# 从 Cauchy-Riemann 方程到代数学基本定理

Alan C. Lazer

从 C. F. Gauss (高斯) 的博士论文开始，至今代数学基本定理的证明至少有 11 种方法．代数学基本定理的叙述为：对于每个非常数复多项式 $p(z)$, 存在一个复数 $z_0$, 使得 $p(z_0)=0$ [3, 7, 8]. 然而，为什么还有这么多人热衷于寻找新的证明方式呢？

我们的首要理由是，它给出了 Cauchy-Riemann (柯西－黎曼) 方程的一个应用，柯西－黎曼方程通常在本科生复变函数课程的前两周就学到了．

我们的证明主要分 3 步．第一步是本科第一学期的微积分．

**引理 1.** *如果 $\omega(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上实值函数，具有二阶偏导数，在点 $(x_0,y_0)$ 处取得最大值．那么*

$$\Delta\omega(x_0,y_0)\equiv\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}(x_0,y_0)+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}(x_0,y_0)\le 0.$$

**证明** 一元函数 $x\mapsto\omega(x,y_0),\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ 和 $y\mapsto\omega(x_0,y),\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ 分别在 $x_0$ 和 $y_0$ 处取得极大值．由单变量微分学二阶导数检验法即得 $\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}(x_0,y_0)\le 0$ 和 $\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}(x_0,y_0)\le 0$. 引理 1 得证． ■

我们的第 2 步是复多项式的一个性质．

**引理 2.** *令 $Q(z)$ 是一非零复多项式．则存在数 $d>0$, 使得如果 $Q(a)=0$, 则 $Q(a+d)\neq 0$.*

**证明** 由多项式因子分解定理即得 $Q(z)=0$ 有有限个解．令 $d$ 是小于任意两个不同根的距离的正数，即得引理的论断．这就证明了引理 2. ■

我们的第 3 步是一个恒等式，在一些简要的回顾之后我们将给出其证明．

令 $D$ 是复平面 $\mathbb{C}$ 的开子集．回忆一下，定义在 $D$ 上的复值函数在 $D$ 中是全纯的，如果它在 $D$ 中每一点处可微．用通常的方式，我们把复平面 $\mathbb{C}$ 等同于 $\mathbb{R}^2$, 并注意到：如果 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ (其中 $u$ 和 $v$ 是实的) 在 $D$ 中是全纯的，则熟知的柯西－黎曼方程蕴涵着

$$f'(z)=u_x(x,y)+iv_x(x,y)=v_y(x,y)-iu_y(x,y).$$

如果 $f'$ 也是 $D$ 中的全纯函数，则

$$f''(z)=u_{xx}(x,y)+iv_{xx}(x,y)=-u_{yy}(x,y)-iv_{yy}(x,y).$$

在上述方程中令实部与虚部分别相等，即得 $\Delta u(x,y)=0$, $\Delta v(x,y)=0$.

---

译自：Math. Magazine, Vol.79 (2006), No.3, p.210–213, From the Cauchy-Riemann Equations to the Fundamental Theorem of Algebra, Alan C. Lazer. 

下面诸事实在复变课程中通常只是列出而不予证明，因为其证明与单变量微积分中的是一样的 [1, 2].

(i) $D$ 中两个全纯函数的和，积仍为 $D$ 中的全纯函数；对于和，积的导数，通常的公式成立.

(ii) 若 $g$ 是 $D$ 中的全纯函数，并且对每个 $z \in D$ 有 $g(z) \neq 0$, 那么 $1/g$ 在 $D$ 中是全纯的，且

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -g'/g^2.$$

(iii) 如果

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n,$$

其中 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ 是复常数，那么 $p$ 在 $\mathbb{C}$ 中全纯，并且

$$p'(z) = a_1 + \cdots + (n-1)a_{n-1}z^{n-2} + na_n z^{n-1}.$$

下面我们来证明上面提到的恒等式.

**引理 3.** *若 $f(z), f'(z)$ 均在 $D$ 中全纯，则有*

$$\Delta(|f(z)|^2) = 4|f'(z)|^2.$$

**证明** 令 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, 则 $|f(z)|^2 = \big(u(x,y)\big)^2 + \big(v(x,y)\big)^2$. 由此即得，如果 $\omega(x,y) = |f(z)|^2$, 那么 $\omega_x = 2uu_x + 2vv_x$, $\omega_{xx} = 2uu_{xx} + 2(u_x)^2 + 2vv_{xx} + 2(v_x)^2$, 同样地， $\omega_{yy} = 2uu_{yy} + 2(u_y)^2 + 2vv_{yy} + 2(v_y)^2$. 又由于在 $D$ 中 $\Delta u = \Delta v = 0$, 因此

$$\Delta\omega = 2(u_x)^2 + 2(v_x)^2 + 2(u_y)^2 + 2(v_y)^2 = 4|f'(z)|^2, \tag{1}$$

最后一个等号由柯西－黎曼方程即得. 这就证明了引理 3. ■

**代数学基本定理的证明：** 令 $p(z)$ 是非常数复多项式，则 $p'(z)$ 是非零复多项式. 因此存在数 $d$, $d > 0$, 使得当 $p'(z) = 0$ 时 $p'(z+d) \neq 0$.

我们断言存在 $z_0$, 使得 $p(z_0) = 0$. 如若不然，函数 $f(z) = 1/p(z)$ 和 $f(z+d)$ 在 $\mathbb{C}$ 上全纯. 因而

$$\omega(x,y) = |f(z)|^2 + |f(z+d)|^2$$

连续且有连续二阶偏导数. 易见当 $x^2 + y^2 \to \infty$ 时 $\omega(x,y) \to 0$.

令 $\omega$ 在 $(x_0, y_0)$ 处取得最大值. 由引理 1, $\Delta\omega(x_0,y_0) \leq 0$. 由引理 3, $\Delta\omega(x,y) = 4\big(|f'(z)|^2 + |f'(z+d)|^2\big)$. 故令 $z_0 = x_0 + iy_0$, 我们即有 $f'(z_0) = 0$, $f'(z_0+d) = 0$. 但 $f'(z_0) = -p'(z_0)/p(z_0)^2$, $f'(z_0+d) = -p'(z_0+d)/p(z_0+d)^2$. 因此 $p'(z_0) = 0 = p'(z_0+d)$, 这就产生了矛盾，从而证明了代数学基本定理. ■

我们愿意指出，对一个开集中的全纯函数 $f$, 恒等式

$$\Delta|f|^2 = 4|f'|^2 \tag{*}$$

是众所周知的. 它是 Nehari [4, p.64] 中的一个练习，也见 Titchmarsh 的经典参考书 [6, p.7]. 然而，要从柯西－黎曼方程得出上述恒等式，需要先证明 $f$ 的实部和虚部具有二阶偏导数. 对于一般的全纯函数，没有柯西积分理论或其它高等理论无法得到这一点. 当 $f = 1/p$ 时，利用基本性质 (i), (ii), (iii) 就回避了这些理论而证明了 (*). (下转 142 页)

| Institution of Affiliation | HCRs | % of HCRs | non-native HCRs | % of non-native HCRs | native HCRs | % of native HCRs | BSs acquired in same country | % of BSs acquired in same country | BSs acquired elsewhere | % of BSs acquired elsewhere | PhDs acquired in same country | % of PhDs acquired in same country | PhDs acquired elsewhere | % of PhDs acquired elsewhere | Country |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Stanford University | 16 | 4.66% | 8 | 50.0% | 8 | 50.0% | 8 | 50.0% | 8 | 50.0% | 16 | 100.0% | 0 | 0.0% | USA |
| University of California, Berkeley (*) | 14 | 4.08% | 6 | 42.9% | 7 | 50.0% | 7 | 50.0% | 5 | 35.7% | 11 | 78.6% | 3 | 21.4% | USA |
| University of Minnesota | 10 | 2.92% | 5 | 50.0% | 5 | 50.0% | 6 | 60.0% | 3 | 30.0% | 8 | 80.0% | 2 | 20.0% | USA |
| Princeton University | 10 | 2.92% | 8 | 80.0% | 2 | 20.0% | 3 | 30.0% | 7 | 70.0% | 5 | 50.0% | 5 | 50.0% | USA |
| Harvard University | 8 | 2.33% | 4 | 50.0% | 4 | 50.0% | 4 | 50.0% | 4 | 50.0% | 8 | 100.0% | 0 | 0.0% | USA |
| New York University | 7 | 2.04% | 4 | 57.1% | 3 | 42.9% | 4 | 57.1% | 3 | 42.9% | 6 | 85.7% | 1 | 14.3% | USA |
| Pierre & Marie Curie University (*) | 6 | 1.75% | 0 | 0.0% | 5 | 83.3% | 4 | 66.7% | 0 | 0.0% | 3 | 50.0% | 2 | 33.3% | France |
| Massachusetts Institute of Technology | 6 | 1.75% | 4 | 66.7% | 2 | 33.3% | 1 | 16.7% | 5 | 83.3% | 5 | 83.3% | 1 | 16.7% | USA |
| University of Oxford | 6 | 1.75% | 1 | 16.7% | 5 | 83.3% | 4 | 66.7% | 2 | 33.3% | 4 | 66.7% | 2 | 33.3% | UK |
| Yale University (*) | 6 | 1.75% | 4 | 66.7% | 1 | 16.7% | 2 | 33.3% | 3 | 50.0% | 4 | 66.7% | 2 | 33.3% | USA |
| Tel Aviv University | 5 | 1.46% | 2 | 40.0% | 2 | 40.0% | 2 | 40.0% | 2 | 40.0% | 2 | 40.0% | 3 | 60.0% | Israel |
| University of Washington | 5 | 1.46% | 3 | 60.0% | 2 | 40.0% | 2 | 40.0% | 3 | 60.0% | 3 | 60.0% | 2 | 40.0% | USA |
| Cornell University (*) | 5 | 1.46% | 2 | 40.0% | 2 | 40.0% | 1 | 20.0% | 3 | 60.0% | 3 | 60.0% | 2 | 40.0% | USA |
| Georgia Institute of Technology | 5 | 1.46% | 4 | 80.0% | 1 | 20.0% | 1 | 20.0% | 3 | 60.0% | 3 | 60.0% | 2 | 40.0% | USA |
| Rutgers University | 5 | 1.46% | 5 | 100.0% | 0 | 0.0% | 0 | 0.0% | 5 | 100.0% | 2 | 40.0% | 3 | 60.0% | USA |
| Texas A&M University (*) | 5 | 1.46% | 1 | 20.0% | 3 | 60.0% | 4 | 80.0% | 1 | 20.0% | 5 | 100.0% | 0 | 0.0% | USA |
| University of California Davis | 5 | 1.46% | 4 | 80.0% | 1 | 20.0% | 1 | 20.0% | 4 | 80.0% | 3 | 60.0% | 2 | 40.0% | USA |
| University of Maryland | 5 | 1.46% | 2 | 40.0% | 3 | 60.0% | 3 | 60.0% | 2 | 40.0% | 4 | 80.0% | 1 | 20.0% | USA |
| Northwestern University | 4 | 1.17% | 1 | 25.0% | 3 | 75.0% | 3 | 75.0% | 1 | 25.0% | 4 | 100.0% | 0 | 0.0% | USA |
| University of California, Los Angeles | 4 | 1.17% | 2 | 50.0% | 2 | 50.0% | 2 | 50.0% | 2 | 50.0% | 3 | 75.0% | 1 | 25.0% | USA |
| University of Chicago | 4 | 1.17% | 4 | 100.0% | 0 | 0.0% | 2 | 50.0% | 2 | 50.0% | 3 | 75.0% | 1 | 25.0% | USA |
| University of Texas at Austin | 4 | 1.17% | 3 | 75.0% | 1 | 25.0% | 1 | 25.0% | 3 | 75.0% | 2 | 50.0% | 2 | 50.0% | USA |
| University of Wisconsin - Madison | 4 | 1.17% | 2 | 50.0% | 2 | 50.0% | 2 | 50.0% | 2 | 50.0% | 3 | 75.0% | 1 | 25.0% | USA |
| University of Cambridge | 4 | 1.17% | 1 | 25.0% | 3 | 75.0% | 4 | 100.0% | 0 | 0.0% | 2 | 50.0% | 2 | 50.0% | UK |

表 A9 数学领域中的顶尖机构 (关于 HCRs) (*) 缺少关于出生地的数据

(赵振江 译 陆柱家 校)

*****************************************************************************

(上接 192 页) 最后，我们给出基于引理 3 的另一个证明. 在一个连通有界开集 $D$ 中两次连续可微，在 $\overline{D}$ 上连续，并且满足 $\Delta w \geq 0$ 的函数 $w$ 称为在 $D$ 中下调和的. 下调和函数的最大值原理 [5] 指出 $\max_{\overline{D}} w = \max_{\partial D} w$, 其中 $\partial D$ 是 $D$ 的边界. 引理 3 说明了如果 $p(z)$ 是没有零点的非常数复多项式，那么如下定义的 $w(x,y)$

$$w(x,y) = \frac{1}{|p(z)|}, \quad z = x + iy$$

在 $\mathbb{R}^2$ 上满足 $\Delta w \geq 0$. 令 $D$ 是以 $O$ 为心, $r$ 为半径的圆盘，由 $r \to \infty$ 时, $w \to 0$ 以及最大值原理知 $w \equiv 0$, 这与 $w(x,y) > 0$ 矛盾.

**致谢、参考文献** (略)

**校后注** 本文引理 2 的证明用到了复多项式的因子分解定理，这是与代数学基本定理等价的定理.

(高燕芳 译 马守全 陆柱家 校)