Hilbert 问题及其进展

Jean-Michel Kantor

“讨论数学的前景是需要想象力的，但不能因此而却步．不过，如果说只要不发生核战争，数学持续发展到 2000 年时的情形一定会很好，那却是全然荒谬的．”(R. Godement, 1948, GR. [LeL][1]) 数学发展到今天，怎么也不可能讨论它的全貌了．然而，即使讨论它的一个部分，比如 David Hilbert 于 1900 提出的那些问题，也需要一批实力强劲的人马，就象 1974 年美国那次会议[2] 所召集的一样．毫无疑问，Poincaré 与 Hilbert 是最后两位理解全部数学的数学家．而现在，已不会再有哪位数学家能够独立继承 Hilbert 的全部数学遗产了．这一事实或许可用来为本文中的疏漏做些开脱，尽管我写作本文时得到许多人 (译按：人名略) 的帮助，然而任何缺失的责任当然完全在我．

背景[3]

1897 年第一届国际数学家大会上，Poincaré 作了一个关于数学与物理之间关系的报告．下一届国际大会 (巴黎，1900 年 8 月 6-10 日) 邀请 Hilbert 作报告，他拿不定主意，是应该就 Poincaré 的报告做一答复呢，还是应该提出若干问题以激励新世纪的数学研究．他问 Minkowski:“我是否可以为新世纪的数学发展指出一些方向．．．．展望未来．” Minkowski 对此极为赞同．因此，在巴黎，Hilbert 面对全神贯注的听众，开口就说道 [H, p.58]:

谁不想撩起未来的面纱，看一眼我们这门学科在未来世纪中发展的奥秘呢？

在后来会议录发表的 23 个问题中，他只讲了 10 个．它们是：

关于数学基础的 ——**问题 1, 2, 6**.

关于算术与代数的四个问题 ——**问题 7**, 无理数学与超越数； **问题 8**, Reimann 猜想； **问题 13**, 二元函数的叠加； **问题 16**, 卵形线与极线环．

原题：Hilbert Problems and Their Sequels. 译自： *The Mathematical Intelligencer*, Vol. 18, No. 1, 1996.

[1] 本文参考文献分成两类：一类为一般参考文献 (General Reference), 前面加 GR. 表示；另一类仅与某个具体问题有关，在文献目录中标明．

[2] 关于这次会议的情况，请见其会议录 GR. [M].

[3] 在整个这一节中，请参考 GR. [H] 与 [M].

三个函数论的问题——**问题 19**, 变分法; **问题 21**, Fuchs 方程与单值性 (monodromy); **问题 22**, 单值化.

Hilbert 之所以选择这些问题是想说明数学中深刻的统一性, 并且还支持他关于数学辉煌前景的信念 (数学中没有 "不可知"——Dubois-Reymond). Hilbert 问题的成功是众所周知的, 它们的历史充满了具有启发性的故事, 也充满了各种死胡同, 它们的将来必定还会带给我们许多惊奇. 这篇文章中, 我想介绍这些问题的最新状况, 我将侧重讨论 1975 至 1992 年间的进展, 因为 1974 年以前的工作已由美国数学会的一次讨论作了认真的阐述. 至于数论在 "Wiles 爆炸" 之前的状况, 请看 [Ma].

现状

问题 1 与问题 2 *连续统假设; 算术公理相容性.*

与这两个问题联系在一起的是 Kurt Gödel 与 Paul Cohen 的名字.

问题 1 中的连续统假设可以表述成如下形式:

$\mathbb{R}$ 中每个不可数子集的基数都与 $\mathbb{R}$ 相同. 或者

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

Gödel 讨论了算术公理的相容性. 1931 年他证明了算术公理的不完备性与不可决定性. 1938 年, Gödel 证明, 如果按 Zermelo-Frankel 公理的集合论是相容的, 那么加上选择公理以及 (或者) 连续统假设之后, 它也是相容的. 最后, Paul Cohen 在 1963 年证明, 如果 Zermelo-Frankel 公理是相容的, 那么加上选择公理的否命题[4], 甚至连续统假设的否命题, 整个系统仍然是相容的!

Gödel 的工作并没有改变数学家的工作方式, 逻辑学家当然是明显例外. J. Y. Girard 将 Gödel 的发现总结为 [G]:

数学思维中的某些部分本身并不是数学思维.

问题 3 *多面体的全等.* "两个等底等高的四面体的体积是相同的."

> 高度相等, 底面为三角形的两个四面体之比等于基底面之比. Euclid 的证明使用了穷竭法. 不过, 对于平面图形而言, 计算多边形的面积, 都可将其分解为正方形的面积来做 ("剪刀几何学"). 证明这样一种分解对于立体来说是不存在的.

这个问题实际上已为 Bricard 于 1896 年解决, 后来又被 Hilbert 的学生 Dehn 于 1900 年利用不变量加以解决: 两个立体, 如果能切成全等的部分的话, 那么它们的 Dehn 不变量一定相同. 对于每个 polytope P, 其 "剪刀全等不变量" 是某个群中的元素 $D(P)$ 时, 满足关系

$$D(P \cap P') + D(P \cup P') = D(P) + D(P');$$

[4] 广义连续统假设可以推出选择公理.

其中 P, P' 和 $P \cup P'$ 都是 polytope, 而且，如果 P 是平面的，则 $D(P) = 0$; 又若 g 为空间运动，则 $D(g(P)) = D(P)$. Dehn 不变量的定义如下所述：平面上两条线之间夹角所成的群可以等同为 $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. 再令

$$D(P) = \sum_i |L_i| \otimes \delta_i, \quad D(P) \in \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}),$$

其中 L_i 是一条边，δ_i 是在 L_i 处的二面角. 然后，Dehn 证明了等体积的立方体与正四面体的 Dehn 不变量并不相等. 这个问题因而被认为是解决了. 然而，Sydler 于 1965 年证明了两个 polytope 等价，当且仅当它们的体积与 Dehn 不变量都相等 (参见 [B], [C] 及 [S]). 另一方面，在高维空间或者三维以上的非欧几何中，却并没有相应的结果.

最近，对任意维数引进了其它一些不变量，即 Hadwiger 不变量，它对于平移作用群不变. 已经证明，在平移作用下，两个 polytope 是等价的，当且仅当它们的 Hadwiger 不变量相同. 关于这一问题与计算 Eilenberg-MacLane 同调群之间的关系以及其它最新发展，请参阅 [C].

问题 5 *拓扑群与 Lie 群.* 局部欧氏群是 Lie 群吗？

这一问题五十年代很走红. 它在 1953 年被 Gleason 同时也被 Montgomery 与 Zippin 解决. 然而下述问题却还没有解决：一个局部紧的拓扑群，若能忠实地作用于一拓扑流形上，那么它是 Lie 群吗？例如 (实际上这两者等价), p-adic 整数群能否忠实地作用于一紧拓扑流形呢？请注意，Montgomery-Zippin 定理在 M. Gromov 最近一个重要的工作 [G] 中起着关键性的作用.

问题 6 *物理学的公理化*

Hilbert 提出这一问题时最初的形式与今天叙述这一问题的形式之间已经完全没有联系了. 这主要有两个原因：

1. 现代物理学的革命：相对论，广义相对论、量子力学.
2. 新数学工具的引进、尤其是 Hilbert 空间的引进. 1900 年冬天，Hilbert 开始考虑这一问题，他的想法是：

> 我觉得研究某类收敛条件非常重要，它们可以作为某个分析学科的基础，在这一学科中一系列最简单的基本事实的证明仅依赖于一个特殊的收敛条件. 然后，仅使用这一个收敛条件 —— 不需要补充任何其它收敛条件 —— 就可以建立这一特定学科的全部定理 (GR. [R, p. 85]).

Hilbert 阅读 Fredholm 的文章时受到启发，引进了以他的名字命名的空间. 使人吃惊的是，他在 Paris 会议上所提出的问题中完全没有提到这方面的研究. Hilbert 空间的概念完全改变了理论物理的数学表述形式.

一个世纪以后，如果要指出当前是活跃的方向的话，那么下面这些是引人注目的：

广义相对论与整体微分几何：构造适当的流形来作宇宙模型 (S. Hawking, R. Penrose).

量子场论的数学；规范理论；在量子物理学的表述中引入量子群.

问题 7 *设 α 为代数数、β 为代数无理数，研究 α^β 的无理性与超越性（例如 $2^{\sqrt{2}}$）.*

这一问题被 Gel'fond(1935) 与 Th. Schneider 所解决. 不过 Euler 常数却依然是一个谜.

下面谈谈这一领域最近的进展. 1966 年 A. Baker(1970 年 Fields 奖) 证明：若 a_i 为非零的代数数，它们的对数在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关，那么

$$1, \log a_1, \ldots, \log a_n$$

在代数域上线性无关.

最近 20 年中，各种数学领域中的工具都用上了. 多复变函数论使 Enrico Bombieri (1974 年 Fields 奖) 得以解决 Nagata 猜想，也使 W. D. Brownawell 于 1985 年给出了 Hilbert*零点定理*的第一个有效形式. 后者在代数无关性问题中相当有用；A.O.Gel'fond 在 1949 年引进的方法，被 G. V. Chudnovsky 在七十年代加以发展，从而使他得以证明 $\Gamma(1/4)$ 和 $\Gamma(1/3)$(这里 Γ 为 Euler Γ 函数) 之类的数为超越数. 交换代数，以及周形式被 Yu. V. Nesterenko 引进这类问题中，并取得极大成功. 与通常的指数函数或者椭圆函数有关的超越性结果 (Th. Schneider)，在六十年代被 S. Lang 推广到 (交换) 代数群；这一主题后来被极大地发展，开始是由 D. W. Masser 一人，后来是他与 G. Wüstholz 合作. 这些都与 Faltings 关于 Mordell 猜想的工作有关.

Faltings 的这一结果说的是，对给定的 $p \geq 3$，不定方程

$$x^p + y^p = z^p$$

仅有有限个没有公因子的整数解. Fermat 问题中剩下的部分就是要证明这个解的数目就是零. K. Ribet 证明了 Fermat 猜测可以由 Taniyama-Weil 猜测推出，后一猜测与数论有关，也与代数几何和群论有关. 这就使 Fermat 问题不再是一个孤立的问题了.

问题 8 **Rimann** *假设.*

这无疑是数学史上最著名的问题，在 Hilbert 看来，也是数学中最重要的问题. 在私下交谈中，他甚至说这是人类最重要的问题！现已知道有 40% 多的零点都位于预言的那条线上 (G. R. [C] 1989)，而且对零点的分布情况也有所研究. 似乎正如以前人们猜测的那样，这些零点的分布与某个自伴算子特征值的分布相似 (Hilbert 与 Pólya 大约 1915 年的工作). 大约 1973 年 Dyson 猜测这个算子可能是随机 Hermite 算子. 几十年来，关于这个猜想的进展主要是技巧的改进，并且还使用了最先进的计算机. 这方面的一些成果实在堪称杰作 ([B-I]，并参阅 [G-K]).

另一方面，根据 Hilbert 的建议，也有人试图推广 Riemann 假设，将有理数域换成定义在 F_q 上的某条射影曲线的函数域. 这也就是 A. Weil 与 O. Zariski 创立现代

代数几何的目的. 在 1919 年提出的 “Weil 猜想” 将以前的猜想推广到高维簇上，并于 1973 年为 P. Deligne 所证明 (1978 年 Fields 奖)(GR. [K]).

问题 10 *“解不定方程的可能性”*.

问题是要给出一个算法来判定不定方程是否可解. (解不定方程就是要求一个整系数多项式方程组的整数解.) 这句话就说明，这一问题处在逻辑 (递归论) 与数论的交叉部分. 1970 年 Yu. Matijasevich 否定地解决了这一问题. 这一否定结果是通过加深对递归集 (递归可数集) 与 Diophantine 集的了解而得到的. Diophantine 集是这样的整参数 a_i 的集合，它使得

$$P(a_1, a_2, \ldots, a_n; z_1, z_2, \ldots, z_m) = 0$$

有整数解 (z). Matijasevich 定理说这两组整数集合其实是一回事. 作为这一定理的惊人的推论，我们有如下的结果：存在一个十个整变元的可以有效计算的整系数多项式，它的正值恰好是全部的素数.

还有一些这一类的问题依然没有解决. 例如，是不是存在一个整系数方程组

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n, t) = 0,$$

它有有理数解 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的充要条件为参数 t 是一整数？换句话说，是否存在 $\mathbb{Q}$ 上簇之间的态射

$$V \longrightarrow \text{仿射直线}$$

使得在 a 点的纤维非空当且仅当 a 为整数？

问题 11 *系数在代数整数环中的二次型的分类.*

参见 GR. [K].

问题 12 本问题与 Gauss *二次互反律* 的推广有关 (Gauss 二次互反律导致了现代代数数论).

考虑下面同余方程的整数解

$$x^2 + 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p).$$

这个方程有解，当且仅当素数 p 模 4 同余于 1. 这一事实就是群论与现代数论的最初起源.

这个问题影响很广，大致说来，影响到类域论 (Hilbert、以及 1930 年前后 Furtwangler, Takagi, E. Artin); 群的上同调方法的引进；L 级数的研究；还有将二次互反律推广到非交换情形的巨大的 “Langlands 计划”, 目前世界上无数的数学家在为此而工作 (但 Langlands 本人却转向研究渗流了！) 参见 GR. [Ma].

在交换的情形，若数域 K 为 $\mathbb{Q}$ 的有限扩张，则人们很希望能用某些特殊函数 (指数函数，椭圆函数) 的值以及 Galois 群的作用来清晰地刻划 K 的 Abel 扩张. 对 $\mathbb{Q}$ 本身， Kronecker-Weber 定理就用 Galois 群在单位根上的作用对其 Abel 扩张给出

了清晰的描述. Shimura 与 Taniyama 的工作 [S–T] 与带有复乘法的 Abel 簇有关，它对于所谓 "CM 域"(全实域的全虚二次扩张) 给出了一个差不多完整的答案.

问题 13 "仅用二元函数解一般 7 次方程的不可能性": 函数的叠加.

三次方程做一平移就能化为

$$X^3 + pX + q = 0,$$

它的解为 (Scipione del Ferro, 16 世纪):

$$X = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{4(27)}}\right)^{1/3} + \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{4(27)}}\right)^{1/3}.$$

类似地，四次方程的解可以表示成加法，乘法，平方根，立方根和四次根的叠加 (复合).

根据 N. Abel 与 E. Galois 的理论，更高次的代数方程是不可解的. 不过，Tschirnhaus(1683) 提供了另一种思路，就是对

$$P(x) = 0$$

再加上一个新方程

$$Y = Q(x),$$

其中 Q 是一多项式，次数严格地小于 P 且根据方便选取. 这样的话，就可以证明，五次方程的根可以通过通常的算术运算，由根式以及下列 (依赖于参数 x 的) 五次方程

$$X^5 + xX + 1 = 0$$

的根 $\phi(x)$ 表示出来. 类似地，如果加进一个函数 $\theta(x, y)$, 它是依赖于两个参数 x 和 y 的六次方程的解，则也可以将一般六次方程的根表示出来.

对于 7 次方程，当然就得加进方程

$$X^7 + xX^3 + yX^2 + zX + 1 = 0$$

的解，也就是一个三元函数 $\sigma(x, y, z)$. 于是自然要问: $\sigma(x, y, z)$ 能不能表成二元代数函数的叠加呢？ V. I. Arnold 的一个有关的问题是，σ 能否用与两个复变数的代数函数拓扑等价的叠加映射的 "不可约分支" 表示出来？ V. Lin 对此做了一些工作. 然而，这个问题，以及 Hilbert 原来的问题，却依旧没有解决.

在这一类问题中，还有一个奇怪的结果: 方程

$$x^5 + xX^2 + yX + 1 = 0$$

的解不能用一元代数函数，加法及乘法 (不包括除法!) 来表示. (A. Khovanskii. 见 [R]; 有关的历史见 [JPK] 与 [D].)

大约 1955 年，A. N. Kolmogorov 提出了重要的概念：复杂性. 对此，Yuri I. Manin 在京都国际数学家大会上作了有趣的评论 (GR. [C]). Hilbert 的这个问题还有另一个背景，即 nomograph: 用一族曲线来解方程的方法. 这个问题起源于 Hilbert 时代的计算方法，它导致了 Kolmogorov 的 ϵ 熵的概念. 后者有许多应用，其中之一是计算机科学所使用的逼近论. 我们简要地回顾一下这段历史.

与 Hilbert 及其同时代的数学家的期望相反，1957 年 V. I. Arnold(当时为 Kolmogorov 的学生) 证明任意三元连续函数 f 可以写成

$$f(x,y,z)=\sum_i f_i(\phi_i(x,y),z),$$

其中 f_i 和 ϕ_i 都是连续函数. 几周以后，Kolmogorov 证明任意 n 元函数 f 可以写成

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{2n+1} f_i(\sum_j \phi_j(x_j)),$$

其中函数 ϕ_i 是连续的，单调的，而且不依赖于 f.

在相反的方向上，有 Vitushkin 的结果 (1954). 在讨论形式级数、解析函数或者无穷可微函数的叠加时，用初等计数技巧与 Baire 论证技巧即可证明，几乎每一个整函数都在 $\mathbb{C}^3$ 的某个点上有一个芽，它不能表示成二元级数的叠加. 因而，三元整函数比二元整函数要多得多. Vitushkin 的结果是，对于光滑度为 α 的函数 (这里 α 大于 1, 但不必为整数), 它的可表示性依赖于 n/α.

问题 15 “Schubert 计数几何学的严格基础”. Schubert 算法.

Schubert 对代数簇交点个数的研究，例如三维空间中与四条给定直线相交的直线数目，被意大利学派 (Severi) 继承了下来. 最初使用的是不严格的论证方法：“数目守恒原理”(依赖于对连续性的直观理解的产物). 这一概念后来在 Pierre Samuel 与 Alexander Grothendieck(1966 年 Fields 奖) 手中发展成重数的现代理论. René Thom(1958 年 Feilds 奖) 从拓扑的角度看这一问题，得到了 Thom-Bordman 多项式，奇点的计数理论. 虽然最近还有一些进展 (Demazure, Fulton, Kleiman, R. MacPherson), 但问题 15 还不能认为已经解决了.

问题 16 “曲线和代数曲面的拓扑”.

这是唯一一个与拓扑学有直接关系的问题. 它分成两个不同的部分.

A: 考虑 $P^2(R)$ 中一条非奇异的 m 次曲线.

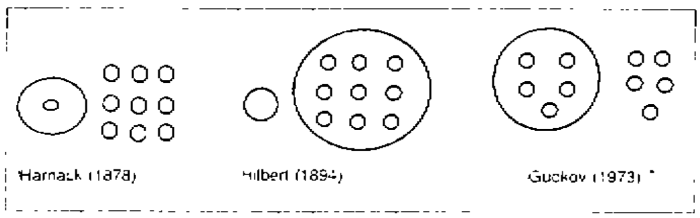

图 1 $m=6$ 时所有可能的构形

从拓扑的角度看，这样一条曲线由至多 $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)+1$ 条卵形线组成，而且这是一个最佳上界. 达到这一上界的曲线称为 M- 曲线. 问题是要研究这些卵形线有哪些可能的构形. 第一个非平凡的情形是 $m=6$、也就是 Hilbert 所提问的情形，后来在七十年代为 Gudkov 解决. (见图 1).

1933 年 Petrovskii 证明了关于

$$B=\{x|f(x)\geq 0\}$$

的拓扑不变量的不等式，其中 f 定义一条偶次曲线. 对于 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面， Petrovskii 与 Oleinik(1949–1951) 还证明了一些一般的不等式， Thom 和 Milnor(1964) 也得到了类似的结果，见 [R]. 1971 年， V. I. Arnold 证明了偶卵形线 (包含在偶数个卵形线之中) 的个数 P 与奇卵形线个数 I 之间的同余关系. 对于偶 m 次曲线， $P-I$ 模 8 同余于 $(m/2)^2$. 不过，对于次数 $m=8$、这个问题依旧没有解决. 关于这方面工作的叙述，从 O. Oleinik 与 I. Petrovskii(1949) 直到 O. Viro(1979)、可以参看 [R]. 列宁格勒学派 (Kharlamov, Gudkov, Rokhlin, Viro) 在复代数簇及其实部之间发现了非常细致的关系 [V]. 目前的工作都是非常技术性的，所得到的结果在分析中有应用 (偏微分方程、完全可积系统).

B: 极线环的个数有限的问题.

给定一个平面向量场 V, 极线环就是一个周期轨道，而非周期轨道都趋向于它. 如果 V 是解析的，那么极线环在周期轨道集合中是孤立的. 不过，周期轨道也可以趋向于一个点，或者更一般地，趋向于一个 "polycycle", 这是 H. Poincaré 引进的一个概念，它是由以 V 的奇点为端点的几条积分曲线组成.

所以， Hilbert 提出了下列自然的问题：给定一个向量场 $V=(X,Y)$, X 与 Y 都是次数 $\leq n$ 的多项式，找出极线环的最大个数. 首先，当然想要证明下面的

猜想 平面多项式的向量场仅有有限个极线环.

1923 年， Dulac 证明了这一猜想. 但他的证明是不完全的，这一点直到七十年代才为 Yuli Il'yashenko 所指出. 不过 Dulac 的某些想法却被 Il'yashenko 与 Ecalle 在不同的方向加以发展. 1984 年， Il'yashenko 证明，在 n 次向量多项式所组成的空间中，上面的有限性猜想在一个真代数子集的补集上成立.

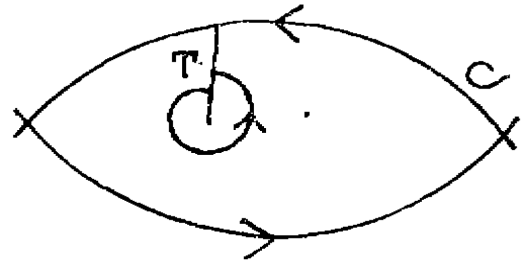

图 2 向量场的 polycycle 与回归映射

实际上，讨论这一问题的适当的背景是由带孤立奇点的解析向量场所局部定义

的奇异叶状结构 F. 在一个象图 2 的 C 那样的 polycycle 的邻域内可以定义回归映射 (return-map).

存在一条解析曲线 $T:[0,1]\to M$、$T(0)\in C$、使得 T 与 F 横截，并且对充分小的 t、通过 $T(t)$ 的叶层再次与 G 相交于 $T(f(t))$. 映射 f 使 0 不动、保持定向，并在 0 的某个去心邻域中是解析的，但在 0 却不一定解析. 所以，它可能会有一串孤立不动点 (t_n) 收敛于 0. 因而， C 就是通过 $T(t_n)$ 的极线环的极限. 现在要证明的是，polycycle 不可能是极线环的极限，也就是说，如果 f 不是恒等映射，则 0 就是孤立不动点. 然后，由此及 Poincaré-Bendixson 定理就可推出极线环的有限性. Il'yashenko 关于有限性猜想的证明在 [I] 中给出， Ecalle 的，在 [E] 中. Ecalle 使用了他的广义渐近展开理论 (以及 resurgence) 来研究回归映射 f.

最后，我要提一下问题 B 还有一个 "线性化" 的形式 [A–I].

问题 17 平方和问题： "*将正定形式表成平方和.*"

这里 "形式" 是指 n 元实系数齐次多项式， "正定" 则是指变元为实值时该多项式的值恒非负.

正定形式总可以表示为某些形式的平方和的商吗？

这一直是实代数几何中的一个主要问题.

> **Emil Artin 定理**(1927): 设 X 为 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{Q}$ 上的不可约代数簇，设 f 为 X 上的有理函数. 如果 f 在 X 所有实点上的值 (如果有定义的话) 都是正的，则 f 在 X 的函数域中可以写成平方和 (如果 X 定义在 $\mathbb{Q}$ 上，则函数的系数也可取在 $\mathbb{Q}$ 中).
>
> **Dfister 定理**(约 1970 年): 设 X 为 $\mathbb{R}$ 上 d 维不可约代数簇. 若 f 在 X 的函数域中为正的 (含意同上)，则 f 可以写成至多 2^d 个平方之和.

Hilbert 已经研究过了在何种条件下， n 元 m 次齐次多项式可以写成齐次多项式的平方和. 近来，对解析函数，可微函数以及 Nash 函数也研究了类似问题；见 [B]. 实代数几何正在引起新的兴趣，因为它与逻辑有关系 (Tarski 与 Seidenberg 消去原理、模型论)，也与工业应用有关系 (机器人). 但是，从根本上说，实代数几何比复代数几何要更为复杂.

问题 18 "*用全等多面体来构造空间.*"

这个问题可以分成三部分：

A: "*证明：在 n 维欧氏空间中仅有有限多种位移群，其基本域为紧集.*" 换句话说，要决定 $\mathbb{R}^n$ 的等距变换群 $E(n)$ 的离散子群，使得 $\mathbb{R}^n$ 的商空间为紧的. 1910 年， Bieberbach 证明了这一结果. 对这些群加以分类是结晶学中一个重要问题，并且它能推广为关于 Lie 群的格的问题.

B: "*用一个不是 A 中基本域的多面体来填满整个空间.*"

GR.[M] 中 J. Milnor 的话今天依旧适用：这是今天非常活跃的一个课题 [G–S1]. 最重要的进展有 Penrose 铺嵌理论 [P] 以及密切相关的及常晶体结构的物理问题 (见 [J])，还有 Thurston 的自相似铺嵌理论 [T].

C. "球堆积问题. 在任意维数的空间中，应怎样堆放相同半径的球，才能使堆积的密度达到最大？

从 Hilbert 的文章来看，他对这个问题会有进展是没有信心的. 平面上正六边形的堆积是最密的 (在 1882 年由 Thue 证明，并由 Fejes 于 1940 年补全). 但在空间的相应问题还没有解决. 就在最近，Hales 取得了一些进展. 对中心位于一个网格上的球来说，这个问题直到 8 维都解决了. 这一课题有许多影响：在数的几何上的应用，编码理论与球堆积理论的深刻联系，还有已知最密网格的极为丰富的几何学.

接下去就是分析了，在谈正题之前，Hilbert 提出了一个一般的问题：应该选哪类函数来研究呢？可微函数呢？解析函数呢 ……？不过，在我看来，还有其它一些种类的函数也应给予充分的注意，例如，用关于导数的不等式来定义的函数类 (Gevrey 函数类)，或者是作为某类微分方程解的函数 (可微代数函数).

问题 19, 20 及 23 偏微分方程：变分法与 Dirichlet 问题.

变分法的范围太广泛了 (有限元法，控制论)，这里不可能全都讲到. 变分法在研究非线性现象时 (Plateau 问题，极小曲面方程) 起着关键作用，在最优控制中、以及对数学在工业中的应用也是如此. 首先，让我们紧接着 James Serrin 的阐述 (GR. [M]) 指出第 20 问题的进展包括非正则系数线性椭圆方程组的研究与非线性椭圆方程 (调和映射) 的研究；大范围几何学中的正则性问题，例如 Schoen 与 Uhlenbeck 的工作 (见 GR.[C] 中 Karen Uhlenbeck 的文章)；力学 (弹性问题)，或者最近的液晶研究 (GR. [I], 1988 与 1990). 近年来，推广变分法的研究 (23 问题) 取得了极大的进展. 一个例子就是 Bahri 关于三体问题存在周期解的工作.

问题 21 Fuchs 方程的单值性. "是否总存在一个 Fuchs 型线性微分方程，它具有任意给定的奇点与单值群 (monodromy group) 呢？

给定了奇点与单值群之后，在 Riemann 球面上下述对象的存在性似乎是可以证明的：

A: Fuchs 方程，即一阶线性微分方程，其单值矩阵在给定的奇点仅有单极点；

B: 要求所有解都有正则奇点，即在扇形区域内保持适度的增长 (这正是 Deligne 讨论的问题 [D])；

C: Fuchs 方程组.

"Fuchs" 蕴含奇异正则，但反之则不然. Plemelj (1930) 声称解决了 A. 然而，他的证明有错 (见 GR. [E], vol. 1)，已经有了反例 (见 [B] 中的叙述).

问题 22: 解析曲线的单值化.

这是很多分支汇合到一起的一个好例子：拓扑学，复函数，群论，偏微分方程，……. 最近的进展主要是向高维的推广 (Griffiths).

一些思考

有些小问题，似乎导入死胡同，似乎没有前途，但我们却不应忽视它们. Hilbert 问题中有很多这样的小问题，但却导致了重要的发展 (尤其在几何学中).

从那以来，这种现象就一再发生：

Henon 吸引子；

Penrose 非周期铺嵌，物理学家研究它， Connes 也研究它……

……

考察 Hilbert 所提的全部问题以及由此而产生的工作，我们清楚地看到，它们与本世纪数学的一些重要部分有联系. 它们是许多数学家努力工作的主要动因：这一世纪中谁不梦想解决一个 Hilbert 问题呢？但是，让我们摆脱 Hilbert 的崇高声望的影响，局部地来看待他提的问题. 那么，这些问题中缺少某些重要部分 (泛函分析，测度论)，对另一些部分也说得不多 (拓扑学 —— 当然 Poincaré 在这方面做了些工作. 一些数学家还认为， Hilbert 某些问题引发的兴趣有些过分. J. Dieudonné[LeL] 认为这些问题中有相当的一部分是 "孤立的". 不过，这种批评并不正确，例如，从最近有关 Fermat 猜想的 "多方位" 工作就可以看到这一点. 巴黎会议上没有谈到的某些问题 (问题 3, 5 及 15) 之所以能传播也得益于这位大数学家的声望.

问题还是纲领？ 从与 Minkowski 的通信可以看出、 Hilbert 必定梦想过为 20 世纪数学家写一个行动纲领 —— 至少是最初几步怎么做. 这与他对数学的结构以及数学中心地位的看法是一致的： Göttingen 是中心、数论又在数学的中心……. Ostrowski(译按：《钢铁是怎样炼成的》的作者) 对另一行动纲领的伟大倡导者，列宁，不是也有非常类似的想法吗？由于必然缺少具体的实现步骤，所以 Hilbert 的问题与其说是一个行动纲领，还不如说是一个对于未来的设想、它体现出 Hilbert 最珍视的某些想法：

数学家解决危机的能力 (没有不能解决的问题、这与 Poincaré 的辩证观点不同)；

数学中以数论为中心的深刻的统一性；

数学是独立于物理科学的.

Hilbert 在巴黎演讲中想要谈及的另一主题是纯数学与物理学的关系. 后来在 1930 年他退休之后，成了 Koenigsberg-Kaliningrad 的荣誉市民 (这是 Kant 和 Jacobi 生活过的城市)，他终于谈到了这一主题. 他将他的发言在当地广播电台的一次采访中做了总结. 他引用了 Kant 的一句话，就象做出证明一样地断言：

我们必须知道、我们必将知道.

在这句话中， Hilbert 将为纯数学的辩护与自已关于数学万能的坚定信念连为一体. 在这句话中，我们听到了 Hilbert 的开怀大笑. 但它到底是什么意思呢？是什么样的直觉在起作用呢？因为两个月后、 Monatshefle für Mathematik(数学月刊) 就收到了二十五岁的数学家 Kurt Gödel 寄来的一篇文章…….

昨天，今天与明天 随着 2000 年的临近，人们不由自主地想象 —— 尽管这样做有些玄乎 —— 会有人做与 Hilbert 类似的事. 实际上、 Hilbert 之后，确有其他数学家敢于设想一些部分的行动纲领 (例如 A. Weil[LeL]、或者 F. Browder 召集的小组 [M]、最后还有 A. Grothendieck 的 "纲领大纲"[G]).

是幸运的机会，还是一个时代结束的标志？ Klein 的《数学科学百科全书》

[E] 在今日的出版也许可以起到和前者类似的作用. 但是, 我们又该如何想象继之而来的 "新的 Hilbert 问题" 呢?

在最近的 20 年里, 数学进展的方式发生了巨大的变化. 在本世纪前一段时间, 直到六十年代为止. 数学基本上是依照内在逻辑的推动向前发展, 也就是在 Hilbert(及其门徒 Bourbaki) 的引导下发展. 但在今天、广义的 "外部需要" 才是推动数学发展的主要动力. Poincaré 报复了. 信息处理的高度电子化使理论与应用之间有了一个 "正反馈". 这其实也就是《数学科学百科全书》编者所说的话 (见 vol. 1)、他们在前言中谈到了 "数学的工业化". 举几个例子吧:

计算机科学在逻辑研究中的启示作用 [I];

编码问题、密码学以及数论中的信号理论; 在这一领域中用最强大的计算机所做的 "实验" 研究;

理论物理与数学的重新融合 (1990 年 Fields 奖);

拓扑学与形式计算 (F. Sergeraert [I, 1990]);

非线性系统 (混沌, K-dV 方程, ……);

常平均曲率的极小曲面 (在等离子体界面上的应用).

将这一时代与其它时代对比, 可以知道, 数学发展的这一新特征很有深入研究的必要. 对此, Jacques-Louis Lions 在谈到最优控制理论时做了概括 [L]:"商业, 实践中的 Hilbert 纲领"(Kalman 滤波在空中客车的控制上有重要作用).

这一变化自然会带来社会后果、使数学部落与其它文化的人种靠近: 为项目竞争, 军用项目越来越多, 研究方式越来越浪漫 (应该梦想、"但也许不应有太多的梦想"[F]).

在另一方面, 即数学与哲学的关系上, 我想指出 [K2], 但特别请参考 [C'].

Hilbert 的话 "我们必须知道", 今天还要加上一句: "我们要行动". 也许, 可以想象这样一个 "二十一世纪的数学纲领", 它由数学家与其他科学家共同研究创作而成, 它会提出一些重要的科学问题让数学家觉得值得为之努力 (Feynman 积分, 湍流、复杂系统, 理论生物学、认知科学, ……), 也许还应该从真正的社会需要中做出一些选择.

这样一种纲领如果真的使数学运作起来的话、Hilbert 会为之而笑 —— 开怀大笑吗?

一般参考文献 (GR.)

[C] International Congress of Mathematicians, Kyoto, 1990. Proceedings, Mathematical Society of Japan/Springer-Verlag, Tokyo. 1992.

[C'] P. Cartier, *La pratique—et les pratiques—des mathématiques*, in Encyclopédie plilosophique universelle, vol. 1, 1991.

[D] Ein Jahrhundert Mathematik 1890–1990, Vieweg & S., 1990. Review in Mathematical Intelligencer

13(1991), no. 4, 70-74.

[E] Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Heidelberg. Springer-Verlag (1990) (Russian orginal Moscow, 1985.)

[F] J. M. Fontaine, *Valeurs Spéciales des fonctions L des motifs*, Sémin. Bourbaki (1992), Exposé 751. Astérisque 206, (1992).

[G] A. Grothendieck, Esquisse d'un programme. Dossier de candidature au C. N. R.S., 1985.

[H] D. Hilbert, *Sur les problèmes futurs des mathématiques*, in Proceedings of the Second International Congress of Mathematicians, Paris: Gauthier-Villars (1902), pp. 58–114.

[I] Images des mathématiques, Annual Supplement to Courrier du CNRS, CNRS, Paris.

1985: J. F. Boutot and L. Moret-Bailly, Equations diophantiennes: la conjecture de Mordell. Images des nombres transcednants, d'après P. Philippon.

1988: M. Parigot, Preuves et programmes; les mathématiques comme langage de programmation.

J. M. Ghidaglia and J. C. Saut, Equations de Navier-Stokes, turbulence et dimension des attracteurs.

1990: F. Sergeraert, Infini et effectivité: le point de vue fonctionnel. F. Bethuel, H. Brezis, J. M. Coron, and F. Helein, Problèmes mathématiques des cristaux liquides.

[K] J.-M. Kantor, *Hilbert(Problèmes de)*, in Encyclopaedia Universalis (1989), vol. 11.

[K2] J.-M Kantor, L'intuition en équations, Report on the Kyoto Congress. Le Monde (August 1990).

[LeL] A. Blanchard, Les grands courants de la pensée mathématique (F. LeLionnais, ed.), (1948), new edition 1962, Paris; 特别是 J. Dieudonné, R. Godement, A. Weil 的文章.

[L] J.-L. Lions, L'Ordinateur, nouveau Dédale, Daedalon Gold Medal Lecture, 1991.

[M] Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems (F. Browder, ed.), Providence, RI: American Mathematical Society(1976).

[Ma] Yu. I. Manin and A. A. Panchishkin, Number Theory I: Introduction to Number Theory, in Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Heidelbert: Springer-Verlag (1993).

[P] H. Poincaré, L'avenir des mathématiques, International Congress of Mathematicians, Rome, 1908.

[R] C. Reid. Hilbert, New York: Springer-Verlag (1970).

针对具体问题的参考文献

问题 1 与问题 2

[B] J. Y. Bouleau and A. Louveau Girard, Cinq conférences sur l'indécidabilité, Paris: Presses de l'Ecole nationale des Ponts et Chaussées (1982).

[G] E. Nagel, J Newman, K. Gödel, and J.Y. Girard, Le théorème de Gödel, Paris: Seuil (1989).

问题 3

[A] Agrégation de mathématiques, problèmes de mathématiques générales, Revue de mathématiques spéciales, 1985-1986, Paris, pp. 139-150. Vuibert.

[B] V. Boltianski, Hilbert's Third Problem, New York: Wiley (1978).

[C] P. Cartier, Decomposition des polyèdres le point sur le troisième problème de Hilbert, Sémin. Bourbaki (1984-1985), No. 646.

[S] G. Sah, Hilbert's Third Problem: Scissors Congruence, London: Pitman (1979).

问题 5

[A] J. Aczél, *The state of the second part of Hilbert's fifth problem*, Bull. Am. Math. Soc. **20**(1982).

[G] M. Gromov, Groups with polynomial growth and expanding maps, Publ I.H.E.S., no. 53.

[S] I. Sillmann, Every proper smooth action of a Lie group is equivalent to a real analytic action a contribution to Hilbert's fifth problem, M. P. I. Mathematik, Bonn, 1993.

问题 6

[B] P. Bohl's Fourth Thesis and Hilbert's Sixth Problem, Moscow: Nauka (1986) [in Russian].

问题 7

[B–M] A. Baker and D. W. Masser (eds.), Transcendence Theory, Advances and Applications, New York: Academic Press (1977).

[B–W] D. Bertrand and M. Waldschmidt (eds.) , Approximations diophantiennes et nombres transcendants, Basel: Birkhäuser (1983).

[B] A. Baker (ed.), New Advances in Transcendence Theory, Cambridge: Cambridge University Press (1988).

[P] P. Philippen (ed.), Approximations diophantiennes et nombres transcendants, de Gruyter (1992).

问题 8 与 9

[B] M. V. Berry, *Semiclassical formula for the number variance of the Riemann zeroes*, Nonlinearity **1**(1988), 399–407.

[B–I] E. Bombieri and H. Iwaniec, *On the order of* $\zeta(\frac{1}{2}+it)$, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **13**(1986), 449–472.

[G–K] Graham and Kolesnik, Van der Corput's Method of Exponential Sums, Heidelberg: Springer-Verlag (1991).

[I] A. Ivic, The Riemann Zeta Function, New York: Wiley (1985).

[T] E.C. Titchmarsh, The Riemann Zeta Function, Oxford: Oxford University Press (1986).

问题 10

[M] Yu. Matiyasevich, The Tenth Problem of Hilbert, Moscow: Nauka (1993) [in Russian].

[MI] Yu. Matijasevich, *My collaboration with Julia Robinson*, Mathematical Intelligencer **14**(1992), no. 4, 38–45.

问题 12

[K–S] K. Kato and S. Saito, **Global class field theory of arithmetical schemes,** Contemp. Math. **55**(Part I) (1986), 5–331.

[S–T] G. Shimura nd Y. Taniyama, *Complex multiplication of algebraic varieties and its application to number theory*, Publ. Math. Soc. Japan **6**(1961).

问题 13

[D] J. Dixmier, Histoire du treizieme problème de Hilbert, Seminaire d'histoire des mathématiques de l'Institut Henric Poincaré, 1991-1992.

[JPK] J.-P. Kahane, *Le treizième probleme de Hilbert*: un carrefour de l'analyse, de l'algebre et de la géométrie, Cahiers Sémin. Hist Math Sér, 1, **3**(1982).

[R] J.J. Risler, Complexité et géométrie réelle, d'après A. Khovanskii, Sémin. Bourbaki (1984 1985), No. 637.

[L] V.Y. Lin, *Superposition of algebraic functions*, Funct. Anal. ego Prim. **10**(1976), 32-38.

问题 15

[L] A. Lascoux, *Anneaux de Grothendieck de la variété des drapeaux*, in The Grothendieck Festschrift, Vol. III, Basel: Birkhäuser (1993), pp. 1-34.

[S] P. Samuel, Sur l'histoire du quinzième problème de Hilbert, Gazette des Mathématiciens (1975), (Oct. 1974), 22–32.

问题 16

[A–I] V. Arnold and Yu. Il'yashenko, Ordinary differential equations, in Dynamical Systems–I, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Heidelberg: Springer-Verlag (1988).

[B] J. Bochnak, M. Coste, and M F. Roy, Geométrie algébrique réelle, Heidelberg: Springer-Verlag (1986).

[E] J. Ecalle, *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac*, Paris: Hermann (1992); and Six lectures on trousseries, analysable functions, and the constructive proof of Dulac's conjecture, in Bifurcations and Periodic Orbits of Vector Fields (D. Schlominck, ed.), Kluwer Acad. Publ. (1993). pp. 75-184.

[I] Yu. Il'yashenko, Finiteness Theorems for Limit Cycles, American Mathematical Society Providence, RI:(1991).

[K] V. Kharlamov and I Itenberg, *Towards the maximal number of components of a non-singular surface of degree 5 in RP3*, Preprint (1993).

[M] R. Moussu, Le problème de la finitude du nombre de cycles, d'après R. Bamon et Y. S. Il'yashenko, Sémin. Bourbaki (1985–1986), No. 655. Astérisque, 145–146 (1987).

[R] J.J. Risler, Les nombres and Betti des ensembles algébriques réels, une mise au point, Gazette des Mathématiciens (1992).

[V] O. Viro, *Progress in the topology of real algebraic manifolds*, in Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Warsaw, 1983, pp. 595–611.

[Y] J.-C. Yoccoz, Non-accumulation des cycles limits, Sémin. Bourbaki (1987–1988), No. 690.

问题 17

[BS] H. Benis-Sinaceur, De D. Hilbert à E. Artin: *Les différents aspects du dix-septième problème de Hilbert et les filiations conceptuelles de la théorie des corps réels clos*, Arch. Hist. Exact Sci. **29**(3)(1984), 267–286.

[K] A. Khovanskii, Fewnomials, Providence, RI: American Mathematical Society (1991).

问题 18: A 与 B

[D–G] L. Danzer, B. Grünbaum, and G. C. Shephard, *Does every type of polyhedron tile three-space?* Topol Struct. **8**(1983).

[D–K] M. Duneau and A. Katz., Cristaux apériodiques et groupe de l'icosaèdre, Palaiseau, France: Publications du Centre de Physique théorique, Ecole polytechnique.

[G–S] B. Grünbaum and G. C. Shephard, *Tilings with congruent tiles*, Bull. Am. Math. Soc **3**(1980), 951–973.

[G–S1] B. Grünbaum and G. C. Shephard, Tilings and Patterns, New York: W. H. Freeman (1987).

[J] M. Jaric, Introduction to the Mathematics of Quasicrystals, New York: Academic Press (1989).

[P] R. Penrose, *Pentaplexity*, Eureka **39**(1978), 16–22; *Pentaplexity: a class of non-periodic tilings of the plane*, Mathematical Intelligencer **2**(1979), no. 1, 32–37.

[T] W. Thurston, Groups, Tilings, and Finite State Automata, Providence, RI: American Mathematical Society (1989); Research Report GCG-1, Geometry Supercomputer Project, University of Minnesota, Minneapolis (1989).

问题 18: C

[C-S] J. H. Conway and N.J. Sloane, Sphere Packings, Lattices and Groups, New York: Springer-Verlag (1988).

[O] J. Oesterlé, Empilement de sphères, Sémin. Bourbaki(1989–1990), No. 727; "Les sphères de Kepler," video (series "Mosaïque mathematique"), Paris: Productions "Les films d'ici."

[S] F. Sigrist, *Sphere packing*, Mathematical Intelligencer **5**(1983), 34–38.

问题 19, 20 与 23

[V] C. Viterbo, *Orbites périodiques dans le problème des trois corps*, Sémin. Bourbaki (1992–1993), No. 774.

问题 21

[B] A. Beauville, *Equations différentielles à points singuliers réguliers d'après Bolybrukh*, Sémin. Bourbaki (1992–1993), no. 765. Astérisque, **216**(1993).

[D] P. Deligne, Equations différentielles à points singuliers réguliers, Heidelberg: Spring-Verlag (1970), p. 136.

（余建明 译　潘建中 校）