Taller M2: FUNCIONS DE DIVERSES VARIABLES

2019-20, M2, FIB

TALLER 8.2

Problema 10

10 Calculeu la recta normal i el pla tangent a:

a) la superfície $z = \dfrac{2xy}{x^2+y}$ en el punt $(2, -2, -4)$.

b) la superfície $z = \sin x + 2\cos y$ en el punt $(\pi/2, 0, 3)$.

Teoria

Pla tangent a la superfície F(x,y,z)=0 en el punt (a,b,c)

$\nabla F(a,b,c) \cdot (x-a,\ y-b,\ z-c)=0$

(pla que passa pel punt (a,b,c) i té vector normal el gradient)

Recta normal a la superfície F(x,y,z)=0 en el punt (a,b,c)

$(x,y,z)=(a,b,c)+\lambda\ \nabla F(a,b,c)$

(recta que passa pel punt (a,b,c) i té vector director el gradient)

Apartat a)

Escrivim la superfície igualant a zero: $\dfrac{2\,x\,y}{x^2+y} - z = 0$

Funció

$F := (x, y, z) \rightarrow \dfrac{2\,x\,y}{x^2+y} - z$

$$F := (x, y, z) \mapsto \frac{2\,y\,x}{x^2+y} - z \qquad \textbf{(1.1.2.1)}$$

Comprovem que el punt és de la superfície

$F(2,-2,-4)$

$$0 \tag{1.1.2.2}$$

Càlcul del vector gradient

- Derivada parcial respecte x

$diff(F(x,y,z),x)$

$$\frac{2y}{x^2+y} - \frac{4x^2y}{(x^2+y)^2} \tag{1.1.2.3}$$

$factor(\%)$

$$-\frac{2y(x^2-y)}{(x^2+y)^2} \tag{1.1.2.4}$$

Substituïm les coordenades del punt

$subs\left(\{x=2, y=-2, z=-4\}, -\frac{2y(x^2-y)}{(x^2+y)^2}\right)$

$$6 \tag{1.1.2.5}$$

- Derivada parcial respecte y

$diff(F(x,y,z),y)$

$$\frac{2x}{x^2+y} - \frac{2xy}{(x^2+y)^2} \tag{1.1.2.6}$$

$factor(\%)$

$$\frac{2x^3}{(x^2+y)^2} \tag{1.1.2.7}$$

Substituïm les coordenades del punt

$subs(\{x=2, y=-2, z=-4\}, \%)$

$$4 \tag{1.1.2.8}$$

- Derivada parcial respecte z

$diff(F(x,y,z),z)$ No cal substituir res perquè és constant

$\nabla F(2, -2, -4) = (6, 4, -1)$

Equació del pla tangent

$(6, 4, -1) \cdot (x-2, y+2, z+4) = 0$

$6(x-2) + 4(y+2) - (z+4) = 0$

$6x + 4y - z = 8$

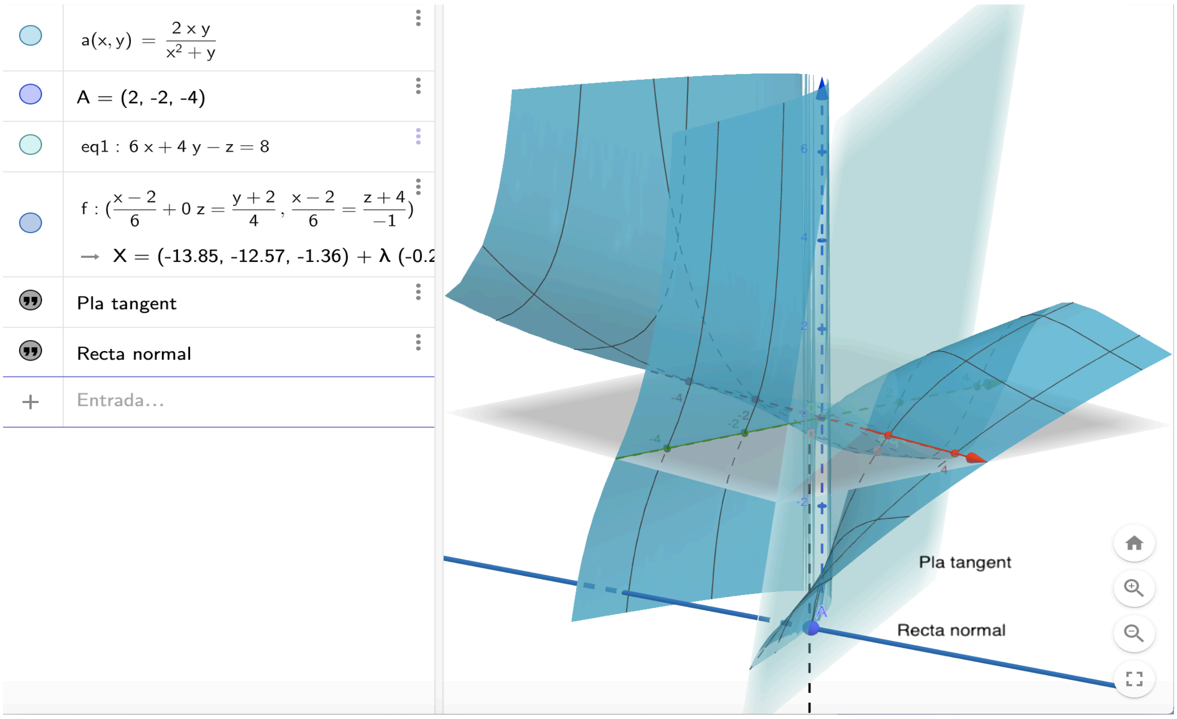
<u>Equació de la recta normal</u>

<u>vectorial</u>

$(x, y, z) = (2, -2, -4) + \lambda (6, 4, -1)$

<u>contínua</u>

$$\frac{x-2}{6} = \frac{y+2}{4} = \frac{z+4}{-1}$$



Apartat b)

Escrivim la superfície igualant a zero: $\sin(x) + 2\cos(y) - z = 0$

Funció

$F := (x, y, z) \rightarrow \sin(x) + 2\cos(y) - z$

$$F := (x, y, z) \mapsto \sin(x) + 2\cos(y) - z \tag{1.1.3.1}$$

Comprovem que el punt és de la superfície

$F\left(\frac{\text{Pi}}{2}, 0, 3\right)$

$$0 \tag{1.1.3.2}$$

<u>Càlcul del vector gradient</u>

- Derivada parcial respecte x

$diff(F(x, y, z), x)$

$$\cos(x) \tag{1.1.3.3}$$

Substituïm les coordenades del punt

$subs\left(\left\{x = \frac{\text{Pi}}{2}, y = 0, z = 3\right\}, \cos(x)\right)$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \tag{1.1.3.4}$$

$evalf(\%)$

$$0. \tag{1.1.3.5}$$

- Derivada parcial respecte y

$diff(F(x, y, z), y)$

$$-2\sin(y) \tag{1.1.3.6}$$

Substituïm les coordenades del punt

$subs\left(\left\{x = \frac{\text{Pi}}{2}, y = 0, z = 3\right\}, \%\right)$

$$-2\sin(0) \tag{1.1.3.7}$$

$evalf(\%)$

$$0. \tag{1.1.3.8}$$

- Derivada parcial respecte z

$diff(F(x, y, z), z)$

$$-1 \tag{1.1.3.9}$$

No cal substituir res perquè és constant

$\nabla F\left(\frac{\pi}{2}, 0, 3\right) = (0, 0, -1)$

Equació del pla tangent

$(0, 0, -1) \cdot \left(x - \frac{\text{Pi}}{2}, y, z - 3\right) = 0$

$-(z - 3) = 0$

$z = 3$

Equació de la recta normal

vectorial

$(x, y, z) = \left(\frac{\text{Pi}}{2}, 0, 3\right) + \lambda(0, 0, -1)$

cartesianes

$$x = \frac{\pi}{2}$$
$$y = 0$$