Nos interesan (PARÁMETROS) | Disponemos de (ESTADÍSTICOS)

$$\Theta \left\{ \begin{array}{lll} \mu & \qquad \bar{x} & \\ \sigma & \qquad s & \\ \pi & \qquad p & [\text{Proporción}] \end{array} \right\} \hat{\Theta}$$

↑ Parámetros poblacionales | ↑ Valores muestrales

$\hat{\Theta}$ es un **ESTIMADOR** de Θ

Intervalos de confianza

Ejemplo: Embotelladora debería llenar botellas de un litro con volumen $1\,\ell = 1000$ cc.

Observamos: $\bar{x} = 995$ cc $(= \hat{\mu})$

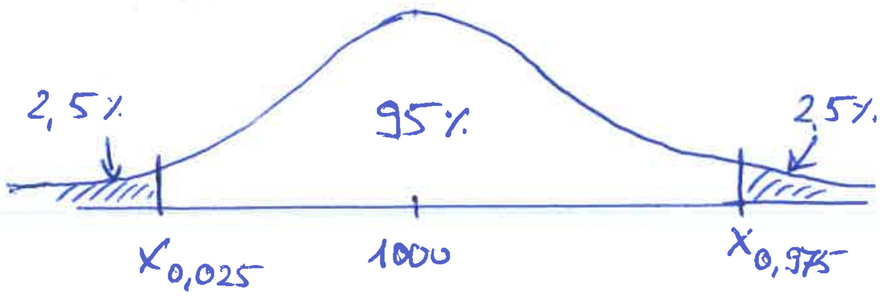
→ Estimación puntual

¿Nos creemos que $\mu = 1000$ cc?

Imprescindible para tomar una decisión: n, σ

Idea: Calcular $IC(\mu;\ \underbrace{1-\alpha}_{\text{Nivel de confianza, p.e. } 95\%})$

Repaso: Si tenemos $X \sim N(1000, \sigma = 10)$, ¿entre qué valores de volumen observamos un 95% de las botellas?



$X_{0,975} = 1000 + 10 \cdot 1,96 = 1019,6$ [cc]

$X_{0,025} = 1000 - 10 \cdot 1,96 = 880,4$ [cc]

Es decir, parece "normal" que ~~una~~ ~~así~~ el volumen de una botella sea 995 cc.

Y, ¿si se trata del volumen medio de n botellas?

P.e. $n = 100$

$$\leadsto \bar{X} \underset{TCL}{\sim} N\left(1000, \sigma = \frac{10}{\sqrt{100}} = 1\right)$$

$$\leadsto \bar{x}_{0,975} = 1000 + 1 \cdot 1,96 = 1001,96 \approx 1002 \text{ [cc]}$$

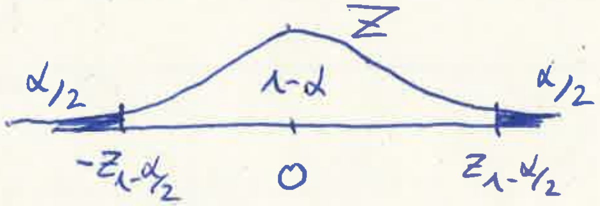
$$\bar{x}_{0,025} = 1000 - 1,96 \approx 998 \text{ [cc]}$$

$\Rightarrow$ Si observamos $\bar{x}_{100} = 995$ entonces parece que la embotelladora no funciona bien.

Entonces, ¿qué valores de μ parecen posibles si tenemos $\bar{x}_{100} = 995$, $\sigma = 10$ cc & $n = 100$?

Sabemos que $\bar{X}_{n} \sim N(\mu, \sigma/\sqrt{n}) \Rightarrow Z = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

$$\Rightarrow P\left(-z_{1-\alpha/2} \leq \frac{\bar{x}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$



$$\Longleftrightarrow P\left(\bar{x}_n - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x}_n + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Intervalo de confianza para π

- $X_1, \ldots, X_n \sim B(1, \pi)$ iid

- $\mu = \pi \quad , \quad \sigma^2 = \pi(1-\pi)$

- $\hat{\pi} = \bar{X}_n = p$

- **TCL**: $\bar{X}_n \sim N\left(\pi, \sigma^2 = \frac{\pi(1-\pi)}{n}\right)$

$$\rightsquigarrow \frac{\bar{X}_n - \pi}{\sqrt{\pi(1-\pi)}/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

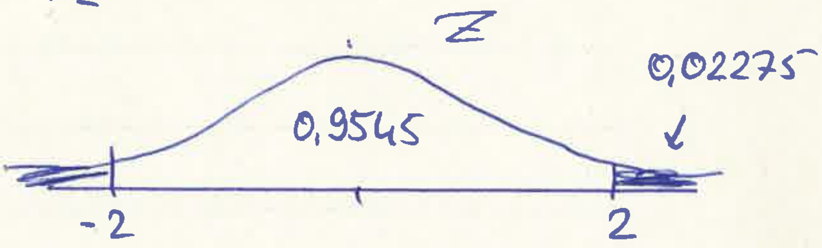
$$\& \quad \frac{p - \pi}{\sqrt{p(1-p)}/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \underset{\downarrow}{\overset{n \geq 100}{\approx}} N(0,1)$$

$\rightsquigarrow IC(\pi; 1-\alpha) =$ **FORMULARI**

Ejemplo: $n = 1000$

$1 - \alpha = 0{,}9545 \iff \alpha/2 = 0{,}02275$

$\rightsquigarrow Z_{0{,}97725} = 2$



$\hat{p} = 0{,}5$

$\rightsquigarrow$ Margen de error: $2 \cdot \frac{\sqrt{0.5 \cdot 0.5}}{\sqrt{1000}} = 0{,}0316 \mathrel{\hat{=}} 3{,}16\%$

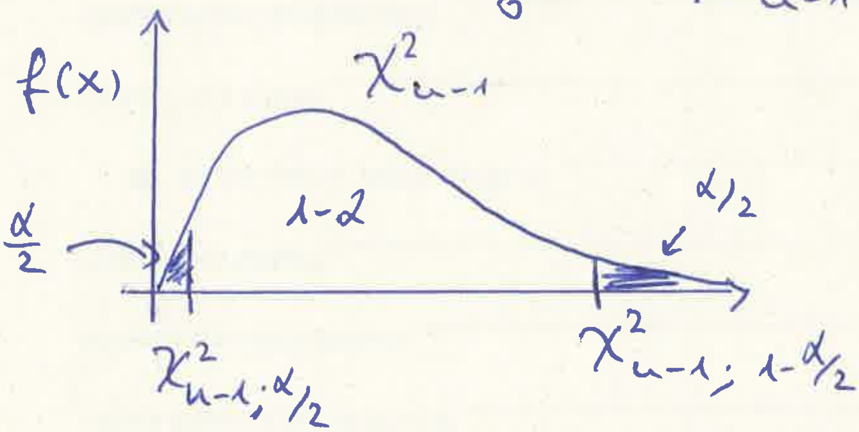
Intervalo de confianza para σ

- **Ejemplo:** Con $\hat{\sigma} = s = 10$ [cc] y $n = 30$, ¿cuál es el margen de error de esta estimación?

- Distribución de s: ¿?

- Se puede demostrar que (si $X_i \sim N$, $i = 1, \dots, n$)

$$(n-1) \cdot \frac{s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$



⚠ No hay simetría

Transpa 33

$$IC(\sigma^2; 1-\alpha) = \left[\frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}}, \frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{n-1;\alpha/2}}\right]$$

Ejemplo: $s = 10$, $n = 30$, $1-\alpha = 0{,}95$

$$\chi^2_{29;0{,}025} = 16{,}047$$

$$\chi^2_{29;0{,}975} = 45{,}722$$

$\rightsquigarrow$ $IC(\sigma; 0{,}95) = [7{,}96, 13{,}44]$

Pruebas de hipótesis

Ejemplo embotelladora:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x} = 997 \text{ cc} \\ n = 50 \\ s = \hat{\sigma} = 10 \end{array}\right\}$$ ¿Podemos decir que la maquina no funciona bien?

Seguramente, no podremos decir que funciona bien, pero, ¿podremos afirmar lo contrario?

Procedimiento

- $H_0: \mu = 1000$ cc vs. $H_1: \mu \neq 1000$

  $\mu = \mu_0$ vs. $\mu \neq \mu_0$

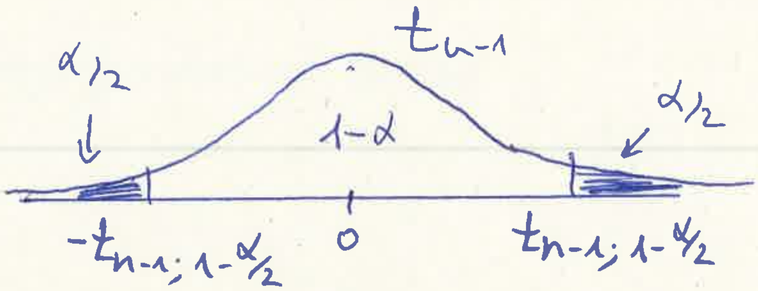
  $\rightarrow$ Contraste bilateral

- ¿Es $\bar{x} = 997$ con $n=50$ "probable" bajo H_0?

  Necesitamos saber que distribución tiene $\bar{X}$.

$$\bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma/\sqrt{n}) \iff \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$\implies T = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \overset{H_0}{\sim} t_{n-1}$$



Idea: Si el valor de T se aleja mucho de 0 no me creo H_0

→ Si $|t| > t_{n-1; 1-\alpha/2}$ se rechaza H_0
(ya que la probabilidad sería muy pequeña bajo H_0)

Ejemplo: $\bar{x} = 997$, $n = 50$, $s = 10$, $\alpha = 0{,}05$

→ $t_{49; 0{,}975} = 2{,}01$

$$t = \frac{997 - 1000}{10/\sqrt{50}} = -2{,}12 < -2{,}01$$

→ **Rechazamos H_0**