Abel 奖得主 Pierre Deligne 访谈录

Martin Raussen　Christian Skau

1. Abel 奖

Raussen & SKau (以下简写为 **"R & S"**)**：** 尊敬的 Deligne 教授, 首先我们祝贺您, 您是第 11 位 Abel (阿贝尔) 奖的获得者. 被选择作为这个高声誉奖项的获奖者不仅是一项巨大的荣誉, 而且 Abel 奖附带有 600 万挪威克朗的现金, 这大约是 100 万美元. 我们好奇地听说您正计划用这笔钱来做. . .

Pierre Deligne 在 Abel 奖颁奖典礼上发表获奖感言 (照片：Heiko Junge/NTB scanpix)

Deligne (以下简写为 **"D"**)**：** 我觉得这些钱并不真正是我的, 而属于数学. 我有责任明智地而不是以浪费的方式使用它. 细节现在还不明了, 但我计划把部分的钱给予曾对我很重要的两个研究院: 巴黎的高等科学研究院 (IHÉS) 和普林斯顿的高等研究院 (IAS).

我还想给一些钱来支持俄罗斯的数学. 首先给高等经济学院 (the Higher School of Economics, HSE) 的数学系. 在我看来, 这是莫斯科最好的地方之一. 它比莫斯科大学的力学和数学系要小得多, 但人员更佳. 学生人数也很少; 每年只接受 50 名新生. 但他们都在最好的学生之列. 高等经济学院是由经济学家们创办的. 在困难的环境下他们竭尽所能. 该院的数学系在莫斯科独立大学的帮助下在 5 年前创办. 它正在增进整个高等经济学院的声誉. 在这里我认为一些钱会被很好地使用.

另一个我想捐赠一些钱的俄罗斯机构是由俄罗斯慈善家 Dmitry Zimin 创办的王朝基金会 (the Dynasty Foundation). 对于他们, 金钱似乎不那么重要. 这只是我表达我敬佩他们的工作的一种方式. 它是俄罗斯极少几家赞助科学的基金会之一; 此外, 他们是以一种非常好的方式这样做的. 他们赞助数学家, 物理学家和生物学家; 尤其是年轻人, 而这在俄罗斯是至关重要的！他们还出版普及科学的书. 我想用一种明确的方式表达我的钦佩之情.

R & S: Abel 奖无疑不是您在数学上赢得的首个重要的奖项. 让我们仅仅提及您 35 年前获得的 Fields (菲尔兹) 奖, 瑞典的 Crafoord (克拉福德) 奖, 意大利的 Balzan (巴尔扎

译自: EMS Newsletter, issue 89, September 2013, p. 15–23, Interview with Abel Laureate Pierre Deligne, Martin Raussen and Christian Skau, figure number 2.

Martin Raussen 是丹麦奥尔堡 (Aalborg) 大学的数学副教授, Christian Skau 是位于特隆赫姆 (Trondheim) 的挪威科学技术大学的教授. 他们从 2003 年开始合作采访每一届的 Abel 奖得主.

恩) 奖和以色列的 Wolf (沃尔夫) 奖. 作为一个数学家，赢得如此名声显赫的一些奖项，这对您有多重要？对于数学界，这样一些奖项的存在有多重要？

D: 对于我个人，得知我所尊敬的数学家们发现我做过的工作是有意义的，这很不错. Fields 奖可能有助于我被邀请到普林斯顿高等研究院. 获奖得到一些机会，但没有改变我的生活.

当奖项作为向一般大众谈论数学的一个借口时，我认为它们可以是非常有用的. Abel 奖与其他的活动，诸如面向儿童的竞赛和面向高中教师的 Holmboe 奖 (the Holmboe Prize) 联系在一起，我发现这很好. 根据我的经验，好的高中教师对数学的发展是非常重要的. 我认为所有这些活动棒极了.

2. 青年时期

R & S: 您在第二次世界大战结尾的 1944 年生于布鲁塞尔. 我们好奇地听说过您最初的数学体验：在哪方面它们是被您自己的家庭或学校培育的？您能记住您最初的一些数学体验吗？

D: 我很幸运，我的哥哥比我年长 7 岁. 当我看温度计并认识到存在正数和负数时，他试着向我解释 $(-1)\times(-1)$ 得到 $+1$. 这是很令人惊奇的事. 后来当他上高中时，他告诉我关于二次方程的事. 当他上大学时，他给了我关于三次方程的一些笔记，而且笔记中有解三次方程的一个奇怪的公式. 我发现它非常有趣.

当我是一名童子军时，我有一次极好的运气. 我有一个朋友，他的父亲 Nijs 先生是一位高中老师. 他在几个方面帮助我；尤其是我的第一本真正的数学书，即 Bourbaki (布尔巴基) 的《集合论 (Set Theory)》，是他给的，这不是给一个年轻男孩的明显选择. 那时我 14 岁. 我啃这本书花了至少一年时间. 关于这一点，我想我曾有一些讲座已论及.

有以自己的节律学习数学的机会具有使人重新唤起过去几个世纪惊喜的益处. 在别的书上我已经读过如何从整数开始定义有理数，然后定义实数. 但我记得我是何等好奇于怎样从集合论定义整数，通过阅读 Bourbaki 的书中前面的少许篇幅，对怎样首先定义两个集合有 “相同数目的元素” 意味着什么，并且从这里导出整数的概念表示佩服. 这家的一个朋友还给了我一本关于复变函数的书. 弄明白复变函数的故事与实变函数的故事是如此的不同是一大惊喜：一旦复变函数可微，它就是解析的 (有一个幂级数展开式), 如此等等. 所有这些事情你们可能在学校觉得它们很乏味，但给了我巨大的快乐.

那时我的这位老师 Nijs 先生让我与布鲁塞尔大学的 Jacques Tits (蒂茨) 教授接触. 我可以参与他的一些课程和讨论班，尽管我仍然在上高中.

R & S: 非常惊奇地听说您学习 Buurbaki 的书，它们通常被认为是很困难的，尤其是在您那个年纪.

您能告诉我们一点您正规的学校教育吗？学校教育令您感兴趣吗，或是只是感到厌烦？

D: 我有一个出色的小学老师. 我认为我在小学比在中学学得更多：怎样读，怎样写，算术和更多的东西. 我记得这位老师做了数学上的一个实验，这使我想到表面和长

度的证明. 这个问题是比较半球表面与有相同半径的圆盘. 为此, 他用盘成螺旋形的绳覆盖这两个表面. 半球需要的绳是圆盘的两倍. 这使我想了很多: 怎样才能用长度度量一个表面? 怎样才能相信半球的表面是相同半径的圆盘的两倍?

当我在中学的时候, 我喜欢几何学问题. 在那个年纪几何学中的证明很有意义, 因为令人惊奇的陈述的证明并不太困难. 一旦我们通过了公理, 我非常喜欢做这样的练习. 我认为, 在中学阶段几何学是数学中令证明有意义的仅有的部分. 此外, 写出证明是另一个很好的练习. 这不仅与数学有关, 为了论证事情为何是正确的, 你还必须用正确的法文 —— 在我的情形 —— 写出. 在语言和数学之间, 几何学与语言的联系比例如代数学更强, 在代数学中有一组方程. 语言的逻辑和力量不是如此明显.

R & S: 当您年仅 16 岁的时候, 您去参加 Jacques Tits 的讲座. 有一个故事说在某个星期您不能参加讲座, 因为您参加了学校的远足. . . ?

D: 是的. 我很晚才被告知这个故事. 当 Tits 来给我们做报告时, 他问: Deligne 哪里去了? 他们向他解释说我参加了学校的远足, 这个报告推迟到了下一个星期.

R & S: 他必定已经认可您是一个出色的学生. Jacques Tits 也是 Abel 奖获得者. 由于他在群论中的伟大发现, 5 年前, 他与 John Griggs Thompson (汤普森) 一起得到该奖. 对于您, 他无可怀疑是一位有影响的老师吗?

D: 是的; 尤其是在我研究数学的早期. 在教学上, 最重要的可能是你不做什么. 例如, Tits 不得不解释群的中心是一个不变子群. 他以一个证明开始, 然后停下说: "一个不变子群是在所有的内自同构作用下稳定的子群. 我已经能够定义群的中心. 因此在数据的所有对称下它是稳定的. 所以, 它显然是不变的."

对于我, 这是一次启示: 对称思想的威力. Tits 不需要进行一步一步的证明, 取而代之的只是说对称令结果显然, 这对我影响很大. 我很看重对称, 而且几乎在我的每一篇论文中都有基于对称的论证.

R & S: 您还能记得 Tits 是怎样发现您的数学才能的吗?

D: 这我说不上来, 但我认为是 Nijs 先生告诉他的, 让他好好照顾我. 在那个时候, 在布鲁塞尔大学有 3 位真正活跃的数学家: 除了 Tits 本人, 还有 Franz Bingen 教授和 Lucien Waelbroeck (韦尔布鲁克) 教授. 他们每年组织一个主题不同的讨论班. 我参加了这些讨论班, 而且了解了不同的课题, 如 Banach (巴拿赫) 代数学, 这是 Waelbroeck 的专长, 以及代数几何学.

我猜测那时他们 3 人决定这是我该去巴黎的时候了. Tits 把我介绍给 Grothendieck (格罗滕迪克), 并且告诉我参加他的和 Serre (塞尔) 的讲座. 这是一个极好的建议.

R & S: 对于一位门外汉, 这有点令人惊奇. Tits 对您作为一个数学家感兴趣, 人们可能会想他会为了自己的利益而试图留住您. 但他没有?

D: 是的. 他看什么对我最好而且依此而行.

3. 代数几何学

R & S: 在我们继续谈论您在巴黎的事业之前, 也许我们应该向听众解释您的专业

代数几何学是什么.

在今年早些时候，当 Abel 奖宣布时，Fields 奖获得者 Tim Gowers (高尔斯) 不得不向听众解释您的研究课题，他一开始就承认这对他是一项困难的任务．难于展示说明这一学科的图片，而且也难于解释它的一些简单的应用．尽管如此，关于代数几何学是什么，您能试着告诉我们一个想法吗？也许您会提到把代数学和几何学相互联系在一起的一些特殊问题.

D: 在数学中，当思想的两个不同的框架走到一起时总是非常好的．Descartes (笛卡儿) 写到："几何学是在虚假的图形上进行正确推理的学问．" "图形" 是复数：有各种各样的观察并知道每种观察错在何处是非常重要的.

在代数几何学中, 你既可以使用来自代数学的直观 —— 在这里你可以处理方程, 又可以使用来自几何学的直观, 在这里你可以画图. 如果你画一个圆并且考虑方程 $x^2+y^2=1$, 在你的头脑中激起不同的图景, 而且你可以试着用一个对比另一个. 例如, 轮子是一个圆而且一个轮子转动; 尤其的是看到在代数学中的相似: x 和 y 的一个代数变换把 $x^2+y^2=1$ 的任意一个解映射到另一个解．描述一个圆的这个方程是二次的．这蕴含着一个圆与一条直线不会有多于两个的交点. 你也可以从几何学上来看这个性质, 但代数给出的更多. 例如，如果有有理方程的直线与圆 $x^2+y^2=1$ 的一个交点有有理坐标，则另一个交点也有有理坐标.

代数几何学有算术应用．当你考虑多项式方程时，在不同的数域你可以用相同的表示．例如，在定义了加法和乘法的有限集上，这些方程引向组合学问题：你要计算解的个数．但是，你可以继续画出相同的图形，在心里记着一种新的方式，其中图形是不真实的，但按照这种方式在考察组合学问题时你可以使用几何直观.

我从未真正地在代数几何学的中心工作．我主要对触及这一领域所有类型的问题感兴趣. 但代数几何学触及许多学科！只要多项式出现, 人们可以尝试从几何学上思考它; 例如在物理学中的 Feymann (费因曼) 积分，或者当你考虑一个多项式的根式表示的积分. 代数几何学还能对理解多项式方程的整数解有所贡献．你们知道椭圆函数的老故事：为了理解椭圆积分如何作为，几何解释是至关重要的.

R&S: 代数几何学是数学的主要领域之一．您会说，至少对于一个初学者，为了学习代数几何学需要比其他数学领域付出更大的努力吗？

D: 我认为进入这门学科是困难的，因为必须掌握一些不同的工具．以上同调开始在现在是不可避免的．另一个原因是代数几何学已经相继发展了几个阶段，每个阶段有它自己的语言．首先，意大利学派有些模糊，正如一种声名狼藉的说法所显示的："在代数几何学中，一个定理的一个反例是对它有用的补充．" 然后 Zariski (扎里斯基) 和 Weil (韦伊) 把事情建立在一个较好的基础上．后来 Serre 和 Grothendieck 给出了一种非常有威力的新语言．用这种概型 (scheme) 的语言可以表达很多概念；它既覆盖了算术应用，又覆盖了更多的几何方面．但要理解这一语言的威力需要时间．当然，人们需要知道一些基本的定理，但我不认为这是主要的绊脚石．最困难是理解 Grothendieck 创造的这一语言的威力，以及它与我们通常的几何直观的关系.

4. 负笈巴黎

从左至右: Pierre Deligne, Martin Raussen, Christian Skau (照片: Anne-Marie Astad)

R&S: 当您到巴黎时, 您与 Alexander Grothendieck 和 Jean-Pierre Serre 联系. 您能告诉我们您对这两位数学家最初的印象吗?

D: 在 1964 年 11 月的 Bourbaki 讨论班期间, Tits 把我介绍给 Grothendieck. 我着实被吓了一跳. 他有些奇怪, 一个剃着光头的高个男人. 我们握握手, 但什么也没有做, 直到几个月后我到巴黎参加他的讨论班.

这确实是一个不平凡的体验. 按照他自己的方式, 他非常率直而且善良. 我记得我参加的第一次讲座. 在讲座中, 他多次使用"上同调对象"这一表达. 对于 Abel 群, 我知道上同调是什么, 但我不知道"上同调对象"的意义. 在讲座之后, 我问他这个表示意味着什么. 我认为许多其他数学家会想到如果你不知道答案, 就没有什么要向你说的了. 这全然不是他的反应. 他非常有耐心地告诉我, 如果在一个 Abel 范畴中有一个长的正合列, 并且考察一个映射的核, 那么用前一个映射的像去除, 如此等等. . . . 我很快认识到这在一个不很一般的情形我是知道的. 他对他认为无知的人非常坦率. 我觉得同样愚蠢的问题你不要问他 3 次, 但 2 次会平安无事.

我不害怕提问完全愚蠢的问题, 而且我保持这个习惯一直到现在. 当参加一次讲座时, 我通常坐在听众的前排, 而且如果有我不理解的某个事情, 即使我知道回答是什么我也提问.

我非常幸运, Grothendieck 要我写出他上一年的一些报告. 他把他的笔记给我. 我学到了很多东西 —— 既有笔记的内容, 又有数学写作的方式. . . 这既以一种平凡的方式进行, 即应在纸的一边书写, 留下一些空白能让他写评注, 但他又强调不允许写下任何假的陈述. 这极为困难. 通常要走捷径; 例如, 不保持记号的踪迹. 这未能让他满意. 东西必须是正确的和精确的. 他告诉我, 我编辑的第一稿太简短了, 没有足够的细节. . . 不得不完全重做. 这对我很有好处.

Serre 有完全不同的个人特质. 为了理解整个故事, Grothendieck 喜欢让事情依照它们自然的一般性; 喜欢理解整个故事. Serre 欣赏这一点, 但他更喜欢美好的特殊情形. 当时他正在法兰西学院 (Collège de France) 讲关于椭圆曲线的一门课. 在这个主题里, 许多不同的要素走到一起, 包括自守形式. Serre 具有比 Grothendieck 更宽广的数学素养. 在需要的时候, Grothendieck 本人重做每一件事情, 而 Serre 则告诉人们在文献中查这或查那. Grothendieck 阅读得极少; 他与经典的意大利几何学的接触基本上是通过 Serre 和 Dieudonné (迪厄多内) 进行的. 我相信 Serre 一定向他解释过 Weil 猜想是什么以及为何它们是有趣的. Serre 尊敬 Grothendieck 所做的巨大构造, 但这不合他的胃口. Serre 喜欢有美丽性质的较小的对象, 如模形式, 喜欢理解具体的问题, 如系数之间的同余.

他们的个人特质是非常不同的, 但我认为 Serre 和 Grothendieck 的合作是非常重要

的，这个合作能使 Grothendieck 做一些他的工作.

R & S: 您告诉过我们，为了注重实际，您需要参加 Serre 的讲座？

D: 是的，因为被卷入到 Grothendieck 的一般性中是危险的. 在我看来，他从来不发明无成效的一般性，但 Serre 告诉我考察不同的主题对于我是非常重要的.

5. Weil 猜想

R&S: 您最著名的结果是所谓的 Weil 猜想中的第 3 个 —— 而且是最困难的 —— 猜想的证明. 但在谈论您的成就之前，您能试着解释为何 Weil 猜想如此重要吗？

D: 先前关于一维情形中的曲线, Weil 有几个定理. 有限域上的代数曲线和有理数域之间有许多类似. 在有理数域上，核心的问题是 Riemann (黎曼) 假设. 对有限域上的曲线，Weil 证明了 Riemann 假设的一个类似假设，而且他也曾考察过一些高维的情形. 这是人们开始理解简单的代数簇，像 Grassmann (格拉斯曼) 簇的上同调的地方. 他看到对有限域上对象的点的计数反映了在复数域上发生了什么以及复数域上相关空间的形状.

正如 Wiel 对它的考察，在 Weil 猜想中隐藏着两个故事. 第 1 个，为何在明显的组合学问题和复数域上的几何学问题之间应当存在一个关系. 第 2 个，Riemann 假设的类似假设是什么？两类应用来自于这些类似. 第 1 类始于 Weil 本人：对一些算术函数的估计. 对于我，它们不是最重要的. Grothendieck 形式主义的构造解释了为何在复数域上的故事应该有一个关系，在那里人们能利用拓扑学，而组合学的故事更为重要.

其次, 有限域上的代数簇允许一个典范自同态 (canonical endomorphism), 即 Frobenius (弗罗贝尼乌斯) 自同态. 它可以视为一个对称，这个对称使得整个情形非常严密. 然后，人们可以把这个信息传回到复数域上的几何世界，这就在经典的代数几何学中产生了一些限制，而这被应用于表示论和自守形式论中. 存在这样一些应用在一开始并不是显然的，但对于我它们是 Weil 猜想为何重要的理由.

R & S: Grothendieck 曾有个证明最后一个 Weil 猜想的纲领，但它没有凑效. 您的证明是不同的. 您能评论这个纲领吗？对您证明 Weil 猜想，它有影响吗？

D: 没有. 我认为在某种意义上，Grothendieck 的纲领是找到证明的一个障碍，因为它使人们只是在一个特定的方向上思考. 如果假定遵从这个纲领有人能做出证明，那将会更令人满意，因为它还会解释其他一些有趣的事情. 但整个纲领依赖于在代数簇上找到足够多的代数闭链 (algebraic cycles); 而在这个问题上自 20 世纪 70 年代以来没有取得本质性的进展.

我用了完全不同的想法. 这个想法受到 Rankin (兰金) 的工作和他关于自守形式工作的启发. 它仍有一些应用，但并没有实现 Grothendieck 的梦想.

R & S: 我们听说 Grothendieck 对 Weil 猜想被证明感到高兴，当然，他仍有些失望吧？

D: 是的. 而且他有非常好的理由. 如果他的纲领实现了，那将会好得多. 他不认为会有其他方式攻克它. 当他听到我已经证明了它，他觉得我一定做了这做了那，而我没有. 我认为这就是他失望的理由.

R & S: 您一定要告诉我们当 Serre 听说这个证明时的反应.

D: 在我还没有一个完整的证明，但一个验证的情形是清楚的时候，我给他写了一封信. 我相信恰在他去医院手术治疗撕裂肌腱之前收到了它. 后来他告诉我，他以乐观的状态进入手术室，因为现在他知道证明差不多被做出了.

R& S: 几位著名的数学家称您对最后一个 Weil 猜想的证明是一个奇迹. 您能描述您是怎样得到导致证明的那些想法吗？

D: 我是幸运的，在我研究 Weil 猜想的时候我有我所需要的所有工具，同时我认为这些工具会达到目的. 此后证明的一些部分被 Gérard Laumon 简化，而且这些工具中的一些不再需要了.

在那时，Grothendieck 有把来自 20 世纪 20 年代 Solomon Lefschetz (莱夫谢茨) 关于一个代数簇的超平面截面族的工作纳入到一个纯粹的代数框架的想法. 尤为有趣的是 Lefschetz 的一个陈述，后来被 William Hodge (霍奇) 证明，即所谓困难的 Lefschetz 定理. Lefschetz 的研究方法是拓扑的. 与人们可能认为的形成对照，如果一个论证是拓扑的，与它们是解析的 —— 如 Hodge 给出的证明 —— 相比，存在更好的机会把它们翻译成抽象的代数几何学语言. Grothendieck 要求我去查看 Lefschetz 在 1924 年出版的书《位置分析和代数几何学 (L'analysis Situs[1] et la géométrie algébrique)》. 这是一本出色的，非常直观的书，而且它包含了我所需要的工具中的一些.

我还对自守形式感兴趣. 我想关于 Robert Rankin 做出的估计是 Serre 告诉我的. 我仔细地审视它. 对某些相关的 L– 函数，Rankin 通过证明在应用 Landau (兰道) 的一些结果时所需要的一些结果而得到了模形式系数的一些非平凡的估计，在 Landau 的结果中，一个 L– 函数极点的位置给出了局部因子 (the local factors) 极点的信息. 因为掌握了 Grothendieck 关于极点的工作，我看到，依照复杂性小得多的方式 —— 仅用了平方和是正的这一事实，同样的工具就可以在这里应用. 这就够了. 理解极点要比零点容易得多，而且有可能应用 Rankin 的想法.

在我的研究中用到了所有这些工具，但我说不出来我是怎样把它们放在一起的.

6. 后续工作略述

R & S: 母题 (motive)[2] 是什么？

D: 关于代数簇的一个惊人的事实是，它们给出的不是一个，而是许多上同调理论. 其中有 l–进 (l-adic) 理论，对于特征不同的每个素数 l 有一个理论，以及特征零，此时是代数 de Rham (德拉姆) 上同调. 似乎这些理论中的每一个按照不同的语言在一次又一次地讲同一个故事. 根据母题的哲学，应该存在一个普遍的 (universal) 上同调理论，其取值在一个有待定义的母题范畴，而所有这些理论都能由该普遍的上同调理论导出. 对于一个射影非奇异簇的第一上同调群，Picard (皮卡) 簇起着母题 H^1 的作用：Picard 簇是一个 Abel 簇，而且从它能导出现存的所有的上同调理论中的 H^1. 按照这种方式， Abel

1) Analysis Situs 是拓扑学的旧称.—— 译注

2) 术语 motive 尚未有中文定名. 暂且音译.—— 校注

簇 (可相差同源 (isogeny)) 是母题的一个原型.

Grothendieck 的一个关键想法是不要去努力定义母题是什么. 而是应当努力定义母题的范畴. 如 *Hom* 群是有有限维有理向量空间的一个 Abel 范畴. 决定性的是, 它应该允许一个张量积, 这是叙述有母题范畴值的普遍上同调理论的 Künneth (屈内特) 定理所需要的. 如果仅考虑射影非奇异簇的上同调, 人们会推荐纯母题. Grothendieck 提出了纯母题范畴的一个定义, 而且证明了如果这样定义的范畴有一些类似于 Hodge 结构范畴的性质, 则将得到 Weil 猜想.

为了所提出的定义是切实可行的, 需要 "足够多" 代数闭链的存在. 在这个问题上, 迄今几乎没有取得任何进展.

R & S: 您的其他结果怎样? 在证明 Weil 猜想之后您做出的结果中哪一个您尤其喜欢?

D: 我喜欢我构造的复代数簇上同调上所谓的混合 Hodge 结构. 究其来源, 母题的哲学起了至关重要的作用, 即使母题没有出现在最终的结果中. 这一哲学提示, 在一个上同调理论中无论能做什么事情, 在其他理论中找一个对应物是值得的. 对于射影非奇异簇, Galois (伽罗瓦) 作用 (action) 所起的作用类似于 Hodge 分解在复情形所起的作用. 例如, 用 Hodge 分解表达的 Hodge 猜想有一个对应物, 即用 Galois 作用表达的 Tate (泰特) 猜想. 在 $l-$进的情形, 对于奇异或非紧的簇, 上同调和 Galois 作用仍被定义.

这迫使我们问: 在复情形中的类似是什么? $l-$进上同调中一个递增滤过 (filtration) —— 权 (weight) 滤过 W 的存在性给出了一个线索, 对权滤过, 第 i 个商 W_i/W_{i-1} 是一个射影非奇异簇上同调的子商 (subquotient). 因此, 我们期望在复情形, 一个滤过 W 使得第 i 个商有一个权为 i 的 Hodge 分解. 来自 Griffiths (格里菲思) 和 Grothendieck 的工作的另一个线索, 是 Hodge 滤过比 Hodge 分解更重要. 这两个线索逼出了混合 Hodge 结构的定义, 暗示它们形成一个 Abel 范畴, 并且还暗示怎样构造它们.

R & S: Langlands (朗兰兹) 纲领怎样? 您与它有关系吗?

D: 对它我很感兴趣, 但我的贡献很少. 我只在两个变数的线性群 $GL(2)$ 上曾做过一些工作. 我努力去理解事情. 近来, Weil 猜想的一个遥远的应用出现在所谓的基本引理 (the fundamental lemma) 的 Ngô (指 2010 年 Fields 奖得主 Bao Châu Ngô (吴宝珠)——校注) 的证明中. 我本人没做过多少工作, 尽管我对 Langlands 纲领有许多兴趣.

7. 法国, 美国和俄罗斯的数学

R & S: 您曾经告诉我们您主要工作过的两个机构, 即巴黎的高等科学研究院和 1984 年之后的普林斯顿高等研究院. 我们有兴趣听到您离开 IHÉS 并移居普林斯顿的动机. 此外, 我们有兴趣听到联合这两个机构的是什么以及它们有何不同的您的看法.

D: 我离开的理由之一是, 我不认为一个人在同一个地方终其一生是好的. 某种变化是重要的. 我希望与 Harish-Chandra (哈里希 – 钱德拉) 有一些接触, 他在表示论和自守形式上做过一些美妙的工作. 这是 Langlands 纲领的一部分, 对此我很感兴趣, 不幸的是在我到达普林斯顿之前不久 Harish-Chandra 去世了.

另一个原因是在布雷斯 (Bures) 的 IHÉS, 我勉强自己每年关于一个新的主题举办一个讨论班. 这变得有点多了. 我其实不能既举办讨论班，又把讨论的内容写下来，因此当我来到普林斯顿之后我没有以同样的义务勉强自己. 这些就是我离开 IHÉS 到普林斯顿的 IAS 的主要原因.

至于这两个机构之间的差异，我说普林斯顿高等研究院更早，更大且更稳定. 在有许多年轻的访问者到来这方面，两者非常相似. 因此它们不是你能睡大觉的地方，因为你总是与年轻人接触，他们会告诉你，你并非像你认为的那么好.

在这两个地方都有物理学家，但我认为对于我与他们的接触在普林斯顿比在布雷斯更有成效. 在普林斯顿有公共的讨论班. 有一年非常紧张，既有数学家又有物理学家参加. 这主要是由于 Edward Witten (威顿) 的到场. 尽管他是物理学家，他也得到了 Fields 奖. 当 Witten 问我问题，努力去回答它们总是非常有趣的，但也可能受挫.

普林斯顿高等研究院不仅有数学和物理学，还有历史学部 (the School of Historical Studies) 和社会科学部 (the School of Social Sciences), 在这个意义上它更大. 与这些部门不存在真正科学上的相互作用，但能去听关于如古代中国的讲座是令人愉快的. 布雷斯有的而普林斯顿没有的如下：在布雷斯，咖啡馆太小. 因此你只能坐在能坐的地方，而不能选择他人与你坐在一起. 我经常挨着一位分析学家或者一位物理学家而坐，而且这样随机的非正式互动是非常有用的. 在普林斯顿，有一张桌子是数学家们用的，另一张桌子是天文学家们，普通的物理学家们及其他人用的. 如果你坐错了桌子，没人会要求你离开，但仍然存在隔离.

普林斯顿高等研究院有一笔大的捐款，而 IHÉS 没有，至少当我离开的时候是这样. 这不影响学术生活. 有时它产生不稳定，但管理者通常有能力让我们避开艰难.

R & S: 除了您与法国数学和美国数学的联系，甚至在铁幕落幕之前很久，您就长期与俄罗斯数学密切接触. 事实上，您的太太是一位俄罗斯数学家的女儿. 您与俄罗斯数学发展的联系是怎样的？

D: Grothendieck 或 Serre 告诉那时在莫斯科的 Manin (马宁), 说我做了一些有趣的工作. 苏联科学院邀请我参加为 I. M. Vinogradov (维诺格拉多夫) 召开的一个大会，顺便提一句，Vinogradov 是可怕的反犹太主义者. 我来到俄罗斯，发现了一种优美的数学文化. 在那个时候，数学是共产党不能插手的几门学科之一，由于他们对它完全不懂，因而它就变成了一个自由的空间.

我们会去某个人的家里，坐在厨房的桌旁拿着一杯茶讨论数学. 我爱上了这种气氛和对数学的这种热情. 此外，俄罗斯的数学那时是世界上最好的之一. 今天在俄罗斯仍然有好的数学家，但有着灾难性的移民. 再者，在那些想留下的人中，许多人需要至少有一半时间在国外，只是为了生计.

R & S: 您提到 Vinogradov 和他的反犹太主义. 您与某人交谈并问他是否被邀请？

D: 这个人是 Piatetskii-Shapiro (沙皮罗). 我完全不知情. 我曾和他有过长时间的讨论. 对于我，像他这样的人应该被 Vinogradov 邀请是显然的，但有人向我解释事情不是这样的.

在这样介绍俄罗斯数学之后，对在莫斯科以及与 Yuri Manin, Sergey Bernstein (伯恩斯坦) 的交谈，或者在 Gelfand (盖尔范德) 讨论班的美好记忆我仍有些怀念. 在俄罗斯的大学和中等教育 (the secondary education) 之间曾有过一种强的联系，这种传统现在仍然存在. 像 Andrey Kolmogorov (柯尔莫戈洛夫) 这样的人对中等教育有很大的兴趣 (也许不总是为了最好的学生).

他们还有数学奥林匹克的传统, 而且他们非常善于在早期发现在数学上有前途的人，以便帮助他们. 讨论班的文化处于危险之中，因为讨论班的组织者在莫斯科全职工作是重要的，而现在不总是这个样子. 我认为保持现存的一种整体文化是重要的. 这就是为何我用 Balzan 奖的一半努力去帮助年轻的俄罗斯数学家的原因.

R & S: 这就是您安排的一场竞赛.

D: 是的. 这个体制从顶层破裂了，因为没钱留住人才，但其基础设施是如此之好，以致该体制还能继续产生非常好的年轻数学家. 人们必须努力帮助他们，而且使他们更长时间留在俄罗斯成为可能，并因此能延续这一传统.

8. 数学中的竞争与合作

R & S: 有些科学家和数学家极受成为第一个做出大发现这一目标的驱动. 似乎这不是您的主要驱动力？

D: 是的. 我对此一点也不关心.

R & S: 对这一文化您有一些总体评价吗？

D: 对于 Grothendieck, 这很清楚：他有一次告诉我数学不是一项竞技运动. 数学家是不同的，有些数学家想成为第一人，尤其是如果他们在做非常特别而且困难的问题. 对于我，更重要的是创造工具并理解普遍的图景. 我认为数学更多地是长期的一项集体事业. 与物理学和生物学中发生的事情相比，数学文章有漫长而且有用处的生命. 例如，利用文献引用对人的自动评估在数学上尤其不合理，因为这些评估方法只统计最近 3 年或 5 年所发表的论文. 在我的一篇典型的论文中，我认为所引用的论文中至少有一半是二三十年前的. 有些甚至是 200 年前的.

R & S: 您喜欢给其他数学家写信？

D: 是的. 写一篇论文要花很多时间. 写论文是非常有用的，把每件事情按照正确的方式糅合在一起，这样做让论文的作者学到很多，但也有些艰难. 因此在开始形成想法时，我发现写一封信是非常适宜的. 我把信发出，但这往往是写给我自己的信. 因为对收信人所知道的事情我不必细述，简单点就行了. 有时一封信，或者它的副本，会在抽屉里待上几年，但它保存了想法，而且当我最终写一篇论文时，它被用作蓝图.

R & S: 当您给某个人写了一封信，而且这个人有另外的想法，结果将是一篇合写的论文？

D: 这会发生. 我的论文中相当多的是我一个人单独写的，也有一些是与有相同想法的人合写的. 合写一篇论文比必须知道谁做了什么更好. 有少数真正合作的情形，即不同的人带来了不同的直观. 与 George Lusztig 的合作就是如此. Lusztig 对群表示怎样

用 l–进上同调有完整的想法，但他不知道这个技术．我知道 l–进上同调的技术方面，而且我可以给他他所需要的工具．这是真正的合作．

与 Morgan, Griffiths 和 Sullivan (沙利文) 的合写论文也是一次真正的合作．

与 Bernstein, Beilinson 和 Gabber 合写的也是如此：我们把不同的理解糅合在一起．

9．工作方式，图景甚至梦想

R & S: 您的简历显示您没有教过有许多学生的大班．因此，在某种意义上，您是在数学上全时投入的少数研究者之一．

D: 是的．我觉得我处于这种状况是非常幸运的．我从未必须讲课．我非常喜欢与人交谈．在我工作过的两个机构，年轻人会来与我交谈．有时我回答他们的问题，但更多的是我反问他们问题，这有时也是非常有趣的．因而这种一对一的教学方式会给出有用的信息，并且在过程中学习，这对我很重要．

我觉得教不感兴趣但为了做别的事情需要学分而被迫学习数学的人，一定是很痛苦的．我认为这令人反感．

R & S: 您数学工作的风格怎样？您是常常被例子，特殊的问题和计算指引呢，或是您只是观察数学全景并且寻找关联呢？

D: 首先，关于什么应当是正确的，什么应当是可达的，以及什么工具能被使用，我需要得到一个总的图景．当我阅读论文时，我通常不记忆证明的细节，而记忆用了哪些工具．为了不去做完全无用的工作，能够猜测什么是正确的和什么是错误的是重要的．我不去记忆已被证明的陈述，我宁可努力在我的头脑中保存一组图景．多于一个图景，都是虚假的但方式不同，而且知道按照哪种方式它们是虚假的．对于一些主题，如果图景告诉我某件事情是真的，我认为这是理所当然的，而且以后会回到这个问题．

R & S: 对于这些非常抽象的对象，您有何种图景？

D: 有时这是非常简单的事情！例如，假设我有一个代数簇和一些超平面截面，并且我想通过考察一束超平面截面来理解它们是怎样相关的．这个图景是非常简单的．我在我的头脑中画出类似于平面上的一个圆那样的东西和扫过它的一条移动的线．然后，我就知道这个图景怎样是虚假的：簇不是一维的而是高维的，并且当超平面截面退化时，不是仅有两个交点汇合在一起．局部的图景复杂些，像一个变成二次锥面的圆锥曲线．这些简单的图景糅合在一起．

当我有从一个空间到另一个空间的一个映射，我可以研究它的性质．然后图景能令我信服它是一个光滑映射，除了有一组图景外，我还有一组简单的反例和陈述 —— 我希望为真的 —— 必须经过图景和反例的检验．

R & S: 因此您更多的是以几何图形而不是代数地思考？

D: 是的．

R&S: 有些数学家说，好的猜想，或者甚至好的梦想，至少与好的定理一样重要．您同意吗？

D: 完全同意．例如，已经创造了许多工作的 Weil 猜想．这个猜想的一部分是对于

有某些性质的代数系统，一个上同调理论的存在性. 这是一个含糊的问题，但它也是个恰当的问题. 为了真正掌握它花费了 20 年，甚至稍多一点的时间. 另一个例子是 Langlands 纲领的梦想，50 多年来它涉及了很多人，现在我们对正发生的情况才有稍好的掌握.

另一个例子是 Grothendieck 的母题的哲学，关于它被证明的很少. 有一些它的变体关注其要素. 有时，这样的一个变体可以用于做出实际的证明，但更多的时候这一哲学被用于猜测发生了什么，然后试图以另一种方式证明它. 这些是梦想或猜想比特殊的定理重要得多的例子.

R & S: “Poincaré 时刻” 是对长时间钻研的一个问题，在一瞬间看到了它的解. 在您事业的某个时候，您有过一次 Poincaré 时刻吗？

D: 我曾经最接近这样一个时刻的一定是在钻研 Weil 猜想时，那是我利用 Rankin 与 Grothendieck 相反的想法相信存在一条路径. 在这之后和它真正奏效之前花了几个星期，所以这是一个相当缓慢的发展. 也许对混合 Hodge 结构的定义也是如此，但在这一情形也是一个进展的过程. 因此这不是在一瞬间得到的一个完全解.

R&S: 当您回看 50 年的数学研究，您的工作和工作方式在这些年有怎样的改变？您现在工作与您早年一样毫不松懈吗？

D: 在能尽可能长时间地或高强度地工作的意义上，我现在不像早些时候那样强. 我认为我失去了一些想象力，但我有更多的技巧，在一定程度上这些技巧能作为一种替代. 还有我与许多人联系这一事实，这给予我获得我自己所缺乏一些想象的机会. 因此，当我所拥有的技巧起作用，所做的工作会是有用的，但我与 30 岁时已不一样了.

R & S: 您从普林斯顿高等研究院教授的位置上退休相当早. . .

D: 是的，但这纯粹是形式. 这意味着我领退休金而不是一份薪金；而且学部会议不会选你做下一年的访问教授 (member). 就是这样，它给了我更多的时间去做数学.

10. 对未来的希望

R & S: 当您审视代数几何学，数论和深得您心的那些领域的发展时，有什么问题或领域您愿意在近来看到其进展？据您看，尤其重要的将是什么？

D: 无论 10 年以内能否达到，我毫无想法；至于应该是. . . 但我非常希望看到我们对母题的理解上的进展. 采取哪条路径和正确的问题是什么，还很渺茫. Grothendieck 的纲领依赖于证明有某种性质的代数闭链的存在性. 对于我这看起来毫无希望，但也可能我错了.

我真正想看到一些进展的其他类型的问题与 Langlands 纲领有联系，但这是一个很长的故事. . .

不过在另一个方向，物理学家经常得到出人意料的猜想，但大多使用了完全非法的工具. 可到目前为止，无论什么时候他们做出一个预测，例如在某个曲面上的有特定性质的曲线数目的数值预测 —— 这些是大数，也许以百万计 —— 他们是对的！有时数学家先前的计算与物理学家预测的不符，但物理学家是对的. 他们曾经明确指出过一些真正有趣的东西，但是到目前为止，我们没有能力捕捉他们的直观. 有时他们做出一个预

测，而我们却给出一个没有真正理解的非常笨拙的证明．它应该不是这样．在一个讨论班项目中，我们曾与在 IAS 的物理学家在一起，我希望不依赖 Ed[1] Witten, 取而代之的我自己能够做出猜想．我失败了！对他们能那样做的图景我理解不够，因此我不得不仍然依赖 Witten 告诉我什么应当是有趣的.

R & S: Hodge 猜想怎样？

D: 对于我，它是母题的故事的一部分，并且它的正确与否不是至关重要的．如果它是正确的，这很好，而且它以一种合理的方式解决了一大部分构造母题的问题．如果人们能找到闭链的另一个纯代数概念，对于它 Hodge 猜想的类似猜想成立，而且有一些候选者，那么这将被用于同样的目的，而且假如 Hodge 猜想被证明了，我会很高兴．对于我，是母题，不是 Hodge 猜想，是至关重要的.

11. 个人兴趣 —— 以及一则老故事

R & S: 我们有在结束采访时问数学之外问题的习惯．您能告诉我们一点您的专业之外的个人兴趣吗？例如，我们知道您对大自然和园艺感兴趣.

D: 这些是我的主要兴趣．我发现地球和大自然是如此的美丽．我不喜欢只是去到一个景点并看一下．如果你真的想要欣赏一座山的景色，你必须徒步登山．类似地，为了看大自然，你必须步行．正如在数学中，为了在大自然中获得快乐 —— 大自然是快乐的美妙源泉 —— 数学家必须得做些工作.

我喜欢骑自行车，因为这是能环顾四周的另一种方式．当距离有些远不适于步行时，这是欣赏大自然的另一种方式.

R & S: 我们听说您还建造了冰屋？

D: 是的．不幸的是，每年没有足够的雪，即使有，雪也会捉弄人．如果雪粒太细了，就什么也做不成；同样，如果雪粒太硬成冰也不行．因此每年也许仅有一天，或者几个小时，才有可能建造冰屋，而且还得乐意把雪拍实并把构件垒在一起.

R & S: 然后您睡在冰屋里？

D: 当然，之后我睡在冰屋里.

R & S: 您一定要告诉我们当您是小孩时发生了什么.

D: 没问题．我在比利时的海边过圣诞节，那里有很多雪．我的哥哥和姐姐，他们比我大得多，有建造一座冰屋的好主意．我有点碍事．但之后他们认为我在一件事情上可能是有用的：如果他们抓住我的双手和双脚，我能被用于把雪压实.

R & S: 非常感谢您同意我们这次采访．感谢也来自我们所代表的挪威数学会，丹麦数学会和欧洲数学会．非常感谢您！

D: 谢谢你们.

编注　有关 Abel 奖更多信息，请参阅 Abel 奖官方网站 http://www.abelprize.no/.

(赵振江　译　　陆柱家　校)

1) Edward 的爱称.—— 译注