1. *(2.5 puntos)* Sea $I = \int_0^1 \cos^3(x)dx$, siendo $f(x) = \cos^3(x)$.

Sabiendo que $f''(x) = 6\cos(x) - 9\cos^3(x)$ y $f^{(4)}(x) = -60\cos(x) + 81\cos^3(x)$

(a) Justificar $\max\limits_{x\in[0,1]}|f''(x)| \leq 3$ y $\max\limits_{x\in[0,1]}|f^{(4)}(x)| \leq 21$.

(b) Calcular I con un error menor que 10^{-4}.

Solución.

(a) Sea $g(x) = -6x + 9x^3$ definida en el intervalo $[-1, 1]$. Esta función alcanza su máximo absoluto en $x = 1$ y vale $g(1) = 3$; alcanza su mínimo absoluto en $x = -1$ y vale $g(-1) = -3$. Por lo tanto $|g(x)| \leq 3$. Como $-1 \leq cos(x) \leq 1$, entonces $\max\limits_{x\in[0,1]}|f''(x)| \leq 3$. De forma análoga, sea $h(x) = -60x + 81x^3$ definida en el intervalo $[-1, 1]$. Esta función alcanza su máximo absoluto en $x = 1$ y vale $h(1) = 21$; alcanza su mínimo absoluto en $x = -1$ y vale $h(-1) = -21$. Por lo tanto $|h(x)| \leq 21$. Como $-1 \leq cos(x) \leq 1$, entonces $\max\limits_{x\in[0,1]}|f^{(4)}(x)| \leq 21$.

(b) Si aproximamos I mediante método de los trapecios, entonces el número de intervalos, n, necesarios para calcular I con un error menor que 10^{-4} ha de satisfacer $\frac{(b-a)^3}{12n^2}\max\limits_{x\in[0,1]}|f''(x)| < 10^{-4}$ que se cumple si $\frac{1}{12n^2}3 < 10^{-4}$ o sea $n > 50$.

Si aproximamos I mediante método de Simpson, entonces el número de intervalos, n, necesarios para calcular I con un error menor que 10^{-4} ha de satisfacer $\frac{(b-a)^5}{180n^4}\max\limits_{x\in[0,1]}|f^{(4)}(x)| < 10^{-4}$ que se cumple si $\frac{1}{180n^4}21 < 10^{-4}$ o sea $n > 5.85$.

Si usamos el método de Simpson, será suficiente tomar $n = 6$. En este caso $h = \frac{1}{6}$ y

$$I \approx \frac{h}{3}\left(f(0) + 4f\left(\frac{1}{6}\right) + 2f\left(\frac{2}{6}\right) + 4f\left(\frac{3}{6}\right) + 2f\left(\frac{4}{6}\right) + 4f\left(\frac{5}{6}\right) + f(1)\right)$$

$$I \approx 0.6429 \pm 10^{-4}$$

2. *(2.5 puntos)* Se considera la función $f(x, y) = 2 - x^2 + y$.

(a) Dibujar las curvas de nivel de f correspondientes a los niveles -1, 0, 1, y 2.

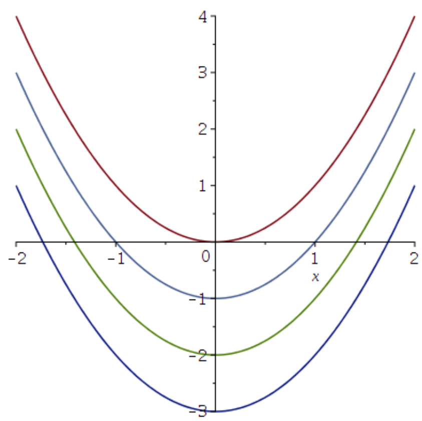
(b) Calcular la derivada direccional de f en el punto $(4, -1)$ en la dirección del vector $(3, 4)$.

(c) Determinar la dirección en la cual la derivada direccional de f en el punto $(4, -1)$ es igual a cero. Indicar la dirección mediante un vector unitario.

(d) Determinar la dirección de máximo crecimiento de f en el punto $(4, -1)$ y calcular la derivada en esa dirección.

Solución.

(a) La curva de nivel k viene dada por $2 - x^2 + y = k$, o equivalentemente, por $y = x^2 - 2 + k$.



(b) El vector $\vec{v}$ unitario correspondiente a la dirección $(3, 4)$ es $\vec{v} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.

Como la función f es un polinomio, es continua y sus derivadas parciales también son continuas. Por tanto, tenemos $D_{\vec{v}} f(4, -1) = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f(4, -1)$.

$$\vec{\nabla} f(x, y) = (-2x, 1), \qquad \vec{\nabla} f(4, -1) = (-8, 1)$$

$$D_{\vec{v}} f(4, -1) = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}) \cdot (-8, 1) = -4$$

(c) La derivada direccional de f en el punto $(4, -1)$ es igual a 0 si se calcula en una dirección perpendicular al gradiente f en el punto $(4, -1)$.

Como $\vec{\nabla} f(4, -1) = (-8, 1)$, una dirección perpendicular es $\frac{1}{\sqrt{65}}(1, 8)$.

(d) La dirección de máximo crecimiento de f en el punto $(4, -1)$ es la del gradiente f en el punto $(4, -1)$ y la derivada en esa dirección es igual al módulo del gradiente f en el punto $(4, -1)$, $\|\vec{\nabla} f(4, -1)\| = \sqrt{65}$.

3. *(2.5 puntos)* Sea la función $f(x,y) = 4x^2 + 6y^2 + 5xy - 2y + 3 - 6x$.

(a) Hallar el plano tangente a $f(x,y)$ en el punto $(1,0,1)$.

(b) Demostrar que el polinomio de Taylor de grado 2 de f centrado en el punto $(1,0)$ coincide con la función $f(x,y)$.

Solución.

(a) Como el punto $(1,0,1)$ pertenece a la gráfica de f, el plano tangente a $f(x,y)$ en el punto $(1,0,1)$ viene dado por

$$z = f(1,0) + \frac{\partial f(1,0)}{\partial x}(x-1) + \frac{\partial f(1,0)}{\partial y}(y-0).$$

Calculamos $f(1,0)$, $\frac{\partial f(1,0)}{\partial x}$ y $\frac{\partial f(1,0)}{\partial y}$:

$$f(1,0) = 1,$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 8x + 5y - 6, \qquad \frac{\partial f(1,0)}{\partial x} = 2,$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 12y + 5x - 2, \qquad \frac{\partial f(1,0)}{\partial y} = 3$$

El plano tangente a $f(x,y)$ en el punto $(1,0,1)$ es

$$z = 1 + 2(x-1) + 3y$$

(b) La función $f(x,y)$ es un polinomio de grado 2, por lo tanto coincide con su polinomio de Taylor de grado 2 centrado en cualquier punto.

4. *(2.5 puntos)* Considerar la función $f(x,y) = 1 + 2x^2 + 2y^2 - x + y$, y la región del plano

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \quad x^2 + (y-1)^2 \leq 4\,, \quad y \leq 1\}\,.$$

(a) Dibujar la región A i demostrar que f admite extremos absolutos en A.

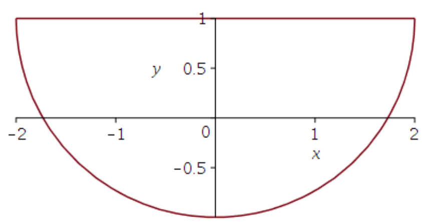
(b) Determinar el máximo y el mínimo absolutos de f en la región A.

Solución.

(a) A es un conjunto cerrado y acotado: contiene a todos sus puntos frontera por estar definido por desigualdades no estrictas y está contenido en la bola centrada en (0,0) y radio 10; por lo tanto, es compacto.

f es polinomio, por tanto es una función continua.

Por el teorema de Weirtrass, f admite extremos absolutos en A.



(b) Candidatos a extremos absolutos:

(i) En $\mathring{A}$:
$\vec{\nabla} f = 0$

$$\begin{aligned} 4x - 1 &= 0 \\ 4y + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Tenemos el candidado $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$.

(ii) En $x^2 + (y-1)^2 = 4$, $-1 < y < 1$. Si $F(x,y) = f(x,y) + \lambda(x^2 + (y-1)^2 - 4)$, los candidatos satisfacen $\vec{\nabla} F = 0$ y $x^2 + (y-1)^2 - 4 = 0$:

$$4x - 1 + 2\lambda x = 0 \tag{1}$$
$$4y + 1 + 2\lambda(y-1) = 0 \tag{2}$$
$$x^2 + (y-1)^2 - 4 = 0 \tag{3}$$

De (1) y (2) tenemos $\dfrac{4x-1}{4y+1} = \dfrac{x}{y-1}$ de donde tenemos $y - 1 = -5x$. Substituyendo en (3) queda $26x^2 = 4$. Por lo tanto tenemos el candidato $(\sqrt{\frac{2}{13}}, -5\sqrt{\frac{2}{13}} + 1)$ (La otra solución $(-\sqrt{\frac{2}{13}}, 5\sqrt{\frac{2}{13}} + 1)$ no lo es porque no se encuentra en el dominio.)

(iii) En $y = 1$, $-2 < x < 2$. Si $F(x, y) = f(x, y) + \lambda(y - 1)$, los candidatos satisfacen $\vec{\nabla}F = 0$ y $y - 1 = 0$:

$$\begin{aligned} &4x - 1 = 0 \\ &4y + 1 + \lambda = 0 \\ &y - 1 = 0 \end{aligned}$$

Tenemos el candidato $(\frac{1}{4}, 1)$.

(iv) Los puntos (-2,1) y (2,1).

Resumiendo, los candidatos a extremos absolutos son:
$(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$, $(\sqrt{\frac{2}{13}}, -5\sqrt{\frac{2}{13}} + 1)$, $(\frac{1}{4}, 1)$, (-2,1) y (2,1).
Evaluando la función en los candidatos resulta que el mínimo absoluto es $\frac{3}{4}$, y se alcanza en $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$, y el máximo absoluto es 14, y se alcanza en (-2,1).