TEMA 8

—

PROBLEMES

M2
GEI
FIB - UPC

Problema 1

Trobeu les derivades parcials de primer ordre de la funció $f(x, y) = (\sin x)^{\sin y}$.

Problema 1

Trobeu les derivades parcials de primer ordre de la funció $f(x, y) = (\sin x)^{\sin y}$.

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sin x)^{\sin y} = \sin y(\sin x)^{\sin y - 1}(\sin x)'$$

Problema 1

Trobeu les derivades parcials de primer ordre de la funció $f(x,y) = (\sin x)^{\sin y}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(\sin x)^{\sin y} &= \sin y(\sin x)^{\sin y - 1}(\sin x)' \\ &= \sin y(\sin x)^{\sin y - 1}\cos x\end{aligned}$$

Problema 1

Trobeu les derivades parcials de primer ordre de la funció $f(x,y) = (\sin x)^{\sin y}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(\sin x)^{\sin y} &= \sin y(\sin x)^{\sin y-1}(\sin x)' \\ &= \sin y(\sin x)^{\sin y-1}\cos x\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\sin x)^{\sin y} = \ln(\sin x)(\sin x)^{\sin y}(\sin y)'$$

Problema 1

Trobeu les derivades parcials de primer ordre de la funció $f(x, y) = (\sin x)^{\sin y}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(\sin x)^{\sin y} &= \sin y(\sin x)^{\sin y - 1}(\sin x)' \\
&= \sin y(\sin x)^{\sin y - 1}\cos x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}(\sin x)^{\sin y} &= \ln(\sin x)(\sin x)^{\sin y}(\sin y)' \\
&= \ln(\sin x)(\sin x)^{\sin y}\cos y
\end{aligned}$$

Problema 1

Trobeu les derivades parcials de primer ordre de la funció $f(x,y) = (\sin x)^{\sin y}$.

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sin x)^{\sin y} = \sin y(\sin x)^{\sin y-1}(\sin x)' = \sin y(\sin x)^{\sin y-1}\cos x$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\sin x)^{\sin y} = \ln(\sin x)(\sin x)^{\sin y}(\sin y)' = \ln(\sin x)(\sin x)^{\sin y}\cos y$$

Problema 2

Sigui $f(x, y) = x^2 + y^2$. Calculeu la derivada direccional de la funció f al punt $P = (2, 3)$ en la direcció $\vec{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Problema 2

Sigui $f(x, y) = x^2 + y^2$. Calculeu la derivada direccional de la funció f al punt $P = (2, 3)$ en la direcció $\vec{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Recordeu que si $\|\vec{u}\| = 1$ aleshores $D_{\vec{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}$

Problema 2

Sigui $f(x, y) = x^2 + y^2$. Calculeu la derivada direccional de la funció f al punt $P = (2, 3)$ en la direcció $\vec{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Recordeu que si $\|\vec{u}\| = 1$ aleshores $D_{\vec{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}$

$$f_x(x, y) = 2x$$

Problema 2

Sigui $f(x,y) = x^2 + y^2$. Calculeu la derivada direccional de la funció f al punt $P = (2,3)$ en la direcció $\vec{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

$\boxed{\text{Recordeu que si } \|\vec{u}\| = 1 \text{ aleshores } D_{\vec{u}}f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}}$

$$f_x(x,y) = 2x \implies f_x(P) = 2 \times 2 = 4$$

Problema 2

Sigui $f(x,y) = x^2 + y^2$. Calculeu la derivada direccional de la funció f al punt $P = (2,3)$ en la direcció $\vec{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Recordeu que si $\|\vec{u}\| = 1$ aleshores $D_{\vec{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}$

$$f_x(x,y) = 2x \implies f_x(P) = 2 \times 2 = 4$$

$$f_y(x,y) = 2y$$

Problema 2

Sigui $f(x,y) = x^2 + y^2$. Calculeu la derivada direccional de la funció f al punt $P = (2,3)$ en la direcció $\vec{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Recordeu que si $\|\vec{u}\| = 1$ aleshores $D_{\vec{u}}f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}$

$$f_x(x,y) = 2x \implies f_x(P) = 2 \times 2 = 4$$

$$f_y(x,y) = 2y \implies f_y(P) = 2 \times 3 = 6$$

Problema 2

Sigui $f(x,y) = x^2 + y^2$. Calculeu la derivada direccional de la funció f al punt $P = (2,3)$ en la direcció $\vec{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Recordeu que si $\|\vec{u}\| = 1$ aleshores $D_{\vec{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}$

$$\left.\begin{array}{l} f_x(x,y) = 2x \implies f_x(P) = 2 \times 2 = 4 \\ \\ f_y(x,y) = 2y \implies f_y(P) = 2 \times 3 = 6 \end{array}\right\} \implies \nabla f(P) = (4,6)$$

Problema 2

Sigui $f(x,y) = x^2 + y^2$. Calculeu la derivada direccional de la funció f al punt $P = (2,3)$ en la direcció $\vec{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

$\boxed{\text{Recordeu que si } \|\vec{u}\| = 1 \text{ aleshores } D_{\vec{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}}$

$$\left.\begin{array}{l} f_x(x,y) = 2x \implies f_x(P) = 2 \times 2 = 4 \\ \\ f_y(x,y) = 2y \implies f_y(P) = 2 \times 3 = 6 \end{array}\right\} \implies \nabla f(P) = (4,6)$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\left(\tfrac{3}{5}\right)^2 + \left(\tfrac{4}{5}\right)^2}$$

Problema 2

Sigui $f(x,y) = x^2 + y^2$. Calculeu la derivada direccional de la funció f al punt $P = (2,3)$ en la direcció $\vec{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

$\boxed{\text{Recordeu que si } \|\vec{u}\| = 1 \text{ aleshores } D_{\vec{u}}f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}}$

$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y) = 2x &\implies f_x(P) = 2 \times 2 = 4 \\ f_y(x,y) = 2y &\implies f_y(P) = 2 \times 3 = 6 \end{aligned}\right\} \implies \nabla f(P) = (4,6)$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}}$$

Problema 2

Sigui $f(x, y) = x^2 + y^2$. Calculeu la derivada direccional de la funció f al punt $P = (2, 3)$ en la direcció $\vec{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

$\boxed{\text{Recordeu que si } \|\vec{u}\| = 1 \text{ aleshores } D_{\vec{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}}$

$$\left.\begin{array}{l} f_x(x, y) = 2x \implies f_x(P) = 2 \times 2 = 4 \\ \\ f_y(x, y) = 2y \implies f_y(P) = 2 \times 3 = 6 \end{array}\right\} \implies \nabla f(P) = (4, 6)$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}}$$

Problema 2

Sigui $f(x,y) = x^2 + y^2$. Calculeu la derivada direccional de la funció f al punt $P = (2,3)$ en la direcció $\vec{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Recordeu que si $\|\vec{u}\| = 1$ aleshores $D_{\vec{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}$

$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y) = 2x &\implies f_x(P) = 2 \times 2 = 4 \\ f_y(x,y) = 2y &\implies f_y(P) = 2 \times 3 = 6 \end{aligned}\right\} \implies \nabla f(P) = (4,6)$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = \sqrt{1} = 1$$

Problema 2

Sigui $f(x,y) = x^2 + y^2$. Calculeu la derivada direccional de la funció f al punt $P = (2,3)$ en la direcció $\vec{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Recordeu que si $\|\vec{u}\| = 1$ aleshores $D_{\vec{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}$

$$\left.\begin{array}{l} f_x(x,y) = 2x \implies f_x(P) = 2 \times 2 = 4 \\ \\ f_y(x,y) = 2y \implies f_y(P) = 2 \times 3 = 6 \end{array}\right\} \implies \nabla f(P) = (4,6)$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = \sqrt{1} = 1$$

$$D_{\vec{v}} f(P) = (4,6) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

Problema 2

Sigui $f(x,y) = x^2 + y^2$. Calculeu la derivada direccional de la funció f al punt $P = (2,3)$ en la direcció $\vec{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

$\boxed{\text{Recordeu que si } \|\vec{u}\| = 1 \text{ aleshores } D_{\vec{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}}$

$$\left.\begin{array}{l} f_x(x,y) = 2x \implies f_x(P) = 2 \times 2 = 4 \\ f_y(x,y) = 2y \implies f_y(P) = 2 \times 3 = 6 \end{array}\right\} \implies \nabla f(P) = (4,6)$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = \sqrt{1} = 1$$

$$D_{\vec{v}} f(P) = (4,6) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = 4 \times \frac{3}{5} + 6 \times \frac{4}{5}$$

Problema 2

Sigui $f(x, y) = x^2 + y^2$. Calculeu la derivada direccional de la funció f al punt $P = (2, 3)$ en la direcció $\vec{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Recordeu que si $\|\vec{u}\| = 1$ aleshores $D_{\vec{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}$

$$\left.\begin{array}{l} f_x(x, y) = 2x \implies f_x(P) = 2 \times 2 = 4 \\ f_y(x, y) = 2y \implies f_y(P) = 2 \times 3 = 6 \end{array}\right\} \implies \nabla f(P) = (4, 6)$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = \sqrt{1} = 1$$

$$D_{\vec{v}} f(P) = (4, 6) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = 4 \times \frac{3}{5} + 6 \times \frac{4}{5} = \frac{12+24}{5} = \frac{36}{5}$$

Problema 2

Sigui $f(x,y) = x^2 + y^2$. Calculeu la derivada direccional de la funció f al punt $P = (2,3)$ en la direcció $\vec{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Recordeu que si $\|\vec{u}\| = 1$ aleshores $D_{\vec{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}$

$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y) = 2x &\implies f_x(P) = 2 \times 2 = 4 \\ f_y(x,y) = 2y &\implies f_y(P) = 2 \times 3 = 6 \end{aligned}\right\} \implies \nabla f(P) = (4,6)$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = \sqrt{1} = 1$$

$$D_{\vec{v}} f(P) = (4,6) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = 4 \times \frac{3}{5} + 6 \times \frac{4}{5} = \frac{12+24}{5} = \frac{36}{5}$$

Problema 3

Trobeu la derivada de la funció $z = x^2 - y^2$ al punt $M = (1, 1)$ en la direcció que forma angle $\pi/3$ amb el semieix positiu OX.

Problema 3

Trobeu la derivada de la funció $z = x^2 - y^2$ al punt $M = (1, 1)$ en la direcció que forma angle $\pi/3$ amb el semieix positiu OX.

De nou, usarem que si $\|\vec{u}\| = 1$ aleshores $D_{\vec{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}$

Problema 3

Trobeu la derivada de la funció $z = x^2 - y^2$ al punt $M = (1, 1)$ en la direcció que forma angle $\pi/3$ amb el semieix positiu OX.

$\boxed{\text{De nou, usarem que si } \|\vec{u}\| = 1 \text{ aleshores } D_{\vec{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}}$

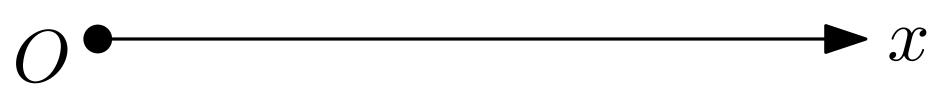
Qui és $\vec{u}$ en aquest cas?

Problema 3

Trobeu la derivada de la funció $z = x^2 - y^2$ al punt $M = (1, 1)$ en la direcció que forma angle $\pi/3$ amb el semieix positiu OX.

De nou, usarem que si $\|\vec{u}\| = 1$ aleshores $D_{\vec{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}$

Qui és $\vec{u}$ en aquest cas?

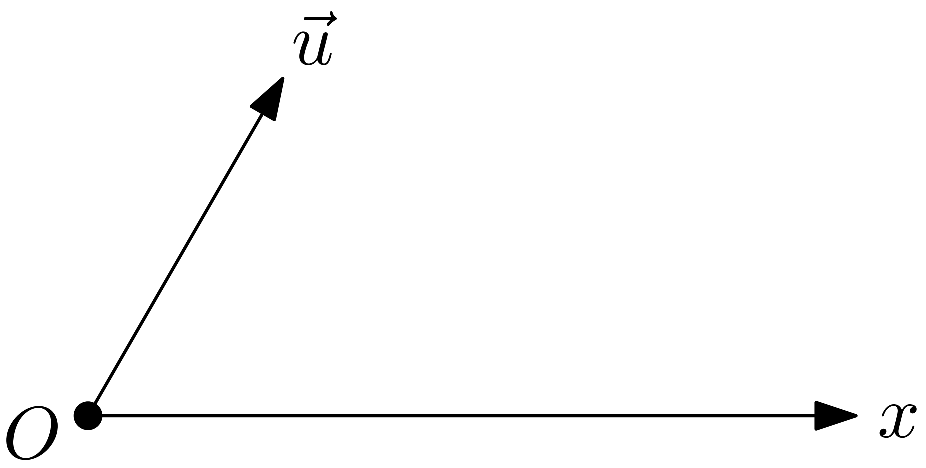


Problema 3

Trobeu la derivada de la funció $z = x^2 - y^2$ al punt $M = (1,1)$ en la direcció que forma angle $\pi/3$ amb el semieix positiu OX.

De nou, usarem que si $\|\vec{u}\| = 1$ aleshores $D_{\vec{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}$

Qui és $\vec{u}$ en aquest cas?

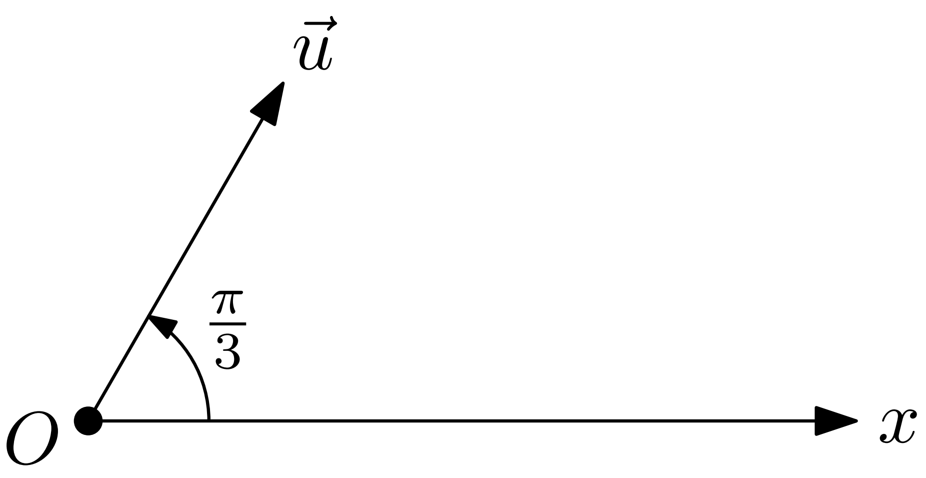


Problema 3

Trobeu la derivada de la funció $z = x^2 - y^2$ al punt $M = (1, 1)$ en la direcció que forma angle $\pi/3$ amb el semieix positiu OX.

De nou, usarem que si $\|\vec{u}\| = 1$ aleshores $D_{\vec{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}$

Qui és $\vec{u}$ en aquest cas?

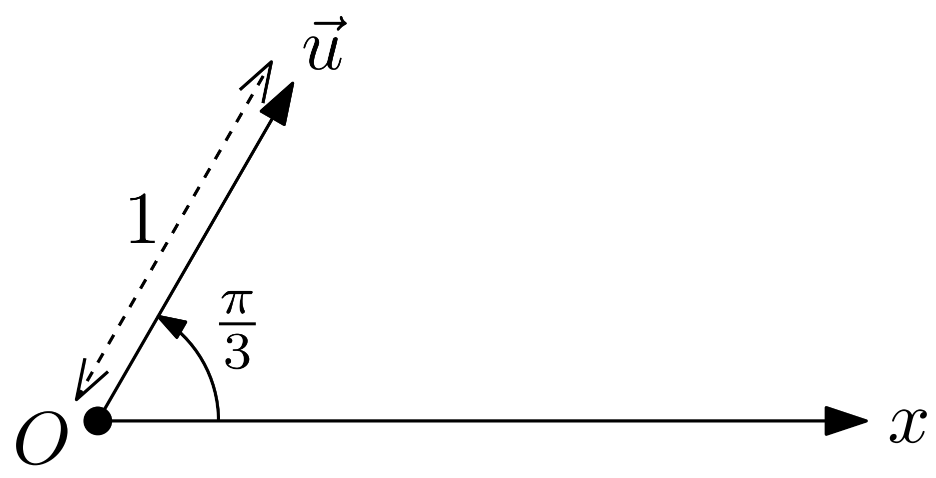


Problema 3

Trobeu la derivada de la funció $z = x^2 - y^2$ al punt $M = (1, 1)$ en la direcció que forma angle $\pi/3$ amb el semieix positiu OX.

$\boxed{\text{De nou, usarem que si } \|\vec{u}\| = 1 \text{ aleshores } D_{\vec{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}}$

Qui és $\vec{u}$ en aquest cas?

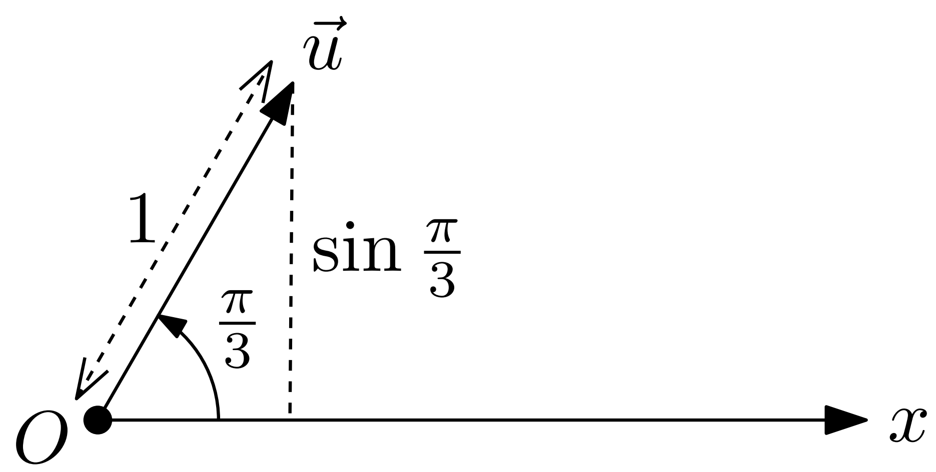


Problema 3

Trobeu la derivada de la funció $z = x^2 - y^2$ al punt $M = (1, 1)$ en la direcció que forma angle $\pi/3$ amb el semieix positiu OX.

$\boxed{\text{De nou, usarem que si } \|\vec{u}\| = 1 \text{ aleshores } D_{\vec{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}}$

Qui és $\vec{u}$ en aquest cas?

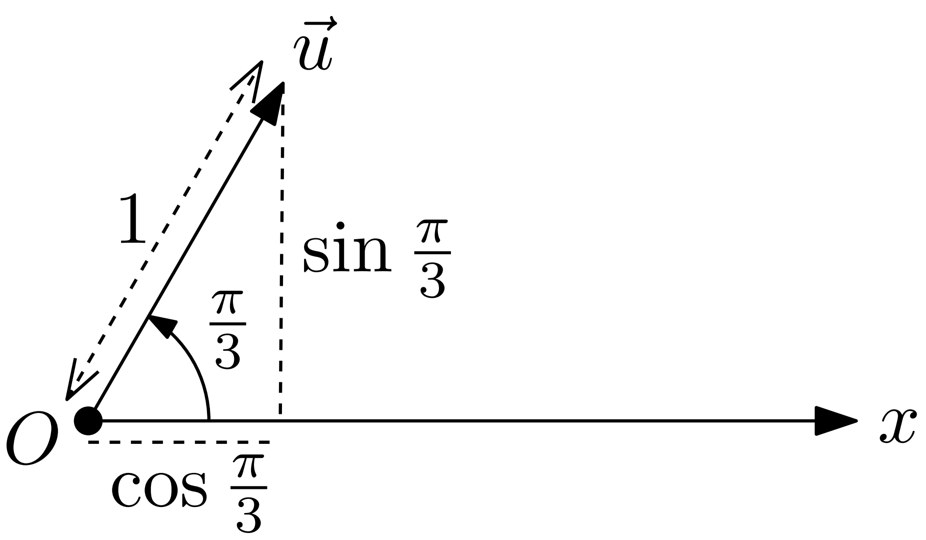


Problema 3

Trobeu la derivada de la funció $z = x^2 - y^2$ al punt $M = (1, 1)$ en la direcció que forma angle $\pi/3$ amb el semieix positiu OX.

De nou, usarem que si $\|\vec{u}\| = 1$ aleshores $D_{\vec{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}$

Qui és $\vec{u}$ en aquest cas?



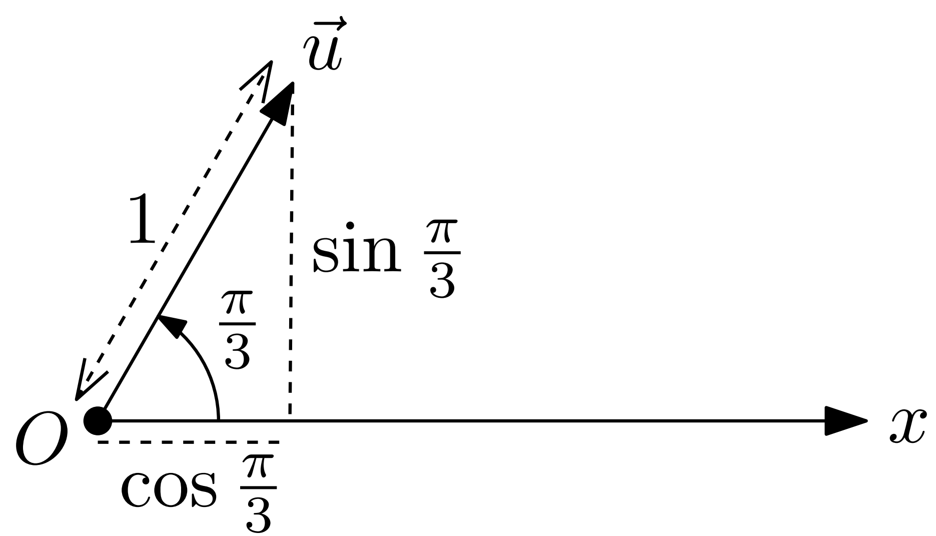
Problema 3

Trobeu la derivada de la funció $z = x^2 - y^2$ al punt $M = (1,1)$ en la direcció que forma angle $\pi/3$ amb el semieix positiu OX.

De nou, usarem que si $\|\vec{u}\| = 1$ aleshores $D_{\vec{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}$

Qui és $\vec{u}$ en aquest cas?

$$\vec{u} = \left(\cos \tfrac{\pi}{3}, \sin \tfrac{\pi}{3}\right)$$



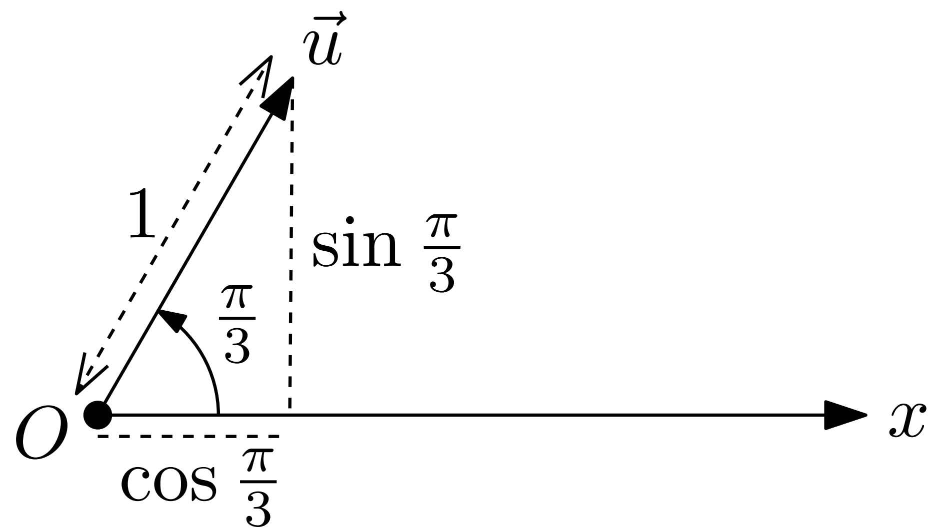
Problema 3

Trobeu la derivada de la funció $z = x^2 - y^2$ al punt $M = (1, 1)$ en la direcció que forma angle $\pi/3$ amb el semieix positiu OX.

De nou, usarem que si $\|\vec{u}\| = 1$ aleshores $D_{\vec{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}$

Qui és $\vec{u}$ en aquest cas?

$$\vec{u} = \left(\cos \tfrac{\pi}{3}, \sin \tfrac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



Problema 3

Trobeu la derivada de la funció $z = x^2 - y^2$ al punt $M = (1, 1)$ en la direcció que forma angle $\pi/3$ amb el semieix positiu OX.

De nou, usarem que si $\|\vec{u}\| = 1$ aleshores $D_{\vec{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}$

Qui és $\vec{u}$ en aquest cas?

$$\vec{u} = \left(\cos \tfrac{\pi}{3}, \sin \tfrac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$$

Problema 3

Trobeu la derivada de la funció $z = x^2 - y^2$ al punt $M = (1, 1)$ en la direcció que forma angle $\pi/3$ amb el semieix positiu OX.

De nou, usarem que si $\|\vec{u}\| = 1$ aleshores $D_{\vec{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}$

Qui és $\vec{u}$ en aquest cas?

$$\vec{u} = \left(\cos \tfrac{\pi}{3}, \sin \tfrac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \implies \frac{\partial z}{\partial x}_{|M} = 2 \times 1 = 2$$

Problema 3

Trobeu la derivada de la funció $z = x^2 - y^2$ al punt $M = (1, 1)$ en la direcció que forma angle $\pi/3$ amb el semieix positiu OX.

De nou, usarem que si $\|\vec{u}\| = 1$ aleshores $D_{\vec{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}$

Qui és $\vec{u}$ en aquest cas?

$$\vec{u} = \left(\cos \tfrac{\pi}{3}, \sin \tfrac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \implies \frac{\partial z}{\partial x}_{|M} = 2 \times 1 = 2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$$

Problema 3

Trobeu la derivada de la funció $z = x^2 - y^2$ al punt $M = (1, 1)$ en la direcció que forma angle $\pi/3$ amb el semieix positiu OX.

De nou, usarem que si $\|\vec{u}\| = 1$ aleshores $D_{\vec{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}$

Qui és $\vec{u}$ en aquest cas?

$$\vec{u} = \left(\cos \tfrac{\pi}{3}, \sin \tfrac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x}_{|M} = 2 \times 1 = 2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2y \Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial y}_{|M} = -2 \times 1 = -2$$

Problema 3

Trobeu la derivada de la funció $z = x^2 - y^2$ al punt $M = (1, 1)$ en la direcció que forma angle $\pi/3$ amb el semieix positiu OX.

De nou, usarem que si $\|\vec{u}\| = 1$ aleshores $D_{\vec{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}$

Qui és $\vec{u}$ en aquest cas?

$$\vec{u} = \left(\cos \tfrac{\pi}{3}, \sin \tfrac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x \implies {\frac{\partial z}{\partial x}}_{|M} = 2 \times 1 = 2 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -2y \implies {\frac{\partial z}{\partial y}}_{|M} = -2 \times 1 = -2 \end{aligned}\right\} \implies \nabla z_{|M} = (2, -2)$$

Problema 3

Trobeu la derivada de la funció $z = x^2 - y^2$ al punt $M = (1, 1)$ en la direcció que forma angle $\pi/3$ amb el semieix positiu OX.

$\boxed{\text{De nou, usarem que si } \|\vec{u}\| = 1 \text{ aleshores } D_{\vec{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}}$

Qui és $\vec{u}$ en aquest cas?

$$\vec{u} = \left(\cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x \Longrightarrow \dfrac{\partial z}{\partial x}_{|M} = 2 \times 1 = 2 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -2y \Longrightarrow \dfrac{\partial z}{\partial y}_{|M} = -2 \times 1 = -2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \nabla z_{|M} = (2, -2)$$

$$D_{\vec{u}} z_{|M} = \nabla z_{|M} \cdot \vec{u}$$

Problema 3

Trobeu la derivada de la funció $z = x^2 - y^2$ al punt $M = (1, 1)$ en la direcció que forma angle $\pi/3$ amb el semieix positiu OX.

De nou, usarem que si $\|\vec{u}\| = 1$ aleshores $D_{\vec{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}$

Qui és $\vec{u}$ en aquest cas?

$$\vec{u} = \left(\cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x \Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x}_{|M} = 2 \times 1 = 2 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -2y \Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial y}_{|M} = -2 \times 1 = -2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \nabla z_{|M} = (2, -2)$$

$$D_{\vec{u}} z_{|M} = \nabla z_{|M} \cdot \vec{u} = (2, -2) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Problema 3

Trobeu la derivada de la funció $z = x^2 - y^2$ al punt $M = (1, 1)$ en la direcció que forma angle $\pi/3$ amb el semieix positiu OX.

De nou, usarem que si $\|\vec{u}\| = 1$ aleshores $D_{\vec{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}$

Qui és $\vec{u}$ en aquest cas?

$$\vec{u} = \left(\cos \tfrac{\pi}{3}, \sin \tfrac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x \Longrightarrow \dfrac{\partial z}{\partial x}_{|M} = 2 \times 1 = 2 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -2y \Longrightarrow \dfrac{\partial z}{\partial y}_{|M} = -2 \times 1 = -2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \nabla z_{|M} = (2, -2)$$

$$D_{\vec{u}} z_{|M} = \nabla z_{|M} \cdot \vec{u} = (2, -2) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \sqrt{3}$$

Problema 3

Trobeu la derivada de la funció $z = x^2 - y^2$ al punt $M = (1, 1)$ en la direcció que forma angle $\pi/3$ amb el semieix positiu OX.

De nou, usarem que si $\|\vec{u}\| = 1$ aleshores $D_{\vec{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}$

Qui és $\vec{u}$ en aquest cas?

$$\vec{u} = \left(\cos \tfrac{\pi}{3}, \sin \tfrac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x \Longrightarrow \dfrac{\partial z}{\partial x}_{|M} = 2 \times 1 = 2 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -2y \Longrightarrow \dfrac{\partial z}{\partial y}_{|M} = -2 \times 1 = -2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \nabla z_{|M} = (2, -2)$$

$$D_{\vec{u}} z_{|M} = \nabla z_{|M} \cdot \vec{u} = (2, -2) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \sqrt{3}$$

Problema 4

Calculeu els valors de a, b, c per tal que la derivada direccional de la funció $f(x, y, z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$ al punt $(1, 2, -1)$ tingui valor màxim 64 en la direcció paral·lela a l'eix OZ.

Problema 4

Calculeu els valors de a, b, c per tal que la derivada direccional de la funció $f(x, y, z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$ al punt $(1, 2, -1)$ tingui valor màxim 64 en la direcció paral·lela a l'eix OZ.

El vector ∇f indica la direcció de creixement màxim

Problema 4

Calculeu els valors de a, b, c per tal que la derivada direccional de la funció $f(x,y,z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$ al punt $(1,2,-1)$ tingui valor màxim 64 en la direcció paral·lela a l'eix OZ.

El vector ∇f indica la direcció de creixement màxim

$$f_x(x,y,z) = ay^2 + 3cz^2x^2$$

Problema 4

Calculeu els valors de a, b, c per tal que la derivada direccional de la funció $f(x, y, z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$ al punt $(1, 2, -1)$ tingui valor màxim 64 en la direcció paral·lela a l'eix OZ.

El vector ∇f indica la direcció de creixement màxim

$$f_x(x, y, z) = ay^2 + 3cz^2x^2$$

$$f_y(x, y, z) = 2axy + bz$$

Problema 4

Calculeu els valors de a, b, c per tal que la derivada direccional de la funció $f(x, y, z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$ al punt $(1, 2, -1)$ tingui valor màxim 64 en la direcció paral·lela a l'eix OZ.

El vector ∇f indica la direcció de creixement màxim

$$f_x(x, y, z) = ay^2 + 3cz^2x^2$$

$$f_y(x, y, z) = 2axy + bz$$

$$f_z(x, y, z) = by + 2czx^3$$

Problema 4

Calculeu els valors de a, b, c per tal que la derivada direccional de la funció $f(x,y,z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$ al punt $(1,2,-1)$ tingui valor màxim 64 en la direcció paral·lela a l'eix OZ.

El vector ∇f indica la direcció de creixement màxim

$$f_x(x,y,z) = ay^2 + 3cz^2x^2 \Longrightarrow f_x(1,2,-1) = 4a + 3c$$
$$f_y(x,y,z) = 2axy + bz$$
$$f_z(x,y,z) = by + 2czx^3$$

Problema 4

Calculeu els valors de a, b, c per tal que la derivada direccional de la funció $f(x,y,z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$ al punt $(1,2,-1)$ tingui valor màxim 64 en la direcció paral·lela a l'eix OZ.

El vector ∇f indica la direcció de creixement màxim

$$f_x(x,y,z) = ay^2 + 3cz^2x^2 \Longrightarrow f_x(1,2,-1) = 4a + 3c$$

$$f_y(x,y,z) = 2axy + bz \qquad \Longrightarrow f_y(1,2,-1) = 4a - b$$

$$f_z(x,y,z) = by + 2czx^3$$

Problema 4

Calculeu els valors de a, b, c per tal que la derivada direccional de la funció $f(x, y, z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$ al punt $(1, 2, -1)$ tingui valor màxim 64 en la direcció paral·lela a l'eix OZ.

El vector ∇f indica la direcció de creixement màxim

$$f_x(x, y, z) = ay^2 + 3cz^2x^2 \Longrightarrow f_x(1, 2, -1) = 4a + 3c$$

$$f_y(x, y, z) = 2axy + bz \Longrightarrow f_y(1, 2, -1) = 4a - b$$

$$f_z(x, y, z) = by + 2czx^3 \Longrightarrow f_z(1, 2, -1) = 2b - 2c$$

Problema 4

Calculeu els valors de a, b, c per tal que la derivada direccional de la funció $f(x,y,z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$ al punt $(1,2,-1)$ tingui valor màxim 64 en la direcció paral·lela a l'eix OZ.

$\boxed{\text{El vector } \nabla f \text{ indica la direcció de creixement màxim}}$

$$\left.\begin{array}{lll} f_x(x,y,z) = ay^2 + 3cz^2x^2 & \Longrightarrow & f_x(1,2,-1) = 4a + 3c \\ f_y(x,y,z) = 2axy + bz & \Longrightarrow & f_y(1,2,-1) = 4a - b \\ f_z(x,y,z) = by + 2czx^3 & \Longrightarrow & f_z(1,2,-1) = 2b - 2c \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Problema 4

Calculeu els valors de a, b, c per tal que la derivada direccional de la funció $f(x, y, z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$ al punt $(1, 2, -1)$ tingui valor màxim 64 en la direcció paral·lela a l'eix OZ.

$\boxed{\text{El vector } \nabla f \text{ indica la direcció de creixement màxim}}$

$$\left.\begin{array}{lll} f_x(x, y, z) = ay^2 + 3cz^2x^2 & \Longrightarrow & f_x(1, 2, -1) = 4a + 3c \\ f_y(x, y, z) = 2axy + bz & \Longrightarrow & f_y(1, 2, -1) = 4a - b \\ f_z(x, y, z) = by + 2czx^3 & \Longrightarrow & f_z(1, 2, -1) = 2b - 2c \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla f(1, 2, -1) = (4a + 3c, 4a - b, 2b - 2c)$$

Problema 4

Calculeu els valors de a, b, c per tal que la derivada direccional de la funció $f(x, y, z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$ al punt $(1, 2, -1)$ tingui valor màxim 64 en la direcció paral·lela a l'eix OZ.

El vector ∇f indica la direcció de creixement màxim

$$\left.\begin{array}{lll} f_x(x,y,z) = ay^2 + 3cz^2x^2 & \Longrightarrow & f_x(1,2,-1) = 4a + 3c \\ f_y(x,y,z) = 2axy + bz & \Longrightarrow & f_y(1,2,-1) = 4a - b \\ f_z(x,y,z) = by + 2czx^3 & \Longrightarrow & f_z(1,2,-1) = 2b - 2c \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla f(1,2,-1) = (4a+3c, 4a-b, 2b-2c) \parallel \vec{u} = (0,0,1)$$

Problema 4

Calculeu els valors de a, b, c per tal que la derivada direccional de la funció $f(x,y,z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$ al punt $(1,2,-1)$ tingui valor màxim $\boxed{64}$ en la direcció paral·lela a l'eix OZ.

El vector ∇f indica la direcció de creixement màxim

$$\left.\begin{array}{lll} f_x(x,y,z) = ay^2 + 3cz^2x^2 & \Longrightarrow & f_x(1,2,-1) = 4a + 3c \\ f_y(x,y,z) = 2axy + bz & \Longrightarrow & f_y(1,2,-1) = 4a - b \\ f_z(x,y,z) = by + 2czx^3 & \Longrightarrow & f_z(1,2,-1) = 2b - 2c \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla f(1,2,-1) = (4a+3c, 4a-b, 2b-2c) \parallel \vec{u} = (0,0,1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla f(1,2,-1) = (0,0,64)$$

Problema 4

Calculeu els valors de a, b, c per tal que la derivada direccional de la funció $f(x,y,z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$ al punt $(1,2,-1)$ tingui valor màxim $\boxed{64}$ en la direcció paral·lela a l'eix OZ.

El vector ∇f indica la direcció de creixement màxim

$$\left.\begin{array}{lll} f_x(x,y,z) = ay^2 + 3cz^2x^2 & \Longrightarrow & f_x(1,2,-1) = 4a + 3c \\ f_y(x,y,z) = 2axy + bz & \Longrightarrow & f_y(1,2,-1) = 4a - b \\ f_z(x,y,z) = by + 2czx^3 & \Longrightarrow & f_z(1,2,-1) = 2b - 2c \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla f(1,2,-1) = (4a+3c, 4a-b, 2b-2c) \parallel \vec{u} = (0,0,1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla f(1,2,-1) = (0,0,64)$$

Ja que, si anomenem $P = (1,2,-1)$ i $\vec{v} = \nabla f(p)$, tindrem:

$$D_{\vec{v}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \vec{v} \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\|\vec{v}\|^2}{\|\vec{v}\|} = \|\vec{v}\| = 64$$

Problema 4

Calculeu els valors de a, b, c per tal que la derivada direccional de la funció $f(x,y,z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$ al punt $(1,2,-1)$ tingui valor màxim 64 en la direcció paral·lela a l'eix OZ.

El vector ∇f indica la direcció de creixement màxim

$$\left.\begin{array}{lll} f_x(x,y,z) = ay^2 + 3cz^2x^2 & \Longrightarrow & f_x(1,2,-1) = 4a + 3c \\ f_y(x,y,z) = 2axy + bz & \Longrightarrow & f_y(1,2,-1) = 4a - b \\ f_z(x,y,z) = by + 2czx^3 & \Longrightarrow & f_z(1,2,-1) = 2b - 2c \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla f(1,2,-1) = (4a+3c, 4a-b, 2b-2c) \parallel \vec{u} = (0,0,1)$$

$$\Rightarrow \nabla f(1,2,-1) = (0,0,64)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcc} 4a + 3c & = & 0 \\ 4a - b & = & 0 \\ 2b - 2c & = & 64 \end{array} \right.$$

Problema 4

Calculeu els valors de a, b, c per tal que la derivada direccional de la funció $f(x,y,z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$ al punt $(1,2,-1)$ tingui valor màxim 64 en la direcció paral·lela a l'eix OZ.

El vector ∇f indica la direcció de creixement màxim

$$\left.\begin{array}{lll} f_x(x,y,z) = ay^2 + 3cz^2x^2 & \Longrightarrow & f_x(1,2,-1) = 4a + 3c \\ f_y(x,y,z) = 2axy + bz & \Longrightarrow & f_y(1,2,-1) = 4a - b \\ f_z(x,y,z) = by + 2czx^3 & \Longrightarrow & f_z(1,2,-1) = 2b - 2c \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla f(1,2,-1) = (4a+3c, 4a-b, 2b-2c) \parallel \vec{u} = (0,0,1)$$

$$\Rightarrow \nabla f(1,2,-1) = (0,0,64)$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{rcc} 4a + 3c & = & 0 \\ 4a - b & = & 0 \\ 2b - 2c & = & 64 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (a = -6, b = -24, c = 8) \\ \text{o bé} \\ (a = 6, b = 24, c = -8) \end{array}\right.$$

Problema 4

Calculeu els valors de a, b, c per tal que la derivada direccional de la funció $f(x,y,z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$ al punt $(1,2,-1)$ tingui valor màxim 64 en la direcció paral·lela a l'eix OZ.

El vector ∇f indica la direcció de creixement màxim

$$\left.\begin{array}{lll} f_x(x,y,z) = ay^2 + 3cz^2x^2 & \Longrightarrow & f_x(1,2,-1) = 4a + 3c \\ f_y(x,y,z) = 2axy + bz & \Longrightarrow & f_y(1,2,-1) = 4a - b \\ f_z(x,y,z) = by + 2czx^3 & \Longrightarrow & f_z(1,2,-1) = 2b - 2c \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla f(1,2,-1) = (4a+3c, 4a-b, 2b-2c) \parallel \vec{u} = (0,0,1)$$

$$\Rightarrow \nabla f(1,2,-1) = (0,0,64)$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 4a+3c & = & 0 \\ 4a-b & = & 0 \\ 2b-2c & = & 64 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (a=-6, b=-24, c=8) \\ \text{o bé} \\ (a=6, b=24, c=-8) \end{array}\right.$$

Problema 5

Trobeu les equacions del pla tangent i la recta normal a:

a) la superfície $z = x^2 + y^2$, al punt $M = (1, 2, 5)$;

b) la superfície $z = \arctan \frac{y}{x}$, al punt $M = \left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$

Problema 5

Trobeu les equacions del pla tangent i la recta normal a:

a) la superfície $z = x^2 + y^2$, al punt $M = (1, 2, 5)$;

b) la superfície $z = \arctan \frac{y}{x}$, al punt $M = \left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$

Pla tangent: $z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$

Problema 5

Trobeu les equacions del pla tangent i la recta normal a:

a) la superfície $z = x^2 + y^2$, al punt $M = (1, 2, 5)$;

b) la superfície $z = \arctan \frac{y}{x}$, al punt $M = \left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$

Pla tangent: $z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$

Recta normal: $\frac{x-a}{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)} = \frac{y-b}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)} = \frac{z-f(a,b)}{-1}$

Problema 5

Trobeu les equacions del pla tangent i la recta normal a:

a) la superfície $z = x^2 + y^2$, al punt $M = (1, 2, 5)$;

b) la superfície $z = \arctan \frac{y}{x}$, al punt $M = \left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$

Pla tangent: $z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$

Recta normal: $\frac{x-a}{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)} = \frac{y-b}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)} = \frac{z-f(a,b)}{-1}$

a) $z(1, 2) = 1^2 + 2^2 = 5 \Rightarrow M$ pertany a la superfície

Problema 5

Trobeu les equacions del pla tangent i la recta normal a:

a) la superfície $z = x^2 + y^2$, al punt $M = (1, 2, 5)$;

b) la superfície $z = \arctan \frac{y}{x}$, al punt $M = \left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$

Pla tangent: $z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$

Recta normal: $\frac{x-a}{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)} = \frac{y-b}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)} = \frac{z-f(a,b)}{-1}$

a) $z(1,2) = 1^2 + 2^2 = 5 \Rightarrow M$ pertany a la superfície

$z_x(x,y) = 2x$

Problema 5

Trobeu les equacions del pla tangent i la recta normal a:

a) la superfície $z = x^2 + y^2$, al punt $M = (1, 2, 5)$;

b) la superfície $z = \arctan \frac{y}{x}$, al punt $M = \left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$

Pla tangent: $z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$

Recta normal: $\frac{x-a}{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)} = \frac{y-b}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)} = \frac{z-f(a,b)}{-1}$

a) $z(1,2) = 1^2 + 2^2 = 5 \Rightarrow M$ pertany a la superfície

$$z_x(x,y) = 2x$$

$$z_y(x,y) = 2y$$

Problema 5

Trobeu les equacions del pla tangent i la recta normal a:

a) la superfície $z = x^2 + y^2$, al punt $M = (1, 2, 5)$;

b) la superfície $z = \arctan \frac{y}{x}$, al punt $M = \left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$

Pla tangent: $z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$

Recta normal: $\frac{x-a}{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)} = \frac{y-b}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)} = \frac{z-f(a,b)}{-1}$

a) $z(1, 2) = 1^2 + 2^2 = 5 \Rightarrow M$ pertany a la superfície

$$z_x(x, y) = 2x \Rightarrow z_x(1, 2) = 2$$

$$z_y(x, y) = 2y$$

Problema 5

Trobeu les equacions del pla tangent i la recta normal a:

a) la superfície $z = x^2 + y^2$, al punt $M = (1, 2, 5)$;

b) la superfície $z = \arctan \frac{y}{x}$, al punt $M = \left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$

Pla tangent: $z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$

Recta normal: $\frac{x-a}{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)} = \frac{y-b}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)} = \frac{z-f(a,b)}{-1}$

a) $z(1,2) = 1^2 + 2^2 = 5 \Rightarrow M$ pertany a la superfície

$$z_x(x,y) = 2x \Rightarrow z_x(1,2) = 2$$

$$z_y(x,y) = 2y \Rightarrow z_y(1,2) = 4$$

Problema 5

Trobeu les equacions del pla tangent i la recta normal a:

a) la superfície $z = x^2 + y^2$, al punt $M = (1, 2, 5)$;

b) la superfície $z = \arctan \frac{y}{x}$, al punt $M = \left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$

Pla tangent: $z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$

Recta normal: $\frac{x-a}{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)} = \frac{y-b}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)} = \frac{z-f(a,b)}{-1}$

a) $z(1,2) = 1^2 + 2^2 = 5 \Rightarrow M$ pertany a la superfície

$$\left.\begin{array}{l} z_x(x,y) = 2x \Rightarrow z_x(1,2) = 2 \\ z_y(x,y) = 2y \Rightarrow z_y(1,2) = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Problema 5

Trobeu les equacions del pla tangent i la recta normal a:

a) la superfície $z = x^2 + y^2$, al punt $M = (1, 2, 5)$;

b) la superfície $z = \arctan \frac{y}{x}$, al punt $M = \left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$

Pla tangent: $z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$

Recta normal: $\frac{x-a}{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)} = \frac{y-b}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)} = \frac{z-f(a,b)}{-1}$

a) $z(1,2) = 1^2 + 2^2 = 5 \Rightarrow M$ pertany a la superfície

$$\left.\begin{array}{l} z_x(x,y) = 2x \Rightarrow z_x(1,2) = 2 \\ z_y(x,y) = 2y \Rightarrow z_y(1,2) = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Pla tangent: $z = 5 + 2(x-1) + 4(y-2)$

Problema 5

Trobeu les equacions del pla tangent i la recta normal a:

a) la superfície $z = x^2 + y^2$, al punt $M = (1, 2, 5)$;

b) la superfície $z = \arctan \frac{y}{x}$, al punt $M = \left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$

Pla tangent: $z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$

Recta normal: $\frac{x-a}{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)} = \frac{y-b}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)} = \frac{z-f(a,b)}{-1}$

a) $z(1, 2) = 1^2 + 2^2 = 5 \Rightarrow M$ pertany a la superfície

$$\left.\begin{array}{l} z_x(x, y) = 2x \Rightarrow z_x(1, 2) = 2 \\ z_y(x, y) = 2y \Rightarrow z_y(1, 2) = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Pla tangent: $z = 5 + 2(x - 1) + 4(y - 2)$

Recta normal: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-5}{-1}$

Problema 5

Trobeu les equacions del pla tangent i la recta normal a:

a) la superfície $z = x^2 + y^2$, al punt $M = (1, 2, 5)$;

b) la superfície $z = \arctan \frac{y}{x}$, al punt $M = \left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$

Pla tangent: $z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$

Recta normal: $\frac{x-a}{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)} = \frac{y-b}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)} = \frac{z-f(a,b)}{-1}$

a) $z(1,2) = 1^2 + 2^2 = 5 \Rightarrow M$ pertany a la superfície

$$\left.\begin{array}{l} z_x(x,y) = 2x \Rightarrow z_x(1,2) = 2 \\ z_y(x,y) = 2y \Rightarrow z_y(1,2) = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Pla tangent: $z = 5 + 2(x-1) + 4(y-2)$

Recta normal: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-5}{-1}$

Problema 5

Trobeu les equacions del pla tangent i la recta normal a:

a) la superfície $z = x^2 + y^2$, al punt $M = (1, 2, 5)$;

b) la superfície $z = \arctan \frac{y}{x}$, al punt $M = \left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$

Pla tangent: $z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$

Recta normal: $\frac{x-a}{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)} = \frac{y-b}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)} = \frac{z-f(a,b)}{-1}$

b) $z(1,1) = \arctan \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow M$ pertany a la superfície

Problema 5

Trobeu les equacions del pla tangent i la recta normal a:

a) la superfície $z = x^2 + y^2$, al punt $M = (1, 2, 5)$;

b) la superfície $z = \arctan \frac{y}{x}$, al punt $M = \left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$

Pla tangent: $z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$

Recta normal: $\frac{x-a}{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)} = \frac{y-b}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)} = \frac{z-f(a,b)}{-1}$

b) $z(1,1) = \arctan \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow M$ pertany a la superfície

Recordeu: $f(x) = \arctan x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Problema 5

Trobeu les equacions del pla tangent i la recta normal a:

a) la superfície $z = x^2 + y^2$, al punt $M = (1, 2, 5)$;

b) la superfície $z = \arctan \frac{y}{x}$, al punt $M = \left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$

Pla tangent: $z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$

Recta normal: $\frac{x-a}{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)} = \frac{y-b}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)} = \frac{z-f(a,b)}{-1}$

b) $z(1,1) = \arctan \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow M$ pertany a la superfície

Recordeu: $f(x) = \arctan x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$D_1 z(x,y) = \frac{D_1\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

Problema 5

Trobeu les equacions del pla tangent i la recta normal a:

a) la superfície $z = x^2 + y^2$, al punt $M = (1, 2, 5)$;

b) la superfície $z = \arctan \frac{y}{x}$, al punt $M = \left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$

Pla tangent: $z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$

Recta normal: $\frac{x-a}{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)} = \frac{y-b}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)} = \frac{z-f(a,b)}{-1}$

b) $z(1,1) = \arctan \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow M$ pertany a la superfície

Recordeu: $f(x) = \arctan x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$D_1 z(x,y) = \frac{D_1\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

Problema 5

Trobeu les equacions del pla tangent i la recta normal a:

a) la superfície $z = x^2 + y^2$, al punt $M = (1, 2, 5)$;

b) la superfície $z = \arctan \frac{y}{x}$, al punt $M = \left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$

Pla tangent: $z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$

Recta normal: $\frac{x-a}{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)} = \frac{y-b}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)} = \frac{z-f(a,b)}{-1}$

b) $z(1,1) = \arctan \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow M$ pertany a la superfície

Recordeu: $f(x) = \arctan x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$D_1 z(x,y) = \frac{D_1\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$D_2 z(x,y) = \frac{D_2\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

Problema 5

Trobeu les equacions del pla tangent i la recta normal a:

a) la superfície $z = x^2 + y^2$, al punt $M = (1, 2, 5)$;

b) la superfície $z = \arctan \frac{y}{x}$, al punt $M = \left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$

Pla tangent: $z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$

Recta normal: $\frac{x-a}{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)} = \frac{y-b}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)} = \frac{z-f(a,b)}{-1}$

b) $z(1,1) = \arctan \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow M$ pertany a la superfície

Recordeu: $f(x) = \arctan x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$D_1 z(x,y) = \frac{D_1\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$D_2 z(x,y) = \frac{D_2\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Problema 5

Trobeu les equacions del pla tangent i la recta normal a:

a) la superfície $z = x^2 + y^2$, al punt $M = (1, 2, 5)$;

b) la superfície $z = \arctan \frac{y}{x}$, al punt $M = \left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$

Pla tangent: $z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$

Recta normal: $\frac{x-a}{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)} = \frac{y-b}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)} = \frac{z-f(a,b)}{-1}$

b) $z(1,1) = \arctan \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow M$ pertany a la superfície

Recordeu: $f(x) = \arctan x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$D_1 z(x,y) = \frac{D_1\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{-y}{x^2+y^2} \Rightarrow D_1 z(1,1) = -\frac{1}{2}$$

$$D_2 z(x,y) = \frac{D_2\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Problema 5

Trobeu les equacions del pla tangent i la recta normal a:

a) la superfície $z = x^2 + y^2$, al punt $M = (1, 2, 5)$;

b) la superfície $z = \arctan \frac{y}{x}$, al punt $M = \left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$

Pla tangent: $z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$

Recta normal: $\frac{x-a}{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)} = \frac{y-b}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)} = \frac{z-f(a,b)}{-1}$

b) $z(1,1) = \arctan \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow M$ pertany a la superfície

Recordeu: $f(x) = \arctan x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$D_1 z(x,y) = \frac{D_1\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{-y}{x^2+y^2} \Rightarrow D_1 z(1,1) = -\frac{1}{2}$$

$$D_2 z(x,y) = \frac{D_2\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow D_2 z(1,1) = \frac{1}{2}$$

Problema 5

Trobeu les equacions del pla tangent i la recta normal a:

a) la superfície $z = x^2 + y^2$, al punt $M = (1, 2, 5)$;

b) la superfície $z = \arctan \frac{y}{x}$, al punt $M = \left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$

Pla tangent: $z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$

Recta normal: $\frac{x-a}{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)} = \frac{y-b}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)} = \frac{z-f(a,b)}{-1}$

b)

$D_1 z(1,1) = -\frac{1}{2}$

$D_2 z(1,1) = \frac{1}{2}$

Problema 5

Trobeu les equacions del pla tangent i la recta normal a:

a) la superfície $z = x^2 + y^2$, al punt $M = (1, 2, 5)$;

b) la superfície $z = \arctan \frac{y}{x}$, al punt $M = \left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$

Pla tangent: $z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$

Recta normal: $\frac{x-a}{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)} = \frac{y-b}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)} = \frac{z-f(a,b)}{-1}$

b) Pla tangent:

$$z = \frac{\pi}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right)(x-1) + \frac{1}{2}(y-1)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} D_1 z(1,1) = -\frac{1}{2} \\ \\ D_2 z(1,1) = \frac{1}{2} \end{array}}$$

Problema 5

Trobeu les equacions del pla tangent i la recta normal a:

a) la superfície $z = x^2 + y^2$, al punt $M = (1, 2, 5)$;

b) la superfície $z = \arctan \frac{y}{x}$, al punt $M = \left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$

Pla tangent: $z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$

Recta normal: $\frac{x-a}{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)} = \frac{y-b}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)} = \frac{z-f(a,b)}{-1}$

b) Pla tangent:

$$z = \frac{\pi}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right)(x-1) + \frac{1}{2}(y-1)$$

$$D_1 z(1,1) = -\frac{1}{2}$$

$$D_2 z(1,1) = \frac{1}{2}$$

Problema 5

Trobeu les equacions del pla tangent i la recta normal a:

a) la superfície $z = x^2 + y^2$, al punt $M = (1, 2, 5)$;

b) la superfície $z = \arctan \frac{y}{x}$, al punt $M = \left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$

Pla tangent: $z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$

Recta normal: $\frac{x-a}{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)} = \frac{y-b}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)} = \frac{z-f(a,b)}{-1}$

b) Recta normal:

$$\frac{x-1}{-\frac{1}{2}} = \frac{y-1}{\frac{1}{2}} = \frac{z-\frac{\pi}{4}}{-1}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} D_1 z(1, 1) = -\frac{1}{2} \\ \\ D_2 z(1, 1) = \frac{1}{2} \end{array}}$$

Problema 5

Trobeu les equacions del pla tangent i la recta normal a:

a) la superfície $z = x^2 + y^2$, al punt $M = (1, 2, 5)$;

b) la superfície $z = \arctan \frac{y}{x}$, al punt $M = \left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$

Pla tangent: $z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$

Recta normal: $\frac{x-a}{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)} = \frac{y-b}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)} = \frac{z-f(a,b)}{-1}$

b) Recta normal:

$$\frac{x-1}{-\frac{1}{2}} = \frac{y-1}{\frac{1}{2}} = \frac{z-\frac{\pi}{4}}{-1}$$

$$-2(x-1) = 2(y-1) = -\left(z - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} D_1 z(1,1) = -\frac{1}{2} \\ \\ D_2 z(1,1) = \frac{1}{2} \end{array}}$$

Problema 5

Trobeu les equacions del pla tangent i la recta normal a:

a) la superfície $z = x^2 + y^2$, al punt $M = (1, 2, 5)$;

b) la superfície $z = \arctan \frac{y}{x}$, al punt $M = \left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$

Pla tangent: $z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$

Recta normal: $\frac{x-a}{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)} = \frac{y-b}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)} = \frac{z-f(a,b)}{-1}$

b) Recta normal:

$$\frac{x-1}{-\frac{1}{2}} = \frac{y-1}{\frac{1}{2}} = \frac{z-\frac{\pi}{4}}{-1}$$

$$-2(x-1) = 2(y-1) = -\left(z - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$2(x-1) = 2(1-y) = z - \frac{\pi}{4}$$

$$D_1 z(1,1) = -\frac{1}{2}$$

$$D_2 z(1,1) = \frac{1}{2}$$

Problema 5

Trobeu les equacions del pla tangent i la recta normal a:

a) la superfície $z = x^2 + y^2$, al punt $M = (1, 2, 5)$;

b) la superfície $z = \arctan \frac{y}{x}$, al punt $M = \left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$

Pla tangent: $z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$

Recta normal: $\frac{x-a}{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)} = \frac{y-b}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)} = \frac{z-f(a,b)}{-1}$

b) Recta normal:

$$\frac{x-1}{-\frac{1}{2}} = \frac{y-1}{\frac{1}{2}} = \frac{z-\frac{\pi}{4}}{-1}$$

$$-2(x-1) = 2(y-1) = -\left(z - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$2(x-1) = 2(1-y) = z - \frac{\pi}{4}$$

$$D_1 z(1,1) = -\frac{1}{2}$$

$$D_2 z(1,1) = \frac{1}{2}$$

Problema 6

Sigui $f(x,y) = 4x + 2y - x^2 + xy - y^2$. Trobeu els punts de la superfície $z = f(x,y)$ on el pla tangent és paral·lel al pla XY.

Problema 6

Sigui $f(x,y) = 4x + 2y - x^2 + xy - y^2$. Trobeu els punts de la superfície $z = f(x,y)$ on el pla tangent és paral·lel al pla XY.

El pla tangent és paral·lel al pla $XY \iff f_x = f_y = 0$

Problema 6

Sigui $f(x,y) = 4x + 2y - x^2 + xy - y^2$. Trobeu els punts de la superfície $z = f(x,y)$ on el pla tangent és paral·lel al pla XY.

El pla tangent és paral·lel al pla $XY \iff f_x = f_y = 0$

$$f_x = 4 - 2x + y$$

Problema 6

Sigui $f(x,y) = 4x + 2y - x^2 + xy - y^2$. Trobeu els punts de la superfície $z = f(x,y)$ on el pla tangent és paral·lel al pla XY.

El pla tangent és paral·lel al pla $XY \iff f_x = f_y = 0$

$$f_x = 4 - 2x + y$$
$$f_y = 2 + x - 2y$$

Problema 6

Sigui $f(x,y) = 4x + 2y - x^2 + xy - y^2$. Trobeu els punts de la superfície $z = f(x,y)$ on el pla tangent és paral·lel al pla XY.

El pla tangent és paral·lel al pla $XY \iff f_x = f_y = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 4 - 2x + y = 0 \\ f_y = 2 + x - 2y = 0 \end{array}\right\}$$

Problema 6

Sigui $f(x,y) = 4x + 2y - x^2 + xy - y^2$. Trobeu els punts de la superfície $z = f(x,y)$ on el pla tangent és paral·lel al pla XY.

El pla tangent és paral·lel al pla $XY \iff f_x = f_y = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 4 - 2x + y = 0 \\ f_y = 2 + x - 2y = 0 \end{array}\right\} \iff \left.\begin{array}{r} -2x + y = -4 \\ x - 2y = -2 \end{array}\right\}$$

Problema 6

Sigui $f(x,y) = 4x + 2y - x^2 + xy - y^2$. Trobeu els punts de la superfície $z = f(x,y)$ on el pla tangent és paral·lel al pla XY.

El pla tangent és paral·lel al pla $XY \iff f_x = f_y = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 4 - 2x + y = 0 \\ f_y = 2 + x - 2y = 0 \end{array}\right\} \iff \left.\begin{array}{r} -2x + y = -4 \\ x - 2y = -2 \end{array}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Problema 6

Sigui $f(x,y) = 4x + 2y - x^2 + xy - y^2$. Trobeu els punts de la superfície $z = f(x,y)$ on el pla tangent és paral·lel al pla XY.

El pla tangent és paral·lel al pla $XY \iff f_x = f_y = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 4 - 2x + y = 0 \\ f_y = 2 + x - 2y = 0 \end{array}\right\} \iff \left.\begin{array}{r} -2x + y = -4 \\ x - 2y = -2 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} -2 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

Problema 6

Sigui $f(x,y) = 4x + 2y - x^2 + xy - y^2$. Trobeu els punts de la superfície $z = f(x,y)$ on el pla tangent és paral·lel al pla XY.

El pla tangent és paral·lel al pla $XY \iff f_x = f_y = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 4 - 2x + y = 0 \\ f_y = 2 + x - 2y = 0 \end{array}\right\} \iff \left.\begin{array}{r} -2x + y = -4 \\ x - 2y = -2 \end{array}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Problema 6

Sigui $f(x,y) = 4x + 2y - x^2 + xy - y^2$. Trobeu els punts de la superfície $z = f(x,y)$ on el pla tangent és paral·lel al pla XY.

El pla tangent és paral·lel al pla $XY \iff f_x = f_y = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 4 - 2x + y = 0 \\ f_y = 2 + x - 2y = 0 \end{array}\right\} \iff \left.\begin{array}{r} -2x + y = -4 \\ x - 2y = -2 \end{array}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -8 \end{pmatrix}$$

Problema 6

Sigui $f(x,y) = 4x + 2y - x^2 + xy - y^2$. Trobeu els punts de la superfície $z = f(x,y)$ on el pla tangent és paral·lel al pla XY.

El pla tangent és paral·lel al pla $XY \iff f_x = f_y = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 4 - 2x + y = 0 \\ f_y = 2 + x - 2y = 0 \end{array}\right\} \iff \left.\begin{array}{r} -2x + y = -4 \\ x - 2y = -2 \end{array}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -8 \end{pmatrix}$$

$y = \frac{8}{3}$

Problema 6

Sigui $f(x,y) = 4x + 2y - x^2 + xy - y^2$. Trobeu els punts de la superfície $z = f(x,y)$ on el pla tangent és paral·lel al pla XY.

El pla tangent és paral·lel al pla $XY \iff f_x = f_y = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 4 - 2x + y = 0 \\ f_y = 2 + x - 2y = 0 \end{array}\right\} \iff \left.\begin{array}{r} -2x + y = -4 \\ x - 2y = -2 \end{array}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -8 \end{pmatrix}$$

$$y = \tfrac{8}{3} \Longrightarrow x = -2 + 2y = \tfrac{10}{3}$$

Problema 6

Sigui $f(x,y) = 4x + 2y - x^2 + xy - y^2$. Trobeu els punts de la superfície $z = f(x,y)$ on el pla tangent és paral·lel al pla XY.

El pla tangent és paral·lel al pla $XY \iff f_x = f_y = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 4 - 2x + y = 0 \\ f_y = 2 + x - 2y = 0 \end{array}\right\} \iff \left.\begin{array}{r} -2x + y = -4 \\ x - 2y = -2 \end{array}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -8 \end{pmatrix}$$

$$y = \tfrac{8}{3} \Longrightarrow x = -2 + 2y = \tfrac{10}{3}$$

$$\Longrightarrow f(x,y) = 4\tfrac{10}{3} + 2\tfrac{8}{3} - \left(\tfrac{10}{3}\right)^2 + \tfrac{10}{3}\tfrac{8}{3} - \left(\tfrac{8}{3}\right)^2 = \tfrac{28}{3}$$

Problema 6

Sigui $f(x,y) = 4x + 2y - x^2 + xy - y^2$. Trobeu els punts de la superfície $z = f(x,y)$ on el pla tangent és paral·lel al pla XY.

El pla tangent és paral·lel al pla $XY \iff f_x = f_y = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 4 - 2x + y = 0 \\ f_y = 2 + x - 2y = 0 \end{array}\right\} \iff \left.\begin{array}{r} -2x + y = -4 \\ x - 2y = -2 \end{array}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -8 \end{pmatrix}$$

$$y = \tfrac{8}{3} \implies x = -2 + 2y = \tfrac{10}{3}$$

$$\implies f(x,y) = 4\tfrac{10}{3} + 2\tfrac{8}{3} - \left(\tfrac{10}{3}\right)^2 + \tfrac{10}{3}\tfrac{8}{3} - \left(\tfrac{8}{3}\right)^2 = \tfrac{28}{3}$$

Solució: punt $\left(\tfrac{10}{3}, \tfrac{8}{3}, \tfrac{28}{3}\right)$