Indicacions i/o resolució dels exercicis del **Tema 4 (Arbres)**. En alguns exercicis ens referim a d'altres documents que teniu disponibles a Atenea o bé al llibre JT: "Matemàtica Discreta: Problemes Resolts, Joan Trias, Edicions UPC" (teniu a Atenea l'enllaç a la versió digital).

4.1 Només n'hi ha un d'ordre 1, K_1.

Només n'hi ha un d'ordre 2, K_2, ja que és l'únic graf connex d'ordre 2 i és acíclic.

Només hi un arbre no isomorf d'ordre 3, T_3, ja que sabem que els grafs d'ordre 3 no isomorfs són N_3, $K_2 \cup K_1$, T_3 i C_3, i el trajecte T_3 és l'únic connex i acíclic.

Per a trobar tots els arbres no isomorfs d'ordre n, $n \geq 4$, observem que tot arbre d'ordre almenys n, $n \geq 2$, té alguna fulla i si la suprimim obtenim un arbre d'ordre $n-1$. Per tant, els arbres d'ordre n, $n \geq 2$, es poden obtenir recursivament afegint de totes les maneres possibles una fulla adjacent a cadascun dels vèrtexs dels arbres d'ordre $n-1$

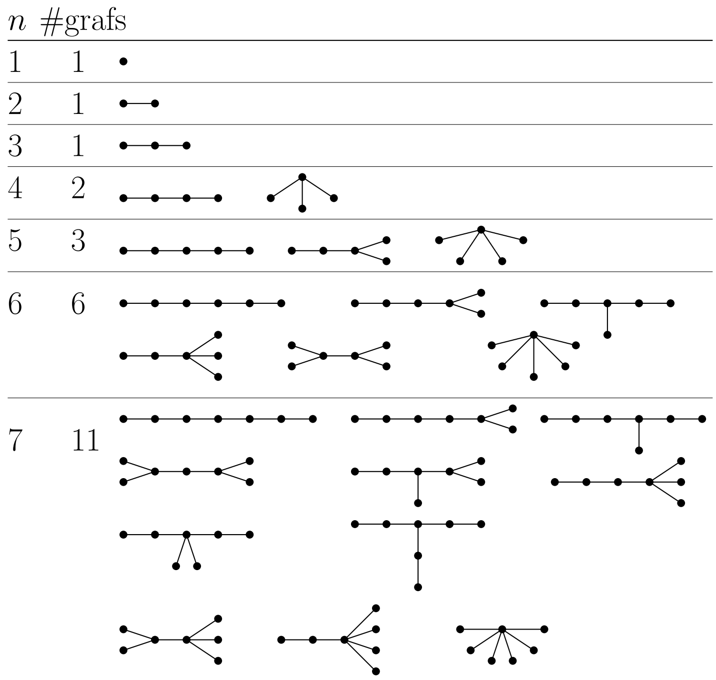
Per a trobar els arbres no isomorfs d'ordre 4, pengem de totes les maneres possibles una fulla als vèrtexs de l'únic arbre d'ordre 3, T_3. N'obtenim 2 llevat isomorfismes segons si pengem la fulla al vèrtex de grau 2 (i obtenim $K_{1,3}$) o bé a una de les dues fulles (i obtenim T_4).

Per a trobar els arbres no isomorfs d'ordre 5, pengem de totes les maneres possibles una fulla als vèrtexs dels dos arbres d'ordre 4, $K_{1,3}$ i T_4. N'obtenim 3 llevat isomorfismes segons si (1) pengem una fulla al vèrtex de grau 3 de $K_{1,3}$ (i obtenim $K_{1,4}$); (2) si pengem una fulla a una de les dues fulles de T_4 (i obtenim T_5); (3) si pengem una fulla a un dels vèrtexs de grau 2 de T_4 (o bé si pengem una fulla a una de les fulles de $K_{1,3}$).

Els arbres d'ordre 6 s'obtenen penjant una fulla de cadascún dels vèrtexs dels 3 arbres d'ordre 5. S'obtenen 5 arbres llevat isomorfismes.

Finalment, els arbres d'ordre 7 s'obtenen penjant una fulla de cadascún dels vèrtexs dels 5 arbres d'ordre 6. S'obtenen 11 arbres llevat isomorfismes.

A la figura següent els teniu tots representats:



4.2 Un arbre no té cicles. Per tant és bipartit, ja que no té cicles de longitud senar.

4.3 Si T_1 té ordre n i mida 17, aleshores ha de ser $n = 18$, ja que la mida d'un arbre és igual a l'ordre menys 1. Per tant, T_2 té ordre $2n = 36$, i mida 35.

4.4 Vegeu JT, problemes 6.16 i 6.17; o bé document a part.

4.5 Vegeu JT, problema 6.8.

4.6 Si un graf és connex però no és arbre, ha de tenir algun cicle. Tots els vèrtexs del cicle han de ser de tall, ja que tenen grau almenys 2. Si pengem una fulla de cadascún dels vèrtexs d'un cicle d'ordre n, obtenim un graf d'ordre $2n$ amb n vèrtexs de grau 3 i n vèrtexs de grau 1 tal que tots els vèrtexs de grau almenys 2 (o sigui, tots els vèrtexs de grau 3) són de tall.

4.7 1) Vegeu JT, problema 6.15.

2) Vegeu document a part.

3) G és connex, per tant només cal demostrar que la mida és l'ordre menys 1 perquè sigui arbre.

L'ordre del graf és

$$n(G) = \sum_{i=1}^{\Delta} n_i.$$

Pel lema de les encaixades, la mida és

$$m(G) = \frac{1}{2} \sum_{u \in V(G)} g(u) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\Delta} i\, n_i.$$

Per hipòtesi, $n_1 = 2 + \sum_{i=2}^{\Delta} (i-2) n_i$, d'on deduïm $\sum_{i=2}^{\Delta} i\, n_i = n_1 - 2 + 2 \sum_{i=2}^{\Delta} n_i$.

Per tant,

$$m(G) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\Delta} i\, n_i = \frac{1}{2}\Big(n_1 + \sum_{i=2}^{\Delta} i\, n_i\Big) = \frac{1}{2}\Big(n_1 + n_1 - 2 + 2\sum_{i=2}^{\Delta} n_i\Big) = \sum_{i=1}^{\Delta} n_i - 1 = n(G) - 1.$$

4.8 Suposem que G té ordre n i mida m. Suposem que n_1 és el nombre de vèrtexs de grau 1 de G.

$\Rightarrow$) Si G és arbre, aleshores $m = n - 1$. Sabem que $n = n_1 + k$ i $m = \frac{1}{2} \sum_{u \in V(G)} g(u) = \frac{1}{2}(n_1 + 4k)$. Per tant, $\frac{1}{2}(n_1 + 4k) = n_1 + k - 1$, d'on deduïm que $n_1 = 2k + 2$.

$\Leftarrow$) Per ser G connex, només cal demostrar que $m = n - 1$ perquè sigui arbre. Vegem-ho. Si $n_1 = 2k + 2$, aleshores l'ordre és $n = n_1 + k = 3k + 2$ i, pel lema de les encaixades, la mida és $m = \frac{1}{2}(n_1 + 4k) = \frac{1}{2}((2k+2) + 4k) = 3k + 1$. Per tant, $m = n - 1$.

4.9 Vegeu JT, problema 6.20, o bé document a part.

4.10 Vegeu document a part.

4.11 $a \Rightarrow b$) Sigui a una aresta de l'únic cicle de G. Aleshores a no és aresta pont de G i, per ser G connex, $G - a$ és connex. A més, $G - a$ és acíclic perquè a és de l'únic cicle de G. Per tant, $G - a$ és arbre.

$b \Rightarrow c$) Si $G - a$ és arbre, $G - a$ és connex i $G = (G-a)+a$ també és connex. A més, per ser $G - a$ arbre, tenim que $mida(G-a) = ordre(G-a) - 1$, és a dir, $m - 1 = mida(G-a) = ordre(G-a) - 1 = n - 1$, d'on deduïm que $m = n$.

$c \Rightarrow a$) Si G és connex i $m = n$, no pot ser arbre. Per tant, G té algun cicle. Si a és una aresta d'un cicle de G, aleshores $G - a$ és graf connex (perquè a és d'un cicle i per tant no és aresta pont) tal que $mida(G-a) = m - 1 = n - 1 = ordre(G-a) - 1$. O sigui, $G - a$ és un arbre, i sabem que el graf que resulta d'afegir una aresta a un arbre conté un únic cicle, és a dir $G = (G-a) + a$ té un únic cicle.

4.12 Vegeu document a part.

4.13 En els primers passos de l'algorisme BFS per trobar un arbre generador de G, s'afegeixen totes les arestes incidents al vèrtex inicial v. Per tant, si T és l'arbre obtingut a l'aplicar l'algorisme BFS, tenim $g_T(v) = g_G(v)$. En aquest cas, per ser v una fulla de T, tenim $g_G(v) = 1$. Però ens diuen que T és el graf estrella $K_{1,n-1}$, de manera que si w és el vèrtex adjacent a v, tot altre vèrtex ha de ser adjacent a w. Si $x \neq v, w$, aleshores xv no pot ser aresta de G, ja que $g_G(v) = 1$. Però dos vèrtexs x i y diferents de v, w poden ser adjacents, i l'abre generador obtingut aplicant BFS serà el mateix. Per tant G pot ser qualsevol graf que s'obtingui a partir d'un graf estrella $K_{1,n-1}$, amb vèrtex central w i una fulla v, i podem afegir arestes entre qualsevol parell de fulles diferents de v. Per exemple, si no n'afegim cap o bé n'afegim exactament una, n'obtenim dos de no isomorfs (observeu que n'hi ha tants com grafs no isomorfs d'ordre $n - 2$).

4.14 Vegeu document a part

4.15 (També està resolt a JT, problema 6.4)

Els vèrtexs de grau 1 no són mai de tall. Així doncs, si u és una fulla de T, el graf $T - u$ és connex. Els vèrtexs de $T - u$ són els mateixos que els vèrtexs de $G - u$. Per tant, entre tot parell de vèrtexs de $G - u$ hi ha un camí format per arestes de $T - u$. Però les arestes de $T - u$ són arestes de $G - u$. Consegüentment, $G - u$ és connex.

Si G és un graf connex d'ordre almenys 2, té un arbre generador d'ordre almenys 2. Aquest arbre generador té almeys dues fulles, que no són vèrtexs de tall en G, tal com hem vist.

4.16 Les seqüències de Prüfer són: $(1,1,1,5)$ de T_1; $(1,1,2,2,2,1)$ de T_2; $(3,3,1,2,4,4,2,5,5)$ de T_3.

4.17
1) Es tracta d'un arbre d'ordre 7 amb arestes $A(T) = \{13, 16, 17, 24, 34, 45\}$.
2) Es tracta d'un arbre d'ordre 7 amb arestes $A(T) = \{15, 17, 26, 35, 46, 56\}$.
3) Es tracta d'un arbre d'ordre 8 amb arestes $A(T) = \{13, 15, 16, 25, 27, 48, 58\}$.
4) Es tracta d'un arbre d'ordre 11. Donem les arestes com a conjunts de cardinal 2 per evitar confusions amb els vèrtexs 10 i 11:
$A(T) = \{\{1,2\},\{1,6\},\{1,9\},\{2,8\},\{3,4\},\{4,5\},\{5,7\},\{6,7\},\{6,10\},\{7,11\}\}$.

4.18 Si la seqüència de Prüfer té longitud 1, aleshores l'arbre té ordre 3(=1+2). Per tant, ha de ser T_3.

4.19 Si l'arbre té ordre n, la seqüència de Prüfer és de la forma $(\overbrace{i, i, i, \ldots, i}^{n-2})$. Això vol dir que $g(i) = n - 1$ i tots els vèrtexs diferents d'i són fulles. Per tant, es tracta d'un arbre amb un vèrtex de grau $n - 1$ i $n - 1$ fulles, és a dir, el graf estrella $K_{1,n-1}$.