Model Antrian

Pertemuan 14

CONTOH ANTRIAN

- Pelanggan menunggu pelayanan di kasir
- Mahasiswa menunggu konsultasi dengan pembimbing
- Mahasiswa menunggu registrasi dan pembayaran SPP
- Penumpang kereta api menunggu pelayanan loket penjualan karcis
- Pengendara kendaraan menunggu pengisian bahan bakar
- Beberapa produk atau komponen menunggu untuk di selesaikan
- dsb

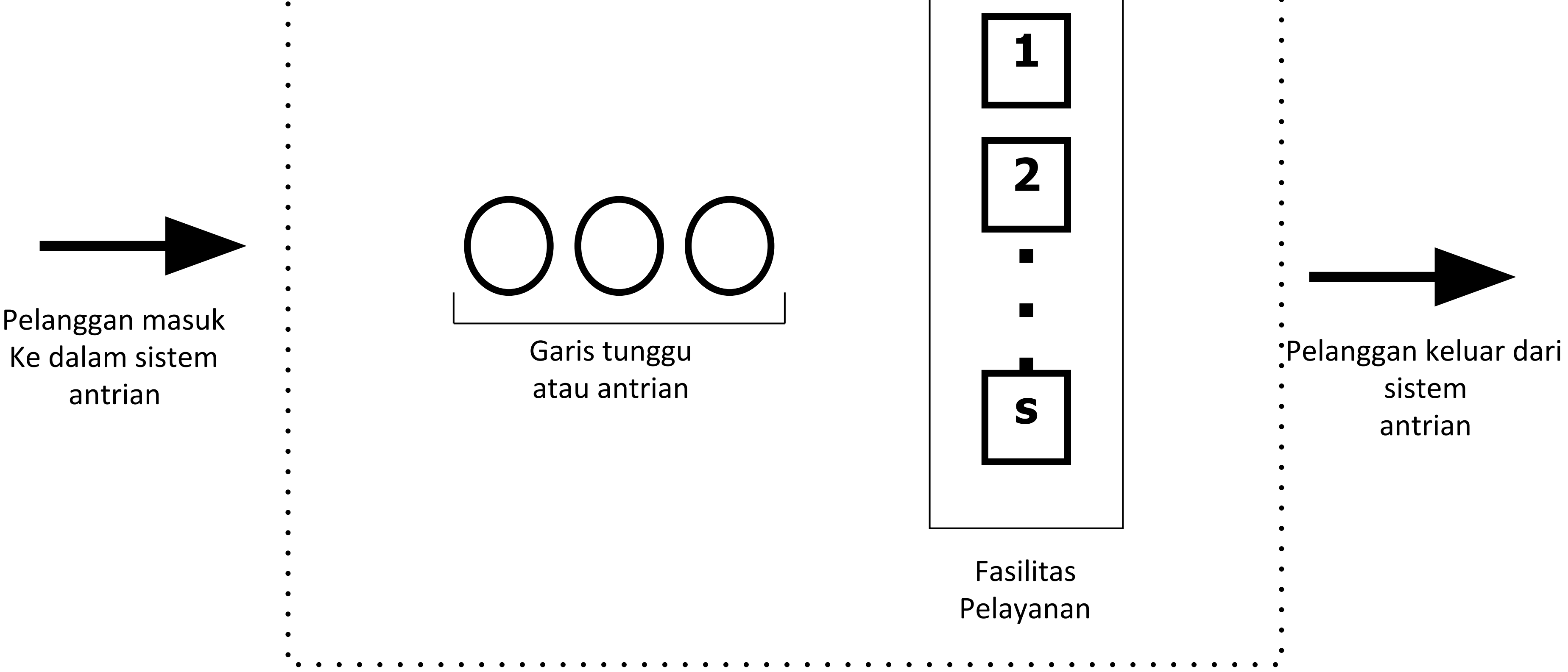
Pengertian Teori Antrian

Teori antrian merupakan teori analisis keefektifan sistem yang dikenalkan oleh A.K. Erlang seorang ahli teknik berkebangsaan Denmark. Dia adalah seorang teknisi yang bekerja pada kantor telepon Denmark dengan tugas untuk melakukan penyambungan permintaan pembicaraan lokal dan interlokal.

A.K. Erlang berusaha mengukur kemampuan sebuah fasilitas servis untuk memberikan pelayanan yang sebaik-baiknya kepada pelanggannya.

Stuktur & Elemen Model Antrian

1. Garis tunggu atau sering disebut antrian (queue)
2. Fasilitas pelayanan (service facility)
3. Populasi / Customer



STUKTUR SISTEM ANTRIAN

Teori yang diperkenalkan itu kemudian disebut sebagai teori antrean (*waiting line theory*). Model antrean ini berguna untuk mengukur keefektifan sistem secara cepat dan secara garis besar dengan melihat beberapa indikator pelayanan , yaitu :

1. Berapa pelanggan yang antre menunggu pelayanan dalam waktu tertentu.
2. Berapa pelanggan yang ada dalam sistem, yaitu yang sedang dilayani dan sedang antre menunggu giliran pelayanan.
3. Berapa lama pelanggan harus menunggu dalam antrean, sebelun tiba gilirannya untuk menerima pelayanan
4. Berapa lama pelanggan harus berada dalam sistem, yaitu waktu untuk menerima pelayanan dan waktu untuk menunggu dalam antrean sebelum menerima pelayanan.
5. Berapa besar utilisasi sistem pelayanan
6. Berapa besar peluang sistem tersebut untuk menganggur.

Tipe Sumber Populasi

1. **Infinite Source Model**

Tipe ini merupakan model sumber unit analisis antrean dengan objek yang datang meminta pelayanan pada fasilitas servis jumlahya tidak tentu (bersifat acak).

Contoh : Kendaraan bermotor yang akan tiba di sebuah SPBU.
Berapa postulat yang dipakai yang dipakai pada model ini :

a. Pelanggan yang tiba memiliki Distribusi Poisson, maksudnya terdapat kecenderungan (probabilita) jumlah objek yang tiba dengan jumlah yang lebih besar daripada tingkat rata-rata kedatangan adalah lebih kecil. Sedangkan probabilita jumlah objek yang tiba dengan jumlah yang lebih kecil daripada tingkat rata-rata adalah lebih besar.
b. Kemampuan melayani memiliki Distribusi Eksponensial negatif, maksudnya adalah waktu pelayanan kepada pelanggan lebih singkat daripada waktu pelayanan rata-rata memiliki probabilita lebih besar untuk terjadi. Sedangkan untuk lebih lama daripada waktu pelayanan rata-rata memilik probabilita yang lebih kecil.
c. Pelayanan pelanggan di fasilitas servis mengikuti disiplin : Datang Pertama, Dilayani Pertama (FIFO).
d. Pada sistem dengan model *Single Chanel, Single Phase* tingkat mampu layananan (μ) lebih besar dari tingkat rata-rata kedatangan (λ). Pada sistem yang *Multi Channel, Single Phase,* jumlah saluran pelayanan (k) lebih besar dari *service rate* atau $k\mu > \lambda$

2. Finite Source Model

Tipe ini merupakan model dengan sumber unit analisis antrean (objek) yang datang meminta pelayanan pada fasilitas servis adalah tertentu atau terdefinisi jumlahnya.

Contoh : Mahasiswa dari perguruan tinggi yang datang meminta layanan akademik.

CONTOH SISTEM ANTRIAN

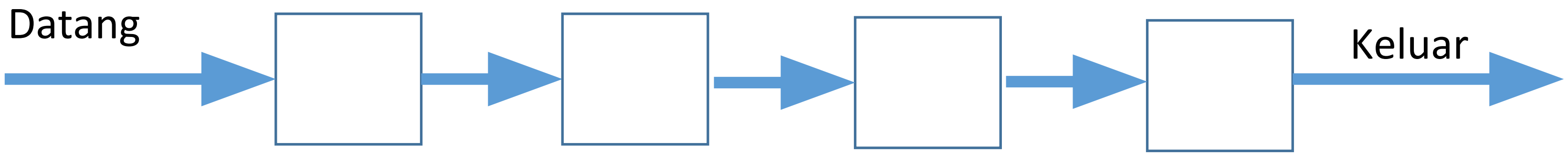
Sistem	Garis tunggu atau antrian	Fasilitas
1. Lapangan terbang	Pesawat menunggu di landasan	Landasan pacu
2. Bank	Nasabah (orang)	Kasir
3. Pencucian Mobil	Mobil	Tempat pencucian mobil
4. Bongkar muat barang	Kapat dan truk	Fasilitas bongkar muat
5. Sistem komputer	Program komputer	CPU, Printer, dll
6. Bantuan pengobatan darurat	Orang	Ambulance
7. Perpustakaan	Anggota perpustakaan	Pegawai perpustakaan
8. Registrasi mahasiswa	Mahasiswa	Pusat registrasi
9. Skedul sidang pengadilan	Kasus yang disidangkan	Pengadilan

Tipe Struktur Antrean

1. **Satu barisan (antrian) dan satu fase pelayanan (*single channel single phase)***

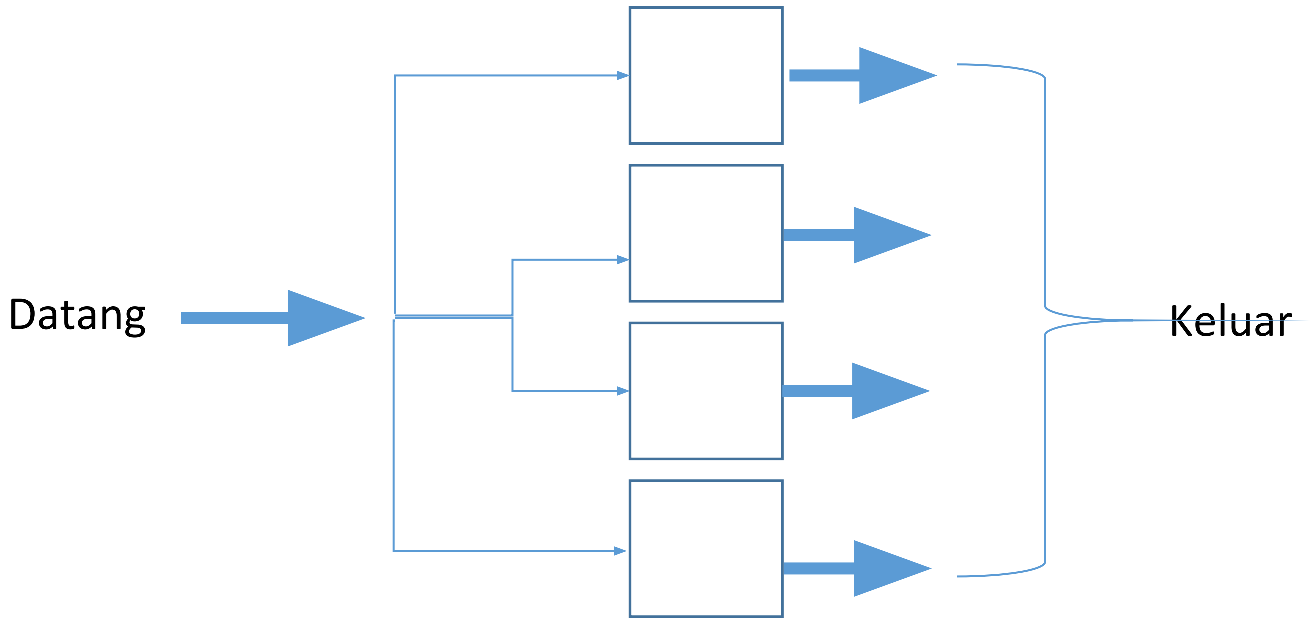
Contoh : Pelayan toko tunggal

2. **Satu barisan (antrian) dan beberapa fase pelayanan (*single channel multiphase)***



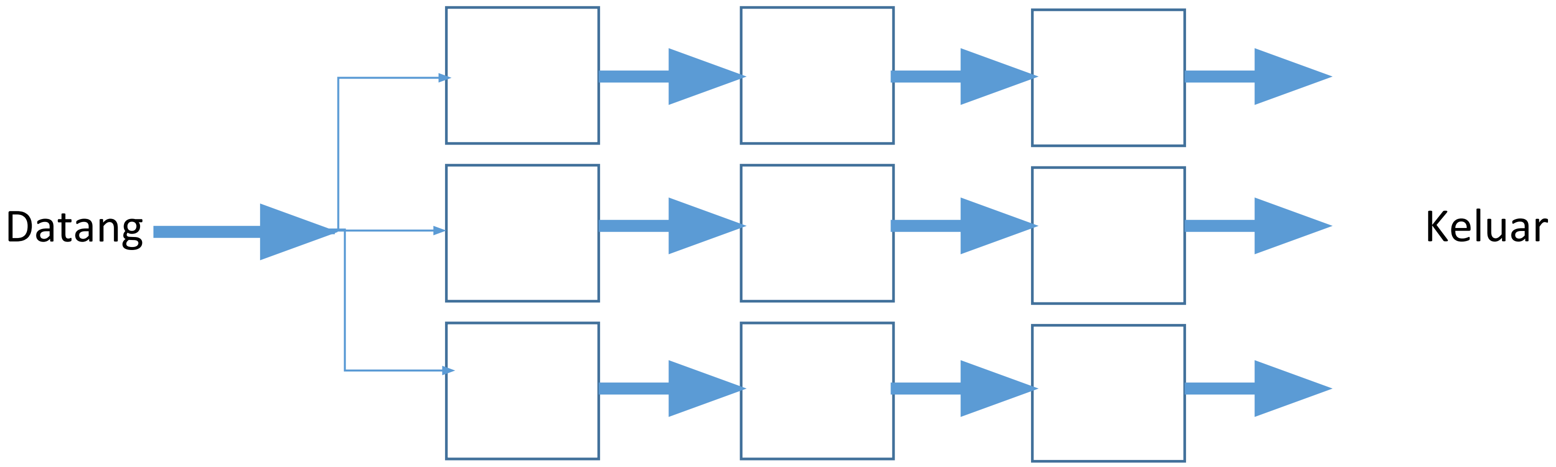
Contoh: Mengurus ijin usaha

3. Beberapa barisan dan satu fase pelayanan (*multi channel single phase)*



Contoh :
pelayanan pembelian tiket yang dilayanin lebih dari satu loket

4. Beberapa barisan dan beberapa fase pelayanan (*multi channel multiphase)*



Contoh:
Pelayanan kepada pasien di rumah sakit. Perawat akan mendatangi pasien secara teratur dan pelayanan secara kontinu.

Analisis Pemecahan Kasus Antrean

1. Model Single Channel Single Phase

Sistem hanya memiliki satu saluran atau tenaga pelayanan, dan layanan jasa yang diminta oleh pelanggan akan selesai pada satu tahapan saja.

Disiplin antrean memiliki aturan sebagai berikut:

a. Pertama datang, pertama dilayani
b. Pelanggan sabar menunggu giliran dilayani dan tidak meninggalkan baris antrean sampai layanan jasa selesai diberikan.
c. Kemampuan sistem melayani pelanggan adalah lebih besar daripada jumlah pelanggan yang tiba ($\mu > \lambda$).
d. Distribusi kedatangan pelanggan mengikuti pola distribusi poisson, sedangkan distribusi pelayanan mengikuti distribusi eksponensial negatif.
e. Pelanggan yang tiba meminta pelayanan memiliki interval waktu yang tidak tentu.
f. Tahap pelayanan hanya satu tahapan saja dan saluran pelayanan juga hanya satu.

Notasi dalam sistem antrian

- n = jumlah pelanggan dalam sistem
- Pn = probabilitas kepastian pelanggan dalam sistem
- λ = jumlah rata-rata pelanggan yang datang persatuan waktu
- µ = jumlah rata-rata pelanggan yang dilayani per satuan waktu
- Rho = faktor utilisasi fasilitas pelayanan/ server sibuk
- Po = probabilitas tidak ada pelanggan dalam sistem

ρ

- p = tingkat intensitas fasilitas pelayanan
- L / E(n) = jumlah rata-rata pelanggan yang diharapkan dlm sistem
- Lq / E(m) = jumlah pelanggan yang diharapkan menunggu dalam antrian
- W / E(v) = waktu yang diharapkan oleh pelanggan selama dalam sistem
- Wq / E(w) = waktu yang diharapkan oleh pelanggan selama menunggu dalam antrian
- 1/µ = waktu rata-rata pelayanan
- 1/λ = waktu rata-rata antar kedatangan
- S / k = jumlah fasilitas pelayanan

Persamaan

1. Tingkat intensitas (kegunaan/utilitas) pelayanan

$$\rho\ (\text{Rho}) = \frac{\lambda}{\mu}$$

2. Probabilitas bahwa fasilitas pelayanan sedang menggangur

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

3. Probabilitas kepastian *n* pelanggan dalam sistem

$$P_n = \rho^n (1 - \rho) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$$

4. Jumlah rata-rata pelanggan yang diharapkan dlm sistem

$$L = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

5. Jumlah rata-ratapelanggan yang diharapkan menunggu dalam antrian / menunggu memperoleh pelayanan (rata2 panjangnya antrian)

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{\rho^2}{1 - \rho}$$

6. Waktu yang diharapkan oleh pelanggan selama dalam sistem (meliputi waktu sebelum dan sesudah menerima layanan)

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

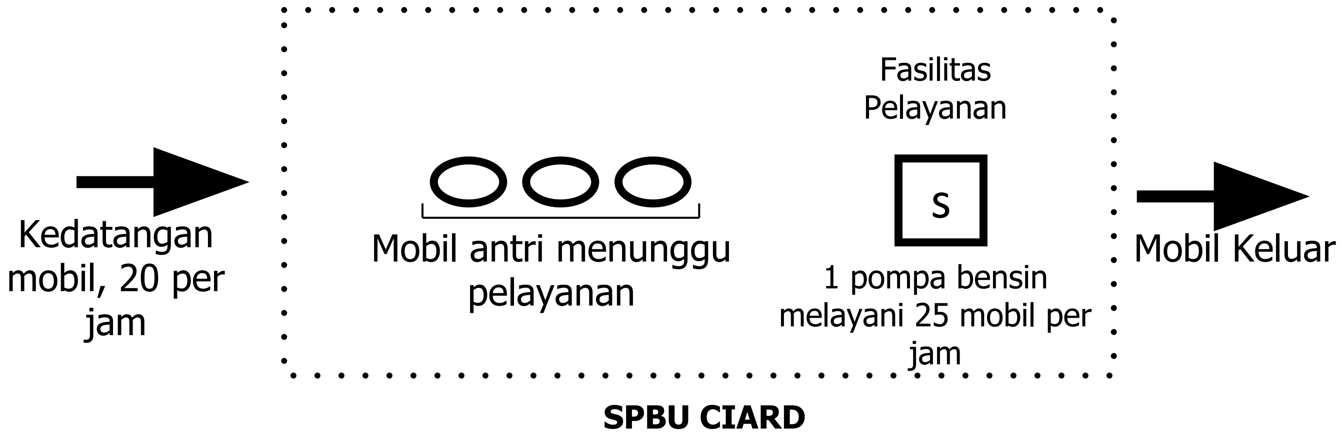
7. Waktu yang diharapkan oleh pelanggan selama menunggu dalam antrian (sebelum menerima pelayanan)

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

Contoh

PT CIARD mengoperasikan satu buah pompa bensin dengan satu operator. Rata-rata tingkat kedatangan kendaraan mengikuti distribusi poisson yaitu 20 kendaraan per jam. Operator dapat melayani rata-rata 25 mobil per jam, dengan waktu pelayanan setiap mobil mengikuti distribusi probabilitas eksponensial. Jika diasumsikan model sistem antrian yang digunakan operator tersebut (M/M/1), hitunglah :

1. Tingkat intensitas (kegunaan) pelayanan (p)
2. Jumlah rata-rata kendaraan yang diharapkan dalam sistem
3. Jumlah kendaraan yang diharapkan menunggu dalam antrian
4. Waktu yang diharapkan oleh setiap kendaraan selama dalam sistem (menunggu pelayanan)
5. Waktu yang diharapkan oleh setiap kendaraan untuk menunggu dalam antrian



Penyelesaian

λ = 20 dan μ = 25

1. Tingkat intenstas (kegunaan) pelayanan atau p

$$p = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{20}{25} = 0{,}80$$

Angka tersebut menunjukkan bahwa operator akan sibuk melayani kendaraan selama 80% dari waktunya. Sedangkan 20% dari waktunya
(1 – p) yang sering disebut idle time akan digunakan operator untuk istirahat, dll

2

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{20}{25 - 20} = 4, \textit{atau}$$

$$L = \frac{p}{1 - p} = \frac{0{,}80}{1 - 0{,}80} = 4$$

Angka tersebut menunjukkan bahwa operator dapat mengharapkan 4 mobil yang berada dalam sistem

3 $$Lq = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{(20)^2}{25(25-20)} = \frac{400}{125} = 3{,}20$$

Angka tersebut menunjukkan bahwa mobil yang menunggu untuk dilayani dalam antrian sebanyak 3,20 kendaraan

4 $$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{25-20} = \frac{1}{5} = 0{,}20 \text{ jam atau } 12 \text{ menit}$$

Angka tersebut menunjukkan bahwa waktu rata-rata kendaraan menunggu dalam sistem selama 12 menit

5 $$Wq = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{20}{25(25-20)} = \frac{20}{125} = 0{,}16 \text{ jam atau } 9{,}6 \text{ menit}$$

Angka tersebut menunjukkan bahwa waktu rata-rata kendaraan menunggu dalam antrian selama 9,6 menit

2. Model Multi Channel Single Phase

Dalam Multiple-Channel Model, fasilitas yang dimiliki lebih dari satu.

Di dalam sistem antrian saluran ganda, ada beberapa tempat pelayanan yang pararel sebanyak *k* , dimana keadaan sistem, khususnya ada *n* pelanggan dalam sistem dalam waktu tertentu.
Dapat diasumsikan:

1. ***Tidak ada antrian*** sebab semua pelanggan yang berdatangan sedang menerima pelayanan di tempat pelayanan (loket), dalam hal ini **(*n* ≤ *k*)**, atau
2. ***Terjadi pembentukan antrian*** sebab pelayanan yang diminta oleh pelanggan yang berdatangan lebih besar dari kemampuan tempat pelayanan, dalam hal ini ***(n ≥ k)***

Persamaan

1. Tingkat intensitas (kegunaan/utilitas) pelayanan

$$\rho = \frac{\lambda}{k\mu}$$

2. Probabilita bahwa tidak ada pelanggan didalam sistem saluran ganda

$$Po = \frac{1}{\sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{ku}{ku - \lambda}}$$

Berlaku untuk : $k\mu > \lambda \text{ atau } \rho k < 1)$

3. Probabilita bahwa pelanggan harus menunggu sebelum dilayani.

$$P(n \geq k) = \frac{\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{(k-1)!(k\mu - \lambda)} Po$$

4 . Jumlah rata-rata pelanggan yang diharapkan menunggu dalam antrian / menunggu memperoleh pelayanan / rata2 panjangnya antrian.

$$Lq = \frac{\lambda\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{(k-1)!\,(k\mu - \lambda)^2} Po$$

5. Jumlah rata-rata pelanggan yang diharapkan atau ada dalam sistem

$$L = \frac{\lambda\mu(\frac{\lambda}{\mu})^k}{(k-1)!(k\mu-\lambda)^2}Po + \frac{\lambda}{\mu} \Rightarrow L = \lambda W = Lq + \frac{\lambda}{\mu}$$

7. Waktu yang diharapkan oleh pelanggan selama dalam sistem (meliputi waktu sebelum dan sesudah menerima layanan) / rata2 waktu menunggu pelanggan dalam sistem

$$W = \frac{\mu(\frac{\lambda}{\mu})^k}{(k-1)!(k\mu-\lambda)^2}Po + \frac{1}{\mu} \Rightarrow W = Wq + \frac{1}{\mu}$$

6. Waktu yang diharapkan oleh pelanggan selama menunggu dalam antrian (sebelum menerima pelayanan)

$$Wq = \frac{\mu(\frac{\lambda}{\mu})^k}{(k-1)!(k\mu-\lambda)^2}Po \Rightarrow Wq = \frac{Lq}{\lambda}$$

Contoh :

Suatu kantor konsultan perpajakan mempunyai 4 loket guna melayani para langganan yang mempunyai persoalan-persoalan dan keluhan mengenai pendapatan mereka, kekayaan dan pajak penjualan. Rata-rata kedatangan sebanyak 80 orang selama 8 jam pelayanan dalam sehari. Rata-rata waktu pelayanan 20 menit. Jawablah pertanyaan2 berikut :

1. Hitung rata-rata banyaknya langganan dalam sistem
2. Rata-rata banyaknya langganan yang harus menunggu untuk dilayani (panjangnya antrian)
3. Rata-rata waktu menunggu bagi seorang langganan dalam sistem
4. Rata-rata waktu menunggu bagi seorang pelanggan yaitu menunggu sebelum dilayani
5. Hitung berapa jam setiap minggunya seorang penasihat perpajakan menghabiskan waktunya untuk melayani pelanggan
6. Berapakah probabilitasnya seorang pelanggan harus menunggu sebelum menerima giliran untuk dilayani

Jawaban

8 jam = 80 orang langganan → 1 jam = 80/8 = 10 orang → **λ = 10 orang / jam**

20 menit melayani 1 orang → 1 jam = 60/20 = 3 orang → **μ = 3 orang/ jam**
Ada 4 loket **, k =4.**

Mula-mula perlu dihitung nilai Po yaitu probabilita bahwa tidak ada langganan yang datang (*n=0)* dalam sistem:

$$Po = \frac{1}{\sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{n!}(\frac{\lambda}{\mu})^n + \frac{1}{k!}(\frac{\lambda}{\mu})^k \frac{ku}{ku - \lambda}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{2}(\frac{\lambda}{\mu})^2 + \frac{1}{6}(\frac{\lambda}{\mu})^3 + \frac{1}{24}(\frac{\lambda}{\mu})^4 \frac{ku}{ku - \lambda}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{10}{3} + \frac{100}{18} + \frac{1000}{162} + \frac{10000}{1944}(\frac{12}{2})} = \frac{1}{46,91} = 0.0213$$

1. Rata-rata banyaknya langganan dalam sistem

$$L = \frac{\lambda\mu(\frac{\lambda}{\mu})^k}{(k-1)!(k\mu-\lambda)^2} Po + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$= \frac{10.3(\frac{10}{3})^4}{3!(12-10)^2} .0,0213 + \frac{10}{3}$$

$$= (154,2).0,0213 + 3,33$$ = 6,61 Orang langganan

2. Rata-rata banyaknya langganan yang harus menunggu untuk dilayani (panjangnya antrian)

$$Lq = \frac{\lambda\mu(\frac{\lambda}{\mu})^k}{(k-1)!(k\mu-\lambda)^2} Po$$

= 154,1 . 0.0213 = 3,28 orang langganan

3. Rata-rata waktu menunggu bagi seorang langganan dalam sistem

$$W = \frac{\mu(\frac{\lambda}{\mu})^k}{(k-1)!(k\mu-\lambda)^2} Po + \frac{1}{\mu}$$

$$W = \frac{3(\frac{10}{3})^4}{3!(12-10)^2} 0.0213 + \frac{1}{3}$$

= 0.328 + 0,333 = 0.661 jam atau 40 menit

4. Rata-rata waktu menunggu bagi seorang pelanggan yaitu menunggu sebelum dilayani

$$Wq = \frac{\mu(\frac{\lambda}{\mu})^k}{(k-1)!(k\mu-\lambda)^2} Po$$

= 0,328 jam atau 20 menit

5. Hitung berapa jam setiap minggunya seorang penasihat perpajakan menghabiskan waktunya untuk melayani langganan

$$\rho = \frac{\lambda}{k\mu} \quad = \frac{10}{3.4} = \frac{10}{12} = 0.833$$

Rata-rata waktu yang diperlukan untuk melayani langganan selama 8 jam pelayanan per hari = 8 x 0,833 = 6.66 jam.
1 minggu ada 5 hari kerja, maka secara rata-rata penasihat pajak akan sibuk 5 x 6,66 jam = 33,3 jam setiap minggunya.

6. Probabilitasnya seorang pelanggan harus menunggu sebelum menerima giliran untuk dilayani

$$P(n \geq k) = \frac{\mu(\frac{\lambda}{\mu})^k}{(k-1)!(k\mu - \lambda)} Po$$

$$= \frac{3(\frac{10}{3})^4}{3!(12 - 10)} .0,0213$$

= 30,85 . 0,0213 = 0,6571

Terimakasih