Matemàtiques 1 FIB

Exercicis resolts.

Mercè Mora. Departament de Matemàtiques. UPC

En aquest document teniu exemples de càlculs amb subespais. Concretament:

Sigui F un subespai d'un espai vectorial E generat per un conjunt de vectors S.

Exercici 1.

- Calcular $\dim F$.
- Donar una base B de F formada per vectors de S.
- Expressar els vectors de $S \setminus B$ com a combinació lineal dels vectors de B.

Exercici 2.

- Calcular $\dim F$.
- Donar una base de F formada per vectors de S.
- Donar una base de F no necessàriament formada per vectors de S (que ens anirà més bé per completar-la fins una base de E).
- Completar bases de F fins una base de E.
- Expressar els vectors de F com a solució d'un sistema d'equacions lineals homogeni.

Exercici 1. *Considerem el subespai F generat pel conjunt $S = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ de vectors de $\mathbb{R}^4$.*

$$u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\\1\end{pmatrix},\ u_4 = \begin{pmatrix}1\\4\\-1\\4\end{pmatrix},\ u_5 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\ u_6 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Calculeu la dimensió de F i doneu una base B de F formada per vectors del conjunt S. Expresseu els vectors de S que no són de B com a combinació lineal dels vectors de B.

Posem els vectors en columnes i fem transformacions elementals per files fins tenir una matriu escalonada reduïda equivalent per files (és a dir, amb tots els elements de les columnes dels pivots igual a 0 llevat del pivot, que és 1).

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 2 & 4 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & -2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix}\mathbf{1} & 0 & -1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}\mathbf{1} & 0 & -1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}\mathbf{1} & 0 & 0 & 2 & 0 & 1\\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -2\end{pmatrix}$$

Aleshores $\dim F = \text{rang} A = 4$
El conjunt $B = \{u_1, u_2, u_3, u_5\}$ és una base de F (ja que els pivots són a les columnes $1, 2, 3, 5$).
Els vectors u_4 i u_6 es poden expressar com a combinació lineal dels vectors de B, i els escalars d'aquesta expressió són a les columnes respectives (4,6):

$$u_4 = 2u_1 - u_2 + u_3$$
$$u_6 = u_1 + u_2 - 2u_5.$$

(Exercici: comproveu que efectivament els vectors donats $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ satisfan aquestes dues igualtats)

Exercici 2. *Sigui F el subespai generat pels vectors u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 de $\mathbb{R}^6$, on:*

$$u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\\2\\2\end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\\3\\2\\0\\-2\end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\1\\2\end{pmatrix},\ u_4 = \begin{pmatrix}4\\3\\2\\3\\4\\7\end{pmatrix},\ u_5 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

i) Doneu una base de F formada per vectors del conjunt $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ i expresseu els vectors restants com a combinació lineal dels vectors de la base donada. Quina és la dimensió de F?

ii) Doneu una base de F i completeu-la fins una base de $\mathbb{R}^6$ (és a dir, doneu una base de $\mathbb{R}^6$ que contingui els vectors de la base de F donada).

iii) Expresseu els vectors de F com a solució d'un sistema d'equacions lineals homogeni.

i) Posem els vectors per columnes i escalonem la matriu fins obtenir una matriu escalonada reduïda equivalent per files (és a dir, amb zeros per sobre dels pivots):

$$\begin{pmatrix}1&-1&1&4&1\\1&1&0&3&2\\1&3&-1&2&3\\2&2&0&3&1\\2&0&1&4&0\\2&-2&2&7&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&-1&1&4&1\\0&2&-1&-1&1\\0&4&-2&-2&2\\0&4&-2&-5&-1\\0&2&-1&-4&-2\\0&0&0&-1&-1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&-1&1&4&1\\0&2&-1&-1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&-3&-3\\0&0&0&-3&-3\\0&0&0&-1&-1\end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix}1&-1&1&4&1\\0&2&-1&-1&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&-1&1&4&1\\0&2&-1&-1&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&-1&1&0&-3\\0&2&-1&0&2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix}1&-1&1&0&-3\\0&1&-1/2&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}\mathbf{1}&0&1/2&0&-2\\0&\mathbf{1}&-1/2&0&1\\0&0&0&\mathbf{1}&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

El rang de la matriu és 3, ja que té 3 files no nul·les. Per tant, $\dim S = 3$ i una base de F està formada pels vectors que corresponen a les columnes dels pivots. És a dir, $\{u_1, u_2, u_4\}$ és base de F. A més, a la tercera i cinquena columna hi ha els coeficientes dels vectors u_3 i

u_5 respecte a la base $\{u_1, u_2, u_4\}$ de F, concretament:

$$u_3 = \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_2$$
$$u_5 = -2u_1 + u_2 + u_4$$

(Exercici: comproveu que efectivament els vectors donats u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 satisfan aquestes dues igualtats)

ii) Si dues matrius són equivalents per files, aleshores els vectors fila de les dues matrius generen el mateix subespai. Per tant, si posem els vectors que generen F per files i fem transformacions elementals per files fins obtenir una matriu "escalonada" amb pivots no necessàriament iguals a 1, aleshores els vectors fila d'aquesta matriu generen F:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -5 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -5 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, $\dim(S) = 3$, i a més:

$$S = < u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 > = < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} > .$$

A més, els 3 vectors fila corresponents a les files no nul·les formen una base de F que podem completar amb els 3 (=6-3) vectors de la base canònica de $\mathbb{R}^6$ fins tenir una base de $\mathbb{R}^6$. Per ser:

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} = 6,$$

podem completar la base trobada de F amb els vectors de la base canònica de $\mathbb{R}^6$:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

És a dir, una base de $\mathbb{R}^6$ és:

$$\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\3\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\}.$$

Observació. Hem vist a l'apartat i) que els vectors u_1, u_2, u_4 formen base. Per a completar aquesta base fins una base de $\mathbb{R}^6$, si posem els vectors per columnes, hem d'afegir 3 columnes de manera que el rang de la matriu final sigui 6:

$$\text{rang}\begin{pmatrix}1 & -1 & 4 & * & * & *\\ 1 & 1 & 3 & * & * & *\\ 1 & 3 & 2 & * & * & *\\ 2 & 2 & 3 & * & * & *\\ 2 & 0 & 4 & * & * & *\\ 2 & -2 & 7 & * & * & *\end{pmatrix} = 6$$

i en aquest cas no es veu a ull quins poden ser aquests vectors. Podem provar amb 3 vectors a l'atzar de la base canònica i canviar-los si no funciona. Per exemple, provem amb:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Calculem el rang de la matriu (recordeu que si permutem columnes el rang no varia):

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0\\ 2 & -2 & 7 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 7\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

que té rang igual a 6. Per tant, en aquest cas podem completar la base $\{u_1, u_2, u_4\}$ amb els vectors:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

iii) **Mètode I.**

Un vector genèric $x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6$ és de F si és combinació lineal dels vectors de la base $\{u_1, u_2, u_4\}$ trobada al primer apartat, i això passa si $\text{rang}(u_1, u_2, u_4, x) = \text{rang}(u_1, u_2, u_4) = 3$. Fem transformacions elementals per files a la matriu (u_1, u_2, u_4, x):

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 4 & x_1\\ 1 & 1 & 3 & x_2\\ 1 & 3 & 2 & x_3\\ 2 & 2 & 3 & x_4\\ 2 & 0 & 4 & x_5\\ 2 & -2 & 7 & x_6\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 4 & x_1\\ 0 & 2 & -1 & x_2 - x_1\\ 0 & 4 & -2 & x_3 - x_1\\ 0 & 4 & -5 & x_4 - 2x_1\\ 0 & 2 & -4 & x_5 - 2x_1\\ 0 & 0 & -1 & x_6 - 2x_1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 4 & x_1\\ 0 & 2 & -1 & x_2 - x_1\\ 0 & 0 & 0 & x_3 - x_1 - 2(x_2 - x_1)\\ 0 & 0 & -3 & x_4 - 2x_1 - 2(x_2 - x_1)\\ 0 & 0 & -3 & x_5 - 2x_1 - (x_2 - x_1)\\ 0 & 0 & -1 & x_6 - 2x_1\end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 4 & x_1\\ 0 & 2 & -1 & x_2 - x_1\\ 0 & 0 & 0 & x_1 - 2x_2 + x_3\\ 0 & 0 & -3 & -2x_2 + x_4\\ 0 & 0 & -3 & -x_1 - x_2 + x_5\\ 0 & 0 & -1 & -2x_1 + x_6\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 4 & x_1\\ 0 & 2 & -1 & x_2 - x_1\\ 0 & 0 & 1 & 2x_1 - x_6\\ 0 & 0 & -3 & -2x_2 + x_4\\ 0 & 0 & -3 & -x_1 - x_2 + x_5\\ 0 & 0 & 0 & x_1 - 2x_2 + x_3\end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 4 & x_1\\ 0 & 2 & -1 & x_2 - x_1\\ 0 & 0 & 1 & 2x_1 - x_6\\ 0 & 0 & 0 & -2x_2 + x_4 + 3(2x_1 - x_6)\\ 0 & 0 & 0 & -x_1 - x_2 + x_5 + 3(2x_1 - x_6)\\ 0 & 0 & 0 & x_1 - 2x_2 + x_3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 4 & x_1\\ 0 & 2 & -1 & x_2 - x_1\\ 0 & 0 & 1 & 2x_1 - x_6\\ 0 & 0 & 0 & 6x_1 - 2x_2 + x_4 - 3x_6\\ 0 & 0 & 0 & 5x_1 - x_2 + x_5 - 3x_6\\ 0 & 0 & 0 & x_1 - 2x_2 + x_3\end{pmatrix}$$

El rang de la matriu obtinguda és 3 si i només si les tres últimes files són nul·les, que equival a que es satisfacin les tres equacions lineals:

$$6x_1 - 2x_2 + x_4 - 3x_6 = 0,\ 7x_1 - x_2 + x_5 - 3x_6 = 0,\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0.$$

Per tant,

$$S = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6 : 6x_1 - 2x_2 + x_4 - 3x_6 = 0,\, 7x_1 - x_2 + x_5 - 3x_6 = 0,\, x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \}.$$

Mètode II. Posem els vectors per files i fem transformacions elementals per files fins tenir una matriu escalonada reduïda per files (és a dir, amb zeros damunt dels pivots):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \text{(veure apartat } \textit{ii)} \text{)} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 0 & 0 & 4/3 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 0 & -1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 0 & -1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una possible base de F és $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ -2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1/3 \end{pmatrix} \}$.

Un vector $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6$ és de F si i només si és combinació lineal dels vectors de la base de F, és a dir, si i només si es compleix:

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 0 & -1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 1/3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 0 & -1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 1/3 \end{pmatrix} = 3.$$

Per calcular el rang de la matriu de l'esquerra, permutem la tercera i quarta columnes i escalonem:

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 0 & -1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 1/3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} \overset{(1)}{=} \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 2 & -1 & -2/3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 1/3 \\ x_1 & x_2 & x_4 & x_3 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(2)}{=} \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 2 & -1 & -2/3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & x_2 & x_4 & x_3+x_1 & x_5-x_1 & x_6-2x_1 \end{pmatrix},$$

$$\overset{(3)}{=} \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 2 & -1 & -2/3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & x_4 & x_3+x_1-2x_2 & x_5-x_1+x_2 & x_6-2x_1+\frac{2}{3}x_2 \end{pmatrix},$$

$$\overset{(4)}{=} \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 2 & -1 & -2/3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & x_3+x_1-2x_2 & x_5-x_1+x_2-x_4 & x_6-2x_1+\frac{2}{3}x_2-\frac{1}{3}x_4 \end{pmatrix},$$

on:
(1) Hem permutat les columnes 3a i 4a;
(2) 4a fila := 4a fila + $(-x_1)\times$ 1a fila;
(3) 4a fila := 4a fila + $(-x_2)\times$ 2a fila;
(4) 4a fila := 4a fila + $(-x_4)\times$ 3a fila.
El rang de la matriu obtinguda és 3 si i només si la quarta fila és nul·la, és a dir, si si i només si es satisfà el sistema d'equacions lineals homogeni següent:

$$\left.\begin{array}{rl} x_1-2x_2+x_3 & =0 \\ -x_1+x_2-x_4+x_5 & =0 \\ -2x_1+\frac{2}{3}x_2-\frac{1}{3}x_4+x_6 & =0 \end{array}\right\}.$$

Per tant,

$$S=\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6 : x_1-2x_2+x_3=0,\ -x_1+x_2-x_4+x_5=0,\ -2x_1+\frac{2}{3}x_2-\frac{1}{3}x_4+x_6=0\right\}.$$

Observació. Les equacions dels sistemes obtinguts amb els dos mètodes no són les mateixes tot i que el conjunt de solucions que defineixen és el mateix.

Exercici: comproveu que efectivament els 5 vectors donats u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 de F satisfan aquest sistema d'equacions lineals homogeni.