FIB

Departament d'Estadística
i Investigació Operativa

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

UPC

PROBABILITAT

Novembre 2020

BLOC 1
PROBABILITAT

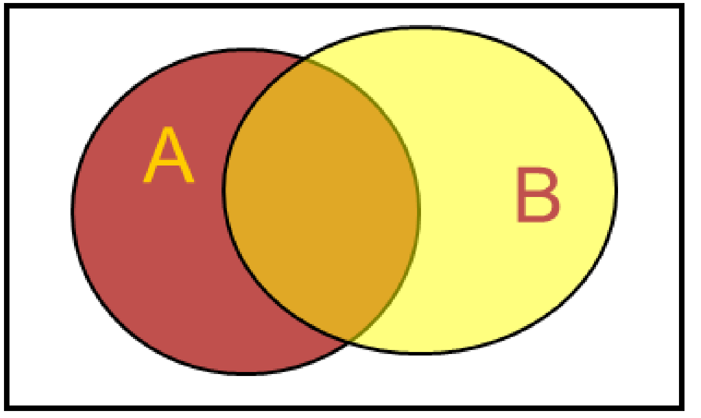
Probabilitat. Propietats

- Siguin A i B dos successos:
  - $0 \leq P(A) \leq 1$
  - $P(\neg A) = 1 - P(A)$
  - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Probabilitat condicionada

- Per definició, si P(B)>0, llavors **P(A|B)** és:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



- **P(A|B)** és la probabilitat de que passi A sabent que ha passat B
- **P(A ∩ B)** és la probabilitat de que passin A i B a la vegada
- En general, **P(A|B) ≠ P(B|A) ≠ P(A ∩ B)**

Probabilitat. Independencia

La **Independència** aplicat a 2 esdeveniments A, B és pot comprovar de diverses maneres:

A través de la **definició**:

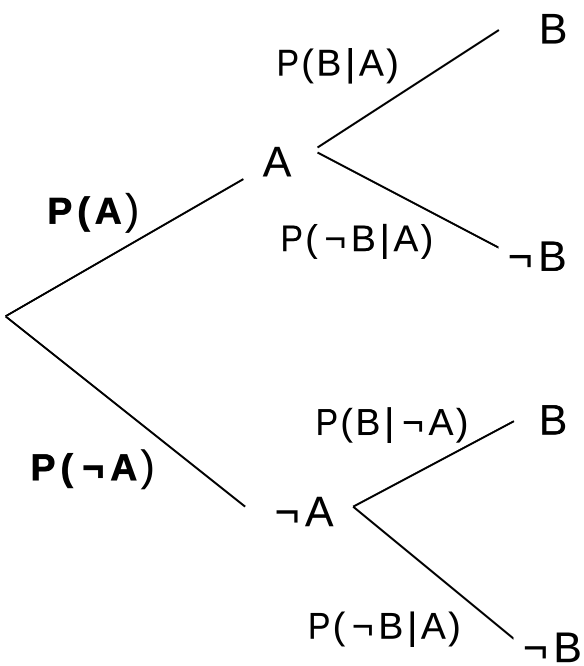
- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- $P(A \cap \neg B) = P(A) \cdot P(\neg B)$
- $P(\neg A \cap B) = P(\neg A) \cdot P(B)$
- $P(\neg A \cap \neg B) = P(\neg A) \cdot P(\neg B)$

A través de la **probabilitat condicionada:**

- $P(A|B) = P(A|\neg B)$
- $P(A|B) = P(A)$
- $P(B|A) = P(B|\neg A)$
- $P(B|A) = P(B)$

Probabilitat condicionada. Representació

Els arbres d’esdeveniments incorporen les probabilitats condicionades i permeten calcular les probabilitats de la intersecció



$\mathbf{P(A \cap B)} = P(A) \cdot P(B|A)$

$\mathbf{P(A \cap \neg B)} = P(A) \cdot P(\neg B|A)$

$\mathbf{P(\neg A \cap B)} = P(\neg A) \cdot P(B|\neg A)$

$\mathbf{P(\neg A \cap \neg B)} = P(\neg A) \cdot P(\neg B|\neg A)$

Probabilitat a posteriori. Fórmula de Bayes

A partir de la definició de probabilitat condicionada:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})}$$

i de la probabilitat de la intersecció aïllada de la condicionada complementària:

$$\mathrm{P}(\mathrm{B} \mid \mathrm{A}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{B} \cap \mathrm{A})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})} \rightarrow P(B \cap A) = P(A \cap B) = P(B \mid A) \cdot P(A)$$

es dedueix la fórmula de Bayes:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{B} \mid \mathrm{A}) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{A})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})}$$

que, coneixent P(A) i P(B), permet passar de P(A|B) a P(B|A) i viceversa (usualment en l'enunciat del cas, les probabilitats condicionades en un sentit són conegudes i interessa calcular les condicionades complementàries). [Exemple: si conec la probabilitat de pluja si està ennuvolat i vull conèixer la probabilitat d'ennuvolat si ha plogut]

Prob. a posteriori. Probabilitats totals i Bayes

El **teorema de Bayes** permet canviar el numerador i denominador de la fórmula de probabilitat condicionada per poder fer els càlculs en algunes situacions. Al denominador s'aplica la llei de probabilitats totals.

Amb particions de 2 successos:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}(B \mid A) \cdot \mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B \mid A) \cdot \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B \mid \neg A) \cdot \mathrm{P}(\neg A)}$$

Amb particions de més de 2 successos:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_\mathrm{i} \mid \mathrm{B}_\mathrm{k}) = \frac{\mathrm{P}(B_k \mid A_i) \cdot \mathrm{P}(A_i)}{\sum_\mathrm{j} \mathrm{P}(B_k \mid A_j) \cdot \mathrm{P}(A_j)}$$

BLOC 2
VARIABLE
ALEATORIA

Variable aleatòria. Funció de prob. i distr. en VAD

- La **funció de probabilitat** (***p_X***) en una VAD defineix la probabilitat puntual de cada un dels possibles valors k:

$$p_X(k) = P(X = k) \quad \textbf{(complint } \sum_k p_X(k) = 1\textbf{)}$$

- La **funció de distribució** (**F_X**) de probabilitat en una VAD defineix la probabilitat acumulada:

$$F_{X(k)} = P(X \leq k) = \sum_{j \leq k} p_X(j)$$

Variable aleatòria. Funció de dens. i distr. en VAC

- En el cas VAC, qualsevol **funció positiva**, $f_X(x) \geq 0$, que compleixi la següent propietat és una <u>funció de densitat</u> vàlida:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$$

- La <u>funció de distribució</u> s'obté amb:

$$F_X(u) = P(X \leq u) = \int_{-\infty}^{u} f_X(x)dx$$

- En les VAC, les probabilitats puntuals valen 0
- El límit inferior de la integral de la funció de distribució serà l'inici del domini de la variable aleatòria.

Variable aleatòria. Càlcul de probabilitats

- **VAD. Atenció a les desigualtats si són estrictes o no!**
  - $P(X = k) = p_X(k)$
  - $P(X \leq k) = F_X(k) = \sum_j^k p_X(j)$
  - $P(X<k) = P(X \leq k\text{-}1) = F_X(k\text{-}1)$
  - $P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$
  - $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X < a) = F_X(b) - F_X(a\text{-}1)$
  - $P(a < X < b) = P(X < b) - P(X \leq a) = F_X(b\text{-}1) - F_X(a)$
- **VAC. És igual si les desigualtats són estrictes o no!**
  - $P(X = k) = 0 \qquad (\neq f_X(k))$
  - $P(X \leq k) = F_X(k)$
  - $P(X<k) = P(X \leq k) = F_X(k)$
  - $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a)$

Probabilitats acumulades. Quantils

- Sigui *X* una variable aleatòria, i α un valor real $(0 \leq \alpha \leq 1)$ diem que x_α és el **quantil α** de X si es compleix: $F_X(x_\alpha) = \alpha$
- Calcular un quantil és el problema invers al càlcul de **probabilitats acumulades**. La funció inversa de la funció de distribució ens retorna x_α

Indicadors de V.A. Com es calculen?

- **Esperança de X**

$$\boldsymbol{VAD} \rightarrow E(X) = \mu_X = \sum_{\forall k} (k \cdot p_X(k))$$

$$\boldsymbol{VAC} \rightarrow E(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)dx$$

- **Variància de X**

$$\boldsymbol{VAD} \rightarrow V(X) = \sigma_X^2 = \sum_{\forall k} \left[\left(k - E(X)\right)^2 \cdot p_X(k) \right] \rightarrow \sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{V(X)}$$

$$\boldsymbol{VAC} \rightarrow V(X) = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - E(X)\right)^2 \cdot f_X(x)dx \rightarrow \sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{V(X)}$$

- **Relació entre Esperança i Variància (en VAD i VAC):**

$$V(X) = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right] = E(X^2) - E(X)^2$$

Indicadors de V.A. Propietats

Siguin *X* i *Y* dues variables aleatòries, i *a* i *b* dos escalars

Propietats de l'Esperança	Propietats de la Variància
$E(a+X) = a + E(X)$	$V(a+X) = V(X)$
$E(bX) = b \cdot E(X)$	$V(bX) = b^2 \cdot V(X)$
$E(a+bX) = a + b\,E(X)$	$V(a+bX) = b^2 \cdot V(X)$
$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$	$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ si són ind.
$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$ si són ind.	$V(X \cdot Y) = ?$

Funcions de probabilitat en parell de VAD

- **Funció de probabilitat conjunta** de X i Y. *És la probabilitat de la intersecció*

$$P_{X,Y}(x,y) = P(X{=}x \cap Y{=}y)$$

- **Funció de probabilitat de X condicionada per Y**. Es calcula com la probabilitat conjunta entra la probabilitat marginal de la variable a la que condicionem

$$P_{X|Y=y}(x) = P_{X,Y}(x,y) \,/\, P_Y(y)$$

- X i Y són **V.A. independents si i només si:**

$$P_{X,Y}(x,y) = P_X(x)\cdot P_Y(y) \quad \Leftrightarrow \quad P_{X|Y=y}(x) = P_X(x) \quad \Leftrightarrow \quad P_{Y|X=x}(y) = P_Y(y)$$

Indicadors de parell de V.A.

- La covariància indica si existeix relació lineal o no, a partir del producte, per cada parell de valors, de la diferència respecte al seu valor esperat

$$\boldsymbol{VAD} \rightarrow Cov(X,Y) = \sum_{\forall x} \sum_{\forall y} (x - E(x))(y - E(y)) \cdot p_{XY}(x,y)$$

$$\boldsymbol{VAC} \rightarrow Cov(X,Y) = \iint_{\forall x,y} (x - E(x))(y - E(y)) \cdot f_{XY}(x,y)\, \mathrm{dxdy}$$

- La correlació indica si existeix relació lineal o no relativitzant-ho a valors entre -1 i 1 (a partir de la covariància i dividint per les desviacions corresponents)

$$corr(X,Y) = \rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

Nota: per qualsevol parell de variables X i Y → $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$

Nota: La correlació és més interpretable per estar estandarditzada:

- Valors proper a 1 indiquen relació lineal **directa** entre les dues variables
- Valors proper a -1 indiquen relació lineal **inversa** entre les dues variables
- Valors proper a 0 indiquen que **no hi ha relació** lineal entre les dues variables
- Si dues variables són independents, tenen **covariància i correlació nul·la** però **l'invers no és cert**.

Indicadors de parell de V.A. Propietats

Siguin X i Y dues variables aleatòries, i a i b dos escalars:

- **Esperança**
  - $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) + Cov(X,Y)$
- **Variància**
  - $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\ Cov(X,Y)$
  - $V(X-Y) = V(X) + V(Y) - 2\ Cov(X,Y)$
- **Covariància**
  - $Cov(aX, bY) = a \cdot b \cdot Cov(X,Y)$
  - $Cov(X,X) = V(X)$

BLOC 3
MODELS DE VARIABLE ALEATORIA

Models de VAD

- **Bernoulli**: Número d'èxits en la realització d'un únic experiment amb 2 possibles resultats: **0** ("no èxit") i **1** ("èxit").
- **Binomial**: Número d'èxits en la repetició de *n* proves de *Bernoulli* independents amb probabilitat constant *p*
- **Geomètrica**: Número d'intents (k) d'un experiment de Bernoulli fins observar el primer èxit
- **Binomial negativa**: Número de repeticions (k) d'un experiment de Bernoulli fins observar ***r*** èxits
- **Poisson**: Número d'ocurrències favorables en un determinat interval de temps o espai

TAULA resum de models de VAD

Distribució	Declaració	Domini	Esperança $E(X) = \mu_X$	Variància $V(X) = \sigma_X^2$
Bernoulli	Bern(p)	0, 1	p	$p \cdot q$
Binomial	B(n,p)	0,1,…,n	$n \cdot p$	$n \cdot p \cdot q$
Geomètrica	Geom(p)	1,2,3,…	1/p	q/p^2
Binomial negativa	BN(r,p)	r, r+1,…	r/p	$q \cdot r/p^2$
Poisson	P(λ)	0, 1, 2,…	λ	λ

$0 < p < 1$ $\quad$ $q = 1 - p$ $\quad$ $n \in N$ $\quad$ $r \in N$ $\quad$ $\lambda \in R^+$

Models de VAC

- **Exponencial**: Distribució del temps entre arribades (ocurrències) en un procés de Poisson. **Propietat de Markov (o de NO memòria):** La distribució de probabilitat d'una variable aleatòria Exponencial no depèn del que hagi passat amb anterioritat al moment present. Té funció de distribució analítica.
- **Uniforme**: VAC amb funció de densitat constant en un determinat rang. Té funció de distribució analítica.
- **Normal**: Model que s'ajusta a valors provinents de múltiples fenòmens trobats en diferents disciplines científiques.

TAULA resum de tots els models rellevants

Distribució	Declaració	Funció de probabilitat o de densitat	Funció distribució	Esperança E(X)	Variància V(X)
Bernoulli	X~Bern(p)	$P_X(k)=\begin{cases} q & k=0 \\ p & k=1 \end{cases}$	$F_X(k)=\sum_{i<=k} P_X(i)$	p	$p\cdot q$
Binomial	X~B(n,p)	$P_X(k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k}$ $k=0,1,\dots,n$ **(R:dbinom(k,n,p))**	$F_X(k)=\sum_{i<=k} P_X(i)$ (taules estadístiques) **(R:pbinom(k,n,p))**	$p\cdot n$	$p\cdot q\cdot n$
Poisson	X~P(λ) *	$P_X(k)=\frac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!} \quad k=0,1,2,\dots$ **(R:dpois(k,λ))**	$F_X(k)=\sum_{i<=k} P_X(i)$ (taules estadístiques) **(R:ppois(k,λ))**	λ	λ
Exponencial	X~Exp(λ) *	$f_X(x)=\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x} \quad x>0$ **(R:dexp(x,λ))**	$F_X(x)=1-e^{-\lambda\cdot x}$ **(R:pexp(x,λ))**	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Uniforme	X~U[a,b]	$f_X(x)=\frac{1}{b-a} \quad a<x<b$ **(R:dunif(k,a,b))**	$F_X(x)=\frac{x-a}{b-a}$ **(R:punif(k,a,b))**	$\frac{(a+b)}{2}$	$(b-a)^2/12$
Normal	X~N(μ,σ)	$f_X(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ **(R:dnorm(k,μ,σ))**	$F_X(x)=?$ (taules estadístiques N(0,1)) **(R:pnorm(k,μ,σ))**	μ	σ^2

$0<p<1 \qquad q=1-p \qquad n\in\mathbb{N} \qquad r\in\mathbb{N} \qquad \lambda\in\Re^+$

*λ paràmetre del procés Poisson: variables Poisson i Exponencial

Model Normal. Propietats

- La funció de densitat $f(x)$ és simètrica respecte al punt $x = \mu$. Això é molt útil per calcular probabilitats i quantils

- En qualsevol VAC X Normal sempre es compleix:

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0.68$$
$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.95$$
$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.99$$

- Com que la combinació lineal de variables Normals és Normal, la estandardització consisteix en:

$$X \sim N(\mu, \sigma) \rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

Teorema Central del Límit (TCL)

- Siguin X_1, X_2, ..., X_n independents i idènticament distribuïdes amb esperança μ i desviació típica σ. Llavors:

$$S_n = \sum X_i \xrightarrow[n\ gran]{} N(n\mu, \sigma\sqrt{n}) \Rightarrow \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\ gran]{} N(0,1)$$

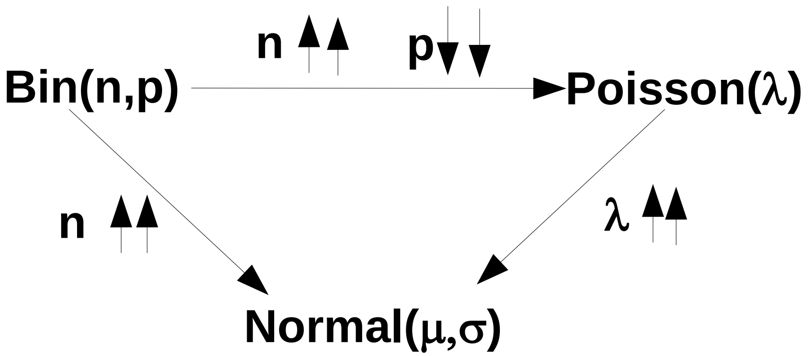
$$\bar{X}_n = \frac{\sum X_i}{n} \xrightarrow[n\ gran]{} N(\mu, \sigma/\sqrt{n}) \Rightarrow \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\sum X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\ gran]{} N(0,1)$$

- És a dir, amb n gran, la funció de distribució de la variable Suma (S_n) i mitjana ($\bar{X}_n$) tendeix a una Normal amb uns determinats paràmetres **independentment de la distribució de les X_i**
- La convergència a la normal és més lenta si la distribució de les X_i és **poc simètrica** o són **variables discretes** (especialment si només pot prendre pocs valors):

TCL. Relacions entre distribucions

Una de les aplicacions pràctiques del TCL és que la distribució Normal es pot emprar com a aproximació d'altres distribucions:

- La **distribució Binomial** amb paràmetres *n* i *p* es pot aproximar per una Normal quan *n* és gran i la *p* no massa extrema (ni molt a prop de 0 ni de 1). Llavors, els paràmetres de la Normal són
  - $\mu = n \cdot p$
  - $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$
- La **distribució de Poisson** amb paràmetre *λ* es pot aproximar per una Normal quan la *λ* és prou gran. Llavors els paràmetres de la Normal són:
  - $\mu = \lambda$
  - $\sigma^2 = \lambda$



Nota: la Binomial es pot aproximar a una Poisson quan la *n* és prou gran i la *p* prou petita