1. Tétel

Jelenérték, kamat, logreturn, folytonos kamatozás, lognormális eloszlás.

Jelenérték: Egy jövőbeli pénzbevétel jelenértéke az az összeg, amelyet most kell befektetnünk egy bizonyos kamatláb mellett ahhoz, hogy később azzal a bevétellel megegyező pénzünk legyen.. A jelenérték felszorozva a hozammal/kamattal a jövőérték. A jelenértékét pedig úgy számítjuk ki, hogy a **jövőbeni ismert, vagy várt kifizetések értékét csökkentjük az adott időszakra elvárt hozammal**. Jelölése: PV (present value). Kiszámítása:

- Egy T. időszakban esedékes egyetlen kifizetésre:

$$PV = \frac{C}{(1+r_1)\cdot(1+r_2)\cdot\ldots\cdot(1+r_T)} = \frac{C}{\prod_{t=1}^{T}(1+r_t)}$$

- T. időszakig tartó folyamatos kamatozás esetén:

$$PV = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+r_t)^t}$$

C_t : a jövőben esedékes pénzmennyiség

r_t : a t lejáratú, hasonló kockázatú befektetések elvárt hozama

Ha az elvárt hozamot minden időszakban ugyanannyinak feltételezünk, a képletek egyszerűsödnek:

Egy kifizetés esetén:

$$PV = \frac{C}{(1+r)^t}$$

Pénzáramlás esetén:

$$PV = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+r)^t}$$

Logreturn: A megtérülés logaritmusa. Maga a megtérülés egy i időszakban:

$$r_i = \frac{V_{i+1} - V_i}{V_i}$$

V_i : A befektetés értéke az i. időszakban

A logreturn pedig így írható fel:

$$R = ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

Itt V_f a végső (final) értéket, míg a V_i a kezdeti (initial) értéket jelenti.

Folytonos kamatozás: Egy befektetés folytonosan kamatozik, így kiszámíthatjuk, hogy egy bizonyos idő eltelte után mennyi lesz a befektetésünk értéke. Egy befektetés jövőbeli értéke folytonos kamatozás esetén:

$$FV = PV * e^{ti}$$

Itt t az eltelt időt jelenti években, az i pedig a kamatlábat.

Egy jó magyarázat példákkal:http://www.meta-financial.com/lessons/compound-interest/continuously-compounded-interest.php

Ez úgy jön ki, hogy egy egységniy idő alatti r kamatlábat felosztjuk n részre, és n-szer kamatozik, vagyis (1+r/n)^(n*t) lesz a kamatos kamat. Ennek a határértéke pedig exp(rt). Ezt be lehet szorozni a kezdő PV összeggel ha pl nem $1-ről indulunk.

Változó kamatozásnál

$$V(t) = V(0)e^{\int_0^t r(s)ds}$$

ahol r(s) az s időpontban a kamatláb.

Lognormális eloszlás: Folytonos valószínűség eloszlás, melyre az jellemző, hogy a valószínűségi változó logaritmusa normális eloszlású. Az X valószínűségi változó μ várható értékkel és σ szórással:

$$X = e^{\mu+\sigma Z}$$

Z: standard normális változó

Eloszlásfüggvénye: $F(X) = \Phi\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right)$

Sűrűségfüggvénye: $f(x) = \varphi\left(\frac{\ln y-\mu}{\sigma}\right)\frac{1}{\sigma y}$, y>0 (y<=0 esetén 0)

Várható értéke: $E(X) = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$

Szórásnégyzet: $D^2(X) = e^{2\mu+\sigma^2}\left[e^{\sigma^2}-1\right] = E^2(X)\left[e^{\sigma^2}-1\right]$

2. Tétel

Pszeudó véletlenszámok generálása: módszerek, algoritmusok, ellenőrzés.

Pszeudó véletlenszámok: A véletlenszerű, de bizonyos matematikai szabály(ok) szerint létrehozott számokat hívják pszeudo(ál) véletlennek. Elég sokszor lefuttatva a számítást, előbb-utóbb ismétlésbe botlunk.

Generálás: elvárás, hogy nagy periódusú és egyenletes eloszlású legyen a generált szám, az utóbbi azért, mert könnyen lehet belőle más eloszlásokat generálni (lásd Box-Müller módszer).

Kongruenciális generátor: $x_{n+1} = ax_n + c(mod\ m)$

Link: https://en.wikipedia.org/wiki/Linear_congruential_generator

A változók a következő tételek miatt játszanak jelentős szerepet.

Tétel: Legyen c=0, a≠0, m prím. Ekkor a periódus a maximális (m-1) lesz akkor és csak akkor, ha $a^{m-1} \equiv 1(mod\ m)$ és $a^i \not\equiv 1(\mathrm{mod\ m})\ \forall\ \mathrm{i} < (\mathrm{m}-1)$-re.

Tétel: Legyen c=0, m= $2^k \geq 8$.

Ekkor a periódus a maximális m/4 lesz , ha a≡3 vagy 5 (mod m) és x_0 páratlan.

Tétel: Legyen c≠0. A lineáris generátor periódusa a maximális m, akkor és csak akkor, ha:

1. c és m relatív prímek
2. m bármely prím osztója (a-1)-nek
3. ha 4|m, akkor 4|(a-1)

Tétel: Legyen:

- X egyenletes eo. a {0,...,m-1} halmazon
- Y X-től független egészértékű valószínűségi változó

Ekkor W=X+Y(mod m) egyenletes a {0,...,m-1} halmazon.

Tétel: Legyen:

- $x_{i+1} \equiv a_1 x_i (mod\ m_1)$ (m_1-1) periódussal
- $y_{i+1} \equiv a_2 y_i (mod\ m_2)$ (m_2-1) periódussal

Ekkor x_i+y_i(mod m_1) periódusa: lkkt(m_1-1, m_2-1).

Példák:

- x_0=1, a=7, c=0, m=13
- x_0=1, a=7, c=3, m=13 =>kevert generátor
- a=7^5, c=0, m=2^{31}-1 (Lehmer)
- a=2^{16}+3, c=0, m=2^{31} (RANDU)

Wichmann-Hill:

```
[r, s1, s2, s3] = function(s1, s2, s3)
    % s1, s2, s3 should be random from 1 to 30,000. Use clock if available
    s1 = mod ( 171 * s1, 30269 )
    s2 = mod ( 172 * s2, 30307 )
    s3 = mod ( 170 * s3, 30323 )

    r = mod ( s1/30269 + s2/30307 + s3/30323, 1 )
```

(itt az 1 paraméter azt jelenti, hogy: *képlet (mod 1)*)

<u>**Ellenőrzés**</u>:

1.Runs teszt: Tegyük fel, hogy van egy adatsorunk, amiről el szeretnénk dönteni, hogy véletlen generált-e. például:

0.21 + 1.31 - 0.42 - 0.23 + 0.38 - 0.11 + 0.72 + 0.98

Runs-nak definiáljuk az adatsorban azt a változást, amikor a számok a sorozatban csökkenőre/növekvőre változnak. Tehát a 0.21 az első, kezdő run (növekvő), utána vált 0.42-nél, ez a második run, stb. Végül 5 run-t kapunk.

Ezután a várható érték és szórás:

$$\mu_a = \frac{2N-1}{3} \qquad \sigma^2 = \frac{16N-29}{90}$$

a: a futamok száma

N≥25 esetén *a* eloszlásának közelítenie kell a normális eloszláshoz.

$$Z_0 = \frac{a - [(2N-1)/3]}{\sqrt{(16N-29)/90}}$$

Ha a kapott Z_0-ra teljesül, hogy: $-z_{\alpha/2} \le Z_0 \le z_{\alpha/2}$ (α a fontossági szint, pl.5% => 0.05), akkor az adatsorunkat véletlennek tekintjük.

https://www.eg.bucknell.edu/~xmeng/Course/CS6337/Note/master/node44.html

2.Spektrál próba: A véletlen számsorozatot grafikusan ábrázoljuk 2-és 3 dimenzióban és vizsgáljuk, vannak-e ismétlődő minták. http://random.mat.sbg.ac.at/tests/theory/spectral/

3. Tétel

Véletlenszámok transzformációja, Monte-Carlo módszerek.

Inverz függvény módszer: Legyen η egy F_η eloszlású val. változó és létezzen az inverze.

Legyen ξ egy [0,1]-en egyenletes eo-ú val. változó, $F_\xi(x) \begin{cases} 0, x \le 0 \\ x, x \le 1. \\ 1, kül. \end{cases}$

Állítás: $\eta = F_\eta^{-1}(\xi)$

A módszer:

1. Generálunk egy ξ~U[0,1] véletlen számot.
2. Meghatározzuk F_η^{-1}-t.
3. Kiszámoljuk $F_\eta^{-1}(\xi)$-t, ez lesz a kapott véletlenszám.

Box-Müller transzformáció: Legyen U_1 és U_2 két egyenletes eloszlású véletlen szám [0,1]-en. Ekkor

$$Z_0 = \sqrt{-2\ln U_1}\cos(2\pi U_2)$$

$$Z_1 = \sqrt{-2\ln U_1}\sin(2\pi U_2)$$

Két független normális eloszlású véletlenszám.

p korrelációval, u1 és u2 meannel, d1, d2 szórással X és Y, ha X' és Y' függetlenek és E(X')=E(Y')=0 és D(X')=D(Y')=1:

X=u1+X'*d1

Y=u2+d2*(pX'+sqrt(1-p^2)Y')

Ez mátrixalakban is felírható.

<u>Monte Carlo módszerek</u>: Monte Carlo módszereknek nevezzük matematikai feladatok megoldásának véletlen mennyiségek modellezését felhasználó numerikus módszereit. http://www.uni-miskolc.hu/~matrp/FS_Sztoch_mod_ref.pdf-182.o

8.8. Példa. Ha $X_i \sim U(0,1)(i = 1, \ldots, 12)$, akkor

$$Y = \sum_{i=1}^{12} X_i - 6$$

közelítőleg standard normális eloszlású. Ez a centrális határeloszlás-tétel egy véges alkalmazása. Nem hatékony, mert sok véletlen számot használ.

4. Tétel

Gamma-eloszlás, Poisson folyamat.

<u>Gamma eloszlás</u>: A ξ val. változót λ paraméterű, a-adrendű gamma-eo-nak nevezzük, ha

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} x^{a-1} \lambda^a e^{-\lambda x}, x > 0$$

$\xi \sim \Gamma(a, \lambda)$

Gamma függvény: $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$

Ha a=1, akkor: $\xi \sim \mathrm{Exp}(\lambda) = \Gamma(1, \lambda)$

Két Gamma-eloszlású szám összege is gamma:

$$\xi + \eta \sim \Gamma(a + b, \lambda) \begin{cases} \xi \sim \Gamma(a, \lambda) \\ \eta \sim \Gamma(b, \lambda) \end{cases}$$

Generálása: n egyenletes eo-ú számból:

$$\sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - x_i) \sim \Gamma(n, \lambda)$$

Egyszerűbb alakban fel lehet írni.

Poisson folyamat: Egy sztochasztikus folyamat, mely események számát és időközeit modellezi. A Poisson-folyamat olyan számláló folyamat, melynél a T1, T2, . . . érkezések közötti idők exponenciális eloszlású független valószínűségi változók.

A Poisson-folyamat alapfolyamata egy időben folytonos számláló folyamat $\{N(t), t \geq 0\}$, a következő tulajdonságokkal:

- $N(0) = 0$
- Egymástól független növekmények jellemzik.
- Stacionárius növekmények (bármely időközben az előfordulások számának eloszlása csak az időközök hosszától függ).
- Nincsenek szimultán események.

A fentiek következtében:

- N(t) eloszlása Poisson-eloszlás
- A várakozási idő a következő eseményre exponenciális eloszlású
- Bármely időközben az előfordulás egyenletes eloszlást mutat

k db bekövetkezés valószínűsége h hosszú intervallumon:

$$P_k(h) = \frac{(\lambda \mathrm{h})^k}{k!} e^{-\lambda \mathrm{h}}$$

h=1 esetén:

$$P(\xi = \mathrm{k}) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

5. tétel

Optimalizálás és Modellillesztés

$$\min_g E\left(\left(\xi - g(\eta)\right)^2\right)$$

Keressük a fenti várható érték minimumát. Ha g(x)=a konstans, akkor a megoldás $a = E(\xi)$

Alapból pedig $g(x) = E(\xi | \eta = x)$. Intuíció e mögött: Az a cél, hogy egy olyan görbét kapjunk ami átlagosan legkevesebbet tér el a vv-től. Mivel a vv. átlagosan a várható értéket veszi föl, ezért g-nek is valami olyan formát kell öltenie. Ha konstans a g, akkor egyből vehetjük a várható értéket, de ha nem konstanst keresünk, hanem függvényt, akkor g egy adott pontban jó ha felveszi a várható értéket feltéve hogy a másik vv. is az adott pontban lesz.Ez a regressziós görbe.

** insert additional regression bullshit here **

Jöhet ide a lineáris regresszió, vagy exponenciális alakú regressziós görbe linearizálása is.

Vagyis g(x)=a*exp(bx), akkor ln(g(x))=ln(a)+bx, ahol ln(g(x))=Y, ln(a)=A jelöléssel Y=A+bx lineáris formulát kapjuk, ahonnan Y és x adottak, A és b számolható így lineáris regresszióval, a=exp(A) lesz így megvan a és b is...

Bónuszként lehetne ide a regressziós cuccokon kívül ez, erről volt szó egy órán, és valahogy ideköthető:

Ha egy modell értékeihez p_i valószínűségeket rendeltünk az előrejelzéshez, de végül az arányok q_i-re jöttek ki, ezt a különbséget

$$D(Q||P) = \sum_{i=1} \mathrm{q_i} \log_2 \frac{q_i}{p_i}$$

jelöli, ez a Kullback Leibler eltérés.

Pl megjósoltuk hogy egy n db pártra p_1, p_2, ... p_n valószínűségekkel szavaznak, de végül q_1, q_2, ... q_n-re jöttek ki a szavazás után, D(Q||P)-vel kiszámolható hogy mennyit tévedtünk, szóval modellalkotásokhoz az eredmény ellenőrzésére használható lehet. Ez felbontható

$$H(Q) = \sum_{i=1} \mathrm{q_i} \log_2 q_i$$

$$H(P) = \sum_{i=1} \mathrm{q_i} \log_2 p_i$$

És így D(Q||P)=H(Q)-H(P). H(Q)-t entrópiának hívjuk.

6. Tétel

Regresszió. Gauss- és Weibull-papír.

<u>Regresszió</u>: A regresszió számítás lényege annak vizsgálata, hogy egy bizonyos eredményváltozó hogyan függ más, magyarázóváltozók alakulásától.

A lineáris regresszió általános képlete:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X$$

X: magyarázó változó

Y: eredményváltozó

β_0: az a pont, ahol a regressziós egyenes metszi az x tengelyt.

β_1: az x változó 1 egységnyi változása ekkora növekedést idéz elő az Y változóban

Ehhez a képlethez szokott még kapcsolódni egy ε hibatag: $\varepsilon \sim N(0,\sigma^2)$

Ha a két változó átlagát vesszük, akkor β_0 kifejezhető és $\beta 1 = \frac{\sum(\mathrm{x}-\bar{\mathrm{x}})(\mathrm{y}-\bar{\mathrm{y}})}{\sum(\mathrm{x}-\bar{\mathrm{x}})^2}$; $\beta 0 = \bar{\mathrm{y}} - \beta 1 * \bar{\mathrm{x}}$

Ezután a modell használható becslésre, az x változó helyére írva a becsülendő értéket, az Y eredmény megadja a becslést.

A modell hibáját megkapjuk, ha az eredeti eredményváltozó tagjaiból kivonjuk a becsült változó tagokat és azoknak vesszük a négyzetösszegének gyökét. Matematikai alakban:

$$error = \sqrt{\sum (y - \hat{y})^2}$$

Egyéb, nem lineáris modellek is alkalmazhatók hasonló módon, például:

- Y=B0+B1*X+B2*exp(X)
- Y=B1*X+B2*exp(X)
- Y=B0+B1*X+B2*X^2
- Y=B1*X+B2*X^3

Gauss- és Weibull papír: mindkét "papír" a Q-Q plothoz hasonlóan azt vizsgálja, hogy egy adatsor egy bizonyos eloszlásból származik-e. A nevüket onnan kapták, hogy régen papíron ábrázolták ezeket a plotokat. Ma már persze statisztikai programok (pl. R) segítségével készülnek ezek.

https://www.itl.nist.gov/div898/handbook/eda/section3/weibplot.htm

(Nagyjából ennyit kell tudni róla, de itt van egy kis elmélet is:)

Legyen $x_1,...,x_n$ egy minta. Legyen X egy olyan valószínűségi változó, amelynek F_X eloszlásfv-e szig.mon.növekvő. Legyen $y_1<...<y_r$ a számegyenes egy felosztása. Jelölje μ_i az y_i-nél kisebb mintaelemek számát. Tekintsük az

$$y_i, F_x^{-1}\left(\frac{\mu_i}{n}\right), \qquad i = 1, \dots, r,$$

pontokat összekötő töröttvonalat. Ha az x,...x minta az X valószínűségi változóra vett minta, akkor ez a töröttvonal közelítőleg az y=x egyenes.

7. Tétel

Weibull-eloszlás és tulajdonságai.

Weibull-eloszlás: A Weibull-eloszlást használják a túlélési analízisben életbiztosítási számításokhoz.

$$F(X) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}, & x \geq 0 \\ 0, & k\ddot{u}l. \end{cases}$$

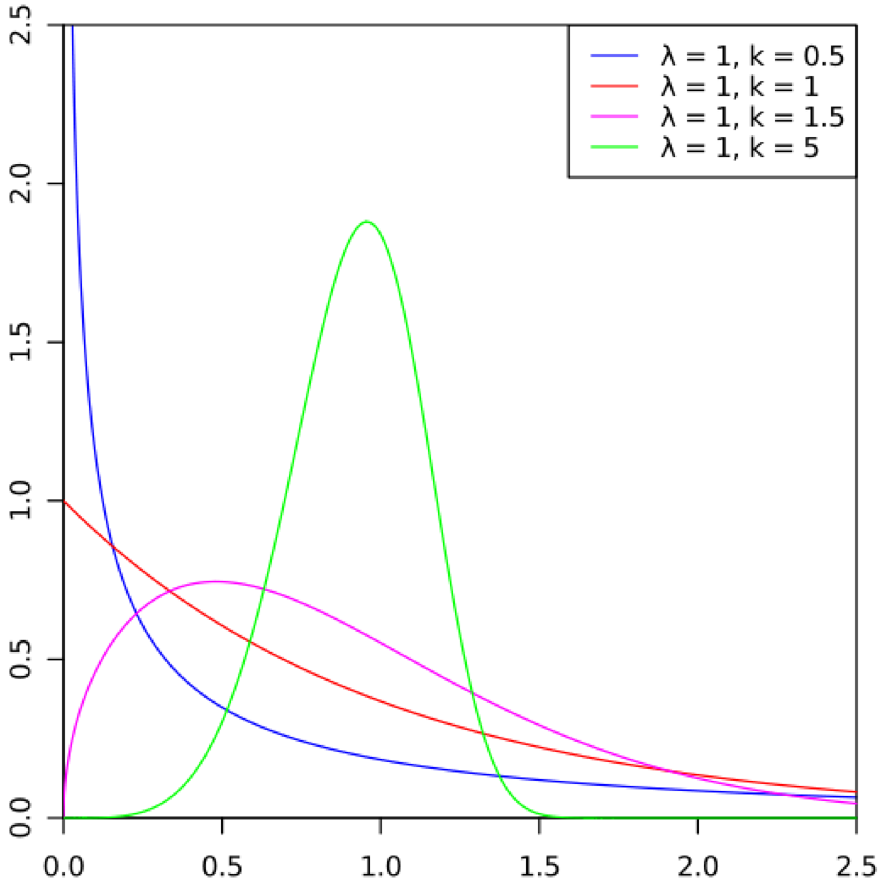
$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}, & x \geq 0 \\ 0, & k\ddot{u}l. \end{cases}$$

k>0: alak paraméter

λ>0: skála paraméter

Tulajdonságai:

- A sűrűségfüggvény alakjának változása:



- A k paraméter másféle értelmezése: https://en.wikipedia.org/wiki/Weibull_distribution#Standard_parameterization

8. Tétel

Hasznossági függvények és alkalmazásaik

intuíció: egy x érték hasznosságának számszerűsítésére szolgál, h(x)-el jelöljük egy változó esetén

$x > y \Rightarrow h(x) > h(y)$

- kétszer deriválható (minden változója szerint, de mi csak egyváltozósat vettünk)
- monoton, vagyis első derivált(ak) > 0
- konkáv, második derivált(ak) < 0

pl:

1-exp(-bx); ln(x); x^b; x-bx^2 (itt esetleg le lehet deriválgatni ezeket vizsgán hogy több legyen)

Alkalmazás

Vállalat profitfüggvénye, ez **kardinális** hasznosságfüggvény, ami azt jelenti hogy a

függvényértékek jelentőséggel bírnak (itt az h(x) érték a pénz, aminek van jelentősége).

Ezeket nem szokás transzformálni, hogy megmaradjon az eredeti jelentés.

Ordinális hasznosságfüggvény ha nincs jelentősége az értékeknek. Ezek transzformálhatók úgy, hogy a hasznosságfüggvény tulajdonságokat megtartsák (pl 2-vel beszorozható).

Arrow-Pratt féle kockázati averziómutató (kockázati kerülés mutató) egy w pontban, h hasznossági fügvényhez

A(w) = -h''(w)/h'(w)

Ez jó, mert pl az a*h(x)+b függvénycsoportnak ugyanaz az Arrow-Pratt mutatója.

Minél nagyobb ez a mutató, annál kockázatkerülőbb egy ember a hasznossági függvénye alapján.

A rate of returnhöz is lehet használni, ez alapján optimalizálni.

9. Tétel

Becslések (maximum likelihood, Cauchy- és Weibull-eloszlás)

Maximum likelihood becslés

Van egy független minta x1...xn, és egy f sűrűségfüggvény egy q paraméterrel.

Az összetett sűrűségfüggvény pedig f(x1, x2..., xn; q), ami a függetlenség miatt faktorizálható szorzattá

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n; q) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i; q)$$

Mivel az xi-ket tudjuk a mintából, q-t keressük. A likelihoodfüggvény q függvényében

$$L(q) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i; q)$$

Ezt kell maximalizálni. Gyakorlatban a logaritmusát szoktuk használni, vagyis a loglikelohood függvényt:

$$\ell(q) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i; q)\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln f_{X_i}(x_i; q)$$

Maximalizáláshoz deriválunk, és szélsőértéket keresünk. Pl exponenciálisnál általánosan levezetve megkapjuk hogy a q (vagyis lambda) = 1 / (avg(x)), a minta átlagának reciproka.

Cauchy

Cauchy eo (0,1) paraméterekkel = két fgtlen std normális hányadosa, sfv-je

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}$$

Y=sX+c sfv-je

$$f(x) = \frac{1}{\pi s\left(1 + \left(\frac{x-c}{s}\right)^2\right)}$$

logliklehood ez alapján, ha s=1: (u-val van a c jelölve)

$$\frac{d\ln L}{d\mu} = \sum_{i=1}^{n} \frac{2(x_i - u)}{1 + (x_i - u)^2}$$

Iterációs módszerrel meg lehet oldani 0-ra u szerint, x_i mintából.

Weibull

$$f(x;\lambda,k) = \begin{cases} \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k} & x \geq 0, \\ 0 & x < 0, \end{cases}$$

The maximum likelihood estimator for the λ parameter given k is

$$\widehat{\lambda}^k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k$$

Intervallumbecslés (Konfidencia intervallum becslése)

(ez mehet a gamma eloszlásos tételhez is)

P(x_a < lambda < x_b) = 1 – alfa

Lambda paraméterhez kell megadni egy (x_a, x_b) intervallumot, 1-alfa bizonyossággal (alfa bizonytalansággal), egy random minta alapján.

X1...Xn ~ Exp(lambda)

Y=n*mean(X)*lambda ~ Gamma(n,1)

Ezt felhasználva

P(a < Y < b) = F(b) – F(a) = 1-alfa

Legyen F(b) = 1-alfa/2, F(a)=alfa/2. F a Gamma eloszlás eo.függvénye, innen kapunk egy a-t és b-t. Ezután a konfidenciaaintervallum (a/(n*mean(X)), b/(n*mean(x))).

Ha egy változót (~ F eloszlással, l paraméterrel) exponenciálissá transzformálunk, akkor alkalmazható a fenti képlet általánosan is, ehhez az inverz függvény módszer jöhet:

-ln (F(X; l) ~ Exp(1), mert X~F volt, és a saját eo függvényébe visszahelyettesítve Y~U(0,1)-ez kapunk, valamint -ln(Y)/1 ~ Exp(1) az inverz módszer szerint.

10. Véletlen tagszámú összeg, negatív binomiális eloszlás

2.8. Definíció. *Legyen* $\nu \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ *valószínűségi változó, valamint* $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ *független, azonos eloszlású valószínűségi változók amelyek függetlenek* ν*-től is.*

Az $\eta_\nu = \xi_1 + \ldots + \xi_\nu$*, véletlen tagszámú összegnek nevezzük* ($\nu \geq 1$, $\eta_0 = 0$).

Diszkrét esetben

$$P(\eta_\nu = n) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\eta_k = n) P(\nu = k),$$

$$\mathbb{E}(\eta_\nu^l) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(\eta_k^l) P(\nu = k).$$

Folytonos esetben

$$f_{\eta_\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{\eta_k}(x) P(\nu = k)\,,\; F_{\eta_\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_{\eta_k}(x) P(\nu = k),$$

$$\mathbb{E}(\eta_\nu^l) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^l f_{\eta_k}(x)\, dx P(\nu = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(\eta_k^l) P(\nu = k).$$

2.9. Tétel. *A véletlen tagszámú összeg várható értéke*

$$\mathbb{E}(\eta_\nu) = \mathbb{E}\xi_1\, \mathbb{E}\nu.$$

2.10. Tétel. *A véletlen tagszámú összeg szórásnégyzete*

$$\mathbb{D}^2 \eta_\nu = \mathbb{D}^2 \xi_1\, \mathbb{E}\nu + \mathbb{E}^2 \xi_1\, \mathbb{D}^2 \nu.$$

Alkalmazása:

pl van N db kár, mindegyik X_i vv. szerinti kárnagyságú. A kár várható értéke kiszámítható ez alapján.

Negatív binomiális

Adott valószínűségi kísérlet A eseményének valószínűsége legyen p, komplementerének valószínűsége így 1-p. A kísérletsorozatot most addig végezzük, amíg A esemény r-szer be nem következik. A valószínűségi változó azt jelöli, hogy A (r+k)-adik esetben következett be r-edszer.

(saját magyarázat:)

Legyen egy súlyozott érménk, p hogy 1-est dob, 1-p hogy 0.

Eddig dobálunk amíg r-et nem kapunk összegként. Legyen k a 0-k száma. X a k értékek eloszlását jellemzi, vagyis azt hogy hányszor kaptunk 0-t ahhoz hogy összejöjjön az r db 1-es.

Többféle definíció létezik, van hogy X=r+k-t jelöli, van hogy k-t. Lehet p az esemény valószínűsége, vagy az esemény negáltjának valószínűsége.

Ha X=k-t jelöli, és p az esemény bekövetkezésének valószínűsége, akkor P(X=k) valószínűsége:

$$\binom{k+r-1}{r-1} p^r (1-p)^k,$$

Várható érték:

(1-p)*r/p

SzórásNÉGYZET:

r*(1-p)/p^2

Ha X nem a rossz dobások számát, hanem az utolsó jó dobás sorszámát (vagyis r+k-t) jelöli akkor a képletek: (várható érték el van osztva 1-p-vel az előzőhöz képest)

Várható értéke

$$\mathbf{E}(X) = \frac{r}{p}$$

Szórása

$$\mathbf{D}(X) = \frac{\sqrt{r(1-p)}}{p}$$

Negatív binomiális eloszlású független valószínűségi változók összege is negatív binomiális eloszlású – ha azonos a p paraméterük.

11. Élettartam modellek.

Lehet bárminek az élettartamára használni, nyugdíjszámításokhoz, valódi életkorhoz, életjáradék, biztosítások stb.

T – élettartam (születéskor)

$F(t) = P(T \leq t)$ – eloszlásfüggvény ($F(0) = 0,\ F(\omega) = 1$)

$\overline{F}(t) = P(T > t)$ – túlélésfüggvény

$f(t) = \dfrac{d}{dt}F(t)$ – sűrűségfüggvény, $F(t) = \int\limits_0^t f(s)ds$.

Feltételes valószínűségek, jelölések, összefüggések:

$$P(T \leq x + t | T > x) = {}_t q_x,$$

$$P(T > x + t | T > x) = {}_t p_x,$$

$${}_t p_x + {}_t q_x = 1,$$

$${}_t p_0 = \overline{F}(t),$$

$${}_t q_0 = F(t).$$

Halálozási intenzitás:

$$\mu(t) = \lim_{h \to 0} \frac{P(T < t + h | T > t)}{h} = -\frac{d}{dt} \ln \overline{F}(t),$$

azaz

$$\overline{F}(t) = \exp\left(- \int_0^t \mu(s) ds \right),$$

$$_t p_x = \exp\left(- \int_0^t \mu(x + s) ds \right).$$

Ez annak a valószínűsége hogy még t ideig élünk, feltéve hogy már éltünk x időt.
Az halálozási intenzitásfüggvények lehetnek:

6.3. Halandósági modellek

Szokásos modellek, példák:

1. Exponenciális

$$\mu(t) = \lambda, \quad \overline{F}(t) = e^{-\lambda t}.$$

2. Weibull

$$\mu(t) = \beta \alpha^{-\beta} t^{\beta - 1}, (\alpha > 0, \beta > 0), \quad \overline{F}(t) = \exp\left(- \left(\frac{t}{\alpha}^{\beta} \right) \right).$$

3. Gompertz-Makeham

$$\mu(t) = \alpha + \beta e^{\gamma t}, (\alpha > 0, \beta > 0), \quad \overline{F}(t) = \exp\left(-\alpha t - \beta \frac{e^{\gamma t} - 1}{\gamma} \right).$$

Az exponenciális esetében például állandó a halálozási intenzitás (lambda). Ezek alapján kiszámítható a várható élettertam is.

12.-13. Halálozási táblák, paraméterek és becslésük.

6.2. Halandósági táblák

A díjkalkuláció egyik legfontosabb eleme a halandósági tábla. Erre azért van szükség, mert azt nem tudjuk előre, hogy egy konkrét ügyfél hány évig fog még élni, de ha egy nagy számú közösséget vizsgálunk, ott már megfigyelhetők bizonyos törvényszerűségek. Megállapítható például, hogy egy x éves férfi esetében mekkora a valószínűsége annak, hogy bizonyos éven belül meghal.

A halandósági tábláknak két csoportja van; az egyik az ún. néphalandósági tábla. Ez népszámlálási adatokon alapul, és a teljes lakosságra vonatkozik. A másik csoportot a szelekciós táblák képezik. Ezt a lakosság bizonyos csoportjainak adatai alapján készítik el, például foglalkozás, lakóhely, családi állapot stb. szerint.

Jelölések:

l_0 – az alap populáció nagysága (általában 100000).

l_x – az x kort túlélők száma (x itt egész).

d_x – az elhalálozások száma x korban.

Ha a táblázat nem determinisztikusnak tekintett, akkor ezek várható értékek. Gyakori, hogy x és $(x+1)$ között az eloszlást egyenletesnek tekintik.

$$ {}_tp_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}, $$

$$ {}_tq_x = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x}. $$

$$ {}_1q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = q_x. $$

Részlet az 1990-es halandósági táblából:

x	l_x	d_x	q_x	e_x
35	94077	381	0.00405	32.60
36	93696	412	0.00440	31.73
37	93284	445	0.00477	30.87
38	92839	479	0.00516	30.02
39	92360	518	0.00561	29.17
40	91842	562	0.00612	28.34

e_x – az adott korban a várható élettartam:

$$e_x = \int_0^{\omega - x} {}_t p_x dt = \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \dots}{l_x}$$

Szokásos modellek, példák:

1. Exponenciális

$$\mu(t) = \lambda, \quad \overline{F}(t) = e^{-\lambda t}.$$

2. Weibull

$$\mu(t) = \beta \alpha^{-\beta} t^{\beta - 1}, (\alpha > 0, \beta > 0), \quad \overline{F}(t) = \exp\left(-\left(\frac{t}{\alpha}^{\beta}\right)\right).$$

3. Gompertz-Makeham

$$\mu(t) = \alpha + \beta e^{\gamma t}, (\alpha > 0, \beta > 0), \quad \overline{F}(t) = \exp\left(-\alpha t - \beta \frac{e^{\gamma t} - 1}{\gamma}\right).$$

6.1. Példa. Az 1982-es dániai halandósági táblát jól közelíti, ha

$$\alpha = 5 \cdot 10^{-4}$$
$$\beta = 7.5858 \cdot 10^{-5}$$
$$\gamma = \ln(1.09144).$$

Paraméterbecslések mehetnek loglikelihooddal:

lambda = 1/(mean(X)), ahol X az életkorokat jelenti, annyiszor véve ahányan pontosan az adott ideig éltek (vagyis abban a korban haltak meg), mean(X) pedig az átlagéletkort.

weibull modell esetén az X életkor vektorral a weibull eloszlás paramétereit keressük:

Sum Log(f(x_i, alfa, beta)), R-ben: (y,p)=> -sum(dweibull(y, shape=p[1], scale=p[2], log=TRUE))

ehhez az alfa és béta becslést megkaphatjuk az nlm könyvtárral: nlm(f=weibull_loglik,p=c(1,1), y=test). Ugyanígy a makeham modellel is.

14. Tétel

Arbitrázs tétel, tulajdonságok.

Tétel: Arbitrázs

$(x_1,\dots, x_n)$ $\quad$ x^T fogadási stratégia

r_{ij} $\quad$ i-edikre egységnyit teszünk, akkor a j-edik a tapasztalt megtérülés szerint lesz (i-ediket tesszük, j-ediket kapjuk)

A következő két állítás közül pontosan egy igaz:

1. $\exists\ y^T=(y_1,\dots,y_n)$ eloszlás, amelyre

$$\sum_{j=1}^{n} y_j r_{ij} = 0, \qquad i = 1,2,\dots,n$$

Vagyis létezik a várható kimeneteleknek olyan eloszlása, hogy **minden befektetési eszköz várható hozama 0**.

2. $\exists\ x^T=(x_1,\dots,x_n)$ eloszlás, amelyre

$$\sum_{i=1}^{n} x_i r_{ij} > 0, \qquad j = 1,2,\dots,m$$

Vagyis van olyan befektetési stratégia, ami minden lehetséges kimenetelre nyereséges.

Néha a 0 helyett a jobb oldalakon r is állhat, ez a kockázatmentes hozam.

$$x^T; x_{n+1} \qquad \qquad max\{x_{n+1}\}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i r_{ij} \geq x_{n+1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(-r_{ij}) + x_{n+1} \leq 0$$

$$x^T A \leq C \qquad \qquad max\{x^T B\}$$

Farkas theorem:

The system

$$XR > 0,$$

has no solution if and only if the system

$$Rp = 0$$
$$p \geq 0$$
$$p \neq 0$$

has solution.

Arbitrázs: Arbitrázs-lehetőségeknek nevezzük azokat a valamilyen piaci félreárazásból adódó lehetőségeket, amelyek a kockázatmentes hozamhoz képest azonnal és kockázatmentesen nyújtanak magasabb hozamot.

Példa: ha a Lukoil nevű orosz részvény árfolyama 20 dollár a londoni tőzsdén, a moszkvai tőzsdén viszont csak 18 dollár, akkor megéri Moszkvában megvenni a részvényt, és Londonban azonnal eladni, hiszen azonnal, kockázatmentesen 2 dollár részvényenkénti nyereségre lehet szert tenni. Az hogy ugyanaz a részvény két különböző helyen nem egy áron forog, félreárazás (mispricing), és ún. arbitrázs lehetőséget teremt. Ez egy térbeli arbitrázsra példa, de léteznek időbeli vagy több mint két eszközre kiterjedő lehetőségek is.

Tulajdonságok:

1. Egy adott értékpapír több piacra is bevezetésre került (mint a fenti példában), és különböző árakon kereskednek vele.
2. Háromszög-arbitrázs: két termék árfolyamából adódik egy harmadik eszköz árfolyama, de a harmadik eszköz árfolyama az elméleti ártól eltérő árfolyamon kereskedik. Pl. a forint/euró árfolyam 225 forint, a dollár/euró árfolyam 1,5 dollár, akkor a forint/dollár árfolyamnak 150 forintnak kell lennie, de a valóságban az árfolyam 155 forint. Ebben az esetben a forint/dollárt adni kell, a másik kettőt pedig venni egyidejűleg.
3. Felvásárlási (M&A - Merger & Acquisition) arbitrázs: Amikor egy vállalat felvásárlási ajánlatot tesz egy másik vállalatra, azt általában egy a piacinál magasabb árfolyamon teszi meg, más néven prémiumot fizet. Általában persze a hír kijötte után szinte azonnal arra a szintre ugrik az árfolyam, ahol az ajánlatot tette a felvásárló cég, de elképzelhető, hogy valamilyen okból (jellemzően bizonytalanság miatt) még egy ideig fennáll az arbitrázs lehetőség.
4. Egy piacon kereskedett eszköz árfolyama más eszközök árfolyamától függ. Pl. egy ETF (tőzsdén kereskedett befektetési alap) árfolyama eltér annak indikatív árfolyamától (az az árfolyam, amit a benne levő eszközök árfolyama indokolna), vagy egy ADR árfolyama eltér a mögöttes részvény árfolyamától, stb.
5. Egy eszköz azonnali és határidős árfolyama közötti különbség nem felel meg az elméleti különbségnek, vagyis a kamattartalom (azaz határidős és azonnali ár közötti különbség) arbitrázs-lehetőséget kínál. A határidős árnak az azonnali ár jövőértékének kell, hogy megfeleljen (lásd jövőérték-

számítás a lexikonban). Ha a határidős ár ettől eltér, akkor érdemes az egyik eszközt adni, és a másikat venni, majd lejáratig megtartani, vagy addig, ameddig a két ár közötti különbség nem éri el az elméleti szintet. Pl. ha a BUX index határidős árfolyama az azonnali ár alatt tartózkodik, ami néha előfordult már, érdemes a határidős BUX-ot venni, és az azonnali BUX-ot, azaz a részvényeket shortolni. Ez azonban nehezen megoldható a valóságban, így az ilyen arbitrázs-lehetőségek sokszor kihasználatlanul maradnak.

15. Tétel

15. A Markowitz-féle portfolió modell

Markowitz a portfólió diverzifikáció gyakorlatával foglalkozott, és pontosan megmutatta, hogyan csökkentheti a befektető a portfólió hozamának szórását olyan részvények kiválasztásával, amelyek nem mozognak teljesen együtt. De Markowitz nem állt meg itt, hanem kidolgozta a portfóliók kialakításának alapelveit. Jórészt ezeken az elveken épül fel a kockázat és hozam összefüggéseiről írt publikációk többsége.

x_0 kezdeti tőke

$\frac{x_1 - x_0}{x_0} = r$ ráta

n db befektetési eszköz.

R_i (i = 1, ... , n) az i-edik befektetés értékét (tőke + kamat) a következő időperiódusban. Ekkor R_i-t valószínűségi változónak tekintjük.

Portfólió alatt a nemnegatív x_i (i = 1, ... , n) számok összességét értjük, melyek összege pontosan 1. Az xi azt mutatja, hogy egységnyi tőkének mely részéért vásárolunk az *i*-edik befektetésből.

Így portfóliónk egységnyi befektetésre eső értéke a következő időperiódusban:

$$R = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i$$

A portfólió várható értéke:

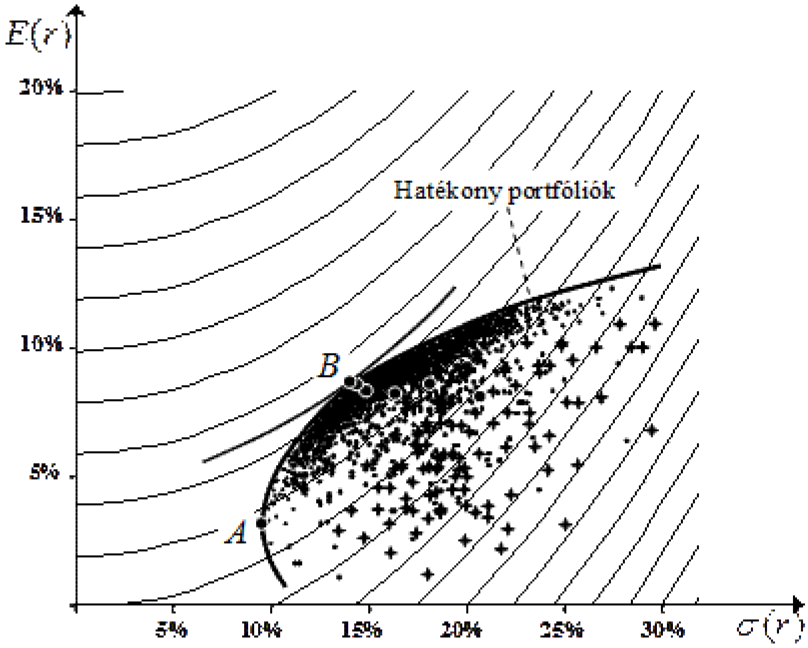
$$r = E(R) = \sum_{i=1}^{u} x_i r_i$$

Ha ezt akarjuk maximalizálni, akkor a helyzet egyszerű, teljes tőkénket a legnagyobb várható értékű befektetésbe fektetjük.

De sajnos, a magas nyereségű befektetések magasabb kockázatúak is.

Markowitz egy portfólió kockázatát annak szórásnégyzeteként definiálta:

$$\sigma^2 = D^2(R) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i c_{ij}\, x_j$$



Hatékony portfoliók görbéje

1. $\min D^2(R)$

   $x_1, \dots, x_n$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \;\; x_i \geq 0 \; \forall \; i - re$$

$$\sum_{i=1}^{u} x_i r_i = r_p$$

2. max r

   $x_1, \dots, x_n$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i c_{ij} x_j = \sigma^2 p$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \qquad \forall x_i \geq 0$$

16. Portfolió elmélet. CAPM. Tőkepiaci egyenes.

Portfolió elmélet: Portfolió alatt egy olyan befektetési csomagot értünk, mely alapvetően különböző kockázatú egyedi eszközökből áll. A portfólió képzés célja a befektető kockázatainak kezelése.

Egy portfóliót két mennyiséggel jellemzünk:

- A hozamai várható értékével [E(r)] és
- A hozamainak a várható értékhez mért szórásával [σ(r)]

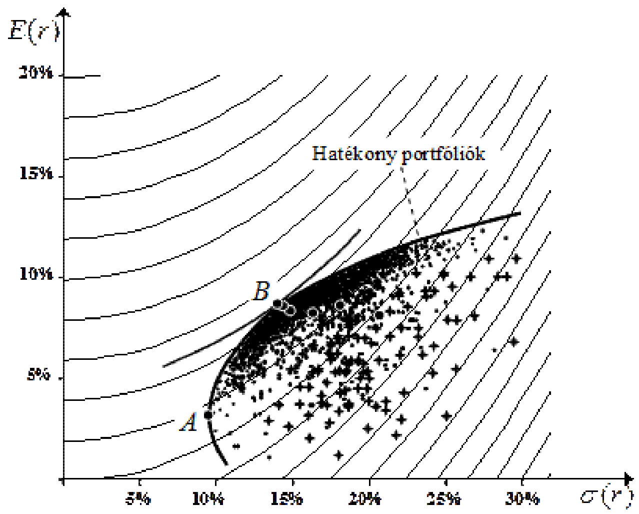
A portfólió kockázatát alapvetően az utóbbi mennyiség (szórásNÉGYZET) jelenti a befektető számára.

A portfólióelmélet arra keresi a választ, hogy milyen módon kombináljuk ezeket az értékpapírokat, hogy az egyes befektető szempontjából az optimális portfóliót kapjuk. Mit kell optimalizálni? A befektető három jellemvonás alapján alkot ítéletet egy befektetésről.

- Hozam
- Likviditás
- Kockázat

Legyen F(return on investment of portfolio)=minimal risk. F^(-1) többértékű függvény ekkor a portfólió görbe.

A hatékony portfóliók:



Hatékonynak egy **portfoliót** akkor nevezünk, ha teljesülnek rá a következő tulajdonságok:

1. nem állítható elő a portfólióénál nagyobb-egyenlő várható hozamú, de kisebb kockázatú portfólió,

2. nem állítható elő a portfólióénál kisebb-egyenlő kockázatú, de nagyobb várható hozamú portfólió.

- A portfólió kockázata a portfólióhozam változékonyságának függvénye,
- A befektetők kockázatkerülők,
- A befektetések biztonsága nagyobb prioritást élvez, mint a magasabb hozamlehetősége,
- A befektetők vagyongyarapodásra törekednek,
- Nincsenek tranzakciós költségek,
- Az elemzések a befektetések egy periódusára vonatkoznak,
- A befektetők racionálisak.

Ez azt jelenti, hogy a befektetők a vizsgált időtávon a lehető legkisebb kockázat mellett a lehető legnagyobb vagyonnövekedést szeretnék elérni.

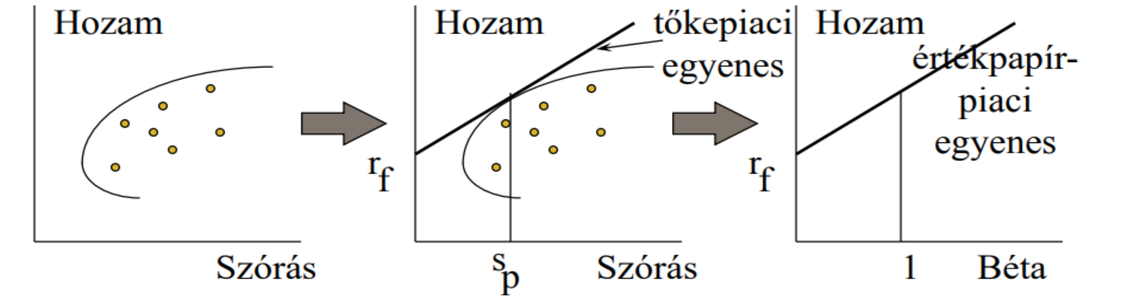
<u>CAPM:</u> capital asset pricing, RM a kockázatmentes, Rs a market érték.

$$R = xR_s + (1-x)R_M$$
$$i = 1, \dots, n$$
$$r_i - r_f = \frac{\delta_i, M * \delta_i}{\delta_M} * (r_M - r_f)$$

↑ $ß_i$ korreláció, tehát az i-edik milyen korrelációban van a piacival

A módszer alapkérdése, hogy a befektetéskor felvállalt kockázathoz mérten elérhető-e az a minimális mértékű hozam, amelyet egy hasonló befektetésből is megkapnánk.

Hatékony portfoliók Hatékony portfoliók kockázatmentes befektetéssel



CAPM	Részvénybéta	Portfolióbéta
$r_i = r_f + \left(r_m - r_f\right) \times \beta_i$	$\beta_i = \dfrac{COV(x,M)}{s_M^2}$	$\beta_p = \sum_{i=1}^{n} w_i \times \beta_i$

A ß, azaz a piaci portfólióval való együttmozgás mértékének (kovariancia) bevezetése révén az alábbi egyenlőséget állapították meg:
$E(R) = R_f + ß(R_{market} - R_f)$, ahol ß a részvény hozama és a részvénypiaci hozam közötti összefüggést fejezi ki. Értékei:

- $\beta = 1$: ha a piaci hozam 1%-kal változik, akkor a részvény hozama is 1%-kal változik.
- $1 < \beta$: ha a piaci hozam 1%-kal változik, akkor a részvény árfolyama kevesebb, mint 1%-kal változik.
- $\beta < 1$: ha a piaci hozam 1%-kal változik, akkor a részvény árfolyama több, mint 1%-kal változik.

R_f a kockázatmentes hozamot, R_{market} pedig a piaci kockázatot jelenti.

A CAPM-et összefoglalva tehát az alábbi állításokra juthatunk:

- Egyensúlyban a piaci portfólió hatékony, az érintési portfólió a piaci portfólió lesz (fő állítás!).
- Minden befektető a piaci portfóliót tartja optimális kockázatos befektetésnek.
- Minden befektető a kockázatmentes eszköz és a piaci portfólió keverékébe fektet (CML).
- Árazás az SML alapján: $E(R) = R_f + ß(R_{market} - R_f)$.
- Kockázati prémium a nem diverzifikálható kockázatért cserébe jár.
- Passzív befektetési stratégia hatékony.

<u>Tőkepiaci egyenes:</u> A tőkepiaci egyenes (Capital Market Line, CML) a kockázat abszolút megközelítésében (σ) írja le a hozamok alakulását.

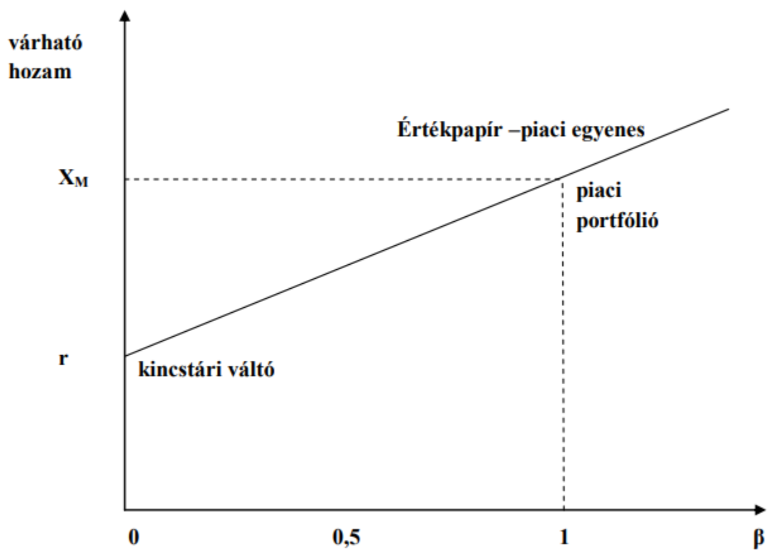
Piaci kockázatért fizetett ár: Ha teljesen diverzifikáljuk az egyedi kockázatot, akkor a portfolió csak a szisztematikus piaci kockázatot tartalmazza.

CML: Meredeksége miatt ez az egyenes adja a legjobb hozamkockázat kombinációkat, tehát meredeksége különös figyelmet érdemel.

Két fő tényező határozza meg, rf : az a pont, ahol a CML metszi a hozam tengelyt

Kockázati prémium: a piaci portfolió várható hozamának és a kockázatmentes kamatlábnak a különbsége. (r_m - r_f)

Másik tényező: piaci kockázat (σ f), mivel a kockázatmentes eszköz hozama fix, ezért hozamingadozás nulla, különbségük a piaci kockázatot adja.



17. Tétel

Stabil eloszlások. Stabil eloszlások vizsgálata (generálás, becslés). Tőkepiaci index.

<u>Egyváltozós stabil eloszlás:</u> Egy X valószínűségi változót stabilnak nevezünk, ha minden n-re léteznek olyan X_1, X_2, ... , X_n független valószínűségi változók, melyeknek közös az eloszlása, és amely eloszlás megegyezik X eloszlásával, továbbá léteznek olyan e(n) és a(n) konstansok, úgy hogy

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{a(n)} - e(n)$$

eloszlása megegyezik X eloszlásával.

A definícióban e(n) centráló, a(n) skálázó szerepet tölt be.

__Többváltozós stabil eloszlás:__ Az X véletlen vektor többváltozós stabil eloszlású, ha az X, X_1, X_2, ... független, azonos eloszlású véletlen vektorok esetén létezik an > 0 és $b_n \in \mathbf{R}^d$ úgy, hogy

$$\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2 + \ldots + \boldsymbol{X}_n \stackrel{D}{=} a_n\boldsymbol{X} + b_n.$$

__Stabil eloszlások vizsgálata (generálás, becslés):__

- **Stabil eloszlású véletlen számok generálása:**

exp(-c|t|^alfa)=KarakterisztikusFv(t)

alfa = 1 cauchy

alfa = 2 normális

S(alfa,0)=

sin(alfa*sigma)/cos(sigma)^(1/alfa) *

[cos((1-alfa)sigma)/mu]^[(1-alfa)/alfa]

mu~exp(1)

sigma~U(-pi/2,pi/2)

- **__Becslés:__**

Az egyik legegyszerűbb megközelítés lényege, hogy log-log skálán ábrázoljuk a megfigyeléseket és a megfigyeléshez tartozó valószínűségeket. Ekkor, ha a minta α-stabil eloszlású, akkor az empirikus eloszlásfüggvény pontjai a farkaknál egy −α meredekségű egyeneshez illeszkednek. Ez a módszer a stabil eloszlások azon tulajdonságából következik, hogy a farok viselkedése aszimptotikusan Pareto eloszlású, azaz az X stabil valószínűségi változó eloszlásfüggvényére

$$1 - F(x) \sim (1+\beta)C_\alpha x^{-\alpha},$$

ahol

$$C_\alpha = (1/\pi)\Gamma(\alpha)\sin(\alpha\pi/2).$$

Ha *x elég nagy*, akkor megközelítőleg igaz, hogy

$$\log P(X > x) = \log C_\alpha(1 + \beta)\gamma^\alpha - \alpha \log x.$$

- **Tőkepiaci index:**

A tőkepiaci index (CPMKTS) befektetési eszköz, amely nyomon követi a hagyományos befektetési minőségű amerikai tőkepiaci értékpapírok értékét. A tőkepiaci index valós idejű, súlyozott piaci index. Ez magában foglalja a mintegy 9.500 tőkét, fix kamatozású és pénzpiaci eszközöket.

18. Tétel

Borwn-mozgás. Geometriai Brown-mozgás.

Brown-mozgás:

A Brown-mozgás olyan

$$\{W(t), t \in [0, \infty)\}$$

véletlen folyamat, ahol

1. $W(0) = 0$.

2. $W(t)$ folytonos.

3. A W folyamat független növekményű.

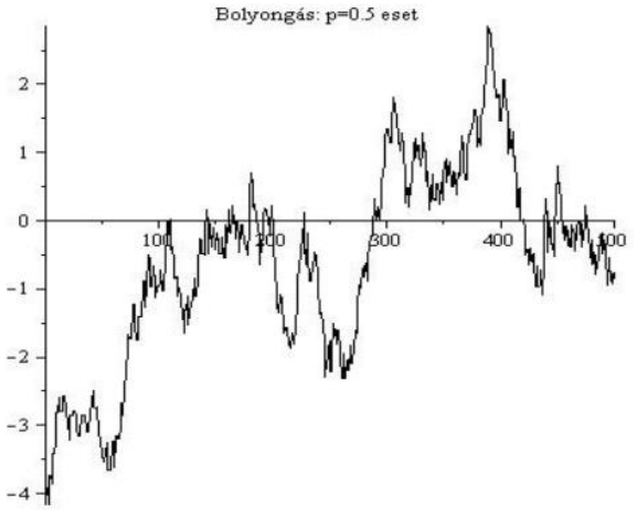
4. $W(t + s) - W(s) \sim N(0, \sigma^2 t)$.

$W(t)$ megfigyelt a $[0, T]$ intervallumon és $\sigma^2 = 1$.

Tudjuk, hogy a kovariancia függvény

$$R(s, t) = \min(s, t).$$

A sajátfüggvényekre



azaz

$$-\varphi(s) = \lambda\varphi''(s), \qquad \varphi(0) = 0, \qquad \varphi'(0) = 0.$$

Tehát megadható a Karhunen-Loeve sorfejtés, ami standard Gauss-eloszlású.

Geometriai Brown-mozgás:

Legyen $\{\tilde{X}(t) \, : \, t \, \geq \, 0\}$ Brown-mozgás. A sodródó Brown-mozgás olyan sztochasztikus folyamat, melynek eloszlása megegyezik

$$X(t) = \tilde{X}(t) + \mu t, \qquad t \geq 0$$

eloszlásával, ahol μ állandó (sodrási paraméter).

A folyamatot definiálhatnánk a következő módon is.

Definíció: A $\{X(t) : t \geq 0\}$ sodródó Brown-mozgás, ha

(1) $X(t + s) - X(s) \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$, $0 < s, t$. μ és σ rögzített konstans.

(2) $t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_{n-1} < t_n$, akkor a

$$X(t_2) - X(t_1), X(t_2) - X(t_1), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$

valószínűségi változók függetlenek.

(3) $X(0) = 0$, és $X(t)$ folytonos a 0 pontban.

Példa: Egy tökéletes piacon árusított részvény árváltozásainak modellezése:

– nem-negatív árak;

– oszcilláló viselkedés (hosszú távon exponenciális csökkenésekkel tarkított exponenciális növekedés);

1

– ha $t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, akkor

$$\frac{Y(t_1)}{Y(t_0)}, \frac{Y(t_2)}{Y(t_1)}, \ldots, \frac{Y(t_n)}{Y(t_{n-1})}$$

független valószínűségi változók.

Egy ilyen opció birtokosa, legalábbis részben, lemond a részvény közvetlen birtoklásáról, amelynek értéke (várhatóan) időegységenként $\alpha=\mu+(1/2)\sigma^2$ arányban növekszik, mivel

$$E(Y(t)|Y(0) = y) = y \exp\left[t(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)\right].$$

Az opciótól ϑ > α hozamot követelünk meg (leszámítolás, jelenérték).

Legyen T(a) az első időpont, amelyre Y (T(a)) = a. Ekkor a leszámítolt

potenciális profit

$$e^{-\vartheta T(a)}[Y(T(a)) - 1] = e^{-\vartheta T(a)}(a - 1).$$

A várható leszámítolt profit nagyságát akarjuk kiszámítani, és azután maximalizálni a várható profitot.

A T(a) az első olyan időpont, amikor X(t) − ln Y (t) eléri az ln(a) szintet.

19. Tétel

Opcióárazási modellek. A Black-Scholes formula.

deltaT az idő ameddig él az opció: T – t
S: részvényárfolyam
x: kötési árfolyam
r: kockázatmentes kamatláb
ró: variancia, szórás (kockázat gyöke)
b=nem osztalékos kamat = r – q, ahol q az osztalék

- Osztalékot nem fizető eset:
  - EU vételi opció ára (ΔT múlva X áron vehet)

    $$c = S * \varphi(d_1) - x * e^{-r\Delta T} * \varphi(d_2)$$

  - EU eladási opció ára (ΔT idő múlva X áron vehet)

    $$p = x * e^{-r\Delta T} * \varphi(-d_2) - S * \varphi(-d_1),$$

    ahol $d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{x}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)*(\Delta T)}{\sigma*\sqrt{\Delta T}}$, $\quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\Delta T}$

- Osztalékot fizető (általános) eset:
  - EU vételi opció ára:

    $$c = S * e^{(b-r)(\Delta T)} * \varphi(d_1) - x * e^{-r(\Delta T)} * \varphi(d_2)$$

  - EU eladási opció ára (T időpontban, X áron vehet)

    $p = x * e^{-r(\Delta T)} * \varphi(-d_2) - S * e^{(b-r)(\Delta T)} * \varphi(-d_1)$=-c(-d1,-d2)

  1. ha b=r, előző képlet, ha b=r-d, folytonos osztalék