拓扑，数学分析，最大值原理，
连续函数

E

192-204

拓扑对分析的影响

Raoul Bott

Bott. R 刘文传 O177 O189

有一次我告诉 Erna Alhfors 说我正在读 Jung 的自传，她立即反诘道："Raoul，你怎么能念自传呢，难道你不知道那些都不过是一大堆欺人之言吗？"

我以这则故事作为演讲的开端是为了给你们以适当的警告．因为我准备演讲的恰好就是与所给题目相关的一些个人回忆．当然，凭心而论，我以为在诸如生日聚会之类的带有情感色彩的场合，说谎是不道德的．

事实上我已经很荣幸地在这个地方做过类似的演讲，虽然做这种演讲所需花费的精力远超出你的想象．那一次我讲的是 1949-1951 在 Princeton 高等研究院的岁月．[1] 这一次我打算讲讲 1955-1957 年我再次访问那里的情形．因为如果说我在第一次逗留间学到了一些拓扑，那么这第二次访问使我开始接触到一些分析 —— 尽管这些分析常常被赋予代数化的形式．但最主要的原因是这次访问使我亲眼目睹了世界数学发展的一个不朽阶段．这个阶段对美国数学生活有着特别的重要意义．

让我们从下面两个本世纪著名的数学范例讲起：(1) 最大值原理，(2)Brouwer 不动点原理．所谓最大值原理是说紧空间上的连续函数一定"取到最大值"．正是在此底基上产生了 Birkhoff 极小 — 极大原理以及后来的 Morse 以及 Lusternick—Schmirelman 的理论．甚至当紧性条件不具备时，例如在处理诸如极小曲面论，Yang-Mills 论等所有"更硬"的变分问题时，指查道路的仍旧是该原理的种种推广．

在第一次逗留 Princeton 时，我正是被这第一个分支吸引住了．在继续讲下去以前我禁不住要再对此多说几句．从某种意义上讲，"Morse 理论"数量化了最大值原理．如果 X 为拓扑空间，则 Morse 用下面的 *Poincaré* 多项式$P_t(X)$ 来作为量度 X 的 拓扑复杂性 的某种依据：

$$P_t(X) = \sum b_i(X) \cdot t^i,$$

其中 $b_i(X)$ 是 X 的 Betti 数．(粗略地讲它们给出 X 中洞的计数．例如 $b_0(X)$ 就是 X 连通分支的个数)．

然后 Morse 用"极值"代替"最大值"、并且对 X 上函数 f 的每个极值 Y 给出一个

原题：The topological Constraints on Analysis. 译自：*A Century of Mathematics in America*, Part II, AMS–MAA Invited Address, Providence 1988, pp. 527–542.

[1] 参见《拓扑漫谈》，载《数学译林》1990 年第 4 期． —— 校者注．

复杂性量度 $\mu_t^f(Y).f$ 的全局复杂性量度则由

$$\mathcal{M}_t(f)=\sum_Y \mu_t^f(Y),$$

给出. 其中 Y 遍历 f 的所有极值. 他并且证明了在适当的条件下, $P_t(X)$ 给出了 $\mathcal{M}_t(f)$ 的某种 下界. 确切地说, Morse 写出

$$\mathcal{M}_t(f)-P_t(X)=(1+t)E(t),$$

并证明了 "误差项"$E(t)$ 必须是所谓 "正" 的多项式, 即它的所有系数 ≥ 0. 简而言之, Morse 的原理是 "一个空间的拓扑复杂性与此空间上函数的极值复杂性息息相关". 用最简单的话来说就是 "拓扑复杂性制约了极值".

让我用一个分析中的例子来对所有这些做个说明, 尽管在严格的分析圈子里人们并不以此种方式来待它. 我们考虑 [0.1] 区间上边值条件为 $y(0)=y(1)=0$ 的特征值问题

$$L(y)=\frac{d^2y}{dx^2}+q(x)y=\lambda y \qquad (*)$$

首先对 L 引入相应的二次型

$$Q(y)=\int_0^1 Lydx=\int(-y'^2+q(x)y^2)dt.$$

此时你应将其看作是由函数 y 构成的某个适当的 Hilbert 空间的单位球面 S^∞:

$$\int y^2dt=1$$

上的函数. 因为这样一来, 众所周知 Q 在 S^∞ 上的极值正好对应于 (*) 的解. 事实上, Lagrange 方法使我们考虑 $Q(y)+\lambda\int y^2dt$ 的极值从而立即得到 (*).

现在请注意 $Q(y)$ 和约束条件 $\int y^2dt=1$ 均是关于 $y\to -y$ 对称的. 所以 确切地说上面的推理应该应用在射影空间而非 S^∞ 上. 这个注记对我们来说是关键的, 因为 $\boldsymbol{R}P_\infty$ 的拓扑比起球面 S^∞ 来说要复杂得多, 这至少在 mod 2 情形下是对的. 事实上, 这时 $\boldsymbol{R}P_\infty$ 在每个维数都有一个 "洞", 即

$$P_t(\boldsymbol{R}P_\infty)=1+t+t^2+\cdots,$$

而无穷维 *Hilbert* 空间 的 球面 是没有洞的:

$$P_t(S^\infty)=1.$$

因此, 如果我们知道 *Morse* 理论, 我们就立即得出这个问题有无穷多个特征值 —— 当然事实正是如此.

甚至可以说得更多，即如果忽略 Q 的特征值的退化性，则它们恰好对应于 $\boldsymbol{RP}_\infty$ 中的洞. 换句话说，在这个例子中误差项 $E(t)$ 天生就是零，从而所讨论的就是所谓 "完美 (perfect) Morse 函数". 事实上，若 Y 是 Q 在 $\boldsymbol{RP}_\infty$ 上对应于 (*) 的重数为 k 的特征值的极值，则有 $Y = \boldsymbol{RP}_k$ 并且用 Morse 的计数方法知 Y 给出贡献

$$\begin{aligned}\mu_t^Q(Y) &= P_t(\boldsymbol{RP}_k)t^{\lambda_Y}\\ &= (1+t+\cdots+t^k)t^{\lambda_Y},\end{aligned}$$

其中 λ_Y 是小于 λ 的特征值的个数. 因此明显的所有 μ_t 加起来即给出 $\boldsymbol{P}_t(\boldsymbol{RP}_\infty)$. Q.E.D.

这是自然要给出的两个评注：

(1) 首先，从某种意义上讲， Morse 理论或它的某一变种是处理我们的问题的非线性推广的唯一途径，尽管这常常被隐藏在分析学家的具体处理中.

(2) 再则，注意到这个例子中的有趣的拓扑是被此问题关于 $y \to -y$ 的对称性所约束的，并且是用可想象到的最直接的公式， 即用 Z_2- 作用作商，来处理的. 对于更困难的情形，例如对于 Yang-Mills 理论，极值同样产生于问题的对称性，即物理学家所称的 "规范变换" 群. 然而这时它们需要用更为精致的公式来处理.

关于我在拓扑中的首要喜好就讲到这里. 为了进入真正课题，现在让我过渡到我的第二喜好. 正如你们要看到的，它与第一喜好有许多本质上的相似之处. 我的这个第二喜好是关于不动点现象的. 而我要讲的线索起始于 Brouwer, 接着到 Lefschetz, 然后在经过五十年代层论对椭圆微分方程领域的深刻影响后，在后者中再次出现. 因为正是在这一背景下， Atiyah 和我在 1964 年重新认知了 Lefschetz 现象.

Brouwer 定理的即简单又漂亮的陈述当然是： "从单位圆盘 $D^n \subset \boldsymbol{R}^n$ 到自身的任一连续映射均有不动点." 我希望在座的每一位都熟悉此定理，并且以某种方式使用过它. 即使不是为了很深刻的原由，至少可以用它说明日常生活中的某些意外结果来取悦于某些外行.

Lefschetz 关于这一不动点现象的推广同 Morse 理论一样用到了空间的拓扑不变量 —— 但是是在一种更为复杂意义上被理解的. 事实上， Betti 数恰是某种向量空间 $H^i(X)$, "上同调空间", 的维数. 它们在连续映射下 "函子般" 地变换.

确切地讲，这意味着向量空间 $H^i(X)$ 不仅关于 X 是合理定义的，而且在下面的意义下随 X 移动: 一个连续映射

$$\varphi : X \to Y,$$

诱导一个记为 φ^*—— 或更纯粹地记为 $H^i(\varphi)$—— 的反向同态：

$$H^i(Y) \xleftarrow{\varphi^*} H^i(X),$$

并服从 $(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \cdot \varphi^*$ 以及恒等映射诱导出恒等同态的简单公理.

这一由 Eilenberg 和 MacLane 提出的 "简单" 而且现在看来非常自然的函子概念自然的也是 1950 年代的重大事件. 它在对于澄清我们的数学思考所起到的作用是不可估

量的. 不管怎样, 利用这样一个 "上同调函子" $X \rightsquigarrow H^i(X)$, 其中 $H^i(X)$ 为有限维的, 我们可以对

$$\varphi : X \to X$$

用公式

$$\mathcal{L}(\varphi) = \sum (-1)^i \operatorname{trace} H^i(\varphi)$$

定义一个 Lefschetz 数. 这就给出了衡量空间拓扑被 φ 的扭曲程度的一种数值量度. Lefschetz 的定理断言, 如果 $\varphi : X \to X$ 是从紧多面体 X 到自身的映射且 $\mathcal{L}(\varphi) \neq 0$. 则 φ 必有不动点.

让我从对此定理的一些初等观察开始.

(1) 如果 X 是圆盘, 则 $H^0(X) = \mathbf{R}$ 且 $H^i(X) = 0, i > 0$. 更进一步, $\varphi^* = 1$. 因此 Lefschetz 定理的确推广了 Brouwer 定理!

(2) 当 φ 是恒等映射时, Lefschetz 数明显地由

$$\mathcal{L}(I) = \sum (-1)^i \dim H^i(X) = \sum (-1)^i b_i(X)$$

给出. 事实表明, 这个交错和要比单个的 Betti 数容易计算得多. 它可以由单纯计算 X 被分解成的胞腔个数给出! 事实上, 这个Lefschetz 数恰好就等于最古老的拓扑不变量, 多面体的 Euler 数. 即

$$\operatorname{Euler}(X) = \sum (-1)^k \#(X\text{中的}K\text{胞腔})$$

其三, 蕴含关系 $\mathcal{L}(\varphi) \neq 0 \Rightarrow \varphi$ 有不动点建议如下的 Lefschetz 定理的改进:

$$\mathcal{L}(\varphi) = \sum_p \mu(p),$$

其中 p 遍历 φ 的不动点集, 且 $\mu(p)$ 是 φ 在 p 附近的局部性状的某种数值量度. 例如, 如果 φ 是紧流形上的映射且有孤立不动点 $\{p\}$, 则就有 "*Hopf*" 公式. 即在此情形下,

$$\mathcal{L}(\varphi) = \sum \mu(p)$$

成立, 其中 $\mu(p)$ 是一整数. 它量测了 φ 使围绕 p 点的充分小球面 "自身包卷" 的次数.

最后, 请注意 Lefschetz 定理并不是与 Morse 不等式不相关联的. 实际上, 如果 φ 是由沿着 M 上函数 f 的梯度方向向前推进些许而得, 则 φ 的不动点恰是 f 的临界点, 且 φ 可以形变成恒等映射. 我们有 $\mathcal{L}(\varphi) = \mathcal{L}(I)$, 从而 φ 的 Lefschetz 数即为

$$\mathcal{L}(\varphi) = M\text{的}Euler\text{数} = \sum_{df_p=0} \mu(p),$$

而 Morse 不等式给出 (在令 $t = -1$ 后):

$$\sum (-1)^i b_i(X) = \sum (-1)^{\lambda_p}.$$

但在此情形可以验证 $\mu(p)=(-1)^{\lambda_p}$. 所以这两个公式等价. 简而言之， Morse 不等式对那些沿函数的梯度场推进的恒等映射附近的映射 φ 改进了 Lefschetz 定理，而 Lefschetz 公式则把 Morse 不等式中对所有映射都成立的那部分提炼了出来.

可以说我在 1955–1957 年间在研究院学的所有东西，它们在几年前刚刚在数学大地上涌现出来，就是所有这些 "古老的事实" 都可以容入一个更大的框架. 并且很兴运地，我的两个主要的 "指导者" 是年轻的数学新星 J.-P. Serre 和 F. Hirzebruch.

自 1949 年后，研究院有了很大的变化. Einstein 已去世， von Nemann 病得很厉害， C.L. Siegle 已离开，而 Hermann Weyl 正往返于瑞士. 在经历了 McCarthy 时期后，Oppenheimer 也奇怪地变了许多. 当我去向他致意时，他的态度有点 "Einstein 化". 当然，我的老朋友们还是一如既往：Marston Morse, A. Selberg 以及 Deane Montgomery——但是如果说在上一次逗留时我最主要的是感叹于上一辈的聪明才智，那么在这第二次访问时，我主要感叹，并掺杂着些许嫉妒的是和我同辈甚至更年轻的一代人的突出表现.

这也并不为奇，因为在这一期间，主要的是在 Princeton 我遇到了 Serre 、 Thom 、Hirzebruch 、 Atiyah 、 Singer 、 Milnor 、 Moore 、 Borel 、 Kostant 、 Harish-Chandra 、James 、 Adams 、……、并且还可列下去. 而这些人 —— 与 Kodaira 和 Spencer 一起 —— 加上我的或多或少的 "个人导师"Arnold Shapiro. 是与我有最多数学交往的人.

Serre 试图教会我层论. 在每次我打算放弃的时候，他都要说： "可怜的 Bott". 我本来非常兴奋地来到 Princeton 是要见见伟大的拓扑学家 Serre. 但瞧，这就是他 —— 突然变成了代数几何学家. 当然，事情的另一面则是在某种意义上 Serre 把拓扑学及其技术引进了代数与解析几何，以致于他可以以别人做不到的方式对我这样兴趣的人讲解.

Serre 是我所称作的 "聪明的数学家" 的典范 —— 相对于那些 "笨拙的" 而言. 凡他所理解的东西在他头脑中是如此水晶般地明晰，以至于让人觉得那不过是些儿戏. 他有，而且至今仍保持着，看上去似乎永远不工作的撩人的习惯. 在公共场合，你总是看到他在打乒乓球、下棋或读报纸 —— 而不象我们大多数人整日沉浸于数学思考中. 如果有人问他问题时，他要么立即知道结果并且透彻地讲明，要么拒绝评论. 有时我问他 "你到底想过没有？" 他会说 "我连答案都不知道，怎么去想它呢？" 附注: Serre 本人不赞同上述看法并断定这是我的大堆 "欺人之言" 中的许多不真之处的一部分. 而 Serre 太太说在她看来 "Serre 每时每刻都在工作". 事实上他声称他的所有真正的工作都是在睡觉时做的！我还能说什么呢？正如我们大家都知道的 —— 这个世界不公平.

现在我必须回到我的讲题并告诉你们一些我所学到的东西. 继 Serre 给我讲解之后，重心移到 Princeton 大学里. 那边 Kodaira 、 Spencer 和 Hirzebruch 小组的活动强烈地吸引着我. 特别是 Hirzebruch 的 "Riemann–Roch" 公式深深打动了我. 所以让我来解释一下 "层论" 带给我们的理解上同调的全新观点. 我将以 de Rham 理论为例来阐述，因为它是所能有的最 "直接" 的概念并对物理、几何和拓扑有深远的影响.

无可否认， "同调" 是拓扑中最直观的概念. 于是 $H_0(X)$ 表示空间连通分支的个数， $H_1(X)$ 表示 X 有多少有趣的环路 —— 或说 1- 维洞，等等. 上同调最初只是被看

成是同调的"对偶". 例如, 在 $\boldsymbol{R}^2 - 0$ 上定义的 1- 形式

$$\omega = \frac{1}{2\pi}\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

与 $\boldsymbol{R}^2$ 中去掉原点所形成的洞在下面的意义下对偶: 对 $\boldsymbol{R}^2 - 0$ 中一个定向曲线 γ 的线积分

$$\int_\gamma \omega$$

给出 γ 绕 0 的环绕数.

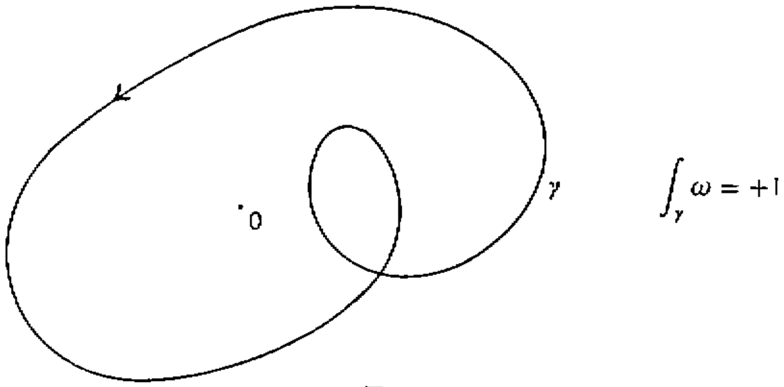

图1.

在形成拓扑、分析和代数几何之间的极其紧密的关联的"层论"(Leray 、 Cartan 、 Weil 、……) 中, 1- 形式与环绕数的关系简直可以忽略不计. 取而代之的是直接从连通分支的对偶定义开始, 并循着它直到它的"逻辑的"或我所称的"上同调的"终点. 也就是说, 用由 X 上"局部常数函数"组成的向量空间的维数来定义空间的连通分支的个数. 这个概念应当是很清楚的: f 在 X 是局部常数的, 如果 X 中的任一点 $P \in X$ 有一个开邻域 U 使得对所有的 $q \in U$ 有 $f(p) = f(q)$.

现在如果我们处理的是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的开集 U, 那么用局部常值C^∞ 函数已经可以定义 $H^0(U)$. 但是它们很明显可以用一个简单的微分方程来刻划:

$$f\text{局部常值} \iff df = 0,$$

其中

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

简而言之, 现在可以将 $H^0(U)$ 理解为 U 上微分方程

$$df = 0$$

的解向量空间, 而这方程显然可以在所有$C^\infty-$ 流形上内蕴地定义. 更进一步, 所谓的高阶 de Rham 群 $H^i(X)$ 现在就可以用一种同调代数的"万有原则"来决定. 而经典的 de Rham 复形构造过程仅仅是一个特例!

回顾一下，流形 X 上的 de Rham 复形，通常记为

$$\Omega^*(X):\Omega^0(X)\xrightarrow{d}\Omega^1(X)\cdots\Omega^n(X),$$

是由 X 上记为 Ω^q 的 q 反称协变张量组成的. 这里

$$\Omega^0(X)\equiv C^\infty(X),$$

并且 d 有着典则的，"上帝赋予" 的延拓使得 $d^2=0$. 依此延拓了的 d, "de Rham" 上同调就由

$$H^*(X)=\mathrm{Ker}\ d/\mathrm{Image}\ d.$$

给出. 即

$$H^q(X)=\begin{cases} du=0\ \text{在}\ \Omega^q\ \text{中的解，模去}\\ \text{平凡解}\ u=dv,\ \text{其中}v\ \text{在}\ \Omega^{q-1}\ \text{中}.\end{cases}$$

由此 $H^0(X)$ 正好是 $du=0$ 的解空间，而其它的则更为神秘一些. 而层论告诉我们实际上所有这些 "高阶" 上同调都可以仅仅从 H^0 的性状中得到，但现在是把它作为 X 中所有开集上的函数，或更确切地说是函子来考虑！换句话说，层

$$U\rightsquigarrow \boldsymbol{R}(U)\equiv\ U\ \text{上的函数}$$

决定了一切. 此种考虑产生了全新的局面. 在历经四十多年的不断发掘后，这个局面仍然没有被穷尽的兆头. 当然新的问题是：在应用到由一般的微分算子 $Df=0$ 的解构成的层上时，这个万有上同调构造法会教给我们什么.

现如今，为推广而推广的数学在数学中颇受质疑. 然而当一个推广为老问题带来新的理解并且能为攻克这些老问题提供新的工具时 —— 我们就得到第一流的数学. 五十年代初所发生的恰好就是这个情形. 那时，主要是在 "复解析" 和 "代数" 流形的研究中，出现了同调的观点. 关键的一步是从 $\boldsymbol{R}^n$ 中的算子 $df=\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i$ 过渡到

$$C^q\text{中的算子}\bar\partial f=\frac{\partial f}{\partial \bar z_i}d\bar z_i.$$

即用复流形 M 上的局部 全纯函数$O(U)$ 的层来代替局部常值 函数$\boldsymbol{R}(U)$ 的层，$U\subset M$. 由此所得到的上同调群、通常记为 $\mathrm{H}^q(M;O)$, 一方面在 $q=0,1,2$ 时在经典文献中是熟知的. 同时，它们与 de Rham 理论的相似性启迪了全新的操作. 而当时在 Princeton 我的朋友们教我们接触的正是这样的神秘之物.

对那些在座中不熟悉代数和复流形的人，允许我回顾一下其中最 基本 的例子. 此即 "复射影空间":CP_m. 它是通过在 $C^{n+1}-0$ 中将 $z=(z_0,\cdots,z_n)$ 与 $(\lambda z_0,\cdots,\lambda z_n),\lambda\in C^*,z\in C^n-0$ 等同而得到的. 它是紧的，因为我们可以乘一个复数在 $z\in C^{n+1}-0$ 上使得长度 $|z|^2=\sum|z_i|^2$ 为 1. 由此 CP_n 可以看成是 $(2n+1)-$ 球面的商空间，即有映射

$$\pi:S^{2n+1}\to CP_n,$$

它以圆周 $\lambda z, |\lambda| = 1$ 为纤维.（此即著名的 Hopf 纤维化，它现在对许多的数学分支是根本的.）

经典代数几何实际上开始于对 CP_n 的研究，并且所有的"代数簇"都是由 CP_n 中的多项式切割而成. 简单地讲，是由

$$z \in X \Leftrightarrow \{f_i(z) = 0\},$$

给出的空间 $X \subseteq CP_n$, 其中 $f_i(z)$ 是 z 的 齐次 多项式组. 例如，方程

$$z_0^n + z_1^n + z_2^n = 0$$

在 CP_n 中切割出有 $(n-1)(n-2)$ 个一维洞的 Riemann 面.

关于这样一个簇上的结构层 O 的首要定理是说新的上同调 $H^i(X.O)$ 是"有限维"的，并且在其中可以发现所有代数几何的"旧"不变量. 事实上，新的 全纯Euler 数：

$$\chi(X;O) = \sum(-1)^i \dim H^i(X;O)$$

就是所谓的 X 的"代数亏格", 从而既古老又有名的 Riemann-Roch 不等式可以重新解释为 $\chi(X;O)$ 或更一般的 $\chi(X,\mathcal{F})$, 其中 $\mathcal{F}$ 是层 O 的某种 扭曲 形式的计算.

这个我相信应归功于 A.Weil 的"扭曲概念", 用"M 上线丛 L 的光滑全纯截影"来代替那些带极点的不确切定义的对象 —— 例如半纯函数. 它是这一阶段的另一深刻观点，最受拓扑学家的欢迎. 不管怎样，让我们来考察一下 线丛 的祖鼻 —— 无限 Möbius 带.

回顾一下这个线丛 L 是通过将 $\boldsymbol{R}_2$ 中的带状区域 $-1 \le x \le 1$ 中的点作 $(-1, y)$ 与 $(1, -y)$ 等同而得的. 此空间显然有一个到圆周的投影，即在区域 $-1 \le x \le 1$ 上将 -1 与 1 等同，并且此投影 π 有同构于 $\boldsymbol{R}$ 的逆像 $\pi^{-1}(x)$.(参见图 2).

由此 L 的一个截影 s, 即映射

$$s : S^1 \to L, \text{满足 } \pi s(x) = x,$$

在局部上就是一个 $\boldsymbol{R}$- 值函数. 但在整体上自然是完全不同的. 事实上，注意到 L 显然有一个零截面 s_0, 而同时它也有一个仅与 s_0 交于一点的截影 s_1! 而如果它们是从 S^1 到 $\boldsymbol{R}$ 的普通函数，则须交于两点！

话说回来，在 1954 年我是在上 Kodaira 的课时开始学习这一切的 —— 但是是在复解析框架内并夹杂着复分析. 那课讲得真是精彩！讲台上的 Kodaira 就象一个 慷慨 的

布道者在传授其敏锐而无声的智慧，用他那无瑕的日本手在黑板上写下迷人的符号和短句．时不时的，在段落间他会朝我们看上一眼，并且在稍做努力后，说出一两个词汇．

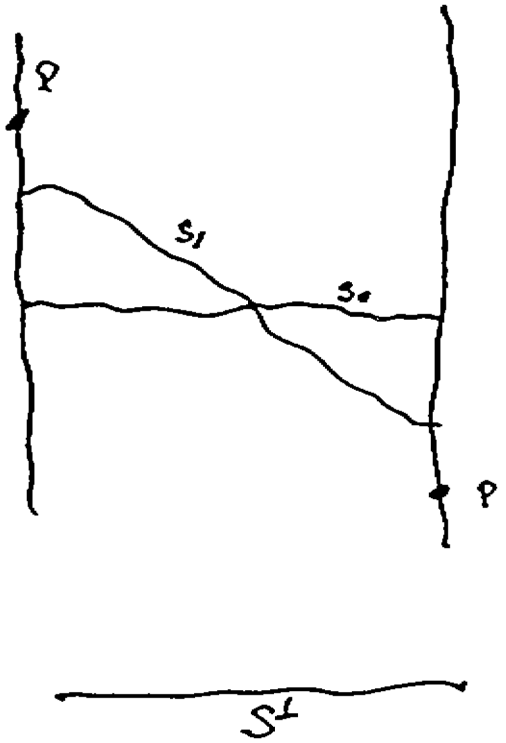

图2.

对我来说，仅有的问题是这些课讲得太快了．尽管直接的印象是他讲得非常平稳，循序渐进，并且在不夹杂任何闲话的情形下实际上包容了一切内容．

不管怎样，我确实学到了这种代数几何新观点的大致轮廓．简而言之，研究带有“量值”限制的极点的亚纯函数，同先造一个 M 上的全纯线丛 L，然后研究 M 上的“全纯截影” $\Gamma_h(L)$ 是一致的．由于 L 是全纯的，可以看出 $\bar\partial$ 在这里是有意义的．于是满足 $\bar\partial s=0$ 的截影 $s\in\Gamma(L)$ 构成的丛 $O(L)$ 有意义并且 $\Gamma_h(L)$ 可以重新解释为

$$\Gamma_h(L)\cong H^0(X;O(L)).$$

同时，“量值”或“所有极点的阶”的概念可以用量度 X 上线丛 L 的扭曲程度的拓扑概念来反映．

对 Riemann 面来讲，这些重新表述通常是十分明显的．例如，线丛的可能的扭曲由整数 $c_1(L)$ 来衡量，而 $\Gamma_h(L)$ 恰好给出那些极点总数，重数计算之和为 $c_1(L)$ 的亚纯函数．事实上，任何这样的亚纯函数都是 $\Gamma(L)$ 的两个全纯截影之比 s_1/s_2．

在这个框架下经典的 Riemann-Roch 公式现在就可写为

$$\dim H^0(X;O(L))-\dim H^1(X,O(L))=c_1(L)+1-g,$$

其中 g 是 X 中 "1 维洞" 的个数. 请注意这本质上是一个存在性定理. 因为如果 $c_1(L) > (g-1)+1$, 则就有 $\dim H^0(X,O(L)) \geq 2$. 即必然存在非平凡的亚纯函数 s_1/s_2, 使其具有极点 "总数"$c_1(L)$! 又例如, Riemann-Roch 定理蕴含着对 X 上给定的点 P, 至少存在 X 上的一个亚纯函数 f_p 以 P 为 $1+g$ 阶极点! 这是决非明显的.

F.Hirzebruch 正是从上面的这个公式中看出如何推广到高维的. 正如我已说过的, 这个推广不仅使我 —— 我想是使我们所有的人 —— 充满惊讶. Fritz 有一次告诉我说他当初向 Hermann Weyl 解释他的狂热猜测时, Weyl 只是不相信地摇头.

在此至少让我解释一下我们对此推广本质的惊讶之处. 首先必须意识到 M 上的任一线丛 L 是由 $H^2(M;\boldsymbol{R})$, 即通常的 M 的二次上同调中的元素 $c_1(L)$ 来衡量的. 有了这个以后, 我们接下来 (仅仅为简洁起见) 假定 M 上的切丛可以分裂为线丛的直和:

$$T = E_1 + \cdots + E_d.$$

由此, T 及 L 提供给我们 $H^2(M;\boldsymbol{R})$ 中的 d 个元素 $x_i = c_1(E_i)$, 以及附加的描述 L 之扭曲的类 $c_1(L)$.

现在 "快速" 构造出 $H^*(M)$ 中的表达式,

$$e^{c_1(L)} \prod_{i=1}^{d} \frac{x_i}{1-e^{-x_i}},$$

提取出 $2m$ 维的项并在 M 上积分, 就得到 Hirzebruch 的推广

$$\sum(-1)^i \dim H^i(M,O(L)) = \int_M e^{c_1(L)} \prod \frac{x_i}{1-e^{-x_i}}.$$

从而原始公式中的 $c_1(L)$ 及 $1-g=\frac{1}{2}(X$ 的 Euler 数) 推广为 —— 乍一看 —— 相当不可能的表达式. 无怪乎 Hermann Weyl 要摇头了.

但是 Fritz 大胆地继续前行, 并迅速地使用了他如此早慧地学到的一切东西. 我喜欢把这个证明画成图 3 的样子.

正如你所看到的, 他什么也没有遗漏.

由于时间限制, 我不能再多讲他的证明 —— 然而, 我要强调这个定理同样适合我的关于拓扑对分析的影响的讲题, 并且将此定理更牢固地确立在不动点公式的脉络上. 其要点是左边的表达式

$$\sum(-1)^i \dim H^i(M;O(L)).$$

很清楚是依赖于 M 的复解析结构的整数. 在某种意义下, 你须把它认为是 "M 上解析微分方程组 $\bar{\partial} f = 0$ 的实际 (virtual) 解". 另一方面, 在右边, 我们发现是 M 的纯粹 C^∞-不变量. 它不是纯粹拓扑的, 因为它不是仅仅依赖于 "纯粹连续" 的概念. 之所以这样说, 是由于有微分运算 —— 虽然仅仅是一阶的. 一旦我们知道 M 及 L 有多 "扭曲"—— 所有的 C^∞ 概念 —— 包括右边的式子就确定了.

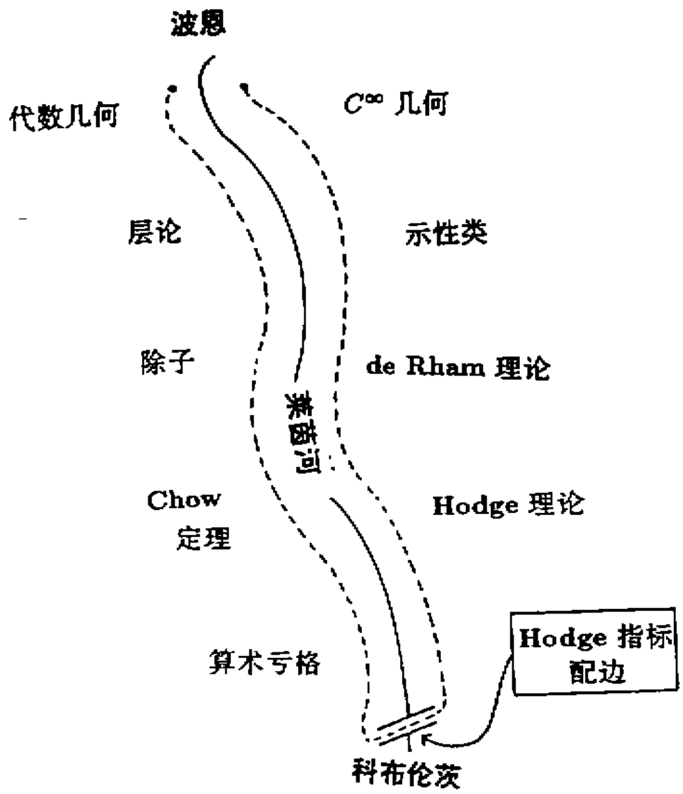

图3.

这个优美的定理拒绝枯亡. 在我们还没有来得及把它彻底搞熟时, Grothendieck 就给出了一个在代数几何框架下的漂亮的独创性证明. 接着在大约十年后, Atiyah 和 Singer 又使用了一套崭新思想, 把这个定理推广到 M 的所有椭圆复形, 给出了他们的一般的指标定理. 而到最近, 我们逐渐认识到超对称场论中关于反常 (anomaly) 的计算给出了这个老问题的新诠释. 在此我无力对所有这些进展都给出论述, 而宁愿在结束前对其中我个人参与过的一个进展作些注记.

还在 60 年代初期, Michael Atiyah 和我已成为相当要好的朋友与合作者. 事实上他和 I. Singer 的指标定理的第一个证明就是在 Atiyah 1963 年访问 Harvard 期间, 在由我们三人发起的联合讨论班上被弄清楚的. 但是沿着新层论的道路发展 "不动点公式"—— 并且是在椭圆复形框架下 —— 是在 1964 年我们相聚于 Woods Hole 会议时才意识到的. 我想是 Shimura 的一个猜想, 以及 Eichler 的数论工作中的某些非常费解的部分, 把我们推上了正确轨道.

回顾一下, 我们早已看到在经典情形, Lefschetz 数, $\mathcal{L}(\varphi)$, 是由 Hopf 公式

$$\mathcal{L}(p) = \sum_{p} \mu(p)$$

通过不动点来计算的, 其中局部重数是由 φ 在 p 的局部度数给出的整数. 我们对所

有椭圆情形找到了类似的表述．但在此我仅对复情形做一番解释．当然，我们从全纯映射

$$\varphi : M \to M$$

开始，并且假定在有一个扭曲线丛 L 的一般情形中，φ 对 M 上的 L 有一个提升 $\hat{\varphi}$. 于是我们有图表

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\hat{\varphi}"] \arrow[d] & L \arrow[d] \\ M & M \arrow[l, "\hat{\varphi}"] \end{tikzcd}$$

这样的提升诱导出同态

$$H^i(\varphi) : H^i(M; O(L)) \to H^i(M; O(L)).$$

于是就得到一个合理定义的全纯 Lefschetz 数

$$\mathcal{L}(\hat{\varphi}) = \sum (-1)^i \text{Trace } H^i(\hat{\varphi}).$$

现在我们要在 φ 的不动点是孤立且非退化的假设下找出与 $\mathcal{L}(\hat{\varphi})$ 相适应的量度 μ_p. 事实上，在这些假设下，我们有

$$\mu_p = \frac{\hat{\varphi}(p)}{\det(1 - d\varphi_p)}$$

其中

$$d\varphi_p : T'_p \to T'_p$$

是 φ 在 p 的全纯微分．简而言之，鉴于此，我们的 Lefschetz 公式可写为

$$\mathcal{L}(\hat{\varphi}) = \sum \frac{\hat{\varphi}(p)}{\det(1 - d\varphi_p)}, \Big|_{\varphi(p)=p}$$

作为一个例子，对于层 O 本身，即无需提升时，就有

$$\mathcal{L}(\varphi) = \sum \frac{1}{\det(1 - d\varphi_p)}.$$

最初我们感到非常奇怪，因为尽管在这个无扭曲丛的情形 $\mathcal{L}(\varphi)$ 应该是整数，"量度" μ_p 实际上是一个复数． Michael 在他关于那个夏天的回忆[2] 中追记到：我们最初与专家们一起对椭圆曲线的验证是失败的．幸运的是我们并没有偏信这些专家，并且坚持了下来．

[2] 参见 Michael Atiyah: Collected Works, vol. 3. 中的 Commentary.—— 校者注.

我乐于把这些公式看成是拓扑对分析之影响的又一个例子．因为如果我们考虑 $d\varphi_p$ 的特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_p$, 则不动点公式 —— 用另一种方式来写 —— 给出了这些特征值的令人瞩目的限制：

$$\sum_p \frac{1}{\prod_i(1-\lambda_i)} = \mathcal{L}(\varphi).$$

啊哈！这些公式有如此多的侧面我乐于在此谈谈 —— 但恐怕我的时间已经到了．尽管如此，我仍旧不能让你们就这样离开．至少要告诉你们，现在我们正再次处在一个新思想的年代，这些新思想 —— 例如 —— 已经给出了上述特征值限制的 25 年来的首次改进．这一次的动力来自于物理学，它是新近开始的我们与我们的表兄弟们之间的热情交流的精彩的副产品．

弦 (string) 理论的有很大争议的物理学梦想至少在数学上有一个具体的产物．这里出乎意外的漂亮之处是考虑我们的 Lefschetz 公式，但是是应用于一个无限维扭曲丛 L. 由此，在与拓扑学家 P.Landweber, R.Stong 和 S.Ochanine 的讨论的刺激下，E.Witten 预言，如果用依赖于 q 的形如

$$L_q = \bigotimes_{n-1}^{\infty} \Lambda_{q^n} T^* \otimes \Lambda_{q^n} T \otimes S_{q^n}(T^*) \otimes S_{q^n}(T).$$

的 "无穷乘积展开" 丛来扭曲 $\bar{\partial}$, 则 $\chi(M, L_q)$ 就会有某种全新的 "刚性性质"．

在此我甚至不想 "尝试" 为未入门者解释这个公式．简单地说它可以看成是对下面这个可以追溯到 Gauss 和 Jacobi 的关于环面

$$T_q = C^*/\{q^n\}.$$

上的某个椭圆函数的公式

$$\varphi(\lambda) = \frac{(1+\lambda)}{(1-\lambda)} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\lambda q^n)(1+\lambda^{-1}q^n)}{(1-\lambda q^n)(1-\lambda^{-1}q^n)}$$

的 20 世纪诠释．

我刚刚参加了一个椭圆上同调方面的会议．在那里，C.Taubes—— 在我这位年长者的些许帮助下 —— 介绍了他对这些新猜测的证明[3] 这个证明把古老的 Lefschetz 公式发挥到了极致！同时也很清楚，这些由物理学激发的思想正在形成 "椭圆拓扑"—— 近来被一些人称为 21 世纪的 $K-$ 理论 —— 的新印记．

简而言之，我能报告给大家的是再一次的，一个崭新的观点已使古老的数学 —— 以及一些老的数学家们 —— 焕发了生机．在这个学会的 100 周年庆典上，谁还期望比这更好的消息！

(胡文传、王礼静 译　张伟平 校)

[3] 我国青年留美学者刘克峰在此方面有突出贡献．参见他下面的两篇文章： [1] On elliptic genera and theta-functions. *Topology* 35(1996), 617–640. [2] On moduli invariance and rigidity theorems. *J.Diff.Geom.* 41(1995), 343–396.—— 校者注．