Tema 5. Aritmètica de coma flotant

Curs 2019-2020Q2 – Grup 30
Joan Manuel Parcerisa
Facultat d'Informàtica de Barcelona
Universitat Politècnica de Catalunya

Números “amb decimals”

- Com representar números no enters amb un número finit de bits? (renunciant a representar tots els racionals)
  - Coma fixa.
  - Coma flotant

Coma fixa

- **Coma fixa**
  - Alguns bits per a la part entera, i alguns per a la part fraccionària
  - Exemple amb 8 bits:

    `eeeeefff` → part entera i part fraccionària

    `10101,110`

$= 1\times2^{4} + 0\times2^{3} + 1\times2^{2} + 0\times2^{1} + 1\times2^{0} + 1\times2^{-1} + 1\times2^{-2} + 0\times2^{-3}$

$= 21,75_{10}$

  - El rang és bastant limitat
  - Els números representables són equidistants

Coma flotant

- Rang molt més gran
  - però números representables no equidistants
- Notació científica normalitzada (base 10):

$$v = \pm\, m \times 10^{e} \quad \text{tal que } 1 \leq m < 10$$

2.34×10^6 → Normalitzt ($1 \leq m < 10$)

0.0234×10^8 → No normalitzat!

(la part entera de m ha de tenir 1 sol dígit, i ha de ser no-nul)

Coma flotant en base 2

$$v = \underbrace{\pm}_{\text{signe (S)}} \underbrace{1,\overbrace{fff\ldots f}^{\text{fracció (F)}}}_{\text{mantissa}} \times \underbrace{2}_{\text{base}}{}^{\overbrace{eee\ldots e}^{}}$$

$$\underbrace{eee\ldots e}_{\text{exponent (E)}}$$

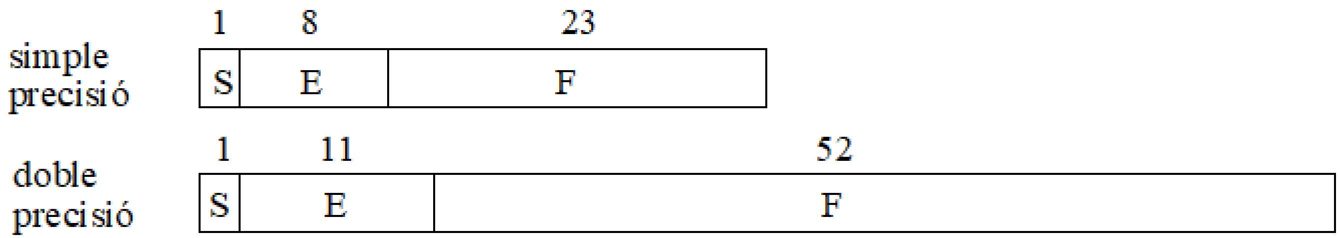
- Components:
  - **Signe**: 0=positiu, 1=negatiu
  - **Mantissa**: conté la magnitud del número
    - Normalitzada: part entera = 1 !
    - Part entera implícita ("bit ocult") → estalviem 1 bit
  - **Exponent**: enter representat "en excés"
  - **Base**: 2, implícita
- Codificació (32 bits): signe, exponent, fracció

  `v = seeeeeeeefffffffffffffffffffffff`

- Interpretació (`S=s, E=eee...e - excés, F=0,fff...f`):

  $v = (-1)^S \times (1 + F) \times 2^E$

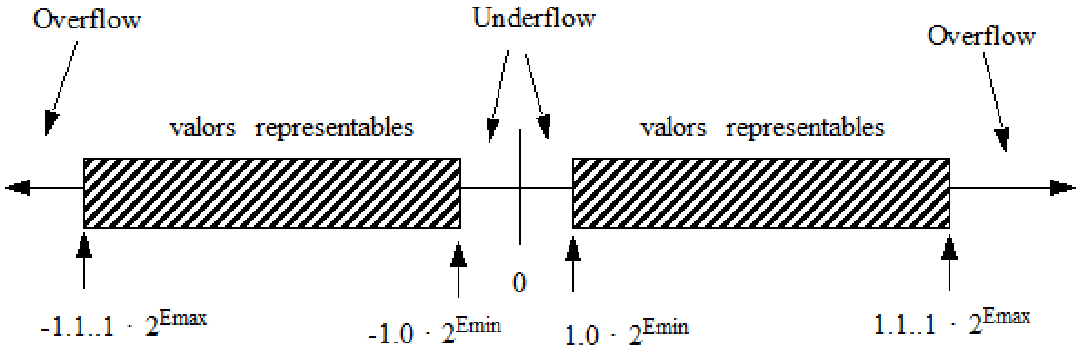
Estàndard IEEE-754 (1985-2008)



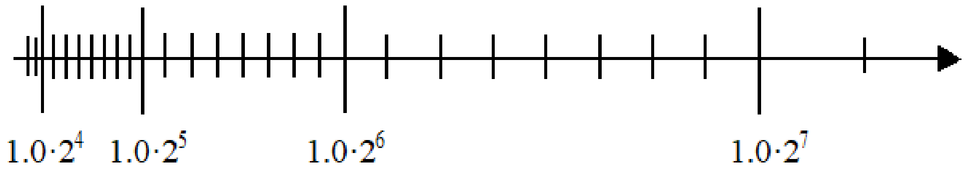
- Compromís rang vs. precisió
  - A més bits d'exponent: +rang, -precisió (i viceversa)
- Part entera = 1 (implícita, no es representa)
- Exponent
  - situat entre signe i fracció
  - en excés a 127 (simple precisió) o a 1023 (doble precisió)
  - Permet comparar magnituds amb un comparador de naturals
- En C, es representen amb els tipus `float` i `double`

IEE-754: Valors representables

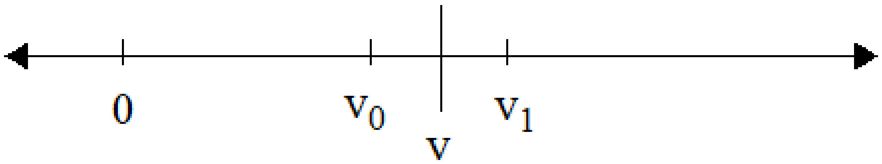
- Mantissa: $1{,}000...0 \leq$ mantissa $\leq 1{,}111...1$
- Exponent: $Emin \leq E \leq Emax$
- Valors fora de rang: Overflow
- Valors amb magnitud $< 1.0 \cdot 2^{Emin}$: Underflow (resultats "no fiables")



- Amb 32 bits es poden representar 2^{32} números, igual que amb coma fixa, però no són equidistants:



Error de precisió per arrodoniment



- Resultat exacte v està entre 2 valors representables: v_0 i v_1
- Si l'arrodonim a v_0 l'error de precisió és $\varepsilon = |v - v_0|$
- Exemple: representar el número racional $\frac{1}{10}$ en simple precisió
  - És el número amb fracció periòdica:

    $$v = 1{,}\underbrace{10011001100110011001100}_{\text{23 bits de fracció}}1100110011001100110011\ldots \times 2^{-4}$$

  - Si l'arrodonim a v_0 (eliminant bits)

    $$v_0 = 1{,}10011001100110011001100\cancel{1100110011001100110011}\ldots \times 2^{-4}$$

  - Error de precisió ($\varepsilon = |v - v_0|$)

    $$\varepsilon = 0{,}00000000000000000000000 1100110011001100110011\ldots \times 2^{-4}$$

IEE-754: 4 modes d'arrodoniment

En l'exemple anterior…

$v_0 = 1,1001100110011001100110\mathbf{0} \times 2^{-4}$

$v\ = 1,10011001100110011001100\color{red}{1100110011001100110011\ldots} \times 2^{-4}$

$v_1 = 1,1001100110011001100110\mathbf{1} \times 2^{-4}$

1.- **Truncament** ("cap al zero"): $v=v_0$

- El més simple d'implementar: eliminant els bits extra
- Cota superior d'error (quan v està pròxim a v_1):

$$\varepsilon_{max} = |v_1 - v_0|$$

$$= 0,0000000000000000000000\mathbf{1} \times 2^{-4} = 2^{-4-23}$$

$= 1$ ULP (*Unit in the Last Place*)

2.- **Cap al** $+\infty$: $v=\max(v_0,v_1)$

3.- **Cap al** $-\infty$: $v=\min(v_0,v_1)$

- Usats en "aritmètica d'intervals"

IEE-754: 4 modes d'arrodoniment

En l'exemple anterior...

$v_0 = 1{,}10011001100110011001100 \times 2^{-4}$

$v\ = 1{,}1001100110011001100110011001100110011001100110011\ldots \times 2^{-4}$

$v_1 = 1{,}10011001100110011001101 \times 2^{-4}$

4.- **Cap al més pròxim** (o al valor "parell" en el cas equidistant)

- Mètode **usat per defecte**
  - → En l'exemple, arrodonim a v_1, que és més pròxim que v_0
- Màxim error: quan v és equidistant de v_0 i v_1

  $\varepsilon_{max} = |v_1 - v_0|/2 = 0{,}5$ ULP
- **Regla pràctica**: examinem el primer bit extra en 3 exemples

$v = 1{,}xxxxxx\ldots0011\ \boxed{0}000101 \rightarrow v_0 = 1{,}xxxxxx\ldots0011$

$v = 1{,}xxxxxx\ldots0011\ \boxed{1}000101 \rightarrow$

$$\begin{array}{r} 1{,}xxxxxx\ldots0011 \\ +\ 0{,}000000\ldots0001 \\ \hline v_1 = 1{,}xxxxxx\ldots0100 \end{array}$$

$v = 1{,}xxxxxx\ldots0011\ \boxed{1000000..} \rightarrow$ al parell $= v_0$: $1{,}xxxxxx\ldots010\boxed{0}$

Equidistant!

IEE-754: Codificacions especials

- Exponents en valors normalitzats: `Emin= 0..001`, `Emax = 1..110`
- Exponents reservats: `000..0` i `111..1`
- **±Zero** (`E=000..0, F=000..0`)

  No es pot representar en format normalitzat...

  Pega: tenim un zero positiu i un negatiu!
- **Denormals** (`E=000..0, F≠000..0`)

  Bit ocult implícit = `0` (en lloc de `1`). Exponent implícit = `Emin`

  Representen números en la "regió d'*underflow*": $0,xxx..x \times 2^{Emin}$
- **± Inf** (`E=111..1, F=000..0`)

  Evitar *overflows* en càlculs intermedis: `1/(1+100/x)=0` per a $x \to 0$

  Definim algunes regles: `1÷0=Inf` , `1/Inf=0`, `x±Inf=Inf`, etc.
- **NaN** (*Not-a-Number*) (`E=111..1, F≠000..0`)

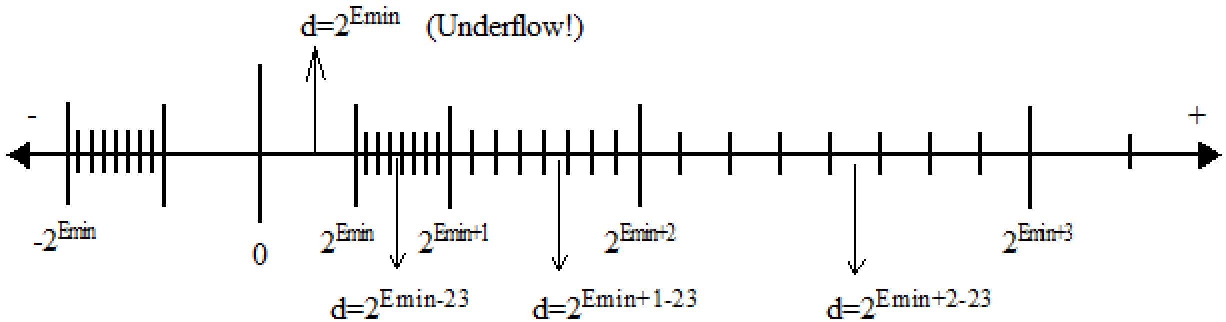
  Resultat d'operacions *invàlides*: $\infty \pm \infty$, $0 \times \infty$, $\infty \div \infty$, $\sqrt{x}\ (x<0)$, etc.

  Definim algunes regles: `x operat NaN = NaN`

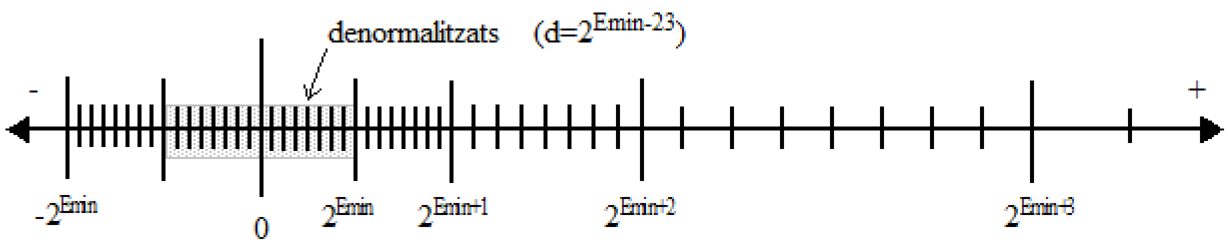
IEE-754: resum dels formats

<table>
<tr><td></td><td></td><th colspan="3">Exponent (E)</th></tr>
<tr><td></td><td></td><th>Tot 0</th><th>Altres</th><th>Tot 1</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Mantissa (F)</th><th>Tot 0</th><td>Zero</td><td rowspan="2">Normalitzat</td><td>Infinit</td></tr>
<tr><th>Altres</th><td>Denormal</td><td>NaN</td></tr>
</table>

Underflow i nombres denormals



- L'error de precisió depèn de la distància (d) entre números consecutius
- No és uniforme: decreix geomètricament amb l'exponent...
- Excepte prop del zero!
- Prop del zero, l'error és del mateix ordre que la magnitud (l'error relatiu pot arribar a ser = 1). Els resultats no són fiables: Excepció d'Underflow
- Alternativa: números denormals: `0,xxxx...xx × 2`$^{\texttt{Emin}}$



Exemple. Representar `v=-1029,68`

1. Convertir la part entera, per divisions successives

   `1029 = 10000000101` (té `11` bits)

2. Convertir la fracció, per multiplicacions successives

   `0,68 × 2 = `**`1`**`,36  → 1  (primer bit de fracció)`

   `0,36 × 2 = `**`0`**`,72  → 0  (segon bit de fracció)`

   `...` etc.

   - Seguim fins tenir 24 bits entre part entera i fracció: `24-11=13` bits

   - Però calen alguns bits extra, suficients per discernir si arrodonir amunt o al cas equidistant (al parell). En aquest cas ens calen 5 bits extra: **`10001`**...

   `0,68 = 0,1010111000010`**`10001`**`...` (`18` bits)

3. Ajuntar part entera i fracció (`11+18=29` bits)

   `1029,68 = 10000000101,1010111000010`**`10001`**`...`

Exemple (cont.)

4. Normalitzar (moure la coma `10` llocs i ajustar l'exponent)

   `1029,68 = 1,00000001011010111000010`**`10001`**`...` $\times 2^{10}$

5. Arrodonir (al més pròxim), examinant els "bits extra" → amunt

   `1029,68 = 1,00000001011010111000010`**`10001`**`...` $\times 2^{10}$

   `1029,68 = 1,0000000101101011100001`**`1`** $\times 2^{10}$

6. Codificar l'exponent en excés a `127`

   `10 + 127 = 137 = 10001001`

7. Ajuntar Signe, Exponent i Fracció (el bit implícit `1` no s'escriu!)

   `-1029,68 = 1 10001001 00000001011010111000011`

8. Expressar en hexadecimal

   `-1029,68 = `**`0xC480B5C3`**

Exemple (cont.)

- Calcular l'error de precisió ($\varepsilon = |\mathtt{v} - \mathtt{v}_0|$)
  - Restant el valor arrodonit i el valor "exacte"

$$
\begin{array}{rlll}
\varepsilon = & (& \mathtt{1,00000001011010111000011} & \times\ 2^{10} \\
 & - & \underline{\mathtt{1,00000001011010111000010}\textcolor{red}{\mathbf{10001}}\mathtt{...}} & \times\ 2^{10}) \\
= & & \mathtt{0,0000000000000000000000001111} & \times\ 2^{10}
\end{array}
$$

  - Normalitzem: movem la coma 25 posicions a la dreta ...

$$\varepsilon = 1{,}111 \times 2^{10-25} = \mathbf{1{,}111 \times 2^{-15}}$$

  - Convertim a decimal (no es demanarà sense calculadora) ...

$$
\begin{aligned}
\varepsilon &= 1{,}875 \times 2^{-15} \\
&= 1{,}875 \ / \ 2^{15} \\
&= 1{,}875/32768 \\
&= \mathbf{5{,}722 \times 10^{-5}}
\end{aligned}
$$

Exemple: convertir v=0x45814140 a base 10

1. L'escrivim en binari
   v = 0100 0101 1000 0001 0100 0001 0100 0000
2. Agrupem els bits en camps (Signe, Exponent, Fracció)
   v = 0 10001011 00000010100000101000000
3. Convertim l'exponent a decimal i li restem l'excés 127
   10001011 = 139
   E = 139 - 127 = 12
4. Ajuntar signe, part entera (bit ocult), fracció i potència
   v = +**1**,00000010100000101000000 × 2^{12}
5. Moure la coma 12 posicions a la dreta i eliminar zeros finals
   v = +1000000101000,00101~~000000~~
6. Convertir la part entera a decimal (suma ponderada)
   1000000101000 = $1·2^{12} + 1·2^{5} + 1·2^{3}$ = 4136
7. Convertir la fracció a decimal (movent la coma a la dreta)
   0,00101 = 101 x 2^{-5} = 5/32 = 0,15625
8. Ajuntar part entera i fracció: **v = 4136,15625**

Segona part

- Operacions amb números de coma flotant
  - Bits de guarda
  - Suma (resta)
  - Multiplicació i divisió
- Coma flotant en MIPS
  - Registres
  - Instruccions
  - Subrutines i declaracions
- Associativitat

Bits de guarda

- L'estàndard IEEE-754 especifica que *el resultat de una operació aritmètica ha de ser el mateix que el que s'obtindria si es realitzés amb una precisió absoluta i al final s'arrodonís el resultat* (al més pròxim → ε_{max} = 0,5 ULP)
- El resultat intermedi d'una operació pot tenir molts (més de 250!) bits "extra"

  `y = X,XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX...`

  - Operar amb tots ells per no perdre precisió requeriria un hardware monstruós!
  - Però es demostra que podem obtener el mateix resultat convertint el conjunt de bits extra en tan sols tres (anomenats *bits de guarda*): **G**uard, **R**ound i **S**ticky
- Per convertir el conjunt de bits extra a 3 bits de guarda:
  - **G** i **R** són iguals als 2 primers bits extra
  - **S** (tercer bit) és la OR lógica de la resta de bits a la dreta
- Suposem el resultat intermedi

  `y = X,XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXabcdefgh...`

- Fem: `G=a, R=b, S=(c OR d OR e OR f OR g OR h ...)`

  `y = X,XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXGRS`

Suma (resta) en coma flotant

- Suposem un cas senzill que coneixem bé (base `10`):
  - Format: mantissa normalitzada amb 4 dígits decimals: $x{,}xxx \times 10^{xx}$
  - Sumar: $9{,}999 \times 10^{1} + 1{,}680 \times 10^{-1}$
  - Així no:

$$\begin{array}{lr} & 9{,}999 \times 10^{1} \\ + & 1{,}680 \times 10^{-1} \\ \hline = & 11{,}679 \times 10^{?} \end{array}$$

  - Alinear mantisses:

$$\begin{array}{lr} & 9{,}999 \quad \times 10^{1} \\ + & \mathbf{0{,}0}1680 \times 10^{\mathbf{1}} \\ \hline = & 10{,}01580 \times 10^{1} \end{array}$$

  - Normalitzar: $1{,}001580 \times 10^{\mathbf{2}}$
  - Arrodonir a 4 dígits: $1{,}001\mathbf{580} \times 10^{2}$

$$\boxed{1{,}00\mathbf{2} \times 10^{2}}$$

Suma (resta) en coma flotant

1. **Igualar els exponents** al major dels dos, desplaçant la coma de la mantissa del de menor exponent
2. **Sumar les magnituds** tenint en compte els signes: si són diferents cal restar-les (en aquest cas, posar al minuend la de major valor absolut!)
3. **Normalitzar el resultat** movent la coma per obtenir un `1` a la part entera
4. **Arrodonir** la mantissa
5. **Codificar** signe, exponent (en excés) i mantissa (eliminant bit ocult)

Exemple: sumar z=x+y

Suposem `x=0x3F40000D`, `y=0xC0800004`

1. Els escrivim en binari
   `x = 0011 1111 0100 0000 0000 0000 0000 1101`
   `y = 1100 0000 1000 0000 0000 0000 0000 0100`
2. Separem els camps (S, E, F)
   `x = 0 01111110 10000000000000000001101`
   `y = 1 10000001 00000000000000000000100`
3. Convertim exponents a decimal, afegim bit ocult, i el signe
   $x = \mathbf{+1},10000000000000000001101 \times 2^{-1}$
   $y = \mathbf{-1},00000000000000000000100 \times 2^{2}$
4. Igualem exponents al major (=2): desplacem x tres bits a la dreta
   $x = \mathbf{+}0,00\mathbf{1}10000000000000000001\underbrace{\mathbf{101}}_{\text{bits extra}} \times 2^{\mathbf{2}}$

Exemple (cont.)

5. Sumar magnituds: signes diferents → restar (minuend, la major = |y|)

```
                                      GRS
 |y|   = 1,00000000000000000000100       × 2^2
-|x|   = 0,00110000000000000000001 101   × 2^2
 |z|   = 0,11010000000000000000010 011   × 2^2
```

6. Normalitzar mantissa (desplaçant els bits 1 posició a l'esquerra)

```
 |z| =  1,1010000000000000000010011 × 2^1
```

7. Arrodonir mantissa (amunt)

```
        1,10100000000000000000100 × 2^1
    +                           1
 |z| =  1,10100000000000000000101 × 2^1
```

8. Ajuntar signe, exponent (en excés) i mantissa (sense el bit ocult)

exponent = 1 + 127 = 128 = 10000000

signe = 1

```
z = 1 10000000 10100000000000000000101
  = 1100 0000 0101 0000 0000 0000 0000 0101
  = 0xC0500005
```

Multiplicació (divisió) en coma flotant

- Observem que

$$m_1 \times 2^{e1} \times m_2 \times 2^{e2} = (m_1 \times m_2) \times 2^{(e1+e2)}$$

$$m_1 \times 2^{e1} \;/\; m_2 \times 2^{e2} = (m_1 / m_2) \times 2^{(e1-e2)}$$

- Passos
  - Multiplicar (o dividir) les mantisses (igual que amb els naturals)
  - Sumar exponents (o restar-los)

Multiplicació en coma flotant

- Suposem un cas senzill que coneixem bé (base `10`):
  - Format: mantissa normalitzada amb 4 dígits decimals: $x,xxx \times 10^{xx}$
  - Multiplicar: $(-1,110 \times 10^{10}) \times 9,200 \times 10^{-5}$
  - Suma dels exponents: $10 + (-5) = 5$
  - Producte de les mantisses:

```
              1,1 1 0
    ×         9,2 0 0
    -----------------
              0 0 0 0
            0 0 0 0
          2 2 2 0
        9 9 9 0
   ------------------
      1 0,2 1 2 0 0 0
```

  - Ajuntar-ho tot: $-10,212000 \times 10^{5}$
  - Normalitzar: $-1,0212000 \times 10^{6}$
  - Arrodonir a 4 dígits (avall): $-1,021\mathbf{2000} \times 10^{6}$

$$\boxed{-1,021 \times 10^{6}}$$

Exemple: multiplicar z=x×y

Suposem `x=0x3F600000`, `y=0xBED00002`

1. Els escrivim en binari

```
x = 0011 1111 0110 0000 0000 0000 0000 0000
y = 1011 1110 1101 0000 0000 0000 0000 0010
```

2. Separem els camps (S, E, F)

```
x = 0 01111110 11000000000000000000000
y = 1 01111101 10100000000000000000010
```

3. Convertim exponents a decimal, afegim bit ocult, i el signe

$$x = +1,11000000000000000000000 \times 2^{-1}$$
$$y = -1,10100000000000000000010 \times 2^{-2}$$

4. Multipliquem mantisses (sense zeros finals de `x`, parts enteres en negreta)

```
     1110...
 ×   110100000000000000000010
                        1110...
     1110...
    1110...
   1110...
  10110110000000000000000011100...(+20 bits 0)
```

Exemple (cont.)

5. Sumem els exponents: `-1+(-2) = -3`
6. El producte queda **10,**1101100000000000000000011**100** x 2^{-3}

   el Sticky és la or lògica

7. Normalitzem: desplacem tots els bits 1 posició a la dreta

   |z| = **1,**0110110000000000000000001**110** × 2^{-2}

8. Arrodonim la mantissa (amunt)

   1,0110110000000000000000001**110** × 2^{-2}

   \+ 1

   |z| = **1,**01101100000000000000000**10** × 2^{-2}

9. Codifiquem l'exponent: `-2+127 = 125 = 01111101`
10. Ajuntem signe (negatiu), exponent i mantissa (sense el bit ocult!)

    z = 1 01111101 01101100000000000000010

    1011 1110 1011 0110 0000 0000 0000 0010

    = **0xBEB60002**

Coma flotant en el MIPS

- Coprocesador de coma flotant (o FP) CP1
  - Procesador adjunt que extén el ISA
  - 32 registres de simple precisió: `$f0, $f1, ... $f31`
  - O bé 16 parells per a doble precisió: `$f0-$f1, $f2-$f3,...`
  - Les instruccions FP operen només sobre registres FP:

- Accés a memòria

```
lwc1 ft,offset(rs)     ldc1 ft,offset(rs)
swc1 ft,offset(rs)     sdc1 ft,offset(rs)
```

- Aritmètiques

```
add.s  fd,fs,ft        add.d  fd,fs,ft
sub.s  fd,fs,ft        sub.d  fd,fs,ft
mul.s  fd,fs,ft        mul.d  fd,fs,ft
div.s  fd,fs,ft        div.d  fd,fs,ft
```

Instruccions de coma flotant

- Còpia entre registres

```
mfc1  rt,fs        → copia de fs a rt
mtc1  rt,fs        → copia de rt a fs
mov.s fd,fs        → copia de fs a fd
```

- Comparació

```
c.xx.s fs,ft                 c.xx.d fs,ft
```

  - on `xx` és un de `{eq, lt, le}`
  - escriu el resultat al *bit de condició* (registre implícit)

- Salt

```
bc1t  etiqueta     → salta si el bit de condició = TRUE
bc1f  etiqueta     → salta si el bit de condició = FALSE
```

Subrutines i declaracions

- Pas de paràmetres i resultats a subrutines
  - Reglamentació molt complexa per al pas de `floats`, *`doubles`* i mescles de tipus enters amb flotants
  - Sols veurem el cas amb `1` o `2` paràmetres `float`: s'usen `$f12` i `$f14`
  - El resultat es retorna en `$f0`
- Registres "segurs": del `$f20` al `$f31`
- Declaració de variables de coma flotant en MIPS

```
       .data
var1:  .float 3.1416, 3.5E2,...
var2:  .double 3E350, 0.0038, ...
```

  - Alineen a adreces múltiples de 4 i de 8, respectivament

Exemple: traduir la funció `func()`

```c
float func (float x)
{
  if (x<1.0)
   return x*x;
  else
   return 2.0-x;
}
```

```
        .data
const1: .float 1.0

        .text
        ...
func:
        la      $t0,const1
        lwc1    $f16,0($t0)     # $f16 = 1.0
        c.lt.s  $f12,$f16       # cond = (x<1.0)
        bc1f    else            # branch if cond=false
        mul.s   $f0,$f12,$f12   # x*x
        b fisi
else:
        add.s   $f16,$f16,$f16 # 1.0+1.0
        sub.s   $f0,$f16,$f12   # 2.0-x
fisi:
        jr $ra
```

Associativitat

- Verifica la propietat associativa la suma de números en coma flotant?

$$\boxed{x + (y + z) = (x + y) + z}$$

- Suposem $x = -1{,}5 \times 10^{38}$, $y = 1{,}5 \times 10^{38}$, $z = 1{,}0$

$x + (y + z) \quad = -1{,}5 \times 10^{38} + (1{,}5 \times 10^{38} + 1{,}0)$

$= -1{,}5 \times 10^{38} + 1{,}5 \times 10^{38}$

$= 0{,}0$

$(x + y) + z \quad = (-1{,}5 \times 10^{38} + 1{,}5 \times 10^{38}) + 1{,}0$

$= 0{,}0 + 1{,}0$

$= 1{,}0$

NO!

Exercici: sumar z=x+y

Suposem `x=3DC00046`, `y=0xC0800004`

Exercici: sumar z=x+y

Suposem `x=3DC00046`, `y=0xC0800004`

1. Els escrivim en binari

```
x = 0011 1101 1100 0000 0000 0000 0100 0110
y = 1100 0000 1000 0000 0000 0000 0000 0100
```

Exercici: sumar z=x+y

Suposem `x=3DC00046`, `y=0xC0800004`

1. Els escrivim en binari
   ```
   x = 0011 1101 1100 0000 0000 0000 0100 0110
   y = 1100 0000 1000 0000 0000 0000 0000 0100
   ```
2. Separem els camps (S, E, F)
   ```
   x = 0 01111011 10000000000000001000110
   y = 1 10000001 00000000000000000000100
   ```

Exercici: sumar z=x+y

Suposem `x=3DC00046`, `y=0xC0800004`

1. Els escrivim en binari
   `x = 0011 1101 1100 0000 0000 0000 0100 0110`
   `y = 1100 0000 1000 0000 0000 0000 0000 0100`
2. Separem els camps (S, E, F)
   `x = 0 01111011 10000000000000001000110`
   `y = 1 10000001 00000000000000000000100`
3. Convertim exponents a decimal, afegim bit ocult, i el signe
   $x = \mathbf{+1},10000000000000001\mathbf{000110} \times 2^{-4}$
   $y = \mathbf{-1},00000000000000000000100 \times 2^{2}$

Exercici: sumar z=x+y

Suposem `x=3DC00046`, `y=0xC0800004`

1. Els escrivim en binari
   `x = 0011 1101 1100 0000 0000 0000 0100 0110`
   `y = 1100 0000 1000 0000 0000 0000 0000 0100`
2. Separem els camps (S, E, F)
   `x = 0 01111011 10000000000000001000110`
   `y = 1 10000001 00000000000000000000100`
3. Convertim exponents a decimal, afegim bit ocult, i el signe
   x = **+1**,10000000000000001**000110** × 2^{-4}
   y = **-1**,00000000000000000000100 × 2^{2}
4. Igualem exponents al major (=2): desplacem x sis bits a la dreta
   x = **+**0,00000**1**10000000000000001**000110** × $2^{\mathbf{2}}$

   bits extra

Exercici: sumar z=x+y

Suposem `x=3DC00046`, `y=0xC0800004`

1. Els escrivim en binari
   `x = 0011 1101 1100 0000 0000 0000 0100 0110`
   `y = 1100 0000 1000 0000 0000 0000 0000 0100`
2. Separem els camps (S, E, F)
   `x = 0 01111011 10000000000000001000110`
   `y = 1 10000001 00000000000000000000100`
3. Convertim exponents a decimal, afegim bit ocult, i el signe
   x = **+1**,10000000000000001**000110** $\times 2^{-4}$
   y = **-1**,00000000000000000000100 $\times 2^{2}$
4. Igualem exponents al major (=2): desplacem x sis bits a la dreta
   x = **+**0,00000**1**10000000000000001**000110** $\times 2^{2}$
   bits extra
5. Determinem els 3 bits de guarda GRS
   x = **+**0,00000**1**10000000000000001**001** $\times 2^{2}$

Exemple (cont.)

6. Sumar magnituds: signes diferents → restar (minuend, la major = |y|)

```
                                   GRS
 |y|   = 1,00000000000000000000100      × 2^2
-|x|   = 0,00000110000000000000001001   × 2^2
 |z|   = 0,11111010000000000000010111   × 2^2
```

Exemple (cont.)

6. Sumar magnituds: signes diferents → restar (minuend, la major = |y|)

```
                                       GRS
 |y|    = 1,00000000000000000000100        × 2^2
-|x|    = 0,00000110000000000000001 001    × 2^2
 |z|    = 0,11111010000000000000010 111    × 2^2
```

7. Normalitzar mantissa (desplaçant els bits 1 posició a l'esquerra)

```
 |z| =  1,1111010000000000000010111 × 2^1
```

Exemple (cont.)

6. Sumar magnituds: signes diferents → restar (minuend, la major = |y|)

```
                                             GRS
  |y|   = 1,00000000000000000000100           × 2^2
- |x|   = 0,00000110000000000000001 001       × 2^2
  ---------------------------------------------
  |z|   = 0,11111010000000000000010 111       × 2^2
```

7. Normalitzar mantissa (desplaçant els bits 1 posició a l'esquerra)

```
  |z| = 1,11110100000000000000101 11 × 2^1
```

8. Arrodonir mantissa (amunt)

```
        1,11110100000000000000101 × 2^1
      +                         1
      ---------------------------
  |z| = 1,11110100000000000000110 × 2^1
```

Exemple (cont.)

6. Sumar magnituds: signes diferents → restar (minuend, la major = |y|)

```
                                               GRS
 |y|   = 1,00000000000000000000100                × 2^2
-|x|   = 0,00000110000000000000001 001            × 2^2
 ---------------------------------------------
 |z|   = 0,11111010000000000000010 111            × 2^2
```

7. Normalitzar mantissa (desplaçant els bits 1 posició a l'esquerra)

```
 |z| = 1,11110100000000000000101 11 × 2^1
```

8. Arrodonir mantissa (amunt)

```
       1,11110100000000000000101 × 2^1
     +                         1
 ------------------------------
 |z| = 1,11110100000000000000110 × 2^1
```

9. Ajuntar signe, exponent (en excés) i mantissa (sense el bit ocult)

exponent = `1 + 127 = 128 = 10000000`

signe = `1`

```
z = 1 10000000 11110100000000000000110
  = 1100 0000 0111 1010 0000 0000 0000 0110
  = 0xC07A0006
```