4 DERIVADAS Y APLICACIONES

(Resumen teórico)

4.1 Introducción

Una función f es *derivable* en un punto a de su dominio si existe el límite

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

y es un número real. El número $f'(a)$ se denomina *derivada de f en a*.

Si f es derivable en a, entonces f es continua en a. El recíproco no es cierto: hay funciones continuas en un punto no derivables en ese punto.

Geométricamente, la derivabilidad de f en a significa la existencia de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $(a, f(a))$; en este caso, la ecuación de la recta tangente es

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Así pues, $f'(a)$ es la *pendiente de la recta tangente* a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$. La función correspondiente a la tangente $x \mapsto f(a) + f'(a)(x - a)$ es una función polinómica de primer grado que aproxima la función f cerca del punto a.

Las siguientes propiedades expresan el comportamiento de la derivación respecto a las operaciones.

- Si f y g son derivables en a, entonces $f+g$ es derivable en a y
$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a).$$
- Si f y g son derivables en a, entonces fg es derivable en a y
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$
- Si f y g son derivables en a y $g(a) \neq 0$, entonces
$$(f/g)'(a) = (f'(a)g(a) - f(a)g'(a))/g(a)^2.$$
- **(Regla de la cadena)** Si f es derivable en a y g es derivable en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es derivable en a y
$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Sea f una función de dominio D y sea D' el conjunto de puntos de D en los que la función f es derivable. La función $f' \colon D' \to \mathbb{R}$ que hace corresponder a cada punto $x \in D'$ el valor $f'(x)$ de la derivada de f en x se denomina función derivada o derivada de f. Si f' es también una función derivable, su derivada se denota por f'' y se denomina segunda derivada de f. Recurrentemente, la n-ésima derivada de f, denotada $f^{(n)}$, es la derivada de la función $f^{(n-1)}$.

4.2 Tabla de derivadas

En esta tabla, $f(x)$ es de la forma $f(x) = g(u(x))$ para ciertas funciones u y g. Implícitamente, se suponen las condiciones de existencia y derivabilidad de las funciones involucradas.

f	f'		f	f'
k	0	$(k \in \mathbb{R})$	$\arccos u$	$-u'/\sqrt{1-u^2}$
u^k	$ku^{k-1}u'$	$(0 \neq k \in \mathbb{R})$	$\arctan u$	$u'/(1+u^2)$
$\log_a u$	$u'/(u \ln a)$	$(a > 0)$	$\sinh u$	$u' \cosh u$
a^u	$u'a^u \ln a$	$(a > 0)$	$\cosh u$	$u' \sinh u$
$\sin u$	$u' \cos u$		$\tanh u$	$u'/\cosh^2 u$
$\cos u$	$-u' \sin u$		$\arg\sinh u$	$u'/\sqrt{u^2+1}$
$\tan u$	$u'/\cos^2 u$		$\arg\cosh u$	$u'/\sqrt{u^2-1}$
$\arcsin u$	$u'/\sqrt{1-u^2}$		$\arg\tanh u$	$u'/(1-u^2)$

Funciones potenciales-exponenciales

La derivada de $f(x) = u(x)^{v(x)}$ se puede calcular mediante la llamada derivación logarítmica. Supongamos que u y v son funciones derivables y que $f(x) = u(x)^{v(x)}$ toma valores positivos. Tomando logaritmos, obtenemos $\ln f(x) = v(x) \ln u(x)$. Derivando ambos miembros de la igualdad, se obtiene

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)},$$

de donde

$$f'(x) = u(x)^{v(x)} v'(x) \ln u(x) + v(x) u(x)^{v(x)-1} u'(x).$$

4.3 Teoremas del valor medio

Los siguientes teoremas están entre los resultados teóricos más importantes relativos a funciones derivables.

Teorema de Rolle. Si f es una función continua en un intervalo $[a, b]$, derivable en el intervalo (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Geométricamente, en las condiciones del teorema de Rolle, hay un punto de la curva $y = f(x)$ con tangente horizontal.

Teorema de Cauchy. Si f y g son funciones continuas en un intervalo $[a, b]$ y derivables en el intervalo (a, b), entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que

$$g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a)).$$

Si $g(x) = x$, obtenemos el teorema del valor medio.
Teorema del valor medio. Si f es una función continua en un intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b), entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Geométricamente, esto significa que la curva $y = f(x)$ contiene por lo menos un punto $(c, f(c))$ en el que la tangente es paralela a la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

La derivada de una función constante es cero. Para funciones definidas en un intervalo abierto, el recíproco también es cierto:
Teorema fundamental. Si f es una función derivable en un intervalo abierto (a, b) y $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces la función f es constante en (a, b).

4.4 Monotonía

Sea f una función e I un intervalo (de cualquier tipo) contenido en el dominio de f.

La función f es *creciente* (resp. *estrictamente creciente*) en I si, para todo $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) \leq f(x_2)$ (resp. $f(x_1) < f(x_2)$).

La función f es *decreciente* (resp. *estrictamente decreciente*) en I si, para todo $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) \geq f(x_2)$ (resp. $f(x_1) > f(x_2)$).

La función f es *monótona* en I si es creciente o decreciente en I, y *estrictamente monótona* si es estrictamente creciente o estrictamente decreciente en I.

Si f es derivable en I, la relación entre f' y la monotonía de f en I se deduce del teorema del valor medio y es la siguiente:

- Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, entonces f es estrictamente creciente en I.
- Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$, entonces f es estrictamente decreciente en I.
- Si f es creciente en I, entonces $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.
- Si f es decreciente en I, entonces $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in I$.

4.5 Extremos relativos

Sea f una función y a un punto de su dominio. La función f tiene un *máximo relativo* en a si existe un entorno U de a tal que $f(x) \leq f(a)$ para todo $x \in U$. La función f tiene un *mínimo relativo* en a si existe un entorno U de a tal que $f(a) \leq f(x)$ para todo $x \in U$. Un *extremo relativo* es un máximo o un mínimo relativo.

Ciertas condiciones de derivabilidad sobre f dan unas condiciones necesarias y otras suficientes de existencia de extremos relativos.

- Si f tiene un extremo relativo en a y existe $f'(a)$, entonces $f'(a) = 0$.
- Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en a.
- Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en a.
- Si $f'(a) = 0$ y existe $\delta > 0$ tal que para todo x con $a - \delta < x < a$ se cumple $f'(x) < 0$ y para todo x con $a < x < a + \delta$ se cumple $f'(x) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en a.
- Si $f'(a) = 0$ y existe $\delta > 0$ tal que para todo x con $a - \delta < x < a$ se cumple $f'(x) > 0$ y para todo x con $a < x < a + \delta$ se cumple $f'(x) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en a.

4.6 La regla de L'Hôpital

Regla de L'Hôpital. Sean $\triangle \in \{a, a^+, a^-, +\infty, -\infty\}$ y f y g funciones tales que $\lim_{x\to\triangle} f(x) = \lim_{x\to\triangle} g(x) \in \{0, +\infty, -\infty\}$. Si existe el límite $\lim_{x\to\triangle} f'(x)/g'(x)$, entonces también existe el límite $\lim_{x\to\triangle} f(x)/g(x)$ y se cumple

$$\lim_{x\to\triangle} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\triangle} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

La regla de L'Hôpital también puede aplicarse cuando una de las funciones tiende a $+\infty$ y la otra a $-\infty$. Por ejemplo, supongamos que $\lim_{x\to\triangle} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to\triangle} g(x) = +\infty$. Entonces,

$$\lim_{x\to\triangle} \frac{f(x)}{g(x)} = -\lim_{x\to\triangle} \frac{-f(x)}{g(x)} = -\lim_{x\to\triangle} \frac{-f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\triangle} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

4.7 Convexidad

Sea I un intervalo contenido en el dominio de una función f. La función f es *convexa* en I si, para todos $a, x, b \in I$, con $a < x < b$, se tiene

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{4.1}$$

Análogamente, la function f es *cóncava* en I if, para todos $a, x, b \in I$, con $a < x < b$, se tiene

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{4.2}$$

Las condiciones (**??**) y (**??**) pueden escribirse también

$$f(x) < f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \quad f(x) > f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

En ambas desigualdades, el miembro de la derecha corresponde a una función cuya gráfica es la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Así que, geométricamente, la función f es convexa o cóncava en I, dependiendo de si la gráfica de la función en cada intervalo $[a, b] \subset I$ permanece, respectivamente, por debajo o por encima del segmento que une $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$.

En el caso de funciones derivables, la convexidad o concavidad se relacionan con las derivadas como sigue.

Sea f una función derivable en un intervalo I. Entonces:

- Si f es convexa en I, se cumple $f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$ para todo $a, x \in I$, $x \neq a$.
- Si f es cóncava en I, se cumple $f(x) < f(a) + f'(a)(x - a)$ para todo $a, x \in I$, $x \neq a$.

Geométricamente, las condiciones anteriores aseguran que si f es convexa (resp. cóncava), la tangente en todo punto de la gráfica queda por debajo (resp. por encima) de la función.

El criterio más usual de convexidad o concavidad es el siguiente.

Sea f una función tal que existe f'' en un intervalo I.

- Si $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$, entonces f es convexa en I.
- Si $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$, entonces f es cóncava en I.

Sean f una función y a un punto de su dominio tal que existe un entorno $(a-\delta, a+\delta)$ de a contenido en el dominio de f. Si f es convexa en $(a-\delta, a)$ y cóncava en $(a, a+\delta)$, o bien cóncava en $(a-\delta, a)$ y convexa en $(a, a+\delta)$, se dice que a es un *punto de inflexión* de la función. Tenemos la condición necesaria siguiente:

- Si a es un punto de inflexión de f y en un entorno de a existe f'' y es continua, entonces $f''(a) = 0$.

4.8 Extremos absolutos en intervalos cerrados

Por el teorema de Weierstrass, toda función f continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ tiene máximo y mínimo absolutos en dicho intervalo, es decir, existen al menos dos puntos x_M y x_m en $[a, b]$ tales que

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \quad \text{para todo} \quad x \in [a, b].$$

Los puntos x_m y x_M están entre los siguientes:

- Los extremos del intervalo, $x = a$ y $x = b$.
- Los puntos de (a, b) en que f no sea derivable.
- Los puntos de (a, b) en que la derivada de f es cero (los cuales se llaman *puntos críticos* de f).

4.9 Resolución aproximada de ecuaciones

El método de Newton-Raphson

Sea f una función derivable definida en el intervalo $[a, b]$. Deseamos encontrar una solución de la ecuación $f(x) = 0$. Empezamos con un valor inicial x_0 y definimos para cada número natural n

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Geométricamente, x_{n+1} es la abcisa del punto de intersección de la recta tangente en $(x_n, f(x_n))$ con el eje de abcisas.

El valor inicial x_0 debe tomarse razonablemente cerca de la solución buscada. La derivada de f no debe anularse durante el proceso iterativo. En estas condiciones, la sucesión (x_n) converge hacia una solución de la ecuación. El método puede fallar si esta solución es múltiple.

El proceso debe detenerse cuando $|x_{n+1} - x_n|$ and $|f(x_{n+1})|$ son ambos menores que la cota del error admisible, ϵ. Entonces x_{n+1} approxima la solución exacta de la ecuación $f(x) = 0$ con error menor que ϵ.