# Capítulo 7

# Funciones de varias variables

### 7.1 Problemas

**1.** Considereu els conjunts:

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x^2 + y^2 < 1\right\}.$$
$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, |y| \leq x^2, \, y \neq 0, \, x \in [-2,2]\right\}.$$

a) Dibuixeu aquests conjunts.

b) Trobeu la frontera, l'interior i l'adherència d'aquests conjunts.

c) Són conjunts oberts? Són conjunts tancats?

d) Són conjunts compactes?

**Solución.**

**a)** La forma más fácil de representar el conjunto $A$ es:

• primero dibujar los puntos que cumplen la igualdad $x^2 + y^2 = 1$. Es una circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 1 que divide el plano $\mathbb{R}^2$ en dos regiones;

• después determinar que región pertenece a $A$.

Véase el dibujo de *Dom f* en 7.3 Solucions de la Lista de ejercicios, página 34.

La forma más fácil de representar el conjunto $B$ es:

• primero dibujar los puntos que cumplen las igualdades

$|y| = x^2$, es decir, $y = \pm x^2$, $\quad y = 0 \quad$ y $\quad x = \pm 2$.

Se trata de dos parábolas, el eje OX y dos rectas verticales que dividen el plano $\mathbb{R}^2$ en varias regiones;

• después determinar que región pertenece a $B$.

Véase el dibujo de *Dom f* en 7.3 Solucions de la Lista de ejercicios, página 34.

**b)** Para hacer este apartado necesitamos la siguiente

**Definición.** Sea $A \subset \mathbb{R}^n$.

La *frontera de A*

es el conjunto de todos los puntos frontera de $A$ y se designa $\partial A$ o $Fr A$.

El *interior de A* es el conjunto de todos los puntos interiores de $A$ y se designa $\mathring{A}$.

La *adherencia de A*

es el conjunto menor cerrado que contiene $A$ y se designa $AdhA$ o $\overline{A}$.

Véase la respuesta en 7.3 Solucions de la Lista de ejercicios, página 34.

Para c) y d) utilizamos las siguientes definiciones.

**Definición.** Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$.

El punto $a$ es *interior de A* $\iff \exists\, B_r(a) \subset A$.

El punto $a$ es *exterior de A* $\iff \exists\, B_r(a) : \ B_r(a) \cap A = \varnothing$.

El punto $a$ es *punto frontera de A* $\Leftrightarrow \forall B_r(a)$ contiene puntos de $A$ y puntos de $A^c$

**Definición.** Sea $A \subset \mathbb{R}^n$.

$A$ se llama *abierto* $\iff \forall\, a \in A$ es interior.

$A$ se llama *cerrado* $\iff A$ contiene todos los puntos frontera.

$A$ se llama *acotado* $\iff \exists\, B_r(a) \supset A$.

$A$ se llama *compacto* $\iff A$ es cerrado y acotado.

Según estas definiciones,

$A$ es abierto ya que $\forall\, a \in A$ es interior, es decir para $\forall\, a \in A \,\exists\, B_r(a) \subset A$.

$A$ no es cerrado ya que $A$ no contiene todos los puntos frontera, por ejemplo, $(1,0) \in \mathrm{Fr}(A)$ y $(1,0) \notin A$.

$A$ es acotado ya que $\exists\, B_r(a) \supset A$, por ejemplo, $B_2((0,0)) \supset A$.

$A$ no es compacto ya que no es cerrado.

$B$ no es abierto ya que no cualquier $a \in A$ es interior, por ejemplo, $(2,4) \in \mathrm{Fr}(B)$ y $(2,4) \in B$.

$B$ no es cerrado ya que $B$ no contiene todos los puntos frontera, por ejemplo, $(0,0) \in \mathrm{Fr}(B)$ y $(0,0) \notin B$.

$B$ es acotado ya que $\exists\, B_r(a) \supset B$, por ejemplo, $B_10((0,0)) \supset B$.

$B$ no es compacto ya que no es cerrado.

**2.** Trobeu i representeu el domini de les funcions següents:

a) $f(x,y) = \ln(1+xy)\,;$ b) $g(x,y) = \sqrt{y \sin x}\,.$

**Solución.**

**a)** $$\left.\begin{array}{l} Dom(1+xy) = \mathbb{R}^2 \text{ (polinómica)} \\ Dom(\ln t) = \mathbb{R}^+ \text{ (elemental)} \end{array}\right\} \Longrightarrow Dom f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 + xy > 0\}.$$

Para representar $Dom\, f$ resolvemos la desigualdad $1+xy>0$ del modo siguiente

$$1+xy>0 \Longleftrightarrow xy>-1 \Longleftrightarrow \begin{cases} y>-\dfrac{1}{x} & \text{si}\, x>0 \\ \forall\, y & \text{si}\, x=0 \\ y<-\dfrac{1}{x} & \text{si}\, x<0 \end{cases}.$$

La forma más fácil de representar $Dom\, f$ es:

• primero dibujar los puntos que cumplen la igualdad $y=-\dfrac{1}{x}$. Es una hipérbola cuyas ramas dividen el plano $\mathbb{R}^2$ en tres regiones;

• después determinar que región pertenece a $Dom\, f$.

Véase el dibujo de $Dom\, f$ en 7.3 Solucions de la Lista de ejercicios, página 34.

**b)**

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} Dom(y)=\mathbb{R}^2(\text{polinóm.}) \\ Dom(\sin x)=\mathbb{R}^2(\text{elem.}) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad Dom(y\sin x)=\mathbb{R}^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad Dom(\sqrt{t})=\mathbb{R}^+\cup\{0\} \end{array}\right\} \Longrightarrow Dom f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y\sin x\geq 0\}.$$

Para representar $Dom\, f$ resolvemos la desigualdad $y\sin x\geq 0$ del modo siguiente

$$y\sin x\geq 0 \Longleftrightarrow \begin{array}{c} \begin{cases} y\geq 0 \\ \sin x\geq 0 \end{cases} \\ \text{o} \\ \begin{cases} y\leq 0 \\ \sin x\leq 0 \end{cases} \end{array} \Longleftrightarrow \begin{array}{c} \begin{cases} y\geq 0 \\ 2\pi k\leq x\leq \pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \end{cases} \\ \text{o} \\ \begin{cases} y\leq 0 \\ \pi+2\pi k\leq x\leq 2\pi+\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \end{cases} \end{array}.$$

La forma más fácil de representar $Dom\, f$ es:

• primero dibujar los puntos que cumplen la igualdades

$y=0,\ \forall\, y\in\mathbb{R}$ y $x=\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\ \forall\, y\in\mathbb{R}$.

Se trata de la recta que coincide con eje OX y las rectas verticales que dividen el plano $\mathbb{R}^2$ en varias regiones;

• después determinar que región pertenece a $Dom\, f$.

Véase el dibujo de $Dom\, f$ en 7.3 Solucions de la Lista de ejercicios, página 34.

**3.** Per a cada una de les funcions següents, dibuixeu les corbes de nivell

a) $z(x,y)=x^2-y^2$; b) $z(x,y)=1-|x|-|y|$,

corresponents als nivells $z=-2,-1,0,1,2$.

**Solución.**

Según la definición las *curvas de nivel* son las curvas sobre las cuáles el valor de la función es constante. Es decir, una *curva de nivel* es una curva que conecta los puntos en que la función tiene un mismo valor constante o, lo que es lo mismo, en este problema que $z(x,y) = C$ donde $C = -2, -1, 0, 1, 2$.

**a)** Si $z(x,y) = C \Longrightarrow x^2 - y^2 = C$. Estudiaremos tres subcasos:

1) $C = 0 \Longrightarrow x^2 - y^2 = 0 \Longrightarrow y = \pm x$. Por lo tanto, al nivel $z = 0$ corresponde a dos rectas $y = \pm x$, es decir en los puntos de éstas dos rectas el valor de la funci´ón es constante y es igual a 0.

2) $C > 0$. En este caso la ecuación $x^2 - y^2 = C$ se puede reescribir como sigue

$$\frac{x^2}{C} - \frac{y^2}{C} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{(\sqrt{C})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{C})^2} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ \text{ donde } a = b = \sqrt{C}$$

que es la ecuación normalizada de una hipérbola (Véase el documento "Cónicas y cuádricas" publicadas en el Racó).

En particular,

si $C = 1$ la ecuaci´ón de la curva de nivel $z = 1$ es $x^2 - y^2 = 1$, es decir en los puntos de esta hipérbola el valor de la función es constante y es igual a 1;

si $C = 2$ la ecuación de la curva de nivel $z = 2$ es $\dfrac{x^2}{(\sqrt{2})^2} - \dfrac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$, es decir en los puntos de esta hipérbola el valor de la función es constante y es igual a 2.

3) $C < 0$, $(-C > 0)$. En este caso la ecuación $x^2 - y^2 = C$ se puede reescribir como sigue

$$-\frac{x^2}{-C} + \frac{y^2}{-C} = 1 \Longrightarrow -\frac{x^2}{(\sqrt{-C})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{-C})^2} = 1 \Longrightarrow \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \ \text{ donde } a = b = \sqrt{-C}$$

que es la ecuación normalizada de una hipérbola (Véase el documento "Cónicas y cuádricas" publicadas en el Racó).

En particular,

si $C = -1$ la ecuación de la curva de nivel $z = -1$ es $y^2 - x^2 = 1$, es decir en los puntos de esta hipérbola el valor de la función es constante y es igual a -1;

si $C = -2$ la ecuación de la curva de nivel $z = -2$ es $\dfrac{y^2}{(\sqrt{2})^2} - \dfrac{x^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$, es decir en los puntos de esta hipérbola el valor de la función es constante y es igual a -2.

El dibujo con estas curvas de nivel véase en 7.3 Solucions de la Lista de ejercicios, página 35.

**b)** Si $z(x,y) = C \Longrightarrow 1 - |x| - |y| = C \Longrightarrow |y| = -|x| + 1 - C \Longrightarrow \begin{cases} y = - & |x| + 1 - C \quad \text{si } y \geq 0 \\ y = & |x| - 1 + C \quad \text{si } y < 0 \end{cases}$.

En particular,

si $C = -2$ la ecuación de la curva de nivel $z = -2$ es $\begin{cases} y = - & |x| + 3 \quad \text{si } y \geq 0 \\ y = & |x| - 3 \quad \text{si } y < 0 \end{cases}$.

Para dibujar esta curva de nivel hace falta dibujar la parte de la curva $y = -|x| + 3$

situada en el semiplano superior ($y \geq 0$) y la parte de la curva $y = |x| - 3$ situada en el semiplano inferior ($y < 0$);

si $C = -1$ la ecuación de la curva de nivel $z = -1$ es $\begin{cases} y = - & |x| + 2 \quad \text{si}\, y \geq 0 \\ y = & |x| - 2 \quad \text{si}\, y < 0 \end{cases}$.
Para dibujar esta curva de nivel hace falta dibujar la parte de la curva $y = -|x| + 2$ ubicada en el semiplano superior ($y \geq 0$) y la parte de la curva $y = |x| - 2$ ubicada en el semiplano inferior ($y < 0$);

si $C = 0$ la ecuación de la curva de nivel $z = 0$ es $\begin{cases} y = - & |x| + 1 \quad \text{si}\, y \geq 0 \\ y = & |x| - 1 \quad \text{si}\, y < 0 \end{cases}$.
Para dibujar esta curva de nivel hace falta dibujar la parte de la curva $y = -|x| + 1$ ubicada en el semiplano superior ($y \geq 0$) y la parte de la curva $y = |x| - 1$ ubicada en el semiplano inferior ($y < 0$);

si $C = 1$ la ecuación de la curva de nivel $z = 1$ es $\begin{cases} y = - & |x| \quad \text{si}\, y \geq 0 \\ y = & |x| \quad \text{si}\, y < 0 \end{cases}$.

Notemos que sólo un punto $(0, 0)$ de la curva $y = -|x|$ cumple la condición $y \geq 0$ y ningún punto de la curva $y = |x|$ cumple la condición $y < 0$, es decir la función $z$ alcanza el nivel 1 en el único punto $(0, 0)$.

si $C = 2$ la ecuación de la curva de nivel $z = 1$ es $\begin{cases} y = - & |x| - 1 \quad \text{si}\, y \geq 0 \\ y = & |x| + 1 \quad \text{si}\, y < 0 \end{cases}$.
Notemos que ningún punto de la curva $y = -|x| - 1$ se situa en el semiplano superior, es decir cumple la condición $y \geq 0$ y ningún punto de la curva $y = |x| + 1$ se situa en el semiplano inferior ($y < 0$). Esto significa que no existe la curva de nivel 2, o, lo que es lo mismo, en ningún punto la función $z$ tiene el valor igual a 2.

El dibujo con éstas curvas de nivel véase en 7.3 Solucions de la Lista de ejercicios, página 35.