Indicacions i/o resolució dels exercicis del **Tema 3 (Grafs eulerians i hamiltonians)**. En alguns exercicis ens referim a d'altres documents que teniu disponibles a Atenea o bé al llibre JT: "Matemàtica Discreta: Problemes Resolts, Joan Trias, Edicions UPC" (teniu a Atenea l'enllaç a la versió digital).

**3.1** Perquè un graf sigui eulerià cal comprovar si és connex i tots els vèrtexs tenen grau parell. Veiem que només ho satisfà el graf $G_4$, ja que tots els altres grafs són connexos però tenen algun vèrtex de grau senar.

**3.2** Cada figura representa un graf (posem un vèrtex a les interseccions de dues línies; si d'aquesta manera queda més d'una aresta entre dos vèrtexs, podem inserir vèrtexs de grau 2 a algunes d'elles per a tenir un graf i no un multigraf). Aleshores, equival a comprovar si el dibuix representa un graf eulerià o un graf amb un senderó eulerià. Per tant, hem de comprovar si el graf que representen és connex, i o bé tots els vèrtexs tenen grau parell o bé hi ha exactament dos vèrtexs de grau senar. Veiem que tots ho compleixen excepte el primer.

**3.3** Vegeu document a part.

**3.4** $K_{r,s}$ és un graf connex amb vèrtexs de grau $r$ i de grau $s$. Si és eulerià tots els vèrtexs han de ser de grau parell, de manera que tant $r$ com $s$ han de ser parells.

**3.5** Vegeu document a part.

**3.6** Vegeu JT, problema 5.2.

**3.7** Vegeu JT, problema 5.4.

**3.8** (a) Estan representats a la figura 1.

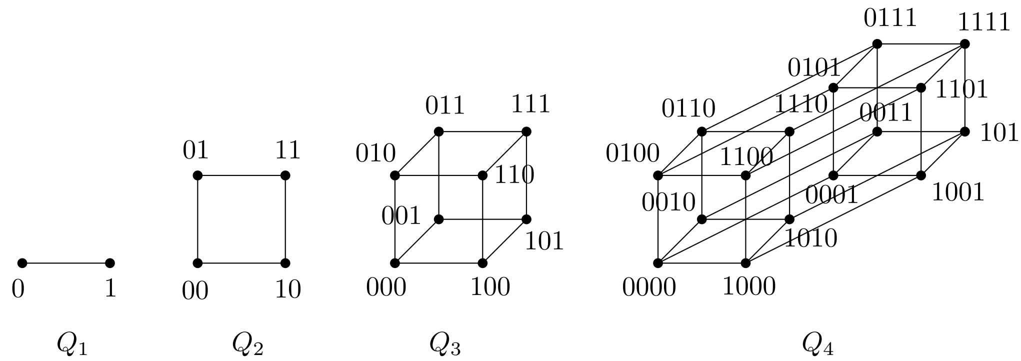


Figura 1: El cub $Q_{n+1}$ s'obté a partir de dues còpies del cub $Q_n$, afegint el dígit 0 a tots els vèrtexs d'una còpia i i el dígit 1 a tots els vèrtexs de l'altra còpia, i unint després els vèrtexs de còpies diferents si els primers $n$ dígits són iguals. De fet, $Q_{n+1}$ és el graf producte cartesià $Q_n \times P_2$.

(b) L'ordre de $Q_n$ és $2^n$, ja que el cardinal del producte cartesià $\overbrace{\{0,1\} \times \cdots \times \{0,1\}}^{n}$ és $2^n$. Tots els vèrtexs tenen grau $n$, perquè el vèrtex $(x_1, \ldots, x_n)$ és adjacent als $n$ vèrtexs que s'obtenen canviant exactament un dels dígits $x_i$, $1 \leq i \leq n$. El graf és doncs $n$-regular. Per tant, pel lema de les encaixades, la mida és $\frac{1}{2}\sum_{u \in V(Q_n)} g(u) = \frac{1}{2}n2^n = n2^{n-1}$.

(c) Un graf és eulerià si és connex i tot vèrtex té grau parell. Per ser $Q_n$ un graf $n$-regular, serà eulerià si i només si és connex i $n$ és parell. Però $Q_n$ és connex, ja que entre dos vèrtexs $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n)$ de $Q_n$ sempre hi ha un camí: només cal canviar per a cada $i = 1, 2, \ldots, n$ el dígit $x_i$ si difereix de $y_i$ (observeu que ammb aquest argument es demostra que el diàmetre de $Q_n$ és $n$). Per tant, $Q_n$ és eulerià si i només si $n$ és parell.

**3.9** Grafs $G_1$-$G_9$: vegeu el document a part.

$G_{10}$: vegeu JT, secció 5.5; o bé el document a part..

**3.10** Ho provem de dues maneres.

*Demostració 1.* Per reducció a l'absurd. Si $G = (V_1 \cup V_2, A)$ és un graf bipartit amb $|V_1| < |V_2|$, aleshores $G - V_1$ té més components connexos que vèrtexs hem suprimit ($G - V_1$ és un graf nul amb $|V_2|$ vèrtexs), per tant $G$ no és hamiltonià.

*Demostració 2.* Si $G = (V_1 \cup V_2, A)$ és un graf bipartit hamiltonià, llavors existeix un cicle que passa per tots els vèrtexs. Aquest cicle ha de tenir longitud parella, ja que és un cicle d'un graf bipartit. Si el cicle és $x_1x_2x_3x_4 \ldots x_{2s}x_1$, la partició del conjunt de vèrtexs és $\{x_1, x_3 \ldots, x_{2s-1}\} \cup \{x_2, x_4, \ldots, x_{2s}\}$. Com que el cicle conté tots els vèrtexs del graf, les parts estables tenen el mateix cardinal.

**3.11** $\boxed{\Rightarrow}$ Apliqueu l'exercici 3.10.

$\boxed{\Leftarrow}$ Siguin $V_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ i $V_2 = \{y_1, y_2, \ldots, y_r\}$ les parts estables de $K_{r,r}$. Un cicle que passa per tots els vèrtexs és $x_1y_1x_2y_2 \ldots x_ry_rx_1$, ja que tots els vèrtexs de $V_1$ són adjacents a tots els de $V_2$. Per tant, $K_{r,r}$ és hamiltonià.

**3.12** Si el graf $G$ té dos components connexos, per tal de tenir un únic component connex, cal afegir al menys una aresta. Veiem que amb dos n'hi ha prou per tal d'obtenir una graf hamiltonià. Siguin $x_1x_2 \ldots x_r$ un cicle hamiltonià d'un component connex i $y_1y_2 \ldots y_s$ un cicle hamiltonià de l'altre component connex. El graf $G + \{x_1y_1, x_ry_s\}$ és hamiltonià ja que $x_1x_2 \ldots x_ry_s \ldots y_2y_1x_1$ és un cicle que passa per tots els vèrtexs de $G + \{x_1y_1, x_ry_s\}$.

**3.13** Si $G$ és un graf hamiltonià, conté un cicle hamiltonià $C$ que passa per tots els vèrtexs. Si $G$ no és un cicle, té alguna aresta que no és del cicle hamiltonià $C$. Aquesta aresta és incident a dos vèrtexs no consecutius del cicle, de manera que aquests vèrtexs tindran grau com a mínim 3 en $G$.

**3.14** Considerem un graf que tingui per vèrtexs les 12 persones de la festa, i dos vèrtexs siguin adjacents si les persones que representen es coneixen. En aquestes condicions la suma dels graus dels vèrtexs no adjacents és més gran o igual que l'ordre del graf, per tant és hamiltonià. Un cicle hamiltonià del graf dóna una ordenació de les 12 persones en una taula, amb les condicions demanades.

Ara bé, si hi ha 13 persones ja no ho podem assegurar, perquè la suma dels graus pot ser menor que 13. Exemple: el graf format per les 13 persones podria ser un $K_{6,7}$, amb l'Aran i l'Àlex en diferents parts estables i el company que arriba tard a la part estable de mida 7.

**3.15** Sigui $n$ l'ordre del graf $G$, per hipòtesi $n \geq 3$. El graf complementari $G^c$ serà $n - 1 - d$ regular, i per ser $d + 1 \leq n/2$, tenim que és un graf on cada vèrtex és de grau com a mínim $n - n/2 = n/2$, per tant és hamiltonià pel teorema de Dirac.

**3.16** Sigui $V$ el conjunt de vèrtexs de $G$. Suposem que $w \notin V$. Considerem el graf $G' = (V', A')$ on $V' = V \cup \{w\}$ i $A' = A \cup \{wx | x \in V\}$). El graf $G'$ té ordre $n + 1 \geq 3$ i

$$g_{G'}(z) = n \text{ i } g_{G'}(x) = g_G(x) + 1 \geq 1 + (n-1)/2 = (n+1)/2, \text{ si } x \in V.$$

Aleshores, pel teorema de Dirac $G'$ és hamiltonià. Un cicle hamiltonià de $G'$ passa per tots els vèrtexs de $G'$, per tant podem suposar que és de la forma $wv_1v_2 \ldots v_nw$, on $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Aleshores $v_1v_2 \ldots v_n$ és un camí hamiltonià de $G$.