Grau en Enginyeria Informàtica

Facultat d'Informàtica de Barcelona

Universitat Politècnica de Catalunya

MATEMÀTIQUES 1

Part II: Àlgebra Lineal

Solucions dels exercicis

Curs 2019-2020(2)

Aquest document conté les respostes a alguns dels problemes de la segona part de l'assignatura Matemàtiques 1. Aprofitem per fer constar i agrair la tasca del becari docent Gabriel Bernardino en la redacció de les solucions.

Us ho agraïrem si ens comuniqueu qualsevol errada que detecteu.

Anna de Mier
Montserrat Maureso
Dept. Matemàtiques

Respostes desenvolupades

Matrius, sistemes i determinants

5.1 1) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 \\ -9 & 0 & -3 \\ 6 & 3 & 6 \end{pmatrix}$. 2)$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 12 \\ -10 & 4 & -6 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. 3) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 14 \\ -5 & -3 & -2 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.
4)$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 19 & 5 & 14 \\ -6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. 5) $\begin{pmatrix} -13 & 20 & 15 \\ 23 & -3 & 18 \\ 17 & -12 & -8 \\ -67 & 67 & 1 \end{pmatrix}$.

5.2 (-11) i $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 1 & 2 & -3 \\ 5 & 10 & -15 \end{pmatrix}$.

5.3 La matriu AB té un número de files igual al nombre de files d'A, i un nombre de columnes igual al nombre de columnes de B. Al ser AB quadrada, llavors podem dir que el nombre de files d'A és el mateix que el nombre de columnes de B, i per tant el producte BA està ben definit.

5.4 $c_{13} = 8$, $c_{22} = -3$.

5.5 1) $C_{per} = \begin{pmatrix} 90 & 100 \\ 418 & 454 \end{pmatrix}$. 2) $C_{mat} = \begin{pmatrix} 25 & 30 \\ 189 & 207 \end{pmatrix}$.

5.6

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$, $A^5 = \begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 243 \end{pmatrix}$.

b) $A^5 = \begin{pmatrix} 2^{32} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{32} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{32} \end{pmatrix}$.

c) La matriu D^r serà la matriu $Diag({\lambda_1}^r, {\lambda_2}^r, \ldots, {\lambda_n}^r)$. Demostració:

- Cas base: Trivial, ja que $A^1 = A = Diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$
- Pas inductiu: $B = (b_{ij}) = A^r = A^{r-1}A$, per HI, $A^{r-1} = Diag({\lambda_1}^{r-1}, {\lambda_2}^{r-1}, \ldots, {\lambda_n}^{r-1})$. Així si $i \neq j$, $b_{ij} = 0$, ja que la fila i d'A^{r-1} només té un component diferent de 0, i aquest és el i, en canvi la columna j d'A té també un únic component diferent de 0, que és el j, com $j \neq i$, al multiplicar la fila per la columna surt 0. Si $i = j$, llavors el component diferent de 0 coincideix, i queda $b_{ii} = {\lambda_i}^{r-1}\lambda_i = {\lambda_i}^r$. Per tant la matriu resultant és la matriu $Diag({\lambda_1}^r, {\lambda_2}^r, \ldots, {\lambda_n}^r)$.

5.7 (La solució no és única.) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

5.8 $(AB)^t = B^t A^t = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$

5.9 $\boxed{\Rightarrow}$ $AB = (AB)^t = B^t A^t = BA$. $\boxed{\Leftarrow}$ $AB = BA = B^t A^t = (AB)^t$.

5.10 (La solució no és única.)
1) $A = (-1)I$. 2) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 3) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 4) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5.11 Les igualtats no són certes en general; per exemple, les matrius $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ no satisfan cap de les dues. Si A i B commuten es satisfan les dues igualtats.

5.12

1) Si A és semblant a B, llavors existeix una matriu invertible P tal que $B = P^{-1}AP$. Llavors amb $Q = P^{-1}$ es compleix que $B = Q^{-1}AQ$.

2) Ja hem vist que és simètrica ara cal veure que és reflexiva i transitiva. La primera propietat és trivial de veure: agafant $P = I$, llavors $A = I^{-1}AI$. Per veure la transitivitat, siguin A i B semblants, i B i C també, cal veure que A és semblant a C. Si A i B són semblants, llavors existeix P tal que $B = P^{-1}AP$. Si B i C són semblants, llavors existeix Q tal que $C = Q^{-1}BQ$. Llavors $K = PQ$ compleix que $C = K^{-1}AK$.

3) Suposem que A és invertible. Aleshores $A = P^{-1}BP \Rightarrow PA = BP \Rightarrow I = BPA^{-1}P^{-1}$. Per tant, $PA^{-1}P^{-1}$ és la inversa de B. La implicació recíproca és anàloga.

4) $A^t = (P^{-1}BP)^t = P^t(P^{-1}B)^t = P^tB^t(P^{-1})^t$. Observem que que P^t és la matriu inversa de $(P^{-1})^t$ (ja que si $PP^{-1} = I$, llavors al fer la transposada als dos costats de la igualtat surt $(P^{-1})^tP^t = I$). Per tant A^t és semblant a B^t.

5) Sigui $B = C^{-1}AC$. Es té que $B^n = C^{-1}A^nC$, ja que $B^n = B \cdot B \cdots B = C^{-1}ACC{-}1AC \cdots C^{-1}AC = C^{-1}A^nC$. Aleshores $B^n = C^{-1}\mathbf{0}C = \mathbf{0}$.

5.13 (La matriu escalonada equivalent no és única.)

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 9/8 \end{pmatrix}$. Té rang 3. 2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Té rang 2.

3) $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 2 \\ 0 & 1 & -8/17 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Té rang 3. 4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Té rang 2.

5.14 1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. 2) $\begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. 5) $\begin{pmatrix} 1/k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5.15 1) $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. 2) No en té.

3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 & 4 \\ 1 & 1 & 6 & 3 \\ -2 & 0 & -11 & -5 \\ 2 & 1 & 13 & 6 \end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1/8 & 1/8 \end{pmatrix}$. 6) Si $k \neq 0$ la inversa és $\begin{pmatrix} 1/k & 0 & 0 & 0 \\ -1/k^2 & 1/k & 0 & 0 \\ 1/k^3 & -1/k^2 & 1/k & 0 \\ -1/k^4 & 1/k^3 & -1/k^2 & 1/k \end{pmatrix}$. La inversa no existeix si $k = 0$.

5.16 Són lineals 2), 4) i 6).

5.17

1) $\begin{cases} x + 3z = 2 \\ 2x + y + z = 3 \\ -y + 2z = 4 \end{cases}$

2) $\begin{cases} -x + 5y = -2 \\ x + y = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 5 \\ x/3 + y/4 + z/5 + t/2 = 1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \\ x + t = 4 \end{cases}$

5.18 1) 4. Menor o igual a 3. 2) Com a mínim 3 equacions. 5 incògnites. 3) No. 4) Sí.

5) $SCD : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \\ x + y = 3 \end{cases}$ $\quad SCI : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y = 2 \\ x + 2y + z = 3 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$ $\quad SI : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \\ x + y = 4 \end{cases}$

5.19 1) $(x, y, z) = (0, 1, 0)$. 2) Incompatible. 3) $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ i $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

5.20

1) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. 3) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, per a tot $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$.

2) No té solució. 4) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, per a tot $s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R}$.

5.21

1) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1 \\ -7/4 \end{pmatrix}$, per a tot $s \in \mathbb{R}$. 3) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, per a tot $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$.

2) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. 4) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = s_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, per a tot $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$.

5.22

1) Compatible indeterminat si $c = a + b$, altrament incompatible.
2) Incompatible si $b \neq 2$, si $b = 2$ llavors és compatible determinat.
3) Sistema compatible indeterminat si $a \in \{4, -1\}$, sistema compatible determinat altrament.

4) Incompatible si $a = -4$, compatible indeterminat si $a = 4$, compatible determinat si $a \neq \pm 4$.

5) Compatible indeterminat si $a = b$ amb $a = k$ o $k = 0$, compatible determinat si $a \neq b$ i ($k = 0$ o bé $k = a$ o bé $k = b$). Sistema incompatible altrament.

5.23 1) 5. 2) -10. 3) -5. 4) 20.

5.24 1) $\lambda \in \{2, 3\}$. 2) $\lambda \in \{6, 2\}$. 3) $\lambda \in \{2, 6\}$.

5.25 1) -250. 2) -20. 3) 5. 4) 2304. 5) -4. 6) -128. 7) 7441. 8) -1100.

5.26 1) 120. 2) 10^4. 3) 96. 4) 10. 5) 10^{-1}.

5.27 Restant la 4a fila a totes les altres files, arribem a la matriu:

$$\begin{vmatrix} a-1 & 0 & 0 & 1-a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}.$$

Si $a = 1$ clarament el determinant és 0 i es compleix la fórmula. Altrament, fent $f_4 = f_4 - 1/(a-1)(f_3 + f_2 + f_1)$ arribem a la matriu triangular:

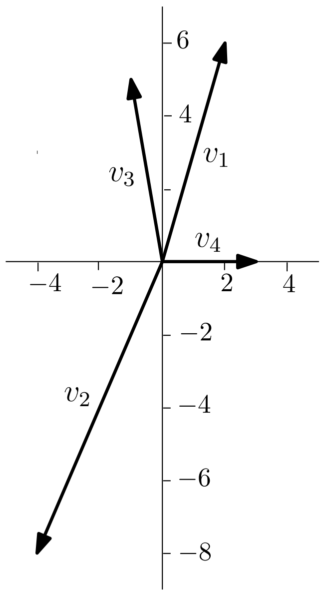
$$\begin{vmatrix} a-1 & 0 & 0 & 1-a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & a+3 \end{vmatrix},$$

que té per determinant $(a+3)(a-1)^3$.

Espais vectorials

6.1 1) $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$. 2) $\begin{pmatrix} 38 \\ -3 \\ -52 \end{pmatrix}$. 3) $\begin{pmatrix} 110 \\ -15 \\ -100 \end{pmatrix}$. 4) $\begin{pmatrix} -24 \\ 2 \\ 32 \end{pmatrix}$.

6.2



6.3 $v_1 + v_2 = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$, $v_1 - v_3 = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ i $v_2 - v_4 = \left(\begin{smallmatrix} -7 \\ -8 \end{smallmatrix}\right)$.

6.4 $u = \frac{-\beta}{\alpha} v - \frac{\gamma}{\alpha} w,\ \ u - v = -\frac{\beta+\alpha}{\alpha} v - \frac{\gamma}{\alpha} w,\ \ u + \alpha^{-1}\beta v = -\frac{\gamma}{\alpha} w.$

6.5 Sí.

6.6 És evident que el producte per un escalar d'una funció real de variable real té com a resultat una funció real de variable real, igual que la suma. L'element neutre és la funció constant $f(x) = 0$. L'element oposat de $f(x)$ existeix sempre i és $-f(x)$. La comprovació de les altres propietats es pot demostrar utilitzant les propietats dels reals.

6.7

1) Sí.
2) No, l'element neutre de $\mathbb{R}^3$ no pertany al subespai.
3) No, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ pertanyen al subespai però la seva suma no.
4) No, el producte per π no està dins el subespai.
5) Sí.
6) Sí. (Nota: és el mateix espai que $E_6 = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$.)
7) Sí.
8) No.

6.8 1) Sí. 2) No, el producte per 0 no està dins el subespai. 3) No, no és tancat per sumes. 4) Sí. 5) No, el producte per un escalar $\neq 1$ no està dins el subespai. 6) Sí.

6.9 1) Sí. De fet M_1 és el subespai tal que $a = b + d$ i $c = b$. 2) Ho és si i només si $n = m$ (altrament el conjunt és buit). 3) Sí. 4) No, el producte per un escalar no està dins el subespai. 5) Sí.

6.10 $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$

6.11 És equivalent a dir que el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x - z & = & 1 \\ x + 7y + 2z & = & 5 \\ -x - y & = & a \end{array} \right.$$

és compatible. Això passa per a $a = -1$. (La solució és $x = 1 - y, z = 2 - 3y, y$ lliure.)

6.12 És equivalent a dir que el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda + \beta & = & 1 \\ 4\lambda + 2\beta & = & 0 \\ -5\lambda + 3\beta & = & a \\ 2\lambda - \beta & = & b \end{array} \right.$$

és compatible. Resolent per Gauss obtenim que és compatible quan $a = 11$ i $b = -4$.

6.13 $x = z - y$.

6.14 $ax^2 + bx + b,\ a, b \in \mathbb{R}$.

6.15

1)
- $F \subset G$: Si expresso els vectors generadors de F com a combinació lineal de vectors de G, llavors puc dir que $F \subset G$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1/2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1/2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1/2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1/2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- $G \subset F$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2) $e = \begin{pmatrix} 9 \\ \sqrt{2}-1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix} = 9\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + (8 + \sqrt{2})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{17+\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1-\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

6.16 1) Sí. 2) Sí. 3) No, $-7\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + 9\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
4) No, $11/6\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + 3/2\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - 43/18\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. 5) Sí.

6.17 $a = -2, b = 1, -3w_1 + 2w_2 + w_3 = 0_{\mathbb{R}^4}$.

6.18 La combinació $(u - v) + (v - w) + (w - u) = 0_E$, i tots els coeficients són $\neq 0$.

6.19 Si és combinació lineal d'A i B llavors: $\begin{pmatrix} \lambda & 2 & -4 \\ 2-\lambda & 2 & 2 \end{pmatrix} = \lambda_1 A + \lambda_2 B$, per algun $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. De la igualtat surt el sistema següent:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & \lambda \\ \lambda_2 & = & 2-\lambda \\ \lambda_1+\lambda_2 & = & 2 \\ \lambda_1+\lambda_2 & = & 2 \\ -2\lambda_1-2\lambda_2 & = & -4 \\ \lambda_1+\lambda_2 & = & 2 \end{array} \right.$$

Aquest sistema té solució per a tot λ, ja que $\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = 2-\lambda$, i substituint a la 3a equació, que és equivalent a la resta, surt $\lambda + 2 - \lambda = 2$, que és equivalent a $0 = 0$.

6.20 $0 = (-1+2x+x^2) + (1+x^2) - 2(x+x^2)$.

6.21 A $\mathbb{R}^3$, els 3 vectors $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ són clarament linealment dependents, però no es pot escriure el primer com a combinació lineal dels altres.

6.22

1) No. Per exemple, considerem B la base canònica de $\mathbb{R}^r$. Un vector $v \in \mathbb{R}^r$ tal que $v \in B$ és combinació lineal dels vectors de B, per tant $B \cup \{v\}$ és un conjunt linealment dependent.

2) Sí. Suposem que és linealment dependent, llavors hi haurà una combinació lineal $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_r e_r + \lambda_v v = 0_E$ amb $\lambda_v \neq 0$, ja que en cas contrari el conjunt original seria linealment dependent. Llavors, passant $\lambda_v v$ a l'altra banda, tenim v com a combinació lineal del conjunt inicial, el què és una contradicció ja que $v \notin \langle e_1, \ldots, e_{r-1} \rangle$.

3) Sí. Podem expressar qualsevol vector d'E com a combinació lineal del conjunt anterior sense que v aparegui.

4) Sí. Podem expressar qualsevol vector com a combinació lineal dels $r-1$ primers vectors, substituint les aparicions de e_r per la combinació lineal dels $r-1$ primers vectors que dóna com a resultat e_r.

5) No, ja que aquest pot ser l'element neutre.

6.23

1) Si es fa el determinant, surt $2 \neq 0$, i per tant són linealment independents ja que hi ha tants vectors com la dimensió de $\mathbb{R}^4$.

2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -9/2 \end{pmatrix}$. 3) $\begin{pmatrix} y \\ z \\ x-y \\ 2(y-x)+((t-z)/2) \end{pmatrix}$.

6.24 $A_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6.25 Considerem les coordenades dels polinomis en la base canónica de $P_3(\mathbb{R})$ i la matriu que formen col·locant-les per columnes. Aquesta matriu té rang 4, per tant els vectors són linealment independents, i com $\dim P_3(\mathbb{R}) = 4$, formen una base de l'espai.

$(-5+6x+3x^2+x^3)_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, amb $B = \{1+x, -1, 1+x, 1+x^2, 1-x+x^3\}$.

6.26 $B_F = \{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. $x - 2y + 2z = 0$.

6.27 Per comprovar que són el mateix, expresso tots els vectors de F en termes de G i a l'inrevés:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1/2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1/2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 1/2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1/2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1/2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1/2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1/2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 3/2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1/2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1/2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Tenim que $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin F$ i $v = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{2}-1 \\ 1-\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \in F$.

$$v_{B_F} = \begin{pmatrix} (1-\sqrt{2}+\sqrt{3})/2 \\ (-1+\sqrt{2}+\sqrt{3})/2 \\ (-1+\sqrt{2}+\sqrt{3})/2 \end{pmatrix}, \qquad v_{B_G} = \begin{pmatrix} (\sqrt{2}-1)/2+\sqrt{3} \\ (1-\sqrt{2})/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

6.28 Sigui $w_1 = v_1 + 2v_2, w_2 = 2v_2 + 3v_3, w_3 = 3v_3 + v_1$, llavors

$$v_1 = (w_1 - w_2 + w_3)/2, v_2 = (w_2 - w_3 + w_1)/4, v_3 = (w_3 - w_1 + w_2)/6.$$

Per tant, $E \subseteq \langle v_1 + 2v_2, 2v_2 + 3v_3, 3v_3 + v_1 \rangle$. Com que tenim el mateix nombre de vectors que la base donada, el nou conjunt també és una base.

6.29 (La solució no és única.) Una base és: $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\}$. Els vectors $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ la completen a una base de $\mathbb{R}^5$.

6.30 La matriu que té els vectors per columnes es comprova que té rang 3. Es pot completar amb $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ per tal de formar una base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

6.31 $\lambda = 1$.

6.32

(a) Com que els dos primers generadors no són proporcionals i, per tant, són linealment independents, la dimensió de F és com a mínim 2. Cal buscar, doncs, per a quin, o quins, valors de a els tres vectors són linealment dependents, que en aquest cas vol dir que la matriu que té per columnes els corresponents vectors de coordenades en base canònica és de rang 2. Escalonant aquesta matriu dóna:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & (a-4)/3 \\ 0 & 0 & -a-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, la dimensió de F és 2 si i només si $a = -1$.

(b) La matriu $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ és de F_{-1} si i només si és combinació lineal dels dos primers generadors, que per l'apartat anterior sabem que són una base de F_{-1}. Per tant, busquem les condicions de compatibilitat del sistema d'equacions corresponent a l'equació matricial

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i.e. del sistema d'equacions en λ, μ

$$\begin{aligned} \lambda - \mu &= x \\ 2\lambda + \mu &= y \\ 0 &= z \\ 2\lambda + \mu &= t \end{aligned}$$

Per a trobar-les escalonem la matriu ampliada:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ 2 & 1 & y \\ 0 & 0 & z \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & (y-2x)/3 \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & t-y \end{pmatrix}$$

El sistema és compatible, doncs, si $t - y = 0$ i $z = 0$.

(c) A l'apartat (a) ja hem vist que B és família linealment independent i que genera F_{-1} perquè el tercer generador n'és combinació lineal. Per tant, és base de F_{-1}. Per tal de provar que els vectors de B' també formen una base, com que no són proporcionals i, per tant, linealment independents, i F_{-1} sabem que és de dimensió 2, només cal comprovar que són tots dos de F_{-1}. Això ho veiem comprovant simplement que els seus coeficients satisfan les dues equacions de l'apartat anterior.

6.33

1) $B_E = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$, $\dim(E) = 1$; $B_F = \{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, $\dim(F) = 1$; $E \cap F = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, $\dim(E \cap F) = 0$.

2) $B_E = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\}$, $\dim(E) = 2$; $B_F = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, $\dim(F) = 2$; $B_{E\cap F} = \{\begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}\}$, $\dim(E \cap F) = 1$.

3) $B_E = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, $\dim(E) = 3$; $B_F = \{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, $\dim(F) = 2$; $B_{E\cap F} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ 21 \end{pmatrix}\}$, $\dim(E \cap F) = 1$.

4) $B_E = \{\left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\}$, $\dim(E) = 2$; $B_F = \left\{\left(\begin{smallmatrix}1&1\\2&1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}2&0\\-1&1\end{smallmatrix}\right)\right\}$, $\dim(F) = 2$; $E \cap F = \{0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\}$, $\dim(E \cap F) = 0$.

6.34 (La solució no és única.)

1) $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

2) $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

3) $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

4) $\{\left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)\}$.

6.35 $P_B^C = \begin{pmatrix}2 & -3/2 & 1\\ 2 & -3/2 & 2\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $P_B^{B'} \begin{pmatrix}7/2 & 6 & 3\\ 3/2 & 7 & 4\\ -1 & -4 & -2\end{pmatrix}$

6.36

(a) Com que $P_2(\mathbb{R})$ és de dimensió 3, només cal veure que $B = \{-1+2x+3x^2, x-x^2, x-2x^2\}$ és una família linealment independent (qualsevol família linealment independent de n vectors en un espai de dimensió n també és automàticament conjunt de generadors i, per tant, base). Per tal de veure que són LI comprovem que el rang de la matriu que té els coeficients de cada polinomi per columnes és 3. La matriu és

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & -1 & -2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

que és efectivament de rang 3.

La matriu $P_B^{B_c}$ de canvi de base canònica a base B és la inversa de $P_{B_c}^B$, que és la matriu que té per columnes els components de B en base B_c. Aquesta és la matriu anterior, així que només cal calcular la matriu inversa de l'anterior. Apliquem mètode de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 3 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -2 & 3 & 0 & 1\end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -5 & -1 & -1\end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 7 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -5 & -1 & -1\end{array}\right)$$

Per tant, la matriu demanada és

$$P_B^{B_c} = (P_{B_c}^B)^{-1} = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 7 & 2 & 1\\ -5 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

(b) Només cal utilitzar la matriu canvi de base anterior: les coordenades en la base B s'obtenen multiplicant les coordenades en base canònica per la matriu $P_B^{B_c}$ per l'esquerra. Per tant, són

$$P_B^{B_c}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \\ -5 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 21 \\ -16 \end{pmatrix}$$

6.37

1) Veient que els vectors donats són LI o que generen. Aquesta última opció és més pràctica per reaprofitar càlculs en els apartats següents.

   Donat un vector $v = (a, b, c)^t$ de $\mathbb{R}^3$, les coordenades de v en la base B i en la base B' són, respectivament

$$v_B = \begin{pmatrix} (7a-b+3c)/20 \\ (-29a+7b-c)/20 \\ (-9a+3b-c)/4 \end{pmatrix}, \qquad v_{B'} = \begin{pmatrix} (9a-2b+c)/5 \\ (4a-2b+c)/5 \\ (-19a+7b-c)/10 \end{pmatrix}.$$

2) $P_{B'}^B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_B^{B'} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 3/4 \\ -5/4 \\ -5/4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}_{B'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$.

6.38 $P_{B'}^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\qquad P_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6.39 Si $u_B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $u_{B'} = \begin{pmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \end{pmatrix}$. Si $u_{B'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, $u_B = 1/2\begin{pmatrix} y'+z'-x' \\ z'+x'-y' \\ x'+y'-z' \end{pmatrix}$.

6.40 $p_1(x) = 2x^2 + 1, p_2(x) = -3x^2 + x, p_3(x) = -x^2 + 1/2$.

Les dades del problema impliquen

$$P_{CAN}^B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1/2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Aplicacions lineals

7.1

1) Sí.
2) No. Per exemple, $2f\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = 2 \neq f\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) = 16$.
3) No. Per exemple, $0f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
4) Sí.

5) No. Per exemple, $2f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} \neq f\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix}$.

7.2 1) Sí. 2) Sí. 3) Sí.

7.3 1) Sí. 2) Sí. 3) No. Per exemple, $\det\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \neq \det\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$.

7.4 Per linealitat, $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + 3a_1 + 4a_2) + (a_0 + 2a_2)x + (-a_1 - 3a_2)x^2$. En particular, $f(2 - 2x + 3x^2) = 8 + 8x - 7x^2$.

7.5

1) Existeix perquè $\{u_1, u_2, u_3\}$ és una base.
2) Existeix perquè $u_3 = -u_1 + 3u_2$ i $v_3 = -v_1 + 3v_2$.
3) No existeix perquè $u_3 = -u_1 + 3u_2$ però $v_3 \neq -v_1 + 3v_2$.

7.6

1) Falsa en general. Si un dels vectors és del nucli les imatges ja no són linealment independents.
2) Certa. Considerem la combinació lineal $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_E$. Per linealitat $\lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_n f(v_n) = 0_F$, atès que $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ són linealment independents, els escalars $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, són tots nuls. Per tant, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ són linealment independents.
3) Falsa en general. Si $\dim(E) < \dim(F)$ la imatge de qualsevol base d'E no genera F.
4) Falsa en general. Per exemple, sigui $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'aplicació lineal definida per $f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ i $f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. $f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ generen $\mathbb{R}^2$ però $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ no generen $\mathbb{R}^3$.
5) Certa. Sigui $w \in \operatorname{Im} f$ i sigui $v \in E$ tal que $f(v) = w$. Per ser $v_1, v_2, \ldots, v_n$ un conjunt de generadors d'E, existeixen uns escalars tals que $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$. Per linealitat $w = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_n f(v_n)$, per tant $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ és un conjunt de generadors de $\operatorname{Im} f$.

7.7

1) Sí, ja que el dos conjunts de generadors formen una base de $\mathbb{R}^4$. Es té

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(7x-3y+z-2t)/2\\(7x-3y+z-2t)/2\\-x+y+z\\3x-y+z-t\end{pmatrix},$$

2) No, ja que la igualtat $\begin{pmatrix} 1\\1\\1\\-5 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1\\0\\-1\\3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4\\1\\0\\2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\2 \end{pmatrix}$ no es satisfà per les imatges $\begin{pmatrix} 1\\1\\1\\-5 \end{pmatrix} = f(\begin{pmatrix} 1\\1\\1\\-5 \end{pmatrix}) \neq f(-\begin{pmatrix} 1\\0\\-1\\3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4\\1\\0\\2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -2\\0\\0\\-4 \end{pmatrix}$.

7.8 En tots els casos, indiquem per $M(f)$ la matriu d'f en les bases canòniques corresponents.

1) $M(f) = (3)$. $\dim(\mathrm{Im}\ f) = \mathrm{rang}\,(M(f)) = 1$ i $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 1 - 0 = 0$.

2) $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. $\dim(\mathrm{Im}\ f) = \mathrm{rang}\,(M(f)) = 2$ i $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 2 - 2 = 0$.

3) $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\dim(\mathrm{Im}\ f) = \mathrm{rang}\,(M(f)) = 3$ i $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 3 - 3 = 0$.

4) $M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. $\dim(\mathrm{Im}\ f) = \mathrm{rang}\,(M(f)) = 3$ i $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 4 - 3 = 1$.

5) $M(f) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & -2 & 3\\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. $\dim(\mathrm{Im}\ f) = \mathrm{rang}\,(M(f)) = 3$ i $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 3 - 3 = 0$.

7.9 Si $m \neq 0, 1, 2$ llavors $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 3$ i $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 0$. Per a la resta de casos $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 2$ i bases de $\mathrm{Ker}\, f$ són: $\{\begin{pmatrix} 2\\1\\-2 \end{pmatrix}\}$ si $m = 0$; $\{\begin{pmatrix} -1\\0\\1 \end{pmatrix}\}$ si $m = 1$; i $\{\begin{pmatrix} -3\\1\\2 \end{pmatrix}\}$ si $m = 2$.

7.10 $M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Com que $M_B(f)$ té rang 3, es té $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 3$ i $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 1$. Bases de $\mathrm{Im}\, f$ i $\mathrm{Ker}\, f$: $\{u + 2w, v + w, 2u + v + w\}$ i $\{2u + 3v + w - 2t\}$, respectivament.

7.11 Matriu associada $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Ker}\, f = \langle\begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix}\rangle$. $f\begin{pmatrix} 2\\0\\1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\\-1\\-1 \end{pmatrix}$, $f^{-1}\begin{pmatrix} 2\\-1\\0 \end{pmatrix} = \emptyset$ i $f^{-1}\begin{pmatrix} 2\\-1\\-1 \end{pmatrix} = \{\begin{pmatrix} 1\\-1\\0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

7.12 1) Sí. 2) No (no és exhaustiva). 3) No (no és injectiva). 4) Sí.

7.13 En tots els casos, indiquem per $M(f)$ la matriu d'f en les bases canòniques corresponents.

1) $M(f) = (a)$. Cal distingir dos casos:

— $a \neq 0$: $\mathrm{Ker}\, f = \{0_{\mathbb{R}}\}$, $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 0$, $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}$ i $\dim(\mathrm{Im}\ f) = 1$. A més, f és isomorfisme i la inversa ve donada per $f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x$.

— $a = 0$: $\mathrm{Ker}\, f = \mathbb{R}$, $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 1$, $\mathrm{Im}\, f = \{0_{\mathbb{R}}\}$ i $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 0$. En aquest cas, f no és ni injectiva ni exhaustiva i, per tant, no és invertible.

2) $M(f)=\left(\begin{smallmatrix}1&3\\2&7\end{smallmatrix}\right)$. Com que rang $(M(f))=2$, es té que $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}^2$, $\dim(\operatorname{Im} f)=2$, $\operatorname{Ker} f=\{0_{\mathbb{R}^2}\}$ i $\dim(\operatorname{Ker} f)=0$. L'aplicació és un isomorfisme, i la inversa té per matriu $M(f^{-1})=M(f)^{-1}=\left(\begin{smallmatrix}7&-3\\-2&1\end{smallmatrix}\right)$.

3) $M(f)=\left(\begin{smallmatrix}1&-1&1&2\\0&1&-1&1\\1&-2&2&0\end{smallmatrix}\right)$. En aquest cas, $\operatorname{Im} f=\left\langle\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\\2\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}2\\1\\0\end{smallmatrix}\right)\right\rangle$, $\dim(\operatorname{Im} f)=3$, $\operatorname{Ker} f=\left\langle\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\1\\0\end{smallmatrix}\right)\right\rangle$ i $\dim(\operatorname{Ker} f)=1$. L'aplicació no és injectiva però sí exhaustiva.

4) $M(f)=\left(\begin{smallmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{smallmatrix}\right)$. Es té que $\operatorname{Im} f=\langle 1-x^2,-1+x\rangle$, $\dim(\operatorname{Im} f)=2$, $\operatorname{Ker} f=\langle 1+x+x^2\rangle$ i $\dim(\operatorname{Ker} f)=1$. L'aplicació no és injectiva ni exhaustiva.

5) $M(f)=\left(\begin{smallmatrix}3&0&0\\1&-1&0\\2&1&1\end{smallmatrix}\right)$. Ara, $\operatorname{Im} f=\langle 3+x+2x^2,-x+x^2,x^2\rangle$, $\dim(\operatorname{Im} f)=3$, $\operatorname{Ker} f=\{0_{P_2(\mathbb{R})}\}$ i $\dim(\operatorname{Ker} f)=0$. L'aplicació és un isomorfisme i la inversa té per matriu $M(f^{-1})=\left(\begin{smallmatrix}1/3&0&0\\1/3&-1&0\\-1&1&1\end{smallmatrix}\right)$. És a dir, $f^{-1}(a_0+a_1x-a_2x^2)=\frac{a_0}{3}+(\frac{a_0}{3}-a_1)x+(-a_0+a_1+a_2)x^2$.

6) $M(f)=\left(\begin{smallmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\end{smallmatrix}\right)$. Una base de $\operatorname{Im} f$ és $\{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\}$, $\dim(\operatorname{Im} f)=2$. Una base de $\operatorname{Ker} f$ és $\{\left(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\}$, $\dim \operatorname{Ker} f=2$. f és exhaustiva i no injectiva.

7) $M(f)=\left(\begin{smallmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&-1&1\\1&0&-1\end{smallmatrix}\right)$. Una base de $\operatorname{Im} f$ és $\{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}-1&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right)\}$, $\dim \operatorname{Im} f=2$. Una base de $\operatorname{Ker} f$ és $\{(1,1,1)\}$, $\dim \operatorname{Ker} f=1$. f no és ni injectiva ni exhaustiva.

7.14 És injectiva, ja que $f(A)=f(C)\Rightarrow AB=CB\Rightarrow A=C$, donat que existeix B^{-1}. També és exhaustiva ja que per qualsevol matriu $D\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, exiteix A tal que $f(A)=D$ (prendre $A=DB^{-1}$). Per tant, al ser exhaustiva i injectiva, llavors és bijectiva.

7.15

1) $M(f)=M(f_2)M(f_1)=\left(\begin{smallmatrix}-3&3&-4\\5&-3&8\end{smallmatrix}\right)$, o sigui, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}-3x+3y-4z\\5x-3y+8z\end{smallmatrix}\right)$. Com que el rang de $(M(f))$ és 2, es té que $\dim(\operatorname{Im} f)=2$ i $\dim(\operatorname{Ker} f)=1$. L'aplicació és exhaustiva però no injectiva.

2) $M(f)=\left(\begin{smallmatrix}1&0&0&1\\1&0&1&0\\0&0&1&1\end{smallmatrix}\right)$, o sigui, $f(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)=(a_0+a_3)+(a_0+a_2)x+(a_2+a_3)x^2$. En aquest cas, $\dim(\operatorname{Im} f)=3$ i $\dim(\operatorname{Ker} f)=1$. L'aplicació és només exhaustiva.

3) $M(f)=\left(\begin{smallmatrix}1&2\\2&2\\2&1\end{smallmatrix}\right)$, o sigui, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}x+2y\\2x+2y\\2x+y\end{smallmatrix}\right)$. Com que $\operatorname{rang}(M(f))=2$, es té $\dim(\operatorname{Im} f)=2$ i $\dim(\operatorname{Ker} f)=0$. L'aplicació és injectiva però no exhaustiva.

7.16 1) $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\2&0\end{smallmatrix}\right)$. 2) $\left(\begin{smallmatrix}1/2&0\\-1/3&-2/3\\1/3&5/3\\2/3&-5/3\end{smallmatrix}\right)$. 3) $\left(\begin{smallmatrix}1&1&-1\\0&0&1\end{smallmatrix}\right)$.

7.17

1) $M(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Com que té rang 3, f és bijectiva. $M(f^{-1}) = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, per tant $f^{-1}(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0/3 + (-a_1 + a_0/3)x + (-a_0 + a_1 + a_2)x^2$.

2) La matriu del canvi de base és $P = P^B_{CAN} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, aleshores la matriu associada a f en la base B és

$$P^{-1}M(f)P = \begin{pmatrix} -1/4 & -3/4 & 5/4 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/4 & 17/4 & 21/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & -14/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

7.18 1) $M^{B_E}_{B_F}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 2) $M^{B_E}_{B'_F}(f) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. 3) $M^{B'_E}_{B_F}(f) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -6 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
4) $M^{B'_E}_{B'_F}(f) = \begin{pmatrix} -1/2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$.

7.19

1) $f_N(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f_N(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $f_N(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f_N(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
La matriu associada és $M_{CAN}(f_N) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) $\operatorname{Ker} f_N = \{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mid f_N(\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad z = -x,\ t = -y.$$

$$\operatorname{Ker} f_N = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ -x & -y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}\right\} = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rangle, \qquad \dim(\operatorname{Ker} f_N) = 2.$$

$$\operatorname{Im} f_N = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle, \qquad \dim(\operatorname{Im} f_N) = 2.$$

3) $P^B_{CAN} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{CAN}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
$M_B(f_N) = P^{CAN}_B M^{CAN}_{CAN}(f_N) P^B_{CAN} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

7.20

1) $\operatorname{Im} f = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ i $\operatorname{Ker} f = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$.

2) Resolent $MP = PM_B$, on la incògnita és la matriu P, trobem $\{\begin{pmatrix} 6c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2b+c \\ 3c \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\}$, per a qualssevol $a, b, c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

7.21

1) $M^{B_E}_{B_F}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2) f és injectiva i exhaustiva, per tant és un isomorfisme.

3) Només cal comprovar que els vectors donats pertanyen a E i a F respectivament i són linealment independents. Tenim $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix}2\\1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$; i $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$. La matriu associada a f en les bases B'_E i B'_F és $\begin{pmatrix}2 & -4\\-2 & 2\end{pmatrix}$.

7.23

1) $\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}/2 & -1/2\\1/2 & \sqrt{3}/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sqrt{3}/2 & 1/2\\1/2 & \sqrt{3}/2\end{pmatrix}$.

2) $\begin{pmatrix}1/2 & 0\\0 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1/2\end{pmatrix}$.

3) $\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2\\\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sqrt{2} & \sqrt{2}\\\sqrt{2} & \sqrt{2}\end{pmatrix}$.

7.24

1) Sí: $\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$.

2) Sí: $\begin{pmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1\\\sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta_2 & -\sin\theta_2\\\sin\theta_2 & \cos\theta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2)\\\sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\theta_2 & -\sin\theta_2\\\sin\theta_2 & \cos\theta_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1\\\sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix}$.

3) Sí: $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$.

4) No: $\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -\sin\theta\\0 & \cos\theta\end{pmatrix}$.

7.26

1) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

2) $\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0 & 0\\0 & \sqrt{2} & 0\\0 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2\\0 & 1 & 0\\-\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & \sqrt{2} & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

3) $\begin{pmatrix}1/3 & 0 & 0\\0 & 1/3 & 0\\0 & 0 & 1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0\\1/2 & \sqrt{3}/2 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \sqrt{3}/2 & -1/2\\0 & 1/2 & \sqrt{3}/2\end{pmatrix} = 1/6\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -\sqrt{3}/2 & 1/2\\1 & 3/2 & -\sqrt{3}/2\\0 & 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$.

7.27

1) Sí: $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\\sin\theta & \cos\theta & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k & 0 & 0\\0 & k & 0\\0 & 0 & k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k & 0 & 0\\0 & k & 0\\0 & 0 & k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\\sin\theta & \cos\theta & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

2) No: $\begin{pmatrix}\cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0\\\sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1\\0 & \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta_2 & -\sin\theta_2\cos\theta_1 & \sin\theta_2\sin\theta_1\\\sin\theta_2 & \cos\theta_2\cos\theta_1 & -\cos\theta_2\sin\theta_1\\0 & \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix}$

però $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1\\0 & \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0\\\sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0\\\cos\theta_1\sin\theta_2 & \cos\theta_1\cos\theta_2 & \cos\theta_1\\\sin\theta_1\sin\theta_2 & \sin\theta_1\cos\theta_2 & \cos\theta_1\end{pmatrix}$.

Diagonalització

Notació: L'expressió $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ representa una matriu diagonal $n\times n$, on $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ són els elements de la diagonal.

Donats f un endomorfisme d'un espai vectorial E i k un valor propi de f, notarem per E_k el subespai associat al valor propi k, és a dir, $E_k = \{v \in E : f(v) = kv\}$.

8.1

1) El polinomi característic és $p(k) = k^2 - 3k - 4 = (k+1)(k-4)$. Els subespais associats als valors propis són $E_{-1} = \langle\left(\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right)\rangle$, $E_4 = \langle\left(\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}\right)\rangle$. La matriu és diagonalitzable. Diagonalitza en la base $\{\left(\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}\right)\}$ i la matriu diagonal associada és $\mathrm{Diag}(-1, 4)$.

2) El polinomi característic és $p(k) = k^2 - 1 = (k+1)(k-1)$. Els subespais associats als valors propis són $E_{-1} = \langle\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\rangle$, $E_1 = \langle\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)\rangle$. La matriu és diagonalitzable. Diagonalitza en la base $\{\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)\}$ i la matriu diagonal associada és $\mathrm{Diag}(-1, 1)$.

3) El polinomi característic és $p(k) = -k^3 + 10k^2 - 28k + 24 = -(k-6)(k-2)^2$. Els subespais associats als valors propis són $E_6 = \langle\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix}\right)\rangle$, $E_2 = \langle\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\-1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\-1\end{smallmatrix}\right)\rangle$. La matriu és diagonalitzable. Diagonalitza en la base $\{\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\-1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\-1\end{smallmatrix}\right)\}$ i la matriu diagonal associada és $\mathrm{Diag}(6, 2, 2)$.

4) El polinomi característic és $p(k) = -(k-1)^3$. El subespai associat al valor propi és $E_0\langle\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)\rangle$. La matriu no és diagonalitzable.

5) El polinomi característic és $p(k) = -k^3 + 12k + 16 = -(k-4)(k+2)^2$. Els subespais associats als valors propis són $E_4 = \langle\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\2\end{smallmatrix}\right)\rangle$, $E_{-2} = \langle\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}\right)\rangle$. La matriu és diagonalitzable. Diagonalitza en la base $\{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}\right)\}$ i la matriu diagonal associada és $\mathrm{Diag}(4, -2, -2)$.

6) El polinomi característic és $p(k) = -(k-2)^3$. El subespai associat al valor propi és $E_2 = \langle\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)\rangle$. La matriu no és diagonalitzable.

7) El polinomi característic és $p(k) = -(k+1)(k^2+1)$, que només té una arrel real. Per tant la matriu no és diagonalitzable. (Nota: sí que diagonalitza sobre $\mathbb{C}$. Els subespais associats als valors propis són $E_{-1} = \langle\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\-1\end{smallmatrix}\right)\rangle$, $E_i = \langle\left(\begin{smallmatrix}1+i\\1\\1\end{smallmatrix}\right)\rangle$, $E_{-i} = \langle\left(\begin{smallmatrix}1-i\\1\\1\end{smallmatrix}\right)\rangle$. La matriu diagonalitza en la base $\{\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\-1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1+i\\1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1-i\\1\\1\end{smallmatrix}\right)\}$ i la matriu diagonal associada és $\mathrm{Diag}(-1, i, -i)$.)

8) El polinomi característic és $p(k) = k^4 - 6k^3 + 13k^2 - 12k + 4 = (k-1)^2(k-2)^2$. Els subespais associats als valors propis són $E_1 = \langle\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)\rangle$, $E_2 = \langle\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\4\\8\end{smallmatrix}\right)\rangle$. La matriu no és diagonalitzable.

9) Es té $p(k) = k^4 + 4k^3 - 13k^2 - 4k + 12 = (k+1)(k+6)(k-2)(k-1)$ com a polinomi característic. La matriu és diagonalitzable. Els subespais associats als valors propis són

$E_{-1} = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$, $E_{-6} = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$, $E_2 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$, $E_1 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$. La matriu diagonalitza en la base $\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$ i la matriu diagonal associada és $\mathrm{Diag}(-1, -6, 2, 1)$.

8.2 $B = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \}$.

8.3

1) El polinomi característic és $p(k) = -k^3 + 3k^2 - 2k = -k(k-1)(k-2)$. Els subespais associats als valors propis són $E_0 = \operatorname{Ker} f = \langle \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$, $E_1 = \langle \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$, $E_2 = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$. L'endomorfisme és diagonalitzable en la base $\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$ i la matriu diagonal associada és $\mathrm{Diag}(0, 1, 2)$.

2) El polinomi característic és $p(k) = -k^3 + 2k^2 + 15k - 36 = -(k+4)(k-3)^2$. Els subespais associats als valors propis són $E_{-4} = \langle 3x^2 + 8x - 6 \rangle$, $E_3 = \langle x^2 - 2x + 5 \rangle$. L'endomorfisme no és diagonalitzable, ja que $\dim E_3 \neq 2$.

3) El polinomi característic és $p(k) = (k-1)(k-2)(k-3)(k-4)$. Els subespais associats als valors propis són $E_1 = \langle 1 \rangle$, $E_2 = \langle 1 + x \rangle$, $E_3 = \langle 3 + 4x + 2x^2 \rangle$, $E_4 = \langle 8 + 12x + 9x^3 + 3x^3 \rangle$. Atès que l'endomorfisme té quatre valors propis diferents, aquest diagonalitza respecte de la base $\{1, 1+x, 3+4x+2x^2, 8+12x+9x^2+3x^3\}$, essent la matriu diagonal associada $\mathrm{Diag}(1, 2, 3, 4)$.

8.4 Els valors propis són -1, -2 i 1, de multiplicitat algebraica 1, 1 i 2, respectivament. Els subespais associats als valors propis són $E_{-1} = \langle \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$, $E_{-2} = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$, $E_1 = \langle \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle$.

8.5

1) El polinomi característic és $p(x) = k^2 - ak + b^2$. Si $a^2 - 4b^2 < 0$ la matriu no diagonalitza ja que no té valors propis reals. Si $a^2 - 4b^2 = 0$ i $b \neq 0$ la matriu no diagonalitza. Si $a^2 - 4b^2 > 0$, o bé $a = b = 0$, la matriu diagonalitza.

2) El polinomi característic és $p(x) = (1-k)^2(2-k)$. La matriu és diagonalitzable si i només si $a = 0$.

3) El polinomi característic és $p(x) = (a-k)(1-k)(-1-k)$. La matriu és diagonalitzable si $a = -1$ i $b = 0$, si $a = 1$, o bé si $a \neq 1, -1$.

4) El polinomi característic és $p(x) = k(k^2 - c^2 - 4ab)$. Si $c^2 + 4ab < 0$ la matriu no diagonalitza. Si $c^2 + 4ab = 0$ la matriu només diagonalitza si $a = b = c = 0$. Si $c^2 + 4ab > 0$ la matriu diagonalitza.

5) El polinomi característic és $p(x) = (1-k)^2(2-k)(b-k)$. La matriu diagonalitza si $b \neq 1$ i $a = 0$, altrament no diagonalitza.

6) El polinomi característic és $p(x) = (a-k)^2(1-k)$. La matriu diagonalitza per a qualsevol valor de a.

7) El polinomi característic és $p(x) = (1-k)(2-k)(a-k)$. La matriu diagonalitza si $a \neq 1$ o bé si $a = 1$ i $b = 0$.

8.6

- $f(u) = \lambda u \Rightarrow f(-u) = (-1)f(u) = -\lambda u = \lambda(-u)$
- $f(u) = \lambda u \Rightarrow f(f(u)) = f(\lambda u) = \lambda f(u) = \lambda^2 u$

8.7 0 és valor propi si i només si hi ha algun vector $u \neq 0_E$ tal que $u \in \operatorname{Ker}(f)$). Per tant, f és injectiu si i només si 0 no és valor propi. Per acabar la demostració notem que tot endomorfisme injectiu és exhaustiu (com a conseqüència la fórmula de les dimensions).

8.8 El polinomi característic serà de la forma $(-1)^n(\lambda - \lambda_1)\dots(\lambda - \lambda_n)$, on λ_i és l'i-èsim element de la diagonal principal. Al ser tots diferents, llavors hi haurà exactament n vectors propis i per tant diagonalitza.

8.9

1) L'endomorfisme existeix i és diagonalitzable: $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-y+4z \\ 2x+2y-4z \\ z \end{pmatrix}$. El polinomi característic és $p(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^2$.

2) L'endomorfisme existeix i és diagonalitzable: $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2z-5x-y)/8 \\ (2z-5x-y)/8 \\ (2z-5x-y)/8 \end{pmatrix}$. El polinomi característic és $p(\lambda) = \lambda^2(\lambda + 1/2)$.

3) L'endomorfisme existeix ($f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-y \\ y+z \\ z \end{pmatrix}$), però no és diagonalitzable.

4) L'endomorfisme existeix i és diagonalitzable: $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2x+2y \end{pmatrix}$. El polinomi característic és $p(\lambda) = \lambda(\lambda-2)^2$.

8.10

1) $\dim(\operatorname{Im} f)$ és 2 si $a = -1$ i 3 altrament.

2) Per a $a = 3$, el polinomi característic és $p(\lambda) = -(\lambda-2)^3$ i $\dim E_2 = 1$, per tant l'endomorfisme no és diagonalitzable.

3) El polinomi característic és $p(\lambda) = -(\lambda-2)(\lambda^2 - (a+1)\lambda + a + 1)$. Té totes les arrels reals si, i només si, $a \geq 3$ o $a \leq -1$.

8.11

1) Si λ és un valor propi d'A, llavors λ^k és un valor propi d'A^k. Els vectors propis associats són els mateixos.

Ara bé, A^k pot tenir valors propis que no provinguin de valors propis d'A. Per exemple, la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ té un únic valor propi real $\lambda = -1$ de multiplicitat algebraica 1, però la matriu $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ té dos valors propis, $\lambda^2 = 1$ i -1, amb multiplicitats algebraiques 1 i 2 respectivament.

2) $A^k = (PDP^{-1})^k = PDP^{-1}PDP^{-1} \cdots PDP^{-1} = PD^kP^{-1}$.

3) i) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{100} & 0 \\ 0 & 2^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$.

ii) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2001} & 0 \\ 0 & 0 & 4^{2001} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

iii) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -30 & 1 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{70} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-7)^{70} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11^{70} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13^{70} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7/12 & 0 & 1 & -7/12 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/12 & 0 & 0 & 1/12 \\ 5/2 & 1 & 0 & 5/2 \end{pmatrix}$.

8.12

1) Posició: $A^{10} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2046 \\ 1023 \\ 2047 \end{pmatrix}$.

Nota: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2) No, ja que $A^n = \begin{pmatrix} 2^n+2 & 0 & -2^{n+1}-2 \\ 2^n-1 & 2^n & 2^n+1 \\ 2^n-1 & 0 & 2^{n+1}+1 \end{pmatrix}$ i $A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4098 \\ 2049 \\ 4149 \end{pmatrix}$ no té solució.

Exercicis de repàs i consolidació

B.1 Primer demostrarem que el producte de dues matrius diagonals dóna com a resultat una matriu diagonal. Això és equivalent a que si C i D són dues matrius diagonals i $E = CD$, llavors $i \neq j \Rightarrow e_{ij} = 0$. Això és immediat ja que si agafem la i-èsima fila de C i la multipliquem per la j-èsima columna de D, $i \neq j$, la fila només té un element $\neq 0$, i és a la posició número i, i a la columna allà hi haurà un 0 ja que l'únic element $\neq 0$ es troba a la posició j.

Observant que tota matriu diagonal és igual a la seva transposada, tenim que:

$$AB = (AB)^t = B^tA^t = BA.$$

B.2 Només fem el cas triangular superior, ja que l'altre cas és totalment equivalent. Sigui $C = AB$, llavors cal demostrar que $i > j \Rightarrow c_{ij} = 0$. Prenem un element qualsevol c_{ij}, amb $i > j$. Tot element a_{ik} de la forma $k < i$ compleix que $a_{ik} = 0$, i tot element b_{lj} amb $l > j$ és 0 (per definició de matriu triangular superior). Per tant al multiplicar la i-èsima fila amb la j-èsima columna, amb $i > j$, tenim que per a tot element del sumatori $\sum_{k=0}^{n} a_{ik}b_{kj}$ almenys un dels 2 termes que es multipliquen és 0. Si $k < i$, l'element d'A serà 0, i si $k > j$ llavors ho serà el de B. Com $i > j$, si $k \leq j \Rightarrow k \leq j < i \Rightarrow k < i$. Per tant tot element de la matriu resultant que estigui per sota de la diagonal és 0 i la matriu resultant és triangular superior.

B.3 $(AA^t)^t = AA^t$, per tant AA^t és simètrica. Alternativament, si $B = AA^t$, $b_{ij} = \sum_{k=0}^{n}(a_{ik}a_{kj}^t) = \sum_{k=0}^{n}(a_{ik}a_{jk}) = \sum_{k=0}^{n}(a_{ki}^t a_{kj}) = b_{ji}$. La simetria d'$A^tA$ es demostra anàlogament.

B.4 Com que $A^2 = A$, llavors, $a_{ii} = \sum_{k=0}^{n} a_{ik}^2 = 0$ al ser simètrica. És evident que tots els termes han de ser 0.

B.5 Les matrius $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que satisfan alguna de les condicions següents:

- $a, d \in \{1, -1\}, b = c = 0$.
- $d = -a, c = 0, a \in \{1, -1\}, b \in \mathbb{R}$.
- $d = -a, b = 0, a \in \{1, -1\}, c \in \mathbb{R}$.
- $d = -a, b = (1 - a^2)/c,\ a \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

B.6

1) Si A és equivalent per files a B, llavors hi ha una matriu E que és producte de matrius elementals tal que $A = EB$. Com que les matrius elementals són invertibles i les seves inverses són matrius elementals, existeix una matriu E^{-1}, que és producte de matrius elementals, tal que $B = E^{-1}A$. Per tant B és equivalent per files a A.

2) Si A i B són equivalents per files, llavors existeix una matriu E_1 que és producte de matrius elementals i tal que $A = E_1B$. Si B i C són equivalents per files, llavors existeix una matriu E_2, producte de matrius elementals, tal que $B = E_2C$. Substituint B a la primera equació, es treu que $A = E_1E_2C$. Com que E_1E_2 és producte de matrius elementals, es té que A és equivalent per files a C.

B.7

1) 3.

2) Sí: $e_2 = -e_1 + 2e_3$ i $e_4 = 3e_3 - e_5$.

3) Quan $x = 2\pi$ no hi ha cap solució, i quan $y = 2\sqrt{3}$ hi ha una solució amb un grau de llibertat.

4) Si $x = 0$ i $y = 2\sqrt{3}$ hi ha una solució. Quan $z = 2\pi$ i $t = 2\sqrt{3}$ no hi ha cap solució.

B.8 Desenvolupant el determinant per la fila que s'ha multiplicat per c.

B.9 1)$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. 2) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$. 3) Sistema incompatible. 4) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, per a tot $s \in \mathbb{R}$.

B.10

1) Si $m = 1$, SCI amb 2 graus de llibertat. Si $m = -2$, SI. SCD altrament.

2) Si $a = 2/5$, SI. Si $a = -1$, SCI amb un grau de llibertat. SCD altrament.

3) Si $a = -5$, SCD. SI altrament.

4) Si $a = 1$ i $b = 1$ o $a = 7/3$ i $b = 5/4$, CI amb 1 grau de llibertat. Si $a = 1$ i $b \neq 1$ o $a = 7/3$ i $b \neq 5/4$ SI. SCD altrament.

B.11 1) Sí. 2) No, el neutre no pertany. 3) Sí. 4) Sí. 5) Sí.

B.12 $\boxed{\Rightarrow}$ Si el sistema no és homogeni el vector $0_{\mathbb{R}^n}$ no és al conjunt de solucions, per tant no és un subespai.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si és homogeni, prenem x_1, x_2 dues solucions qualssevol, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ i A la matriu de coeficients. Tenim que

$$A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A(x_1) + \lambda_2 A(x_2) = \lambda_1 0 + \lambda_2 0 = 0.$$

Per tant, és un subespai vectorial.

B.13 $a = 2$.

B.14 $6u + 7v - 2w = 0$.

B.15

- $\boxed{a \Rightarrow b}$ Suposo que el primer conjunt és linealment independent i que el segon no ho és i arribo a una contradicció. Si el segon conjunt és linealment dependent, existeix una combinació lineal $\lambda_1(v_1 + v_2) + \lambda_2 v_2 + \lambda_3(v_2 + v_3) = 0_E$, amb algun $\lambda_i \neq 0$. Llavors $\lambda_1 v_1 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_E$ i, com el conjunt $\{v_1, v_2, v_3\}$ és linealment independent, això només és possible quan tots els escalars són 0. L'única solució és que totes les λ_i siguin 0, contradicció amb el fet que hi ha alguna diferent 0.

- $\boxed{b \Rightarrow c}$ El procediment és idèntic al de la demostració anterior. Si el conjunt $\{v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3\}$ és linealment dependent, llavors hi ha una combinació $\lambda_1(v_1 + v_2) + \lambda_2(v_1 + v_3) + \lambda_3(v_2 + v_3) = 0_E$, amb alguna $\lambda_i \neq 0$. Aleshores es té la combinació $(\lambda_1 + \lambda_2)(v_1 + v_2) + (\lambda_1 - 2\lambda_2)v_2 + (\lambda_3 + \lambda_2)(v_2 + v_3) = 0_E$, on tots els escalars són 0, però novament surt que això només pot passar quan totes les λ_i són 0.

- $\boxed{c \Rightarrow a}$ Igual que els dos anteriors. Si existeix una combinació $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_E$, amb algun coeficient diferent de 0; llavors existiria la combinació $\frac{\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3}{2}(v_1 + v_2) + \frac{\lambda_1+\lambda_3-\lambda_2}{2}(v_1 + v_3) + \frac{\lambda_2+\lambda_3-\lambda_1}{2}(v_2 + v_3) = 0_E$, i fent un sistema amb les λ, igualant els coeficients a 0, surt que l'única possibilitat és que totes siguin 0.

B.16 És evident que el determinant de la matriu que té els vectors per columnes dóna 1, per tant són linealment independents. Com que $|B| = dim(\mathbb{R}^4)$, és una base.
$\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} = -10 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 11 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

B.17 (La solució de 1) i 3) no és única.)

1) $B = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}\}$. 2) $e_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \end{pmatrix}$. 3) $B' = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 2 \\ 79 \end{pmatrix}\}$.

B.18 Sigui S el conjunt en qüestió. Clarament S és no buit ja que l'element $(0,0)$ hi pertany. Si $\alpha u + \beta v \in S$, aleshores $\lambda(\alpha u + \beta v) = (\lambda\alpha)u + (\lambda\beta)v$ i $\lambda\alpha + \lambda\beta = 0$, de manera que S és tancat per productes per escalars. Sumant dos elements surt l'element $(\alpha_1 + \alpha_2)u + (\beta_1 + \beta_2)v$ i es satisfà $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 = 0$, ja que agrupant $(\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2) = 0 + 0 = 0$, doncs els dos elements pertanyen a S.

És el subespai $\langle (u - v) \rangle$, una recta de $\mathbb{R}^2$.

B.19

1) Per ser un conjunt generador, només cal provar que és linealment independent. Suposem que no és linealment independent, llavors hi ha una combinació $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0_E$, amb almenys un escalar diferent de 0. Suposem que $\lambda_i \neq 0$. Així queda:

$$v_i = \frac{\lambda_1}{\lambda_i} e_1 + \cdots + \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} v_{i-1} + \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} v_{i+1} + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda_i} e_n.$$

Però si això fos possible, llavors traient v_i del conjunt generaríem el mateix subespai, ja que podem expressar qualsevol aparició de v_i com a combinació lineal dels altres, i això és una contradicció.

2) Sigui $v \notin \{e_1, \ldots, e_n\}$. Per hipòtesi, existeix una combinació lineal $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n + \lambda_v v = 0_E$ amb algun escalar diferent de zero. L'escalar λ_v ha de ser diferent de zero, altrament existiria una combinació lineal dels elements del conjunt donant el vector 0_E amb escalars no tots nuls, i això contradiria la hipòtesi (suposo que $v \neq 0$, en cas que sigui igual és trivial que afegir-lo al conjunt causa una dependència lineal). Aleshores,

$$v = \frac{\lambda_1}{\lambda_v} e_1 + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda_v} e_n.$$

Per tant el conjunt és generador i una base.

B.20 (La base donada no és l'única possible.)

1) $\{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, $\dim(E_1) = 2$.

2) $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, $\dim(E_2) = 2$.

3) $\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, $\dim(E_3) = 3$.

4) $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, $\dim(E_4) = 2$.

5) Atès que $\dim(E_1 \cap E_2) = 0$, no hi ha base.

6) $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, $\dim(E_3 \cap E_4) = 2$.

B.21 (La solució no és única.)

1) $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. 2) $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. 3) $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.
4) $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

B.22 És obvi que és tancat pel producte escalar. Sigui un $w \in F$ qualsevol, llavors $\exists a, b \in \mathbb{Q}$ tals que $w = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 2b-a \end{pmatrix}$. Considerem un $\lambda \in \mathbb{Q}$ arbitrari, i multiplicant podem donar $a' = \lambda a, b' = \lambda b$, i λw pertany al conjunt. Per demostrar que és tancat per la suma, llavors siguin $w = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 2b-a \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} a' \\ 2a' \\ 2b'-a' \end{pmatrix}$, es té $v + w = \begin{pmatrix} a+a' \\ 2(a+a') \\ 2(b+b')-(a+a') \end{pmatrix}$, prenent $a_r = a + a', b_r = b + b'$ racionals demostren que el vector pertany al subespai. Una base és $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$, i el subespai té dimensió 2.

Si estem a $\mathbb{Z}_2$, llavors la demostració de que es tracta d'un subespai vectorial és anàloga, però la base serà $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ i el subespai té dimensió 1.

B.23

- Per a $n = 2$, llavors $B = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}$ i el subespai té dimensió 1.
- Per a $n = 3$. Imposant les condicions perquè la matriu $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}$ pertanyi al subespai, s'obté el sistema d'equacions:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  La solució és:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2a_5 - a_9 \\ a_2 &= 2a_5 - a_8 \\ a_3 &= -a_5 + a_8 + a_9 \\ a_4 &= -2a_5 + a_8 + 2a_9 \\ a_6 &= 4a_5 - a_8 - 2a_9 \\ a_7 &= 3a_5 - a_8 - a_9 \\ &\text{i } a_5,\ a_8,\ a_9 \text{ lliures.} \end{aligned}$$

  El subespai té dimensió 3 i una base és:

$$\left\{\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

B.24

1) Siguin M_Bi $M_{M'}$ les matrius que tenen per columnes els vectors de les bases B i B', respectivament. Per veure que B i B' són bases n'hi ha prou en comprovar que $\det M_B = -72 \neq 0$ i $\det M_{B'} = 144 \neq 0$.

2) $P_{B'}^{B} = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/4 & 1/12 \\ -1 & -17/12 & -17/12 \\ 1 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$, $P_{B}^{B'} = \begin{pmatrix} 0 & 8/9 & 17/9 \\ 3/2 & -1/2 & -5/4 \\ -3/2 & -5/6 & -1/12 \end{pmatrix}$.

3) $v_B = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 5/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, $v_{B'} = \begin{pmatrix} 19/12 \\ -43/12 \\ 4/3 \end{pmatrix}$.

B.25 $v_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

B.26 $P_{B'}^{B} = \begin{pmatrix} -24 & 7 & 1 & -2 \\ -10 & 3 & 0 & -1 \\ -29 & 7 & 3 & -2 \\ 12 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\qquad P_{B}^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & -2 & -3 \\ 2 & -5 & -2 & -5 \\ -1 & 4 & 4 & 11 \end{pmatrix}$.

B.27 Sí, perquè els vectors $\{v_1, v_2, v_3\}$ són linealment independents. La matriu de canvi de la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ a la base canònica de $\mathbb{R}^3$ és $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 10 \end{pmatrix}$. Per tant, les coordenades de $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ en la base B són $P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & -17 & -5 \\ -20 & 7 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50x-17y-5z \\ -20x+7y+2z \\ -9x+3y+z \end{pmatrix}$. Per altra banda, la matriu d'f en la base $\overline{v}$ de $\mathbb{R}^3$ i la base canònica de $\mathbb{R}^2$ és $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Així, doncs, $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M(f) \begin{pmatrix} 50x-17y-5z \\ -20x+7y+2z \\ -9x+3y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30x-10y-3z \\ -9x+3y+z \end{pmatrix}$.

B.28 Tots ho són menys $\mathbb{R}_6[x]$.

B.29 El nucli són les matrius simètriques d'ordre 3, que és un espai de dimensió 6.

B.30 $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Una base de $\operatorname{Im} f$ és $\{u + v, u\}$ i $\dim(\operatorname{Im} f) = 2$. Una base $\operatorname{Ker} f$ és $\{u + v\}$ i $\dim(\operatorname{Ker} f) = 1$. Una base de $\operatorname{Im} f^2$ és $\{u + v\}$ i $\dim(\operatorname{Im} f^2) = 1$. Una base de $\operatorname{Ker} f^2$ és $\{u, v\}$ i $\dim(\operatorname{Ker} f^2) = 2$.

B.31

1) $M(f) = \begin{pmatrix} 1/3 & -1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & -2/3 \end{pmatrix}$.

2) $\dim(\operatorname{Ker} f) = 2$, $\dim(\operatorname{Im}(f)) = 1$.

3) $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x-3y+2z \\ 0 \\ -x+3y-2z \end{pmatrix}$.

4) No és cap de les tres coses, ja que no és exhaustiu ($\dim(\operatorname{Im}(f)) \neq \dim(\mathbb{R}^3)$) ni injectiu (el nucli no és $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$) i per tant tampoc és bijectiu.

B.32

1) Es té $\dim(\operatorname{Im} f_r) = 2$ quan $r = -2$, per la resta de valors de r el rang d'f_r val 3.

2) Per a $r = -2$, $\dim \operatorname{Ker} f_r = 1$ i una base de $\operatorname{Ker} f_r$ és $\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

3) No existeix.

4) En general, $f_r\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\3\\5+r\end{pmatrix}$. Si $r \neq -2$ llavors f_r és un isomorfisme i $f_r^{-1}(f(w)) = w$. En canvi, si $r = -2$ llavors f_r ja no és un isomorfisme i $f_r^{-1}(f_r(w)) = \{w + \lambda\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

B.33

1) Si v_1 i v_2 són linealment dependents, existeixen dos escalars λ_1, λ_2, no tots dos nuls, tal que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0_E$. Per ser f lineal

$$0_F = f(0_E) = f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2).$$

Per tant, $f(v_1)$ i $f(v_2)$ també ho són linealment dependents.

2) Considerem la combinació lineal $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0_E$. Per linealitat $\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) = 0_F$, atès que $f(v_1)$ i $f(v_2)$ són linealment independents, els escalars λ_1, λ_2, són tots dos nuls. Per tant, v_1 i v_2 són linealment independents.

3) Si $f(v_1)$ i $f(v_2)$ són linealment dependents existeixen dos escalars λ_1, λ_2, no tots dos nuls, tal que $\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) = 0_F$. Per ser f lineal $f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = f(0_E)$. Com que l'aplicació és injectiva, $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0_E$. Per tant, v_1 i v_2 són linealment independents.

B.34

1) $\boxed{\Rightarrow}$ Considerem la combinació lineal $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_E$. Per la definició de l'aplicació $f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_E$. Com que f és injectiva, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = 0_{\mathbb{R}^n}$ i $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

   $\boxed{\Leftarrow}$ Per veure que f és injectiva n'hi ha prou en comprovar que $\operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Si $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n = 0_E$, per ser $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linealment independents, $x_1 = \cdots = x_n = 0$.

2) $\boxed{\Rightarrow}$ Sigui $w \in E$. Com que f és exhaustiva, existeix $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, tal que $f(\mathbf{x}) = w$. Per tant, $w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n$.

   $\boxed{\Leftarrow}$ Recíprocament, si $w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n$, llavors $f(x_1, \ldots, x_n) = w$.

3) f és bijectiva $\Leftrightarrow$ f és injectiva i exhaustiva $\Leftrightarrow$ els vectors $v_1, v_2, \ldots, v_n$ són linealment independents i generan E $\Leftrightarrow$ els vectors $v_1, v_2, \ldots, v_n$ són una base d'E.

B.35

1) La matriu del canvi de la base B_1 a la base canònica $\mathcal{C}_3$ és $P_{\mathcal{C}_3}^{B_1} = P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, que té per inversa $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. La matriu del canvi de la base B_2 a la base canònica $\mathcal{C}_2$ és $P_{\mathcal{C}_2}^{B_2} = Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Així, la matriu associada a f en les bases canòniques és $M_{\mathcal{C}_3}^{\mathcal{C}_2}(f) = Q\,A\,P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2) La matriu del canvi de la base B_1' a la base canònica és $P_{\mathcal{C}_3}^{B_1'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matriu del canvi de la base B_2' a la base canònica és $P_{\mathcal{C}_2}^{B_2'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, que és la seva pròpia inversa. Així, la matriu associada a f en les bases B_1' i B_2' és $M_{B_2'}^{B_1'}(f) = (P_{\mathcal{C}_2}^{B_2'})^{-1} M_{\mathcal{C}_3}^{\mathcal{C}_2}(f)\, P_{\mathcal{C}_3}^{B_1'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3) $f(v)_{B_2'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

B.36

1) $M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. (Nota: $P_B^{CAN} = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 \\ -1 & -1/3 & 2/3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$)

2) No és ni injectiu ni exhaustiu, per tant tampoc bijectiu.

3) Si $a \neq -b$ es té $f^{-1}(w) = \emptyset$, altrament $f^{-1}(w) = \{\begin{pmatrix} 5b \\ 0 \\ -3b \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

B.37

1) $M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Atès que $M(f)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, llavors $f \neq f^2$. Atès que $M(f)^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, llavors f^3 i f^2 són iguals i diferents de l'aplicació que envia tots els vertexs al vector 0_E.

3) La dimensió de $\operatorname{Im} f$ és 2 i una base és $\{e_1, e_2\}$. La dimensió de $\operatorname{Im} f^2$ és 1 i una base és $\{e_1\}$. La dimensió de $\operatorname{Ker} f$ és 2 i una base és $\{e_1 - e_2, e_3 - e_4\}$. La dimensió de $\operatorname{Ker} f^2$ és 3 i una base és $\{e_1 - e_4, e_2 - e_4, e_3 - e_4\}$.

4) Matriu del canvi de base $P_B^{B'} = \begin{pmatrix} 0&1&0&1 \\ 0&1&1&1 \\ 0&0&0&1 \\ 1&0&1&0 \end{pmatrix}$; la seva inversa és $\begin{pmatrix} 1&-1&0&1 \\ 1&0&-1&0 \\ -1&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}$. $M_{B'}(f) = P^{-1}M(f)P = \begin{pmatrix} -1&2&0&1 \\ 0&2&1&2 \\ 1&-2&0&-1 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$.

B.38

1) $\begin{pmatrix} 3&0 \\ 0&3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0 \\ 0&-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3&0 \\ 0&-3 \end{pmatrix}$.

2) $\begin{pmatrix} -1&0 \\ 0&-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0 \\ 0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

B.39

1) $\begin{pmatrix} 3&0&0 \\ 0&3&0 \\ 0&0&3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&-1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0&0&-1 \end{pmatrix}$.

B.40 Com que $(f^{-1})^{-1} = f$, només cal demostrar que f diagonalitza en la base B si f^{-1} diagonalitza en la base B. Sigui la matriu $D = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ diagonal la matriu associada a f en la base B. Per ser f bijectiu, sabem que la matriu associada a f^{-1} en la base B és $\operatorname{Diag}(1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_n)$. Notem que per ser f bijectiu, no hi pot haver cap λ_i igual a zero (altrament hi hauria vectors no nuls amb imatge nul·la). Per tant, f^{-1} diagonalitza en la base B i els seus valors propis són els inversos dels valors propis d'f.

B.41 Sigui u un vep d'AB amb vap λ. Tenim $ABu = \lambda u$ i $ABu = AABu = A\lambda u$. Per tant $Au = u$ si u és un vector propi d'AB. Aleshores, $ABAu = ABu = \lambda u$, i u també és un vector propi, amb el mateix valor propi, d'ABA.

B.42

1) Polinomi característic: $(\lambda - 1)(\lambda - 3)$. Valors propis: 1 i 3, ambdós de multiplicitat 1. Espais propis: $E_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$, $E_3 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$. Diagonalitza.

2) Polinomi característic: $\lambda(\lambda - 3)(\lambda + 1)$. Valors propis: $0, 3, -1$, tots de multiplicitat 1. Espais propis: $E_0 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$, $E_3 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$, $E_{-1} = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$. Clarament diagonalitza.

3) Polinomi característic: $\lambda^2(\lambda - 3)$. Valors propis: 0 i 3, de multiplicitats 2 i 1, respectivament. Espais propis: $E_0 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$, $E_3 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$. No diagonalitza.

4) Polinomi característic: $-\lambda^3 + 4\lambda^2 + 4\lambda - 16$. Valors propis: $-2, 2, 4$, tots de multiplicitat 1. Espais propis: $E_{-2} = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$, $E_2 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$, $E_4 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$. Diagonalitza.

5) Polinomi característic: $\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 4)$. Valors propis 0 i 2, amb multiplicitats 1 i 2, respectivament. Espais propis: $E_0 = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$, $E_2 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$. No diagonalitza.

6) Polinomi característic: $(\lambda - 1)(\lambda - 5)(\lambda - 8)(\lambda - 10)$. Valors propis: $1, 5, 8, 10$, tots de multiplicitat 1. Espais propis: $E_1 = \langle \begin{pmatrix} -63 \\ -4 \\ -9 \\ 28 \end{pmatrix} \rangle$, $E_5 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$, $E_8 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$, $E_{10} = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 68 \\ 45 \\ 10 \end{pmatrix} \rangle$. Diagonalitza.

7) Polinomi característic: $(1 - \lambda)^n$. Valors propis: 1 amb multiplicitat n. Espais propis $E_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$. Només diagonalitza si $n = 1$.

B.43

1) El polinomi característic és $p(x) = k^2(1 - k)^2$. Els valors propis són 0 i 1, tots dos amb multiplicitat dos.

2) Els subespais propis són $E_0 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x + z = 0$
$y - 2z + 2t = 0\}$ i $E_1 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x = 0$
$y + t = 0\}$. Una base formada per vectors propis és $B = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$.

3) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4) La matriu diagonal associada a la base B és $\mathrm{Diag}(0, 0, 1, 1)$.

B.44

1) Atès que $C \in \operatorname{Ker} f_C$ i C és una matriu no nul.la, f_C no és injectiva.

2) El polinomi característic és $p(x) = (-k)^2(a - d - k)(d - a - k)$. L'endomorfisme f_C diagonalitza si $d \neq a$.