Facultat D'Informàtica de Barcelona

Matemàtiques I

Capítol 4. ARBRES

Montserrat Maureso Sánchez
Departament de Matemàtiques - UPC

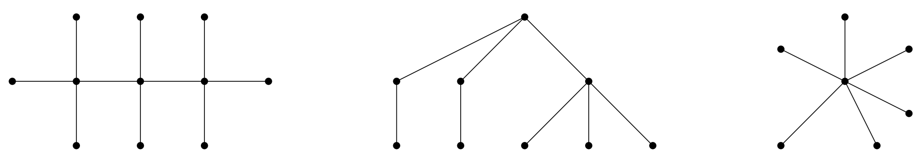
4
Arbres

Índex

1 Teorema de caracterització d'arbres

Direm que un graf és un *arbre* si és connex i acíclic. Si un graf és acíclic, tots els seus components connexos són arbres; en aquest context anomenem *boscos* als grafs acíclics. Anomenarem *fulles* als vèrtexs d'un arbre o bosc que tenen grau 1.

Exemple 4.1 Els grafs trajecte, T_n, i estrella, $K_{1,n}$, són arbres per a tot $n \geq 1$. Altres exemples d'arbres els podem veure representats a sota:



Observem que els grafs de l'exemple tenen diverses coses en comú, per exemple: tenen fulles, les arestes són totes arestes pont, els vèrtexs de grau ≥ 2 són vèrtexs de tall... Donem a continuació aquestes i d'altres propietats necessàries dels arbres, però abans donerem un resultat que ens serà útil per provar afirmacions que apareixeran al llarg del capítol.

Lema 4.2 *Sigui $G = (V, A)$ un graf tal que tot vèrtex té almenys grau 2 (és a dir, $g(v) \geq 2$ per a tot $v \in V$). Aleshores G té algun cicle.*

Demostració: Sigui $x_0x_1 \dots x_{s-1}x_s$ un camí de longitud màxima a G (és a dir, no hi ha camins a G de longitud $> s$). Donat que el grau dels vèrtexs a G és com a mínim 2, x_s és adjacent a un altre vèrtex y diferent de x_{s-1}. Si $y \notin \{x_0, x_1, \dots, x_{s-2}\}$, aleshores tenim el camí $x_0x_1 \dots x_{s-1}x_sy$ a G que té longitud $s+1$, i això és impossible perquè la longitud màxima és s. Per tant, $y = x_i$ per algun $i \in \{0, 1, \dots, s-2\}$, així tenim el cicle $x_ix_{i+1} \dots x_{s-1}x_sx_i$.

Proposició 4.3 *Siguin $T = (V, A)$ un arbre d'ordre ≥ 2, $a \in A$ i $u \in V$. Aleshores*

1. *T té almenys una fulla.*
2. *a és una aresta pont.*
3. *$T - a$ és un bosc amb 2 components connexos.*
4. *Si $g(u) \geq 2$, u és un vèrtex de tall.*
5. *$T - u$ és un bosc amb $g(u)$ components connexos.*
6. *Si u és una fulla $T - u$ és una arbre*

Aquestes propietats són força útils per provar per inducció alguns resultats sobre arbres.

Demostració:

1. (pel contrarecíproc) Si T no té cap fulla vol dir que tots els vèrtexs tenen almenys grau 2 i, aplicant el lema 4.2, T conté un cicle, el que contradiu la definició d'arbre. Per tant, T té almenys una fulla.

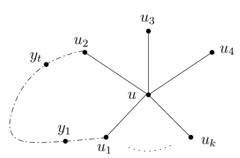
2. Sabem que una aresta és aresta pont si i només si no hi ha cap cicle que passi per ella. Si T no té cicles, no hi ha cicles passant per cap aresta, així totes les arestse són arestes pont.

3. Ésconseqüència d'un resultat del Capítol 2, en concret la Proposició 4 de les transparències.

4. Només cal aplicar la remarca del teorema 8, capítol 2 (de les transparències): els vèrtexs incidents a arestes pont amb grau almenys dos, són vèrtexs de tall.

5. Els components connexos de $T - u$ són grafs acíclics, per tant $T - u$ és un bosc amb, com a molt, $k = g(u)$ arbres (segons la Proposició 4 del Capítol 2).

   Siguin u_1 i u_2 dos vèrtexs adjacents a u. Suposem que u_1 i u_2 són al mateix component connex de $T - u$, així hi ha un u_1-u_2 camí a $T - u$, sigui aquest $u_1y_1 \dots y_tu_2$. Aleshores, tenim el cicle $u_1y_1 \dots y_tu_2uu_1$ a T, però això contradiu el fet que T sigui un arbre. Per tant, tots els vèrtexs adjacents a u són a components connexos diferents, per la qual cosa $T - u$ té almenys k components connexos. Per tant, $T - u$ és un bosc de exactament $k = g(u)$ arbres.

6. Només cal aplicar l'apartat 5 per $g(u) = 1$.

Veiem ara un resultat que dona una fita del màxim d'arestes que pot tenir un graf acíclic.

Proposició 4.4 *Sigui $G = (V, A)$ un graf acíclic de mida m i ordre $n \geq 1$. Aleshores $m \leq n-1$.*

Demostració: Fem la prova per inducció sobre $n \geq 1$, l'ordre del graf.

La proposició que provarem serà

$$P(n) = \text{“tot graf acíclic d'ordre } n \text{ té mida} \leq n-1\text{”}.$$

Pas base. Per $n = 1$, només tenim el graf K_1 que té mida 0, per tant la proposició és certa.

Pas inductiu. Sigui $n > 1$. Suposem que la proposició $P(n-1)$ és certa (HI: hipòtesi d'inducció). Cal veure que $P(n)$ també ho és.

Procedim. Sigui $G = (V, A)$ un graf d'ordre n acíclic de mida m. Si $G \simeq N_n$, tenim que $m = 0 < n-1$, per tant $P(n)$ és certa.

Altrament, G té un component connex, diem-li G_1, d'ordre almenys 2 (que podria ser G si fos connex). Com que G és acíclic, G_1 és un arbre i, aplicant 4.3, G_1 té una fulla, diem-l'hi u. Considrem el graf $G' = G - u$, és acíclic per ser-ho G i d'ordre $n-1$. Aplicant la HI a G' tenim que:

$$\text{mida}(G') \leq \text{ordre}(G') - 1. \qquad \text{(I)}$$

Com que mida (G') =mida $(G)-1$ i ordre (G') =ordre $(G)-1$, substituint a (I), obtenim: $m-1 \leq (n-1)-1$, és a dir, $m \leq n-1$ com volíem provar. ∎

Corol·lari 4.5 *Sigui T un arbre d'ordre n i mida m. Aleshores $m = n-1$.*

Demostració: Per ser T acíclic, aplicant la proposició 4.4, tenim que $m \leq n-1$. Per ser T connex, aplicant la Proposició 5 del capítol 2, de les transparències, es té $m \geq n-1$. Aleshores, $m = n-1$. ∎

Els arbres es poden caracteritzar de moltes maneres, és a dir, hi ha diverses definicions equivalents a la que hem donat d'arbre.

Teorema 4.6 (Teorema de caracterització d'arbres)
Sigui $T = (V, A)$ un graf d'ordre $n \geq 2$ i mida m. Els enunciats següents són equivalents

(a) T és un arbre;

(b) T és acíclic i $m = n-1$;

(c) T és connex i $m = n-1$;

(d) T és connex i tota aresta és pont;

(e) per cada parell de vèrtexs u i v hi ha un únic u-v camí a T;

(f) T és acíclic i, per a tota $a \in A^c$, $T + a$ té un únic cicle.

Donarem dues demostracions, ja que segons la planificació del curs pot ser més interessant oferir una o l'altra. De totes maneres, els arguments són molt semblants.

Demostració 1: (usant cadena d'equivalències)

$\boxed{a \Rightarrow b}$ Només cal demostrar la relació entre m i n que ens la dóna el corol·lari 4.5.

$\boxed{b \Rightarrow c}$ Siguin $T_1, T_2, \ldots, T_k$ els components connexos de T, amb $k \geq 1$. Els components connexos són també grafs acíclics, per tant arbres. Es té que

$$n - 1 = m = \sum_{i=1}^{k} \text{mida } T_i \overset{(Prop.4.5)}{=} \sum_{i=1}^{k} (\text{ordre } T_i - 1) = n - k.$$

Aleshores $k = 1$ i, per tant, T és connex.

$\boxed{c \Rightarrow d}$ Sabem que si G és un graf connex aleshores mida $G \geq$ ordre $G - 1$. Així, com que mida$(T - a) = n - 2 < n - 1$, el graf $T - a$ és no connex, $\forall a \in A$. Per tant, a T tota aresta és pont.

$\boxed{d \Rightarrow e}$ Per ser T connex, existeix un x-y camí, $\forall x, y \in V$. Si per dos vèrtexs x, y hi haguessin dos x-y camins diferents, a T hi hauria un cicle (ho sabem perquè apliquem la Proposició 2, Capítol 2 a les transparències), i les arestes per les que passes el cicle no serien pont!! Contradicció amb la hipòtesi. Per tant, tots els camins són únics.

$\boxed{e \Rightarrow f}$ Veiem primer que T és acíclic per resucció a l'absurd. Si T conté un cicle, llavors existeixen dos x-y camins diferents, per certs $x, y \in V$!! Contradicció amb la hipòtesi. Per tant, T és acíclic.

Sigui $e = xy \notin A$. $T + e$ té un cicle, perquè hi ha un x-y camí a T. Si hi hagués dos cicles diferents a $T + e$, tots dos contindrien l'aresta e i hi hauria dos x-y camins a T!! Contradicció amb la hipòtesi. Per tant, aquest cicle és únic.

$\boxed{f \Rightarrow a}$ Per hipòtesi, T és acíclic. Veiem que T és connex. Siguin $x, y \in V$. Si $xy \in A$, hi ha un x-y camí a T. Si $xy \notin A$, $T + xy$ conté un cicle que passa per xy. Aleshores, T conté un x-y camí. Per tant, T és connex.

Demostració 2: (provant que cada afirmació és equivalent a ser arbre)

$\boxed{a \Rightarrow b}$ Cert per la definició d'arbre i usant el corol·lari 4.5.

$\boxed{b \Rightarrow a}$ Només cal veure que T és connex. Suposem que $T_1, \ldots, T_k$ són els components connexos de T. Com que T és acíclic, cada T_i és un arbre i, per tant, $m_i = n_i - 1$, on m_i i n_i són la mida i l'ordre de T_i, respectivament. De les igualtats

$$n - 1 = m = \sum_{i=1}^{k} m_i = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) = n - k$$

es dedueix que $k = 1$, i per tant T és connex.

$\boxed{a \Rightarrow c}$ Cert per la definició d'arbre i usant el corol·lari 4.5.

$\boxed{c \Rightarrow a}$ Cal veure que T és acíclic. Suposem que T té algun cicle C i sigui a una aresta per la que passa C. Aleshores a no és aresta pont i $T - a$ és connex i la seva mida és $\geq$ el seu ordre, n, menys 1. Ara bé, la mida de $T - a$ és $m - 1 = n - 2$, així $n - 1 \leq m - 1 = n - 2$, i això és una contradicció. Per tant, T és acíclic.

$\boxed{a \Rightarrow d}$ Ja ho hem vist a la Proposició 4.3.

$\boxed{d \Rightarrow a}$ De nou cal veure que T és acíclic. Si T tingués un cicle, les arestes d'aquest cicle no serien pont, per tant no pot haver-hi cicles.

$\boxed{a \Rightarrow e}$ Clarament, entre dos vèrtexs qualssevol de T hi ha un camí, ja que T és connex. I no n'hi poden haver dos, perquè sabem que si entre dos vèrtexs hi ha dos camins diferents, aleshores el graf conté un cicle.

$\boxed{e \Rightarrow a}$ Clarament T és connex. Per veure que és acíclic, només cal observar que si hi hagués un cicle, aleshores entre cada dos vèrtexs del cicle hi hauria dos camins, cosa que contradiria la hipòtesi.

$\boxed{a \Rightarrow f}$ Suposem que l'aresta $uv \notin A$ i u i v són diferents. Com que hi ha un $u - v$ camí a T, $uu_1 \dots u_s v$, a $T - uv$ crea un cicle: $uu_1 \dots u_s vu$. Suposem que se'n creen dos; aleshores a T tindrem dos $u - v$ camins, i per tant també un cicle.

$\boxed{f \Rightarrow a}$ Igual que en la primera demostració. ∎

Corol·lari 4.7 *Un bosc G d'ordre n i k components connexos té mida $n - k$.*

Demostració: Siguin $G_1, \dots, G_k$ els components connexos G. Atès que els components connexos d'un bosc són arbres, aplicant el teorema 4.6, es té

mida $G = \sum_{i=1}^{k}$ mida $G_i = \sum_{i=1}^{k}$ (ordre $G_i - 1) = n - k$. ∎

Corol·lari 4.8 *Tot arbre d'ordre $n \geq 2$ té almenys dues fulles.*

Demostració 1: Sigui $T = (V, A)$ un arbre d'ordre n. Sigui n_1 el nombre de fulles, és a dir, el nombre de vèrtexs de grau 1 a T. Aplicant el lema de les encaixades i tenint en compte el valor de la mida d'un arbre en relació al seu ordre, que ve donat al teorema 4.6 amb les caracteritzacions dels arbres, es té:

$$2(n-1) = 2|A| = \sum_{u \in V} g(u) = \sum_{\substack{u \in V \\ g(u)=1}} g(u) + \sum_{\substack{u \in V \\ g(u) \geq 2}} g(u) \geq n_1 + 2(n - n_1) = 2n - n_1,$$

així, $2n - 2 \geq 2n - n_1$, és a dir, $n_1 \geq 2$.

Demostració 2: Pova per inducció sobre $n \geq 2$.

Pas base. Per $n = 2$ és cert ja que l'únic arbre d'aquest ordre és el T_2.

Pas inductiu Sigui $n > 2$. Suposem que (HI) tot arbre d'ordre $n - 1$ té dues fulles, veiem que tot arbre d'ordre n també té dues fulles.

Procedim. Sigui $T = (V, A)$ un arbre qualsevol d'ordre n. Sabem que T té almenys una fulla (així que només ens falta trobar-ne una altra). Sigui u una fulla de T i considerem l'arbre $T - u$ (proposició 4.3), que és un arbre amb $n - 1$ vèrtexs. Per hipòtesi d'inducció, $T - u$ té almenys dues fulles v_1 i v_2. A T podria ser que un dels vèrtexs v_1 i v_2 fos adjacent a u, però no tots dos ja que u té grau 1 a T. Per tant, almenys un entre v_1 i v_2 té el mateix grau a $T - u$ que a T, així que un d'aquests vèrtexs és també una fulla a T.

Demostració 3: Sabem que T té almenys una fulla, denotem-la per u. Sigui $uu_1u_2\dots u_{s-1}u_s$ un camí tal que té la màxima longitud que pot tenir a T un camí començant a u.

Fem la prova per reducció a l'absurd, suposem que u és l'única fulla de T. Així, llevat de u, la resta dels vèrtexs de T tenen grau ≥ 2. Per tant, hi ha un vèrtex $y \neq u_{s-1}$ adjacent a u_s. Si $y = u_i$, per algun $i \in \{1, 2, \dots, s-2\}$, llavors a T hi ha un cicle: $u_iu_{i+1}\dots u_{s-1}u_su_i$, però això és una contradicció amb el fet que T és un arbre. Per tant, $y \notin \{u_1, u_2, \dots, u_{s-2}\}$, llavors $uu_1u_2\dots u_{s-1}u_sy$ és un camí, però té longitud $s+1$ i havíem triat un camí de longitud màxima començant a u, així que tenim una altra contradicció. Per tant, el vèrtex u_s ha de ser també una fulla a T. ∎

2 Arbres generadors

Sigui $G = (V, A)$ un graf d'ordre ≥ 2. Anomenarem *arbre generador* o *arbre d'expansió* als subgrafs generadors de G que són arbres, és a dir, $T = (V', A')$ és un *arbre generador* o *arbre d'expansió* de G si, 1) $V' = V$ i $A' \subseteq A$, i 2) T és un arbre.

Veiem a continuació una altra manera de caracteritzar els grafs connexos.

Teorema 4.9 *Un graf és connex si, i només si, té un arbre generador*

Demostració: $\boxed{\Leftarrow}$ Siguin $G = (V, A)$ un graf i $T = (V, B)$ un arbre generador de G. Per a tot parell de vèrtexs $x, y \in V$ existeix un x-y camí a T que, a la vegada, és un x-y camí de G. Per tant, G és connex.

$\boxed{\Rightarrow}$ Sigui $G = (V, A)$ un graf connex. Si $|A| = |V|-1$, G és un arbre i ja hem acabat. Altrament, si $|A| > |V|-1$, G no és un arbre i, com que és connex, conté un cicle. Sigui e una aresta d'aquest cicle. El graf $G' = G - e$ és un subgraf generador de G (té els mateixos vèrtexs) i és connex (ja que e no és aresta pont per ser en un cicle). Si $\text{mida}(G') = \text{ordre}(G') - 1$, G' és un arbre, ja que és connex, i ja tenim l'arbre generador. Altrament, si $\text{mida}(G') > ordre(G') - 1$, G' té algun cicle; repetim el procés començant ara amb el graf G' i fins que el subgraf obtingut sigui acíclic, que per ser generador i connex, serà un arbre generador de G. ∎

Aquesta demostració és constructiva, ens dona un algorisme per trobar un arbre generador que concretem a continuació:

`Entrada`	$G = (V, A)$ un graf connex
`Sortida`	un arbre generador de G
`Iniciar`	$G' := G$, $n = \|V\|$, $m' = \|A\|$;
`Mentre`	$m' > n - 1$ `fer`
	triar una aresta e de G' per la que passe un cicle,
	$G' := G' - e$,
	$m' := m' - 1$ (és la mida del nou G')
`Fimentre`	
`Torna`	G'

D'entrada sabem quantes vegades "correrà" el procediment `Mentre`, exactament $|A| - (|V| - 1)$ vegades, el nombre d'arestes de més que té el graf G per poder ser un arbre. Ara, aquest algorisme no és gaire eficient, ja que en cada pas cal identificar un cicle. Més endavant donarem dos algorismes més eficients per trobar arbres generadors, però primer presentem un parell de resultats.

Proposició 4.10 *Sigui $G = (V, A)$ un graf connex i sigui $a \in A$.*

1. *Si a és una aresta pont, aleshores tot arbre generador conté l'aresta a.*
2. *Hi ha almenys un arbre generador de G que conté l'aresta a.*

Demostració:

1. Fem la prova del contrarecíproc, és a dir, anem a provar que si hi ha un arbre generador que no conté a, aleshores a no és aresta pont de G.

   Procedim. Sigui $T = (V, B)$ un arbre generador de G tal que $a \notin B$. Aleshores, T és un arbre generador de $G - a$ i, aplicant el teorema 4.9, $G - a$ és connex, per tant a no és una aresta pont de G.

2. Sigui $T = (V, B)$ un arbre generador de G (el tenim per ser G connex). Si $a \in B$, T conté a i ja hem acabat.

   Altrament, pel teorema 4.6 de caracterització d'arbres, $T + a$ té un únic cicle. Sigui $e \in B$ una aresta per la que passa el cicle de $T + a$ i considerem el graf $T' = (T + a) - e$. El graf T' és connex, ja que hem eliminat una aresta per la que passa un cicle del graf connnex $T + a$; el conjunt de vèrtexs de T' és V; i

   $$\text{mida}(T') = \text{mida}(T + a) - 1 = \text{mida}(T) \overset{T \text{ arbre}}{=} \text{ordre}(T) - 1 = \text{ordre}(T') - 1.$$

   Per tant, T' és una arbre i subgraf generador de G que conté a, és a dir, és un arbre generador de G que conté l'aresta a. ∎

Presentarem a continuació dos algorismes que permeten trobar de forma eficient un arbre generador d'un graf connex. Aquests algorismes estan basats en les estratègies DFS, cerca en profunditat, i BFS, cerca en amplada, estratègies treballades ja en el Capítol 2. De fet donarem una generalització, en lloc de partir d'un graf connex, partirem d'un graf arbitrari G i d'un vèrtex v d'aquest graf, i obtindrem un arbre generador del component connex de G on es troba v; si G és connex, aleshores obtindrem un arbre generador de G.

Algorisme DFS per a obtenir arbres generadors

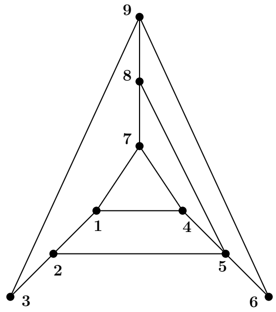
`Entrada`	$G = (V, A)$ graf, $v \in V$
`Sortida`	llista W dels vèrtexs del component connex de G que conté v
	llista B de les arestes per les que passa l'algorisme
`Iniciar`	*pila*$:= \{v\}$, $W := \{v\}$, $B = \{\}$;
`Mentre`	*pila* $\neq \{\}$ `fer`
	$x :=$ cim de la *pila*;
	`Si` existeix $y \in V - W$ tal que $x \sim y$

```
        aleshores posar y al cim de la pila,
                  W := W ∪ {y},
                  B := B ∪ {xy};
        altrament treure x de la pila;
      Fisi
Fimentre
Torna   W, B
```

Teorema 4.11 *Siguin W i B el conjunt de vèrtexs i d'arestes, respectivament, que retorna l'algorisme DFS en ser executat en un graf G amb vèrtex inicial v. Aleshores el graf (W, B) és un arbre generador del component connex de G on es troba v.*

Exemple 4.12 Considerem el graf $G = (V, A)$ amb $V = \{1, 2, \ldots, 9\}$ i les adjacències donades per la taula de l'esquerra i representat gràficament a la dreta

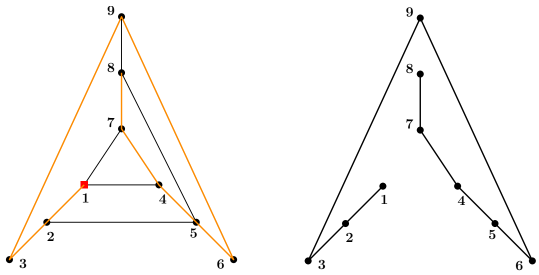
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1	2	1	2	5	1	5	3
4	3	9	5	4	9	4	7	6
7	5		7	6		8	9	8
				8				



Descrivim en la taula següent els passos de l'algorisme DFS aplicat al graf G i prenent com a vèrtexs inicial $v = 1$.

cim	acció	*pila*	W	B
		1	$\{1\}$	
1	posar 2	1,2	$\{1,2\}$	$\{12\}$
2	posar 3	1,2,3	$\{1,2,3\}$	$\{12,23\}$
3	posar 9	1,2,3,9	$\{1,2,3,9\}$	$\{12,23,39\}$
9	posar 6	1,2,3,9,6	$\{1,2,3,9,6\}$	$\{12,23,39,96\}$
6	posar 5	1,2,3,9,6,5	$\{1,2,3,9,6,5\}$	$\{12,23,39,96,65\}$
5	posar 4	1,2,3,9,6,5,4	$\{1,2,3,9,6,5,4\}$	$\{12,23,39,96,65,54\}$
4	posar 7	1,2,3,9,6,5,4,7	$\{1,2,3,9,6,5,4,7\}$	$\{12,23,39,96,65,54,47\}$
7	posar 8	1,2,3,9,6,5,4,7,8	$\{1,2,3,9,6,5,4,7,8\}$	$\{12,23,39,96,65,54,47,78\}$
8	treure 8	1,2,3,9,6,5,4,7	$\{1,2,3,9,6,5,4,7,8\}$	$\{12,23,39,96,65,54,47,78\}$
7	treure 7	1,2,3,9,6,5,4	$\{1,2,3,9,6,5,4,7,8\}$	$\{12,23,39,96,65,54,47,78\}$
4	treure 4	1,2,3,9,6,5	$\{1,2,3,9,6,5,4,7,8\}$	$\{12,23,39,96,65,54,47,78\}$
5	treure 5	1,2,3,9,6	$\{1,2,3,9,6,5,4,7,8\}$	$\{12,23,39,96,65,54,47,78\}$
6	treure 6	1,2,3,9	$\{1,2,3,9,6,5,4,7,8\}$	$\{12,23,39,96,65,54,47,78\}$
9	treure 9	1,2,3	$\{1,2,3,9,6,5,4,7,8\}$	$\{12,23,39,96,65,54,47,78\}$
3	treure 3	1,2	$\{1,2,3,9,6,5,4,7,8\}$	$\{12,23,39,96,65,54,47,78\}$
2	treure 2	1	$\{1,2,3,9,6,5,4,7,8\}$	$\{12,23,39,96,65,54,47,78\}$
1	treure 1		$\{1,2,3,9,6,5,4,7,8\}$	$\{12,23,39,96,65,54,47,78\}$

Hem obtingut l'arbre $T = (V, B)$, un arbre generador de G. Gràficament:



$T = (W, B)$

Algorisme BFS per a obtenir arbres generadors

`Entrada`	$G = (V, A)$ graf i v vèrtex de G
`Sortida`	llista W dels vèrtexs del component connex de G que conté v
	llista B de les arestes per les que passa l'algorisme

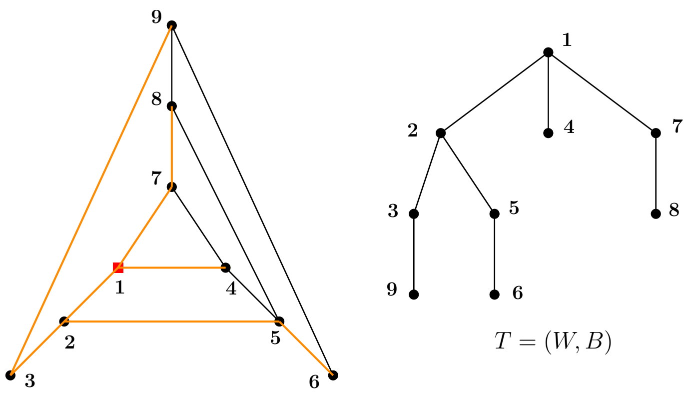
`Iniciar` $\quad$ $cua := \{v\}$, $W := \{v\}$, $B := \{\}$;
`Mentre` $\quad$ $cua \neq \{\}$ `fer`
$\quad$ $x :=$ primer de la cua;
$\quad$ `Si` existeix $y \in V - W$ tal que $x \sim y$
$\quad\quad$ `aleshores` afegir y al final de la cua,
$\quad\quad\quad$ $W := W \cup \{y\}$,
$\quad\quad\quad$ $B := B \cup \{xy\}$;
$\quad\quad$ `altrament` treure x de la cua;
$\quad$ `Fisi`
`Fimentre`
`Torna` $\quad$ W, B

Teorema 4.13 *Siguin W i B el conjunt de vèrtexs i d'arestes, respectivament, que retorna l'algorisme BFS en ser executat en un graf G amb vèrtex inicial v. Aleshores el graf (W, B) és un arbre generador del component connex de G on es troba v.*

Exemple 4.14 Considerem el graf G de l'exemple 4.12. Apliquem l'algorisme BFS al graf G prenent coma vèrtex inicial $v = 1$. Els passos de l'algorisme es descriuen a la taula següent:

primer	acció	*cua*	W	B
		1	$\{1\}$	
1	afegir 2	1,2	$\{1,2\}$	$\{12\}$
1	afegir 4	1,2,4	$\{1,2,4\}$	$\{12,14\}$
1	afegir 7	1,2,4,7	$\{1,2,4,7\}$	$\{12,14,17\}$
1	treure 1	2,4,7	$\{1,2,4,7\}$	$\{12,14,17\}$
2	afegir 3	2,4,7,3	$\{1,2,4,7,3\}$	$\{12,14,17,23\}$
2	afegir 5	2,4,7,3,5	$\{1,2,4,7,3,5\}$	$\{12,14,17,23,25\}$
2	treure 2	4,7,3,5	$\{1,2,4,7,3,5\}$	$\{12,14,17,23,25\}$
4	treure 4	7,3,5	$\{1,2,4,7,3,5\}$	$\{12,14,17,23,25\}$
7	afegir 8	7,3,5,8	$\{1,2,4,7,3,5,8\}$	$\{12,14,17,23,25,78\}$
7	treure 7	3,5,8	$\{1,2,4,7,3,5,8\}$	$\{12,14,17,23,25,78\}$
3	afegir 9	3,5,8,9	$\{1,2,4,7,3,5,8,9\}$	$\{12,14,17,23,25,78,39\}$
3	treure 3	5,8,9	$\{1,2,4,7,3,5,8,9\}$	$\{12,14,17,23,25,78,39\}$
5	afegir 6	5,8,9,6	$\{1,2,4,7,3,5,8,9\}$	$\{12,14,17,23,25,78,39,56\}$
5	treure 5	8,9,6	$\{1,2,4,7,3,5,8,9\}$	$\{12,14,17,23,25,78,39,56\}$
8	treure 8	9,6	$\{1,2,4,7,3,5,8,9\}$	$\{12,14,17,23,25,78,39,56\}$
9	treure 9	6	$\{1,2,4,7,3,5,8,9\}$	$\{12,14,17,23,25,78,39,56\}$
6	treure 6		$\{1,2,4,7,3,5,8,9\}$	$\{12,14,17,23,25,78,39,56\}$

L'arbre generador de G que obtenim és $T = (V, B)$, gràficament:



$T = (W, B)$

3 Enumeració d'arbres

Teorema 4.15 (Teorema de Cayley)
El nombre d'arbres generadors diferents del graf complet K_n és n^{n-2}.

El teorema equival a dir que el nombre d'arbres diferents d'ordre n amb conjunt de vèrtexs $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ és n^{n-2}. Se'n coneixen moltes proves; nosaltres en donarem el *sketch* d'una que de retruc ens dóna una manera de codificar els arbres amb una seqüència de $n-2$ enters.

Demostració: Suposem que el conjunt de vèrtexs de K_n és $[n]$. La prova es basa en la construcció d'una aplicació bijectiva Pr del conjunt d'arbres generadors de K_n en el conjunt $[n]^{n-2}$. S'anomena *seqüència de Prüfer de T* a $Pr(T) = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$, la imatge de T per l'aplicació Pr.

• Construcció de forma recursiva de la seqüència de Prüfer de l'arbre T amb conjunt de vèrtexs $[n]$

`Entrada` T arbre amb conjunt de vèrtexs $[n]$
`Sortida` $Pr(T) = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$

`Iniciar` $T_1 = T$, $k = 1$
`Mentre` $k \leq n-2$ `fer`
$b_k :=$ la fulla d'etiqueta mínima a T_k
$a_k :=$ vèrtex adjacent a b_k a T_k
$T_{k+1} := T_k - \{b_k\}$, $(= T - \{b_1, \ldots, b_k\})$
$k := k+1$

`Tornar` $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$

Aquest algorisme dona la imatge d'un arbre T per Pr, caldria veure ara que definida d'aqueta manera Pr és una aplicació, però no ho farem, ho deixem al lector. A partir de la

• Reconstrucció de l'arbre T a partir d'una paraula $(a_1, \ldots, a_{n-2})$ en l'alfabet $[n]$. És a dir, definir l'aplicació inversa de Pr.

`Entrada` $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_{n-2}) \in [n]^{n-2}$
`Sortida` arbre T amb seqüència de Prüfer $\mathbf{a}$

`Iniciar` $a_{n-1} =: n$, $A_0 := \{\}$, $k := 1$
`Mentre` $k \leq n-1$ `fer`
$b_k := \min\big([n] - (\{a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{n-1}\} \bigcup \{b_1, \ldots, b_{k-1}\})\big)$
$A_k := A_{k-1} \cup \{a_k b_k\}$
$k := k+1$

`Tornar` $T = \langle A_{n-1} \rangle$. ▮

De la construcció de la seqüència de Prüfer observem que:

1. T_k és un arbre, $1 \leq k \leq n-1$;
2. $T_{n-1} = T - \{b_1, \ldots, b_{n-2}\} \simeq K_2$;
3. $n \in V(T_{n-1}) = [n] - \{b_1, \ldots, b_{n-2}\}$;
4. els b_k són tots diferents, els a_k poden no ser-ho, $1 \leq k \leq n-2$;
5. $x \in [n]$ apareix a la seqüència de Prüfer tants cops com $g(x) - 1$;
6. si $y \in [n]$ no apareix a la seqüència de Prüfer, y és una fulla.

Exemple 4.16 Anem a trobar la seqüència de Prüfer de l'arbre $T = ([7], \{13, 15, 16, 25, 27, 45\})$ seguint l'algorisme i descrivint el que fem en la taula següent

k	1	2	3	4	5
T_k	T	$T-3$	$T-\{3,4\}$	$T-\{3,4,6\}$	$T-\{3,4,6,1\}$
b_k	3	4	6	1	5
a_k	1	5	1	5	2

Així la seqüència de Prüfer de T és $(1,5,1,5,2)$.

Reconstruïm ara l'arbre a partir de la seqüència:

k	1	2	3	4	5	6
$(a_k,\ldots,a_{n-1})$	$(1,5,1,5,2,7)$	$(5,1,5,2,7)$	$(1,5,2,7)$	$(5,2,7)$	$(2,7)$	(7)
$(b_1,\ldots,b_{k-1})$		(3)	(3,4)	(3,4,6)	(3,4,6,1)	(3,4,6,1,5)
$V_k=[n]-$ $\{a_k,\ldots,a_{n-1}\}\cup\{b_1,\ldots,b_{k-1}\}$	$\{3,4,6\}$	$\{4,6\}$	$\{6\}$	$\{1\}$	$\{5\}$	$\{2\}$
$b_k=\min V_k$	3	4	6	1	5	2
a_kb_k	13	54	16	51	25	72

L'última línea de la taula ens dóna les arestes de l'arbre amb la seqüència de Prüfer donada.