TEMA 9
—
TEORIA

M2
GEI
FIB - UPC

TEMA 9: QUÈ CAL SABER

1. Derivades parcials d'ordre superior
2. Polinomi de Taylor
3. Extrems locals

TEMA 9: QUÈ CAL SABER

1. **Derivades parcials d'ordre superior**
   - Què són i com es calculen

     Les derivades parcials d'ordre 2 són les derivades parcials de les derivades parcials.
     En general, les derivades parcials d'ordre n són les derivades parcials de les derivades parcials d'ordre $n-1$.
   - Notació

     $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = D_{ii}f = f_{ii}$ o bé $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = D_{ij}f = f_{ij}$
   - Què és matriu Hessiana

$$\mathcal{H}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Normalment, és una matriu simètrica.

TEMA 9: QUÈ CAL SABER

2. **Polinomi de Taylor**
   - Per a què serveix Per aproximar la funció localment
   - Com es calcula

$$P(f,\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})(x_i - a_i)$$
$$+\frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j)$$
$$+\frac{1}{3!}\sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\boldsymbol{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j)(x_k - a_k)$$
$$+\ldots$$
   - L'error

     $f(x) - P(f,\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}) = R(f,\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}) =$ terme de grau següent, on les derivades parcials es prenen en un punt $\boldsymbol{c}$ entre $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{x}$.

TEMA 9: QUÈ CAL SABER

3. **Extrems locals** també anomenats **relatius**
   - Què son

     Punts on la funció pren valor màxim o mínim localment (és a dir, en un entorn)
   - Com es troben

     Condició necessària: $\nabla f = 0$

     $\Rightarrow$ els punts crítics són candidats

     Condició suficient:

$$\mathcal{H}f = \begin{pmatrix} \boxed{f_{xx}} & f_{xy} & f_{xz} & \cdots \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} & \cdots \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \qquad \overbrace{\left.\begin{array}{l} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 > 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \Delta_n > 0 \end{array}\right\}}^{\text{positius}} \Rightarrow \text{Mínim local}$$

TEMA 9: QUÈ CAL SABER

3. **Extrems locals** també anomenats **relatius**
   - Què son

     Punts on la funció pren valor màxim o mínim localment (és a dir, en un entorn)
   - Com es troben

     Condició necessària: $\nabla f = 0$

     $\Rightarrow$ els punts crítics són candidats

     Condició suficient:

$$\mathcal{H}f = \begin{pmatrix} \boxed{f_{xx}} & f_{xy} & f_{xz} & \cdots \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} & \cdots \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \qquad \overbrace{\left.\begin{array}{l} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 < 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \Delta_n \sim (-1)^n \end{array}\right\}}^{\text{alterns començant amb } < 0} \Rightarrow \text{Màxim local}$$

TEMA 9: QUÈ CAL SABER

3. **Extrems locals** també anomenats **relatius**
   - Què son

     Punts on la funció pren valor màxim o mínim localment (és a dir, en un entorn)
   - Com es troben

     Condició necessària: $\nabla f = 0$

     $\Rightarrow$ els punts crítics són candidats

     Condició suficient:

$$\mathcal{H}f = \begin{pmatrix} \boxed{f_{xx}} & f_{xy} & f_{xz} & \cdots \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} & \cdots \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{matrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{altres} \\ \text{signes} \\ \text{no} \\ \text{nuls} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{Punt de sella}$$

TEMA 9: QUÈ CAL SABER

3. **Extrems locals** també anomenats **relatius**
   - Què son

     Punts on la funció pren valor màxim o mínim localment (és a dir, en un entorn)
   - Com es troben

     Condició necessària: $\nabla f = 0$

     $\Rightarrow$ els punts crítics són candidats

     Condició suficient:

$$\mathcal{H}f = \begin{pmatrix} \boxed{f_{xx}} & f_{xy} & f_{xz} & \cdots \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} & \cdots \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{matrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \vdots \\ \Delta_n = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} \text{El criteri} \\ \text{no decideix} \end{matrix}$$