Distribución exponencial

- VAC
- $T \sim Ex(\lambda)$, $t \geq 0$
  - $f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t}$
  - $F(t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t}$

  $\Big\}$ ⇝ Formulario

  - ⚠ λ tiene una unidad, p.e. min^{-1} (si T se mide en minutos)

- Relación con la distribución Poisson

  X: # ~~Po(9,5)~~ viajeros en 1 minutos

  $X \sim Po(9{,}5)$

  ⇝ T : Tiempo entre 2 llegadas

  $T \sim Ex(9{,}5 \, min^{-1})$

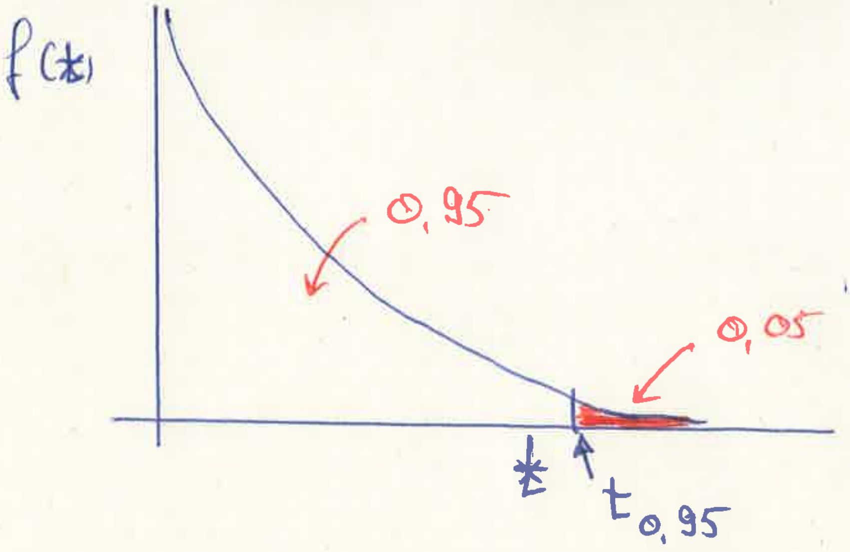
  $P(T < 4 \, seg.) = \ldots$

  $P(T < 4 \, seg) = 1 - e^{-\frac{9{,}5}{60} \cdot 4} = 0{,}469$

- $E(T) = \frac{1}{9{,}5} = 0{,}11 \, [min] = 6{,}6 \, [seg]$

- Cuantiles

  ¿Qué tiempo no será superado con una prob. de 0,95?



$$F(t) = 1 - e^{-9,5 \cdot t}$$

$$t_{0,95} = \ldots$$

$$F(t_{0,95}) = 0,95 \iff t_{0,95} = -\frac{1}{9,5}\log(0,05)$$

$$= 0,31 \text{ [min]}$$

$$= 18,9 \text{ [seg]}$$

Propiedad Markoviana

- $T \sim Ex(2\, m^{-1})$
- $P(T > 1) = e^{-2} = 0,135$
- $P(T > 4 \mid T > 3) = \ldots$

$$P(T > 4 \mid T > 3) = \frac{P(T>4)}{P(T>3)} = \frac{e^{-2\cdot 4}}{e^{-2\cdot 3}} = e^{-2}$$

$$= 0,135$$

$$= P(T > 1)$$

Es decir: $P(T > t+s \mid T > s) = P(T > t)$

Distribución Normal

- $X \sim N(\mu, \sigma)$

- $X \in \mathbb{R}$

- $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

- $E(X) = Med(X) = \mu$

$\uparrow$

$f(x)$ simétrica

- $X \sim N(\mu, \sigma)$

$\rightsquigarrow aX + b \sim N(a \cdot \mu + b, a\sigma)$

En particular; $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

- $X \sim N(175, 10)$

$P(X > 194) = 1 - P(X \leq 194) = 1 - \int_{-\infty}^{194} f(x)dx = \ldots$

i) R: 1 - pnorm(194, 175, 10)

ii) En examen:

$P(X \leq 194) = P\left(\dfrac{X-175}{10} \leq \dfrac{194-175}{10}\right)$

$= P(Z \leq 1,9) = 0,9713$

$\uparrow$

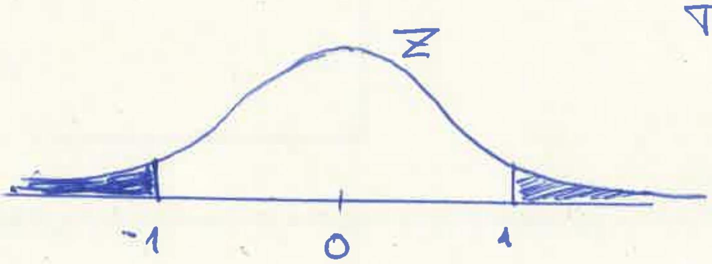
Tabla

$\Rightarrow P(X > 194) = 0,0287$

Cálculo de cuantiles de $N(0,1)$

- $P(Z \leq 1{,}9) = 0{,}9713$
- $P(X \leq 165) = \ldots = P(Z \leq -1) = \ldots$

Tabla...



$P(Z \leq -1) = P(Z \geq 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$

Tabla

Ilustración TCL

¿Cómo comprobar si un dado está trucado?

Por ejemplo, si $\left.\begin{array}{l} \bar{X}_{10} = 3{,}7 \\ \bar{X}_{100} = 3{,}7 \\ \bar{X}_{1000} = 3{,}7 \end{array}\right\}$ ¿estará trucado el dado?

⇝ Necesitamos $P(\bar{X}_{10} \geq 3{,}7 \mid \text{Dado no trucado})$

$P(\bar{X}_{100} \geq 3{,}7 \mid \text{---"---})$

$P(\bar{X}_{1000} \geq 3{,}7 \mid \text{---"---})$

Pero, ¿cuál es la distribución de $\bar{X}_{10}$, $\bar{X}_{100}$ y $\bar{X}_{1000}$?

X: Lanzamiento 1 dado

- $E(X) = 3{,}5$
- $V(X) = 2{,}92 \rightsquigarrow \sigma = 1{,}71$

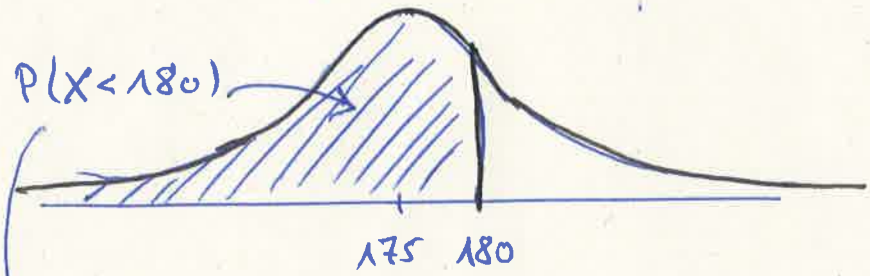
n grande

$\bar{X}_n$: Media n lanzamientos $\sim N\left(3{,}5, \frac{1{,}71}{\sqrt{n}}\right)$

Distribución normal

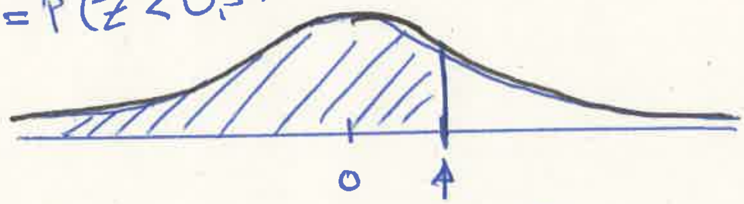
P.e. $X \sim N(175, 10)$

i) Cálculo de probabilidad, p.e. $P(X < 180)$



Estandarización: $Z = \frac{X-175}{10}$

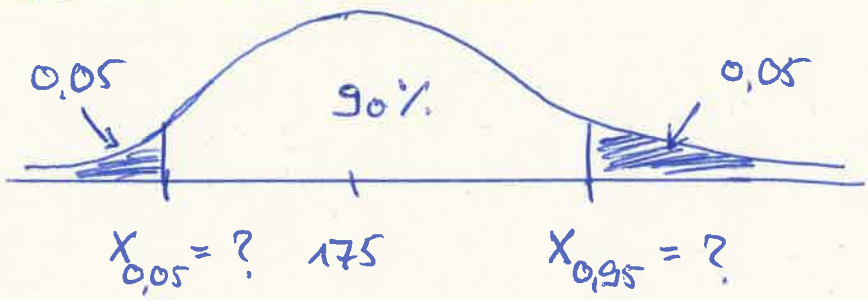
$= P(Z < 0{,}5)$



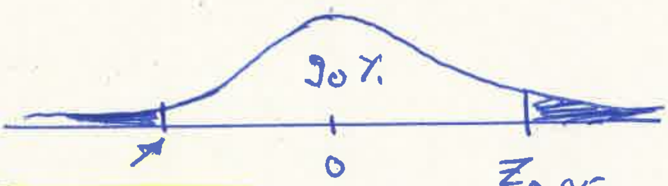
$\frac{180-175}{10} = 0{,}5 \underset{\uparrow}{=} 0{,}6915$

Tabla

ii) Cálculo de cuantiles



$Z = \frac{X-175}{10} \iff X = 175 + 10 \cdot Z$



$Z_{0,05} = -Z_{0,95}$

$Z_{0,95}$
$\parallel \leftarrow$ Tabla
$1{,}645$

$\Rightarrow X_{0,95} = 175 + 10 \cdot 1{,}645 = 191{,}45$ $\qquad X_{0,05} = 175 - 10 \cdot 1{,}645 = 158{,}55$

Dado: $\mu = E(X) = 3{,}5$

$\sigma = \sqrt{V(X)} = 1{,}71$

TCL: • $\overline{X}_{100} \sim N\left(3{,}5,\ \frac{1{,}71}{\sqrt{100}} = 0{,}171\right)$

$P(\overline{X}_{100} \geq 3{,}7 \vee \overline{X}_{100} \leq 3{,}3)$

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Simetría}}}{=} 2 \cdot P(\overline{X}_{100} \leq 3{,}3) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Est.}}}{=} 2 \cdot P\left(Z \leq \frac{3{,}3-3{,}5}{0{,}171} = -1{,}17\right)$

$= 2 \cdot (1 - P(1{,}17)) = 2 \cdot 0{,}121 = 0{,}242$

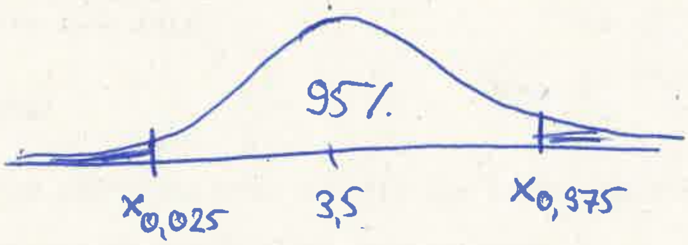
• $P(\overline{X}_{1000} \leq 3{,}3) = \ldots$

$\overline{X}_{1000} \sim N\left(3{,}5,\ \frac{1{,}71}{\sqrt{1000}} = 0{,}054\right)$

$P(\overline{X}_{1000} \leq 3{,}3) = P\left(Z \leq \frac{-0{,}2}{0{,}054} = -3{,}7\right) = 0{,}0001$

→ Dado trucado

• ¿Qué valores ~~pod~~ de $\overline{X}_{100}$ podemos esperar con una probabilidad de 0,95?



$x_{0{,}975} = 3{,}5 + \underbrace{1{,}96}_{Z_{0{,}975}} \cdot 0{,}171 = 3{,}84$

$x_{0{,}025} = 3{,}5 - 1{,}96 \cdot 0{,}171 = 3{,}16$

X: # Estudiantes que aprueban PE

$X \sim B(282,\ 0{,}9)$

$E(X) = 282 \cdot 0{,}9 = 253{,}8$

$P(X \leq 240) = \ldots$

i) pbinom (240, 282, 0.9) $\rightsquigarrow$ 0,006

ii) Aproximación con la dist. normal

$$X \sim B(n, p) \underset{\substack{\uparrow \\ n \text{ grande}}}{\approx} N\left(n \cdot p,\ \sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)}\right)$$

$X \approx N(253{,}8,\ \sqrt{25{,}38})$

$\rightsquigarrow$ pnorm (...) $\Rightarrow$