几何学，美国，微分几何，数学史

数学史

④

几何学在美国的复兴：1938—1988*

130-138

Oss.r., R   O1171.2

Robert Ossermann** 张洪光

原书*编者按：Robert Ossermann在Lars Ahlfors指导下研究Riemann曲面理论，于1955年获Harvard大学理学博士．然后，他在Stanford大学数学系工作，他的研究兴趣转向微分几何．近年来，他对极小曲面理论和几何学的其它课题做了大量的研究，他的优美的著作《极小曲面概观》，肯定对他在本文中所说的几何学的复兴起了添砖加瓦的作用．

Freemann Dyson在1972年对美国数学会的Gibbs讲演《失去了的机会》和1981年对Humboldt基金会的讲演《不合时尚的追求》[1]中，极力主张我们把视野扩大到一时走俏的（风行一时的）那些学科和研究的狭窄范围以外．回想我当研究生的时候，如果听到"时髦"这个词所形容的似乎就是那些重要而又激动人心的研究领域，我可能会感到万分惊讶，尽管如此，但我却不难区别什么是时髦，什么不是时髦．当然，Bourbaki曾经是时髦的顶点．此外，不论是拓扑学、几何学还是分析，只要加上点"代数的"，就可以顿生光彩．而在另一个极端，有些学科，例如偏微分方程和单复变函数，老早就被宣布死去了，所以要找到送葬者恐怕也很难了．

跨过这两个学科，在那个范围以外的什么地方，则有微分几何．它根本不属于被选择的对象．就偏微分方程和复变数而言，至少有一些院系人员曾经活跃在这些领域，跟着他们就能够写学位论文．我不信从30年代末到50年代末这大约20年的时期里，Harvard有过什么微分几何方面的博士论文．我记得住校的5年期间，这个学科只开过一次课．是Ahlfors讲的，非常精采，尽管设置这门课不是为了引导学生去研究这个学科．Ahlfors本人的工作充满了深刻的几何观念．然而，他并非一个几何学家，即是说他不是在为该领域添砖加瓦．他所做的就是使微分几何在函数论的各方面得到辉煌的应用．一个简单而又一针见血的例子，是他对Schwarz引理那影响深远的推广．Pick早先抽出了Schwarz引理的几何内容，把它解释为Poincaré尺度下有关弧长的一个命题，Ahlfors则证明这个命题的适用范围广泛得多，可以适用于具有一定曲率约束的许多尺度．同时，由于他揭示出Schwarz引理在偏微分方程中的根本性质，所以在某种程度上使这个引理摆脱了作为几何命题的约束．方法的一般性使这个结果有可能推广到高维以及许多不同的映射类．同样地，Ahlfors对Newanlinna理论的各种几何处理使得后来的许多高维推广成为可能．但是，再说一句，Ahlfors本来不是一位几何学家，

---

* 原题：The Geometry Renaissance in America：1938—1988，译自："A Century of Mathematics in America"，Part Ⅰ，Amer.Math. Soc.，1988，513—526．

** Robert Ossermann是Stanford大学数学系教授．——译者．

1）中译文见《数学译林》，第4卷，第2期（1985），第145—151页．

而且他的博士生中谁也没有写过一篇微分几何的论文。

把话题放宽一点，其它重要的研究中心，例如Princeton、Chicago和MIT，情况与Harvard大同小异。在Princeton，Eisenhart 1933年已经成为研究生院的院长。从1938年到他1945年退休时，他仅有的出版物是两本导引性的教科书。Veblen的兴趣很广泛，20年代有一个时期曾经集中精力专搞微分几何，那时，J·H·C·Whitehead 和T·Y·Thomas是他的学生。但是，Veblen 1932年离开了Princeton大学，到高等研究院工作，1950年他70岁的时候退休了。那时没有采取任何明显的措施，要让年轻的几何学家来接替Eisenhart或Veblen。Bochner的工作勾画出几何活动的一条线索。和Ahlfors一样，他最初是一位分析学家，不过与Ahlfors不同的是，他在40年代后期就开始在一些几何领域里积极工作，对它们做出了重大的贡献。他的博士生有1947年的Rauch和1950年的Calabi。然而，值得注意的是，Rauch的论文是分析学方面的。他在微分几何方面的开创性工作——Rauch比较定理及其对Rauch定理（曲率接近于球面曲率的紧致流形必定同胚于球面）的应用——是博士后在Zürich度过一年才产生的，显而易见，是Heinz Hopf提出这个问题的。

就像Princeton有Eisenhart一样，MIT有Struik，Chicago有Lane，这些前辈几何学家，在40年代都不是在做对几何学的未来方向注定有重大影响的工作。

作为美国数学会50周年纪念的出版物，G·D·Birkhoff在写《美国数学会50年》的时候，用这些话介绍1938年的情况：

> 应该承认，……我们的年轻人中没有什么人搞代数几何、经典微分几何或其它任何50年前似乎最有生气的几何问题。

不容置疑，活跃在20年代和30年代、对几何学的未来方向影响最深的人物是在欧洲。（回顾起来）首屈一指的是法国的Elie Cartan。在瑞士有Heinz Hopf，尽管他最初是一位拓扑学家，但却是几何学方面的权威人士。德国有很深的几何传统，当时的头面人物是Blaschke，在美国，就是没有什么可以相提并论的人。

我说"没有什么可以相提并论的人"，我是指具有Blaschke和Cartan形象的数学家，他们自认为微分几何学家（别人也有同样的看法）。如果把范围放宽一点，显然就应该添上这样一些重要人物，比如大范围变分法的创建人Marston Morse，微分流形和球丛的创建者Hassler Whitney，以及1936年首届Fields奖两位得主之一的Jesse Douglas，他对Plateau问题的解决含有几何成分，尽管也许应该主要看成是分析学的。就Morse而论，他把"Morse理论"用来研究Riemann流形上的测地线，当然要看成是对微分几何学的重要贡献。

在高等研究院还有Hermann Weyl。1938年Hermann Weyl在Princeton数学俱乐部听了统计学家Harod Hotelling的一次讲演后，在对几何学历史的一条奇妙的脚注里，提供了经典的Gauss-Bonnet定理和一般的Gauss-Bonnet定理之间的关键的联系。为了分析某些统计问题，Hotelling需要Euclid空间或球面的子流形周围的管状域的体积公式。Weyl对这个问题的论述，除了产生以后关于子流形和积分几何方面的工作外，还直接导致了Allendoerfer以及陈省身的某些论文。

如果要看看人们仍在援引其定理的那些美国核心几何学家，你会发现，他们散居四处，各自为战，Carl Allendoerfer在Haverford学院，Sumner Myers在Michigan大学。还有J.L.、 Synge，原先在Toronto大学，40年代中期在Ohio州和Carnegie技术学院，他那些著名的几何成果是在20年代作出的，后来他转向了更加实用的领域。第二次世界大战中有一个时期，像Allendoerfer和其他许多数学家一样，他推迟进行自己的研究，以便直接参战。另一位独树一帜的人物是Herbert Busemann，他40年代在Illinois工艺研究所和南California大学，搞出了不可微结构下那漂亮的几何理论。

如果我们希望把视野扩大到一般的Bourbaki潮流之外，来说明微分几何在40年代并不时髦，我们应当认为，在某种程度上这是由于30年代那些重要的研究机构中流形的几何学的特性造成的。当时Harvard有Graustein，Princeton有Eisenhart，Chicago有Lane，他们都不是在证明那种注定要流芳百世的定理。更有甚者，这个学科作为一个整体，经过了包括Ricci和Levi-Civeta在世纪转折时的工作在内的基本工作风起云涌之后，似乎已经奄奄一息了。曾经出现过大伤脑筋的"滥用指标"，掩盖或代替了几何内容。此外，还有一种与数学其它部分格格不入的感觉。

回顾历史可以看到一系列进展，最初有助于更新几何与其它领域的某些联系，然后逐渐地把几何愈来愈推向中央舞台。

首先登场的是大范围理论的发展，把几何与拓扑联系起来，这也许是最重要的发展。已经提及的Allendoerfer、Myers和Synge的工作，其方向几乎都与Hopf、Cohn-Vossen、Preissmann的工作以及Bläschke大多数工作一致。陈省身关于一般的Gauss-Bonnet定理的工作以及关于示性类的工作则是一个顶峰。40年代后期，Bochner的消没定理产生另一些几何-拓扑联系，由于小平邦彦的工作，这个定理又对代数几何产生重要的影响。随后，50年代出现了Rauch比较定理以及由此涌现出来的所有成果，特别是Berger和Klingenberg的球面定理。关于Lie群及其商群（齐性空间与对称空间）的工作中既有拓扑成分，也有代数成分，大部分工作来源于Cartan的基本工作。1958年，Bott和Samelson献给Marston Morse一份极其恰当的65岁生日礼物，即是美妙地应用Morse理论来研究对称空间。像Bott和Samelson一样，Milnor可能被看作主要是一位拓扑学家，但他对几何有显著的兴趣。

几何与拓扑的联系是Heinz Hopf访美期间举办的两个讲座的主要论题：第一次是1946年在New York大学举办的，第二次是1956年在Stanford大学举办的。两个讲座都有非正式的讲义。Stanford讲义专讲大范围曲面理论，经历了多个"版本"，流传多年，作为一本未公开出版的典籍，为许多人提供了大范围微分几何的导引。1983年，Springer出版社期待某本特别的著作在他们的"Lecture Notes in Math.（数学讲义）"从书中当作第1000卷出版，所以Stanford讲义连同New York大学讲义最终正式出版了。

另一个方向则是与偏微分方程的联系，Philip Hartmann和Louis Nirenberg的工作可以作为样版。

但是使几何学在美国复兴的极有决定性的因素，我想应该是40年代后期陈省身从中国来到美国。

陈省身是在中国开始搞研究的。1934年至1936年，他到Hamburg随Blaschke工作，1936年获得博士学位，接着在Paris随Elie Cartan度过一年，然后于1937年返回中国。他在中国待到1948年底，其间只有1943—1945的两年是在Princeton高等研究院，在那两年，他做了他最重要的一些工作，包括前面提到的他对Gauss-Bonnet定理的内蕴证明以及有关示性类的基本论文。

1949年，陈在Chicago大学数学系参加工作。在那里，培养出美国历史上头一大批高质量的几何学博士，其中最早的是1953年的野水克己。然而，陈的影响远不只此，通过Singer传到了MIT。Singer当时是Chicago的学生，而不是几何学家。Singer听过陈的讲演，后来在MIT开了自己的课，在那里他获得了几个信徒，其中有Warren Ambrose和Barrett O'Neill，这两人还都没有搞过几何。是陈省身指引André Weil对示性类理论做出贡献的。在50年代，陈省身和Spanier、Kuiper、Hartman、Wintner、Lashof、Hirzebruch和Serre合写过论文。这些合作促进了我前面提到的使微分几何同周围的数学领域（代数拓扑、代数几何和偏微分方程）逐渐结合起来的演化。

同一个时期对几何学的变化和复兴来说，还有一个不那么正常但并非毫无意义的特点：记号战。对向量、张量和形式的古典坐标基记法一贯令人不满，但对曲面还行之有效，因为要处理的指标较少，并且利用特殊类型的坐标还可以使记法有相当大的简化。但是在高维的情况下，记号本身对于探讨几何问题可能是一个障碍。Cartan引进他的活动标架法，当时许多人把它看成是完美的工具。陈省身充分利用了它的灵活与优越，一心一意地加以采用和促进，例如，在从流形到标架丛或切丛来回移动时，也许加上一点小手法，便可以在两种结构中使用同样的“w_{ij}”。

但是，Cartan的记法有其自身的缺点：根本没有消除指标，仍然涉及任意选择局部标架场，基于这些选择建立表达式，然后检查在标架场变换下的性态。最后，它的一个长处（涉及协变导数或外导数的计算时较易处理）与基础几何关系疏远时则有相反的一面。梯度、旋度和散度这些非常有害的老式术语已经被许多人视为过时，因为它们都可以视为作用在不同次数的形式上的外导数的特例。不过，它们过去有（而且现在仍然有）直接几何意义和说明物理解释这个优点。多少是在这种精神的感召下，一种新的记法被Koszul发明了，显然是在50年代由野水克己首次在出版物中加以介绍的。基本运算是向量场关于在一点处的已知切向量的协变导数。这一记法完全不依赖于局部坐标和标架场，而且完全摆脱了指标的纠缠，很快就被一大批几何学家采用。然而这一记法也有缺点，例如，对一定类型的计算相当棘手。因此，不像大多数早期的记号战，例如微积分的记号战，Leibniz记法对Newton记法赢得了一场几乎是全面的胜利，这里的结果却是不分胜负。正如从前一个人必须学习两种现代语言和一种死语言一样，现在，一位有抱负的几何学家需要学习两种现代记法体系（Cartan和Koszul）和一种死的记法体系（坐标记法）以便有能力阅读20世纪的论文和著作。也许值得啰嗦一句，这并非“仅仅”是一个记法问题，因为甚至定理的内容也可能受到影响：证明某个标架场的存在不等价于证明某个局部坐标系的存在。

在结束50年代的事情以前，我应当提到一个有点不那么相干但却是重要的结果，具有远远超出其直接后果以外的反响，那就是John Nash的嵌入定理，使人们破天荒第一次知道Riemann流形类重合于Euclid空间中具有诱导尺度的子流形类，其证明是一个独出心裁的tour de force（精心杰作），似乎是神来之笔。

60年代开始，陈省身从Chicago来到Berkeley，Berkeley渐渐地变成了几何活动的一个中心。这十年中涌现出新一代的第一流几何学家，其中有来自Berkeley的Alan Weinstein，来自Princeton的Jeff Cheeger以及来自Stanford的Blaine Lawson。在此期间，出版了新一代的著作，提出了现代的论述与观点，使用一种新颖的记法，几乎立刻代替了Eisenhart时期的那些老的经典著作，从而为这门学科的蓬勃发展增添了强大的动力。这些著作中有Helgason、小

林昭七和野水克己、Bishop和Crittenden以及Sternberg的硬皮教科书，还有Hicks、Berger、Gromoll-Klingenberg-Meyer同样重要的软皮讲义以及Milnor的Morse理论讲义。狂热撰述的十年，在1970年7月6日上午3点半有一个合适的结尾，那时Michael Spivak完成了他的Comprehensive Introduction to Differential Geometry第二卷的序言。在那部著名的著作中，Spivak从18世纪微分几何的起源出发，带着读者一步一步地通过Gauss和Riemann的基本论文，Bianchi和Ricci的贡献，进入到Levi-Civita、Cartan、Ehresmann、Koszul等人的观点下各种"联络"概念的丛林之中。在这个过程中，他对微分几何在记法改变下的不变性给出了一个构造性证明，他的方法是：考虑一个定理，即具有等于零的Riemann曲率张量的Riemann流形局部等距于Euclid空间，（称它"按例"），并且从七种不同的观点或记法出发，提供了七种不同的证明。

不容置疑，大量新书促使微分几何成为学生们更易理解、更感兴趣的学科。不过，对这个学科的兴旺和发展来说，更加重要的是研究前沿的惊人成就。最著名的是Atiyah-Singer指数定理，这是分析、拓扑和几何的宏伟的综合，特别是产生了一种看待Guass-Bonnet定理的新方式：不是视为一个孤立的结果，而是视为大系统事物的一个例证。

另外有些文章受到注意，与其说是由于特有的结果，倒不如说是由于它们的创新性质、有时是为整个新研究领域奠定基础。其中有：

1. Federer和Fleming 1960年关于正规流与积分流（Curent）的论文，结果创建了几何测度论以及Federer 1969年关于这个主题的权威性著作。
2. Eeils和Sampson 1964年关于Riemann流形的调和映射的论文。虽然调和映射的概念不是新的，但这篇论文是该主题整个未来发展的起点。
3. Palais和Smale 1964年关于广义Morse理论的论文。这篇论文，连同大约同一个时期两位作者各自的其它论文以及Eeils的较早的论文，奠定了无限维流形研究的基础。Lang关于微分流形的著作采用了类似的观点，而且也是有影响的。这个学科被称为"大范围分析"，在70年代找到了重要的应用。
4. 小林昭七1967年的文章在复流形上引进了不变伪距离。这里，基本思想相当初等，似乎朴实无华，有点像协边理论的思想，而不是像给几何测度论和大范围分析奠基使用的那种精巧的布局。然而，其蕴涵是深厚的，最近发现了与Diophantine分析有出人意料的联系，如Lang 1987年关于复双曲空间的著作所述。
5. McKeam和Singer 1967年关于曲率和Laplace算子特征值的论文。它在该主题后来的发展中发挥了巨大的作用。
6. Mostow 1968年的刚性定理，是"拓扑决定几何"整个一系列结果的头一个。证明利用和扩充了Gehring关于高维拟保角映射的基本结果。
7. Simons 1968年关于Riemann流形中的极小簇的基本研究。这是该主题第一篇重要报告，富于一般性，正是这项研究才使极小曲面这个领域在微分几何中从靠近边缘的位置移到比较中心的位置。在这篇论文里有若干有趣的结果。最值得注意的结果涉及Bernstein定理：**如果R^{n+1}中的n维极小超曲面S可以一一投影映成超平面，那么S本身就是一个超平面。**Simons将他论文中的某些结果与利用几何测度论的早期发展结合起来，证明了维数$n\leqslant 7$的Bernstein定理。第二年，即1969年，Bombieri、de Giorgi和Giusti以一种惊人的方式结束了这个故事：Bernstein定理当$n>7$时不真。前十年Milnor

发现了7维怪球，这个微分拓扑学的惊人性事实，也许是唯一可以相提并论的涉及维数的间断性例子。曾经有各种各样的尝试想把这两个现象连接起来，但是都不能完全使人信服。

我几乎不需要再讲，微分几何中还有比我这里已经介绍过的更加值得注意的工作。一些老问题在得到解决，例如 Blaschke 猜想1963年由Leo Green 解决，正向弯曲完备流形的拓扑结构于1969年由Gromoll和Meyer解决。同时新的领域也正在开辟，新的问题正在提出。

然而正是在70年代，微分几何这个领域才变得花团锦簇的。在几个大学，最著名的有Berkeley 的加州大学，Stony Brook的纽约州立大学，以及Pennsylvania 大学，第一次有了完整的一批几何学家，而不是一两个各自为战的个人，要说明新成就的规模一时还难以着手。但是，值得注意的是，在这十年之初Thurston和丘成桐两人都在Berkeley做他们的学位工作。后来，Thurston去了Princeton，在那里开创了他对双曲几何的宏伟研究，丘成桐则去了Stanford，其成就有：解决Calabi 猜想，这是Smith猜想的一部分（与Meeks 合作，后者是Lawson在 Berkeley 的学生）以及解决相对论中的正质量猜想（与 R. Schoen 合作，后者是丘成桐和Leon Simon在Stanford共同的学生）。

到了80年代，数学界终于欣然颁发了第一个微分几何方面的Fields 奖，不只是一个，而是两个，即Thurston 和丘成桐。

促使70年代几何学在美国复兴的另一个重要的因素是Gromov 从1974年至1980年在 Stony Brook 工作。在那个时期，他写了若干基本性的文章，讨论几乎平坦流形以及具有一定曲率限制与体积限制的流形的拓扑型的界限。此外，他还就形形色色的课题做了重要工作，其中有等周不等式、光滑遍历理论，以及纯量曲率（与Lawson合作）。1980年，他和丘成桐共同获得美国数学会的Veblen奖，顺便说说，该奖的全称是“Oswald Veblen几何奖”，是1960年Veblen去世后设立的，前七位获奖者都是搞拓扑的，直到1976年，由于Simons和Thuston的工作，几何方面的专门工作才被认为是值得颁奖的。

作为80年代几何学方兴未艾的迹象，是定期举行的几何学专题讨论会日益增多，例如太平洋西北地区几何讨论班，每年在西海岸举行 3 次，东部几何节一年一度，参加人数按指数增长。1988年在北Carolina 的Chapel Hill 举行的几何节有一个显著的特征，即大部分讲演都讨论具体例子的构造。当时有一种普遍的感觉，由Gromoll明确地表达出来了：过去，依据很少的具体迹象就可以无拘无束地提出猜想，而现在，第一次以例子的形式为我们的猜想建立坚实的基础，即是构造某些流形，具有规定的拓扑、一种或另一种曲率、可能还有别的几何限制，比如直径或体积的限制。在Chapel Hill的讲演中，有一个是田刚做的，讲他和丘成桐合作的一项工作，讨论对各种非紧致流形如何得到具有规定Ricci曲率的完备Kähler-Einstein尺度。另一个是 Nicolaos Kapouleas 做的，介绍他如何构造R^3 中具有规定拓扑的紧致且完备的常值平均曲率的曲面。两者的证明都涉及非常复杂地利用偏微分方程。

80 年代产生了另一些著名的例子。1986 年，Wente 造了浸入 R^3 中的常值平均曲率的环面，从而回答了Heinz Hopf在1951年提出的一个问题：任何与球面不同的紧致曲面能否浸入R^3 中，具有常值平均曲率。（Hopf 证明了从一个球面开始，任何这样的浸入都必须以标准球面作为它的像，而A. D. Alexandrov 证明了高亏格曲面不能嵌入R^3，具常值平均曲率。）

我们能否断言，数学风尚现在有了大摇大摆的变动，从50年代Bourbaki 的一般性和结构的思想完全摇摆到80年代具体、特殊和直观的思想？如果真是这样，这对未来预兆着什么

呢？一个很大的未知数，一般而言是计算机、特殊而言是计算机制图法对几何研究的方向和成就将有什么影响。到目前为止，最惊人的例证是、发现了新的完备的嵌入极小曲面族，其中计算机制图法起了重要的作用。这个故事（以及插图）可以在David Hoffmann 1987年发表在Mathematical Intelligencer 的一篇文章中找到。最近，Hoffmann和一群聚集在一起的科学家合作，以各种各样的周期极小曲面和常值平均曲率曲面作为模型，来检查最近由电子显微镜照片揭示出来的某些交界面。这项工作是作为 ***Nature*** 杂志1988年 8 月18日那一期的封面条目发表的。

因此，在美国数学会一百周年纪念的时候，微分几何不仅恢复了它与其他数学分支的联系，而且也找到了它在现实世界中的根基。它也进入了新的计算机技术所开辟的王国。现在，在Amherst的Massachusetts大学，Santa Cruz的California大学，Brown大学，以及Princeton都有利用计算机制图法的活跃小组，还有新的“几何超级计算机”的科研项目，其目的是为一些数学家提供高分辨系统，这些系统相互连接而且都连到Minnesota大学的一台超级计算机上。结果将会怎样，是一系列振奋人心的基本的新进展，或者只是使人们重新呼吁Bourbaki式的纯化与净化的特殊情况的一阵风，这还要拭目以待。毫无疑问，到2038年美国数学会一百五十周年纪念庆祝会时，将作出判断。

附言：题目中的“几何学”似乎言过其实。事实上，我只讨论了一个方面，即微分几何。我不对标题加以限制，因为我相信几何学的其它部分也有类似的复兴，但只好让别人去补充详情。甚至在微分几何方面，我觉得我对整个领域也没有做得公平合理，而是专注于我熟知的东西。为了至少是部分地弥补自己有限的知识和眼界，我请教了许多人，他们提供了另外的背景材料、评论和建议。他们是Garrett Bikkhoff、Eugene Calabi、Jeff Cheeger、Irving Kaplansky、Blaine Lawson、Cathleen Morawetz、Barrett O' Neill、Halsey Royden、Hans Samelson、James Simons、Isadore Singer和George Whitehead。我谢谢他们大家。

（张洪光译　江嘉禾校）

参 考 文 献

1938 L.V.Ahlfors, An extension of Schwarz's lemma, Trans Amer Math Soc. 43, 359—364.
C.D.Birkhoff, Fifty years of American mathematics, *AMS Semicentennial Publications*, Vol. 2, AMS, New York, pp. 270—315.

1939 H.Hotelling, Tubes and spheres in n-spaces, and a class of statistical problems, Amer. J. Math. 61, 440—460.
H.Weyl, On the volume of tubes, Amer. J.Math. 61, 461—472.

1940 C.B.Allendoerfer, The Euler number of a Riemannian manifold, Amer. J.Math. 62, 243—248.

1941 S. B. Myers, Riemannian manifolds with positive mean curvature, Duke Math. J. 8, 401—404.

1943 C.B.Allendoerfer and A. Weil, The Gauss-Bonnet theorem for Riemannian polyhedra, Trans. Amer. Math. Soc. 53, 101—129.

1944 S.-S.Chern, A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds, Ann. of Math. 45, 747—752.

1945 S.-S. Chern, On the curvatura integra in a Riemannian manifold, Ann. of Math. 46, 674—684.

1946 S. Bochner, Vector fields and Ricci curvature, Bull. Amer. Math. Soc. 52, 776—797.

S.-S. Chern, Characteristic classes of Hermitian manifolds, Ann. of Math. 47, 85—121.

1948 S. Bochner, Curvature and Betti numbers, Ann. of Math. 49, 379—390. (Part II, Vol. 50 (1949), 77—93).

1951 H.E. Rauch, A contribution to differential geometry in the large, Ann. of Math. 54, 38—55.

1953 L. Nirenberg, The Weyl and Minkowski problems in differential geometry in the large, Comm. Pure Appl. Math. 6, 337—394.

1954 K. Nomizu, Invariant affine connections on homogeneous spaces, Amer. J. Math. 76, 33—65.

1955 H. Busemann, *The Geometry of Geodesics*, Academic Press, New York.

1956 J.F. Nash, The imbedding problem for Riemannian manifolds, Ann. of Math. 63, 20—63.

1958 R. Bott and H. Samelson, Applications of the theory of Morse to symmetric spaces. Amer. J. Math. 80, 964—1029.

J. Eells Jr., On the geometry of function spaces, *Symposium de Topologia Algebrica*. Mexico, 303—307.

1960 H. Federer and W.H. Fleming, Normal and integral currents, Ann. of Math. 72. 458—520.

1962 S. Helgason, *Differential Geometry and Symmetric Spaces*. Academic Press. New York.

S. Lang, *Introduction to Differential Manifolds*. Interscience, New York.

1963 L. Green, *Auf Wiedersehensflächen*, Ann. of Math. 78, 289—299.

S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*. Vol. I, Interscience, New York.

J.W. Milnor, *Lectures on Morse Theory*, Ann. of Math. Studies No. 51, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ.

R.S. Palais, Morse theory on Hilbert manifolds, Topology 2, 299—340.

1964 R.L. Bishop and R.J. Crittenden, *Geometry of Manifolds*, Academic Press, New York.

J. Eells, Jr. and H. Sampson, Harmonic mappings of Riemannian manifolds. Amer. J. Math. 86, 109—160.

R.S. Palais and S. Smale, A generalized Morse theory, Bull. Amer. Math. Soc. 70, 165—172.

1965 M. Berger, *Lectures on Geodesics in Riemannian Geometry*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay.

N.J. Hicks, *Notes on Differential Geometry*, Van Nostrand, Princeton, NJ.

1967 S. Kobayashi, Invariant distances on complex manifolds and holomorphic mappings, J. Math. Soc. Japan 19, 460—480.

H. McKean and I.M. Singer, Curvature and eigenvalues of the Laplacian, J. Diff. Geom. 1, 43—69.

1968 D. Gromoll, W. Klingenberg, and W. Meyer, *Riemannsche Geometrie im Grossen*, Springer, Berlin.

G.D. Mostow, Quasi-conformal mappings in n-space and the rigidity of hyperbolic space forms, IHES Publ. Math. 34, 53—104.

J. Simons, Minimal varieties in Riemannian manifolds, Ann. of Math. 88, 62—105.

1969 E.Bombieri, E. de Giorgi, E. Giusti, Minimal cones and the Bernstein's problem, Invent. Math. 243—268.

H. Federer, *Geometric Measure Theory*, Springer, Berlin.

D. Gromoll and W. Meyer, On complete open manifolds of positive curvature, Ann. of Math. 90, 75—90.

S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Volume II, Interscience, New York.

1972 F.Dyson, Missed Opportunities, Bull. Amer. Math. Soc. 78, 635—652.

1973 G.D.Mostow, *Strong Rigidity of Locally Symmetric Spaces*, Ann. of Math. Studies 78, Princeton University Press, Princeton, NJ.

1978 M. Gromov, Manifolds of negative curvature, J.Differential Geom. 13, 223—230.

M. Gromov, Almost flat manifolds, J.Differential Geom. 13, 231—241.

W. Thurston, *The Geometry and Topology of 3-Manifolds*, Lecture Notes, Princeton University.

S.-T. Yau, On the Ricci curvature of compact Kähler manifolds and complex Monge-Ampere equations, I. Comm. Pure Appl. Math. 31, 339—411.

1979 R.Schoen and S.-T. Yau, On the proof of the positive mass conjecture in general relativity, Comm. Math. Phys. 65, 45—76.

1981 M. Gromov, Curvature, diameter and Betti numbers, Comment. Math. Helv., 56, 179—195.

R. Schoen and S.-T. Yau, Proof of the positive mass theorem, II, Comm. Math. Phys. 79, 231—260.

1983 F.Dyson, Unfashionable pursuits, The Mathematical Intelligencer 5, No. 3, 47—54.

H.Hopf, *Differential Geometry in the Large*, Lecture Notes in Mathematics 1000, Springer, Berlin.

1984 W.H.Meeks III and S.-T. Yau, The equivariant loop theorem for three-dimensional manifolds and a review of existence theorems for minimal surfaces, in *The Smith Conjecture*, Academic Press, New York, pp. 153—163.

1986 H C. Wente, Counterexample to a conjecture of H. Hopf. Pacific J. Math. 121, 193—243.

1987 D.Hoffman, The computer-aided discovery of new embedded minimal surfaces, The Mathematical Intelligencer 9, No. 3, 8—21.

S. Lang, *Introduction to Complex Hyperbolic Spaces*, Springer, New York.

1988 E.L. Thomas, D.M.Anderson, C.S.Henkee, and D. Hoffman, Periodic area-minimizing surfaces in block copolymers, Nature 334, pp. 598—601.