关于定义欧拉数的序列之收敛性

Markus Brede

虽然著名且熟知的序列 $\{\tilde{e}_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}:=\left\{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu\right\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ 是定义欧拉数 $e\approx 2.71828$ 的最重要的非平凡序列，但是这个序列的泰勒展式在无穷远处的一般结构还没有弄清楚. 当然要是利用一些数学软件，比如 Maple 或者 Mathematica, 能够求出这个展式的任何一项比如前 5 项的值：限制 $x<1$, 利用 $\log(1+x)$ 在 $x=0$ 处的泰勒展式，立刻可以得到 $\nu\log\left(1+\frac{1}{\nu}\right)$ 在 $\nu=\infty$ 处的泰勒展式. 具体写出如下：

$$\tilde{e}_\nu:=\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu=e-\frac{e}{2\nu}+\frac{11e}{24\nu^2}-\frac{7e}{16\nu^3}+\frac{2447e}{5760\nu^4}\mp\cdots=:\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e_n}{\nu^n}.$$

但是，我们能够确定隐藏在省略号 $(\cdots)$ 后面的是什么吗？也就是说，省略号 $(\cdots)$ 代表的是什么？

我将为上面展式中的系数 e_n 寻求一个封闭的、有限的表示. 同时得到，上述展式将意味着如下的渐近表述的序列：

$$\tilde{e}_\nu=\sum_{n=0}^{n_0}\frac{e_n}{\nu^n}+O\left(\frac{1}{\nu^{n_0+1}}\right)\qquad(\nu\to\infty,\,n_0\in\mathbb{N}).$$

这是一些新的结果；虽然 [Todorov], [Brothers, Knox], 和 [Knox, Brothers] 也探讨过相关的问题，但他们都没有得到 e_n 是斯特林数某些倍数的有限和的这个一般结构. 我将证明这个非常简单的公式：

$$e_n=e\sum_{\nu=0}^{n}\frac{S_1(n+\nu,\nu)}{(n+\nu)!}\sum_{m=0}^{n-\nu}\frac{(-1)^m}{m!},$$

其中 S_1 表示第一类斯特林数. 特别，这个公式表示，所有的 e_n 都是欧拉数 e 的有理倍.

为了证明上述结论，我将引入几个引理. 它们都是根据如下的定义得出的.

定义 如果 $\mathrm{Re}\,x>-1$, $x\neq 0$, 且 $t\leq 1$, 令 $E_t(x):=\exp(\log(1+tx)/x)$ 和 $E_t(0):=e^t$, 对数函数的分支由 $\log(1)=0$ 决定.

那么我们显然有

引理 1

(i) 对于所有的 $t\leq 1$, $E_t(x)$ 在 $\mathrm{Re}\,x>-1$ 中全纯. 对于所有的实数 $x\neq 0$ 和实数 $t\in[-1,1]$, 有 $E_t(x)=(1+tx)^{1/x}$. $E_t(x)$ 在 $x<1$ 时的泰勒展式是：$E_t(x)=:\sum_{n=0}^{\infty}e_n(t)x^n$.

(ii) 序列 $\{\tilde{e}_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ 中的元素 $\tilde{e}_\nu:=\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu$, 在 $\nu=\infty$ 处有一个渐近展式，其系数 $e_n:=e_n(1)$ 如 (i) 中所定义：

$$\tilde{e}_\nu=E_1\left(\frac{1}{\nu}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e_n(1)}{\nu^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e_n}{\nu^n}.$$

原题： On the Convergence of the Sequence Defining Euler's Number. 译自：The Mathematical Intelligencer, Vol.27 (2005), No.3, p.6–7.

根据引理 1 (ii), 数 e_n 的限制条件化为计算 $E_1(x)$ 在 $x=0$ 处的泰勒展式的系数. 它们的值的计算用如下的引理 2 将非常简单.

引理 2

(i) 对于 $\mathrm{Re}\, x > -1$ 和 $t \le 1$, 有

$$E_t(x) = e^t \sum_{n=0}^{\infty} t^n p_n(t) x^n,$$

其中 p_n 表示 t 的一个 n 次多项式.

(ii) 对于 $\mathrm{Re}\, x > -1$ 和 $t \le 1$, 还有

$$E_t(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{\nu=n}^{\infty}\frac{S_1(\nu,\nu-n)}{\nu!}t^{\nu}\right)x^n,$$

括号内级数收敛. 其中 S_1 表示第一类斯特林数, 它由函数 $(x)_\nu := x(x-1)\cdots(x-(\nu-1)) =: \sum_{n=0}^{\nu} S_1(\nu,n)x^n$ 所生成; 可以参看 [Abramowitz, Stegum, §24.1.3, B, 公式 (1)].

证明 (i) 在给定的假设条件下, 因为绝对收敛, 有

$$\begin{aligned}
E_t(x) &= \exp\left(\frac{\log(1+tx)}{x}\right) = \exp\left[\frac{1}{x}\left(tx - \frac{(tx)^2}{2} + \frac{(tx)^3}{3} \mp \cdots\right)\right] \\
&= e^t\Bigg[1 + \left(-\frac{t^2}{2}x + \frac{t^3}{3}x^2 \mp \cdots\right) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{t^2}{2}x + \frac{t^3}{3}x^2 \mp \cdots\right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{3!}\left(-\frac{t^2}{2}x + \frac{t^3}{3}x^2 \mp \cdots\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(-\frac{t^2}{2}x + \frac{t^3}{3}x^2 \mp \cdots\right)^4 + \cdots\Bigg] \\
&= e^t\left[1 - \frac{t^2}{2}x + \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{8}\right)x^2 - \left(\frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{6} + \frac{t^6}{48}\right)x^3 + \cdots\right].
\end{aligned}$$

这就证明了 (i).

(ii) 另一方面, 利用二项式公式容易得到

$$\begin{aligned}
E_t(t) &= \sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{1/x}{\nu}(tx)^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(tx)^{\nu}}{\nu!}\sum_{n=0}^{\nu}\frac{S_1(\nu,n)}{x^n} \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^{\nu}}{\nu!}\sum_{n=0}^{\nu}S_1(\nu,\nu-n)x^n.
\end{aligned}$$

利用这个级数的绝对收敛性, 我们可以改变求和式的次序而得到 (ii).

下面我们来得出最主要的结果:

定理 对于所有的 n, 令 $\varepsilon_n := \sum_{m=0}^{n}(-1)^m/m!$. 那么有

$$e_n = e\sum_{\nu=0}^{n}\frac{S_1(n+\nu,\nu)}{(n+\nu)!}\varepsilon_{n-\nu}.$$

证明 首先从引理 2 得到

$$e^t t^n p_n(t) = \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{S_1(\nu, \nu-n)}{\nu!} t^\nu,$$

即

$$p_n(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} t^m \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{S_1(n+\nu, \nu)}{(n+\nu)!} t^\nu,$$

或者

$$p_n(t) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu \frac{S_1(n+\nu, \nu)}{(n+\nu)!(m-\nu)!} \right) t^m.$$

由于 p_n 是 t 的 n 次多项式，从而产生了两个互不相干但有趣的结果：

$$\sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu \frac{S_1(n+\nu, \nu)}{(n+\nu)!(m-\nu)!} = 0 \qquad \text{对于所有的} m > n,$$

以及 p_n 的精确表述：

$$p_n(t) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \left(\sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu \frac{S_1(n+\nu, \nu)}{(n+\nu)!(m-\nu)!} \right) t^m.$$

从这些结果及引理 2 的 (i), 我们能够得到 $E_t(x)$ 在 $x=0$ 处的泰勒展式的一个精确表述：特别地，对于 $t=1$, 我们有 $E_1(x) = e\sum_{n=0}^{\infty} p_n(1)x^n$. 利用引理 1 的 (ii), 我们知道数 e_n 是如下展式的系数：

$$\begin{aligned} e_n = ep_n(1) &= e\sum_{m=0}^{n} (-1)^m \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu \frac{S_1(n+\nu, \nu)}{(n+\nu)!(m-\nu)!} \\ &= e\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \frac{S_1(n+\nu, \nu)}{(n+\nu)!} \sum_{m=\nu}^{n} \frac{(-1)^m}{(m-\nu)!}. \end{aligned}$$

这就证明了定理.

注 数 S_1 的定义蕴涵着 $S_1(\nu, n)$ 的符号是 $(-1)^{\nu-n}$. 联系定理的结论知 e_n 的符号是 $(-1)^n$.

参考文献 (略)

(游淑君 译 何育赞 校)