untuk memenuhi permintaan T1

Suplai A2 untuk memenuhi permintaan T2

Dan suplai A3 untuk memenuhi permintaan T1, T2 dan T3 masing-masing 1 unit

Thank you