1. *(2.5 punts)* Sigui $K = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$.

a) Fent ús de la regla de Barrow per calcular K.

b) El valor aproximat de K es pot obtenir utilitzant la fórmula de Simpson per a la integral $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$. Calculeu el nombre de subintervals necessaris per obtenir el valor d'aquesta integral fent ús de la fórmula de Simpson amb un error més petit que 0.002.

c) Doneu el valor aproximat de K amb el grau d'exactitud de l'apartat **b)**.

Solución.

a) Por la regla de Barrow $K = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$

b) El valor aproximado de K se obtiene con la fórmula de Simpson para n subintervalos del modo siguiente

$$K = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx \frac{h}{3}\Big(f(b)+f(a)+2\big(f(x_2)+\ldots+f(x_{n-2})\big)+4\big(f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})\big)\Big),$$

donde $a = 1,\ b = 2,\ h = (b-a)/n = 1/n,\ x_i = a + ih = 1 + i/n$. El error de esta aproximación y su cota superior son

$$\varepsilon = \left|-\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(c)\right| = \frac{24}{180n^4c^5} < \frac{24}{180n^4}, \text{ ya que } f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5} \quad \text{y} \quad 1 < c < 2.$$

Resolviendo la desigualdad $\dfrac{24}{180n^4} < 0.002$ resulta que $n > \sqrt[4]{\dfrac{24}{180 \cdot 0.002}} \approx 2.86$. Entonces, como n es par, $n_{min} = 4$.

c) $K = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx \frac{1}{12}\Big(f(2) + f(1) + 2f(1.5) + 4f(1.25) + 4f(1.75)\Big) =$

$$= \frac{1}{12}\Big(1/2 + 1 + 2/1.5 + 4/1.25 + 4/1.75\Big) \approx 0.693.$$

2. *(2.5 punts)* Donada la funció $f(x,y)=\sin x\cdot\sin y$.

a) Escriviu el polinomi de Taylor de grau 2 per a f en el punt $(0,0)$ i la resta de Taylor en forma de Lagrange corresponent.

b) Utilitzant el polinomi obtingut, calculeu un valor aproximat per a $f(1/2,1/2)$ i fiteu l'error comès.

Solución.

a) El polinomio de Taylor de grado 2 para f es

$$P_2(x,y)=f(0,0)+f'_x(0,0)\,x+f'_y(0,0)\,y+\frac{1}{2!}\Big(f''_{xx}(0,0)\,x^2+2f''_{xy}(0,0)\,xy+f''_{yy}(0,0)\,y^2\Big)$$

y el resto de Taylor en forma de Lagrange correspondiente es

$$R_2(x,y)=\frac{1}{3!}\Big(f'''_{xxx}(\alpha,\beta)\,x^3+3f'''_{xxy}(\alpha,\beta)\,x^2y+3f'''_{xyy}(\alpha,\beta)\,xy^2+f'''_{yyy}(\alpha,\beta)\,y^3\Big),$$

donde $\quad 0\leqslant\alpha\leqslant x\quad$ y $\quad 0\leqslant\beta\leqslant y$.

Calculamos las siguientes derivadas

$$\begin{array}{rclcrrcl}
f(x,y)=\sin x\sin y & \Rightarrow & f(0,0)=0; & & f''_{xx}(x,y)=- & \sin x\sin y & \Rightarrow & f''_{xx}(0,0)=0;\\
f'_x(x,y)=\cos x\sin y & \Rightarrow & f'_x(0,0)=0; & & f''_{xy}(x,y)= & \cos x\cos y & \Rightarrow & f''_{xy}(0,0)=1;\\
f'_y(x,y)=\sin x\cos y & \Rightarrow & f'_y(0,0)=0; & & f''_{yy}(x,y)=- & \sin x\sin y & \Rightarrow & f''_{yy}(0,0)=0;
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
f'''_{xxx}(x,y)=-\cos x\sin y & \Rightarrow & f'''_{xxx}(\alpha,\beta)=-\cos\alpha\sin\beta;\\
f'''_{xxy}(x,y)=-\sin x\cos y & \Rightarrow & f'''_{xxy}(\alpha,\beta)=-\sin\alpha\cos\beta;\\
f'''_{xyy}(x,y)=-\cos x\sin y & \Rightarrow & f'''_{xyy}(\alpha,\beta)=-\cos\alpha\sin\beta;\\
f'''_{yyy}(x,y)=-\sin x\cos y & \Rightarrow & f'''_{yyy}(\alpha,\beta)=-\sin\alpha\cos\beta.
\end{array}$$

Sustituyendo estas derivadas en las fórmulas de $P_2(x,y)$ y $R_2(x.y)$, obtenemos que

$$P_2(x,y)=\ xy\ \text{y}\ R_2(x,y)=-\frac{1}{3!}\Big(\cos\alpha\sin\beta\,x^3+3\sin\alpha\cos\beta\,x^2y+3\cos\alpha\sin\beta\,xy^2+\sin\alpha\cos\beta\,y^3\Big).$$

b) $f(1/2,1/2)\approx P_2(1/2,1/2)=1/2\cdot 1/2=1/4$.

La cota del error absoluto de esta aproximación se puede calcular del modo siguiente

$$\varepsilon=|f(1/2,1/2)-P_2(1/2,1/2)|=|R_2(1/2,1/2)|=$$

$$=\left|-\frac{1}{3!}\Big(\cos\alpha\sin\beta\,(1/2)^3+3\sin\alpha\cos\beta\,(1/2)^3+3\cos\alpha\sin\beta\,(1/2)^3+\sin\alpha\cos\beta\,(1/2)^3\Big)\right|=$$

$$=\frac{1}{3!\cdot 8}\Big|4\cos\alpha\sin\beta+4\sin\alpha\cos\beta\,y^3\Big|=\frac{4}{3!\cdot 8}\Big(\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta\Big)\leq$$

$$\leq\frac{4}{3!\cdot 8}(1\cdot 1+1\cdot 1)=\frac{1}{6}=0.1\overline{6}\quad \text{ya que } 0\leq\sin t\leq 1 \text{ y } 0\leq\cos t\leq 1 \text{ si } 0\leq t\leq 1/2.$$

3. *(2.5 punts)* Considereu el conjunt

$$D = \{(x, y) \in R^2 : \quad x^2 + y^2 \leq 4,\ |y| \leq 1\}$$

i la funció $f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2$.

a) Trobeu els extrems relatius de la funció f.

b) Dibuixeu el conjunt D, justifiqueu l'existència d'extrems absoluts de f en D i calculeu-los.

Solución.

a) La funció f és una funció polinómica i per tant de classe C^2 en tot R^2. Per tant els punts crítics de f són les solucions del sistema d'equacions:

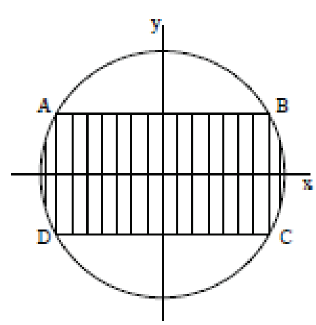
$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

Per tant f té un únic punt crític que és $(x, y) = (1, 0)$. Atés a que la matriu Hessiana de f és

$$Hf(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

es té $det(Hf(1, 0)) = 4 > 0$ i $f''_{xx}(1, 0) = 2 > 0$ i per tant en el punt $(1, 0)$ existeix un mínim relatiu de f.

b) D és el conjunt de punts del cercle de centre $(0, 0)$ i radi 2 amb $-1 \leq y \leq 1$. Un esquema de la representació gràfica del recinte D és



El conjunt D és tancat, ja que conté la seva frontera:

conté els dos arcs AD i BC de la circumferència $x^2 + y^2 = 4$

i els dos segments AB i CD de les rectes $y = \pm 1$.

El conjunt D és acotat ja que està contingut en la bola de centre $(0, 0)$ i radi 3.

Per tant, D és compacte.

Com que f es contínua en D, el teorema de Weierstrass assegura l'existència d'extrems absoluts de f en D.

1) Punts crítics de f a l'interior de D:

el punt $(1,0)$ trobat a l'apartat anterior pertany a l'interior de D, per tant hi ha un punt crític de f a l'interior de D: el $(1,0)$.

2) Buscarem els punts crítics de f condicionats a ser en la frontera de D:

(i) Vèrtexs de D: $A=(-\sqrt{3},1)$, $B=(\sqrt{3},1)$, $C=(\sqrt{3},-1)$ i $D=(-\sqrt{3},-1)$.

(ii) Punts crítics de f condicionats a ser sobre el segment

$$\text{DC}=\{(x,y)\in\mathbb{R}:\ y=-1,\ -\sqrt{3}\leq x\leq\sqrt{3}\}:$$

fent $y=-1$ tenim $f(x,-1)=(x-1)^2+1$, que és una funció d'una variable $\varphi(x)=(x-1)^2+1$. Per trobar els punts crítics igualem la seva derivada a 0 i resolem: $\varphi'(x)=2x-2=0\Rightarrow x=1$. Així s'obté el punt crític $(1,-1)$.

(iii) Punts crítics de f condicionats a ser sobre el segment

$$\text{AB}=\{(x,y)\in\mathbb{R}:\ y=1,\ -\sqrt{3}\leq x\leq\sqrt{3}\}:$$

fent $y=1$ tenim $f(x,-1)=(x-1)^2+1$, que és una funció d'una variable $\varphi(x)=(x-1)^2+1$. Per trobar els punts crítics igualem la seva derivada a 0 i resolem: $\varphi'(x)=2x-2=0\Rightarrow x=1$. Així s'obté el punt crític $(1,1)$.

(iv) Punts crítics de f condicionats a ser sobre els segments circulars AD i BC

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}:\ x^2+y^2-4=0,\ -1\leq x\leq 1\}:$$

aplicant el mètode de Lagrange, construïm la funció de Lagrange

$$L(x,y,\lambda)=(x-1)^2+y^2-\lambda(x^2+y^2-4).$$

Igualem les seves tres derivades parcials a zero i resolem:

$$\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda)=0\\ L'_y(x,y,\lambda)=0\\ L'_\lambda(x,y,\lambda)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(x-1)+2\lambda x=0\\ 2y+2\lambda y=2y(1+\lambda)=0\\ x^2+y^2-4=0\end{cases}$$

La segona equació implica $y=0$ o $\lambda=-1$, però $\lambda=-1$ és incompatible amb la primera equació, per tant ha de ser $y=0$. Aleshores, de la tercera equació obtenim $x=\pm 2$ i de la primera $\lambda=-1/2$ si $x=2$ i $\lambda=-3/2$ si $x=-2$. Per tant tenim dos punts crítics de la funció de Lagrange, $(2,0,-1/2)$ i $(-2,0,-3/2)$ i dos punts crítics de f condicionats sobre els segments circulars AD i BC, $(2,0)$ i $(-2,0)$.

Les imatges per f dels punts crítics trobats són:

$$\begin{array}{ccccc} f(\sqrt{3},1)=5-2\sqrt{3}; & f(\sqrt{3},-1)=5+2\sqrt{3}; & f(2,0)=1; & f(1,1)=1; & f(1,0)=0.\\ f(-\sqrt{3},1)=5+2\sqrt{3}; & f(-\sqrt{3},-1)=5+2\sqrt{3}; & f(-2,0)=9; & f(-1,1)=1; & \end{array}$$

Per tant el valor màxim absolut de f en D és 9 i l'assoleix al punt $(-2,0)$ i el valor mínim absolut de f en D és 0 i l'assoleix al punt $(1,0)$.

4. *(2.5 punts)* Donada la funció $f(x,y) = x^2 + y^2 + 10x$.

a) Trobeu la direcció de màxim creixement de f en el punt $(0,1)$ i el valor de la derivada direccional de f en aquesta direcció.

b) Trobeu l'equació del pla tangent a la superfície $z = f(x,y)$ en el punt $(0,1,1)$.

c) Trobeu els punt d'aquesta superfície en els quals la recta normal té la direcció del vector $(-1,-1,-1)$.

Solución.

a) La funció f és una funció polinómica i per tant de classe C^1 en tot R^2.

Donat que f és de classe C^1 en el punt $(0,1)$, la direcció de màxim creixement de f en el punt $(0,1)$ és la del vector gradient $\nabla f(0,1)$ i el valor de la derivada direccional de f en aquesta direcció és $||\nabla f(0,1)||$.

Les derivades parcials de f són $f'_x(x,y) = 2x + 10$ i $f'_y(x,y) = 2y$.

Per tant $f'_x(0,1) = 10$, $f'_y(0,1) = 2$, $\nabla f(0,1) = (10,2)$ i $||\nabla f(0,1)|| = 2\sqrt{26}$.

Aleshores la direcció de màxim creixement de f en el punt $(0,1)$ és la del vector $(10,2)$ i el valor de la derivada direccional de f en aquesta direcció és $2\sqrt{26}$.

b) El punt $(0,1,1)$ és un punt de la superfície $z = f(x,y)$, per tant l'equació del pla tangent a la superfície en el punt $(0,1,1)$ és

$$z = f(0,1) + f'_x(0,1)x + f'_y(0,1)(y-1)$$

es a dir, $z = 1 + 10x + 2(y-1) \Longrightarrow z = 10x + 2y - 1$.

c) La recta normal en un punt $(a,b,f(a,b))$ té vector director $(f'_x(a,b), f'_y(a,b), -1)$. Per tant els punts demanats són els punts tals que el vector $(2a+10, 2b, -1)$ té la direcció del vector $(-1,-1,-1)$, i per tant

$$\begin{cases} 2a + 10 = -1 \\ 2b = -1 \end{cases}$$

es a dir, $a = -\dfrac{11}{2}$ i $b = -\dfrac{1}{2}$. D'on $f(a,b) = f(-\dfrac{11}{2}, -\dfrac{1}{2}) = -\dfrac{49}{2}$.

Per tant l'únic punt d'aquesta superfície en el qual la recta normal té la direcció del vector $(-1,-1,-1)$, és el punt $\left(-\dfrac{11}{2}, -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{49}{2}\right)$.