Teori Permainan (Game Theory)

Pertemuan 13 &14

Pendahuluan

Dalam suatu dunia usaha (business world) yang sangat kompetitif sifatnya, salah satu permasalahan yang sangat relevan bagi pihak eksekutif ialah mempelajari atau paling tidak memperkirakan kegiatan-kegiatan atau rekasi-reaksi dari pihak saingan (competitor)

Sejarah permainan (games) dimulai seja permulaan abad ke-20, akan tetapi penggunaannya secara meluas dalam bidang usaha baru terjadi setelah hasil karya mengenai *Theory and Practice of Games and Economic Behaviour* oleh John Von Neuman memanfaatkan prinsip *Minimax (or Maximin)* yang mencakup ide dasar mengenai **minimasi dari kerugian maksimum (*minimization of the maximum loss)***

Sifat-sifat Permainan (Game)

1. Jumlah pemain terbatas
2. Untuk setiap pemain ada sejumlah kemungkinan tindakan yang terbatas.
3. Ada pertentangan kepentingan (*conflict of interest)* antar pemain
4. Aturan permainan untuk mengatur di dalam tindakan diketahui oleh setiap pemain.
5. Hasil seluruh kombinasi tindakan yang mungkin dilakukan berupa bilangan *positif negatif* atau *nol.*

Model-model permainan dapat dibedakan berdasarkan jumlah pemain, jumlah keuntungan atau kerugian, dan jumlah startegi yang digunakan dalam permainan. Bila jumlah pemain ada dua, permainan disebut sebagai permainan dua pemain. Bila keuntungan atau kerugian sama dengan nol, disebut permainan jumlah nol.

Permainan Berjumlah Nol dari Dua Orang
(*Two Person Zero Sum Game)*

Suatu permainan yang melibatkan persaingan antara 2 orang (pihak) dimana kemenangan pihak yang satu sama besarnya dengan kekalahan pihak yang lain (sehingga jumlah total perolehan ke dua pihak adalah nol)

Di dalam permainan berjumlah nol dari dua orang, hasil kemenangan berupa pembayaran dapat disajikan dalam bentuk matriks. Untuk pembayaran dalam permainan yang disebut *pay-off matrix of the game,* untuk selanjutnya disebut matriks pembayaran.
Jadi matriks pembayaran (MP) atau *pay-off matrix* merupakan matriks yang elemen-elemennya merupakan jumlah nilai yang harus dibayarkan dari pihak pemain yang kalah kepada yang menang pada akhir suatu permainan. Pengertian *pay-off* tidak selalu berarti pembayaran berupa uang, akan tetapi bisa juga kenaikan/penurunan.

Ada dua macam two person zero sum games, pertama jenis permainan **strategi murni (pure strategy game)** dimana setiap pemain hanya menjalankan strategi tunggal, dan kedua permainan **strategi campuran (mixed strategy game)** dimana kedua pemain menjalankan strategi yang berbeda-beda.

1. Pure Strategy (Strategi Murni)
Strategi Minimaks dan Maksimin serta Titik Sadel

		STRATEGI B			
		1	2	Minimum Baris	
STRATEGI A	1	1	-3	-3	
	2	(2)	4	2	Maksimin
	3	-1	5	-1	
Maksimum Kolom		2	5		
		Minimaks			

Dianggap bahwa kedua pemain A dan B memang mengetahui isi matriks pembayaran. Dengan menggunakan informasi dari matriks pembayaran , masing-masing pemain harus memutuskan atau memilih strategi apa yang paling baik menurut pihaknya akan tetapi belum tahu tidakan apa yang akan diambil oleh pihak lawannya

Matriks pembayaran B merupakan matriks pembayaran A dimana setiap elemennya dikalikan **minus satu (-1),** karena kemenangan dari A sebetulnya merupakan kekalahan dari B.
Jumlah kemenangan dari A ditambah kekalahan B harus nol *(zero sum game).* Perusahaan A disebut perusahaan yang berusaha memaksimumkan (*maximizing*) dan B meminimumkan (*minimizing).*

Dilihat dari Pemain A

- Kalau pemain A memilih strategi 1, maka keadaan terburuk kalau B memilih strategi 2, dalam hal ini A akan kehilangan 3. Ini berarti dari kemenangan sebesar 1 yang akan dinikmati oleh A, akan tetapi kalau B memilih strategi 2, justru A kalah.
- Kalau A memilih strategi 2 , A akan menang 2,kalau B memilih strategi 1dan menang 4 kalau B memilih strategi 2, keadaan buruk bagi A kalau memilih strategi 1.
- Kalau A memilih strategi 3 , sebaiknya B memilih strategi 1, sebab B akan menang 1 atau A akan kalah 1 (keadaan buruk bagi A)

Sekarang pemain A akan berusaha memaksimumkan pembayaran yang minimum ini. Dengan kata lain A akan memilih suatu strategi yang membuat *return* sebesar2nya atau semaksimum mungkin, jadi akan memaksimumkan Pay-off yang minimum. **Aturan pengambilan keputusan ini disebut strategi Maksimin**

Dilihat dari Pemain B

Bagi B, keadaan yang paling buruk kalau A memperoleh pembayaran yang tinggi

- Kalau B memilih strategi 1, keadaan terburuk bagi B kalau A memilih strategi 2, sebab A akan menang 2
- Kalau B memilih strategi 2 , keadaan terburuk bagi B kalau A memilih strategi 3, sebab A akan menang 5

B menganut strategi **Minimaks,** yaitu **meminimumkan kemenangan dari A.**

Dalam hal ini pilihan A strategi 2 dan pilihan B strategi 1.
A menang 2, B kalah 2 → jumlahnya 2 + (-2) = 0

Titik Sadel (Sadle Point)

Adalah nilai (value) permainan dimana setiap pemain mempunyai strategi murni (pure strategy). Jadi dalam kasus seperti ini matriks pembayaran dikatakan mempunyai titik keseimbangan (equilibrium point).

Jadi matriks pembayaran pada contoh diatas mempunyai titik sadel dan strategi optimal untuk A = strategi 2 dan B = strategi 1. nilai permainan adalah 2.

Ilustrasi 1 :

$$
\begin{array}{c|c|c}
 & \text{Strategi B} & \\
\text{Strategi A} & \begin{pmatrix} 8 & 7 & 15 & 12 \\ 9 & 14 & 8 & 10 \\ 10 & 12 & 14 & 13 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 10 \end{matrix} \\
 & \begin{matrix} 10 & 14 & 15 & 13 \end{matrix} &
\end{array}
$$

Kalau nilai minimum pada baris diperhatikan, maka nilai maksimummya adalah sebesar 10. Sebaliknya nilai mnimum dari nilai maksimum pada kolom adalah sebesar 10 juga.

Jadi terdapat titik sadel, nilai permainan = 10 tercapai kalau A menggunakan stratedi 3, dan B menggunakan strategi 1.

Ilustrasi 2 :

$$\begin{array}{ccc} & \text{Strategi B} & \\ \text{Strategi A} & \begin{pmatrix} -7 & -4 \\ 7 & -3 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} -7 \\ -3 \\ -2 \end{matrix} \\ & \begin{matrix} 8 & -2 \end{matrix} & \end{array}$$

Maksimum untuk baris yang minimum = -2, dan minimum untuk kolom yang maksimum = -2, jadi -2 merupakan titik sadel dan nilai permainan.

Ini dicapai kalau A memilih strategi 3 dan dan B memilih strategi 2

2.Mixed Strategy (Strategi Campuran)

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 20 & 8 & -6 \\ 12 & 10 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} -6 \\ 2 \\ 3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} 20 & 10 & 6 \end{array} & \end{array}$$

Dalam ilustrasi diatas **tidak ada titik keseimbangan (titik sadel),** maka dari itu **strategi murni tidak ada** baik pemain A maupun B. Agar dapat diperoleh suatu pemecahan permainan yang mempunyai tipe seperti ini, Von Neuman memperkenalkan konsep **strategi campuran (*mixed strategy*).**

Pemain A

Pemain A tidak akan pernah memilih strategi 1. tetapi secara acak akan memilih strategi 2 dan strategi 3. misalnya probabilita ½.
Kalau pemain B memilih strategi 1 , maka A akan memperoleh 12 atau 3, masing-masing dengan nilai kemungkinan (probabilita) sebesar ½. Secara rata2 akan menerima pembayaran (*pay-off)* sebesar :
12(1/2) + 3(1/2) = 6 + 1.5 = 7.5

Dengan cara yang sama, rata2 pembayaran untuk A kalau **pemain B memilih strategi 2** : **10(1/2) + 5(1/2) = 7.5**

rata2 pembayaran untuk A kalau **pemain B memilih strategi 3** : **2(1/2) + 6(1/2) = 4**

Jadi strategi campuran ini menghasilkan nilai rata-rata **7.5; 7.5; dan 4** tergantung strategi yang dipilh B.
Nilai terkecil (minimum) dari rata-rata pembayaran ini sebesar **4**, yang ternyata **lebih besar** dari nilai maksimin yang diperoleh dari strategi murni yaitu sebesar **3**.
Maka dengan menggunakan strategi campuran Pemain A dapat meningkatkan nilai pembayaran minimum, dari **3 menjadi 4**

Pemain B

Bila pemain B menggunakan strategi campuran, dia tidak akan menggunakan strategi 1, akan tetapi secara acak akan memilih strategi 2 dan strategi 3. misal dengan tingkat kemungkinan (probabilita) sebesar 1/3 dan 2/3

Rata pembayaran yang diperoleh B tergantung pada strategi yang akan dipilih A :
kalau A memilih strategi 1 8(1/3) – 6(2/3) = -4/3
Kalau A memilih strategi 2 10(1/3) + 2(2/3) = 14/3
Kalau A memilih strategi 3 5(1/3) + 6(2/3) = **17/3** nilai terbesar

Nilai rata2 pembayaran untuk B paling besar 17/3 ternyata **lebih kecil** dari minimaks yang diperoleh dari strategi murni, yaitu sebesar 6.
Jadi pemain B mampu mengurangi rata2 pembayaran yang maksimum, dengan demikian disimpulkan bahwa dengan menggunakan strategi campuran, masing pemain dapat memperbaiki posisi nya (*better off).*

Metode Pemecahan untuk Permainan

1. Metode Aljabar untuk Strategi Optimum

Suatu permainan dimana dua pemain mempunyai dua alternatif (dua pilihan strategi) terkenal dengan suatu permainan 2x2

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} q & 1-q \end{array} \\ \begin{array}{c} p \\ 1-p \end{array} & \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Bagi pemain A, strategi 1=2 apapun yang dilakukan B

5p + 3(1-p) = p + 4(1-p)

5p + 3-3p = p + 4-4p

5P = 1

p = 1/5 = 0.2 (=20%)

1-P = 1- 0.2 = 0,8 (80%)

Jadi, strategi campuran yang optimal bagi A dicapai kalau dia menggunakan 20% waktunya untuk memainkan strategi 1 (baris 1) dan 80% waktunya untuk memainkan strategi 2 (baris 2)

5q + (1-q) = 3q + 4(1-q)

5q + 1-q = 3q + 4-4q

4q +1 = 4 - q

5q = 3

q = 3/5 = 0.6 (=60%) ⍰ 1-q = 40%

Jadi, strategi campuran yang optimal bagi B dicapai kalau dia menggunakan 60% waktunya untuk memainkan strategi 1 (kolom 1)dan 40% waktunya untuk memainkan strategi 2 (Kolom 2)

Sekarang strategi campuran yang optimum sudah diperoleh. Kemudian perlu dihitung

Nilai Permainan (*value of the game*) = *V*

$$
\begin{array}{cc}
 & \textbf{B} \\
 & \begin{array}{ccc} 3/5 & 2/5 & \text{minimum} \end{array} \\
\textbf{A} \begin{array}{c} 1/5 \\ 4/5 \end{array} & \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ (3) \end{array} \end{array} \\
\text{maksimum} & \begin{array}{cc} 5 & (4) \end{array}
\end{array}
$$

Maksimin = 3

Minimaks = 4

Tidak terdapat titik sadel

Permainan dilihat dari pandangan Pemain A, perhatikan hal-hal berikut :

1. Selama B menggunakan 3/5 waktunya untuk memilih strategi 1, A menang 5 unit sebanyak 1/5 kali dan 3 unit sebanyak 4/5 kali.
2. Selama B menggunakan 2/5 waktunya untuk memilih strategi 2, A menang 1 unit selama 1/5 kali dan 4 unit selama 4/5 kali.

Rata-rata kemenangan A

= 3/5 [5(1/5) + 3(4/5)] + 2/5 [1(1/5) + 4(4/5)

= 3/5 (5/5 +12/5) + 2/5 (1/5 + 16/5)

= 3/5 (17/5) + 2/5 (17/5)

= 17/5 = **3,4** → nilai permainan, **lebih besar dari Maksimin (3)**

Ini berarti pemain A, kalau menggunakan strategi secara optimal dapat mengharapkan rata2 kemenangan sebesar 3,4 unit. Kalau nilai permainan tandanya positif, A Menang (B kalah) dan sebaliknya

Rata-rata kemenangan B

= 1/5 [5(3/5) + 1(2/5)] + 4/5 [3(3/5) + 4(2/5)]

= 1/5 (15/5 +2/5) + 4/5 (9/5 + 8/5)

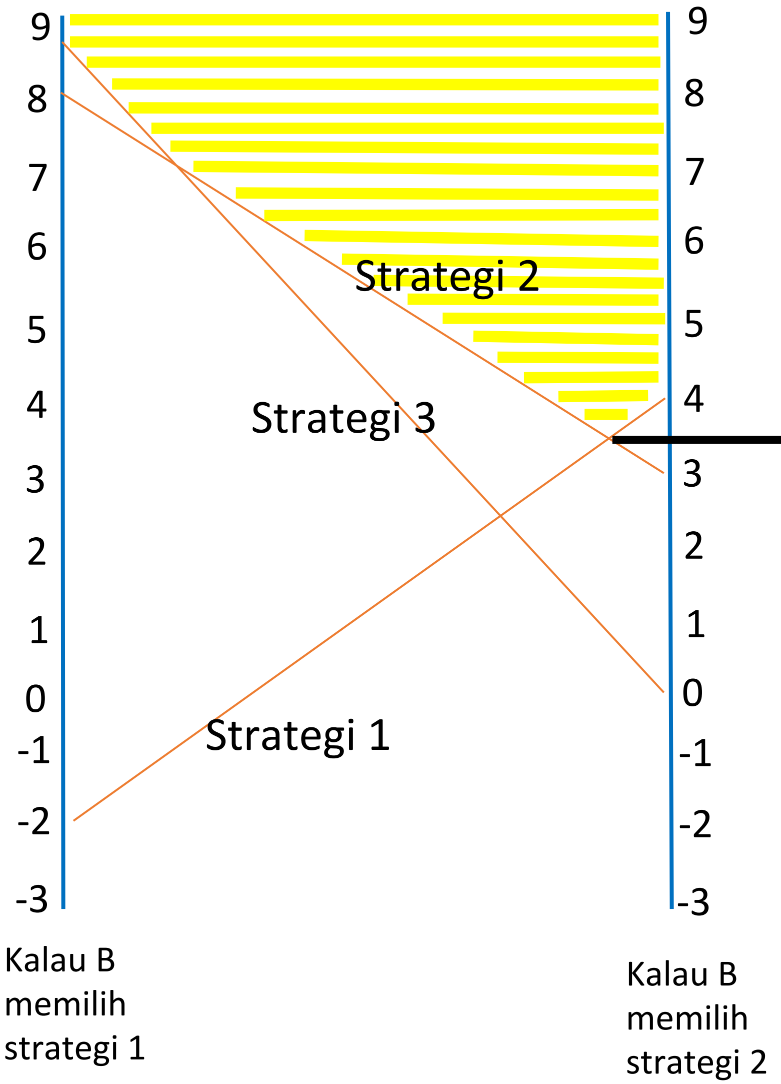
= 1/5 (17/5) + 4/5 (17/5) = 17/5 = **3,4 → lebih kecil dari Minimaks (4)**

Ternyata rata2 kemenangan 3.4 sama dengan perhitungan sebelumnya (rata2 kemenangan A). Karena tanda positif jadi A yang menang

3. Metode Grafik

$$
\begin{array}{cc}
 & B \\
A & \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 8 & 3 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Kalau A memilih strategi 1 dan B memilih strategi 1, maka A akan kalah sebesar 2
Kalau B memilih strategi 2 , maka A akan menang 4



Titik V,
Nilai Permainan = **3,5**

= titik perpotongan terendah (The lowest intersection point) ialah **bahwa pada titik ini tercapai rata-rata kemenangan terendah A yang mampu ditoleransi oleh B.**

Sebaliknya dapat juga dibuat gambar untuk pemain B dan mencari nilai permainan yaitu nilai kekalahan B yang minimal yang mampu ditoleransi oleh A.

Secara singkat nilai permainan menunjukkan seberapa jauh seorang pemain dapat pergi atau bergerak sebelum dia *restained* oleh strategi defensif lawannya

Terimakasi
h