Morse 理论 微分同胚，Morse函数

综合报告

177-190

1996(978)(x)0151003

①

96, 15(3)

177-190

O189.32

不可征服的Morse理论

献给——René Thom

Raoul Bott Bott. R

50 年代早期我多次听到过 Thom 的名字和工作，它们冲击着我的生活，但恐怕没有一次像我于 1952–1953 年之间在普林斯顿火车站迎接从欧洲归来的 Norman Steenrod 那样富有戏剧性. Steenrod 在我心目中是一个了不起的英雄，他是我的第一位拓扑学老师. 1949 年，我选听过他开的纤维丛课程. 自那时起，我一直狂热地追随着他. 我与 Norman 见面的策略是想在普林斯顿他极可能出现的地方闲逛，当他出现在我面前时，我突然很意外地迎上去. Steenrod 是一个极好的谈话对象. 当你说话时，他总是很认真地听，而且从来不装懂. 从来不说可怕的字眼 “当然”.

我们的这次见面是坦诚的，因为我有一篇关于 Steenrod 平方的新观点的文章交给他，他是 Annals 的编委. 我们寒喧过后，带着探询的表情他收下了我的文章. 之后，他从夹克衫的荷包里拿出一个白色的小信封对我说：“这是 Thom 和吴文俊的文章，他们考虑的问题跟你的一样，但只有当你完成了你的问题并发现是正确时，才能让你看这篇文章.” 至此，“Thom 和吴” 的名字就在我梦中萦绕了好几个月. 直到我的文章被接收了，我才得以看他们的更专业化的文章.

Thom, 吴和我都是利用循环乘积的 Smith 理论发现 Steenrod 运算的内在定义. 这些都是用等变量理论来刻划 Steenrod 的本质定义所作的探索. 无论如何，我本来可以睡得很香的，因为 Thom 和吴的文章还没有正式发表，当然那时我不知道. 几年以后我亲自见到 Thom 时，我大大地释然了. 我是 1955–1956 年之间在 IAS 见到 Thom 的，我发现他是一个很开朗而且很和蔼的人.

我们这里的人都知道，Thom 用他的手指头和手做数学. 当他告诉我，对带边流形，边界上的临界点只有一半是真正 “被计算的”, 他的手的动作我至今依然记得. 当然正是 “临界点” 这一名词使得我今早上的讲演题目为 “不可战胜的 Morse 理论”. 我想 Morse 是会赞成我这一题目的. 当我第一次遇到他，他就在对一群年轻人传播 “临界点理论” 的福音. 不管他从何处开讲，我们年轻人都会相互眨眼. 实际上，在 1949 年，他并没有直接研究临界点理论，他完全醉心于函数空间上的二次型的下半、上半连续性问题. 当

原题: Morse theory indomitable. 译自: *Inst. Haustes-Etudes Sci. publ. Math. (1988) No. 68, (1989) 99–114.* (纪念 *R. Thom* 会上的报告).

然隐藏其后的动机则是无穷维的临界点理论. 那个时期他的文章使我们受益是不足为奇的, 因为无穷维情形正是我们当今的主流方向的热点. 从 1949 年到 1951 年, 当我学习 Morse 理论的时候, —— 主要是随意地毫无目的地学习, 当然试图去读懂他的书以及 Seifert 和 Threlfall 的书 ——Morse 并不沉溺于 Hilbert 空间, 而是更多地热衷于分析而不是拓扑. 实际上, 那时在普林斯顿对 Morse 理论感兴趣的只有 Steenrod 一个人. 到 1950 年我已经理解了 "Thom 同构" 怎样适合 Morse 理论以及知道了怎样 "计算" 高维临界点集. 例如, 从 Thom 的观点来看, 球面的对称积的上同调是非常明显的. 我记得这个方法曾使 Norman 极为欣喜.

现在言归正传, 我今天在这里想做的是试图阐明我所经历的 "Morse 理论" 发展的各个阶段, 特别对源于 Thom(40 年代),Smale(60 年代),Witten(70 年代) 和 Floer(80 年代) 的各个新思想作些评论.

首先让我提醒你们我今天要讲的内容. 简单说来, 就是光滑紧致流形 M 上的非退化 Morse 理论. 此时假定光滑函数 $f: M \to \boldsymbol{R}$, 它的极值点 (extrema), 即微分 df 退化 $dfp=0$ 的那些点 p 是非退化的, 即在这样的点的附近, f 在 p 点 Hessian 矩阵

$$H_pf = \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right\|, \quad x_i\text{表示}p\text{点的局部坐标}.$$

非退化. 于是在 p 点有一个二阶不变量, Morse 称之为 f 在 p 点的 "指标", 记为 λ_p, 定义为 H_pf 的负特征值的个数. 他建立起了多项式:

$$\mathcal{U}_t(f) = \sum_{\{p\}} t^{\lambda_p}, \quad df_p = 0,$$

并且他发现这个多项式的系数比 Poincaré 多项式 $P_t(M, K)$(相对于任何域 K) 相应的系数要大. 实际上, 他甚至证明了

$$\mathcal{U}_t(f) - P_t(M;K) = (1+t)Q_t(f;K), \tag{*}$$

其中 $Q_t(f,K)$ 是 f 的 $K-$ 误差, 这个 "误差" 总是非负的, 也就是说 Q 的所有系数是非负的:

$$Q_t(f,K) = \sum a_i t^i, \ a_i \geq 0.$$

$(1+t)$ 这一项有或无是大不相同的, 它从 f 的临界点反馈出 M 的拓扑结构.

无疑地, Morse 认为这些不等式描述了由 f 所决定的半空间

$$M_a = \{m \in M | f(m) < a\}$$

的拓扑的变化情况. 用 40 年代的术语来表达他的 20 年代的结论, 有如下形式:

定理 A: 如果 f 在 $[a,b]$ 内没有临界值, 则 M_a 与 M_b 微分同胚.

定理 B: 如果 f 在 $[a,b]$ 内恰有一个指标为 λ_p 的非退化临界点，则 M_b 的同伦型可由 M_a 的同伦型通过映射 $\alpha:\partial e_{\lambda_p}\to M_a$"粘上"一个 λ_p 维胞腔而得：

$$M_b \sim M_a \cup_\alpha e_{\lambda_p}.$$

由这个定理以及那时人们所熟知的关于胞腔粘接的正合序列，很容易得出满足 Eilenberg——Steenrod 公理的任何上同调理论的 Morse 不等式．大约在同一时期，Everett Pitcher 也对 Morse 理论作了类似的工作． Thom 也用到了他的结果．就像我先前所指出的那样，正是他几年以后对我解释了当 M 带有非平凡边界时这些结论是如何改变的．我记得 Thom 用 Morse 理论证明了 Lefschetz 定理，但细节我记不得了．他的手和手指头似乎伸向了无穷远处．他的讲演稿虽未发表，但却成了后来 Andreotti Frankel 证明思路的诱因．而且我在那个时候发表的工作也是受 Thom 讲演稿所启发的．

在我看来，定理 A 和定理 B, 或者说"半空间"方法是通向 Morse 不等式最简单和最直接的途径，只要再利用同伦理论的方法就足够了．当然这是我个人的看法，我觉得 Morse 对球面所做的工作可以推广到紧李群．后来 Samelson 和我发现了对所有对称空间这也是成立的．实际上，这些空间的对称性在很大程度上是由以下的"能量函数"的优美的性质所决定的：

$$\mathcal{E}(\mu)=\int\frac{1}{2}\dot{\mu}(t)^2dt,$$

这个能量函数也叫自由粒子的"拉格朗日"函数．它是定义在 M 的道路空间 $L(M)$ 上的．对于这个道路空间，我们现在仍处在探索之中．对 Samelson 和我来说，$\mathcal{E}$ 所具有的最关键的性质就在于在映射 π:

$$\Omega_{p,q}\to L\xrightarrow{\pi}M\times M,$$

的每个纤维 $\Omega_{p,q}$ 上，$\mathcal{E}$ 是非退化和 $\boldsymbol{Z}_2-$ 完全 Morse 函数．这里的映射 π 把每个道路 μ 映到两个端点 p,q. 尽管这种情形是无穷维的，但可用有穷维技巧来处理． $\boldsymbol{Z}_2-$ 完全的是指：(1) $\mathcal{E}$ 的临界点集产生于流形 (N), 而在 (N) 上，H 在法方向非退化． (2) (*) 的误差项 $\dot{Q}$ 对域 $\boldsymbol{Z}_2-$ 消失．顺便提一下，此时定理 B 的适当的推广可为：

$$M_b\cong M_a\cup_\alpha E^-(N)$$

其中 $E^-(N)$ 为 a 与 b 之间临界集 N 的法丛的负丛，(所以 $E^-(N)$ 是其上 $Hf\leq 0$ 的一个极大子丛). 简单地说，现在可以沿着"边界球面丛"把一个圆盘丛粘到 M_a 上．

Morse 在 20 年代证明了一个漂亮的定理，即具有任何 Riemann 结构的 $n-$ 维球面上两点可以由无穷多条测地线来连接，他的证明技巧如下：

首先他应用圆形 ("round") 度量及它的已知的测地线来计算在 LS^n 的适当的纤维上 $\mathcal{E}$ 的临界点，然后利用纯组合的方法得出 $\mathcal{E}$ 是完全的，即由 Morse 不等式得出真正的等式．用这种方法，对任何域 K, 他计算了 S^n 上从 p 到 q 的道路空间 $\Omega_{p,q}$ 的 Poincaré 级数：

$$P_t(\Omega_{p,q}S^n)=\frac{1}{1-t^{(n-1)}}.$$

然后再利用 Morse 不等式，他证明了对任何其它度量，能量函数 $\mathcal{E}$ 仍然有无穷多个临界点，因为这些对应着连接 p 和 q 的测地线，所以可得出在新的结构下也有无穷多个测地线.

在我的工作中，我用到了类似的技巧. 人们用对称空间 M 的 "正规"(normal) 度量来计算临界集. 但我的方法是在给定的对称空间 M 上，找出一对点 p, q, 使得从 p 到 q 的 "极小测地线" 空间 M'尽可能的大, 然后估计出所有高阶临界点的指标. 于是有公式:

$$\Omega_{p,q}M = M' \cup e_k \cup \dots, \quad k > l,$$

从而

$$\pi_r(M) \cong \pi_{r-1}(\Omega M) \cong \pi_{r-1}(M'), r \ll l.$$

像如下形式的同伦等价一样,

$$\Omega O = O/U,$$

$$\Omega(O/U) = U/SP, \text{等等}$$

这个过程将产生所有的周期性定理.

关于 40 年代和 50 年代的 Morse 理论的同伦方面，谈这些已足够了.

正是 Smale 改进了这个 "半空间" 方法，当他后来对定理 B 以更为直截了当的形式给出时，我已对他的 "半空间" 方法讨论了 10 年.

如果 $\dim M = n$, 公式为:

$$M_b \cong M_a \cup e_{\lambda_p} \times e_{n-\lambda_p}$$

即：当经过临界点时，我们已经粘上了一个 "厚的圆盘", $e_{\lambda_p} \times e_{n-\lambda_p}$, 但是现在等价关系属于 C^∞ 的范畴，所以允许一个逐步的归纳过程来决定微分同胚型. 这就引导出了他的环柄 (handlebody) 理论，推广的 Poincaré 猜想及 $h-$ 配边定理！真不错.

Smale 至少在两方面加强了我们对 Morse 理论的理解. 首先，他和 Palais 建立了抽象的判别法则. 使定理 A 和定理 B 可以成立. 人们常称之为 Palais–Smale 的 "条件 C". 例如, 对前面讨论过的拉格朗日函数 $\mathcal{E}$, 当空间 LM 给定适当的拓扑时, 这些条件成立, 但不幸的是，对许多其它的几何导出的拉格朗日函数，像极小曲面理论的和 Yang–Mills 理论的则不成立.

其次， Smale 看到了 Morse 理论怎样与动力系统框架的吻合，也就完成了实际上起始于 1949 年 R.Thom 的在法国科学院院报 (Comptes Rendus) 上的短文中的规划. 正是这个框架. 使得我们现在与物理学联系起来，比如 "瞬子" 以及我想称作的 "Thom–Smale" 和 "Witten" 复形.

这些发展的起点是从 M 上的函数 f 到相对于 M 上一个光滑 Riemann 结构 g 的梯度 ∇f. 让我们只谈谈真正的非退化情形，使得向量场只在 f 的有限多个临界点退化. 这样每个点 q, 只要它不是 f 的临界点，它就位于 ∇f 的唯一的一个一维积分流形 X_q 上. 这个流形 "起始" 于某个临界点 p, 终结于另一个临界点 r(假定 M 都是紧的).

物理学家称这样的积分流形为"瞬子"原因如下：假如通过求解微分方程

$$\frac{du(t)}{dt} = -\nabla f(u(t)),\ u(0) = q,$$

来参数化 q"轨迹"X_q，那么 u 定义在整个 $\mathbb{R}$ 上. $\lim_{t\to-\infty} u(t) = p$ 是轨迹的起点，$\lim_{t\to+\infty} u(t) = r$ 是它的终点. 道路 $t \to u(t)$，在 $t < t_0$ 的"大部分时间"将在它的起点附近逗留，而在 $t > t_0$ 的大部分时间将在"终点"附近逗留.

无论如何，避开术语不论，Thom 在 1949 年已经指出的是：如果把以给定临界点 p 为初始点的所有瞬子聚集起来，则这个集合是一个维数为 λ_p 的胞腔，记作 W_p. 这是一个经过 p 的"降胞腔"(descending cell).

很明显地，当 p 取 f 的所有临界点时，胞腔 $\{W_p\}$ 把 M 分解成一些不相交的集合. 然而，不幸的是这种分解一般不是通常意义的一个"好的胞腔分解"，胞腔的闭包可能很复杂，利用这种构造去导出 Morse 不等式要求一些附加的推和拉. 我不太明白 Thom 的文章，只从 Samelson 的评论来看，似乎只能给出较弱的 Morse 不等式，也就是说，没有反馈项. 我担心 Comptes Rendus 上的短文 —— 特别是像 Thom 这样富有灵感的梦想家所写的 —— 不具有很高的信用等级. 实际上，那时我把这篇文章搞忘了，直到 1960 年，在 Zürich 所举行的一次会议期间，Smale 和我在 Zürich 郊外一个优美的游泳池游泳时，他对我解释了他研究动力系统的方法. 他的研究结果发表在 1959 年的 A.M.S.Bulletin 上.

顺便提一下，考察 Smale 在 Bulletin 上的短文和 Thom 的 Comptes Rendus 短文的相对信用等级是很有趣的. Michael Atiyah 和我倾向于称这种交流为"道德上高尚的"，当然你们可以思考一下"道德"的含义以及较后所得结果的效用. 无论如何，Smale 把横切性概念引进到了 Thom 的胞腔分解中，而且同时把它扩张到满足一定公理的更为一般的积分流形上去.

在 Morse 理论体系中，Smale 的思想是这样的：我们知道，梯度场 ∇f 把 M 分解成胞腔

$$M = \oplus_p W_p$$

用 $-f$ 代替 f，则新的"降胞腔"称做 f 的"升"胞腔：

$$M = \oplus_p W'_p$$

如果这两种类型的胞腔以尽可能的"一般的方式"接触，则 Smale 称 ∇f 是横切的. 准确地说，这意味着凡是交集 $W_p \cap W'_r$ 中的一点 q，切空间 T_qW 和 T_qW' 生成 T_qM.

这样对任何 $q \in W_p \cap W'_r$，有正合序列

$$0 \to T_qX_q \to T_qW_p \oplus T_qW'_r \to T_qM \to 0,$$

当然，∇f 的轨道在 q 处的切向量既包含在 T_qW_p 中，也在 $T_qW'_p$ 中.

通过下面的例子. 横切性条件很容易被理解. 这个例子不满足横切性条件. 当我们对未入门的人解释 Morse 理论时，总是用这个"最佳的"例子. 这个例子就是竖在 x, y 平面上的环面的高度函数 z:

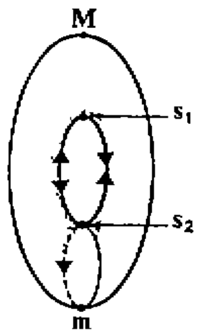

图 1

高度函数 z 在 M 处取最大值，而在 m 处取极小值，明显地有两个鞍点 s_1 和 s_2, 那么 $-\boldsymbol{Z}$ 的梯度自 M 处起有一个 2 维胞腔，而自 s_1 和 s_2 处都只有 1 维胞腔，如图示．这样的分解破坏了 Smale 公理，因为在 q 处的 s_2 的升胞腔与 s_1 处的降胞腔一致，所以它们的切空间不能生成整个切空间．

假如稍微扰动 $-\bigtriangledown f$ 则这种现象就会消失．事实上， W_{s_1} 和 W'_{s_2} 将根本不相交！

$-\bigtriangledown f$ 扰动后的胞腔粗糙地可如下图所示：

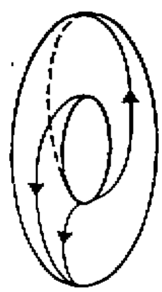

图 2

注意到横切性条件即指

$$\dim(W_p \cup W'_q) = \lambda_p - \lambda_q + 1.$$

由此式知道，连接指标相差 1 的两个临界点的"瞬子"的数目是有限的．

我希望 Steve 对他的短文作更为详尽的扩充，那样的话，无疑地他将指出这有限多个"真瞬子"的排列，这是我们计算 M 的同调所需的．但事实上，他导出了 Morse 不等式，以及把它们推广到更一般的流上去之后，就匆匆地去干别的事情去了．但在他的短文里隐含着如下算法．当 80 年代初 Witten 有一天来到我的办公室问我他正在用来计算 M 的上同调的方法是不是人们所熟知的时候，我才意识到这个称法．这个算法是如下的：

给定一个具有横切梯度 $\bigtriangledown f$ 的纯非退化函数 f, 给降胞腔一个定向，考虑由它们在 $\boldsymbol{Z}$ 上生成的自由群：

$$C^f(M) = \{[W_p]\},$$

我们用 W_p 的维数来对 $C^f(M)$ 进行分次，通过计算带 ± 的每个基本瞬子，定义一个边界算子：

$$\partial : C_r \to C_{r-1}$$

于是

$$\partial[W_p] = \sum e(\gamma)[W_q].$$

其中 γ 为指标为 $k-1$ 临界点 r 处的真瞬子， $e(\gamma) = \pm 1$.± 符号的选取取决于对某个 $q \in \gamma$、正合序列

$$0 \to T_q X_q \to T_q W_p \oplus W'_r \to T_q M \to 0$$

保持定向与否、

(为简单起见，这里假定 M 是定向的，则 W_p 的定向导出 W'_p 的定向，而 $T_q X_q$ 由 $-\nabla f_x$ 定向，所以 $e(\gamma)$ 的定向是合理的).

有这些准备工作，就很容易得出 Smale 的一个结果：

定理：复形 $C^r(M)$ 定义如上，则具有性质 $\partial \simeq 0$, 且

$$H^*(M,\mathbf{Z}) \cong H^*\{C^f(M)\}.$$

这个关系当然可以导出 Morse 不等式，因为有一个纯代数的事实，即任何有限维链复形的计数级数

$$C_t = \sum t^q \dim H^q(C;K)$$

相对于它的关于任何 K 的上同调的 Poincaré 级数

$$P_t = \sum t^q \dim M^q(C;K)$$

满足 Morse 不等式.

复形 $C^f(M)$ 应该叫 "f 的 Smale 复形", 或者 "Smale——Witten" 复形，或者 "Thom——Smale——Witten" 复形，随你们的便. 但无论如何，我认为它是非退化 Morse 理论最优美的公式，它不仅描述了胞腔的维数，而且描述了粘接映射 (attaching maps). 这正是后来 Marston Morse 和 Cairns 所写的许多文章孜孜以求的，另一方面、人们很难认为这个过程是切实可行的、一般来说，很难找到一个度量，它对于 f 的梯度流是横切的. (Smale 说明了它们是稠密的)、所以真正计算瞬子是很难的，因为这一点， Morse 才没有发现这一公式、然而，我认为它还是人们所希望的漂亮而且简洁的表达. 更令我欢喜的是引发了一条新的道路，使得 Witten 产生了那样的发问、

你们将会看到，他的方法截然不同，它具有现代物理学家世界观的特征. 从量子理论的观点来看， M 上的函数所组成的 Hilbert 空间在某种意义上比 M 本身更真实. 相应地，据 Witten 的观点， M 的形变，即沿 f 的梯度的推压，由完全不同的形变所代替，通过 Hodge 理论这个形变发生于连接 M 的函数空间中、

让我们简单地回顾一下历史，1979 年 8 月，我在 Cargése 讲解等变量 Morse 理论，以及它与 Riemann 曲面上的 Yang–Mills 理论的联系．我对一群杰出的物理学家汇报我与 Atiyah 合作的工作，这些听众，不管是年轻的，还是年长的，大多数对我的讲课都抱着超然的态度，比如我记得 Wilson 就说过"很漂亮，但离物理学家太远了"．但 Witten 却像鹰一样专心地听讲，经常提问题，显然他非常感兴趣．

所以我认为我做了一件有益的工作，灌输给了 Witten 半空间方法的初步知识．但大约 8 个月后，我很惊讶地收到了他的一封信，信的开始为："现在我终于懂得了 Morse 理论！"

(这句话使我想起了 1960 年 Smale 对我说过类似的话，Smale 当然也是我的学生，我相信，我教他 Morse 理论的方法也是对的、有这样一些杰出的学生是很难得的)．

还是让我来讲讲 Witten 方法的要点，至少讲讲我理解的那些．

像前面一样，给定 M, f 和 M 上的一个度量 g，考虑 M 的 de Rham 复形、

$$\Omega^* : \Omega^0 \to \Omega^1 \to \cdots \Omega^n$$

以及相对于 g 的 "Hodge 理论"．于是 g 导出一个 d 的伴随算子 d^*，拉普拉斯方程为：

$$\Delta = dd^* + d^*d$$

能够把 Ω^q 分解成有限维特征空间的直和：

$$\Omega^q = \oplus_\lambda \Omega^q_\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

其中

$$\Omega^q_\lambda = \{g \in \Omega^q \mid \Delta\varphi = \lambda\varphi\}.$$

由 Hodge 理论有：

1) $\Omega^q_0 \cong H^q(M)$、

2) $0 \to \Omega^a_\lambda \xrightarrow{d\lambda} \Omega^{q+1}_\lambda \to \cdots \to Q^n_\lambda \to 0$

对 $\lambda > 0$ 是正合的、

这里 $d\lambda$ 是 d 对 $\Omega^*_\lambda = \oplus_q \Omega^q_\lambda$ 上的限制，由这两个条件可平凡地导出所有有限维复形

$$\Omega^*_a = \oplus_{\lambda \le a} \Omega^*_\lambda, \quad a > 0$$

的上同调为 $H^*(M)$．

特别地，所有的计数级数

$$\Omega^*_{a,t} = \sum \dim(\Omega^q_a) t^q$$

相对于 $P_t(M)$ 满足 Morse 不等式．当我们在 M 上移动度量 g 时，空间 Ω^q_a 发生跳跃，但它们总是遵从这些不等式，因为所有的复形 Ω^*_a 可算出 $H^*(M)$．

现在来谈谈 Witten 的思想，引进算子

$$d_s = e^{-sf} \circ d \circ e^{sf},$$

$s \in \mathbb{R}$ 是一个实参数. 简言之，乘以 e^{sf} 得到 d 的共轭，显然： $d_s^2 = 0$, 所以上同调群

$$H_s(M) = \ker d_s / \Im d_s.$$

然而因为共轭性，很容易看出， $\dim H_s^*(M)$ 不依赖于 s.

$$H_s^*(M) \cong H^*(M).$$

另一方面，由 Hodge 理论可计算出 $H_s(M)$, 所以导出算子

$$\triangle_s = d_s d_s^* + d_s d_s^*,$$

以及分解成 $\triangle_s$ 的特征空间：

$$\Omega^*(s) = \oplus_\lambda \Omega_\lambda^*(s)$$

像以前一样，对每个 $a > 0$, 我们有由 $\triangle_s$ 的特征值 $\lambda \leq a$ 的所有特征形式所生成的微分形式构成的有限维复形 $\Omega_a^*(s)$, 而且所有这些 $\Omega_a^*(s)$ 的计数级数满足相对于 $P_t(M)$ 的 Morse 不等式.

正是这个有限维链复形 $\Omega_a^*(s)$ 的曲线， Witten 在他的 Morse 理论中用到了它！

也就是说，他得出了 s 很大时，这个复形的维数与 s 无关，所以可把它记作 $\Omega_a^*(\infty)$, 而且进一步，还有：

1. $\dim \Omega_a^k(\infty) =$ 指标为 k 的临界点的个数.

2. 从指标为 k 的临界点处到指标为 $k+1$ 的临界点的真瞬子，给出了 $\Omega_a^k(\infty)$ 上的由 d 导出的微分算子.

让我们用一个简单例子来详细解释一下：

考虑 S^1 上有四个临界点的函数，图示如下：

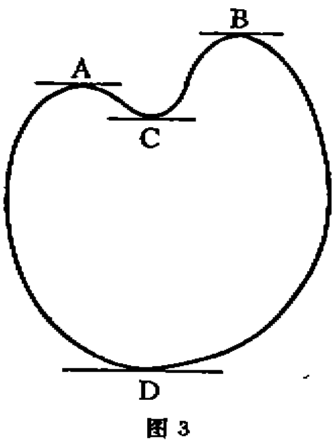

图 3

H° 和 H^1 上的 Laplace 算子 $\triangle$ 的谱分别表示如下：

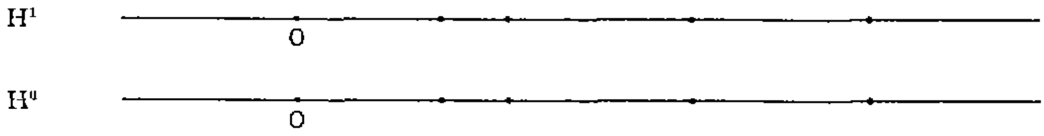

图 4

由 Hodge 理论，知道特征空间的分布具有图 4 的配置，在垂直方向具有相同的重数.

Witten 结构的思想在于 s 很大时， $\triangle_s$ 的谱会移动 —— 以可能非常复杂的方式 —— 到下图的位置：

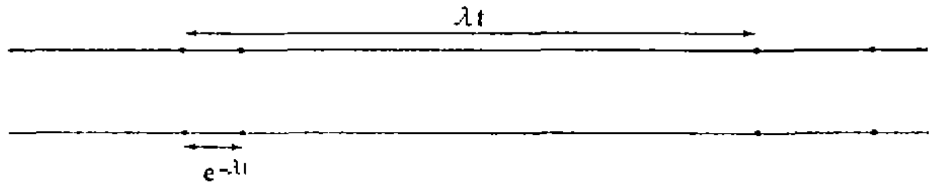

图 5

这样 $\Omega_a^*(+\infty)$ 是一个具有 2 维分支 (components) 的 2 步长的链复形. 进一步，$\Omega_a^1(\infty)$ 的一个基由主要集中在极大点 A 和 B 处的 1— 形式所组成；而 $\Omega^\circ(\infty)$ 的基则由主要集中在极小点 C 和 D 处的函数所组成. 而且算子 $d\infty : \Omega_\infty^\circ \to \Omega_\infty^1$ 描述了极小点和极大点之间的"隧道效应". 用物理学的术语，这个效应可由估计真瞬子的分布来精确地计算. 实际上，这些效应最先是由更完全的无穷维情形的 Yang—Mills 理论所提出的，所以当 Witten 最终"明白"所发生的一切时，他是"失落"到世俗得多的数学中来的.

我所剩下的时间已不多了，所以让我谈谈 Witten 的断言是如何从这种最简单的形式所产生的. 在他绝妙的文章 [8] 中他并没有给出标准的数学证明，对于此数学证明，你们可以看非常难懂的文章： Helder 和 Siöstrand[5]、当然他们在文章中用到了 Smale 的横切性条件. (实际上，现在有可能有一篇较长的 Comptes Rendus 上的文章在诸如《Differential Geometry》这样的杂志上发表. 由于 Dennis Sullivan 和 Bill Thurston 在这个方向上的开创性的工作，所以你们应该想象得到 Witten 的文章 [8] 与 Thom 和 Smale 的短文是有直接联系的).

整体思路是详尽研究 f 的临界点附近的 $\triangle_s$ 的性质，假定 f 在极大点 A 附近有：

$$f(x) = c - \frac{x^2}{2},$$

x 是 s^1 上中心在 A 处的局部坐标，同时给定 $\mathbb{R}$ 一个平坦 Riemann 结构，那么分别对 Ω°

和 Ω^1 的基 1 和 dx,d_s 简单地表达为：

$$d_s = \partial_x - sx$$

所以

$$d_s^* = -\partial_x - sx.$$

于是有：

$$\begin{aligned}\triangle_s^\circ =&(\partial_x + sx)(\partial_x - sx)\\ =& -\partial_x^2 + s^2x^2 + s.1,\end{aligned}$$

$$\triangle_s^1 = d_s \circ d_s^* = -\partial_x^2 + s_x^2 - s.1.$$

这样如果 H_s 表示量子力学的调和振子 $-\partial^2 + sx^2$，则：

$$\triangle_s^\circ = H_s + s.1,$$

而

$$\triangle_s^1 = H_s - s.1.$$

H_s 的谱由下式给出：

$$\mathrm{Spec}(H_s) = |s|,\ \ 3|s|,\ldots$$

对 $s > 0$，有

$$\mathrm{Spec}(\triangle_s^\circ) = 2s, 4s, \ldots$$

而

$$\mathrm{Spec}(\triangle_s^1) = 0, s, \ldots$$

类似地，在极小点附近，这两个谱刚好相反：

$$\mathrm{Spec}(\triangle_s^0) = 0.s, \ldots$$

$$\mathrm{Spec}(\triangle_s^1) = 2s, 4s, \ldots$$

这些估计的整体结果为：如果 f 是一个具有小特征值 $(s \to +\infty)$ 的特征函数，那么它必定集中在极小点附近，对 1— 形式则相反．相反地，如果我们开始于 $\triangle_\circ$ 的"真空状态"，也就是 $L^2(x)$ 中的极小函数 Φ、而把它光滑成一个整体函数 $\widetilde{\Phi}$，(例如取它的支集为一个紧邻域)，那么对大的 $s,\triangle_s\widetilde{\Phi}$ 将只与小特征值有关．

这些启发式的例子当然是物理学家们的第二天性，所以引导 Witten 有了以上的结果．

扼要地重述如下：对大的 s、椭圆微分算子 $\triangle_s = dsd_s^* + d_s^*d_s$ 有性质：它把谱分成两部分： Low—lying Sector(低位置的扇形) 和 large Sector(大的扇形)．对很大的 s，低位置的扇形 Ω_∞^*，特征值 ≥ 0 而且与 0 任意接近．它组成"Witten 复形"．它可用来计算

$H^*(M)$、而且有一个由 f 的临界点所组成的基，特别地，用这个复形可证明 Morse 不等式.

Witten 的关于 Morse 理论和超对称性方面的文章在其它方面也是一个金矿，它告诉我们物理学家们有关调和振子的思想如何用到其它许多问题中去. 例如，对 Atiyah 和我于 60 年代所给出的不动点定理的证明， Witten 就给出一个明晰而漂亮的证明. 更一般地，对所有经典的指标问题和等变量指标问题，给出了更容易的"传递"方法. Bismuth、Getzler, Vergne 和其他一些人的工作都归在这个标题之下：指标的点态公式等. 对这些我们以前只能用上同调的知识来理解，在这篇文章中，我第一次看到了 S^1- 等变量理论和这些问题的联系，以及自由圈空间是 S^1- 空间的一个重要例子. 简言之，Witten 的方法不仅教会我们以柏拉图式的方式去"回忆"非退化 Morse 理论的最完美的形式，而且教会我们把量子力学中的"隧道"概念应用到拓扑学中.

现在让我说说 70 年代末 Morse 理论的一个全新领域的发展情况，也就是 Morse 理论和辛几何的关系. 然而，因为时间关系，尽管我想给你们更现代的 Morse 理论一点介绍，但我现在只能"改变标准".

事实上，我们大家对辛几何有一个共同的认识，其过程是相当漫长的. 1980 年的一个晴朗的下午， Atiyah 和我试图在哈佛我的办公室里工作，我说试图，是因为那时隔壁房间里的 Sternberg 和 Guillemin 正在大声争吵. 当我们走到他们那里想去充当和事佬时，我们发现我们在做同样的事情，后来， Mumford 也加入了进来. 临近黄昏，我们终于看到了 Mumford 的"稳定性定理"与 Morse 理论吻合得非常好.

这里重要的是矩映射 (moment map) 的概念，它是拉格朗日函数的对称性和守恒量关系的数学描述. 简言之，就是物理学家们所称的"Noether 定理"，这是他们的范例之一.

精确地，设 X 为保持辛流形 M 上辛形式 ω 的向量场，则通过我最喜欢的公式，有：

$$\mathcal{L}_X\omega = di_X\omega + i_X d\omega = 0,$$

其中 $i_X\omega$ 是闭 1- 形式. 现在，如果存在 M 上的函数 f_X，使得

$$df_X = i_X\omega,$$

则称 f_X 为关于 X 的矩函数，这些函数具有非常好的性质 ——X 生成一个辛微分同胚的紧群. 在这些条件下，我们有：

(1). f_X 是 M 上的完全 Morse 函数，

(2). M 上的测度 ω^n 的推进 (Pushforward)f_{X*} 是 $\mathbb{R}$ 上的分段多项式，也即

$$\int e^{itf_X}\frac{\omega^n}{n!} = \frac{1}{(it)^n}\sum_p \frac{e^{itf(p)}}{e_p},$$

其中求和取遍 X 的所有不动点.

第一条性质多年以前就由 Frankel 所发现，而第二条出现于 70 年代 Duistermaut—Heckman 的理论中 [3], 其证明由 Atiyah 和我所给出 [2].

构造完全函数的秘诀给出了像 K/T 这样的齐次空间的所有我早先所发现的例子.(T 是紧 Lie 群 K 的极大环面), 而且这些空间的 Bruhat 胞腔相对于某 f_X 的不变度量与 Thom— Smale 胞腔是一致的.

在无穷维情形这个秘诀再造了前面讨论的 K 的圈空间上的能量函数 $\mathcal{E}$, 而且它的"胞腔"给出了圈群上的 Bruhat 分解.

把这些概念用到 Mumford 理论中，注意到那里的问题是在代数范畴里对商 "M/G" 定义一个合适的代数的几何概念. 如 $K \subset G$ 是 G 的极大紧子群，$\omega \in \Omega^2(M)$ 是由 K 所保持的 M 上的 Kaehler 形式，则此时的矩映射是一个等变量映射：

$$M \xrightarrow{f} k^*$$

它的范数 $||f||^2$ 是对 Mumford 稳定性理论相贴切的函数. Mumford 理论的"稳定点"对应从 $||f||^2$ 的极小值的大的升的开胞腔，而代数商："M/G" 为 $||f^2||^{-1}$ (minimum)/K, 所以

$$\text{“}M/G\text{''} \simeq ||f^2||^{-1}(\min)/K.$$

在无穷维情形，Atiyah 和我得出了，$||f||^2$ 可解释为 Riemann 曲面 M 上主丛 P 的联络空间 $\mathcal{A}$ 的 Yang–Mills 泛函：

$$YM : A \to \int_M ||F_A||^2,$$

这个 YM 可证明是等变量完全的，使得我们能计算 YM 的极小值的上同调性质 —— 即 M 上的平坦丛空间 [1].

这些就是出现在我们工作中的有关辛几何和 Morse 理论互相作用的情况，它们萌芽于对偶，$X \sim f_X$, 当然这对偶把 X 的不动点和 f_X 的临界点看成是一样的.

把这个辛向量场的对偶"积分"到辛微分同胚也就把我们引向了源于 Poincaré 和 Birkhoff 的辛几何学派的主流上. 正是在这个领域，Arnold,Gromov, Zehnder, Conley, Chaperon 以及其他许多人的工作都被 Floer[4] 作了漂亮的推广. 最后，只用一分钟时间来作点评论. 首先注意到 M 上的辛结构 ω 导出我们前面所涉及的道路空间 LM 上的一个新函数. 实际上，端点投影 $LM \xrightarrow{\pi} M \times M$ 导出一个赋值映射

$$LM \times I \xrightarrow{e} M \times M$$

$$(\mu, t) \mapsto \mu(t),$$

所以 e 把辛形式 $\omega' = 1 \otimes \omega - \omega \otimes 1$ 拉回成 $LM \times I$ 上的一个 2- 形式. 在 I 上积分，得到 LM 上一个 1- 形式：

$$\theta = \int_I e^* \omega$$

设 $V \subset M \times M$ 是 M 的位格朗日子流形.（即辛微分同胚 φ 的图），$L_V M \subset LM$ 是 LM 中的子空间 $\pi^{-1}(V)$. 很容易看出在 $L_V M$ 的限制上，θ 是闭的，而且至少局部地为 df. 这种闭 1- 形式的 "Morse 理论" 把 Floer 引到了 Thom—Smale—Witten 复形 C 的无穷维情形，其上同调在许多方面都是有趣的 [4]、这里的关键点是在无穷维流形，一个函数在临界点的 Hessian 可能会有无穷多个正，负特征值，所以谈论指标将毫无意义. 但通过衡量沿连接 p 和 q 的曲线的 "Hf 的谱流"、仍然可能讨论两个临界点 p 和 q 的 "相对指标". 这样 C^f 可给出一个相对的分次，真瞬子可以给出定义，相应的边界算子 ∂ 也就有意义.

由于讲演时间结束，我必须在此停止下来，哪怕我这个题目根本不可能枯竭，例如，我还未提一下 Uhlembeck Taubes 和其他人的 "超出条件 C" 的工作，另外，我一字也未提换球术的成就. 然而，我希望我的演讲已足以使你们相信 Morse 理论是不可战胜的，也希望我这个复述会使你们同意 Thom 的名言："简单的思想是那些能够产生伟大力量的思想."

参 考 文 献

[1] M.F.Atiyah and R.Bott, The Yang-Mills equations over Riemann surfaces, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, London, A308 (1982), 523-615.

[2] M.F.Atiyah and R.Bott. The moment map and equivariant cohomology, *Topology*, **21** (1) (1984), 1-28.

[3] J.J. Duistermaat and G.J. Heckman, On the variation in the cohomology in the symplectic form of reduced phase space, *Invent. Math.*, **69** (1982), 259-268.

[4] A.Floer, Morse theory for Lagrangian intersections, *J. Diff. Geom.*, **28** (1988), 513-547.

[5] B.Helfer, J.Sjöstrand, Points multiples en mécanique semiclassique IV, étude du complexe de Witten, *Comm. Par. Diff. Equ.*, **10** (1985), 245-340.

[6] S.Smale, Differentiable dynamical systems, *Bull. Am. Math. Soc.*, **73** (1967), 747.

[7] René Thom, Sur une partition en cellules associée à une fonction sur une variété, *C.R.Acad. Sci. Paris*, **228** (1949), 661-692.

[8] E.Witten, Supersymmetry and Morse theory, *J.Diff. Geom.*, **17** (1982), 661-692.

（邹建成 译　李培信 校）