Abel 奖得主 Andrew Wiles 爵士访谈录

Martin Raussen　Christian Skau

访谈于 2016 年 5 月 23 日进行.

Andrew Wiles 爵士从挪威王储 Haakon 手中接过 Abel 奖（照片：Audun Braastad)

Raussen & Skau (以下简写为 **“R & S”**)：Wiles (怀尔斯) 教授，请接受我们对您被选为 2016 年 Abel (阿贝尔) 奖获得者的祝贺. 坦率地说, 几年前我们两个就已经在期待着这次访谈！

您不仅在数学家群体中有名，而且名扬四海，我们现在引用 Abel 奖委员会的说法：“借助于椭圆曲线的模性猜想 (Modularity Conjecture), Fermat (费马) 大定理令人震惊的证明开辟了数论中的一个新纪元.” 这个证明要回溯到 1994 年, 这意味着您不得不等待 20 多年才获得 Abel 奖. 然而, 到目前为止, 您是最年轻的 Abel 奖获得者.

您在完成了 Fermat 大定理的证明之后，您不得不接受蜂拥而至的访谈，这使得我们的访谈变得困难了. 我们怎么能够想出以前多次访谈中您不曾回答的问题呢？好吧，我们会尽我们最大努力的.

1. Fermat 大定理：历史的描述

我们必须在访谈的最开始引用一段拉丁文：“...nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere.” 它的意思为：“...不可能把任意一个高于二次的幂分成两个相同次数的幂.” 用现代数学术语来说，即为：当 n 大于 2 时，方程 $x^n + y^n = z^n$ 没有自然数解. 然后再继续：“cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.” 其意为“关于此，我已经发现了一种确实美妙的证明，可惜这里页边空白的地方太小，写不下.” 这是法国律师和业余数学家 Pierre de Fermat (1601—1665) 于 1637 年写在他的一本书《丢番图算术 (Diophantus' Arithmetica)》页边的注. 他肯定不希望这个问题使得数学家 —— 专业的和业余的 —— 为了找到其证明而忙乎几个世纪.

对于试图证明 Fermat 大定理，直到您开始您的成功之旅，您能给我们一个简单的说明吗？此外，为什么这样一个简单的问题那样地有吸引力？为什么想证明它的努力在数论的发展中那样地有效？

译自：EMS Newsletter, issue 101, September 2016, p. 29–38, Interview with Abel Laureate Sir Andrew Wiles, Martin Raussen and Christian Skau, figure number 2.
Martin Raussen 是丹麦 Aalborg 大学的数学教授，他的邮箱地址是 raussen@math.aau.dk.
Christian Skau 是挪威科技大学的教授，他的邮箱地址是 csk@math.ntnu.no.

Wiles (以下简写为 **"W"**)：第一次认真试图证明它大概是 Fermat 本人．但是很遗憾，除了他对他在 $n=3$ 和 $n=4$ 的特殊情形的证明外，我们什么也不知道.[1] 也就是，他证明了两个立方之和不能是另一个的立方，或者两个四次幂之和不能是一个四次幂．他用一种漂亮的方法做了此事，我们称这个方法为无限下降法．这是一种新的证明方法，或者至少在算术中所提出的证明中是一种新方法．他在信中对他的同事解释这个方法，并且也在他著名的页边写到了这个方法，至少页边对某些内容是足够大的．在 Fermat 去世后，他的儿子发表了他的页边注，之后沉寂了一段时间．然后，Euler (1707—1783) 和另一些试图找到这个确实美妙证明的人捡起了它．但是他们都失败了．19 世纪中期，这变得非常具有戏剧性 —— 各色人等都以为自己能够解决它．法国科学院关于此有一个讨论会 —— Lamé (拉梅，1795—1870) 自称他正准备证明它 —— 而 Cauchy (柯西，1789—1857) 说他认为他也能证明，等等.

事实上，德国数学家 Kummer (库默尔，1810—1893) 已经写了一篇论文，其中他解释道，基本问题是 "什么是已经知道的算术基本定理"．在我们正规的数系中，任何数都可以本质上以一种方式被因子分解为素因子．取一个数，如 12; 它是 $2\times2\times3$. 没有别的方法打散它．但是在试图解决 Fermat 问题时，你实际上想利用这个唯一性并不成立的数系．由于不成立这种唯一的因子分解，每次试图解决 Fermat 问题的努力都宣告失败了. Kummer 以难以置信的细致分析了这个事实．他找到了一些最漂亮的结果，最终的产物是他能够对许多，许多情形解决问题．例如，当 $n\le100$ 时，除了 37, 59 和 67, 他能够对其它所有素数解决问题．但是他并未最终地给予解决．他的方法基于 Fermat 曾引进过的思想 —— 无限下降法 —— 但是在这些新的数系中.

正如我们今天所了解的，他所用的新的数系是由代数数论所导致的数系．人们试图在这些新的数系中解方程，代之以在通常的整数系和有理数系中解这些方程．以 Fermat 所坚持的风格努力了一阵子，但是到了 20 世纪就有点云消雾散了．没有人从根本上找到新思想．到了 20 世纪下半叶，数论转而考虑其它一些问题．Fermat 问题被专业数学家完全忘掉了.

然后在 1985 年，Gerhard Frey (1944—), 一位德国数学家，找到了一个令人震惊的新思想：他取 Fermat 问题的一个假想解，并重写它，使它做成一条所谓的椭圆曲线．他表明或暗示，这条椭圆曲线有一些非常特殊的性质．他猜想，实际上不存在这样的椭圆曲线. 基于此，一位美国数学家 Kenneth Ribet[2] 在一年后证明了，利用这个 Frey 曲线，Fermat 问题的任何解会与另一称为模性猜想的著名猜想矛盾．Taniyama (谷山丰，1927—1958) 以一种弱形式提出了模性猜想，Shimura (志村五郎，1930—) 改进了此猜想，但是其第一个实在的证据来自 André Weil (韦伊，1906—1998), 他使得详细验证模性猜想的这个明确形式成为可能．大量证据被积累起来，说明该猜想肯定应该是对的．因而在此刻数学家们认识到：是的，Fermat 猜想将是对的．此外，还必须有一个证明.

---

1) 严格地说，Euler (欧拉) 是第一个在 $n=3$ 的情形写下完整证明的人.—— 原注

2) 全名 Kenneth Alan Ribet, 1948—, 伯克利加州大学数学教授，美国数学会 (AMS) 新一届理事长 (自 2017 年 1 月 1 日起), 其数学兴趣包括代数几何与代数数论.—— 译注

接下来发生的是，模性猜想是一个问题，数学界不能把它置于一旁，而等待 500 年后再解决. 它是恰好在现代数学路中央的一个路障. 它是非常, 非常重要的问题. 至于 Fermat 问题，你可以真正地把它放在一旁，并且可以几乎永远忘掉它. 因而在我知道 Ribet 已经做了这个的时刻，我就知道这个问题可以被解决，并且我就准备试着做了.

R & S: 与 Fermat 断言的证明有关的推测：您认为 Fermat 与 Lamé 有同样的想法 —— 正如以后所表明的，错误地假设了分圆整数有唯一分解吗？

W: 不, 我不那么认为, 虽然这个思想会在某处存在. 这非常难于理解. 关于此 André Weil 写过点什么. Fermat 考虑的所有其它的问题必须用亏格为零或 1 的曲线来做. 但是他突然写下了有更高亏格的一条曲线. 他是怎样想到这个的？

当我十几岁时，我试图自己来做，我在心里记住 Fermat 的模式，因为很难有别的事情我可以做的. 我能够理解他的 17 世纪的数学，但是也许除了那些之外也就不多了. 据我看，他所做的每件事都可以被归结为与二次型有关，因此我以为这也许是想到高亏格曲线的路径. 自然，我从未成功过，但是没有什么别的东西使得 Fermat 落入这个由唯一因子分解筑成的陷阱. 事实上，从二次型的观点，他理解有时有唯一因子分解，有时又没有. 因而他理解这是他在自己的框架中的差别. 我很难认为这是一个错误.

R & S: 在您提到的 André Weil 的题为《数论：从 Hammurapi 到 Legendre 历史中的一个方法 (Number Theory: an approach through history from Hammurapi to Legendre)》的书中提到，Fermat 考察一个立方减去一个平方等于 2 的方程 ($x^3 - y^2 = 2$), 并且他证明了这个方程本质上只有一个解，即 $x = 3$ 和 $y = \pm 5$. André Weil 推断，那时 Fermat 研究了环 $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$, 它确实有唯一因子分解.

W: 是的，他用了唯一因子分解，但是他所做的是依据了二次型. 并且我认为他也研究了相应于 $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ 的二次型，该环中不存在唯一因子分解. 因此我认为他理解. 我认为他理解这个差别，这是我的印象.

2. 数学教育

R & S: 在您很年轻时显然已经对数学难题感兴趣了. 关于这个兴趣从何而来您有什么想法？您是否受到什么人的特别影响？

W: 我很小的时候就喜欢数学. 10 岁时我曾经在图书馆的书架上寻找数学书. 我会抽出一些书来，有一次我看到一本 E. T. Bell (贝尔, 1883—1960) 的书《最后的问题 (The Last Problem)》，在其封面描述了 Fermat 方程，Wolfskehl 奖,[1] 和 Fermat 问题的传奇历史. 我完全被它迷住了.

R & S: 在 Eric Temple Bell 的书中是否还有别的什么把您迷住了？

1) Paul Friedrich Wolfskehl, 1856—1906, 一位对数学有兴趣的德国内科医生，曾随 Kummer 学习数学. 关于 Wolfskehl 奖的由来有很多种说法, 其中最浪漫的一则如下：Wolfskehl 被一个年轻女士甩了，遂决定自杀. 但是他想到了 Kummer 的一篇论文 (Kummer 发现 Cauchy 对 Fermat 著名问题不成功的证明中有缺陷) 中有一个错误. 这件事使 Wolfskehl 打消了自杀的念头, 重新振作起来. 为了感恩, 他在遗嘱中悬赏 10 万马克, 奖给在其去世后 100 年内第一个证明 Fermat 大定理的人. 1997 年 6 月 27 日这笔钱奖给 A. Wiles, 但经过两次大战已遭极度贬值：以 1977 年计，相当于 1 万马克或 4000 美元.—— 译注

W: 真的完全是一个方程把我迷住了. 实际上这本书太罗嗦. 对了, 在某种意义上, 书中的数学比你也许想得到的要少. 我认为它应该有较多的方程. 那时, 当我发现这个方程时, 我就找一些数论方面初等的书籍来学同余式和解同余式, 诸如此类, 并且研究 Fermat 研究过的另一些问题.

R & S: 您是在正常的学校功课外做的这个事情?

W: 是的, 从那个观点看, 我不认为学校的功课太费劲.

R & S: 在当时, 对您而言是否已经很清楚您有特殊的数学才能?

W: 我肯定有一种数学倾向, 并且我显然喜欢做数学, 但是我不认为我是特别的. 事实上, 在我就读的学校里我也不认为我是独特的. 有一些人和我一样有能力成为未来的数学家, 并且其中有一些人也已经是数学家了.

R & S: 在那个年龄您是否已经打算研究数学, 并且从事数学职业了?

W: 不, 我不认为我真的理解你可以用你的一生老做数学. 我想这只是发生在以后. 但是我当然想只要我能我就研究数学. 我知道在我视野到达的地方都是有数学的.

R & S: 1971 年您作为剑桥大学一名学生时就开始研究数学了. 您能告诉我们一些您是怎么处理的? 是否有特别的老师, 特别的领域对您是特别重要的?

W: 在我进入大学前, 实际上是在高中, 我的一个老师因为在数论上的工作而得到博士学位. 他给了我一本 Hardy (哈代) 和 Wright (赖特) 的《数论导引 (An Introduction to the Theory of Numbers)》, 我还找到一本 Davenport (达文波特) 的《高等算术 (The Higher Arithmetic)》. 我发现就数论而言这两本书是非常非常有启发性的.

R & S: 所以在您开始做研究之前亦已步入正轨了?

W: 是的, 以前我已步入正轨了. 事实上, 在某种程度上我感到大学的学习是分散注意力的, 因为我不得不做所有别的事情, 应用数学, 逻辑学, 等等, 然而我只想学数论. 在第 1 学年没有可能学数论. 并且在第 3 学年之前你不能真正认真地做这件事.

R & S: 不管怎样, 您对几何学不如对代数学和数论那样感兴趣吧?

W: 不, 我主要的兴趣在代数学和数论. 我很高兴学这些别的内容, 但是数论确实是最使我兴奋的. 我的老师们为我安排了一些特别的数论课, 但并不是太多.

有一次, 我决定把我在学校里所学的拉丁语好好地用一下, 尝试着读 Fermat 的原著, 但是我发现这太难了. 即使你翻译拉丁文, 但是在那个年代写作的方式并不是你所习惯用的代数符号; 所以读原著太难了.

R & S: 当您真正地来到剑桥大学研究数论, 并以 John Coates (科茨) 为您的导师时, 这对您必定是一种解脱吧?

W: 没错. 我有一个预备年, 这一年中我只学习一系列课程, 然后可以做一篇特殊的论文. John Coates 尚未在剑桥大学, 但是我认为他帮助了我 —— 也许在整个夏天. 无论如何, 在我见到他的那个夏天, 我就立刻开始跟随他工作, 这真正美妙极了. 从本科的内容 —— 只是阅读和学习 —— 过渡到做研究, 对我而言是一个真正的转机. 这太美妙了.

3. 椭圆曲线

R & S: 我们假设，是 John Coates 教您开始研究椭圆曲线，以及 Iwasawa (岩泽健吉) 理论的吧？

W: 绝对的. 他有一些令人赞叹的想法，并且慷慨地与我分享这些想法.

R & S: 您是否告诉 John Coates, 您对 Fermat 问题感兴趣？

W: 也许我告诉他了. 我不记得了. 自从 19 世纪以来没有什么新思想，这确实是真的. 人们曾尝试提炼一些老方法，是的，也有些改进. 但是看上去这些改进并不会带来答案. 那种方式实在太困难了.

R & S: 在您开始与 John Coates 一起工作时，您是否有这些椭圆曲线对于解决 Fermat 大定理是关键的这种想法？

W: 没有，这是令人惊奇的巧合. 在某种意义上，奇怪的事在于，我们今天所记得的关于 Fermat 的两件最要紧的事，是他关于椭圆曲线的工作和他著名的大定理. 例如，正如你所提及的这个方程 $y^2+2=x^3$, 它是一条椭圆曲线. 这两条线在 (大定理的) 证明中聚在一起.

R & S: 您能解释一下什么是椭圆曲线，以及为什么数论对椭圆曲线有兴趣吗？

W: 对于一个数论学家来说，椭圆曲线的生命开始于 Fermat 的 y^2 等于具有有理系数的 x 的一个三次多项式这样形式的方程. 此时问题即为求这样一个方程的有理解. Fermat 注意到的是下述：有时在开始时就有一个甚至两个有理解，再利用它们产生无穷多个别的解. 但是有时不存在解. 例如，后一种情形出现在 Fermat 大定理 $n=3$ 的情形中，其中的方程事实上是一条虚假的椭圆曲线. 有时你可以证明不存在有理解. 你可以有无穷多解，也可以没有解. 这对于 Fermat 而言已经是显而易见的.

在 19 世纪早期，人们研究复数形式的这些方程. Abel (1802—1829) 本人就在这个时候参与进来，并研究椭圆函数以及把它们与椭圆曲线联系起来，推导出椭圆曲线有群结构. 在 19 世纪早期，利用双周期函数就很好地理解了椭圆曲线. 但是，那是复解的基础，就是复数方程的解.

Poincaré (庞加莱，1854—1912) 研究了有理方程的解. 现今熟知的 Mordell-Weil (莫德尔 – 韦伊) 定理由 Mordell (1888—1972), 然后又 Weil (1906—1998) 在 1920 年代所证明，这个定理回答了 Poincaré 的一个问题. 在我们的框架中，该定理叙述为：在一个数域 K 上一条椭圆曲线上的 K 有理点，特别是当 K 是有理数域时，形成一个有限生成的 Abel 群. 用 Fermat 的语言即为，你可以从有限个解出发，利用这些解和他所谓的弦 – 切线过程 (the chord-and-tangent process) 来生成所有的解.

4. Birch 和 Swinnerton-Dyer, Tate-Shafarevich, Selmer...

现在你已经知道了结构，这是非常漂亮的代数结构，群的结构，但是实际上它并未帮助你找到解. 因而事实上没有人能找到解的一般的方法，直到 1960 年代出现了 Birch (伯奇，1931—) 和 Swinnerton-Dyer (斯温纳顿 – 戴尔，1927—) 猜想. 对于此猜想，有两个方面；一是多少有点分析味道，另一是利用称为 Tate- Shafarevich (泰特 – 沙法列维奇)

群的. 大体上, Tate- Shafarevich 群对于求解的算法是阻碍. 而 Birch 和 Swinnerton-Dyer 猜想则告诉你为了分析这个所谓的 Tate-Shafarevich 群, 实际上存在一种分析方法. 如果你把所有这些结合在一起, 最终会给你一个求解的算法.

R & S: 您作为 John Coates 的研究生时, 您已经与他一起研究过 Birch 和 Swinnerton-Dyer 猜想了?

W: 是的, 这恰是他提出来要研究的. 我们在解与称为椭圆曲线的 L 函数之间的这个解析联系上对于某些特殊的椭圆曲线族得到了第一个结果.

R & S: 这些曲线允许复乘吗?

W: 正是, 这些是有复乘的椭圆曲线.

R & S: 关于 Birch 和 Swinnerton-Dyer 猜想的第一个一般的结果是什么?

W: 这是第一次处理一系列情形而不是个体的情形. 对于个体情形已存在大量数值数据, 而这是第一个无穷多组的情形.

R & S: 这是在有理数域上?

W: 是的.

R & S: 我们应该提及, Birch 和 Swinnerton-Dyer 猜想是 Clay 千禧年奖问题之一, 它会使解决它的人赢得 100 万美元.

W: 是的. 我认为这是有吸引力的, 部分地是因为它的根在 Fermat 的工作中, 正如 Fermat 问题一样. 这是另一个与方程有关的 “初等态” 问题 —— 在这个情形方程次数很低 —— 它是我们所不能掌控的, 也是 Fermat 最先发起研究的. 我认为这是一个非常吸引人的问题.

R & S: 您认为这是力所能及的吗? 换言之, 我们是否有必要的工具, 如果某人足够勇敢向它进攻, 并能获得成功? 或者我们必须再等 300 年来看到它被解决?

W: 我不推断它将要花 300 年, 但是我也不认为它是千禧年问题中最容易的. 我想我们仍缺少些什么东西. 现在所缺少的是否都是工具, 我不能肯定. 也许是. 总是存在这些推测和这些确实困难的问题; 也可能根本没有工具在那里.

我不相信在 19 世纪有人能够解决 Fermat 大定理, 肯定不是在最终被解决的路上. 在数学史上确实有一个太大的缺口. 你不得不再等待几百年等待一些恰当的东西到位. 你从来不能断定是否这些问题在你的时代是可以理解的. 这就是使得它们那么有挑战性的东西; 如果你有当今什么可以做成, 以及什么不能做成的直觉, 那么你就已经在走向解决问题的长路上了!

R & S: 您提及 Tate-Shafarevich 群, 以及与其有关的 Selmer (塞尔默, 1920—2006) 群出现了. Selmer 是一位挪威数学家, 是 Cassels (卡塞尔斯, 1922— 2015) 把这个群称为 Selmer 群的. 关于 Selmer 群您能稍微说两句, 以及它是如何与 Tate-Shafarevich 群有关系的, 哪怕有点专业性?

W: 这是专业的, 但是也许我可以解释什么是 Selmer 群的基本思想. 你试图做的是找一条椭圆曲线上的有理解. 其方法为在此椭圆曲线上取一些有理点 —— 假设你已经得到一些 —— 然后从这些点生成域扩张. 当我说生成域扩张时, 我是指你可以在这条椭圆

曲线上取那些点的根. 就像取 5 的 n 次根或 2 的立方根. 你可以在一条椭圆曲线上做相同的事情，你可以取一个点的 n 次根. 这些是所有的点， 把这些加到它们自身 n 次 (*added to themselves n times*) 就给出你开始时的点. 它们生成你开始时那个数域 —— 在我们的情形是有理数域 $\mathbb{Q}$—— 的某些扩张.

在这些扩张上你可以加很多限制. Selmer 群大体上就是加上所有显然的限制后你可以得到的最小的扩张集合.

我来总结一下. 你已经得到了点的群. 它们生成某些扩张；这太大了，你不想要所有的扩张. 你利用局部准则，利用 p 进数尽可能地削减这些扩张；所得被称为 Selmer 群. 在由点生成的群和 Selmer 群之间的差本质上就是 Tate-Shafarevich 群. 因而，如果你愿意，Tate-Shafarevich 群就在你试图通过 Selmer 群来查明点的时候给出了误差项.

R & S: Cassels 谈及的 Selmer 的那篇论文研究了 Diophantus (丢番图) 方程 $3x^3+4y^3+5z^3=0$ 和类似的一些方程. Selmer 证明了这个方程在整数域中只有平凡解，而当模 n 时，对所有 n 它都有非平凡解. 特别地，这条曲线没有有理点. 为什么 Cassels 提出 Selmer 的名字来命名这个群.

W: 是的，在这些中间有极微妙的关系. 所发生的是实际上你正在考察一条椭圆曲线，在这个情形是 $x^3+y^3+60z^3=0$. 如果你愿意的话，这是一条虚假的椭圆曲线，并且 Tate-Shafarevich 群涉及考察像它那样的另一条曲线，例如 $3x^3+4y^3+5z^3=0$, 它是亏格为 1 的曲线，但是它没有有理点. 它的 Jacobi (雅可比) 簇即为原来的椭圆曲线 $x^3+y^3+60z^3=0$. 描述 Tate-Shafarevich 群的一种方式是利用亏格为 1 的，没有有理点的这些曲线. 把这些组合在一起你可以得到 Tate-Shafarevich 群，并且它被反映在 Selmer 群中. 用话语来解释这太错综复杂，但它是另一种观点. 我给它以一种利用扩张的比较算术的术语. 比较几何的术语是利用这些扭曲的形式.

5. 模性猜想

R & S: 您最终证明的是现在称谓模性猜想的一个特殊情形. 为了解释这个必须首先从模形式开始，如何把模形式与椭圆曲线联系起来，您能给我们一些解释吗？

W: 好的；我们所描述的 (有理数域上的) 一条椭圆曲线作为一个方程 $y^2=x^3+ax+b$, 其中 a 和 b 被假设为有理数. (还有一个条件：其判别式不为零.) 正如我所说，在 19 世纪初期你可以描述这个方程的复解. 你可以利用 Weierstrass (魏尔斯特拉斯) $\mathfrak{P}$ 函数，利用一个特殊的椭圆函数来很好地描述这些. 但是我们所想要的实际上是这些椭圆曲线完全不同的单值化，这个单值化体现出 a 和 b 为有理数这一事实. 对于有理椭圆曲线而言，这只是一个参数化. 并且因为它体现出曲线定义在有理数域上的事实，相对于椭圆函数而言，在有理数域上使你对解的掌控大为便利. 后者实际上只看到复结构.

我们的平台来自于模形式或模曲线. 先来描述模函数：我们习惯于满足在平移下保持不变的函数. 每当我们写下一个 Fourier (傅里叶) 级数时，我们就有了一个在平移下不变的函数. 模函数是在一个大得多的群 —— 通常是 $SL_2(\mathbb{Z})$ 的一个子群 —— 作用下不变的一类函数. 因而，你会要求一个复变量的函数 $f(z)$—— 通常是在上半平面中的函数，

它满足与 $f((az+b)/(cz+d))$ 一样；或者，更一般地，$f(z)$ 是它乘以 $cz+d$ 的一个幂.

这些被称为模函数，并且在 19 世纪它们被广泛地研究．令人惊奇的是，模函数掌握着椭圆曲线算术的钥匙．也许描述它最简单的方式是，因为在上半平面 H 我们有 $SL_2(\mathbb{Z})$ 的一个作用 —— 在这个作用下 z 变为 $(az+b)/(cz+d)$—— 我们就可以考察 H 模这个作用的商．然后你就可以给出一条曲线的商结构．事实上，这就自然地得到了有理数域上一条曲线的结构.

如果你取 $SL_2(\mathbb{Z})$ 的一个子群，或者更明确地取所谓的同余子群，它由被 N 整除的 c 值所定义，那么你就称这条曲线是一条水平为 N 的模曲线．模性猜想断言，有理数域上的每条椭圆曲线实际上是这些模曲线之一对于某个整数 N 的商．这就由这些别的对象，即这些模曲线给出了椭圆曲线的一个单值化．从表面看，我们似乎失去了一些东西，因为这是一条高亏格曲线，它更复杂．但是它确实有更多的结构，因为这是一个模空间.

R & S: 这是一个非常强有力的工具？

W: 是的，这是一个非常强有力的工具．你有函数论，你有形变理论，几何方法等等．你有很多研究工具.

R & S: Taniyama (谷山丰), 一个年轻的日本数学家，他第一个猜测或暗示这些联系，他的猜测比较模糊，是吗？

W: 他的猜测是比较模糊的．他没有把它落实到在模群下不变的函数上．我忘了他确切猜测的是什么了；它是在某类群下不变的，但我忘了他确切预言的是什么群．然而它不是如模群的同余子群那样明确．我想，它原始的文章是用日文所写，所以传播得不如应该有的那么广泛．我相信这是在日本举行的一个会议后汇编的笔记的一部分.

R & S: 在当时这是一个难以置信大胆的猜想，不是吗？

W: 是的，绝对的.

R & S: 但是他逐渐地引起了其他数学家的注意. 您已经告诉我们关于 Gerhard Frey, 他想出了一个猜想，把 Fermat 大定理和模性猜想联系在一起.

W: 对的．Gerhard Frey 证明了，如果你取 Fermat 问题，譬如说 $a^p+b^p=c^p$ 的一个解，并且创建椭圆曲线 $y^2=x(x-a^p)(x+b^p)$, 那么该椭圆曲线的判别式是一个完满 (perfect) p 次幂．并且，假如你想到假设模性猜想意味着什么 —— 你必须假设一些稍强的东西 (所谓的 Serre (塞尔) 的 ϵ 猜想)—— 那么这就迫使这条椭圆曲线有水平 N, 我说过它等于 1, 因而相关的同余子群就等于 $SL_2(\mathbb{Z})$. 但是 H 模 $SL_2(\mathbb{Z})$ 是亏格为零的曲线. 它没有椭圆曲线商，以致商完全不存在，因而 Feramt 问题不能有解.

6. 寻求一个证明

R & S: 这就是您自己工作的出发点，以及属于 Serre 和 Ribet 另外的关键因素，他们把这个联系说得很清楚．我们不妨先对这个故事做个简单的小结．您曾经多次说过，这是一部 BBC[1] 纪录片的主题.

1) British Broadcasting Corporation (英国广播公司) 的简称．也有称其为英国国家广播公司的，以强调其公营性质.—— 译注

您搬到了美国，先是到哈佛 (Harvard) 大学，然后到普林斯顿 (Princeton) 大学，成为那里的教授. 当您听到 Ribet 的结果时，您投入了您全部的研究时间来证明有理数域上半稳定椭圆曲线的模性猜想. 这个工作在与世隔绝的环境下确实是极其困难的，它持续了 7 年. 同时，您作为普林斯顿的教授仍在工作，并且还正抚养着几个小小孩.

在 1993 年您似乎完成了一个证明，故事的高潮发生在您返回英国，在剑桥大学的 Isaac Newton (牛顿) 数学研究所做了 3 个报告，宣布了您对 Fermat 大定理的证明. 您的同辈数学家们为您庆贺. 甚至国际新闻界 1) 也对您的结果感兴趣，这对于数学成就而言是极其罕见的.

但是当你的结果被 6 位审稿人为一个有极高名望的杂志仔细审查后, 事实证明您的论证之一存在一个微妙的缺陷，因而您只得重起炉灶. 过了一阵您给您以前的学生 Richard Taylor 发函，请他到普林斯顿助您一臂之力. 这又花费了另外 10 个月艰苦和令人沮丧的工作；我们认为我们称之为在巨大压力下进行的气势雄伟的努力丝毫不为过. 然后突然间灵光一闪，您意识到您可以把您以前的一些尝试结合一些新的结果来规避导致缺陷的问题. 结果是，这就是得到模性猜想所需要的，从而推出 Fermat 大定理.

这必定是一种什么样的解脱啊！您愿意对这个戏剧性的故事给一些评论吗？

W: 关于我自己的工作，当我成为一名职业数学家随 Coates 一起工作的时候，我意识到我真的不得不停止关于 Fermat 问题的工作，因为它很耗时，并且我可以看到在最近 100 年内几乎毫无进展. 我看到有的人，甚至是非常杰出的数学家，在这件事上遭受到失败. 当 Frey 想出这个结果时，我有一点怀疑，Serre 关于猜想的那部分是真的，但是当 Ribet 证明了这一点的时候，好了，这是它了！

这是一场漫长的艰苦奋斗. 从某种意义上讲，研究一个问题而排除其他一切是不负责任的，但这是我倾向于做研究的方式. 然而 Fermat 问题非常狭窄，我的意思是这只是一个方程，其解可能，也可能不有助于任何其它事情. 可是模性猜想却是数论中大问题之一. 以任何方式不断地研究它是一件伟大的事情，无论如何，这是一个非常重要的机会.

当你正在做这样的事情，它要花费很多年来真正建立起能看到你需要什么类型的东西，以及解决它将取决于什么类型的东西的直觉. 这就像废弃一切你不能用的东西，并且只在这样的情形才奏效：你必须全身心地投入，以致于即使做错了，你也已经知道得足够多，你会找到通往终点的另一条路.

奇怪得很, 关于我当初给出的论证中的错误, 人们也曾研究过这个论证的那个方面, 并且在最近确实还证明了可以产生非常类似于当初那个论证的结论. 事实上，在每一个接近的情形中，类似于当初方法的论证似乎有效，但只有这个唯一的情形是无效的，但是对此还没有任何真正的解释. 因此我试图使用的相同类型的论证，利用 Euler 系统等等，在每个周围的情形中已经有效了，但是我所需要的 Fermat 问题的情形却不. 这真的非常特别.

1) 例如，在当时的《时代 (Time) 》周刊有专题报道.—— 译注

R & S: 您曾经把对模性定理证明的这个追求比作在黑暗而未开发的豪宅中之旅行. 您可以详细说明一下吗？

W: 我真的在黑暗中开始了. 对模化猜想如何能有效, 以及怎样才可能接近这个问题, 我没有事先的洞察. 这个问题的麻烦之一 —— 这有点像 Riemann 假设, 但也许对于这个问题更甚 —— 是你甚至不知道答案会从数学的什么分支而来.

首先, 有 3 种描述问题的方式, 一个是几何的, 一个是算术的, 一个是分析的. 还有些分析学家 —— 我完全不了解他们的技术 —— 他们正在试图在这个困难的问题上取得进展.

我觉得我有点幸运, 因为我自然的本领是用算术方法, 我直奔算术路线, 但我可能是错的. 关于模性猜想只有以前知道的复乘法的情形, 而且证明是分析的, 完全分析的.

我认为, 部分是出于必要, 部分是因为这是我所知道的, 因此我直接用了算术方法. 我发现以一种我研究 Iwasawa 理论时的方法考虑它是非常有用的. 在随 John Coates 研究时, 我将 Iwasawa 理论应用于椭圆曲线. 当我去哈佛时, 我了解到 Barry Mazur (马祖尔) 的工作, 在哈佛他用了很多现代工具一直在研究模曲线的几何. 其中有一些我可以借鉴的想法和技巧. 过了一段时间, 我才意识到我实际上可以利用这些作为一个开始 —— 找到某种进入问题的切入口.

R & S: 在您开始做模性猜想之前, 您与 Barry Mazur 发表了一篇合作论文, 证明了在有理数域上 Iwasawa 理论的主要定理. 您能告诉我们 Iwasawa 理论是关于什么的吧？

W: Iwasawa 理论来自 Kummer 的分圆域工作及其应用于 Fermat 大定理的方法. 他研究了算术, 特别是素分圆域的理想类群. Iwasawa 的想法是考虑一次取单位所有的 p 次幂的根而得到的分圆域塔. Iwasawa 理论的主要定理证明了在 p 准素类群上 Galois (伽罗瓦) 群一个生成元的作用与 p 进 L 函数之间的一个关系. 这类似于用于有限域上曲线研究中使用的结构, 在该研究中 Frobenius (弗罗贝尼乌斯) 特征多项式与 ζ 函数有关.

R & S: 这些工具在您开始研究模性猜想时变得很有用了？

W: 是的, 它们给了我一个起点. 在当时这并不明显, 但是当我想了一段时间后我意识到可能有一条路从那里开始.

7. 与 Abel 的工作的类似性

R & S: 我们想给您读一段引文: “它被四面围攻, 但是在它最后的堡垒里, 这个问题绝望地防守着. 谁是那个幸运的天才来带领突击或是迫使它投降？”

W: 他必定是 E. T. Bell (贝尔), 我猜. 是吗？

R & S: 不, 不是. 它实际上是从 Jean-Étienne Montucla (1725—1799) 在 18 世纪末写的《数学史 (Histoire des Mathématiques) 》中所引. 这确实是第一本关于数学史的书. 该引言指的是五次方程用根式的可解性或不可解性.

如你所知在 Abel 21 岁时证明了一般的五次方程是不可解的. 从数学上讲, 他的研究在奥斯陆是完全孤立的. Abel 痴迷于这个问题, 至少是被完全吸引了. 他也有一个错误的起点. 他认为他可以证明可以用根式实际地解五次方程. 之后他发现了他的错误,

并且终于找到了不可解的证明.

好了，这个问题在那个时候几乎已历时 300 年，并且非常有名. 如果我们快进 200 年，同样的引言可以用于 Fermat 问题，当您解决它的时候大概有 350 年了. 在许多方面这是一个非常类似的故事. 您有什么看法吗？

W: 是. 在某种意义上，我的确感觉到 Abel, 然后是 Galois (1811—1832), 他们在代数中对于从用非常简单方式可解的这些方程，到不能用根式求解的方程，正在标记着某种改变. 这是来自五次方程的一种代数的变化. 在某种程度上，现在数论的整体趋势是从基本上可交换的，以及可能是可解的扩张到不可解扩张的改变. 我们怎么来做不可解扩张的算术？

我相信模性猜想被解决，是因为我们已经从这种原始的可交换情况过渡到了非交换情况，并且我们正在发展工具，模性等等，这些都是基本的非交换工具. (我应该说，虽然大部分的证明用可解的情形就通过了，这不是因为它更自然，而是因为我们没有解决一般非可解情形的一些相关问题.)

这在数论中所做的与 Abel 在代数中所做的 —— 提供了解这个方程的工具，是相同的改变. 所以我认为这是非常类似的.

R & S: 关于 Abel 和 Fermat 问题有一个具有讽刺意味的转折. 在 Abel 21 岁时，他来到哥本哈根拜访 Degen 教授 (1766—1825), 他是当时在斯堪的那维亚的主要数学家. Abel 写信给他在奥斯陆的导师 Holmboe (霍尔姆伯，1795—1850), 关于 Fermat 方程陈述了 3 个结果而没有给出任何证明 —— 实际上其中一个不容易证明. 这在今天当然只是一种好奇心.

但在同一封信中，他发泄了他的沮丧，暗示他不明白为什么在把双纽线 n 等分时他得到一个 n^2 次的方程，而不是 n 次的. 只是在回到奥斯陆之后他才发现双纽线积分的双周期性，以及第一类一般的椭圆积分也有双周期性.

如果有人想到 Abel 关于 Fermat 方程做了什么，这只是一种好奇心. 那么关于椭圆函数，以及隐含地关于椭圆曲线，他所获得的成就，后来被证明是解决问题的一个相关的工具. 当然，Abel 并不知道这样做与算术有关. 所以这个故事告诉我们数学有时会以一种神秘的方式发展的.

W: 是的，这当然是的.

8. 工作风格

R & S: 我们可以请问一些有关数学家一般的工作风格，以及您自己的工作风格的一些看法吗？Freeman Dyson (戴森), 在普林斯顿的高等研究院的一位著名的物理学家和数学家，他在 2008 年的 Einstein (爱因斯坦) 讲座中说[1]:“有些数学家是飞鸟，有些是青蛙. 飞鸟在高空翱翔，俯瞰数学的广大领域，直至遥远的地平线. 他们喜欢这样的概念，这些概念能统一我们的思想，并且融合来自数学中不同领域的各种各样的问题. 青蛙生活在泥沼中，只能看到生长在附近的花朵. 他们喜欢特定目标的细节，热衷于一次解决

1) Freeman Dyson 这篇演讲的中译文见《数学译林》， Vol. 29 (2010), No. 1, p. 71–84.—— 译注

一个问题."

Freeman Dyson 并未说飞鸟比青蛙好些，或者相反．他认为他自己是一只青蛙，而不是一只飞鸟．

当我们看您的工作时，我们似乎难以决定将您放在他的分类方案中的什么位置：创造理论的飞鸟中，抑或解决问题的青蛙中．我们自己的感觉是什么？

W: 嗯，我也不觉得像他们中哪一类．我肯定不是一只飞鸟 —— 统一不同领域．我想到青蛙跳跃很多．但我觉得我非常非常专注．我不知道这与什么动物类似，但我认为在我喜欢附近的景观这个意义上我不是一个青蛙．我非常非常全神贯注于在我碰巧工作的问题上，并且我很有选择性．我发现分散注意力来看周围的花对我来说是很困难的，所以我不认为这两种描述中的任何一种适合我．

R & S: 根据您自己的经验，您能描述一下下述两种状态之间的相互影响吗？一种是艰苦的，集中精力的和锲而不舍的工作，另一种是似乎不知从何而来的，经常出现在比较放松的环境中的突然灵光一闪．您的头脑必定曾经无意识地对手边的问题进行研究，对吧？

W: 我想你所做的就是在你很好地了解一个理论，甚至可能多于一个理论的情形中所得到的，以致你已经看到了每一个角度，并尝试了很多不同的路线．

在准备阶段正是这么大量的工作，你必须了解所有的细节，也许还有一些例子，那就是你重要的跳板．当你开发出所有这些，那么你让心情放松，然后在某个时候 —— 也许当你离开，做一小会儿别的事情 —— 你回来了，突然，这一切都很清楚．为什么你不想到那个？这是头脑为你做的事情．这就是灵光一闪．

我记得 —— 这是一个非数学的微不足道的例子 —— 一旦有人向我展示了一些脚本，这是一个哥特式的脚本，我不能理解它．我试图理解一些字母，我不猜了．半小时后我回来，我可以读整个事情．心灵以某种方式为你做到这一点，我们不知道如何做到的，但我们的确知道为了这将发生而设置条件时我们必须做些什么．

R & S: 这让人联想起关于 Abel 的故事．在柏林时他和一些不是数学家的挪威朋友合住一个公寓．他的一个朋友说，Abel 通常在夜里醒来，点燃了蜡烛，写下了他醒来时的想法．显然，他的头脑在睡着时也在工作．

W: 是的，我也这样做，除非我不觉得有需要在我醒来的时候写下来，因为我知道我不会忘了它．但是，如果当我准备去睡觉时有一个想法，我很怕醒来时会忘了它，所以那时我必须把这个想法写下来．

R & S: 你正在用公式，或用几何图象，还是什么思考？

W: 它不是真正的几何．我认为这是模式，我想这只是我在其他地方看到的情形和我现在面对的情形之间的类似性．在一个完美的世界里，这些都指向什么，哪些成分应该进入这个证明中，我还未用到仍在我口袋里的哪些工具？有时这就是绝望．我收集了我所拥有的一切证据．我必须利用这些来工作，再没有别的了．

我经常觉得做数学就像是一只松鼠，在一棵非常高的树的顶部有一些坚果．但是有几棵树，而你不知道哪一棵树上有坚果．你所做的是你爬上一棵树，并且你想，不，这棵

树上看起来不像有，然后你跑下来，再爬上另一棵树，这样你花了整个一生只是在这些树上爬上爬下，但你完成的最多只有 30 英尺．现在如果有人告诉你其余的树上都没有坚果，你只剩下一棵树，然后你会继续前进直到找到坚果．在某种意义上这是正在排除错误的情形，这是至关重要的．如果你就是相信你的直觉，并且你的直觉是正确的，那么你坚持你的一棵树，然后你将会发现坚果．

9．数学中的问题

R & S: Felix Klein (克莱因，1849—1925) 曾经说过："当旧的结果被理解，并被新方法和见识所阐明时，数学就发展了．与更好更深入地理解成比例地，新问题自然地产生了．" 并且 David Hilbert (希尔伯特，1862—1943) 强调 "问题是数学的命脉"．您同意吗？

W: 是的，我肯定同意 Hilbert 的．好的问题是数学的命脉．我想你可以在上个世纪下半叶的数论中很清楚地看到这点．对我个人来说显然是模性猜想，并且整个 Langlands (朗兰兹) 纲领以及 Birch 和 Swinnerton-Dyer 猜想也是：这些问题让您非常清楚地关注于我们应该试图获得什么进展．我们也有关于有限域上曲线和簇的 Weil 猜想以及 Mordell 猜想等等．

这些问题以某种方式使我们集中精神，并且也简化了我们在数学上的目标．否则我们的目标会非常非常分散，不知道什么是有价值的，什么是没有价值的．

R & S: 我们今天有如 Hilbert 在 1900 年叙述的 23 个问题那样好的问题吗？

W: 有的，我想有的．

R & S: 您认为哪一个是今天最重要的问题？Langlands 纲领如何适应这个问题？

W: 嗯，我认为 Langlands 纲领是与我的领域有关的问题最广泛的汇集．我觉得 Riemann 假设是我所了解的一些领域中单个的最大的问题．有时候很难说为什么是这样，但我确实相信解决它会实际上有助于解决其他一些问题．当然，然后对 Birch 和 Swinnerton-Dyer 猜想我有一个非常个人的依恋．

R & S: 有时直觉可能导致我们误入歧途．例如，Hilbert 认为 Riemann 假设会在他的有生之年被解决．在其列表中还有另一个问题，第七问题，他从未想过在他的有生之年会被解决，但是由 Gelfond (盖尔丰德，1906—1968) 在 1934 年解决了．所以我们的直觉可能是错误的．

W: 那是对的．对 Hilbert 的感觉我并不感到惊奇．Riemann 假设有一个明确的表述，我们在函数域背景中有一个类似的猜想．我们明白为什么在那里这是真的，我们觉得我们能够翻译它．当然，很多人都尝试过，并且失败了．但我们仍然希望在 Birch 和 Swinnerton-Dyer 猜想之前解决它．

10．向数学投资

R & S: 让我们希望我们能在我们的有生之年看到！

经典数学大致上有两个来源：其中一个来自物理科学，而另一个来自，让我们简单地称之为数论思索，这里的数论与应用无关．

那已经改变了．例如，您自己的椭圆曲线领域已被应用于密码学和安全．人们如今

正在用椭圆曲线赚钱！另一方面，许多科学，且不说物理学，实际上利用了数学思维和数学结果，并由此获利．现今工业中的进展往往依赖于数学建模和最优化方法．科学和工业向数学世界提出了挑战．

在某种意义上，数学已经变得比以前有更多的应用．人们可能会问，对于纯数学，这是否是一个问题．至少从基金资助机构的观点，有时纯数学似乎被放在边线上．您觉得这是一个严重的问题吗？

W： 嗯，我觉得与过去相比，会觉得两三百年前的数学家能处理广泛得多的数学，并且他们中很多人比当今典型的纯数学家更多地触及应用数学．另一方面，这也可能是因为我们只记得过去那些最好的和最多才多艺的数学家．

我认为，如果基金资助机构目光短浅，这总是会成为一个问题．如果他们想在 3 年之后看到一个结果，这是不行的．很难想象一个纯数学的开发，然后其应用都在 3—5 年内发生．这大概是不会发生的．

另一方面，我不相信你可以有一个适用于应用数学世界而没有纯数学支持的 —— 提供未来和保持它们规规矩矩地发展 —— 恰当的运作．因此，不向纯数学投资这将是非常愚蠢的．

这有点像只投资于你现在就可以看到的能源资源．你必须投资未来；你必须投资核聚变动力或太阳能动力或这些其他事情．你不要只是用尽那里的东西，如何开始担心它什么时候会用完．对于数学，这是一样的，你不能只是用尽现在我们有的纯数学，然后开始担心什么时候需要一个纯数学的结果来产生你的应用．

11．数学奖励

R & S: 由于您的成就，其中以证明 Fermat 大定理为高潮，你已经赢得了很多奖项．您获得了由瑞典皇家科学院颁发的 Rolf Schock 奖 1), 在丹麦颁发的 Ostrowski (奥斯特洛斯基) 奖 2), 在法国颁发的 Fermat 奖 3), 在以色列颁发的 Wolf 奖 4), 香港邵逸夫奖 5)

1) 该奖是由瑞典裔美国哲学家和艺术家 Rolf Schock (1933—1986) 的遗赠而建立和赋予的，于 1993 年首次在瑞典斯德哥尔摩颁发．自 2005 年以来每 3 年颁发一次．目前每个奖项为 40 万瑞典克朗 (约合 60,000 美元). 该奖分为 4 类：数学 (由瑞典皇家科学院决定)，哲学与逻辑 (由瑞典皇家科学院决定)，视觉艺术 (由瑞典皇家艺术学院决定)，和音乐艺术 (由瑞典皇家音乐学院决定)． Andrew Wiles 于 1995 年获 Rolf Schock 奖，张益唐教授于 2014 年亦获该奖.—— 译注

2) 该奖由出生在基辅的数学家 Alexander Ostrowski (1893—1986) 的遗产建立了奖励基金会，以表彰纯数学和数值数学方面的杰出成就．评奖委员会由巴塞尔 (Basel) 大学，耶路撒冷大学，滑铁卢大学，以及丹麦皇家科学院和荷兰皇家艺术与科学学院的人员构成．该奖每逢奇数年份颁发，于 1989 年首次颁发．奖金额为 100,000 瑞士法郎. Andrew Wiles 于 1995 年获 Ostrowski 奖，张益唐教授于 2013 年亦获该奖.—— 译注

3) 首届 Fermat 奖于 1989 年颁发，每两年颁发一次，由法国图卢兹 (Toulouse) 数学研究所在图卢兹颁发．获奖者应在 Pierre de Fermat 曾给予影响的下述 3 个领域中取得杰出成就：变分原理的叙述，概率论和解析几何基础，以及数论．自 2011 年起，奖金被固定为 20000 欧元. Andrew Wiles 于 1995 年获该奖.—— 译注

4) 该奖由 Wolf 基金会颁发，1978 年开始颁发，每年评选一次，分别奖励在农业、化学、数学、医药、物理、艺术等 6 个领域中对推动人类科学与艺术文明做出杰出贡献的人士，其中以 Wolf 数学奖影响最大. Andrew Wiles 于 1995/6 年获该奖.—— 译注

5) 该奖的信息请见本期《数学译林》文 “2017 年度邵逸夫数学科学奖”.—— 译注

—— 被冠以东方 Nobel (诺贝尔) 奖的奖项；并且获奖名单继续，以明天的 Abel 奖告一段落．我们可以问您是否喜欢这些奖项和伴随的庆祝活动？

W: 我不得不说，我当然喜欢它们．我认为它们是一个数学庆典．我想人们很高兴在有生之年看到 Fermat 被证明．我显然很高兴看到 Riemann 假设被解决．看到最终它如何得到解决，知道了故事的结局实在令人激动．因为很多这样的故事我们不会活着看到其结局．每次我们真正看到这样一个故事的结局我们自然会庆祝的．对于我而言，我是从 E. T. Bell 的这本书中了解了 Fermat 问题以及与这个问题联系着的 Wolfskehl 奖的．Wolfskehl 奖还在那里 —— 我只是想说 —— 在它要过期了的截止日期前我只剩下几年了．

R & S: 这给了我们机会来稍微谈一下这个奖．Wolfskehl 奖由 Paul Wolfskehl (1856—1906) 于 1906 年创立，他是德国的内科医生，对数学有兴趣．他遗赠了 10 万德国马克 (相当于今天的超过 100 万美元) 奖给第一个证明了 Fermat 大定理的人．根据遗嘱，该奖有效期至 2007 年 9 月 13 日，而您在 1997 年得到了．部分地由于第一次世界大战后德国遭遇恶性通货膨胀，奖金已经缩水了很多．

W: 对我来说，这笔钱是不重要的．联系到 Wolfskehl 奖，有点伤感，这对我来说是重要的．

12．研究生

R & S: 您已经有 21 名博士生，并且您吸引了一些非常有天赋的学生．他们中有一些真的很出色．其中一个，Manjul Bhargava, 在 2014 年赢得了 Fields (菲尔兹) 奖．成为这样学生的导师，您一定很高兴？

W: 是的，对于这个我不想要太多的声望．在 Manjul 的情形，我向他建议了一个问题，但之后我没有做更多的．他想出了这些绝对奇妙的发现．在某种意义上，如果你有非常有天赋的学生，你就获得更多的声望，但事实是，非常有天赋的学生实际上并不需要很多帮助．

R & S: 您与研究生进行互动的典型方式是什么？

W: 嗯，我认为做为一个研究生，最难学的事就是之后你需要继续你的职业生涯；很难选择问题．如果你只是分配一个问题给他们，并且他们去做了，在某种意义上那没有给他们太多的东西．好吧，他们解决了那个问题，但是困难的就是必须要撤离并找其他一些问题！所以我更愿意我们一起来决定要做的问题．

我给他们一些原始的想法，考虑一下数学的领域，而并未把重点放在问题上．当他们开始工作，并成为专家时，他们可以看到一个更好的方式来落实合适的问题是什么．这样，他们就是选择问题过程的一部分．我认为对他们的将来这是一个好得多的投资．但这并不总是奏效的，有时是你给他们的初始问题原来是正确的事情．但通常不是这样，通常这是找到正确问题的一个过程．

13．爱好和兴趣

R & S: 我们总是以问获奖者在不做数学时他喜欢做什么来结束 Abel 访谈．您在数

学之外的爱好和兴趣是什么？

W: 嗯，这随着时间而变的．当我在做 Fermat 问题时，那时我是几个小小孩的父亲，这两件事放在一起很耗费精力．

我喜欢阅读，我喜欢各种文学，小说，一些传记，相当平衡．我没有任何别的专注痴迷．当我上学的时候我参加国际象棋队和桥牌队，但是开始做认真的数学我就对这些完全失去了兴趣．

从左到右：Andrew Wiles 爵士，
Martin Raussen 和 Christian Skau
(照片：Eirik F. Baardsen, DNVA)

R & S: 音乐怎么样；您喜欢音乐吗？

W: 我去听音乐会，但我不是积极地玩什么 (乐器)．我喜欢听音乐，偏好古典的．

R & S: 除了数学，你对其他科学有兴趣吗？

W: 我会说有一些．这些是我放松时做的事情，所以我不喜欢它们太接近数学．如果它是像动物行为或天体物理学或者从定性的角度来看的什么事，我当然很喜欢了解这些．同样地，关于什么机器有能力和许多其他种类的流行科学，但我不打算花时间学习弦理论的细节．我太专注于我愿意做的事情．不是我不会感兴趣，但这是我的选择．

R & S: 我们非常感谢您的精彩访谈．这次采访，我们首先代表我们两人，也代表挪威，丹麦和欧洲数学会．

非常感谢您！

W: 非常感谢你们！

编注 有关 Abel 奖更多信息，请参阅 Abel 奖官方网站 http://www.abelprize.no/.

(陆柱家 译　　童欣 校)

****

(上接 162 页)

这种非凡是真实数学的源泉，基于对 “理想数” 可唯一分解概念的天真信仰上；其余的都是算术和空话的产物．我怀疑，这是否是 Stillwell 不断使用不可能所依恋的东西．如果题材是真正有用的，书也是有效率的，那么我们会为非凡的时刻做准备．我们会意识到不可能的时刻就在眼前，它是数学成就的特征．我们也渴望把成就送达希望的彼岸．

然而，书中 170 页关于理想的古怪内容只是令我焦急困惑，充满疑问．这是它应该有的清晰明白程度吗？它通过母亲测试了吗？读完这章我是否还像以前那样理解理想呢？

我不知道．若要说实话，我不能理解为什么非数学家不理解也不爱这个题目，但我开始想知道是否只是因为这些东西太难以向非数学家解释．甚至可能是不可能加以解释的．

(高燕芳　马守全 译　　陆柱家 校)