Matemàtiques 1

Exercicis resolts d'Àlgebra Lineal

Departament de Matemàtica Aplicada 2

Universitat Politècnica de Catalunya

Índex

Llegeix-me!

Aquest és un recull d'exercicis d'Àlgebra Lineal resolts en detall. Estan especialment pensats per aquells alumnes que tenen dificultats per assimilar els conceptes bàsics i necessiten practicar més enllà dels exercicis de classe, i també per aquells que els costa "començar el problema". Igualment pot ser útil per a qui vulgui repassar teoria a la vegada que fa exercicis.

Primer trobareu un llistat d'exercicis i a continuació les seves solucions. Cada solució està trencada en cinc passos, que són els següents:

I. *Resumir l'enunciat.* Es tracta simplement d'assegurar-se que s'ha entès el que ens demana l'exercici (encara que no s'entenguin alguns dels conceptes que apareixen a l'enunciat). Una opció és identificar quines són les dades i què és el que hauria de ser la resposta.

II. *Aclarir conceptes.* Consultar els apunts, les transparències o qualsevol altre recurs (sempre i quan no estiguem en un examen, és clar) per entendre tots els conceptes que apareixen a l'enunciat i veure com estan relacionats entre sí. (En aquest punt, trobareu entre parèntesis les pàgines de les transparències relacionades.)

III. *Trobar una estratègia.* Amb la informació del pas anterior, o ampliant-la si cal, decidim què cal fer per arribar a la solució.

IV. *Implementar l'estratègia.* Es fan els càlculs o raonaments que marca l'estratègia.

V. *Comprovar el resultat.* Es comprova que el resultat sigui correcte; tot sovint només podrem repassar els càlculs o assegurar-nos que la resposta correspon, almenys en la forma, amb el que hem identificat al primer pas.

La millor manera de treballar un exercici seria intentar de fer aquests passos autònomament, consultant les respostes només quan no es sàpiga com continuar o per comprovar la solució. (Òbviament, en la resposta a un examen o similar no explicaríem tots els passos en detall, si no que segurament ens centraríem en explicar III i IV, i faríem V en brut.)

Aquest recull no hauria estat possible sense la feina del becari docent Gabriel Bernardino.

Us agrairem que si trobeu alguna errada ens ho feu saber.

Anna de Mier
Montserrat Maureso
Abril 2012

Enunciats

1. Matrius, sistemes i determinants

1.1 Trobeu una matriu escalonada per files equivalent a la matriu següent.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

1.2 Trobeu una matriu escalonada equivalent a la matriu següent.

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 10 & 11 & -6 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

1.3 Doneu el rang de la matriu següent.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & -4 & 0 \\ 7 & -7 & 7 & -7 \\ 5 & -5 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

1.4 Esbrineu si la matriu següent és invertible i, en cas afirmatiu, calculeu-ne la inversa.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1.5 Esbrineu si la matriu següent és invertible i, en cas afirmatiu, calculeu-ne la inversa.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.6 Resoleu el sistema d'equacions lineals següent i doneu-ne la solució, si en té, en forma paramètrica.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 5x + 2y - z & = & 2 \\ x - y + 3z & = & 8 \\ -2x + 3y + 2z & = & -3 \end{array} \right.$$

1.7 Resoleu el sistema d'equacions lineals següent i doneu-ne la solució, si en té, en forma paramètrica.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + z - t & = & 2 \\ 2x - y + z & = & 1 \\ x + 3y + 4z - 7t & = & 11 \\ -4x + 3y - z - 2t & = & 1 \\ -2z + 2y - t & = & 2 \end{array} \right.$$

1.8 Resoleu el sistema d'equacions lineals següent i doneu-ne la solució, si en té, en forma paramètrica.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 4x - 2y - z & = & 2 \\ 3x + 5y + 3z & = & 2 \\ x - 7y - 4z & = & 2 \end{array} \right.$$

1.9 Discutiu el sistema d'equacions lineals següent.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 2y + 2z - t - u & = & 8 \\ t + u & = & -2 \\ x + y + z + t + u & = & 1 \\ x + y + z & = & 3 \\ 3x + 3y + 3z + 4t + 4u & = & 2 \end{array} \right.$$

1.10 Discutiu el sistema d'equacions lineals següent.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 5x + 2y - z + 2w & = & 0 \\ x - y + 3y - 7w & = & 0 \\ 3x + 4y - 7z + 16w & = & 0 \end{array} \right.$$

1.11 Discutiu el sistema d'equacions lineals següent.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - y + z & = & 0 \\ 2x + 4y - 2z & = & 0 \\ x + y - 3z & = & 0 \end{array} \right.$$

1.12 Discutiu el sistema d'equacions lineals següent segons els valors del paràmetre a $\mathbb{R}$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda x + y + z & = & 1 \\ x + \lambda y + z & = & \lambda \\ x + y + \lambda z & = & \lambda^2 \end{array}\right.$$

1.13 Discutiu el sistema d'equacions lineals següent segons els valors del paràmetre a $\mathbb{R}$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x - 3y - z & = & 2 \\ x + 2y - 3z & = & 4 \\ x - 2y - z & = & 3 \\ \lambda x - 2y + 2z & = & 1 \end{array}\right.$$

1.14 Calculeu del determinant següent.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 16 & 10 & 0 \end{vmatrix}$$

1.15 Calculeu del determinant següent.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

1.16 Determineu el rang de la matriu següent usant determinants.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.17 Determineu el rang de la matriu següent usant determinants.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

1.18 Decidiu si la matriu següent és invertible usant determinants.

$$\begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

1.19 Decidiu si la matriu següent és invertible usant determinants.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Espais vectorials

2.1 Esbrineu si a l'espai vectorial $\mathbb{R}^4$ el vector $u = (13, -41, 35, -9)$ és combinació lineal dels vectors $v = (1, 3, -5, 2)$ i $w = (4, -4, 0, 1)$. En cas afirmatiu, escriviu u com a combinació lineal de v i w.

2.2 Considereu els vectors $u = (3, 2, 3),\ v = (0, 0, 1),\ w = (1, -2, 4)$ de $\mathbb{R}^3$. Proveu que tot vector de $\mathbb{R}^3$ és pot expressar com a combinació lineal de u, v i w.

2.3 Considereu els polinomis $1 - x^2, 1 + x + x^2, x + x^2 + x^3, x + 2x^2$. Proveu que el polinomi $3x + 5x^2 + x^3$ es pot escriure com a combinació lineal dels polinomis anteriors. De quantes maneres diferents es pot fer?

2.4 Esbrineu si la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ pertany al subespai $\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

2.5 Sigui $S = \langle (1, 0, 1, 0), (0, 8, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (2, 1, 0, 5) \rangle$ un subespai vectorial de $\mathbb{R}^4$. Proveu que $S = \mathbb{R}^4$.

2.6 Esbrineu si el subconjunt $\{(1, 2, 1, 0), (1, 0, 1, 1), (1, 6, 1, -2)\}$ de $\mathbb{R}^4$ és linealment independent.

2.7 Esbrineu si el subconjunt $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ és linealment independent.

2.8 Esbrineu si els subconjunt $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ és linealment independent.

2.9 Esbrineu si els polinomis $3 + x^4, 5 - x - x^2, 2x^3, x + 2x^4$ formen un conjunt linealment independent a $\mathbb{R}_4[x]$, l'espai vectorial dels polinomis de grau menor o igual a quatre amb coeficients reals.

2.10 Demostreu que si els vectors a, b i c d'un cert espai vectorial E són linealment independents, llavors els vectors $a + 2b + 3c, 2a - b + 4c$ i $5c$ també ho són.

2.11 Proveu que els subespais següents són iguals.

$$S_1 = \langle (1,0,1,0),(0,-1,1,1),(2,-1,0,1)\rangle \quad \text{i} \quad S_2 = \langle (3,-2,2,2),(0,0,1,0),(1,2,-1,-2)\rangle$$

2.12 Trobeu un conjunt de generadors del subespai de $\mathbb{R}^4$ següent.

$$\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 |\, 3x_1 + 4x_2 + 7x_4 = 0, 6x_1 = 5x_3\}$$

2.13 Trobeu quina relació han de satisfer x_1, x_2, x_3 i x_4 per tal que el vector $(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4$ pertanyi al subespai $\langle (1,-1,0,0),(1,0,-1,0),(1,0,0,-1)\rangle$ de $\mathbb{R}^4$.

2.14 Doneu les coordenades de $p(x) = 1 - 2x + x^3$ en la base canònica de $\mathbb{R}_4[x]$.

2.15 Doneu les coordenades de la matriu A en la base canònica de $\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.16 Comproveu que el conjunt $\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ és una base de $\mathbb{R}^3$ usant la definició de base.

2.17 Trobeu les coordenades del vector $v = (3,2,1) \in \mathbb{R}^3$ en la base de l'exercici 2.16.

2.18 Comproveu que el conjunt següent és una base de $\mathbb{R}_3[x]$ usant al definició de base.

$$\{x - 2x^2 + x^3, 1 + x + 2x^2 - x^3, 1 + x^3, 2 + 2x - x^3\}$$

2.19 Doneu les coordenades del polinomi $p(x) = 4 + 2x - x^2 + 5x^3$ a $\mathbb{R}_3[x]$ en la base de l'exercici 2.18.

2.20 Comproveu que el conjunt següent és una base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ usant la definició de base.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

2.21 Determineu a i b per tal que el conjunt $\{(a,5,1),(0,7,-2),(2,0,b)\}$ sigui base de $\mathbb{R}^3$.

2.22 Sigui $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ una base d'un espai vectorial E. Demostreu que el conjunt B' és també una base de E.

$$B' = \{b_1 - b_2 + 2b_3 + b_4, b_2 - b_3 + 3b_4, b_3, b_4\}$$

2.23 Doneu una base i la dimensió del subespai generat pel conjunt de vectors següent.

$$\{(1,2,3,1),(3,2,1,0),(1,0,2,0),(-2,0,8,2)\}$$

Amplieu aquesta base per obtenir-ne una de $\mathbb{R}^4$.

2.24 Doneu una base i la dimensió del subespai de $\mathbb{R}^4$ $S = \{(s+4t, t, s, 2s-t) | s,t \in \mathbb{R}\}$. Amplieu aquesta base per obtenir-ne una de $\mathbb{R}^4$.

2.25 Doneu una base i la dimensió del subespai següent.

$$R = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x-y+z=0, y+z+t=0, x+2z+t=0\}$$

Amplieu aquesta base per obtenir-ne una de $\mathbb{R}^4$.

2.26 Doneu una base i la dimensió de l'espai $S \cap R$, on S i R són els subespais dels exercicis anteriors 2.24 i 2.25, respectivament.

2.27 Considereu la base canònica B i la base $B' = \{(1,0,1),(0,-1,2),(2,3,-5)\}$ de $\mathbb{R}^3$. Doneu la matriu $P_{B'}^{B}$ del canvi de la base B a la base B' i la matriu $P_{B}^{B'}$ del canvi de la base B' a la base B.

2.28 Considereu les bases $B = \{(1,0,2),(0,1,3),(1,1,1)\}$ i $B' = \{(2,1,1),(1,0,0),(0,2,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$. Doneu la matriu $P_{B'}^{B}$ del canvi de la base B a la base B' i la matriu $P_{B}^{B'}$ del canvi de la base B' a la base B.

2.29 Considereu les bases B i B' de l'exercici anterior 2.28. Trobeu les coordenades de $v \in \mathbb{R}^3$ en la base B sabent que $v_{B'} = (1,2,-1)$.

2.30 Considereu la base canònica $B = \{1, x, x^2\}$ i la base $B' = \{1, 2x+8x^2, 6+12x^2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$. Doneu la matriu $P_{B'}^{B}$ del canvi de la base B a la base B' i la matriu $P_{B}^{B'}$ del canvi de la base B' a la base B.

2.31 Considereu la base B' de l'exercici anterior anterior 2.30. Trobeu les coordenades de $p(x) = 1+4x+16x^2$ en la base B'.

2.32 Siguin E un $\mathbb{R}$-espai vectorial i $B = \{u, v\}$ una base d'E. Comproveu que els vectors $a = u+3v$ i $b = -u-v$ formen una base d'E i doneu la matriu $P_{B'}^{B}$ del canvi de la base B a la base $B' = \{a, b\}$.

2.33 Considereu les bases B i B' de l'exercici anterior 2.32. Trobeu les coordenades del vector $w = 2a+b$ en la base B.

3. Aplicacions lineals

3.1 Esbrineu si són lineals les aplicacions $f, g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definides per

$$f(x,y,z) = y - 2x + z, \quad g(x,y,z) = 2y^2 + z.$$

3.2 Esbrineu si són lineals les aplicacions $f, g\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ definides per

$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + 1 + (a_2 - a_1)x, \quad g(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (2a_0 + a_1) + 3a_2x^3.$$

3.3 Esbrineu si són lineals les aplicacions $f, g\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ definides per

$$f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a-d & b & d-a \\ c-b & d & b-c \end{pmatrix}, \quad g(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a & b+2a & d^2 \\ c-b+1 & 2a+2b & ab \end{pmatrix}.$$

3.4 Considereu l'aplicació lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida per

$$f(x,y,z) = (2x - 3y, 2y - x - z, z + 3y - x, x - 2y - z).$$

Doneu la matriu associada a f en les bases canòniques.

3.5 Considereu l'aplicació lineal $f\colon \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^3$ definida per

$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = (a_0 + a_1, 2a_2 - a_0 + a_1 - 2a_3, a_2 + a_3).$$

Doneu la matriu associada a f en les bases canòniques.

3.6 Considereu l'aplicació lineal $f\colon \mathbb{R}_3 \to \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ definida per

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x-2y & 3x+z-y & 2y-z \\ y & z & x \end{pmatrix}.$$

Doneu la matriu associada a f en les bases canòniques.

3.7 Considereu l'aplicació lineal $f\colon \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^3$ que en les respectives bases canòniques C i C' té per matriu associada

$$M_{C'}^{C}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Doneu la imatge del vector $p(x) = 1 + 2x + 3x^2 - x^3$.

3.8 Considereu l'aplicació lineal $f\colon \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ que en les respectives bases canòniques C i C' té per matriu associada

$$M_{C'}^{C}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Doneu la imatge del vector $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

3.9 Sigui $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ una base d'un $\mathbb{R}$-espai vectorial E. De l'endomorfisme $f\colon E \to E$ en tenim les dades següents:

$$f(b_1 - b_2 + 2b_3 + b_4) = 0_E, \quad f(b_2 - b_3 + 3b_4) = 0_E,$$
$$f(b_3) = 2b_1 - b_2 + 5b_3 - b_4, \quad f(b_4) = b_2 - b_3 + 3b_4.$$

Doneu la matriu associada a f en la base B i la imatge de $v = b_1 - b_2 + b_3 - b_4$.

3.10 Considereu l'aplicació lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ que té per matriu associada en les bases canòniques

$$M_{C'}^{C}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trobeu la matriu $M_{C'}^{B}(f)$, sent $B = \{(1,0,0), (1,1,0), (2,0,1)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$.

3.11 Amb les dades de l'exercici 3.10, trobeu la matriu $M_{B'}^{C}(f)$ sent $B' = \{(3,1), (2,0)\}$ una base de $\mathbb{R}^2$.

3.12 Amb les dades dels exercicis 3.10 i 3.11, trobeu la matriu $M_{B'}^{B}(f)$.

3.13 Considereu l'endomorfisme $f\colon \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ definit per

$$f(p(x)) = p(x) + p'(x) + p''(x),$$

on $p'(x)$ i $p''(x)$ denoten la primera i segona derivada del polinomi $p(x)$, respectivament. Doneu la matriu associada a f en la base $B = \{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\}$.

3.14 Considereu l'endomorfisme $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que té per matriu associada en la base canònica

$$M_C(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Trobeu la dimensió del nucli d'f.

3.15 Trobeu la dimensió i una base de la imatge de l'endomorfisme f de l'exercici 3.14

3.16 Considereu l'aplicació lineal $f\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[x]$ definida per

$$f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = (a+b+c+2d) + (b-c)x + (-a+b+d)x^2.$$

Trobeu una base i la dimensió del nucli i de la imatge d'f.

3.17 Esbrineu si l'aplicació lineal f de l'exercici 3.14 és injectiva, exhaustiva o bijectiva.

3.18 Esbrineu si l'aplicació lineal f de l'exercici 3.16 és injectiva, exhaustiva o bijectiva.

3.19 Sigui f l'endomorfisme de l'exercici 3.13. Esbrineu si f és un isomorfisme i, en cas afirmatiu, trobeu f^{-1}.

Solucions detallades

1. Matrius, sistemes i determinants

1.1 I. En aquest cas l'enunciat és molt senzill. L'única dada és una matriu (amb 5 files i 3 columnes). La solució ha de ser una matriu que sigui escalonada per files i que sigui equivalent a la que ens donen.

II. Els conceptes que apareixen són el de *matriu escalonada per files* i el d'*equivalent*.

En el context de les matrius, una matriu B és equivalent a una matriu A si B es pot obtenir a partir d'A fent un número finit de transformacions elementals. Aquí apareix un nou concepte, el de *transformació elemental*. Recordem que aquestes consisteixen en: intercanviar dues files (tipus I), multiplicar una fila per un nombre diferent de zero (tipus II) i sumar a una fila una altra fila multiplicada per algun nombre (tipus III).

(Transparències: 14,15)

Una matriu escalonada és aquella que compleix:

- si hi ha files nul·les, són les últimes
- si una fila no és nul·la, el primer element que no és zero ha de ser un 1 (el pivot)
- el pivot d'una fila està sempre més a la dreta que el pivot de la fila superior (en altres paraules, a sota d'un pivot i a la seva esquerra, només pot haver-hi zeros).

(Transparències: 16)

III. Per tant, es tracta de fer transformacions elementals a la matriu que ens donen fins aconseguir que tingui forma escalonada. (Cal dir que no hi ha necessàriament una única matriu escalonada equivalent a una matriu A, ja que aquesta pot dependre de l'elecció de la fila on serà el pivot a l'hora de reduir.)

IV. Ara bé quines transformacions cal fer, i en quin ordre? Això malauradament només es descobreix amb una mica d'experiència. Una bona idea és començar per la primera fila i anar baixant.

La primera fila de la matriu és 1 1 2. Clarament no és una fila de zeros i el primer element ja és un 1, així que aquesta fila ja està bé. Ara, per a que es compleixi la norma de que sota un pivot hi ha d'haver zeros, hem d'aconseguir posar zeros a la primera posició de les files 2 a 5. L'única transformació que ens permetrà fer això és la de tipus III. Per exemple, per convertir el -1 de la segona fila en un zero, només cal sumar la primera fila a la segona: $F2 \leftarrow F2 + F1$. La tercera fila ja té un zero a la primera columna, per tant no cal fer-li res. Per a la quarta fila, fem $F4 \leftarrow F4 - 2\,F1$, i per a cinquena $F5 \leftarrow F5 - 3\ F1$.

Fent els càlculs:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ara busquem quina és la fila que té un element no nul més a l'esquerra: és la fila 4. Per tant aquesta fila ha d'anar a parar just per sota de la fila 1. Així que fent canvis de files (transformacions tipus I) arribem a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ara procedim amb la fila 2 com hem fet abans amb la fila 1. Ara el primer element no nul no és un 1, si no un 2. Per convertir-lo en un 1, apliquem una transformació de tipus II: $F2 \leftarrow F2/2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El pivot de la fila 2 ja té zeros a sota i a l'esquerra, per tant podem continuar. Ara només queda la fila 3 amb un element no nul, que convertim fàcilment en un 1 fent $F3 \leftarrow F3/5$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

V. En aquest cas, només cal comprovar que efectivament la matriu a la que hem arribat és escalonada, i si tenim temps repassem les operacions.

1.2 I. L'enunciat és idèntic al de l'exercici 1.1

II. Els mateixos que a l'exercici 1.1.

.

III. Es tracta de fer transformacions elementals fins que la matriu estigui escalonada. Es pot fer com l'exercici 1.1 o seguint sistemàticament l'algorisme següent.
Nota: la funció *primerNoNul(v)* té com a entrada una fila i retorna la posició del primer element diferent de 0, o infinit en cas que la fila sigui nul·la.

Algorithm 1 Esglaonar Matriu

Require: Una matriu A de tipus $M \times N$
Ensure: Retorna una matriu equivalent a A que sigui escalonada.

```
1:  for i := 1, i ≤ M do
2:     j := i
3:     k := primerNoNul(A[i])
4:     for l = i + 1, l ≤ M do
5:        if k > primerNoNul(A[l]) then
6:           j := l
7:           k := primerNoNul(A[l])
8:        end if
9:     end for
10:    A[i] ↔ A[j]
11:    if k = ∞ then
12:       Retorna A i acaba l'algorisme
13:    end if
14:    A[i] := (1/A[i][k]) A[i]
15:    for l = i + 1, l ≤ M do
16:       A[l]− = A[l][k]A[i]
17:    end for
18: end for
19: return A
```

IV. Seguint l'algorisme anterior tindrem :

Iteració 1 Primer, a la recerca de la fila pivot, línies 2 a 10, tindrem el següent estat en les diverses iteracions del bucle:

- Abans d'entrar al bucle $4 - 9$: $j = 1,\ k = 2$.
- Al final de la primera iteració: El primer element de la segona fila és $5 \neq 0$, per tant $primerNoNul(A[2]) = 1 < k = primerNoNul(A[1]) = 2$, per tant entrarà al condicional, i el resultat serà $j = 2,\ k = 1$.
- Al final de la segona iteració: El primer element de la tercera fila és $10 \neq 0$, per tant $primerNoNul(A[3]) = 1 = k = primerNoNul(A[2]) = 1$, no es compleix la condició i no entra al condicional. Aquesta és l'última iteració del bucle.

Per tant, al acabar aquesta part de codi, la matriu resultant serà:

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 4 & 1 \\ 10 & 11 & -6 & 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

Com que la primera fila no és nul·la, es continua amb l'algorisme. Ara només queda continuar amb l'algorisme de reducció, cal fer que el pivot sigui 1 (línia 14), per tant dividim la nova fila 1 per 5.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2/5 & 0 & -1/5 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 4 & 1 \\ 10 & 11 & -6 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

Ara cal executar l'últim bucle $(15 - 17)$ per tal que sota el pivot quedin zeros. El resultat de la primera iteració del segon bucle, ja que $A[l][k] = 0$, és

$$\begin{pmatrix} 1 & -2/5 & 0 & -1/5 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 4 & 1 \\ 10 & 11 & -6 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

i després de la segona iteració és

$$\begin{pmatrix} 1 & -2/5 & 0 & -1/5 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 15 & -6 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$

Iteració 2 Recerca del pivot: Ara només hi ha una iteració. Al principi $i = 2,\ k = 2$. A la primera iteració surt que $2 = primerNoNul(A[3])$, per tant no entra al condicional, i no es fa cap canvi. Després cal fer que el pivot sigui 1 dividint la 2a fila entre 5.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2/5 & 0 & -1/5 & 0 \\ 0 & 1 & -2/5 & 4/5 & 1/5 \\ 0 & 15 & -6 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$

Ara cal executar l'últim bucle $(15 - 17)$ per tal que sota el pivot quedin zeros. Només s'ha de fer una iteració.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2/5 & 0 & -1/5 & 0 \\ 0 & 1 & -2/5 & 4/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Iteració 3 Recerca del pivot: No és fa cap iteració. Després d'executar la línia 14 s'obté la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & -2/5 & 0 & -1/5 & 0 \\ 0 & 1 & -2/5 & 4/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que és el resultat final ja que no entra al bucle $15 - 17$.

V. Idem a l'exercici 1.1

1.3 I. En aquest exercici l'única dada és una matriu i la solució ha de ser el número natural que és el rang d'aquesta matriu.

II. En aquest exercici apareix un nou concepte: el *rang* de la matriu. El rang d'una matriu és el nombre de files no nul·les de qualsevol matriu escalonada equivalent. Tot i que una matriu pot tenir diverses matrius escalonades equivalents, totes aquestes matrius tindran el mateix nombre de files no nul·les.

(Transparències: 16)

Ens apareixen, per tant, els conceptes necessaris per trobar matrius escalonades equivalents, que ja coneixem de l'exercici 1.1.

III. L'estratègia a seguir serà trobar una matriu escalonada equivalent i comptar el número de files no nul·les.

IV. Primer cal trobar una matriu escalonada equivalent. El resultat d'aplicar l'algorisme 1, iteració a iteració serà el següent:

1) Considerem la matriu de l'enunciat.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & -4 & 0 \\ 7 & -7 & 7 & -7 \\ 5 & -5 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

La fila 1 ja va bé per pivotar ja que el seu primer element és diferent de zero. Com ja és 1, no cal dividir (es dividiria entre 1 i quedaria igual). En acabar la iteració quedarà la matriu següent.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

2) Ara tampoc cal canviar el pivot, ja que no hi ha cap element no nul a partir de la segona fila més a l'esquerra que la tercera columna (primer element no nul de la segona fila). Dividim la segona fila per -10.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

I després del bucle $15 - 17$ la matriu resultant és la següent.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

3) Ara tampoc no cal pivotar, ja que no hi ha cap element no nul a partir de la tercera fila més a l'esquerra que la quarta columna. Dividim la tercera fila entre -7.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

En acabar el bucle $15-17$ obtenim la matriu escalonada equivalent.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comptant el nombre de files no nul·les de la matriu escalonada, 3, tenim el rang de la matriu inicial.

V. El resultat és un número natural menor que la dimensió mínima de la matriu. Si es vol estar completament segur, cal repassar els càlculs.

1.4 I. En aquest exercici ens donen una matriu A i hem d'esbrinar si existeix una matriu B tal que sigui la inversa d'A. En cas que existeixi, cal calcular-la.

II. En aquest exercici apareix un concepte nou, el de *matriu inversa*. Però abans d'introduir aquest concepte cal introduir el *producte de matrius*, i recordar el concepte de rang (veure exercici 1.3) i el d'escalonar (veure exercici 1.1).

El producte de dues matrius és una operació que dóna com a resultat una matriu que té tantes files com files té la primera matriu i tantes columnes com columnes té la segona matriu. El producte entre dues matrius només té sentit si la primera matriu té tantes columnes com files té la segona matriu.

(Transparències: 9, 10)

Es diu que la matriu A és *invertible* si existeix una matriu B tal que $AB = BA = I$ i es diu que B és la seva *inversa*. Per com està definit el producte de matrius, només cal cercar matrius invertibles dintre del conjunt de les matrius quadrades (és a dir, matrius amb tantes files com columnes). A més, si A és del tipus $n \times n$, A és invertible si i només si el seu rang és n. La inversa d'una matriu, en cas d'existir, és única.

(Transparències: 11, 12).

III. Primer s'ha de mirar si la matriu és invertible (veure que és quadrada i calcular el rang) i, en cas afirmatiu, trobar la inversa. Hi ha diverses maneres de calcular inverses. Una manera és seguint l'algorisme 2 (Gauss-Jordan) que a mesura que escalona la matriu per trobar el rang va calculant la matriu inversa, si es que en té. L'operació $(A|B)$, on A, B són matrius amb el mateix número de files, consisteix en concatenar les dues matrius, posant les columnes de B després de les columnes de A.
Nota: qualsevol submatriu que contingui les k primeres columnes d'una matriu escalonada, també és escalonada.

IV. Al ser la matriu A quadrada, podem seguir l'algorisme 2 (si no fos quadrada respondríem que no és invertible). Primer cal escalonar la matriu $(A|I_4)$.

$$(A|I_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Els resultats al final de les iteracions de l'algorisme 1 d'escalonar són

Algorithm 2 Invertir Matriu

Require: Una matriu A de tipus $n \times n$

Ensure: Retorna una matriu B que és la inversa d'A o indica que la matriu A no és invertible.

$M := escalonarMatriu(A|I_n)$
if $rang(M[1:n][1:n]) \neq n$ **then**
  return La matriu no és invertible
end if
for $i = n, i \geq 1, --i$ **do**
  for $j = i-1, j \geq 1, --j$ **do**
    $A[j] := A[j] - A[j][i]A[i]$
  end for
end for
return $A[1:n][n+1:2n]$

Iteració 1 No cal permutar files. Les transformacions que fem són $F_1 \leftarrow -F_1$, $F_2 \leftarrow F_2 - F_1$, $F_4 \leftarrow F_4 - 2F_1$.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -5 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 11 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Iteració 2 No cal permutar files. Les transformacions que fem són $F_3 \leftarrow F_3 - F_2$, $F_4 \leftarrow F_4 - 3F_2$.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -5 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -2 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Iteració 3 No cal permutar files. Les transformacions que fem són $F_3 \leftarrow F_3/4$, $F_4 \leftarrow F_4 - 8F_3$.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -5 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Ara, agafem $A[1:n][1:n]$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

el seu rang és $3 \neq 4$ i per tant la matriu no és invertible.

V. Per comprovar aquest resultat, caldria repassar el càlcul del rang de A, i veure que és diferent de 4.

1.5 I. El mateix que l'exercici 1.4.

II. Els mateixos que a l'exercici 1.4.

III. La mateixa que l'exercici 1.4.

IV. La matriu és quadrada, pot ser invertible, per tant podem fer servir l'algorisme 2.

$$(A|I_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Els resultats al final de les iteracions principals són els següents.

Iteració 1 No cal permutar. Les transformacions que fem són $F_1 \leftarrow -F_1$, $F_2 \leftarrow F_2 - F_1$, $F_4 \leftarrow F_4 - F_1$.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Iteració 2 Es permuta la segona fila amb la tercera.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Iteració 3 Es permuta la tercera fila amb la quarta i a més $F_3 \leftarrow -F_3$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ara cal calcular el rang de la matriu formada per les 4 primeres columnes, la matriu escalonada equivalent a A.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rang és 4, per tant la matriu és invertible i podem continuar amb l'algorisme. Vegem quines matrius obtenim al final de cada iteració del bucle $5-9$, fent les transformacions que s'indiquen.

Iteració 1 $F_3 \leftarrow F_3 + F_4$, $F_1 \leftarrow F_1 + F_4$.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Iteració 2 $F_1 \leftarrow F_1 - F_3$.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Iteració 3 $F_1 \leftarrow F_1 + F_2$.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La inversa que cercàvem és $A[1 : n][n + 1 : 2n]$ (és a dir, les quatre últimes columnes de la matriu anterior).

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

V. El resultat es pot comprovar fàcilment multiplicant la matriu obtinguda per la del enunciat i observant que dóna la identitat.

1.6 I. Aquest exercici ens dóna un sistema d'equacions lineals, i cal trobar, si en té, el conjunt de les solucions (s_1, s_2, s_3), en forma paramètrica, que satisfan totes les equacions simultàniament.

II. En aquest exercici apareix el següent concepte nou:

- *Sistema d'equacions lineals.* Un sistema d'equacions lineals és un conjunt d'equacions lineals. Un sistema pot tenir una única solució (*compatible determinat*), o més d'una solució (*compatible indeterminat*), o bé cap (*incompatible*).

(Transparències: 20,21,22,23)

Per determinar si un sistema té una, més d'una, o cap solució, podem fer servir el Teorema de Rouché-Frobenius. Per entendre aquest teorema, necessitem el concepte de matriu associada a un sistema, a part del concepte de rang (veure l'exercici 1.3).

- *Matriu associada a un sistema.* Aquesta és una matriu de tantes files com equacions té el sistema i tantes columnes com variables, els elements vénen donats de la manera següent: la columna i està formada pels coeficients de la variable i del sistema ordenats segons l'ordre de les equacions. Si a aquesta matriu li afegim una columna amb els termes independents, s'anomena *matriu ampliada.*

(Transparències: 25,26,27)

El Teorema de Rouché-Frobenius diu el següent:

- Un sistema és incompatible si i només si el rang de la matriu associada i el de l'ampliada són diferents.
- Un sistema és compatible determinat si i només si el rang de la matriu associada, el rang de la matriu ampliada i el número d'incògnites coincideixen.
- Un sistema és compatible indeterminat si i només si el rang de la matriu associada és el mateix que el de la ampliada i més petit que el número d'incògnites.

(Transparències: 30)

Aquest teorema, però, no ens diu com trobar la solució en el cas que el sistema sigui compatible. Per a fer això, tenim el següent fet que ens permet transformar el sistema en un de més senzill que es pugui resoldre directament: si fem transformacions elementals a la matriu ampliada d'un sistema, obtindrem la matriu ampliada d'un altre sistema que té les mateixes solucions que el primer. Si la matriu del sistema està escalonada, el sistema es pot resoldre fàcilment comenąnt per la darrera equació i continuant "cap amunt".

(Transparències: 24,27)

Finalment, l'enunciat ens diu que la solució ha d'estar en forma paramètrica. Això vol dir expressar la solució de la forma

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} + y_1 \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \\ \vdots \\ e_{n1} \end{pmatrix} + \cdots + y_l \begin{pmatrix} e_{1l} \\ e_{2l} \\ \vdots \\ e_{nl} \end{pmatrix},$$

on totes les matrius columna són d'escalars i hi ha tants paràmetres $y_1, \ldots, y_l$ com graus de llibertat tingui el sistema.

(Transparències: 29)

III. Els punts de l'apartat II es resumeixen en l'algorisme de eliminació gaussiana, que consisteix en

1) trobar la matriu ampliada associada al sistema,
2) trobar una matriu escalonada equivalent a l'ampliada (no cal que els pivots siguin 1, només cal que siguin $\neq 0$),
3) aplicar el Teorema de Rouché-Frobenius,
4) trobar la solució, si en té, resolent "cap amunt" el sistema escalonat.

(Transparències: 32)

Per tant, aplicarem aquest algorisme per resoldre l'exercici.

IV.

1) Trobar la matriu ampliada.

   Primer, cal trobar la matriu associada, resultat de posar els coeficients en una matriu.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

   Per obtenir l'ampliada, cal afegir la columna de termes independents.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 8 \\ -2 & 3 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

2) Trobar la matriu escalonada equivalent a l'ampliada.

   a) Tot i que no és necessari, intercanviem la fila 1 amb la 2 per facilitar els càlculs.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 8 \\ 5 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

   b) $F_2 \leftarrow F_2 - 5F_1$, $F_3 \leftarrow F_2 + 2F_1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 7 & -16 & -38 \\ 0 & 1 & 8 & 13 \end{array}\right)$$

   c) Una altra vegada, tot i que no és imprescindible, els càlculs són més fàcils si s'intercanvien la fila 2 i la 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 8 & 13 \\ 0 & 7 & -16 & -38 \end{array}\right)$$

   d) $F_3 \leftarrow F_3 - 7F_2$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 8 & 13 \\ 0 & 0 & -72 & -129 \end{array}\right)$$

   e) $F_3 \leftarrow \frac{-1}{72}F_3$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 8 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 43/24 \end{array}\right)$$

3) Apliquem el teoream de Rouché-Frobenius per veure si és compatible:

   Com que la matriu ja està escalonada, és trivial veure que, tant la matriu associada com l'ampliada, tenen rang 3, per tant el sistema és compatible. Com el rang és igual al número de variables, el sistema és compatible determinat.

4) Trobar la solució:

Ara que tenim un sistema escalonat equivalent al de l'enunciat, només cal anar fent la substitució cap amunt.

$$\begin{cases} x - y + 3z &= 8 \\ \phantom{x - {}} y + 8z &= 13 \\ z &= 43/24 \end{cases}$$

Per tant $z = 43/24$. Substituïm el valor de z a les equacions anteriors.

$$\begin{cases} x - y &= 8 - 3 \cdot 43/24 = 21/8 \\ \phantom{x - {}} y &= 13 - 8 \cdot 43/24 = -4/3 \\ \phantom{x - {}} z &= 43/24 \end{cases}$$

Obtenim que $y = -4/3$. Substituïm el valor de la variable y obtenim finalment que $x = 31/24$.

La solució és per tant

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31/24 \\ -4/3 \\ 43/24 \end{pmatrix}$$

(com que el sistema és compatible determinat, el nombre de graus de llibertat és zero, i per tant la forma paramètrica de la solució, en aquest cas, no té cap paràmetre).

V. Per assegurar-se, el més fàcil és substituir les variables pels valors de la solució a cada equació i confirmar que es satisfan les igualtats.

1.7 I. Es tracta de trobar les solucions, si n'hi ha, del sistema lineal donat i expresar-les en forma paramètrica.

II. Els mateixos que a l'exercici 1.6

III. Fer servir l'algorisme d'eliminació gaussiana exposat a 1.6.

IV.

1) Trobar la matriu ampliada.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & -7 & 11 \\ -4 & 3 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

2) Trobar la matriu escalonada equivalent fent transformacions.

a) $F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1,\ F_3 \leftarrow F_3 - F_1,\ F_4 \leftarrow F_4 + 4F_1.$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & -6 & 9 \\ 0 & 3 & 3 & -6 & 9 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

b) $F_3 \leftarrow F_3 + 3F_2,\ F_4 \leftarrow F_4 + 3F_2,\ F_5 \leftarrow F_5 + 2F_2.$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & -4 \end{array}\right)$$

c) $F_5 \leftrightarrow F_3.$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

3) És immediat comprovar que $rang(A) = rang(A|b) = 3 \neq 4$, sent 4 el nombre d'incògnites. Per tant, es tracta d'un sistema compatible indeterminat (té més d'una solució).

4) Ara cal trobar la solució. La solució consistirà en 3 variables principals (x, y, z), ja que té rang 3, i una lliure (t). Cal dir que aquesta elecció és arbitrària, deguda a l'ordre que hem donar en un principi a les variables, ja que podríem agafar una altra variable com a lliure i posar t com a principal.

Per trobar la solució, considerem el sistema equivalent donat per la matriu escalonada.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + z - t & = & 2 \\ -y - z + 2t & = & -3 \\ -4z + 3t & = & -4 \end{array}\right.$$

Ara anem substituint cap amunt, deixant cada variable en funció d'una constant i de la variable lliure. Per tant $z = 1 + 3/4t$, i substituint a les altres equacions queda

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + 1 + 3/4t - t & = & 2 \\ -y - 1 - 3/4t + 2t & = & -3 \end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x - 1/4t & = & 1 \\ y - 5/4t & = & 2 \end{array}\right.$$

Per tant $y = 2 + 5/4t$ i $x = 1 + 1/4t$.

La solució en forma paramètrica és

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1/4 \\ 5/4 \\ 3/4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

V. Per confirmar que els resultats són correctes, cal veure que tots els punts de la solució compleixen les equacions, per a això cal substituir al sistema la solució general. Però ja que volem només comprovar si no ens hem equivocat, n'hi ha prou en considerar les solucions per a uns quants valors de t, per exemple $t = 0$ i $t = 1$, substituir-los al sistema i comprovar que es satisfan les igualtats.

1.8 I. Es tracta de trobar les solucions, si n'hi ha, del sistema lineal donat i expresar-les en forma paramètrica.

II. Els mateixos que a l'exercici 1.6

III. Fer servir l'algorisme d'eliminació gaussiana exposat a 1.6.

IV

1) Trobar la matriu ampliada.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -7 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

2) Trobar una matriu escalonada equivalent fent transformacions elementals.

   a) Intercanviem la fila 1 amb la 3 per facilitar els càlculs.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

   b) $F_2 \leftarrow F_2 - 3F_1$, $F_3 \leftarrow F_3 - 4F_1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & -4 & 2 \\ 0 & 26 & 15 & -4 \\ 0 & 26 & 15 & -6 \end{array}\right)$$

   c) $F_3 \leftarrow F_3 - F_2$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & -4 & 2 \\ 0 & 26 & 15 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

3) Aplicar el teorema de Rouché-Frobenius: El rang de la matriu associada és 2, i el de l'ampliada és 3, per tant el sistema és incompatible i no hi ha cap solució. El conjunt de les solucions és el conjunt buit.

V. Es poden revisar els càlculs per comprovar que el rang de la matriu és el correcte

1.9 I. L'única dada del problema és un sistema d'equacions lineals, i cal dir només si té solució. En cas de tenir-ne, dir si en té una o més, però no cal trobar-les.

II. Els mateixos que a l'exercici 1.6.

III. Farem servir l'algorisme d'eliminació gaussiana exposat a 1.6 (però ens aturarem al pas 3).

IV.

1) Trobar la matriu ampliada.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

2) Trobar la matriu escalonada equivalent a $(A|b)$ mitjançant les transformacions elementals.

a) Intercanviem de files 1 i 3 per facilitar els càlculs.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

b) $F_3 \leftarrow F_3 - 2F_1$, $F_4 \leftarrow F_4 - F_1$, $F_5 \leftarrow F_5 - 3F_1$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

c) $F_3 \leftarrow F_3 + 3F_2$, $F_4 \leftarrow F_4 + F_2$, $F_5 \leftarrow F_5 - F_3$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

d) $F_3 \leftrightarrow F_5$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

3) Aplicar el teorema de Rouché-Frobenius: la matriu associada té rang 2 i l'ampliada 3, per tant es tracta d'un sistema incompatible.

V. Es poden revisar els càlculs per comprovar que els rangs que hem trobat són correctes.

1.10

I. El mateix que l'exercici 1.9.

II. En aquest exercici apareix un tipus concret de sistemes, que són els homogenis. Un sistema és *homogeni* si el vector de termes independents és 0. Un sistema homogeni sempre té solució (pot ser compatible determinat o compatible indeterminat).

A més, s'han de tenir en compte els conceptes que han aparegut a 1.6.

III. Farem servir l'algorisme d'eliminació gaussiana exposat a 1.6.

IV. Aquest sistema presenta dues particularitats: és homogeni i té menys equacions que variables. Així el sistema és compatible, té almenys la solució $(0, 0, 0, 0)$, i el rang de la matriu associada és com a molt el número d'equacions, aquest número és 3. El sistema té 4 variables i, aplicant el teorema de Rouché-Frobenius, sabem que el sistema és compatible indeterminat. Per arribar a aquesta conclusió també es pot seguir un procediment calcat al de l'exercici anterior, però caldria fer més càlculs. Ara, si ens demanessin els graus de llibertat, llavors sí que caldria fer els càlculs.

V. Repassar els raonaments.

1.11 I. El mateix que l'exercici 1.9.

II. Els mateixos que a l'exercici 1.6.

III. Farem servir l'algorisme d'eliminació gaussiana exposat a 1.6.

IV. Per ser homogeni sabem que és compatible, però al contrari que a l'exercici anterior 1.10 no podem decidir entre compatible determinat i indeterminat, doncs hi ha tantes equacions com variables.

1) Trobem la matriu ampliada.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

2) Trobem la matriu escalonada equivalent a $(A|b)$ mitjançant transformacions elementals.

   a) $F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1$, $F_3 \leftarrow F_2 - F_1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

   b) $F_3 \leftarrow F_3 - 1/3F_2$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -8/3 & 0 \end{array}\right)$$

3) Aplicant el teorema de Rouché-Frobenius s'obté que el sistema és compatible determinat, ja que té 3 variables i rang 3.

V. Ens fixem que el sistema és homogeni, per tant no pot ser incompatible. Si volem estar segurs que és compatible determinat, es poden repassar els càlculs.

1.12 I. Es té un sistema d'equacions lineals que depèn d'un paràmetre, i cal dir els valors del paràmetre per als quals el sistema és compatible determinat, per als que és compatible indeterminat, i per als que és incompatible.

II. Els mateixos que a l'exercici 1.6.

III. Una possibilitat és oblidar-se de que hi ha un paràmetre, i operar amb normalitat amb la matriu ampliada. Cada vegada que s'hagi de comprovar si un terme és igual o no a zero (per escollir un pivot o a l'hora de dividir), caldrà distingir els casos i estudiar-los per separat. A més, per facilitar els càlculs, sempre que sigui possible, és millor intentar que el pivot no depengui de cap paràmetre.

IV. Perquè el pivot no depengui de λ fem $F_1 \leftrightarrow F_3$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ara continuem escalonant, $F_2 \leftarrow F_2 - F_1$, $F_3 \leftarrow F_3 - \lambda F_1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda^3 \end{array}\right)$$

$F_3 \leftarrow F_3 + F_2$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 & 1+\lambda-\lambda^2-\lambda^3 \end{array}\right)$$

La matriu ampliada ja està escalonada, ara calculem el rang segons s'anul·lin o no certs termes. Estudiem primer F_3, $0 = 2 - \lambda - \lambda^2$, que és quan $\lambda = 1$ o $\lambda = 2$. La segona fila s'anul·la també quan $\lambda = 1$, per tant no cal afegir nous casos.

Quan $\lambda = 1$, la segona i la tercera files són nul·les, per tant queda que el rang de la matriu ampliada és el mateix que el de l'associada, 1, i com hi ha 3 variables, el sistema és compatible indeterminat.

Quan $\lambda = 2$, $1 + 2 - 2^2 - 2^3 \neq 0$, així el rang de l'ampliada és 3 i el de l'associada 2, per tant el sistema és incompatible.

Quan $\lambda \neq 1, 2$, el rang de l'associada és 3 igual al de l'ampliada, i com que el número d'incògnites també és 3, el sistema és compatible determinat.

V. Una manera és substituir els valors de λ al sistema, i comprovar-ho.

1.13 I. El mateix que a l'exercici 1.12

II. Els mateixos que a l'exercici 1.6

III. El mateix que a l'exercici 1.12

IV. Considerem la matriu ampliada.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \\ \lambda & -2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Trobem una escalonada equivalent.

a) $F_1 \leftrightarrow F_3$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & 2 \\ \lambda & -2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

b) $F_2 \leftarrow F_2 - F_1$, $F_3 \leftarrow F_3 - 2F_1$, $F_4 \leftarrow F_4 - \lambda F_1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 2\lambda - 2 & 2+\lambda & 1-3\lambda \end{array}\right)$$

c) $F_3 \leftrightarrow F_2$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2\lambda - 2 & 2+\lambda & 1-3\lambda \end{array}\right)$$

d) $F_3 \leftarrow F_3 - 4F_2$, $F_4 \leftarrow F_4 - (2\lambda - 2)F_2$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -6 & 17 \\ 0 & 0 & 4-\lambda & 5\lambda - 7 \end{array}\right)$$

e) $F_4 \leftarrow 6F_4 + (4-\lambda)F_3$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -6 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 13\lambda + 26 \end{array}\right)$$

El rang de la matriu associada és 3, i el de l'ampliada serà 3 si i només si $13\lambda - 26 = 0$, és a dir, si $\lambda = -2$. Per tant, si $\lambda = -2$ el sistema és compatible determinat, ja que té 3 incògnites, altrament el sistema és incompatible, doncs el rang de l'ampliada serà 4.

Podem arribar al mateix d'una altra manera: com que el rang de la matriu associada és 3, en cas que el sistema sigui compatible serà compatible determinat. De la tercera equació és treu que $z = -17/6$. Substituint a la quarta equació surt que, perquè sigui compatible, és necessari que $(4-\lambda)(-17/6) = 5\lambda - 7 \Leftrightarrow 17\lambda - 4 \cdot 17 = 30\lambda - 42 \Leftrightarrow 13\lambda = -26 \Leftrightarrow \lambda = -2$. Per tant el sistema és SCD si $\lambda = -2$ i incompatible altrament.

V. Una comprovació és substituir per diferents valors de λ i comprovar que el resultat és l'esperat.

1.14 I. La dada és una matriu quadrada i cal donar el seu determinant, és a dir, un número que té associat.

II. En aquest problema apareixen un nou concepte, el de determinant. Sigui $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- El *menor associat a l'element* a_{ij} és la matriu A_{ij} obtinguda en eliminar la fila i i la columna j de la matriu A. El menor A_{ij} és una matriu quadrada de tipus $(n-1)\times(n-1)$.
- El *determinant d'A* es defineix recursivament com
  - si $n = 1$, aleshores $\det(A) = a_{11}$,
  - si $n \geq 2$, aleshores

$$\begin{aligned}\det(A) &= a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + \cdots + \\ &\quad (-1)^{1+k}a_{1k}\det(A_{1k}) + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}\det(A_{1n}) = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}(-1)^{1+k}\det(A_{1k}).\end{aligned}$$

  Direm que calculem el determinant desenvolupant per la primera fila.
- Fixats $i, j \in [n]$, hi ha un resultat que diu:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k}\det(A_{ik}) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}(-1)^{k+j}\det(A_{kj}).$$

  És a dir, el determinant el podem obtenir desenvolupant per qualsevol fila o columna.
- El determinant d'una matriu $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ que s'obté d'A mitjançant transformacions elementals es pot donar en funció del determinant d'A. Si B és la matriu que s'obté d'A
  - intercanviant dues files, aleshores $\det(B) = -\det(A)$
  - multiplicant la fila i-èsima d'A per λ, aleshores $\det(B) = \lambda\det(A)$
  - sumant-li a una fila un múltiple d'una altra, aleshores $\det(B) = \det(A)$

(Transparències: 34 – 37)

III. En general, calcular el determinant de matrius grans (ordre≥ 4) és una feina molt pesada. Com que al sumar a una fila una altra fila multiplicada per un escalar el determinant no canvia, l'estratègia consistirà a posar el major nombre de 0's a una columna, i desenvolupar a partir d'aquí. Tindrem en compte que els determinants d'ordre 2 o 3 es poden calcular directament a partir de les fórmules de la transparència 36.

(Transparències: 35 – 37)

IV. Com que a la primera columna ja tenim 2 zeros, aconseguim un altre zero i després desenvolupem per aquesta columna.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 16 & 10 & 0 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & -2 & -5 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 16 & 10 & 0 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} (-1)^{1+1}\,1 \begin{vmatrix} -2 & -5 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 16 & 10 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{(3)}{=} \begin{vmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 16 & 10 & 0 \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} (-1)^{3+2}\,10 \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Veiem que hem fet a cada pas

(1) $F_2 \leftarrow F_2 - F_1$.

(2) Desenvolupem per la primera columna.

(3) $F_1 \leftarrow F_1 + 1/2F_3$.

(4) Desenvolupem per la segona columna.

V. Revisar les operacions o bé calcular el determinant desenvolupant per una altra fila o columna.

1.15 I. Igual que l'exercici 1.14.

II. Igual que l'exercici 1.14.

III. Igual que l'exercici 1.14.

IV. Com que a la tercera columna ja hi ha 3 zeros, aconseguim un altre zero i després desenvolupament per aquesta columna.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 0 & -4 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} (-1)^{2+3}\,2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & -4 & -2 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{(3)}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -10 & 0 & 6 \\ 0 & -7 & 2 & 4 \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} -2(-1)^{1+1}1 \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -10 & 0 & 6 \\ -7 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -2(0+20-42-0-24+40) = 12$$

Veiem que hem fet a cada pas.

(1) $F_4 \leftarrow F_4 - 2F_2$.

(2) Desenvolupem per la tercera columna.

(3) $F_3 \leftarrow F_3 - 4F_1$, $F_4 \leftarrow F_4 - 3F_1$.

(4) Desenvolupem per la primera columna.

V. Per comprovar el resultat, es poden repasar els càlculs o calcular el determinant desenvolupant per una altra fila o columna.

1.16 I. La dada és una matriu, i cal donar el seu rang, però s'ha de fer servir el mètode dels determinants.

II. Per fer aquest exercici caldrà fer determinants, que s'explica a l'exercici 1.14.

A més, el rang d'una matriu A és exactament el rang de la submatriu quadrada més gran que tingui determinant diferent de 0.

(Transparències: 38)

III. L'estratègia consistirà a considerar totes les submatrius d'ordre r, r menor o igual que l'ordre de la matriu. Començarem per l'ordre màxim. Si alguna de les matrius té determinant diferent de 0, podem dir que la matriu té rang r, sinó repetim el procés per $r-1$. Aquest procediment pot ser molt llarg si la matriu no té rang màxim. Per tant, si la matriu té ordre ≥ 4 és més pràctic trobar el rang a partir de la matriu escalonada equivalent, com hem fet a l'exercici 1.3.

IV. Primer calculem el determinant de l'única submatriu de rang 3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 - 24 + 10 + 0 - 6 = -19 \neq 0$$

Per tant, la matriu té rang 3 i hem acabat.

V. Per comprovar el resultat, podem escalonar la matriu i veure que, efectivament, el resultat és el mateix.

1.17 I. El mateix que l'exercici 1.16.

II. El mateix que l'exercici 1.16.

III. El mateix que l'exercici 1.16.

IV. Primer considerem l'única submatriu d'ordre 4 i calculem el seu determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} (-1)^{1+2}\, 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -(0 - 4 + 0 - 0 - 4 + 8) = 0$$

(1) $F_3 \leftarrow F_3 - F_1$, $F_4 \leftarrow F_4 - F_1$.

(2) Desenvolupem per la segona columna.

Podem concloure que la matriu no té rang 4. Ara hem de considerar les submatrius quadrades d'ordre 3. La primera que considerem la obtenim eliminant la primera fila i la primera columna.

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0 + 8 + 6 - 4 - 0 - 10 = 0.$$

Com que té determinant 0, considerem una altra submatriu d'ordre 3, per exemple, la obtinguda eliminant la primera columna i la segona fila.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 4 + 6 - 2 - 12 - 10 = -4.$$

Per tant, la matriu de l'enunciat té rang 3. Observem que, si la matriu tingués rang 2, haguéssim hagut de fer 16 determinants d'ordre 3 per saber-ho.

V. Igual que l'exercici 1.16.

1.18 I. Ens donen una matriu, i cal dir si és invertible (i fer-ho usant determinants).

II. Els conceptes que ens calen són els que han sortit a l'exercici 1.4 i a l'exercici 1.16.

III. Com ja sabem, una matriu és invertible si i només si es quadrada i té rang màxim. Per tant només cal fer el determinant de la matriu, i serà invertible si el resultat és diferent de 0.

IV. Calculem el determinant.

$$\begin{vmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 0 + 36 + 27 - 60 = 18$$

Per tant la matriu de l'enunciat és invertible.

V. Es pot comprovar que té rang 3 trobant una matriu escalonada equivalent.

1.19 I. Igual que l'exercici 1.18.

II. Igual que l'exercici 1.18.

III. Igual que l'exercici 1.18.

IV. Calculem del determinant de la matriu.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} (-1)^{1+1}\, 1 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 4 + 0 + 4 - 4 - 0 = 0$$

(1) $F_2 \leftarrow F_2 - F_1$, $F_3 \leftarrow F_3 - F_1$.

(2) Desenvolupem per la primera columna.

Per tant la matriu de l'enunciat no és invertible.

V. Igual que l'exercici 1.18.

2. Espais vectorials

2.1

I. En aquest problema les dades són tres vectors de $\mathbb{R}^4$ i cal dir si el primer vector es pot expressar com a combinació lineal dels altres dos.

II. Es diu que un vector v és *combinació lineal* d'un conjunt de vectors $\{u_1, \ldots, u_n\}$ si existeixen uns escalars $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tals que $v = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$.

(Transparències: 47)

III. Per saber si u és combinació lineal de $\{v, w\}$ cal veure si l'equació $u = \lambda_1 v + \lambda_2 w$ té alguna solució. Com que u, v, w són vectors de $\mathbb{R}^4$, l'equació és de fet un sistema de 4 equacions i dues incògnites (una equació per cada component). Més concretament, la matriu ampliada del sistema estarà formada pels vectors del conjunt posats com a columnes i per vector de termes independents el vector u posat com a columna. Si aquest sistema és compatible, llavors u és combinació lineal de v i w, i si és incompatible llavors no és combinació lineal. Com que en cas afirmatiu ens demanen els valors de λ_1 i λ_2, si el sistema és compatible cal resoldre'l.

Ens caldrà saber per tant determinar si un sistema d'equacions lineals és compatible o no, i si ho és, saber resoldre'l. Podem recordar com es fa repassant, per exemple, els exercicis 1.6 i 1.9.

IV. Plantegem l'equació $\lambda_1 v + \lambda_2 w = u$, és a dir

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -41 \\ 35 \\ -9 \end{pmatrix}$$

d'on, igualant component a component, surt el sistema d'equacions lineals següent, que té λ_1 i λ_2 com a variables.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + 4\lambda_2 & = & 13 \\ 3\lambda_1 - 4\lambda_2 & = & -41 \\ -5\lambda_1 & = & 35 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 & = & -9 \end{array} \right.$$

Si existeixen λ_1, λ_2 que satisfan el sistema, llavors el vector u serà combinació lineal de v i w. Aquest sistema té matriu ampliada

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 13 \\ 3 & -4 & -41 \\ -5 & 0 & 35 \\ 2 & 1 & -9 \end{array} \right).$$

Fent càlculs, es veu que aquest sistema és compatible determinat, per tant u és combinació lineal de v i w.

Resolent el sistema obtenim les solucions $\lambda_1 = -7, \lambda_2 = 5$, per tant $u = -7v + 5w$.

V. Per comprovar que efectivament és combinació lineal, fem les operacions $-7v + 5w$ i comprovem que donen u.

2.2 I. En aquest exercici les dades són 3 vectors de $\mathbb{R}^3$ i cal provar que tot vector de $\mathbb{R}^3$ es pot expressar com a combinació lineal d'aquests vectors.

II. Els mateixos que a l'exercici 2.1.

III. Un vector de $\mathbb{R}^3$ és de la forma (x, y, z), amb $x, y, z \in \mathbb{R}$; per tant, serà suficient demostrar que, fixat (x, y, z), el sistema que resulta de l'equació $(x, y, z) = \lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w$ és sempre compatible.

IV. La matriu ampliada del sistema plantejat és

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & x \\ 2 & 0 & -2 & y \\ 3 & 1 & 4 & z \end{array}\right).$$

El sistema serà compatible, per a tot x, y, z, si la matriu associada i l'ampliada tenen el mateix rang. Fent càlculs, es veu que el rang de la matriu associada és 3, i com l'ampliada té rang com a molt 3 (ja que és del tipus 3×4), totes dues tenen el mateix rang. Per tant, per a tot x, y, z, el sistema és compatible.

V. A part de repassar els càlculs, si es vol comprovar la solució, es poden agafar vectors de $\mathbb{R}^3$ aleatòriament i comprovar que efectivament són combinació lineal de u, v, w.

2.3 I. En aquest exercici ens donen 5 polinomis sobre $\mathbb{R}$ i cal dir si el cinquè es pot escriure com a combinació lineal dels quatre primers polinomis.

II. Els conceptes necessaris són els de l'exercici 2.1.

III. Tot i que pugui semblar diferent, els polinomis sobre $\mathbb{R}$ es comporten exactament igual que els vectors sobre $\mathbb{R}$. Recordem que dos polinomis són iguals si i només si són iguals tots els termes, es a dir, si per a tot i, el coeficient del terme de grau i és igual per als dos polinomis. Per tant caldrà plantejar el sistema resultant de $p_5(x) = \lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) + \lambda_3 p_3(x) + \lambda_4 p_4(x)$.

Com els polinomis són de grau 3, cal igualar 4 termes (el terme de grau 0 també compta). Per tant tindrem 4 equacions i 4 variables.

IV. L'equació que s'ha de satisfer és

$$\lambda_1(1 - x^2) + \lambda_2(1 + x + x^2) + \lambda_3(x + x^2 + x^3) + \lambda_4(x + 2x^2) = 3x + 5x^2 + x^3, \tag{3.1}$$

per alguns reals $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$. Igualant terme a terme els dos costats de l'equació, s'obté el sistema següent.

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \text{ (termes de grau 0)} \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 & = & 3 \text{ (termes de grau 1)} \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 & = & 5 \text{ (termes de grau 2)} \\ \lambda_3 & = & 1 \text{ (termes de grau 3)} \end{array}\right.$$

la matriu associada del qual és

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

El sistema és compatible indeterminat, i la solució en forma paramètrica és

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 \in \mathbb{R}.$$

Per tant el polinomi $p_5(x) = 3x + 5x^2 + x^3$ es pot posar d'infinites maneres com a combinació lineal dels altres polinomis (obtindrem una manera per a cada valor de λ_4).

V. Per comprovar que és combinació lineal, n'hi ha prou amb donar un valor a λ_4, obtenir els altres escalars, substituir-los a l'equació (3.1) i veure que la igualtat es satisfà. Per a comprovar que hi ha infinites solucions, cal assegurar-se que el sistema sigui efectivament indeterminat, per tant, caldria repassar els càlculs.

2.4 I. En aquest exercici ens donen 3 matrius 2×2 sobre $\mathbb{R}$ i cal dir si una és combinació lineal de les altres dues.

II. En aquest exercici apareix el concepte de *subespai generat* per un conjunt. El *subespai generat* per $u_1, \dots u_n$, denotat per $\langle u_1, \dots, u_n \rangle$, és el conjunt de vectors que són combinació lineal de $u_1, \dots u_n$. Si $S = \langle u_1, \dots, u_n \rangle$, al conjunt $\{u_1, \dots, u_n\}$ l'anomenem *conjunt generador de S*.

(Transparències: 48)

Els conceptes de combinació lineal apareixen a l'exercici 2.1.

III. La tercera matriu pertany al subespai generat per les altres dues si i només si és combinació lineal d'elles. Aquest problema torna a ser el mateix que el de dir si un vector és combinació lineal d'uns altres. Per tant podem plantejar el sistema corresponent a l'igualtat

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

que té solució si i només si la primera matriu és combinació lineal de les altres.

IV. Com que dos matrius són iguals si i solament si són del mateix tipus i tots els elements són iguals posició a posició, de l'equació anterior s'obté el sistema següent.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2\lambda_2 & = & 1 \text{ (1a fila, 1a columna)} \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = & 1 \text{ (1a fila, 2a columna)} \\ 2\lambda_1 & = & 1 \text{ (2a fila, 1a columna)} \\ -\lambda_1 - \lambda_2 & = & 1 \text{ (2a fila, 2a columna)} \end{array} \right.$$

La matriu ampliada del sistema és

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Atès que la matriu associada té rang 2 i la matriu ampliada té rang 3, el sistema és incompatible. Per tant la primera matriu no és combinació lineal de les altres dues.

V. Per comprovar el resultat cal comprovar que el sistema està ben plantejat i que s'ha resolt correctament revisant els càlculs.

2.5 I. En aquest problema les dades són dos espais vectorials, un és $\mathbb{R}^4$ i l'altre un subespai de $\mathbb{R}^4$ generat per 4 vectors. Cal demostrar que els dos espais vectorials donats són el mateix.

II. Els mateixos que a l'exercici 2.4.

III. Recordem que dos conjunts S_1, S_2 són iguals si i només si $S_1 \subseteq S_2$ i $S_2 \subseteq S_1$. Per tant caldrà provar que $\mathbb{R}^4 \subseteq S$ i $S \subseteq \mathbb{R}^4$.

IV. $S \subseteq \mathbb{R}^4$, és evident ja que qualsevol combinació lineal dels vectors generadors de S és un vector de $\mathbb{R}^4$.
Ara veiem que $\mathbb{R}^4 \subseteq S$. Això és equivalent a provar que qualsevol vector de $\mathbb{R}^4$ es pot expressar com a combinació lineal dels vectors generadors de S, és a dir, que el sistema amb matriu ampliada

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & x \\ 0 & 8 & 1 & 1 & y \\ 1 & 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 & 5 & t \end{array}\right)$$

és compatible independentment del valor de x, y, z, t. Aleshores, n'hi ha prou en comprovar que la matriu associada té rang 4, doncs en aquest cas també serà el rang de la matriu ampliada per ser aquesta una matriu tipus 4×5. Escalonant o calculant determinants, obtenim efectivament que

$$rang \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 4.$$

V. Per comprovar els resultats es poden repassar els càlculs.

2.6 I. En aquest exercici ens donen un conjunt de vectors i cal dir si és linealment independent.

II. En aquest problema apareix un nou concepte: la *independència lineal*. Es diu que $S = \{u_1, \dots u_n\}$, un conjunt finit d'elements d'un espai vectorial, és *linealment independent* si l'equació $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_E$, (on les variables són les λ_i) té una única solució (i aquesta és $\lambda_1 = \lambda_2 \cdots = \lambda_n = 0$). Així mateix, es diu que un conjunt és *linealment dependent* si no és linealment independent, és a dir, si hi ha una solució de l'equació en la que algun escalar λ_i no és igual a zero. La definició de conjunt linealment dependent és equivalent a dir que almenys un dels seus vectors es pot expressar com a combinació lineal dels altres.

(Transparències: 51,55)

III. Com que el sistema que surt de plantejar

$$\lambda_1(1,2,1,0)+\lambda_2(1,0,1,1)+\lambda_3(1,6,1,-2)=(0,0,0,0)$$

és homogeni, sempre hi ha com a mínim una solució. Hi haurà només una solució si el sistema és compatible determinat, i el sistema serà compatible determinat si i sols si $rang A=3$, on A és la matriu associada al sistema i 3 el número de vectors.

Per tant cal obtenir la matriu associada al sistema i veure si el seu rang és igual al número de vectors.

El plantejament que seguim aquí és el que s'explicita a la transparència 53.

IV. La matriu associada és

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{que és equivalent a la matriu escalonada} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant, el rang és 2 i el conjunt no és linealment independent.

V. Per comprovar es pot acabar de resoldre el sistema i es veu que, per exemple, $\lambda_1=-3$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=1$ és una solució del sistema. Per tant $-3(1,2,1,0)+2(1,0,1,1)+(1,6,1,-2)=(0,0,0,0)$, el que demostra que el conjunt és linealment dependent.

2.7 I. La dada és un conjunt de tres matrius de tipus 2×3 i cal dir si és linealment independent.

II. Els conceptes de teoria són els mateixos que els de l'exercici 2.6.

III. Torna a ser el mateix que a l'exercici 2.6 (fent servir el tractament de matrius explicat a l'exercici 2.4) i seguint l'estratègia explicitada a la transparència 53: es considera el sistema que surt de l'equació

$$\lambda_1\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i s'estudia si és compatible determinat o indeterminat.

IV. La matriu associada al sistema és

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Escalonant o calculant determinants, es comprova que la matriu té rang 3 i, com que el sistema homogeni té 3 incògnites, aquest és compatible determinat. Aleshores el conjunt és linealment independent.

V. Per comprovar que el resultat és el correcte, es poden repassar els càlculs.

2.8 I. La dada és un conjunt de quatre matrius de tipus 2×2 i cal dir si és linealment independent.

II. Els conceptes de teoria són els mateixos que els de l'exercici 2.6.

III. Ens demanen exactament el mateix que a l'exercici 2.7. Es considera el sistema homogeni que surt de l'equació

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i s'estudia si és compatible determinat o indeterminat.

IV. La matriu associada al sistema és

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Veiem que la quarta fila és igual a la primera, i que permutant la segona fila amb la tercera queda un sistema escalonat amb 3 files no nul·les. La matriu té rang 3, però hi ha 4 incògnites, així que el sistema és compatible indeterminat i els vectors són linealment dependents.

V. Per comprovar que el resultat és el correcte, es pot acabar de solucionar el sistema i obtenir una solució diferent de la trivial. Amb $\lambda_4 = 1$, fent substitució cap amunt, surt la solució $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = -1/2, \lambda_3 = -4, \lambda_4 = 1$, i efectivament amb aquests valors tenim la igualtat

$$9 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.9 I. La dada és un conjunt de quatre polinomis sobre els reals i cal dir si són linealment independents.

II. Els mateixos conceptes que a l'exercici 2.6.

III. Com a l'exercici 2.6 i a la transparència 54, fent servir el tractament de polinomis com vectors explicat a l'exercici 2.3, considerem el sistema homogeni obtingut de l'equació

$$\lambda_1(3 + x^4) + \lambda_2(5 - x - x^2) + \lambda_3(2x^3) + \lambda_4(x + 2x^4) = 0$$

on els λ_i's són les incògnites, i esbrinem si és compatible determinat o indeterminat.

IV. La matriu associada al sistema és

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculant trobem que aquesta matriu té rang 4. El sistema homogeni té 4 incògnites. Per tant el sistema és compatible determinat i els polinomis són linealment independents.

V. Només es poden repassar els càlculs.

2.10 I. En aquest problema les dades són 3 combinacions lineals dels vectors a, b i c, i cal demostrar que són linealment independents, sabent que a, b i c ho són.

II. Els conceptes de teoria necessaris són els mateixos que els de l'exercici 2.6.

III. El procediment a seguir serà considerar l'equació $\lambda_1(a+2b+3c)+\lambda_2(2a-b+4c)+\lambda_3 5c = 0_E$, on les variables són $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, i veure que l'única solució és la trivial.

IV. Reorganitzant els termes de l'equació anterior aconseguim arribar a la següent

$$(\lambda_1 + 2\lambda_2)a + (2\lambda_1 - \lambda_2)b + (3\lambda_1 + 4\lambda_2 + 5\lambda_3)c = 0_E.$$

Això, però, és una combinació lineal de a, b i c que dóna 0_E. Sabem que els vectors són linealment independents i, per tant, la igualtat només es compleix si tots els escalars són iguals a 0. Imposant aquesta condició obtenim un nou sistema homogeni que tindrà matriu associada

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Fent càlculs arribem a que aquest sistema homogeni és compatible determinat i, per tant, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Aleshores els 3 vectors són linealment independents.

V. Només es poden repassar els càlculs.

2.11 I. En aquest problema les dades són dos subespais vectorials de $\mathbb{R}^4$ definits per generadors i cal veure que són iguals.

II. Els mateixos que a l'exercici 2.4.

III. El plantejament és similar al de l'exercici 2.5. Per veure que $S_1 \subseteq S_2$, si $S_1 = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$, és suficient veure que $f_i \in S_2, 1 \leq i \leq n$, és a dir, que tot vector del conjunt generador de S_1 és combinació lineal dels vectors generadors de S_2. I anàlogament per veure que $S_2 \subseteq S_1$.

IV. Veiem primer que $S_1 \subseteq S_2$. Per a cada vector $f_i = (x_i, y_i, z_i, t_i)$ del conjunt generador de S_1 caldrà veure que l'equació

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ t_i \end{pmatrix}$$

té solució. Això serà equivalent a que tots el sistemes amb les següents matrius ampliades siguin compatibles (cada sistema correspon a agafar com a terme independent un dels tres vectors generadors de S_1)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

Escalonant, per exemple, comprovem que tots són sistemes compatibles determinats. Per tant $S_1 \subseteq S_2$.

Ara, per veure que $S_2 \subseteq S_1$, procedim com en el cas anterior i mirem si els vectors generadors de S_2 són combinació lineal dels vectors generadors de S_1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Aquests sistemes són tots compatibles determinats, i per tant $S_2 \subseteq S_1$, acabant la demostració.

V. Per comprovar el resultat, es poden repassar càlculs, i també, si es disposa de temps, generar aleatòriament vectors de S_1 i de S_2 i comprovar que pertanyen a S_2 i a S_1, respectivament.

2.12 I. La dada és un subespai vectorial expressat com les solucions d'un sistema homogeni i cal donar el subespai expressat com a subespai generat.

II. Per fer aquest exercici, caldrà recordar els conceptes apareguts a l'exercici 2.4. A més cal saber que les solucions d'un sistema d'equacions lineals formen un subespai vectorial si i només si el sistema és homogeni.

III. Per trobar els generadors caldrà resoldre el sistema homogeni. Els vectors que apareixen a la solució paramètrica formen un conjunt generadors de l'espai vectorial. Aquest conjunt no és únic.

IV. Primer, trobem la matriu associada al sistema

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 7 \\ 6 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un sistema escalonat equivalent té per matriu associada

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 7 \\ 0 & -8 & -5 & -14 \end{pmatrix}.$$

La solució del sistema en forma paramètrica és

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 5/6 \\ -5/8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -7/4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3, x_4 \in \mathbb{R}.$$

Per tant, un conjunt de generadors del subespai és $\{(5/6, -5/8, 1, 0), (0, -7/4, 0, 1)\}$, ja que tot vector del susbespai (és a dir, tota solució del sistema) es pot posar com a combinació d'aquests dos vectors.

V. Per comprovar que el resultat és correcte cal veure que tots els vectors generadors satisfan el sistema homogeni.

2.13 I. La dada és un subespai vectorial definit per un conjunt de generadors i cal expressar-lo com a solucions d'un sistema d'equacions homogeni.

II. Els conceptes necessaris són els mateixos que als exercicis 2.4 i 2.12.

III. Per trobar el sistema, caldrà imposar que un vector genèric $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ sigui combinació lineal de $(1, -1, 0, 0)$, $(1, 0, -1, 0)$ i $(1, 0, 0, -1)$, és a dir, que el sistema obtingut a partir de l'equació

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

sigui compatible. Per tant serà necessari saber discutir sistemes en funció de paràmetres (com a l'exercici 1.12).

IV. La matriu ampliada del sistema és

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ -1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & -1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & -1 & x_4 \end{array}\right).$$

La matriu ampliada d'un sistema escalonat equivalent és

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & -1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & -1 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \end{array}\right).$$

Per tant, podem dir que aquest sistema serà compatible si i només si el rang de la matriu associada (que és 3) és igual al de l'ampliada, es a dir, si $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Aquesta és, per tant, la relació que han de satisfer les components d'un vector per tal de pertànyer al subespai generat pels vectors donats, és a dir,

$$\langle (1, -1, 0, 0), (1, 0, -1, 0), (1, 0, 0, -1) \rangle = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}.$$

V. Per comprovar el resultat cal veure que els vectors generadors del subespai satisfan la relació.

2.14 I. En aquest exercici la dada és un polinomi, un vector de $\mathbb{R}_4[x]$, i cal trobar les seves coordenades en la base canònica.

II. Recordem primer les definicions dels nous conceptes que apareixen en aquest exercici. Un conjunt de vectors B és una *base* d'un espai vectorial E si és un conjunt de vectors linealment independents i genera E. Un espai vectorial pot tenir moltes bases (infinites si el cos és $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{C}$, i un nombre finit si el cos és finit) però n'hi ha una a la qual se l'anomena base canònica. En el cas de l'espai de polinomis $\mathbb{K}_d[x]$ la base que prenem com a canònica és $C = \{1, x, \ldots, x^d\}$.

L'altre concepte és el de *vector de coordenades* d'un vector en una base (o com direm sovint, simplement *les coordenades* d'un vector en una base). Siguin $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ una base d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial E i $v \in E$ un vector. Si $v = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n$, anomenem *vector de coordenades de v en la base B* al vector $v_B = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Aquesta expressió és única i permet, entre altres coses, tractar elements de qualsevol espai vectorial de dimensió finita (ja siguin polinomis, matrius, ...) exactament igual que n-ples de $\mathbb{K}^n$.

(Transparències: 56 i 57)

III. Per trobar les coordenades cal resoldre la igualtat $p(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 + \alpha_5 x^4$.

IV. Per la igualtat de polinomis tenim que $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -2$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = 1$ i $\alpha_5 = 0$. Les coordenades de $p(x)$ en la base canònica C són

$$p(x)_C = (1, -2, 0, 1, 0).$$

V. Per comprovar que no ens hem equivocat només cal repassar que ho haguem transcrit bé.

2.15 I. En aquest exercici la dada és una matriu, un vector de $\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$, i cal trobar les seves coordenades en la base canònica.

II. Apareixen el mateixos conceptes que a l'exercici 2.14.

En l'espai de matrius $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ prenem com a base canònica C el conjunt

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \ldots \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

III. Per trobar les coordenades cal resoldre la igualtat

$$A = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_5 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_6 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

IV. Multipliquem els escalars i sumem les matrius de la dreta de la igualtat i, per la igualtat de matrius, tenim que $\alpha_1 =$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = 2$ i $\alpha_5 = -1$ i $\alpha_6 = 0$. Les coordenades d'A en la base canònica C són

$$A_C = (1, 2, 0, 2, -1, 0).$$

V. Per comprovar que no ens hem equivocat només cal repassar les operacions.

2.16 I. En aquest exercici la dada és un conjunt de vectors i cal demostrar que és una base.

II. El concepte de *base* d'un espai vectorial apareix a l'exercici 2.14.

III. Per veure que el conjunt de vectors és una base cal comprovar dues coses: el conjunt és linealment independent i genera $\mathbb{R}^3$. Caldrà tenir present com es comprova si un conjunt de vectors és linealment independent, tal com hem fet al exercici 2.6. També hem vist ja, per exemple a l'exercici 2.2, com comprovar si un conjunt de vectors genera $\mathbb{R}^n$.

IV. Primer comprovem que és un conjunt linealment independent. Això és equivalent a dir que el rang de al matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

és 3. Comprovem que efectivament el rang és 3; en aquest cas potser el més ràpid és veure que el determinant de la matriu no és zero.

Ara per veure que genera $\mathbb{R}^3$ cal comprovar que tot vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ és pot escriure com a combinació lineal dels elements del conjunt, és a dir, que l'equació

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

té solució. El sistema que se'n dedueix de l'equació anterior té matriu ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 0 & y \\ 1 & 0 & 0 & z \end{array}\right).$$

Aquest sistema és compatible determinat, ja que el rang de la matriu associada és 3 i el de l'ampliada també. Per tant, el conjunt genera $\mathbb{R}^3$.

V. Per comprovar la part de la independència lineal, només podem repassar els càlculs. Per a la part de generació, una opció seria comprovar que podem expressar els vectors de la base canònica $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ com a combinació lineal dels vectors del conjunt.

2.17 I. En aquest exercici les dades són una base i un vector i cal donar les coordenades del vector en aquesta base.

II. Per fer aquest exercici cal saber tots els coneixements explicats a l'exercici 2.14.

III. Una vegada més, cal resoldre un sistema d'equacions lineals.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les coordenades seran precisament $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

IV. Resolent el sistema descrit per l'equació anterior, surt que l'única solució és $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -1$. Per tant $v_B = (3, -1, -1)$, on $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$.

V. Per comprovar el resultat, es pot comprovar que, efectivament,

$$3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.18 I. En aquest exercici la dada és un conjunt de polinomis i cal demostrar que formen una base de $\mathbb{R}_3[x]$.

II. Els mateixos que a l'exercici 2.14. A més cal saber tractar amb polinomis, com hem explicat a l'exercici 2.3.

III. Hem de comprovar que el conjunt de polinomis donat és linealment independent i genera $\mathbb{R}_3[x]$. Fixem-nos que podem ajuntar els dos passos si comprovem que la matriu associada al sistema descrit per l'equació següent

$$\lambda_1(x - 2x^2 + x^3) + \lambda_2(1 + x + 2x^2 - x^3) + \lambda_3(1 + x^3) + \lambda_4(2 + 2x - x^3) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

té rang 4. El motiu és que d'aquesta manera provem que el conjunt és generador, doncs el sistema és compatible independentment dels valors que puguin prendre a_0, a_1, a_2 i a_3, i també veiem que el conjunt de vectors és linealment independent, ja que el sistema és compatible determinat, el que significa que hi ha una única solució per obtenir el polinomi 0.

IV. La matriu associada al sistema és

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Escalonant, es veu que és equivalent a la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

que té rang 4. Per tant, el conjunt és una base.

V. A part de repassar els càlculs, podem comprovar que els quatre vectors de la base canònica de $\mathbb{R}_3[x]$, és a dir, $\{1, x, x^2, x^3\}$, es poden expressar com a combinació lineal dels vectors del conjunt donat.

2.19 I. En aquest exercici les dades són un polinomi i una base de $\mathbb{R}_3[x]$ i cal donar les coordenades d'aquest polinomi en la base.

II. Els mateixos que a l'exercici 2.17.

III. Igual que a l'exercici 2.17. L'equació a resoldre és

$$\lambda_1(x-2x^2+x^3)+\lambda_2(1+x+2x^2-x^3)+\lambda_3(1+x^3)+\lambda_4(2+2x-x^3)=4+2x-x^2+5x^3.$$

IV. La matriu ampliada del sistema és

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right).$$

Aquest sistema té com a solució $\lambda_1 = 15/8, \lambda_2 = 11/8, \lambda_3 = 31/8, \lambda_4 = -5/8$. Per tant les coordenades de $p(x)$ en la base B de l'exercici 2.18 són

$$p(x)_B = (15/8, 11/8, 31/8, -5/8).$$

V. Per comprovar que el resultat és el correcte, es pot veure que efectivament es compleix l'equació pels valors donats.

$$15/8(x-2x^2+x^3)+11/8(1+x+2x^2-x^3)+31/8(1+x^3)-5/8(2+2x-x^3)=4+2x-x^2+5x^3$$

2.20 I. Les dades són un conjunt de matrius tipus 2×2 i cal demostrar que formen una base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

II. Els conceptes són els mateixos que a l'exercici 2.14.

III. Hem de comprovar que el conjunt de matrius és linealment independent i genera $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Seguint la idea de l'exercici 2.18, n'hi ha prou en comprovar que la matriu associada al sistema lineal donat per l'equació

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 0\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}+\lambda_4\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

té rang 4. En aquest cas, el sistema és compatible determinat, així fixats $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ hi haurà una solució única del sistema, el què significarà que el conjunt és generador i, en particular per a $a = b = c = d = 0$ la única solució serà la trivial, el què significarà que el conjunt és linealment independent.

IV. La matriu associada al sistema anterior és

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Escalonant trobem la matriu equivalent

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & -7 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 0 \end{array}\right)$$

que té rang 4.

V. Per comprovar que efectivament es tracta d'una base es pot, per exemple, expressar tots els vectors de la base canònica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ en la nova base. Com es fa això està explicat a l'exercici 2.17.

2.21 I. En aquest exercici la dada és un conjunt de vectors de $\mathbb{R}^3$ depenent de paràmetres i cal donar els valors d'aquests paràmetres que fan que el conjunt sigui una base de $\mathbb{R}^3$.

II. A més dels conceptes que apareixen a l'exercici 2.14, recordem altres resultats per determinar si un conjunt és una base. En un espai vectorial E finitament generat totes les bases tenen el mateix cardinal, aquest cardinal se l'anomena *dimensió* de l'espai i es denota $\dim E$. La dimensió dels espais $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ i $\mathbb{K}_n[x]$ és n, mn i $n+1$, respectivament, per a qualsevol cos $\mathbb{K}$ i n, m enters positius.

Un conjunt linealment independent de cardinal n en un espai de dimensió n és una base. I un conjunt generador de cardinal n en un espai de dimensió n és una base.

(Transparències: 57 i 58)

III. Com que $\mathbb{R}^3$ té dimensió 3 i el conjunt de l'enunciat té tres elements, n'hi ha prou, per exemple, en trobar els valors dels paràmetres per tal que el conjunt sigui linealment independent (exercici 2.6).

IV. Com s'ha vist anteriorment, un conjunt de vectors és linealment independent és equivalent a dir que el rang de la matriu resultat de posar els vectors per columnes és igual al número de vectors, es a dir, en aquest cas

$$rang \begin{pmatrix} a & 0 & 7 \\ 5 & 7 & 0 \\ 1 & -2 & b \end{pmatrix} = 3.$$

Escalonant la matriu, es veu que això es equivalent a imposar que

$$rang \begin{pmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 0 & -17/5 & b \\ 0 & 0 & 7 - 7ab/17 \end{pmatrix} = 3$$

i això serà cert si i només si $ab \neq 17$.

Per tant el conjunt serà base si i només si $ab \neq 17$.

V. Podem repassar els càlculs o cercar els valors dels paràmetres per tal que el conjunt generi $\mathbb{R}^3$. Això últim passa si i només si el sistema amb matriu ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 7 & x \\ 5 & 7 & 0 & y \\ 1 & -2 & b & z \end{array}\right)$$

és compatible, independentment dels valors de x, y i z.

2.22 I. En aquest exercici cal provar que un conjunt d'un espai vectorial, on els elements del conjunt estan expressat com a combinació lineal d'una certa base, és també una base.

II. Els mateixos que als exercicis 2.14 i 2.21.

III. La base B té 4 vectors, per tant la dimensió d'E és 4. Aleshores n'hi ha prou en comprovar que els vectors de B' són linealment independents (vegeu l'exercici 2.6).

IV. Plantegem l'equació

$$\lambda_1(b_1 - b_2 + 2b_3 + b_4) + \lambda_2(b_2 - b_3 + 3b_4) + \lambda_3 b_3 + \lambda_4 b_4 = 0_E.$$

Agrupant ens queda

$$\lambda_1 b_1 + (-\lambda_1 + \lambda_2)b_2 + (2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)b_3 + (\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_4)b_4 = 0_E.$$

Els vectors b_1, b_2, b_3, b_4 són linealment independents ja que formen una base, per tant els coeficients de l'equació anterior han de ser zero, obtenim així el sistema homogeni

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

Fent els càlculs pertinents, es veu que aquest sistema és compatible determinat, és a dir, l'única solució és $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ i per tant B' és una base d'E.

V. Per veure si els vectors de B' són linealment independents n'hi ha prou en comprovar que la matriu que té per columnes els vectors components dels vectors de B' en la base B

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

té rang 4. Observem que justament és la matriu associada al sistema homogeni anterior.

2.23 I. En aquest exercici la dada és un conjunt de vectors, cal donar una base del subespai generat per aquest conjunt i després completar aquesta base fins obtenir-ne una de $\mathbb{R}^4$.

II. En aquest exercici apareix el concepte de base d'un subespai, però com que un subespai és a la vegada també un espai vectorial, els conceptes dels exercicis 2.14 i 2.21 aquí també són aplicables. A més cal recordar que si S és un subespai vectorial generat pels vectors $u_1, \ldots, u_k$ i un vector u_i dels generadors és combinació lineal dels altres aleshores

$$S = \langle u_1, \ldots, u_k \rangle = \langle u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_k \rangle.$$

(Transparències: 54)

És pràctic recordar que, donat S subespai vectorial d'un espai vectorial E, es pot ampliar la base de S afegint-hi elements (no arbitraris) de qualsevol base d'E per obtenir-ne una altra d'E. Si E és $\mathbb{R}^n$ o $\mathcal{M}_n$ o $\mathbb{R}[x]$, el més senzill és ampliar amb vectors de la base canònica. Per comprovar que els vectors afegits són suficients i adequats per obtenir una base d'E, només cal veure que n'hi ha tants al nou conjunt com la dimensió d'E i que aquest conjunt és linealment independent.

III. Per obtenir la base del subespai generat, cal eliminar els vectors del conjunt que es puguin expressar com a combinació lineal dels altres vectors, d'aquesta manera tenim que el conjunt genera el subespai i a més és linealment independent. Per fer això posem els vectors del conjunt per columnes en una matriu, i escalonem aquesta matriu. Els vectors corresponents a les columnes on hi ha els uns dominants (pivots) són un subconjunt linealment independent, el més gran possible. Aquests subconjunts són una base del subespai i per tant el rang de la matriu és la dimensió del subespai.

(Transparències: 52)

IV. La matriu a escalonar és la resultant de posar els vectors en columna.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aplicant transformacions elementals obtenim la matriu equivalent següent.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, una base és $\{(1,2,3,1),(3,2,1,0),(1,0,2,0)\}$ i la dimensió del susbespai és 3.

Per completar la base, és evident que el vector $(0,0,0,1)$ és independent als de la base, ja que a l'afegir-lo als 3 primers, la matriu resultant

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ fent transformacions elementals per files, és equivalent a } \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que té rang 4. Per tant, $\{(1,2,3,1),(3,2,1,0),(1,0,2,0),(0,0,0,1)\}$ és una base de $\mathbb{R}^4$.

V. Per comprovar que els resultats són correctes, es pot verificar que el quart vector donat a l'enunciat és combinació dels 3 primers, i que aquests són linealment independents. Es pot comprovar que efectivament la nova base és una base de $\mathbb{R}^4$ tal com hem indicat a l'exercici 2.16.

2.24 I. En aquest exercici la dada que s'ens dóna és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^4$. Cal donar una base i la dimensió d'aquest subespai, i una base de $\mathbb{R}^4$ que contingui la base del subespai.

II. Els conceptes de teoria que apareixen són els dels exercicis 2.14, 2.21 i 2.23.

III. Primer , obtenim uns vectors generadors i comprovarem que són linealment independents. El nombre d'aquests vectors és la dimensió del subespai. Després afegirem vectors de la base canònica per completar la base i aconseguir-ne una de $\mathbb{R}^4$.

IV. Per a cada $(x,y,z,t) \in S$ hi ha dos escalars s,t tals que

$$(x,y,z,t) = (s+4t, t, s, 2s-t) = s(1,0,1,2) + t(4,1,0,-1).$$

Aleshores $S = \langle (1,0,1,2),(4,1,0,-1)\rangle$. Ara cal veure que aquests dos vectors són linealment independents, procedint com a l'exercici 2.6. La matriu dels vectors col.locats en columna

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{és equivalent a la matriu} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que té rang 2, per tant els vectors són linealment independents. El conjunt $\{(1,0,1,2),(4,1,0,-1)\}$ és una base de S i, com té dos elements, S té dimensió 2.

Com que la dimensió de $\mathbb{R}^4$ és 4, per completar la base fins obtenir-ne una de $\mathbb{R}^4$ cal afegir dos vectors, per exemple dos de la base canònica, però no qualssevol dos, doncs cal que el conjunt resultant sigui linealment independent. Triem $(0,0,1,0)$ i $(0,0,0,1)$ i comprovem que el conjunt és linealment independent. Posem els vectors en columna i obtenim la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que és equivalent, mitjançant transformacions elementals, a la matriu I_4. Així, el conjunt $\{(1,0,1,2),(4,1,0,-1),(1,0,0,0),(0,0,0,1)\}$ és independent i és una base de $\mathbb{R}^4$.

V. Per comprovar que tenim una base de S cal repassar els càlculs. Per comprovar que és una base de $\mathbb{R}^4$, cal veure que tots els vectors de la base canònica es poden expressar com a combinació lineal de vectors de la base nova.

2.25 I. En aquest exercici les dades són un subespai vectorial expressat com al conjunt de solucions d'un sistema d'equacions lineals. Cal donar-ne una base i després ampliar-la fins obtenir-ne una de $\mathbb{R}^4$.

II. Els conceptes necessaris són els que apareixen als exercicis 2.14, 2.21 i 2.23.

III. Resoldrem el sistema per obtenir un conjunt generador de R i comprovarem que el conjunt també és linealment independent. Després completarem la base afegint-hi vectors de la base canònica i comprovarem que és una base de $\mathbb{R}^4$.

IV. Primer cal trobar un conjunt generador de S mitjançant la resolució del sistema, com ho vam fer a 2.12. La matriu associada al sistema és

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les solucions del sistema es poden expressar com segueix

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z, t \in \mathbb{R}.$$

Així, un conjunt generador és $\{(-2,1,1,0),(-1,-1,0,1)\}$. Aquest conjunt també és linealment independent ja que cap vector és pot posar en combinació lineal de l'altre. Per tant, $\{(-2,1,1,0),(-1,-1,0,1)\}$ és una base de R i la dimensió de R és 2.

Completem la base afegint-hi els dos primers vectors de la base canònica. El conjunt resultant $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(-2,1,1,0),(-1,-1,0,1)\}$ és linealment independent, doncs la matriu que s'obté posant els vectors en columna

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

és una matriu escalonada amb uns a la diagonal, per tant invertible i de rang 4. (També podríem dir que el rang de la matriu és 4 ja que té determinant 1.) Com que la dimensió de $\mathbb{R}^4$ és 4, aquest conjunt és una base de $\mathbb{R}^4$.

V. Per comprovar que el resultat és correcte, cal comprovar que la dimensió del subespai vectorial R coincideix amb l'esperada (4− el rang de la matriu associada al sistema), i que tots dos vectors generadors pertanyen a R. Per comprovar que la base ampliada és base de $\mathbb{R}^4$, n'hi ha prou en comprovar que els vectors de la base canònica es poden expressar com a combinació lineal dels vectors de la base nova.

2.26 I. Les dades són dos subespais vectorials i cal donar una base i la dimensió de l'intersecció d'aquests dos subespais.

II. En aquest exercici, apareixen els conceptes de base i dimensió d'un subespai, explicats a 2.14 i 2.21. A més, apareix la *intersecció de dos subespais vectorials*, que és exactament la intersecció entre conjunts, però té la peculiaritat que l'intersecció de dos subespais vectorials és també un subespai vectorial. (Transparències: 47)

III. Si els subespais estan expressats com a solucions d'un sistema d'equacions lineals homogènies resulta fàcil calcular-ne l'intersecció. En aquest cas, només cal ajuntar totes les equacions en un nou sistema, i el conjunt de solucions d'aquest sistema és el conjunt (subespai) intersecció. El procediment de passar de generadors a sistemes es troba a l'exercici 2.13.

IV. Primer expressem S com a solucions d'un sistema d'equacions lineals homogènies. Sigui $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, aquest vector pertany a S si i només si és linealment dependent amb $(1,0,1,2)$ i $(4,1,0,-1)$ (una base de S), es a dir, si la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \\ 2 & -1 & t \end{pmatrix}$$

té rang més petit estrictament que 3. Amb transformacions elementals obtenim la matriu escalonada equivalent

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & x-z-4y \\ 0 & 0 & t-2z+y \end{pmatrix}.$$

El rang de la matriu és 2 si i només si $x - z - 4y = 0$ i $t - 2z + y = 0$, i aquests són les equacions que defineixen S.

Ara ajuntant les equacions que defineixen S amb les que defineixen R obtenim el sistema amb matriu associada

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{que és equivalent a} \quad \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El sistema només té la solució trivial, i per tant la intersecció d'aquests dos subespais és el subespai que només conté l'element neutre de $\mathbb{R}^4$, és a dir, $S \cap R = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.

V. Per veure que la solució és correcta, es pot comprovar que els vectors generadors de S satisfant les equacions que defineixen S i que el rang del sistema és 4 menys la dimensió de S. A més, es pot plantejar el sistema resultant d'igualar un vector genèric de S amb un de R i veure que només té solució quan els vectors són el $0_{\mathbb{R}^4}$.

2.27 I. En aquest exercici les dades són dues bases B i B', una de les quals és la canònica, i cal donar la matriu de canvi de base de B a B' i a l'inrevés.

II. El concepte de base d'un subespai vectorial ha aparegut a l'exercici 2.14. La base que prenem com a canònica a $\mathbb{R}^3$ és $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

Siguin B i B' dos bases d'un mateix espai vectorial E, diem que M és la *matriu del canvi de base de B a B'* si al multiplicar-li per la dreta el vector coordenades de $v \in E$ en la base B posat en columna, v_B, s'obté el vector coordenades del vector v en la base B', $v_{B'}$. Aquesta matriu és única, existeix sempre i es denota per $P^B_{B'}$. Les columnes de $P^B_{B'}$ són les coordenades dels vectors de la base B en la base B'. De forma anàloga es troba la matriu del canvi de base de B' a B, $P^{B'}_B$, però a més $P^{B'}_B$ és la inversa de la matriu $P^B_{B'}$.

(Transparències: 60)

III. Per obtenir la matriu de canvi de base de $P^{B'}_B$, on B' és una base qualsevol i B és la base canònica, només cal trobar les coordenades dels vectors de la base B' en la base canònica, i posar-les per columnes formant una matriu. Una vegada tenim $P^{B'}_B$, trobem $P^B_{B'}$ calculant la inversa de $P^{B'}_B$.

IV. Si denotem per e_1, e_2, e_3 els vectors de la base canònica B, tenim que

$$\begin{array}{rcll} (1,0,1) & = & e_1 + e_3, & \text{així} \quad (1,0,1)_B = (1,0,1), \\ (0,-1,2) & = & -e_2 + 2e_3, & \text{així} \quad (0,-1,2)_B = (0,-1,2), \\ (2,3,-5) & = & 2e_1 + 3e_2 - 5e_3, & \text{així} \quad (2,3,-5)_B = (2,3,-5). \end{array}$$

La matriu del canvi de base de B' a la base canònica és

$$P^{B'}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Per trobar $P_{B'}^{B}$ calculem l'inversa de la matriu anterior (com a l'exercici 1.4) i obtenim

$$P_{B'}^{B} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 3 & -7 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

V. Per comprovar el resultat repassem com hem construït bé $P_{B}^{B'}$ i que $P_{B'}^{B}P_{B}^{B'} = I_3$ o que $P_{B}^{B'}P_{B'}^{B} = I_3$.

2.28 I. En aquest problema les dades són dues bases i cal donar les matrius de canvi d'una base a l'altra.

II. Seran necessaris tots els conceptes de l'exercici 2.27.

III. El mateix que a l'exercici 2.27. Caldrà trobar les coordenades dels vectors d'una base en l'altra i no serà tant immediat com quan una de les bases és la canònica. Recordem el que vam fer a l'exercici 2.17 i ho apliquem a cada vector $b_i \in B$, $1 \leq i \leq 3$, és a dir, hem de resoldre el sistema

$$xb_1' + yb_2' + zb_3' = b_i \tag{3.2}$$

per trobar les coordenades de b_i en la base $B' = \{b_1', b_2', b_3'\}$, d'aquesta manera obtindrem $P_{B'}^{B}$. Per torbar la matriu $P_{B}^{B'}$ calcularem $(P_{B'}^{B})^{-1}$.

IV. Calculem $P_{B'}^{B}$.

- Primera Columna: cerquem el vector de coordenades $(b_1)_{B'}$ tot resolent el sistema que en resulta de l'equació 3.2. La matriu ampliada és

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

  Resolent el sistema obtenim que $(b_1)_{B'} = (4, -7, -2)$

- Segona Columna: cerquem el vector de coordenades $(b_2)_{B'}$ tot resolent el sistema que en resulta de l'equació 3.2. La matriu ampliada és

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

  Resolent el sistema obtenim que $(b_2)_{B'} = (5, -10, -2)$.

- Tercera Columna: cerquem el vector de coordenades $(b_3)_{B'}$ tot resolent el sistema que en resulta de l'equació 3.2. La matriu ampliada és

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

  Resolent el sistema obtenim que $(b_3)_{B'} = (1, -1, 0)$.

Per tant,

$$P_{B'}^{B} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ -7 & -10 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P_{B}^{B'} = \left(P_{B'}^{B}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -5/4 \\ -1/2 & -1/2 & 3/4 \\ 3/2 & 1/2 & 5/4 \end{pmatrix}.$$

V. Per comprovar que el resultat és el correcte, a part de repassar els càlculs, podem veure també que $P_B^{B'} P_{B'}^{B} = I_3$.

2.29 I. En aquest exercici les dades són dos bases i les coordenades d'un vector en una de les bases, i cal donar les coordenades d'aquest vector en l'altra base.

II. Els mateixos que a l'exercici 2.27.

III. Ja que tenim calculada la matriu del canvi de base de B' a B, simplement multiplicant per la dreta aquesta matriu el vector de coordenades $v_{B'}$ obtenim com a resultat les coordenades de v a la base B.

IV.

$$v_B = P_B^{B'} v_{B'} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -5/4 \\ -1/2 & -1/2 & 3/4 \\ 3/2 & 1/2 & 5/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/4 \\ -9/4 \\ 5/4 \end{pmatrix}.$$

V. Simplement comprovar que les dos expressions representen el mateix vector de $\mathbb{R}^3$. Amb les coordenades en la base B', com $v'_B = (1, 2, -1)$ tenim que $v = 1(2, 1, 1) + 2(1, 0, 0) - 1(0, 2, 1) = (4, -1, 0)$, i com que $v_B = (11/4, -9/4, 5/4)$ llavors $v = 11/4(1, 0, 2) - 9/4(0, 1, 3) + 5/4(1, 1, 1) = (4, -1, 0)$. Cal que v sigui el mateix es calculi com es calculi.

2.30 I. En aquest exercici les dades són dos bases de $\mathbb{R}_2[x]$ i cal donar la matriu de canvi d'una base a l'altra, i a l'inrevés.

II. Els mateixos que a l'exercici 2.27, a més dels coneixements per tractar polinomis que hi ha a l'exercici 2.18.

III. El mateix que a l'exercici 2.28.

IV. Primerament, cal trobar les coordenades dels polinomis de la base B' en la base canònica, que trivialment són $(1, 0, 0), (0, 2, 8), (6, 0, 12)$, respectivament. Una vegada tenim els vectors de coordenades construïm la matriu $P_B^{B'}$ col·locant aquests en columna. I calculant la inversa d'aquesta obtenim la matriu del canvi invers.

$$P_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 12 \end{pmatrix}, \qquad P_{B'}^{B} = \left(P_B^{B'}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/12 \end{pmatrix}.$$

V. Per comprovar que el resultat és el correcte, es pot fer el mateix que a l'exercici 2.27.

2.31 I. En aquest exercici les dades són una base i un polinomi de $\mathbb{R}_2[x]$. Cal trobar les coordenades del polinomi donat en la base donada.

II. Els mateixos que a l'exercici 2.29.

III. Primer trobem les coordenades de $p(x)$ en la base canònica, $p(x)_B$, i multipliquem a la dreta de la matriu $P_{B'}^B$ aquest vector posat en columna.

IV. Trivialment $p(x)_B = (1, 4, 16)$. Trobem ara les coordenades del polinomi en la base B'.

$$p(x)_{B'} = P_{B'}^B p(x)_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant $p(x)_{B'} = (1, 2, 0)$.

V. Per comprovar que el resultat és el correcte podem fer el mateix que a l'exercici 2.29, comprovar la igualtat $p(x) = 1 + 2(2x + 8x^2) + 0(6 + 12x^2)$.

2.32 I. En aquest exercici les dades són una base i un conjunt d'un espai vectorial. Cal demostrar que aquest conjunt és una base i donar la matriu del canvi de base.

II. Els mateixos que a l'exercici 2.27.

III. Per veure que B' és una base n'hi ha prou en comprovar que els dos vectors són linealment independents, ja que si la base B té 2 vectors l'espai E té dimensió 2 (exercici 2.21).

Tot i que en aquest cas no tenim la base canònica, tenim els vectors de B' expressats com a combinació lineal dels de B, per tant podem aconseguir fàcilment $P_B^{B'}$ i després calcular-ne l'inversa.

IV. El conjunt B' és linealment independent si l'equació $\lambda a + \beta b = 0_E$ té per única solució $\lambda = \beta = 0$. Substituint l'expressió dels vectors en la base B i agrupant tenim

$$\lambda(u + 3v) + \beta(-u - v) = 0_E \quad \to \quad (\lambda - \beta)u + (3\lambda - \beta)v = 0_E,$$

com que u i v són linealment independents el sistema que s'obté d'igualar els coeficients a 0 és compatible determinant, és a dir, la matriu associada al sistema

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

té rang 2. Per tant, l'única solució és $\lambda = \beta = 0$. Observem que la matriu A és justament la matriu de les coordenades dels vectors a i b en la base B, per tant, n'hi havia prou en comprovar que aquesta matriu té rang màxim.

Tenim que $a_B = (1, 3)$ i $b_B = (-1, -1)$ i la matriu del canvi de base $P_B^{B'}$ és A. Calculant la seva inversa trobem la matriu que ens demanen.

$$P_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad P_{B'}^B = \left(P_B^{B'}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

V. Igual que a l'exercici 2.27.

2.33 I. En aquest exercici les dades són dos bases i un vector, i cal donar l'expressió d'aquest vector en una de les bases.

II. Els mateixos que a l'exercici 2.29.

III. Els mateixos que a l'exercici 2.29.

IV. Primer, el vector coordenades de w en la base B' és $(2, 1)$, per tant, al multiplicar obtenim

$$w_B = P_B^{B'} w_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

El vector coordenades en la base B és $w_B = (1, 5)$.

V. El mateix que a l'exercici 2.29.

3. Aplicacions lineals

3.1 I. En aquest exercici les dades són dues aplicacions de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, i cal dir si són o no són lineals.

II. En aquest exercici apareix un nou concepte, el d'*aplicació Lineal*. Una aplicació $f\colon E \to F$ és lineal quan:

1) El conjunt de sortida E i el d'arribada F són espais vectorials sobre el mateix cos $\mathbb{K}$.
2) Per tot $u, v \in E$, $f(v + u) = f(v) + f(u)$.
3) Per tot $v \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda v) = \lambda f(v)$.

(Transparències: 62)

III. El procediment serà, per cada aplicació, o bé comprovar que es satisfan les tres condicions (i concloure que l'aplicació és lineal), o bé donar un exemple que mostri que alguna de les condicions no es satisfà (i per tant l'aplicació no és lineal).

IV.

- Per l'aplicació f, es provarà que compleix les 3 condicions de la definició:
  1) Tant l'espai d'entrada com el de sortida són espais vectorials sobre $\mathbb{R}$.
  2) $f(u + v) = f(u) + f(v)$:
     Prenem vectors genèrics $u = (x_1, y_1, z_1), v = (x_2, y_2, z_2)$. Aleshores

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= y_1 + y_2 - 2(x_1 + x_2) + z_1 + z_2 \\ &= (y_1 - 2x_1 + z_1) + (y_2 - 2x_2 + z_2) = f(u) + f(v). \end{aligned}$$

3) $f(\lambda u) = \lambda f(u)$:
   Prenem un vector genèric $u = (x, y, z)$ i un escalar qualsevol λ. Aleshores

$$f(\lambda u) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda y - 2\lambda x + \lambda z = \lambda(y - 2x + z) = \lambda f(x, y, z) = \lambda f(u).$$

Com que compleix les 3 condicions, llavors podem dir que es tracta d'una aplicació lineal.

- Per l'aplicació g, veurem que no es compleix la condició $g(u + v) = g(u) + g(v)$. Sigui $u = (0, 1, 0), v = (1, 1, 0)$, llavors, si g fos lineal s'hauria de complir

$$g(1, 2, 0) = g(u + v) = g(u) + g(v) = g(0, 1, 0) + g(1, 1, 0),$$

però $g(0, 1, 0) = 2$, $g(1, 1, 0) = 2$ i $g(1, 2, 0) = 8$, per tant $g(1, 2, 0) \neq g(0, 1, 0) + g(1, 1, 0)$ i per tant g no és lineal.

(També podríem haver trobat casos en què no es compleix la condició $g(\lambda u) = \lambda g(u)$, per exemple prenent $u = (0, 1, 0)$ i $\lambda = 2$.)

V. Repassem les demostracions en el cas d'f i els càlculs del contraexemple en el cas de g.

3.2 I. Les dades són dos aplicacions entre dos espais vectorials de polinomis, i cal dir si són o no són lineals.

II. Els coneixements són els mateixos que a l'exercici 3.1. Ens pot ser útil el fet que si una aplicació $f\colon E \to F$ és lineal, llavors es compleix $f(0_E) = 0_F$.

(Transparències: 63)

També cal recordar els coneixements necessaris per treballar amb polinomis, explicats al tema d'espais vectorials (per exemple, a l'exercici 2.3).

III. El mateix que a l'exercici 3.1.

IV.

- Observem que $f(0) = 1 \neq 0$; per tant, f no és lineal.
- g és lineal:

1) Tant $\mathbb{R}_2[x]$ com $\mathbb{R}_3[x]$ són espais vectorials sobre $\mathbb{R}$.
2) $g(u + v) = g(u) + g(v)$:
   Prenem vectors genèrics $u = a_0 + a_1x + a_2x^2, v = b_0 + b_1x + b_2x^2$. Aleshores

$$\begin{aligned} g(u + v) &= g((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2) \\ &= (2a_0 + 2b_0 + a_1 + b_1) + (3a_2 + 3b_2)x^3 \\ &= (2a_0 + a_1 + 3a_2x^3) + (2b_0 + b_1 + 3b_2x^3) = g(u) + g(v). \end{aligned}$$

3) $g(\lambda u) = \lambda g(u)$:
   Prenem un vector genèric $u = a_0 + a_1x + a_2x^2$ i un escalar qualsevol λ. Aleshores

$$g(\lambda u) = g(\lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2) = 2\lambda a_0 + \lambda a_1 + 3\lambda a_2 x^3 = \lambda(2a_0 + a_1 + 3a_2x^3) = \lambda g(u).$$

V. Comprovaríem les demostracions i els càlculs.

3.3 I. Les dades són dos aplicacions entre dos espais vectorials de matrius, i cal dir si són o no són lineals.

II. Els coneixements són els mateixos que als exercicis 3.1 i 3.2. També cal recordar els coneixements necessaris per treballar amb matrius, explicats al tema d'espais vectorials (per exemple, a l'exercici 2.4).

III. Igual que a l'exercici 3.1.

IV.

- f és lineal ja que:

  1) El conjunt d'arribada i el de sortida són espais vectorials.
  2) $f(u+v) = f(u) + f(v)$:
     Prenem vectors genèrics $u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$. Aleshores

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+a'-d-d' & b+b' & d+d'-a-a' \\ c+c'-b-b' & d+d' & b+b'-c-c' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a-d & b & d-a \\ c-b & d & b-c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'-d' & b' & d'-a' \\ c'-b' & d' & b'-c' \end{pmatrix} = f(u) + f(v) \end{aligned}$$

  3) $f(\lambda u) = \lambda f(u)$
     Prenem un vector genèric $u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ i un escalar qualsevol λ. Aleshores

$$\begin{aligned} f(\lambda u) &= f\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a - \lambda d & \lambda b & \lambda d - \lambda a \\ \lambda c - \lambda b & \lambda d & \lambda b - \lambda c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda(a-d) & \lambda b & \lambda(d-a) \\ \lambda(c-b) & \lambda d & \lambda(b-c) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a-d & b & d-a \\ c-b & d & b-c \end{pmatrix} = \lambda f(u). \end{aligned}$$

- Com que $g\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, no es compleix la propietat $g(0_E) = 0_F$ i per tant g no és lineal.

V. Comprovaríem les demostracions i els càlculs.

3.4 I. En aquest exercici la dada és una aplicació lineal f, i cal donar la matriu associada a f en les bases canòniques.

II. En aquest exercici apareix un nou concepte, el de *matriu associada a l'aplicació lineal en unes bases donades*. Sigui $f\colon E \to F$ una aplicació lineal, sigui $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base d'E, i $B' = \{v_1, \ldots, v_m\}$ una base d'F. La matriu associada a f en les bases B i B' és la matriu de tipus $m \times n$ que té per columna i-èsima les coordenades de $f(u_i)$ en la base B'. Aquesta matriu es denota $M_{B'}^{B}(f)$ i té la propietat que el resultat de multiplicar-li per la dreta el vector coordenades de $u \in E$ en la base B és el vector coordenades de $f(u)$ en la base B'. És a dir, $M_{B'}^{B} u_B = f(u)_{B'}$.

(Transparències: 64)

III. Simplement cal calcular les coordenades en la base canònica de $\mathbb{R}^4$ de les imatges dels vectors de la base canònica de $\mathbb{R}^3$.

Per fer això, cal saber trobar les coordenades d'un element d'un espai vectorial en una base determinada (revisem per exemple l'exercici 2.17).

IV. Primer cal trobar les imatges dels vectors de la base canònica de $\mathbb{R}^3$:

- $f(1,0,0) = (2,-1,-1,1)$
- $f(0,1,0) = (-3,2,3,-2)$
- $f(0,0,1) = (0,-1,1,-1)$

Com que el resultat ja està expressat en base canònica, aquests tres vectors formaran les columnes de la matriu. Per tant,

$$M_{C'}^{C}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix},$$

on C i C' denoten les bases canòniques de $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^4$, respectivament.

V. Per comprovar que el resultat és correcte, es pot comprovar que efectivament el nombre de files i columnes és l'esperat, i que el resultat de multiplicar un vector de coordenades genèric (x,y,z) per la matriu dóna el mateix que aplicar f segons la definició de l'enunciat.

3.5 I. La dada és una aplicació lineal i cal donar la matriu associada a f en les bases canòniques.

II. Els mateixos que a l'exercici 3.4. A l'exercici 2.14 hem vist com es treballa amb la base canònica d'un espai de polinomis.

III. El mateix que a l'exercici 3.4.

IV. La base canònica de $\mathbb{R}_3[x]$ és $\{1, x, x^2, x^3\}$. Tenim

- $f(1) = (1,-1,0)$
- $f(x) = (1,1,0)$
- $f(x^2) = (0,2,1)$

- $f(x^3) = (0, -2, 1)$

Com que el resultat ja està expressat en la base canònica de $\mathbb{R}^3$, la matriu demanada és

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

V. Per comprovar que el resultat és correcte, es pot comprovar que efectivament el nombre de files i columnes és l'esperat, i que el resultat de multiplicar un vector de coordenades genèric (a_0, a_1, a_2, a_3) per la matriu dóna el mateix que aplicar f segons la definició de l'enunciat.

3.6 I. La dada és una aplicació lineal i cal donar la matriu associada a f en les bases canòniques.

II. Els mateixos que a l'exercici 3.4. A l'exercici 2.15 hem vist com es treballa amb la base canònica d'un espai de matrius.

III. El mateix que a l'exercici 3.4.

IV. Primer, cal calcular les imatges dels elements de la base canònica de $\mathbb{R}^3$ i donar-ne les coordenades en la base canònica de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$:

- $f(1,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, que té coordenades $(1,3,0,0,0,1)$ en la base canònica de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.
- $f(0,1,0) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, que té coordenades $(-2,-1,2,1,0,0)$ en la base canònica de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.
- $f(0,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, que té coordenades $(0,1,-1,0,1,0)$ en la base canònica de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

Per tant la matriu demanada és: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

V. Per comprovar que el resultat és correcte, es pot comprovar que efectivament el nombre de files i columnes és l'esperat, i que el resultat de multiplicar un vector de coordenades genèric (x, y, z) per la matriu dóna el mateix que aplicar f segons la definició de l'enunciat.

3.7 I. En aquest exercici les dades són la matriu d'una aplicació lineal (tant la base d'entrada com la de sortida són la canònica) i un element de l'espai d'entrada, i cal donar la seva imatge.

II. Els mateixos que a l'exercici 3.4.

III. El procediment consistirà en trobar les coordenades en la base d'entrada de l'element del qual es vol calcular la seva imatge, multiplicar per la matriu de l'aplicació, i, si cal, indicar a quin element corresponen les coordenades resultants.

IV. Les coordenades de $p(x)$ en la base canònica C són $(1, 2, 3, -1)$. Per trobar la seva imatge cal multiplicar aquest vector columna per la matriu de l'aplicació, és a dir,

$$M_{C'}^{C}(f)\begin{pmatrix}1\\2\\3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\-1 & 1 & 2 & -2\\0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\9\\2\end{pmatrix}.$$

Per tant, $f(p(x)) = (3, 9, 2)$.

V. Repassem els càlculs realitzats.

3.8 I. En aquest exercici les dades són una aplicació lineal i un vector de l'espai vectorial d'entrada, i cal donar la seva imatge.

II. Els mateixos que a l'exercici 3.7.

III. Igual que a l'exercici 3.7.

IV. Les coordeandes del vector donat en la base canòncia són $(2, 1, 0, 0, 3, -2)$, per tant, només cal multiplicar aquest vector (en columna, per la dreta) per la matriu de l'aplicació lineal donada:

$$M_{C'}^{C}(f)\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\\3\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0\\-1 & 1 & 2 & -2 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\\3\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}.$$

La imatge demanada és doncs $(0, -4)$.

V. Repassem els càlculs realitzats.

3.9 I. En aquest exercici les dades són una base d'un espai vectorial i les imatges dels vectors de la base per una aplicació lineal, i cal donar la matriu de l'aplicació lineal en aquesta base. També cal donar la imatge per f d'un vector concret.

II. Són necessaris els conceptes d'aplicacions lineals que apareixen a l'exercici 3.1. A més, en aquest exercici apareix un nou concepte, el d'*endomorfisme*. Una aplicació lineal és un endomorfisme quan l'espai vectorial d'entrada i el de sortida són el mateix, i quan es calcula la seva matriu, habitualment, tot i que no sempre, la base d'entrada i la de sortida coincideixen.

A més, també ens pot ser útil saber com es realitzen els canvis de base per a aplicacions lineals. Si tenim $M_W^B(f)$ i volem calcular la matriu de l'aplicació en unes altres bases, $M_{W'}^{B'}(f)$, llavors $M_{W'}^{B'}(f) = P_{W'}^{W} M_W^B(f) P_B^{B'}$. (Les matrius de canvi de base ens havien aparegut a l'exercici 2.27.)

(Transparències: 64,69)

III. La part de trobar la matriu associada es pot plantejar de dues maneres. La primera consisteix a calcular directament les imatges dels vectors de la base B (i expressar-los en coordenades en aquesta mateixa base), fent servir la informació que tenim. La segona manera consisteix a aplicar la fórmula del canvi de base: fixem-nos que si $B' = \{b_1 - b_2 + 2b_3 + b_4, b_2 - b_3 + 3b_4, b_3, b_4\}$ és una base, aleshores l'enunciat ens dóna directament la matriu $M_B^{B'}(f)$, per tant només caldria multplicar per la dreta per $P_{B'}^B$ i així obtenir $M_B^B(f)$.

Un cop tinguem $M_B^B(f)$, cal trobar el vector de coordenades de v en base B i fer el producte $M_B^B(f)v_B$ per obtenir les coordenades d'$f(v)$ en base B.

IV. Primer mètode:

Les imatges de b_3 i b_4 ens les donen directament, així que només cal passar-les a coordenades:

$$f(b_3) = 2b_1 - b_2 + 5b_3 - b_4, \text{ i les seves coordenades en la base } B \text{ són } (2, -1, 5, -1);$$
$$f(b_4) = b_2 - b_3 + 3b_4, \text{ i les seves coordenades en la base } B \text{ són } (0, 1, -1, 3).$$

Ens falta calcular $f(b_1)$ i $f(b_2)$. Per fer-ho, fem servir que

$$f(b_2 - b_3 + 3b_4) = f(b_2) - f(b_3) + 3f(b_4) = 0_E \text{ (per linealitat de } f).$$

Per tant $f(b_2) = f(b_3) - 3f(b_4) = (2b_1 - b_2 + 5b_3 - b_4) - 3(b_2 - b_3 + 3b_4) = 2b_1 - 4b_2 + 8b_3 - 10b_4$, i les coordenades de $f(b_2)$ en base B són $(2, -4, 8, -10)$. Anàlogament, $f(b_1) = f(b_2) - 2f(b_3) - f(b_4) = (2b_1 - 4b_2 + 8b_3 - 10b_4) - 2(2b_1 + b_2 - 5b_3 + b_4) - (b_2 + b_3 - 3b_4) = -2b_1 - 3b_2 - b_3 - 11b_4$ i les coordenades de $f(b_1)$ en base B són $(-2, -3, -1, -11)$. Per tant, la matriu és:

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 0 \\ -3 & -4 & -1 & 1 \\ -1 & 8 & 5 & -1 \\ -11 & -10 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Segon mètode:

Primer cal comprovar que efectivament $B' = \{b_1 - b_2 + 2b_3 + b_4, b_2 - b_3 + 3b_4, b_3, b_4\}$ és una base d'E. Fixem-nos que això és precisament el que se'ns demanava a l'exercici 2.22, per tant B' és base.

Ara, la matriu d'f amb base d'entrada $B' = \{b_1 - b_2 + 2b_3 + b_4, b_2 - b_3 + 3b_4, b_3, b_4\}$ i base de sortida B és:

$$M_B^{B'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ara $M_B^B(f) = M_B^{B'}(f)P_{B'}^B$. Per tant cal calcular la matriu del canvi de base de B a B'. Com que coneixem els vectors de B' en funció dels de B, el més pràctic serà calcular la matriu del canvi de B' a B, i després fer la inversa.

$$P_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \; P_{B'}^B = (P_B^{B'})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant, multiplicant,

$$M_B^B(f) = M_B^{B'}(f)P_{B'}^B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 0 \\ -3 & -4 & -1 & 1 \\ -1 & 8 & 5 & -1 \\ -11 & -10 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Càlcul d'$f(v)$:

Com que a l'enunciat ja ens donen l'expressió de v com a combinació lineal dels vectors de B ($v = b_1 - b_2 + b_3 - b_4$), és immediat trobar les seves coordenades: $v_B = (1, -1, 1, -1)$. Les coordenades de la imatge de v són doncs

$$M_B^B(f)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 0 \\ -3 & -4 & -1 & 1 \\ -1 & 8 & 5 & -1 \\ -11 & -10 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Per tant, $f(v) = -2b_1 + b_2 + 5b_3 - 5b_4$.

V. Per comprovar el resultat, es pot veure que els dos mètodes proporcionen el mateix resultat, i que multiplicant $M_B^B(f)$ per la dreta pels vectors de coordenades de $b_1 - b_2 + 2b_3 + b_4, b_2 - b_3 + 3b_4, b_3$ i b_4 s'obté el resultat de l'enunciat.

3.10 I. En aquest exercici les dades són la matriu d'una aplicació en unes certes bases, i cal donar la matriu d'aquesta aplicació en una base d'entrada diferent (i la mateixa base de sortida).

II. Els mateixos que a l'exercici 3.9.

III. Volem trobar $M_{C'}^B(f)$ i tenim $M_{C'}^C(f)$. A partir de la fórmula del canvi de base, veiem que n'hi ha prou de trobar P_C^B i fer el producte $M_{C'}^C(f)P_C^B$.

IV. La matriu del canvi de base P_C^B, calculada com a l'exercici 2.28, és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant:

$$M_{C'}^B(f) = M_{C'}^C(f)P_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

V. Per comprovar que el resultat és correcte, el més fàcil és comprovar que la imatge dels vectors de la base B coincideix amb l'esperada; és a dir, que la primera columna de $M_{C'}^B(f)$ és igual a $M_{C'}^C(f)$ multiplicada per $(1, 0, 0)$, etc.

3.11 I. En aquest exercici les dades són la matriu associada a una aplicació lineal en certes bases i una nova base B', i cal trobar la matriu associada a l'aplicació lineal amb la base de sortida B'.

II. El mateix que a l'exercici 3.9.

III. Necessitem $M_{B'}^{C}(f)$ i tenim $M_{C'}^{C}(f)$. Amb la fórmula del canvi de base veiem que simplement cal trobar $P_{B'}^{C'}$ i fer el producte $P_{B'}^{C'}M_{C'}^{C}(f)$.

IV. La matriu del canvi de base $P_{C'}^{B'}$, calculada com a l'exercici 2.28, és:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}.$$

Per tant:

$$M_{B'}^{C}(f) = P_{B'}^{C'}M_{C'}^{C}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -5/2 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}.$$

V. A part de repassar els càlculs, per comprovar que el resultat és correcte, podem comprovar que les columnes de la matriu $M_{B'}^{C}(f)$ coincideixen amb les imatges dels vectors de la base C (és a dir, les columnes de $M_{C'}^{C}(f)$) expressades en la base B'.

3.12 I. En aquest exercici les dades són la matriu associada a una aplicació lineal en unes determinades bases, i una nova base B de l'espai vectorial d'entrada i una altra B' del de sortida, i cal donar la matriu associada a l'aplicació lineal en les noves bases.

II. Els mateixos que a l'exercici 3.9.

III. Simplement usem que $M_{B'}^{B}(f) = P_{B'}^{C'}M_{C'}^{C}(f)P_{C}^{B} = P_{B'}^{C'}M_{C'}^{B}(f)$.

IV. Recuperant $P_{B'}^{C'}$ i $M_{C'}^{B}(f)$ dels exercicis anteriors, només cal fer la multiplicació i el resultat és:

$$M_{B'}^{B}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -5/2 & -5/2 & -13/2 \end{pmatrix}.$$

V. Per revisar el resultat, a part de repassar els càlculs, podem veure que les imatges dels vectors de la base B expressades en base B' (és a dir, les columnes de $M_{B'}^{B}(f)$) coincideixen amb les esperades.

3.13 I. En aquest exercici la dada és un endomorfisme, i cal donar-ne la matriu associada en una certa base (la mateixa d'entrada que de sortida).

II. Els mateixos que a l'exercici 3.9.

III. El més efectiu serà trobar la imatge dels vectors de la base B i calcular les coordenades en la base B d'aquestes imatges. (Per recordar com es troben les coordenades en una base, podem revisar l'exercici 2.17)

IV.

1) $f(1) = 1 + 0 + 0$, i té vector de coordenades $(1, 0, 0, 0)$ en la base B.

2) $f(1 + x) = 1 + x + 1 + 0 = 2 + x$, i té vector de coordenades $(1, 1, 0, 0)$ en la base B.

3) $f(1+x+x^2) = (1+x+x^2)+(1+2x)+2 = 4+3x+x^2$, i té vector de coordenades $(1,2,1,0)$ en la base B.

4) $f(1+x+x^2+x^3) = (1+x+x^2+x^3)+(1+2x+3x^2)+(2+6x) = 4+8x+4x^2+x^3$, i té vector de coordenades $(-5,5,3,1)$.

Per tant:

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

V. Per comprovar que el resultat és correcte, a part de repassar els càlculs, es podria tornar a fer l'exercici mitjançant canvis de base i comprovar que el resultat coincideix. Per a fer això darrer, trobaríem primer la matriu d'f en la base canònica

$$M_C^C(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ara calcularíem les matrius del canvi de base

$$P_C^B == \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P_B^C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

després amb el producte $P_B^C M_C^C(f) P_C^B$ obtindríem la matriu cercada.

3.14 I. En aquest exercici les dades són una matriu associada a una aplicació lineal, i cal donar una base del seu nucli.

II. En aquest exercici apareix un nou concepte, el *nucli* d'una aplicació lineal. Donats dos espais vectorials E i F sore un mateix cos i una aplicació lineal $f\colon E \to F$, anomenarem *nucli de f* al conjunt de vectors d'E que tenen per imatge 0_F, el denotarem per $\mathrm{Ker}(f)$. És a dir,

$$\mathrm{Ker}(f) = \{u \in E : f(u) = 0_E\}.$$

Aquest conjunt és un subespai vectorial.

(Transparències: 65)

III. Cal trobar tots els vectors (x,y,z) tals que $f(x,y,z) = (0,0,0)$. Per calcular $f(x,y,z)$, multipliquem per la dreta de la matriu donada el vector (x,y,z) en columna. Per tant, trobar quan aquesta expressió és igual a $(0,0,0)$,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

equival a resoldre un sistema d'equacions lineals amb matriu associada, precisament, la matriu associada a l'endomorfisme. (Si ens cal, recordem com trobar bases de subespais donats per sistemes d'equacions revisant, per exemple, l'exercici 2.25.)

IV. Cal per tant resoldre el sistema homogeni següent.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x - y + 3z & = & 0 \\ x + 3z & = & 0 \\ x + y + 5z & = & 0 \end{array}\right.$$

Aquest sistema és compatible determinat, així l'única solució és $x = y = z = 0$. Aleshores, $\mathrm{Ker}(f)$ és el subespai $\{(0,0,0)\}$, que té dimensió 0.

V. Repassem els càlculs.

3.15 I. En aquest exercici les dades són la matriu associada a una aplicació lineal, i cal donar una base i la dimensió de la imatge.

II. En aquest exercici apareix un nou concepte, el d'imatge d'una aplicació lineal. La *imatge* d'una aplicació lineal $f\colon E \to F$, que denotem per $\mathrm{Im}(f)$, és el conjunt de vectors de F que són la imatge per f d'algun vector de E. Aquest conjunt és un subespai vectorial i les imatges dels vectors d'una base el generen, és a dir,

$$\mathrm{Im}(f) = \{v \in F : \text{ existeix } u \in E \text{ tal que } f(u) = v\} = \langle f(b_1), f(b_2), \ldots, f(b_n)\rangle,$$

sent $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ una base d'E. Com que les columnes de la matriu associada a f, $M_W^B(f)$, són les coordenades dels vectors $f(b_1), f(b_2), \ldots, f(b_n)$ en la base W de F, la dimensió de $\mathrm{Im}(f)$ coincideix amb el rang d'aquesta matriu.

També ens pot ser útil la fórmula de les dimensions

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E).$$

(Transparències: 65,66,67)

III. Per a trobar un conjunt de generadors de $\mathrm{Im}\, f$ n'hi ha prou en considerar els vectors columna de la matriu associada, ja que l'espai de sortida de l'aplicació és $\mathbb{R}^3$. A partir d'aquest conjunt cercarem una base del subespai. (L'exercici 2.23 és un exemple de com trobar bases a partir d'un conjunt generador).

IV. Tenim que $\mathrm{Im}(f) = \langle (2,1,1), (-1,0,1), (3,3,5)\rangle$. Fent els càlculs s'obté que els tres vectors generadors són linealment independents, i per tant una base d'$\mathrm{Im}(f)$ és $\{(2,1,1), (-1,0,1), (3,3,5)\}$. La imatge té doncs dimensió 3.

V. A part de repassar els càlculs, podem comprovar la fórmula de les dimensions usant el resultat de l'exercici anterior. Efectivament, $0 + 3 = 3$.

3.16 I. En aquest exercici l'única dada és una aplicació lineal, i cal donar una base i la dimensió de la imatge i del nucli.

II. Els mateixos que a l'exercici 3.14 i 3.15.

III. Primer cerquem la matriu M associada a l'aplicació en les bases canòniques, i després el nucli i la imatge com als exercicis 3.14 i 3.15. Fixem-nos que per trobar el nucli cal resoldre el sistema homogeni que té matriu associada M i per trobar la imatge hem de trobar una base de l'espai generat per les columnes de M. Com que per fer les dues coses ens cal escalonar M, aprofitarem el càlcul.

IV. Cerquem primer la matriu associada a la aplicació amb base d'entrada la base canònica C de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ i base de sortida la canònica $C' = \{1, x, x^2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$. Anomenem $M_{i,j}$ la matriu de la base canònica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que té un 1 a la fila i columna j i té zeros a la resta de posicions.

1) $f(M_{1,1}) = 1 - x^2$ que té coordenades $(1, 0, -1)$ en la base C';
2) $f(M_{1,2}) = 1 + x + x^2$ que té coordenades $(1, 1, 1)$ en la base C';
3) $f(M_{2,1}) = 1 - x$ que té coordenades $(1, -1, 0)$ en la base C';
4) $f(M_{2,2}) = 2 + x^2$ que té coordenades $(2, 0, 1)$ en la base C'.

Per tant la matriu associada en les bases canòniques és

$$M_{C'}^{C}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Una matriu escalonada equivalent és

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per trobar el nucli, resolem el sistema homogeni amb aquesta matriu com matriu associada i obtenim l'espai solució: $\langle (0, -1, -1, 1) \rangle$. Com que el resultat està en coordenades en la base C de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, transformem les coordenades en matrius i per tant $\operatorname{Ker}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ i una base és $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. La dimensió del nucli és 1.

La imatge està generada per les imatges dels vectors de C, les coordenades dels quals en la base C' són les columnes de la matriu $M_{C'}^{C}(f)$. A partir del conjunt de columnes de la matriu escalonada equivalent a la matriu associada que em trobat, obtenim una base de la imatge: aquesta base estarà formada per les imatges dels vectors de C que tenen per coordenades aquestes columnes en la matriu $M_{C'}^{C}(f)$. En aquest cas les columnes on hi ha els 1's pivots són les tres primeres, així $\{1 - x^2, 1 + x + x^2, 1 - x\}$ és una base de $\operatorname{Im} f$ i per tant la dimensió és 3 (i com que $\mathbb{R}_2[x]$ també té dimensió 3 aquest conjunt també és una base de $\mathbb{R}_2[x]$).

V. Repassem els càlculs i comprovem la fórmula de les dimensions: $1 + 3 = 4$.

3.17

I. En aquest exercici la dada és una aplicació lineal i cal dir si és injectiva, exhaustiva o bijectiva.

II. En aquest exercici ens apareixen de nou els conceptes dels exercicis 3.15 i 3.14. A més apareixen nous conceptes: aplicació injectiva, aplicació exhaustiva i aplicació bijectiva. Sigui $f\colon E \to F$ una aplicació. Es diu que:

- f és *injectiva* si, per a tot $u, v \in E$, $f(u) = f(v)$ implica que $u = v$. Quan l'aplicació f és lineal això és equivalent a dir que el seu nucli és igual a $\{0_E\}$.
- f és *exhaustiva* si el conjunt imatge és igual a l'espai d'arribada. Quan l'aplicació f és lineal això és equivalent a dir que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(F)$.
- f és *bijectiva* si és exhaustiva i injectiva alhora. Quan l'aplicació f és lineal això és equivalent a dir que tant l'espai d'arribada com el de sortida tenen la mateixa dimensió i a més $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ o $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(F)$.

(Transparències: 67)

III. Cal calcular el nucli i la imatge de l'aplicació i a continuació discutir, segons els criteris del punt II, en funció dels resultats obtinguts.

IV. Aprofitant els resultats dels exercicis anteriors, sabem que el nucli de l'aplicació és $\{0_E\}$, per tant l'aplicació és injectiva. Com que les dimensions del conjunt imatge i de l'espai d'arribada coincideixen, llavors és exhaustiva. En ser injectiva i exhaustiva, també és bijectiva.

V. Si els resultats dels exercicis anteriors eren correctes, no hi ha res a comprovar.

3.18

I. En aquest exercici les dades són una aplicació lineal, i cal dir si és injectiva, exhaustiva o bijectiva.

II. Els mateixos que a l'exercici 3.17.

III. El mateix que a l'exercici 3.17.

IV. Aprofitant el resultat de l'exercici 3.16, sabem que el nucli de l'aplicació té dimensió $1 \neq 0$, per tant el nucli contindrà algun altre vector a part del 0_E i l'aplicació no és injectiva. Com que les dimensions del conjunt imatge i de l'espai d'arribada coincideixen, llavors és exhaustiva. Al no ser injectiva, no pot ser bijectiva. Per tant f només és exhaustiva.

V. Si el resultat de l'exercici 3.16 era correcte, no hi ha res a comprovar.

3.19

I. En aquest exercici l'única dada és un endomorfisme i cal dir si és un isomorfisme i, si ho és, trobar el seu invers.

II. En aquest exercici apareix el concepte d'*isomorfisme*: una aplicació lineal és un isomorfisme si és bijectiva. Una manera de comprovar que una aplicació lineal $f\colon E \to F$ és un isomorfisme és veure que $\dim(E) = \dim(F) = \mathrm{rang}(M(f))$, on $M(f)$ és la matriu associada a f (no importa en quines bases).

Si $f\colon E \to F$ és una aplicació bijectiva (isomorfisme), es diu que una aplicació g és la inversa d'f si f composada amb g és la identitat. L'aplicació inversa d'f, si existeix, es denota f^{-1}. La inversa d'una aplicació lineal és també una aplicació lineal. A més, $M_B^{B'}(f^{-1}) = (M_{B'}^{B}(f))^{-1}$, on B, i B' són bases d'E i F, respectivament.

(Transparències: 67, 68)

III. Primer trobem la matriu de l'aplicació fixades les bases. Per comprovar que és bijectiva, només cal veure que el rang d'aquesta matriu és 4, ja que la dimensió de $\mathbb{R}_3[x]$ és 4 i f és un endomorfisme. Si aquest és el cas, cal calcular la inversa de la matriu, així obtindrem la matriu associada a l'aplicació inversa.

IV. Podem resoldre-ho de vàries maneres, segons en quines bases calculem la matriu de l'aplicació.

Opció 1: base canònica.

Prenem com a base canònica $\{1, x, x^2, x^3\}$. Per trobar la matriu de l'aplicació en aquesta base calculem:

1) $f(1) = 1$, que té coordenades $(1, 0, 0, 0)$;
2) $f(x) = 1 + x$, que té coordenades $(1, 1, 0, 0)$;
3) $f(x^2) = 2 + 2x + x^2$, que té coordenades $(2, 2, 1, 0)$;
4) $f(x^3) = 6x + 3x^2 + x^3$, que té coordenades $(0, 6, 3, 1)$.

Per tant la matriu associada en base canònica és

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En ser la matriu triangular amb uns a la diagonal, és clar que té rang 4 i per tant f és un isomorfisme. La inversa d'aquesta matriu és:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aquesta és doncs la matriu associada a f^{-1} en base canònica. Si volem conèixer f^{-1} explícitament en termes de polinomis, primer multipliquem per la dreta aquesta matriu per un vector de coordenades genèric (a, b, c, d) posat en columna.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b + 6d \\ b - 2c \\ c - 3d \\ d \end{pmatrix}$$

Això ens diu que les coordenades de $f^{-1}(a+bx+cx^2+dx^3)$ en base canònica són $(a-b+6d, b-2c, c-3d, d)$. Per tant, $f^{-1}(a + bx + cx^2 + dx^3) = (a - b + 6d) + (b - 2c)x + (c - 3d)x^2 + dx^3$.

Opció 2: la base B de l'exercici 3.13.

Aprofitem el resultat de l'exercici 3.13, que ens dóna directament la matriu associada en la base B

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Primer cal comprovar que aquesta matriu té rang 4, cosa que és clara ja que de nou ens trobem amb una matriu triangular superior amb els elements de la diagonal no nuls. La seva inversa és

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aquesta és la matriu associada a f^{-1} en la base B. Si volem trobar $f(a + bx + cx^2 + dx^3)$ explícitament, ens cal primer expressar $a + b + x + cx^2 + dx^3$ en coordenades en la base B. Es troba que $(a + bx + cx^2 + dx^3)_B = (a - b, b - c, c - d, d)$. Aleshores si multipliquem la matriu $M_B^B(f^{-1})$ per $(a - b, b - c, c - d, d)$, obtenim les coordenades de $f(a + bx + cx^2 + dx^3)$ en base B; això dóna $(a - 2b + 2c + 6d, b - 3c + 3d, c - 4d, d)$, que correspon al polinomi $(a - 2b + 2c + 6d) + (b - 3c + 3d)(1 + x) + (c - 4d)(1 + x + x^2) + d(1 + x + x^2 + x^3) = (a - b + 6d) + (b - 2c)x + (c - 3d)x^2 + dx^3$.

V. A part de comprovar els càlculs, podem comprovar per alguns polinomis $p(x)$ de la nostra elecció que l'aplicació f^{-1} obtinguda satisfà $f^{-1}(f(p(x))) = p(x)$.