

Taller M2: EXTREMS RELATIUS

2019-20, M2, FIB

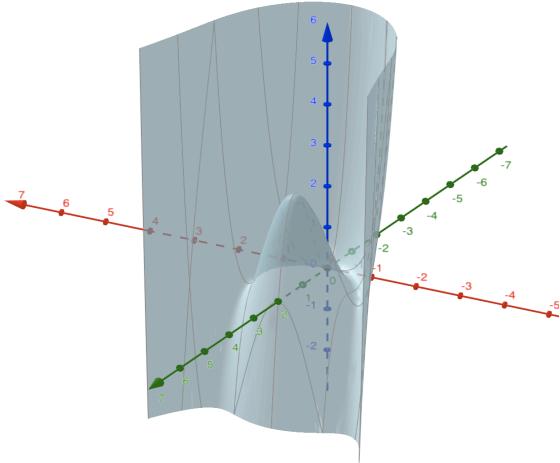
TALLER 9.3

with(Student[VectorCalculus]):

with(Student[MultivariateCalculus]):

Problema 9

- 9 Comproveu que $(0,0)$ és un punt de sella de la funció $f(x,y) = (x^2 + (y-1)^2 - 1)(x^2 - 2y)$.



$$f := (x,y) \rightarrow (x^2 + (y-1)^2 - 1) \cdot (x^2 - 2y) \quad (1.1.1)$$

$$f := (x,y) \mapsto (x^2 + (y-1)^2 - 1) (x^2 + (-2y))$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$$

$$2x(x^2 - 2y) + 2(x^2 + (y-1)^2 - 1)x \quad (1.1.2)$$

$$factor(\%)$$

$$2x(2x^2 + y^2 - 4y) \quad (1.1.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$$

$$(2y-2)(x^2 - 2y) - 2x^2 - 2(y-1)^2 + 2 \quad (1.1.4)$$

$$factor(\%)$$

$$2x^2y - 4x^2 - 6y^2 + 8y \quad (1.1.5)$$

Gradient($f(x, y)$, $[x, y] = [0, 0]$)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.1.6)$$

$(0, 0)$ és punt crític

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) = 12x^2 + 2y^2 - 8y \quad (1.1.7)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) = 2x^2 - 12y + 8 \quad (1.1.8)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) = -4x + 2(2y - 2)x \quad (1.1.9)$$

$$factor(\%) = 4x(-2+y) \quad (1.1.10)$$

Hessian($f(x, y)$, $[x, y] = [0, 0]$)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \quad (1.1.11)$$

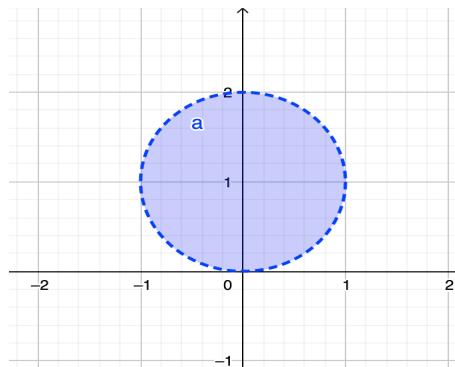
El determinant és zero i el criteri de la matriu hessiana no ens permet classificar. Per al punt $(0, 0)$ cal fer un **estudi local**

$$f(0, 0) = 0 \quad (1.1.12)$$

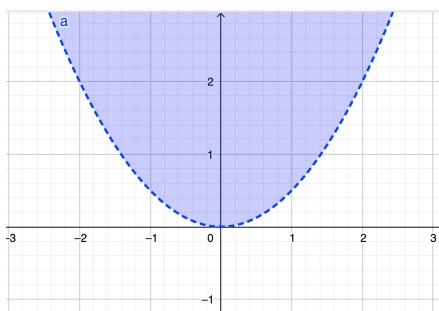
$$f(x, y) = (x^2 + (y - 1)^2 - 1)(x^2 - 2y) \quad (1.1.13)$$

Volem saber quin signe té $f(x, y)$ en entorns del punt $(0, 0)$

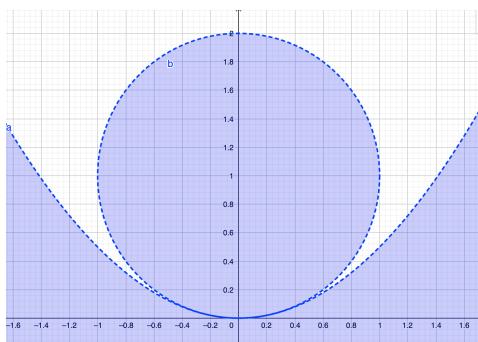
REGIÓ $x^2 + (y - 1)^2 - 1 < 0$



REGIÓ $x^2 - 2y < 0$



En blau tenim la regió $f(x,y) = (x^2 + (y-1)^2 - 1)(x^2 - 2y) > 0$ i en blanc tenim la regió $f(x,y) < 0$

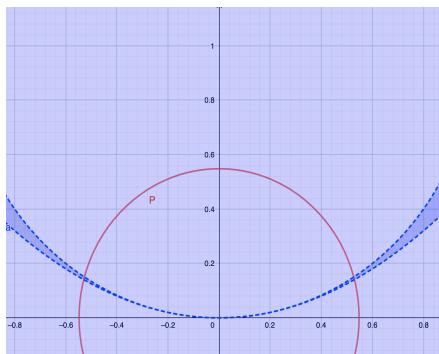


Observem que l'únic punt de contacte entre totes dues corbes és el punt $(0, 0)$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + (y-1)^2 - 1 = 0 \\ x^2 - 2y = 0 \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 2y = 0 \\ x^2 - 2y = 0 \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} y^2 = 0 \\ x^2 - 2y = 0 \end{array} \right\} \implies x = y = 0$$

$$solve(\{x^2 + (y-1)^2 - 1 = 0, x^2 - 2y = 0\}) \quad \{x = 0, y = 0\} \quad (1.1.14)$$

Per tant, en qualsevol entorn del punt $(0, 0)$ hi ha punts (x, y) amb $f(x, y) > 0$ i punts (x, y) amb $f(x, y) < 0$



El punt $(0, 0)$ és punt de sella de f

Problema 10

10 Trobeu i classifiqueu els punts crítics de les funcions següents:

- a) $f(x, y) = x^2 + y^2 + x + y + xy$;
- b) $f(x, y) = \sin x \sin y$;
- c) $f(x, y) = \frac{x + y}{1 + x^2 + y^2}$;
- d) $f(x, y) = (x - 1)^4 + (x - y)^4$;
- e) $f(x, y) = x^4 + y^4 + 4xy - 2x^2 - 2y^2$;
- f) $f(x, y) = x^3 - x^2y + 3y^2$;
- g) $f(x, y) = xy^2 (3 - x - y)$.

a)

$$f := (x, y) \rightarrow x^2 + y^2 + x + y + xy$$

$$f := (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + x + y + xy \quad (1.2.1.1)$$

$$fx := \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$$

$$fx := 2x + y + 1 \quad (1.2.1.2)$$

$$fy := \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$$

$$fy := x + 2y + 1 \quad (1.2.1.3)$$

Gradient($f(x, y)$, [x, y])

$$\begin{bmatrix} 2x + y + 1 \\ x + 2y + 1 \end{bmatrix} \quad (1.2.1.4)$$

És un sistema d'equacions lineals de 2 equacions i 2 incògites. Resolem.

$$solve(\{fx=0, fy=0\}, \{x, y\})$$

$$\left\{ x = -\frac{1}{3}, y = -\frac{1}{3} \right\} \quad (1.2.1.5)$$

Punt crític: $P = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right)$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) \quad 2 \quad (1.2.1.6)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) \quad 2 \quad (1.2.1.7)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) \quad 1 \quad (1.2.1.8)$$

Hessian ($f(x, y)$, $[x, y]$)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (1.2.1.9)$$

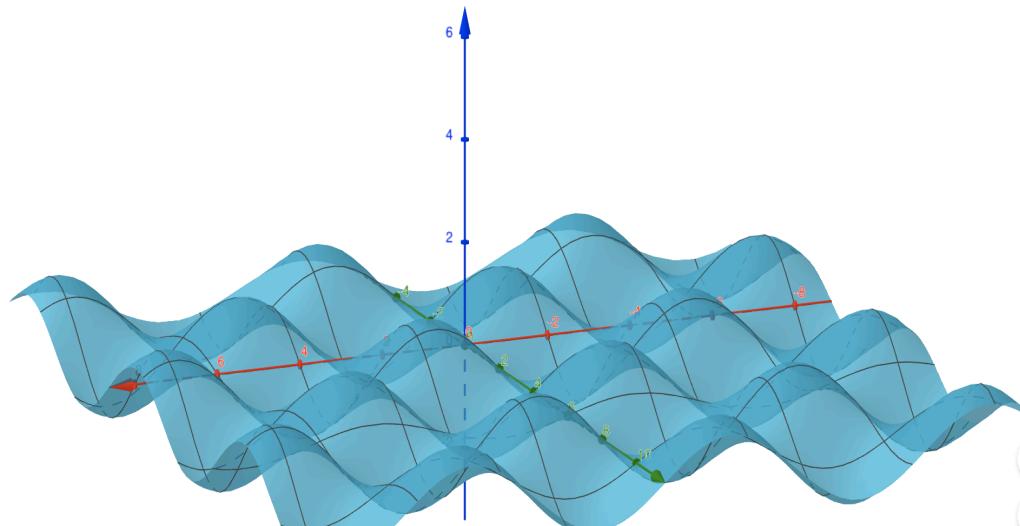
Té determinant 3, positiu, i el coeficient (1, 1) és 2, positiu.

Per tant, P és un mínim relatiu de f

b)

$$f := (x, y) \rightarrow \sin(x) \cdot \sin(y)$$

$$f := (x, y) \mapsto \sin(x) \sin(y) \quad (1.2.2.1)$$



$$f_x := \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$$

$$f_x := \cos(x) \sin(y) \quad (1.2.2.2)$$

$$f_y := \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$$

$$f_y := \sin(x) \cos(y) \quad (1.2.2.3)$$

Gradient($f(x, y)$, $[x, y]$)

$$\begin{bmatrix} \cos(x) \sin(y) \\ \sin(x) \cos(y) \end{bmatrix} \quad (1.2.2.4)$$

$$f_x = \cos(x) \sin(y) = 0$$

$$\begin{aligned} \cos(x) = 0 &\longrightarrow x = \frac{\pi}{2} + n\pi \\ \sin(y) = 0 &\longrightarrow y = k\pi \\ \sin(x) = 0 &\longrightarrow x = m\pi \end{aligned}$$

$$f_y = \sin(x) \cos(y) = 0$$

$$\cos(y) = 0 \longrightarrow y = \frac{\pi}{2} + r\pi$$

Tenim dues famílies infinites de punts crítics.

Punts crítics $P_{nr} = \left(\frac{\pi}{2} + n\cdot\pi, \frac{\pi}{2} + r\cdot\pi \right)$, $Q_{mk} = (m\cdot\pi, k\cdot\pi)$ on n, r, m, k varien en el conjunt \mathbb{Z} dels nombres enters.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) = -\sin(x) \sin(y) \quad (1.2.2.5)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) = -\sin(x) \sin(y) \quad (1.2.2.6)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) = \cos(x) \cos(y) \quad (1.2.2.7)$$

Hessian($f(x, y)$, $[x, y]$)

$$\begin{bmatrix} -\sin(x) \sin(y) & \cos(x) \cos(y) \\ \cos(x) \cos(y) & -\sin(x) \sin(y) \end{bmatrix} \quad (1.2.2.8)$$

En els punts $P_{nr} = \left(\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, \frac{\pi}{2} + r \cdot \pi \right)$ tenim $\cos(x) = \cos(y) = 0$, $\sin(x) = (-1)^n$ i $\sin(y) = (-1)^r$.

n i r parells

Hessian $\left(f(x, y), [x, y] = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]\right)$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.2.2.9)$$

Té determinant positiu i el coeficient (1, 1) és negatiu

Per tant, és un màxim relatiu de f

n parell, r senar

Hessian $\left(f(x, y), [x, y] = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3 \cdot \pi}{2} \right]\right)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.2.2.10)$$

Té determinant positiu i el coeficient (1, 1) és positiu

Per tant, és un mínim relatiu de f

n senar, r parell

Hessian $\left(f(x, y), [x, y] = \left[\frac{3 \cdot \pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]\right)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.2.2.11)$$

n i r senars

Hessian $\left(f(x, y), [x, y] = \left[\frac{3 \cdot \pi}{2}, \frac{3 \cdot \pi}{2} \right]\right)$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.2.2.12)$$

Si n, r tenen la mateixa paritat, $P_{nr} = \left(\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, \frac{\pi}{2} + r \cdot \pi \right)$ és màxim relatiu de f

Si n, r tenen diferent paritat, P_{nr} és mínim relatiu de f

En els punts $Q_{mk} = (m \cdot \pi, k \cdot \pi)$ tenim $\sin(x) = \sin(y) = 0$, $\cos(x) = (-1)^m$ i $\cos(y) = (-1)^k$.

Hessian($f(x, y)$, $[x, y] = [0, 0]$)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.2.2.13)$$

Hessian($f(x, y)$, $[x, y] = [0, \pi]$)

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.2.2.14)$$

Hessian($f(x, y)$, $[x, y] = [\pi, 0]$)

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.2.2.15)$$

Hessian($f(x, y)$, $[x, y] = [\pi, \pi]$)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.2.2.16)$$

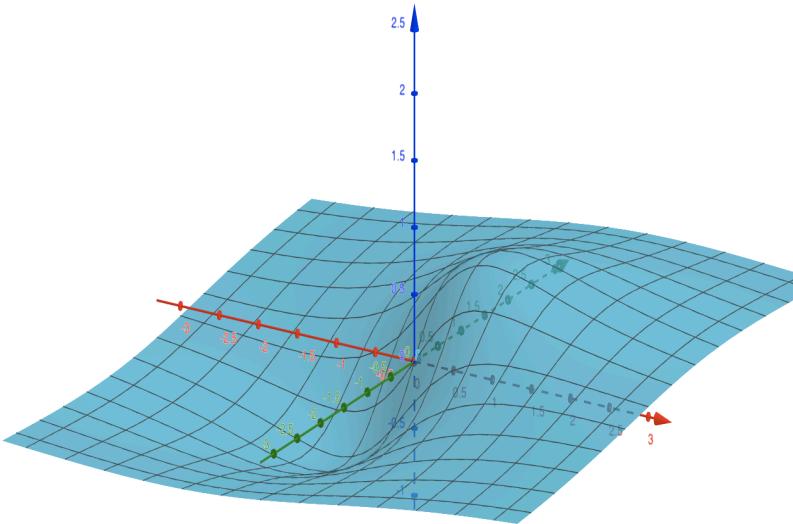
En tots els casos tenim determinant < 0

Els punts $Q_{mk} = (m \cdot \pi, k \cdot \pi)$ són punts de sella de f

 $c)$

$$f := (x, y) \rightarrow \frac{x+y}{1+x^2+y^2}$$

$$f := (x, y) \mapsto (x+y) (1+x^2+y^2)^{-1} \quad (1.2.3.1)$$



$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$$

$$\frac{1}{x^2 + y^2 + 1} - \frac{2(x+y)x}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \quad (1.2.3.2)$$

factor (%)

$$-\frac{x^2 + 2xy - y^2 - 1}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \quad (1.2.3.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$$

$$\frac{1}{x^2 + y^2 + 1} - \frac{2(x+y)y}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \quad (1.2.3.4)$$

factor (%)

$$\frac{x^2 - 2yx - y^2 + 1}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \quad (1.2.3.5)$$

simplify(Gradient(f(x,y), [x,y]))

$$\left[\begin{array}{c} \frac{-x^2 - 2yx + y^2 + 1}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \\ \frac{x^2 - 2yx - y^2 + 1}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \end{array} \right] \quad (1.2.3.6)$$

Per anular les derivades parcials, cal que els numeradors s'anulen.

$$-x^2 - 2yx + y^2 + 1 = 0$$

$$x^2 - 2yx - y^2 + 1 = 0$$

Si sumem les dues equacions obtenim $x^2 = y^2$ i amb això obtenim $2xy = 1$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccc}
 & x = y & \longrightarrow & 2y^2 = 1 & \longrightarrow \\
 & 2xy = 1 & & & x = y = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 \diagup & & & & \\
 x^2 = y^2 & & & & x = y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\
 \diagdown & & & & \\
 & x = -y & \longrightarrow & -2y^2 = 1 & \longrightarrow \\
 & 2xy = 1 & & & \text{No té solució}
 \end{array}
 \end{array}$$

Punts crítics $P = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$, $Q = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$

$$\begin{aligned}
 & \text{factor} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) \right) \\
 & \quad \frac{2(x^3 + 3x^2y - 3xy^2 - y^3 - 3x - y)}{(x^2 + y^2 + 1)^3} \tag{1.2.3.7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{factor} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) \right) \\
 & \quad - \frac{2(x^3 + 3x^2y - 3xy^2 - y^3 + x + 3y)}{(x^2 + y^2 + 1)^3} \tag{1.2.3.8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{factor} \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) \right) \\
 & \quad - \frac{2(x + y)(x^2 - 4yx + y^2 + 1)}{(x^2 + y^2 + 1)^3} \tag{1.2.3.9}
 \end{aligned}$$

Per substituir useu que ens punts P i Q es té $x^2 + y^2 = 1$ i $x = y$

Substituïm en el punt P

$$\begin{aligned}
 & \text{Hessian} \left(f(x, y), [x, y] = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \right) \\
 & \quad \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \tag{1.2.3.10}
 \end{aligned}$$

Té determinant $\frac{1}{2}$, positiu, i el coeficient $(1, 1)$ és negatiu.

Per tant, P és un màxim relatiu de f

Substituïm en el punt Q

$$\text{Hessian} \left(f(x, y), [x, y] = \left[\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right] \right) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad (1.2.3.11)$$

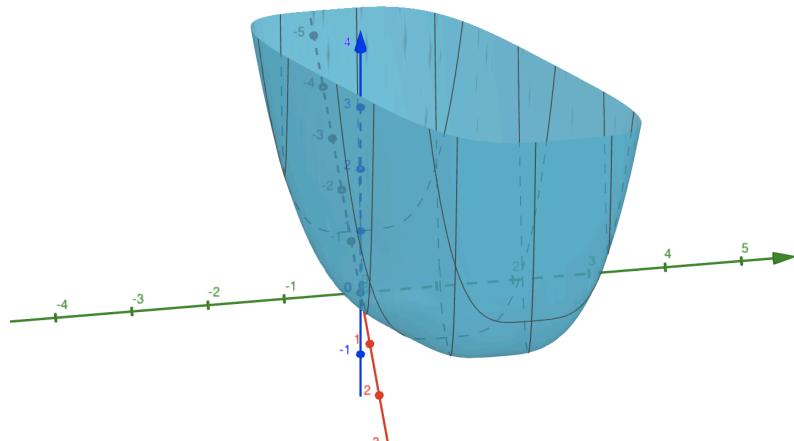
Té determinant $\frac{1}{2}$, positiu, i el coeficient $(1, 1)$ és positiu.

Per tant, Q és un mínim relatiu de f

d)

$$f := (x, y) \rightarrow (x - 1)^4 + (x - y)^4$$

$$f := (x, y) \mapsto (x - 1)^4 + (x + (-y))^4 \quad (1.2.4.1)$$



$$fx := \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$$

$$fx := 4(x - 1)^3 + 4(x - y)^3 \quad (1.2.4.2)$$

$$fy := \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$$

$$fy := -4(x-y)^3 \quad (1.2.4.3)$$

Gradient($f(x,y)$, [x,y])

$$\begin{bmatrix} 4(x-1)^3 + 4(x-y)^3 \\ -4(x-y)^3 \end{bmatrix} \quad (1.2.4.4)$$

De l'equació $fy = 0$ obtenim $x = y$. Llavors de l'equació $fx = 0$ obtenim $x = 1$

$$solve(\{fx=0, fy=0\}) \quad \{x=1, y=1\} \quad (1.2.4.5)$$

Punt crític: $P = (1, 1)$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = 12(x-1)^2 + 12(x-y)^2 \quad (1.2.4.6)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = 12(x-y)^2 \quad (1.2.4.7)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = -12(x-y)^2 \quad (1.2.4.8)$$

Hessian($f(x,y)$, [x,y]) = [1, 1])

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.2.4.9)$$

El criteri de la matriu hessiana no ens permet classificar.
Hem de fer un **estudi local**.

En primer lloc, obtenim el valor de f en el punt crític
 $f(1, 1)$

$$0 \quad (1.2.4.10)$$

Hem de mirar al voltant del punt quin signe tenen els valors de la funció
 $f(x,y)$

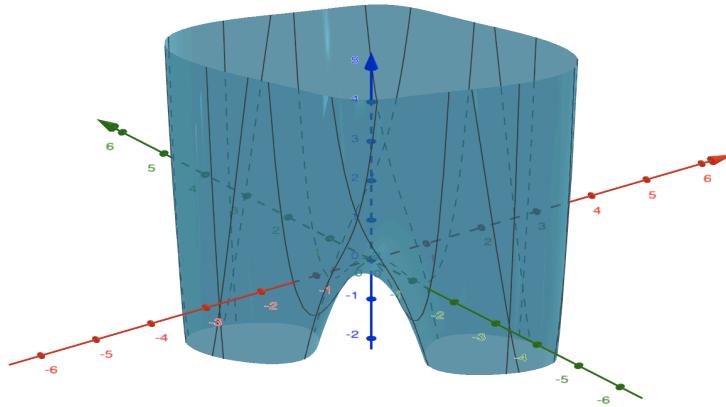
$$(x-1)^4 + (x-y)^4 \quad (1.2.4.11)$$

Observem que per ser una suma de potències quartes $f(x,y) \geq 0$ per a tot $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Per tant, $f(x,y) \geq f(P)$ per a tot $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ i P és un **mínim absolut** de f

e)

$$f := (x,y) \rightarrow x^4 + y^4 + 4xy - 2x^2 - 2y^2 \quad (1.2.5.1)$$

$$f := (x,y) \mapsto x^4 + y^4 + 4xy + (-2x^2) + (-2y^2)$$



$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 4x^3 - 4x + 4y \quad (1.2.5.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = (2y - 2)(x^2 - 2y) - 2x^2 - 2(y - 1)^2 + 2 \quad (1.2.5.3)$$

$$factor(\%) = 4x^3 - 4x + 4y \quad (1.2.5.4)$$

$$\text{Gradient}(f(x, y), [x, y]) = \begin{bmatrix} 4x^3 - 4x + 4y \\ 4y^3 + 4x - 4y \end{bmatrix} \quad (1.2.5.5)$$

$$4x^3 - 4x + 4y = 0$$

$$4y^3 + 4x - 4y = 0$$

$$+ \quad x^3 + y^3 = 0 \Rightarrow y^3 = -x^3 = (-x^3) \Rightarrow y = -x$$

$$4x^3 - 4x - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, \pm \sqrt{2}$$

Punts crítics: $P = (0, 0)$, $Q = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $R = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) = 12x^2 - 4 \quad (1.2.5.6)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) = 12y^2 - 4 \quad (1.2.5.7)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) = 4 \quad (1.2.5.8)$$

Hessian($f(x, y)$, $[x, y]$)

$$\begin{bmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{bmatrix} \quad (1.2.5.9)$$

Hessian($f(x, y)$, $[x, y] = [0, 0]$)

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \quad (1.2.5.10)$$

El determinant és zero i el criteri de la matriu hessiana no ens permet classificar.

Hessian($f(x, y)$, $[x, y] = [\sqrt{2}, -\sqrt{2}]$)

$$\begin{bmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{bmatrix} \quad (1.2.5.11)$$

Té determinant $20^2 - 16$, positiu, i el coeficient (1, 1) és positiu.

Per tant, Q és un **mínim relatiu** de f

Hessian($f(x, y)$, $[x, y] = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$)

$$\begin{bmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{bmatrix} \quad (1.2.5.12)$$

Per tant, R és també un **mínim relatiu** de f

Per al punt $(0, 0)$ cal fer un **estudi local**
 $f(0, 0) = 0$ (1.2.5.13)

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2 \quad (1.2.5.14)$$

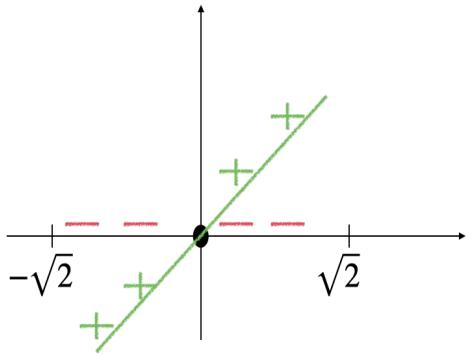
Observem $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$
 $f(x, x) = 2x^4$ (1.2.5.15)

$$f(x, 0)$$

$$x^4 - 2x^2 \quad (1.2.5.16)$$

factor (%)

$$x^2(x^2 - 2) \quad (1.2.5.17)$$



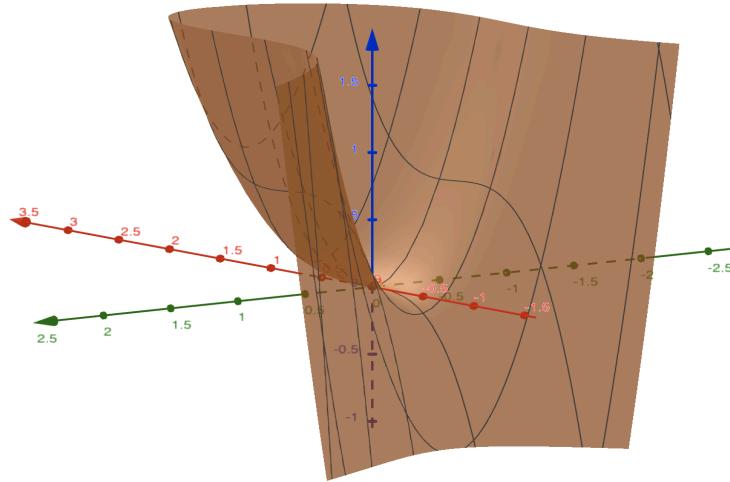
En qualsevol entorn del punt $(0, 0)$ tindrem punts de la recta $y = x$ amb imatge positiva, és a dir, $f(x, y) > f(0, 0)$, i punts de la recta $y = 0$ amb imatge negativa, és a dir, $f(x, y) < f(0, 0)$.

Per tant, $P = (0, 0)$ és **punt de sella** de f

f

$$f := (x, y) \rightarrow x^3 - x^2 \cdot y + 3y^2$$

$$f := (x, y) \mapsto x^3 + (-x^2 y) + 3y^2 \quad (1.2.6.1)$$



$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \quad 3x^2 - 2xy \quad (1.2.6.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \quad -x^2 + 6y \quad (1.2.6.3)$$

Gradient($f(x, y)$, $[x, y]$)

$$\begin{bmatrix} 3x^2 - 2xy \\ -x^2 + 6y \end{bmatrix} \quad (1.2.6.4)$$

$$\begin{array}{lcl} 3x^2 - 2xy = 0 & \quad 3x^2 - 2xy = 0 \\ -x^2 + 6y = 0 & \underline{-3x^2 + 18y = 0} \\ + & 18y - 2xy = 0 \Rightarrow 2y(9 - x) = 0 \end{array}$$

$y = 0 \quad x^2 = 6y = 0 \implies y = 0, x = 0$
 $x = 9 \quad y = \frac{x^2}{6} \implies x = 9, y = \frac{27}{2}$

Punts crítics: $P = (0, 0), Q = \left(9, \frac{27}{2}\right)$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) = 6x - 2y \quad (1.2.6.5)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) = 6 \quad (1.2.6.6)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) = -2x \quad (1.2.6.7)$$

Hessian($f(x, y)$, $[x, y]$)

$$\begin{bmatrix} 6x - 2y & -2x \\ -2x & 6 \end{bmatrix} \quad (1.2.6.8)$$

Hessian($f(x, y)$, $[x, y] = [0, 0]$)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \quad (1.2.6.9)$$

El determinant és zero i el criteri de la matriu hessiana no ens permet classificar.

$$\begin{aligned} \text{Hessian}\left(f(x, y), [x, y] = \left[9, \frac{27}{2}\right]\right) &= \\ &\begin{bmatrix} 27 & -18 \\ -18 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.2.6.10)$$

$$27 \cdot 6 - 18^2 = -162 \quad (1.2.6.11)$$

Té determinant negatiu i, per tant, Q és un **punt de sella** de f

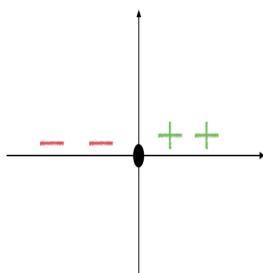
Per al punt $(0, 0)$ cal fer un **estudi local**
 $f(0, 0) = 0$

$$f(x, y) = x^3 - x^2 y + 3 y^2 \quad (1.2.6.13)$$

$$f(0, y) = 3 y^2 \quad (1.2.6.14)$$

$$f(x, x) = 3 x^2 \quad (1.2.6.15)$$

$$f(x, 0) = x^3 \quad (1.2.6.16)$$

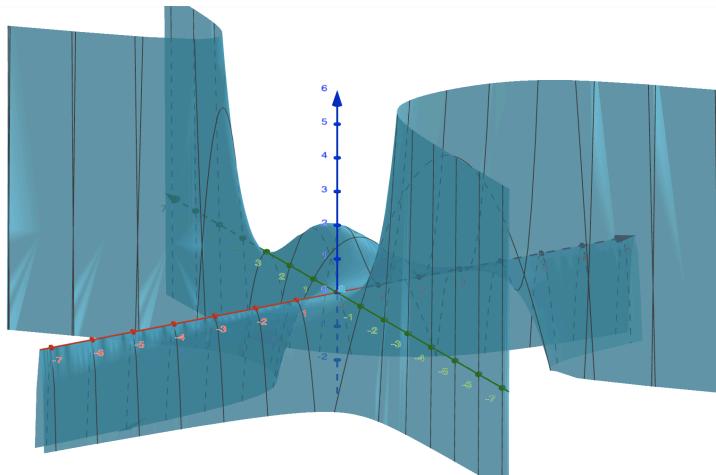


En qualsevol entorn del punt $(0, 0)$ tindrem punts de la semirecta OX^+ amb imatge positiva, és a dir, $f(x, y) > f(0, 0)$, i punts de la semirecta OX^- amb imatge negativa, és a dir, $f(x, y) < f(0, 0)$.

Per tant, $P = (0, 0)$ és **punt de sella** de f

g)

$$f := (x, y) \rightarrow x \cdot y^2 \cdot (3 - x - y) \quad f := (x, y) \mapsto x y^2 (3 + (-x) + (-y)) \quad (1.2.7.1)$$



$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$$

$$y^2 (3 - x - y) - xy^2 \quad (1.2.7.2)$$

factor (%)

$$-y^2 (-3 + 2x + y) \quad (1.2.7.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$$

$$2xy(3 - x - y) - xy^2 \quad (1.2.7.4)$$

factor (%)

$$-xy(-6 + 2x + 3y) \quad (1.2.7.5)$$

simplify(Gradient(f(x, y), [x, y]))

$$\begin{bmatrix} -y^2 (-3 + 2x + y) \\ -xy(-6 + 2x + 3y) \end{bmatrix} \quad (1.2.7.6)$$

$$\begin{aligned}
 & f_x = -y^2(-3 + 2x + y) = 0 \quad \begin{aligned} y = 0 & \quad f_y = -xy(-6 + 2x + 3y) = 0 \quad \forall x \quad (x, 0) \\ & \quad 2x + y = 3 \end{aligned} \\
 & y \neq 0 \quad f_y = -xy(-6 + 2x + 3y) = 0 \quad \begin{aligned} x = 0 & \quad 2x + 3y = 6 \\ & \quad 2x + y = 3 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2x + y &= 3 \\
 x &= 0
 \end{aligned}$$

$$(0, 3)$$

$$\begin{aligned}
 2x + y &= 3 \\
 2x + 3y &= 6
 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$$

Punts crítics: Tots els punts de l'eix OX i els punts $P = (0, 3)$, $Q = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) = -2y^2 \quad (1.2.7.7)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) = 2 \quad (1.2.7.8)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) = 2y(3-x-y) - y^2 - 2xy \quad (1.2.7.9)$$

Hessian($f(x, y)$, $[x, y] = [a, 0]$)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2a(3-a) \end{bmatrix} \quad (1.2.7.10)$$

El determinant és zero i el criteri de la matriu hessiana no ens permet classificar.

Hessian($f(x, y)$, $[x, y] = [0, 3]$)

$$\begin{bmatrix} -18 & -9 \\ -9 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.2.7.11)$$

Té determinant negatiu i, per tant, P és un punt de sella de f

Hessian $\left(f(x, y), [x, y] = \left[\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right]\right)$

$$\begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & -\frac{9}{4} \\ -\frac{9}{4} & -\frac{27}{8} \end{bmatrix} \quad (1.2.7.12)$$

$$\frac{9}{2} \cdot \frac{27}{8} - \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{81}{8} \quad (1.2.7.13)$$

Té determinant positiu i el coeficient (1, 1) és negatiu.

Per tant, Q és un màxim relatiu de f

Per al punts $(a, 0)$ cal fer un estudi local

$$f(a, 0) = 0 \quad (1.2.7.14)$$

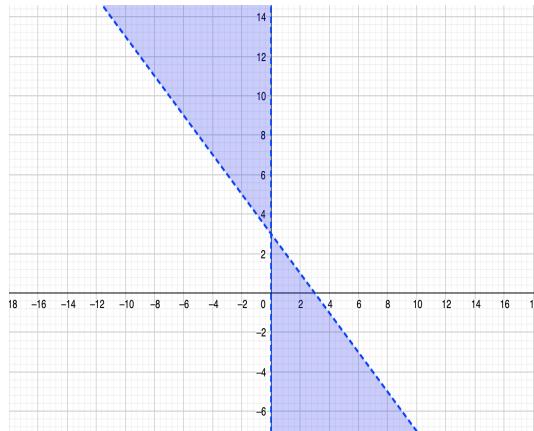
$$f(x, y)$$

$$x y^2 (3 - x - y)$$

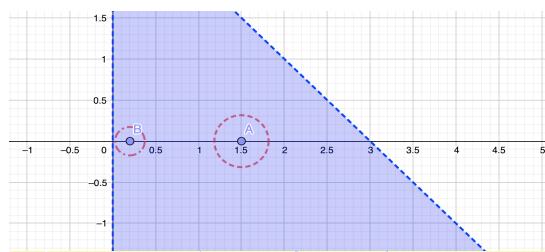
(1.2.7.15)

Fora de l'eix $y = 0$ el signe de $f(x, y)$ és el mateix que el de $x (3 - x - y)$

REGIÓ $x (3 - x - y) > 0$

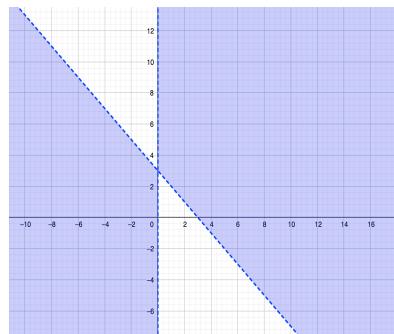


Si $a \in (0, 3)$ hi ha un entorn del punt $(a, 0)$ on $f(x, y) \geq f(a, 0)$

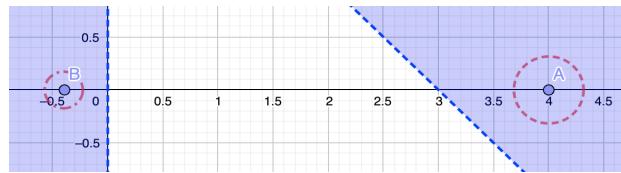


Si $a \in (0, 3)$ el punt $(a, 0)$ és mínim relatiu de f

REGIÓ $x (3 - x - y) < 0$

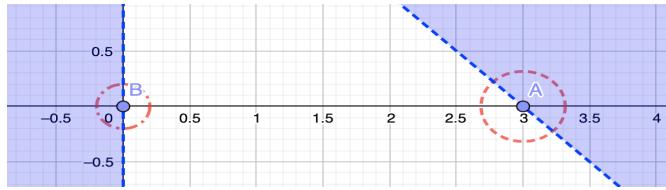


Si $a \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$ hi ha un entorn del punt $(a, 0)$ on $f(x, y) \leq f(a, 0)$



Si $a \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$ el punt $(a, 0)$ és màxim relatiu de f

En els punts $(0, 0)$ i $(3, 0)$ trobem que en qualsevol entorn hi ha punts (x, y) amb $f(x, y) > 0$ i punts (x, y) amb $f(x, y) < 0$



Els punts $(0, 0)$ i $(3, 0)$ són punts de sella de f

Problema 11

- 11 Sigui $f(x, y) = e^{\lambda x + y^2} + \mu \sin(x^2 + y^2)$ amb $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Determineu els valors dels paràmetres λ i μ sabent que f té en $(0, 0)$ un extrem relatiu i que el polinomi de Taylor de segon grau de f a l'origen pren el valor 6 al punt $(1, 2)$. Amb els resultats obtinguts, quin tipus d'extrem és el punt $(0, 0)$ per a f ?

Condició d'extrem relatiu

Si f té un extrem relatiu en $(0, 0)$ és condició necessària que el $(0, 0)$ sigui un punt crític de f
Calculem les derivades parcials

$$f := (x, y) \rightarrow e^{\lambda x + y^2} + \mu \sin(x^2 + y^2) \quad f := (x, y) \mapsto e^{\lambda x + y^2} + \mu \sin(x^2 + y^2) \quad (1.3.1.1)$$

$$dx := \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \quad dx := \lambda e^{\lambda x + y^2} + 2 \mu x \cos(x^2 + y^2) \quad (1.3.1.2)$$

En el punt $(0, 0)$ val λ

Per tant, la derivada parcial respecte x s'anul.la en el punt $(0, 0)$ si, i només si, $\lambda = 0$

$$\lambda := 0$$

$$\lambda := 0 \quad (1.3.1.3)$$

$$dy := \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \quad dy := 2y e^{\lambda x + y^2} + 2\mu y \cos(x^2 + y^2) \quad (1.3.1.4)$$

factor (%)

$$2y (\cos(x^2 + y^2) \mu + e^{y^2}) \quad (1.3.1.5)$$

La derivada parcial respecte y s'anul.la en el punt $(0, 0)$ per a qualsevol valor de μ

(0, 0) és punt crític de f si, i només si, $\lambda=0$

Condició sobre el polinomi de Taylor

$$P(x, y) = f(0, 0) + \frac{\partial}{\partial x}f(0, 0) \cdot x + \frac{\partial}{\partial y}f(0, 0) \cdot y + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(0, 0) \cdot x^2 + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}f(0, 0) \cdot x \cdot y + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2}f(0, 0) \cdot y^2$$

$f(0, 0)$

1 (1.3.2.1)

Ja sabem que les derivades parcials s'anulen en el (0, 0)

$$P(x, y) = f(0, 0) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(0, 0) \cdot x^2 + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}f(0, 0) \cdot x \cdot y + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2}f(0, 0) \cdot y^2$$

Calculem les derivades de segon ordre

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x, y); \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}f(x, y); \frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x, y) \\ & 2 \cos(x^2 + y^2) \mu - 4 \mu x^2 \sin(x^2 + y^2) \\ & -4 \mu x y \sin(x^2 + y^2) \\ & 2 e^{y^2} + 4 y^2 e^{y^2} + 2 \cos(x^2 + y^2) \mu - 4 \mu y^2 \sin(x^2 + y^2) \end{aligned} \quad (1.3.2.2)$$

Avaluem en el punt (0, 0)

$Hessian(f(x, y), [x, y] = [0, 0])$

$$\begin{bmatrix} 2 \mu & 0 \\ 0 & 2 + 2 \mu \end{bmatrix} \quad (1.3.2.3)$$

$$P := (x, y) \rightarrow 1 + \mu \cdot x^2 + (1 + \mu) \cdot y^2$$

$$P := (x, y) \mapsto 1 + \mu x^2 + (1 + \mu) y^2 \quad (1.3.2.4)$$

La condició demandada és que en el punt (1, 2) ha de prendre el valor 6

$$P(1, 2) = 5 + 5 \mu \quad (1.3.2.5)$$

$$solve(P(1, 2) = 6)$$

$$\frac{1}{5} \quad (1.3.2.6)$$

$$\text{Per tant, } \mu = \frac{1}{5}$$

▼ Extrem relatiu

Amb $\lambda = 0$, $\mu = \frac{1}{5}$ sabem que el punt $(0, 0)$ és un punt crític. Classifiquem-lo

$$\mu := \frac{1}{5}$$

$$\mu := \frac{1}{5} \quad (1.3.3.1)$$

Hessian($f(x, y)$, $[x, y] = [0, 0]$)

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{12}{5} \end{bmatrix} \quad (1.3.3.2)$$

Té determinant positiu i el coeficient $(1, 1)$ és positiu.

Per tant, $(0, 0)$ és un mínim relatiu de f

▼ Problema 12

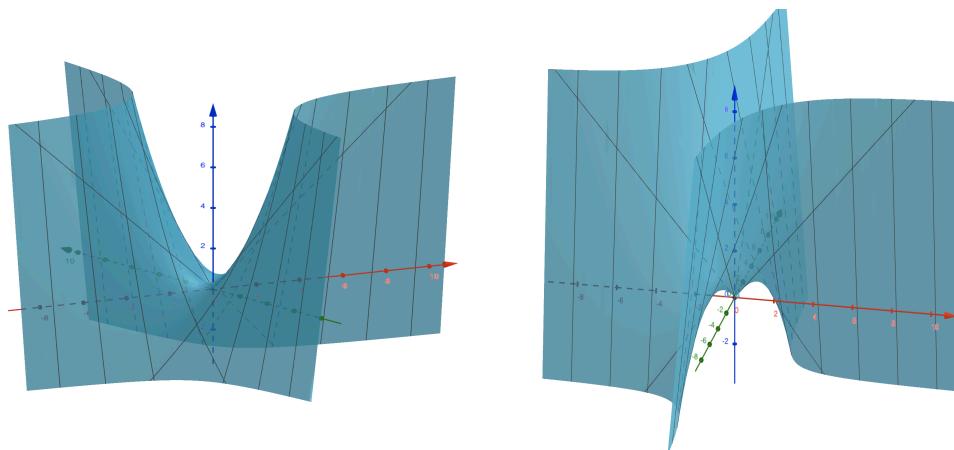
12 Donada la funció $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$,

a) Trobeu els extrems relatius de f a $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

b) Analitzant l'expressió de f , esbrineu si $(0, 0)$ és el punt d'extrem relatiu.

$$f := (x, y) \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} - xy$$

$$f := (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2} + (-xy) \quad (1.4.1)$$



▼ a)

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - y \quad (1.4.1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - x \quad (1.4.1.2)$$

Gradient($f(x, y)$, $[x, y]$)

$$\begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - y \\ \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - x \end{bmatrix} \quad (1.4.1.3)$$

Observem que les derivades parcials no estan definides en el punt $(0, 0)$

Punts crítics en $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - y = 0 &\implies \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = y \implies \frac{x^2}{x^2 + y^2} = y^2 \\ &\text{Sumant } 1 = x^2 + y^2 \\ \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - x = 0 &\implies \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = x \implies \frac{y^2}{x^2 + y^2} = x^2 \end{aligned}$$

Substituïnt a les equacions inicials $x = y$ Per tant $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Punts crítics: $P = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), Q = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

$$factor\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y)\right) = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (1.4.1.4)$$

$$factor\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y)\right) = -\frac{(x^2 + y^2)^{3/2} + xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (1.4.1.5)$$

$$factor \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) \right)$$

$$\frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (1.4.1.6)$$

$$Hessian \left(f(x, y), [x, y] = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \right)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (1.4.1.7)$$

$$Hessian \left(f(x, y), [x, y] = \left[\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right] \right)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (1.4.1.8)$$

En tots dos casos el determinant és $\frac{1}{4} - \frac{9}{4}$, negatiu.

Per tant, P i Q són punts de sella de f

▼ b)
 $f(0, 0) = 0 \quad (1.4.2.1)$

Hem d'estudiar el signe de $f(x, y)$ a l'entorn del $(0, 0)$

$$f(x, 0) = \sqrt{x^2} \quad (1.4.2.2)$$

És positiu

$$f(0, y) = \sqrt{y^2} \quad (1.4.2.3)$$

És positiu

$$f(x, -x) = \sqrt{2} \sqrt{x^2} + x^2 \quad (1.4.2.4)$$

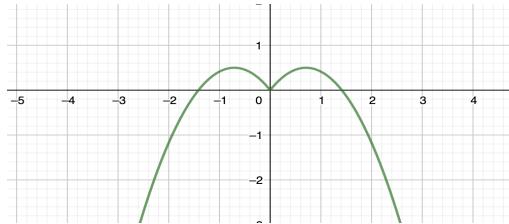
És positiu

$$f(x, x)$$

$$\sqrt{2} \sqrt{x^2 - x^2}$$

(1.4.2.5)

És $\sqrt{2} |x| - x^2$. Per a valors petits de x és positiu



En totes les direccions "fàcils" trobem $f(x, y) > 0$ a l'entorn del $(0, 0)$ (valors petits de x, y)

Intentem demostrar que hi ha un entorn de $(0, 0)$ on $f(x, y) > 0$

- Si $xy < 0$, aleshores $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - xy > 0$ per ser suma de positius.
- Suposem $xy > 0$

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - xy = xy \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{xy} - 1 \right)$$

Observem que $xy = |xy| = \sqrt{x^2 y^2}$

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - xy = xy \left(\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 \cdot y^2}} - 1 \right)$$

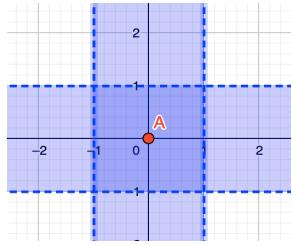
$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - xy = xy \left(\sqrt{\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2}} - 1 \right)$$

Per veure que $f(x, y) > 0$ un entorn de $(0, 0)$ només cal que veiem que $\sqrt{\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2}} > 1$ en aquest entorn. És a dir,

$$\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2} > 1$$

En un entorn del $(0, 0)$ els valors de x^2, y^2 seran petits, els seus inversos seran grans i podem fer que la suma superi 1. Per exemple, si agafem el quadrat

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| < 1\}$$



aleshores

$$(x, y) \in S \Rightarrow x^2 < 1, y^2 < 1 \Rightarrow \frac{1}{x^2} > 1, \frac{1}{y^2} > 1 \Rightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} > 2 > 1$$

S és un entorn del punt $(0, 0)$ on

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} > 1$$

$$\sqrt{\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2}} > 1$$

Això ens diu $f(x, y) > 0$ per als punts amb $xy > 0$ i per als altres ja ho teníem.

$$f(x, y) > f(0, 0) \text{ per a tot } (x, y) \in S$$

Per tant, $(0, 0)$ és un mínim relatiu