7. Funciones de Varias Variables

7.1 Topología en el espacio n-dimensional.

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

Definición-1. Sea $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. La *norma de* x es

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Propiedades : 1) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$
2) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Definición-2. Sea $x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. La *distancia entre* x *e* y es

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Nota: $d(x, 0) = \|x\|$.

Propiedades : 1) $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2) $d(x, y) = d(y, x)$
3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$, $z \in \mathbb{R}^n$.

Definición-3. Sea $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n,\ r \in \mathbb{R}^+$.
La *bola abierta de centro* a *y radio* r es $B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) < r\}$.

Definición-4. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Llamaremos *complemento de* A el conjunto

$$A^c = \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin A\}.$$

Definición-5. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$.
El punto a es *interior de* $A \iff \exists\, B_r(a) \subset A$.
El punto a es *exterior de* $A \iff \exists\, B_r(a) : B_r(a) \cap A = \varnothing$.
El punto a es *punto frontera de* $A \iff \forall\, B_r(a)$ contiene puntos de A y puntos de A^c.

Definición-6. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$.
A se llama *abierto* $\iff \forall\, a \in A$ es interior.
A se llama *cerrado* $\iff A$ contiene todos los puntos frontera.
A se llama *acotado* $\iff \exists\, B_r(a) \supset A$.
A se llama *compacto* $\iff A$ es cerrado y acotado.

Definición-7. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$.
La *frontera de* A es el conjunto de todos los puntos frontera de A y se designa ∂A o FrA.
El *interior de* A es el conjunto de todos los puntos interiores de A y se designa $\mathring{A}$.
La *adherencia de* A es el conjunto menor cerrado que contiene A y se designa $AdhA$ o $\overline{A}$.

Nota : 1) $\mathring{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : x \in A \setminus \partial A\}$
2) $AdhA = \{x \in \mathbb{R}^n : x \in A \cup \partial A\}$

7.2 Funciones de Varias Variables

Definición-8. Una *función real de varias variables* es una aplicación

$$\begin{array}{rll} f: & A \subseteq \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x = (x_1, \ldots, x_n) & \longrightarrow y = f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

donde A es el dominio de f,
$f(x)$ es la imagen de x,
$f(A) = \{f(x), \forall\, x \in A\}$ es el recorrido o conjunto imagen de f,
$\{(x, f(x)), \forall\, x \in A\} = \{(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)), \forall\, (x_1, \ldots, x_n) \in A\}$
es la gráfica de f.

Definición-9. **(**$n = 2$**)** Las *curvas de nivel* son las curvas encima de las cuales el valor de la función es constante.

Es decir, una *curva de nivel* es una curva que conecta los puntos en que la función tiene un mismo valor constante.

Definición-10. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$ y f una función real de varias variables definida en todos los puntos de A excepto posiblemente en a. Dicen que

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : \forall\, x \in B_\delta(a) \setminus \{a\} \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Nota: las propiedades de límites son las mismas que para $n = 1$.

Definición-11. Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, A abierto, $a \in A$. Dicen que la función f es continua en el punto a si y sólo si $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
Nota: 1) la propiedad de f ser continua en a se designa $f \in \mathcal{C}(a)$;
2) las propiedades de funcions continuas son las mismas que para $n = 1$.

Propiedades. Sea $f, g: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in A$.

1. $f, g \in \mathcal{C}(a) \implies \begin{array}{l} f \pm g,\ f \cdot g \in \mathcal{C}(a) \\ f/g \in \mathcal{C}(a) \text{ si } g(a) \neq 0 \end{array}$

2. $\left.\begin{array}{l} f\ \in \mathcal{C}(a) \\ h\ \in \mathcal{C}(f(a)) \end{array}\right\} \implies h \circ f\ \in \mathcal{C}(a)$

3. $\left.\begin{array}{l} \exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = b \\ h\ \in \mathcal{C}(b) \end{array}\right\} \implies \exists \lim\limits_{x \to a} (h \circ f)(x) = \lim\limits_{x \to a} (h(f(x)) = h(\lim\limits_{x \to a} f(x)) = h(b)$

4. $f\ \in \mathcal{C}(a) \implies \exists\, \delta > 0 : f$ es acotada $\forall\, x \in B_\delta(a) \cap A$