2 SUCESIONES DE NÚMEROS REALES

(Resumen teórico)

2.1 Introducción

Una *sucesión* (de números reales) es una aplicación $a\colon D \to \mathbb{R}$, cuyo dominio D es un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. La imagen de $n \in D$ por a se denota a_n (en lugar de $a(n)$, la notación usual en aplicaciones), y se llama *término* n*–ésimo* de la sucesión. La sucesión a se denota también (a_n).

La forma más usual de definir una sucesión (a_n) consiste en dar explícitamente la imagen de cada natural n del dominio (por ejemplo, $a_n = n^2 - 3$). Sin embargo, en ciertos contextos la forma natural en que aparecen las sucesiones es la recurrente, que consiste en dar los primeros términos $a_0, \dots, a_{k-1}$ y una relación que, para $n \geq k$, permita calcular a_n a partir de los k términos anteriores $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k}$. Por ejemplo, una progresión aritmética es una sucesión en que cada término se obtiene del anterior sumando un número real fijo d denominado diferencia. En este caso, tenemos una sucesión definida mediante un primer término a_1 y la recurrencia $a_n = a_{n-1} + d$ para $n \geq 2$.

2.2 Cotas

Sea (a_n) una sucesión. Si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq k$ para todo n, se dice que k es una *cota superior* de (a_n) y que (a_n) está *acotada superiormente*; en ese caso, la menor de las cotas superiores se denomina *supremo* de (a_n). Si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $k \leq a_n$ para todo n, se dice que k es una *cota inferior* de (a_n) y que (a_n) está acotada inferiormente; en ese caso, la mayor de las cotas inferiores se denomina *ínfimo* de (a_n). Si (a_n) está acotada superior e inferiormente, se dice que (a_n) está *acotada*.

2.3 Límites

El *límite* de una sucesión (a_n) es

- el número real ℓ si para cada real $\epsilon > 0$ existe un natural N tal que $|a_n - \ell| < \epsilon$ para todo $n \geq N$.
- $+\infty$ si para cada número real $M > 0$ existe un natural N tal que $a_n > M$ para todo $n \geq N$.
- $-\infty$ si para cada número real $M < 0$ existe un natural N tal que $a_n < M$ para todo $n \geq N$.

Las notaciones

$$\lim_n a_n = \ell, \qquad \lim_n a_n = +\infty, \qquad \lim_n a_n = -\infty$$

indican, respectivamente, que el límite de (a_n) es el número real ℓ, $+\infty$ o $-\infty$, respectivamente. Si el límite de (a_n) es un número real ℓ, se dice que la sucesión es *convergente* y que *converge* hacia ℓ; si es $\pm\infty$, se dice que es *divergente*. Una sucesión que no es convergente ni divergente se denomina *oscilante*. Determinar el *carácter* de una sucesión es averiguar si es convergente, divergente u oscilante.

Una primera propiedad de las sucesiones convergentes es que son sucesiones acotadas. El recíproco no es cierto, como prueba, por ejemplo, la sucesión $a_n = (-1)^n$, que es acotada pero no convergente.

Algunas propiedades involucran operaciones con dos límites. Si los dos límites son números reales, el significado de la operación es claro, pero si uno de ellos o los dos son $+\infty$ o $-\infty$, entonces debe entenderse lo siguiente (con las propiedades conmutativas de la suma y el producto sobreentendidas):

- $(+\infty) + \ell = +\infty$; $\quad (-\infty) + \ell = -\infty$.
  $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$; $\quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty$.
- si $\ell > 0$, $\quad (+\infty) \cdot \ell = +\infty$ y $(-\infty) \cdot \ell = -\infty$;
  si $\ell < 0$, $\quad (+\infty) \cdot \ell = -\infty$ y $(-\infty) \cdot \ell = +\infty$;
  $(+\infty)(+\infty) = +\infty$; $\quad (+\infty)(-\infty) = -\infty$; $\quad (-\infty)(-\infty) = +\infty$;
- si $\ell > 0$, $\quad (+\infty)^\ell = +\infty$;
  $(+\infty)^{+\infty} = +\infty$; $\quad$ si $1 < \ell$, $\ell^{+\infty} = +\infty$; $\quad$ si $0 < \ell < 1$, $\ell^{+\infty} = 0$.

Los límites de sucesiones tienen las propiedades siguientes.

- Si una sucesión tiene límite, entonces este límite es único.
- Si existen $\lim_n a_n$ y $\lim_n b_n$, entonces $\lim_n (a_n + b_n) = \lim_n a_n + \lim_n b_n$, con excepción del caso $+\infty + (-\infty)$.

- Si existen $\lim_n a_n$ y $\lim_n b_n$, entonces $\lim_n (a_n \cdot b_n) = \lim_n a_n \cdot \lim_n b_n$, con excepción de los casos $0 \cdot (\pm\infty)$.
- Si existen $\lim_n a_n$ y $\lim_n b_n = \ell \neq 0$, entonces $\lim_n (a_n/b_n) = \dfrac{1}{\ell}\left(\lim_n a_n\right)$.
- $\lim_n |a_n| = +\infty \;\Leftrightarrow\; \lim_n (1/a_n) = 0$.
- Si $\lim_n a_n = \square$ y $\lim_n b_n = \diamond$, y la sucesión $c_n = a_n^{b_n}$ está definida, entonces $\lim_n c_n = \square^{\diamond}$, excepto en los casos $1^{\pm\infty}$, 0^0 y $(+\infty)^0$.

Si las propiedades anteriores no permiten el cálculo del límite, se tienen los casos de indeterminación, que suelen representarse por $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$, ∞/∞, $0/0$, 1^{∞}, 0^0 y ∞^0. El cálculo de límites de sucesiones consiste, esencialmente, en estudiar métodos que permitan decidir, cuando se presenta una de estas indeterminaciones, si el límite existe y calcularlo.

Otras propiedades de los límites son las siguientes.

- Si el límite de una sucesión (a_n) es distinto de cero, entonces existe un término de la sucesión a partir del cual todos los restantes tienen el mismo signo que el límite.
- Si existe un natural N tal que $a_n \leq b_n \leq c_n$ para todo $n \geq N$, y $\lim_n a_n = \ell$, $\lim_n b_n = r$, $\lim_n c_n = s$, entonces $\ell \leq r \leq s$.
- Si existe un natural N tal que $b_n \leq a_n \leq c_n$ para todo $n \geq N$, y $\lim_n b_n = \ell = \lim_n c_n$, entonces $\lim_n a_n = \ell$.
- $\lim_n a_n = \ell \;\Rightarrow\; \lim_n |a_n| = |\ell|$; $\quad \lim_n |a_n| = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_n a_n = 0$.
- Si $\lim_n a_n = 0$ y (b_n) es una sucesión acotada, entonces $\lim_n a_n b_n = 0$.
- Si $\lim_n a_n = +\infty$ y (b_n) es una sucesión acotada inferiormente, entonces $\lim_n (a_n + b_n) = +\infty$. Análogamente, si $\lim_n a_n = -\infty$ y (b_n) es una sucesión acotada superiormente, entonces $\lim_n (a_n + b_n) = -\infty$.
- Si $\lim_n a_n = \pm\infty$ y (b_n) tiene una cota inferior positiva, entonces $\lim_n a_n b_n = \pm\infty$.

2.4 Sucesiones monótonas

Una sucesión (a_n) es *creciente* si $a_m \leq a_n$ para todo $m < n$ y es *estrictamente creciente* si $a_m < a_n$ para todo $m < n$. Análogamente, (a_n) es *decreciente* si $a_n \leq a_m$ para todo $m < n$ y *estrictamente decreciente* si $a_n < a_m$ para todo $m < n$). Una sucesión *monótona* es una sucesión creciente o decreciente y una sucesión *estrictamente monótona* es una sucesión estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

Teorema de la convergencia monótona. Toda sucesión monótona y acotada es convergente.
De hecho, para una sucesión creciente y acotada superiormente, el límite es el supremo, y para una decreciente y acotada inferiormente el límite es el ínfimo.
Un importante ejemplo de sucesión monótona y acotada es $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
Esta sucesión es estrictamente creciente, y acotada entre 2 y 3. Se puede consultar la demostración en muchos textos. Su límite es un número irracional denominado número de Euler, denotado por e, y su valor aproximado es $2{,}71828183\ldots$

En relación con este límite, se cumplen las siguientes propiedades.

- Si (a_n) es una sucesión y $\lim |a_n| = +\infty$, entonces $\lim \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$.
- Si (a_n) y (b_n) son sucesiones tales que

$$\lim a_n = 1, \quad \lim |b_n| = +\infty, \quad \lim b_n(a_n - 1) = L, \quad \text{entonces}$$

$$\lim (a_n)^{b_n} = \begin{cases} 0 & \text{if } L = -\infty, \\ e^L & \text{if } L \in \mathbb{R}, \\ +\infty & \text{if } L = +\infty. \end{cases}$$

2.5 Criterios para el cálculo de límites

Criterio de Stolz. Si (a_n) y (b_n) son sucesiones y (b_n) es estrictamente creciente y

$$\lim_n b_n = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_n \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \quad \text{entonces} \quad \lim_n \frac{a_n}{b_n} = L.$$

Criterio de la raíz. Si (a_n) es una sucesión tal que $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, se cumple:

(i) si $L < 1$, entonces $\lim_n a_n = 0$;

(ii) si $L > 1$, entonces $\lim_n |a_n| = +\infty$.

Criterio del cociente. Sea (a_n) una sucesión tal que existe un natural N con la propiedad de que $a_n \neq 0$ para todo $n > N$. Supongamos que

$$\lim_n \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

(i) Si $L < 1$, entonces $\lim_n a_n = 0$;

(ii) si $L > 1$, entonces $\lim_n |a_n| = +\infty$.

La semejanza entre los dos enunciados anteriores sugiere que hay alguna relación entre $\lim_n |a_n|/|a_{n-1}|$ y $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|}$. En efecto, así es:

- Sea (a_n) una sucesión y supongamos que existe un natural N tal que $a_n \neq 0$ para todo $n > N$. Si

$$\lim_n \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \quad \text{entonces} \quad \lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = L.$$

Sin embargo, para una sucesión (a_n), puede ocurrir que la sucesión $(\sqrt[n]{|a_n|})$ tenga límite y la sucesión $(|a_n|/|a_{n-1}|)$ no lo tenga.

2.6 Subsucesiones

Una subsucesión de una sucesión (a_n) es una sucesión obtenida tomando infinitos términos de (a_n) manteniendo su posición relativa en la sucesión.

Por ejemplo, si en la sucesión $a_n = n^2 - 15$ tomamos sólo los términos de subíndice par, es decir, $D' = \{2k \in \mathbb{N} : k \neq 1\}$, obtenemos la subsucesión $a_{2k} = (2k)^2 - 15 = 4k^2 - 15$.

Usualmente, si (a_n) es una sucesión, una subsucesión se denota por (a_{n_k}). En el ejemplo anterior, $n_k = 2k$.

- Una sucesión es convergente y tiene límite ℓ si, y sólo si, todas sus subsucesiones son también convergentes y de límite ℓ.

Este resultado se utiliza a veces para demostrar que una sucesión no es convergente mediante la obtención de dos subsucesiones de límites diferentes.

Por ejemplo, la sucesión $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$ no es convergente, porque las subsucesiones a_{2k} y a_{2k-1} tienen límites 1 y -1, respectivamente.