Taller M2: FUNCIONS DE DIVERSES VARIABLES

2019-20, M2, FIB

TALLER 7.2

Problema 4

4 Dibuixeu els subconjunts de $\mathbb{R}^2$ següents:

a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x-3| < 2, \ |1-y| \leq 5\}$;

b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x^2+4x+1| = -x^2-4x-1, \ |y-2| < 10\}$;

c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \leq 1, \ x < y\}$.

Conjunt A

Punts (x,y) del pla que satisfan la condició $|x-3| < 2$ i la condició $|1-y| \leq 5$

Primera condició

$\mathbf{|x-3| < 2}$

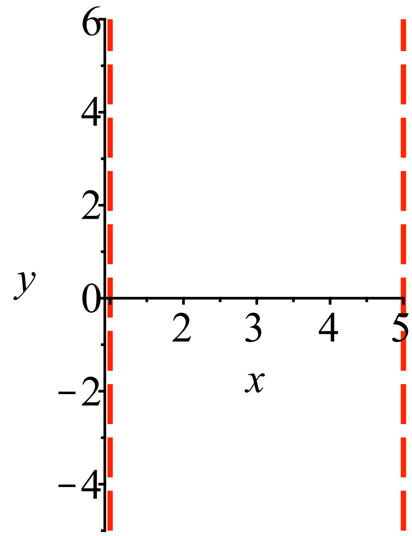
Recordem $|expressió| < c \quad \Leftrightarrow \quad -c < expressió < c$

$-2 < x-3 < 2$

$\mathbf{1 < x < 5}$

$with(plots):$

$g1 := implicitplot([x=1, x=5], x=-1..7, y=-5..6, color=["Red", "Red"], thickness=2, linestyle=dash)$



La primera condició ens determina els punts de la banda compresa entre aquestes dues rectes verticals

Segona condició

$\mathbf{|1 - y| \leq 5}$

Podem fer com abans i treballar amb $-5 \leq 1 - y \leq 5$. O també

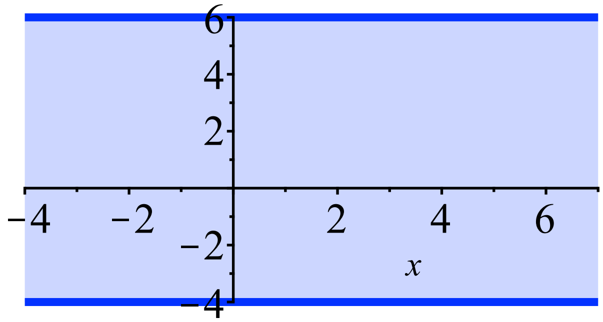
Recordem $\mid expressió \mid = \mid -expressió \mid$

$\mathbf{|y - 1| \leq 5}$

$-5 \leq y - 1 \leq 5$

$\mathbf{-4 \leq y \leq 6}$

$plot(\{-4, 6\}, x = -4..7, color = \text{"Blue"}, thickness = 3, filled = [color = \text{"Blue"}, transparency = 0.8])$



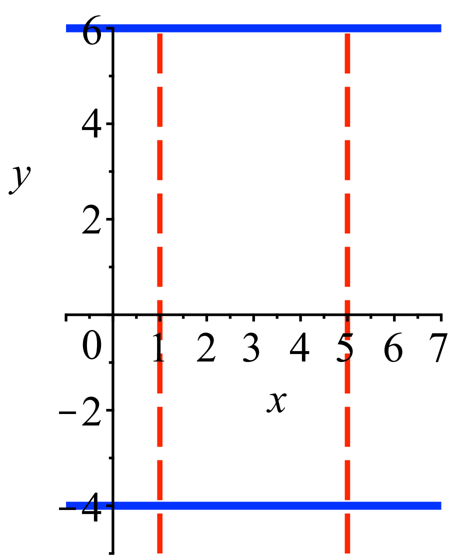
La segona condició ens determina els punts de la banda compresa entre aquestes dues horitzontals, amb les rectes incloses

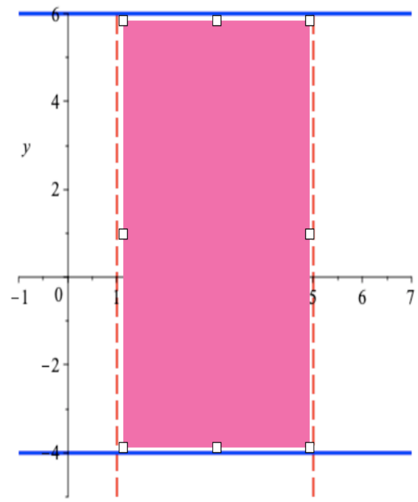
Intersecció

Si *fem la intersecció entre la banda vertical i la banda horitzontal obtindrem que el conjunt A és el rectangle*

$g2 := plot(\{-4, 6\}, x=-1..7, color=\text{"Blue"}, thickness=3):$

$display(\{g1, g2\})$





A = (1,5) × [-4,6]

Conjunt B

Punts (x,y) del pla que satisfan la condició $\left|x^2+4x+1\right|=-x^2-4x-1$ i la condició $|y-2|<10$

La segona condició ja veiem que és molt similar a les anteriors, la farem igual. Ens hem de fixar més en la primera.

Primera condició

Ens hem de fixar bé en aquesta condició

$\left|x^2+4x+1\right|=-x^2-4x-1$

En principi recordem que per treure el valor absolut hem de saber el signe del que hi ha dins, distingir casos, etc..

Però si ho mirem bé

$\left|\boldsymbol{x^2+4x+1}\right|=-x^2-4x-1=-\left(\boldsymbol{x^2+4x+1}\right)$

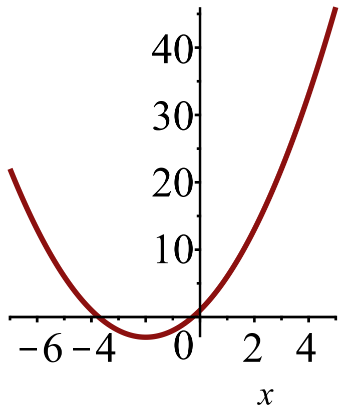
Volem valors de x que fan que el valor absolut d'aquesta quantitat x^2+4x+1 sigui la mateixa quantitat canviada de signe...Això és el mateix que dir que la quantitat **és negativa** !

$\mid expressió \mid = -expressió$ és la mateixa condició que $expressió \leq 0$

Per tant, la primera condició en realitat és $\boldsymbol{x^2 + 4x + 1 \leq 0}$ (Oberveu que el zero està permès perquè $|0| = 0 = -0$)

Tenim una paràbola i hem de saber on "és negativa"

$plot(x^2 + 4x + 1, x = -7..5, thickness = 2)$



Trobem els punts on s'anul.la

$solve(x^2 + 4x + 1 = 0, x)$

$$-2 + \sqrt{3}, -2 - \sqrt{3} \tag{1.1.2.1.1}$$

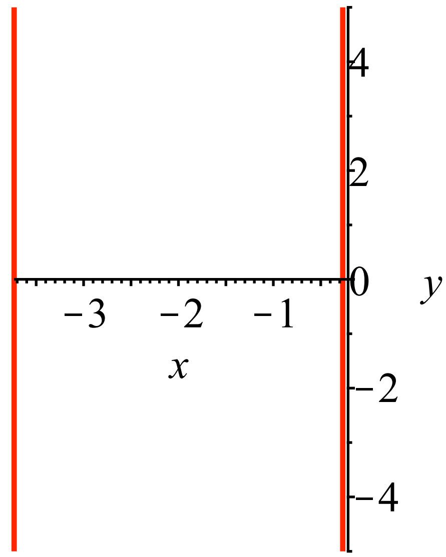
Com que el coeficient de x^2 és positiu, sabem que la part negativa de la paràbola és la part compresa entre els dos punts de tall.

En resum,

$|x^2 + 4x + 1| < -x^2 - 4x - 1 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{-2 - \sqrt{3} \leq x \leq -2 + \sqrt{3}}$

La primera condició ens determina els punts de la banda compresa entre aquestes dues rectes verticals

$implicitplot([x = -2 - \mathrm{sqrt}(3), x = -2 + \mathrm{sqrt}(3)], x = -5..0, y = -5..5, color = [\text{"Red"}, \text{"Red"}], thickness = 2)$



Observem

$-2 - \mathrm{sqrt}(3.)$

$$-3.732050808 \tag{1.1.2.1.2}$$

$-2 + \mathrm{sqrt}(3.)$

$$-0.267949192 \tag{1.1.2.1.3}$$

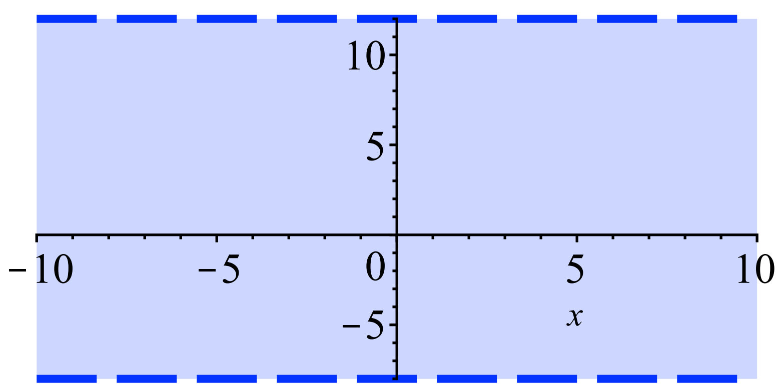
Segona condició

$|y-2| \leq 10$

$-10 < y - 2 < 10$

$\mathbf{-8 < y < 12}$

$plot(\{-8, 12\}, x=-10..10, color = \text{"Blue"}, thickness = 3, linestyle = dash, filled = [color = \text{"Blue"}, transparency = 0.8])$



La segona condició ens determina els punts de la banda compresa entre aquestes dues horitzontals

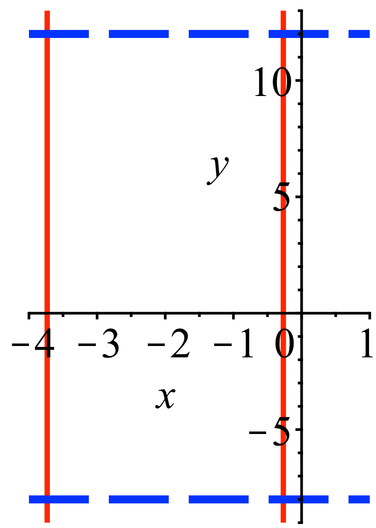
Intersecció

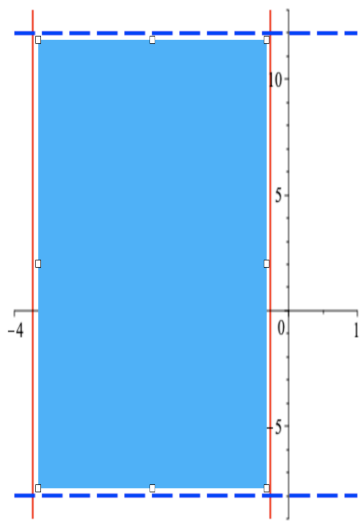
Si *fem la intersecció entre la banda vertical i la banda horitzontal obtindrem que el conjunt A és el rectangle*

$h1 := implicitplot([x=-2-\mathrm{sqrt}(3), x=-2+\mathrm{sqrt}(3)], x=-5..0, y=-9..13, color=["\mathrm{Red}", "\mathrm{Red}"], thickness=2):$

$h2 := plot(\{-8, 12\}, x=-4..1, color="\mathrm{Blue}", thickness=3, linestyle=dash):$

$display(\{h1, h2\})$





B = [-2-$\sqrt{3}$, -2+$\sqrt{3}$] × (-8,12)

Conjunt C

Punts (x,y) del pla que satisfan la condició $x^2 + y^2 \leq 1$ i la condició $x < y$

En aquest cas tenim regions delimitades per corbes

- Canviem la desigualtat per una igualtat
- Dibuixem la corba obtinguda
- Decidim quina regió correspon a la condició

Primera condició

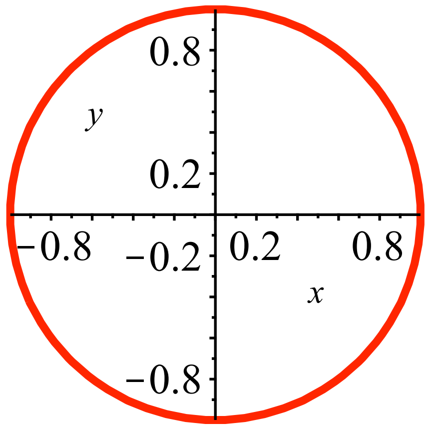
Condició $x^2 + y^2 \leq 1$

Canviem la desigualtat per una igualtat $x^2 + y^2 = 1$

Recordem
$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ és l'equació de la **circumferència** de centre al punt (a,b) i radi r

Per tant, $x^2 + y^2 = 1$ és l'equació d'una circumferència de centre (0,0) i radi 1.

$implicitplot\left(x^2 + y^2 - 1, x = -2 ..2, y = -2 ..2, color = \text{"Red"}, thickness = 3\right)$



Ara hem de decidir a quina **regió** correspon la desigualtat $x^2 + y^2 \leq 1$, si a la de "dins" o la de "fora".

En aquest cas és força clar que correspon a la de dins, els punts que estan a distància menor o igual que 1 del punt (0,0).

En general, només cal que agafem un punt i comprovem: per exemple $0^2 + 0^2 = 0 \leq 1$ ens diu que hem d'agafar la regió que conté el punt (0,0).

Observem que la circumferència està inclosa perquè la desigualtat no és estricta

La primera condició determina el cercle de centre (0,0) i radi 1, amb la circumferència inclosa.

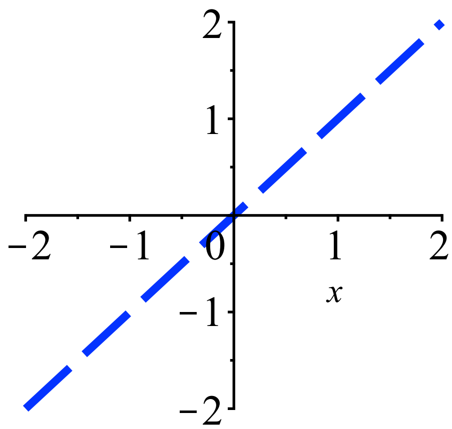
Segona condició

Condició $\boldsymbol{x < y}$

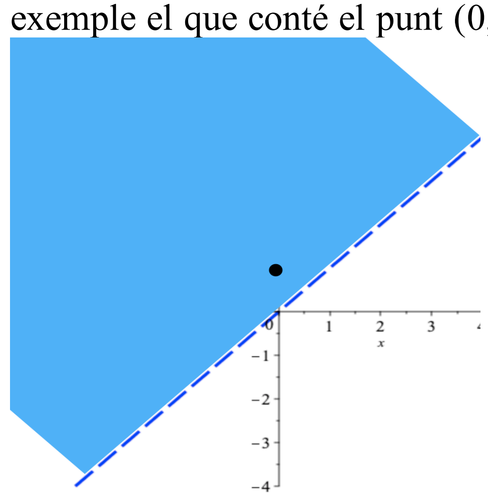
Canviem la desigualtat per una igualtat $\boldsymbol{x = y}$

La corba en aquest cas és la recta $y = x$, la diagonal del primer quadrant

$plot(x, x = -2 ..2, color = \text{"Blue"}, thickness = 3, linestyle = dash)$



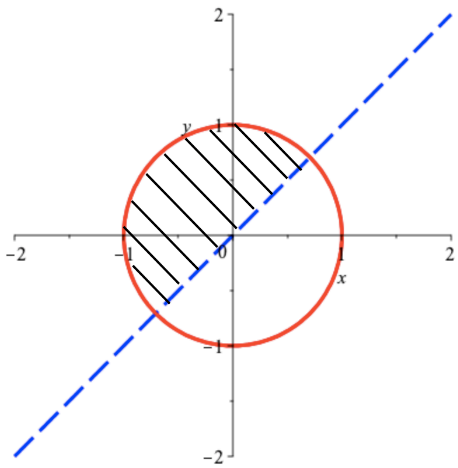
Ara hem de decidir quin semiplà ens interessa. Es tracta del que conté els punts amb $y > x$. Per exemple el que conté el punt (0,1)



La segona condició ens determina els punts del semiplà "esquerre"

Intersecció

Si *fem la intersecció entre el semiplà i el disc obtindrem el conjunt C*



Observeu que els punts d'intersecció, "vèrtexs del recinte", són $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ i $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

En los siguientes ejercicios los dibujos de los conjuntos se pueden consultar en el apartado 7.3 de la lista de ejercicios de la asignatura. También están definidos los conjuntos de las soluciones en el mismo apartado. Nos limitamos a dar algunas indicaciones y pautas de cómo se deducen los dibujos y los conjuntos en cada caso.

5 Considereu els conjunts:

$$\boldsymbol{A = \{\ (x; y) \in \mathrm{R}^2 : x^2 - y^2 < 1\ \};}$$

$$\boldsymbol{B = \{\ (x; y) \in \mathrm{R}^2 : x > 0; y > 0; xy \leq 1\ \};}$$

$$\boldsymbol{C = \{\ (x; y; z) \in \mathrm{R}^3 : x + y + z = 1; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\ \};}$$

a) Dibuixeu aquests conjunts.
b) Trobeu la frontera, l'interior i l'adherència d'aquests conjunts.
c) Quins d'aquests conjunts són oberts? I quins tancats? I quins compactes?

Seguimos el esquema habitual para este tipo de problemas.

1. Determinar la frontera del conjunto, normalmente cambiando las desigualdades por igualdades.
2. Dibujamos la frontera, normalmente una o varias curvas.
3. Decidimos en qué "lado" de la frontera están los puntos del conjunto.

<u>Conjunto A:</u>

a) En este caso es evidente que la frontera de A son los puntos de la curva $x^2 - y^2 = 1$. Se trata de una hipérbola que corta al eje x en los puntos (1,0) y (-1,0). Es una curva simétrica respecto a los ejes x e y como se ve en la gráfica de la sección 7.3. La ecuación general de una hipérbola que corta el eje x en los puntos (a,0) y (-a,0) es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Los puntos de A son claramente los que están entre las dos curvas de la hipérbola ya que el origen (0,0) pertenece a A.

b) La frontera ya la hemos determinado. Puesto que ningún punto de la frontera pertenece a A, se trata de un conjunto abierto, y int(A) = A es su interior. La adherencia se obtiene de la unión del interior de A y de su frontera, por tanto:

$$adh(A) = \{\ (x; y) \in \mathrm{R}^2 : x^2 - y^2 \leq 1\ \}$$

c) Como ya hemos dicho es un conjunto abierto al no contener ningún punto de la frontera, o dicho de otro modo, todos los puntos de A son puntos interiores. Asimismo A tampoco es compacto pues no es ni cerrado ni acotado. No es acotado pues no podemos encerrar A dentro de una bola de radio finito.

<u>Conjunto B:</u>

a) La curva xy=1 es otro tipo de hipérbola, en este caso sus ejes de simetría son las dos diagonales del plano que se cruzan en el origen. Puesto que x e y han de ser positivos para pertenecer a B, está claro que los puntos de B se encuentran en el primer cuadrante del plano. La frontera de este conjunto la forman los puntos de los semiejes positivos x e y junto con el origen (0,0) junto con la rama de la hipérbola xy=1 que está en el primer cuadrante del plano. Tal como ilustra la figura de la sección 7.3.

b) (y c) Una parte de la frontera de B, xy=1 son puntos que pertenecen a B, pero los puntos de los semiejes positivos que son de la frontera de B no pertenecen a B. Así pues, este conjunto no es cerrado, pero tampoco es abierto. Asi que no es compacto. Tampoco está acotado pues aunque la curva xy=0 se aproxime a los ejes nunca llega a tocarlos, de modo que no podemos encerrar B dentro de una bola de radio finito.

Conjunto C:

a) En este caso se trata de un conjunto de puntos en el espacio. Por un lado la condición x+y+z=1 define un plano en el espacio. Por otro lado la condición $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ representa los puntos cuya distancia al origen es menor o igual a uno, es decir, define una esfera de radio unidad centrada en el origen. Si el plano no corta a la esfera en ningún punto entonces C será vacío, pero vemos que los puntos del plano (1,0,0), (0,1,0) y (0,0,1) por ejemplo, pertenecen a la superficie de la esfera, de manera que C no es vacío, sino que está formado por los puntos de corte del plano con la esfera. Esto define una superficie circular como puede verse en el gráfico de la sección 7.3.

b) Fijémonos que si consideramos cualquier entorno (una bola esférica ya que estamos en R^3) centrado en cualquier punto de C, dicho entorno siempre contiene puntos que son de C y puntos que no pertenecen a C. Esto implica que todo punto de C es un punto frontera. Por tanto, C no tiene puntos interiores: Adh(C)=Fr(C)=C y int(C)=$\emptyset$

c) Debido a que Fr(C)=C claramente C contiene su frontera y por tanto es cerrado. También se ve que C se puede encerrar en una bola de radio mayor que 1 centrada en el origen, por tanto C es acotado. Cerrado y acotado implica que C es compacto.

6 Trobeu i representeu el domini de les funcions següents:

a) $f(x; y) = x^2 - y^2$

Se trata de una función polinómica en las variables (x,y) de manera que su dominio es todo el plano, o sea, *f(x,y)* existe para todo (x,y) de R^2

b) $g(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

El dominio de esta función son los puntos (x,y) del plano que cumplen $1 - x^2 - y^2 \geq 0$ Esta inecuación como ya se vio en el ejercicio 4.b corresponde a los puntos del interior y de la frontera de un circunferencia centrada en el origen y de radio unidad.

c) $h(x; y) = \ln(x + y)$

El domino está formado por los puntos del plano que cumplen la condición x+y>0. La frontera del dominio será la recta $x + y = 0$, ó bien, $x = -y$, que divide el plano xy en dos mitades, ver gráfica de la sección 7.3. La mitad que corresponde al dominio es la que contiene el punto (1,0), pues dicho punto pertenece al dominio al verificar que x+y>0.

7 Per a cada una de les funcions següents, dibuixeu les corbes de nivell

a) $z(x, y) = x^2y$; b) $z(x, y) = x^2 + y^2 - 1$; c) $z(x, y) = |x + y| + |x - y|$;

corresponents als nivells $z = -2; -1; 0; 1; 2$.

De manera general, si nos piden dibujar la curva de nivel c (siendo c un número real) de una función z(x,y), tenemos que representar la gráfica de la curva definida por la ecuación (normalmente implícita) z(x,y) = c.

a) $z(x, y) = x^2y$

Ecuación de la curva de nivel z(x,y) = c: $x^2y = c$, o bien, $y = c/x^2$
Se trata de una función simétrica respecto al eje y, ya que su valor es el mismo para x y para –x. Cuando c>0 entonces y>0, las curvas de nivel están en el semiplano y>0. Cuando c<0 entonces y<0, las curvas de nivel están en el semiplano y<0. Finalmente, cuando c=0 las curvas de nivel son los puntos que cumplen $x^2y = 0$, es decir, los ejes de coordenadas x=0 e y=0.

Se puede ver la gráfica de las curvas de nivel en la sección 7.3.

b) $z(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

Ecuación de la curva de nivel c: $x^2 + y^2 - 1 = c$, es decir, $x^2 + y^2 = 1 + c$

En este caso la curva de nivel la forman los puntos (x,y) cuya distancia al origen es igual a $R = \sqrt{1+c}$.
Siempre que $1 + c \geq 0$, la curva de nivel existirá. En caso contrario, es decir, si 1+c<0, o sea, c<-1, no existe la curva de nivel. Dicho de otro modo, la función no toma valores inferiores a -1. En particular no existe la curva de nivel $z = -2$.

Cuando $c = -1$, la curva de nivel solo contiene un punto, el origen.

Cuando $c > -1$, la curva de nivel será una circunferencia centrada en el origen y radio R. Por lo tanto:
Para z=0 la circunferencia tiene radio 1.
Para z=1 la circunferencia tiene radio $\sqrt{2}$.
Para z=2 la circunferencia tiene radio $\sqrt{3}$.

c) $z(x, y) = |x + y| + |x - y|$

Ecuación de la curva de nivel c: $|x + y| + |x - y| = c$

Para empezar un par de consideraciones. Primero, claramente c≥0, es decir, no existen curvas de nivel cuando c es negativo. Segundo, se trata de una ecuación lineal en las variables, por tanto las curvas de nivel serán una o varias rectas.

De hecho son varias, ya que en este caso para determinar la curva de nivel hay que hacer un estudio similar al que se hacía en el tema 1 cuando resolvíamos ecuaciones con valor absoluto. Se trata de resolver por casos teniendo en cuenta el signo de las dos expresiones, x + y, x – y, es decir, que hay que considerar 4 casos que corresponden a las 4 combinaciones de los signos de ambas expresiones. Se da la resolución detallada de un caso, el resto se deja para que lo terminéis vosotros/as.

Caso 1: $x + y \geq 0$ y $x - y \geq 0$ lo que equivale a $-x \leq y \leq x$
Curva de nivel: |x + y| + |x − y|=x + y + x – y = 2x = c, es decir x = c/2 y por tanto $-c/2 \leq y \leq c/2$. Se trata de un segmento de recta vertical entre los puntos (c/2, -c/2) y (c/2, c/2). La longitud del segmento es c.

El resto de casos son:

Caso 2: $x + y \geq 0$ y $x - y < 0$ lo que equivale a $-y \leq x < y$
Curva de nivel: |x + y| + |x − y|=x + y – (x – y) = 2y = c, es decir y = c/2, segmento de recta horizontal. Determinar vosotros/as entre qué puntos.

Caso 3: $x + y < 0$ y $x - y \geq 0$ lo que equivale a $y \leq x < -y$
Caso 4: $x + y < 0$ y $x - y < 0$ lo que equivale a $x < y < -x$

Los distintos casos definen distintos segmentos de rectas que configuran un cuadrado de lado c y centro el origen de coordenadas. La única excepción es la curva de nivel cero (c=0), que es solo un punto el (0,0).

Lo que indican las curvas de nivel es que la gráfica de la función es como una pirámide invertida, con el vértice en el origen.

NOTA: Observar que en el caso 3 sale un valor de y negativo, mientras que en el caso 4 sale un valor de x negativo, de manera que las desigualdades en cada uno de estos casos son consistentes con este hecho.

8 Comproveu que les paràboles *y* = *ax*^{2} són corbes de nivell de la funció

$$\boldsymbol{f(x,y) = \frac{x^4y^4}{(x^4 + y^2)^3}}$$

Basta comprobar que los puntos de la parabola cumplen la condición de ser de una curva de nivel, esto es, que *f(x,y)* es igual a una constante cuando $y = \mathrm{a}x^2$. Por tanto, hay que comprobar que $f(x, \mathrm{a}x^2)$ es igual a una constante. Determinar cuál es dicha constante, es decir, de qué nivel se trata.

Naturalmente la constante dependerá del parámetro a. Debe tenerse en cuenta que el valor de *a* está fijado para cada curva de nivel. Lo que sucede es que para cada valor del parámetro a, se tiene una curva de nivel distinta.