综合报告

常微分方程五十年*（上）

福原满洲雄

§1. 昭和初期的状况

当今，在数学的各个分支里，发表了许多高水平的研究论文，以此回忆昭和初期①日本数学界的情况，恐怕很难想像当时的水平吧！以高木贞治先生为代表的代数学虽达到了高水平，但其他分支远非如此。在分析领域中，东京大学的辻正次和清水辰次郎关于复变函数论的研究以及东北大学泉信一关于实变函数论的研究诚然引人注目，然而，有关微分方程的研究不能说是活跃的。翻翻吉江琢儿先生在东京大学的讲义[45]就明白，虽说讲解详细清楚，但不是高水平的著作。据说京都大学松本敏三先生的讲义也好懂，但也不能认为是高水平的。在东北大学，微分方程课是由几位先生轮流担任主讲，话虽如此，执牛耳者还是要推藤原松三郎先生，藤原先生非常博学，作为一位研究者也公认是优秀的。藤原[8]的内容尽管几乎只限于讨论线性方程，但以当时的标准衡量，仍不失为高水平著作。虽然微分方程并非藤原先生的专长，却写出了出色的专著。藤原先生认识到微分方程的重要性，为在日本促进其研究的发展，在其他领域也缺乏专著的当时，勇于执笔写出专著，确实令人敬佩。吉江先生为了培养青年研究人材，当在校学生把自己的钻研结果写成报告提出，如被认为那怕是一点新结果，便免去该生的考试，并且还将该报告发表于当时由他负责编辑的《日本数学辑报》（Japanese Journal of Mathemtics）。因为是中期的学生（当时大学是三年制，二年级称为中期），没有理由要求他们能写出进一步更深入的论文，所发表的报告仅涉及常微分方程的基础定理，那是不得已的事。姑不论内容如何，由此使得与常微分方程有关的论文逐渐地多起来了。其间，京都大学松本先生门下的岡村初露锋芒，发表了关于常微分方程解的唯一性的论文。这样一来，国外也开始注意到日本的基础定理的研究。

从1934年起经过两年半的时间，岩波讲座《数学》出版了。这套丛书几乎囊括了数学的各分支，在当时可说是划时代的创举。其中，福原写了常微分方程式论[9]。

下面讨论中，把常微分方程的常字省去，简称微分方程。

§2. 复数域中的存在定理

在写成标准形式的微分方程

$$y' = f(x, y) \tag{2.1}$$

* 原题：常微分方程式の50年，Ⅰ.译自《数学》，34:1（1982），164—171页.

① 昭和是日本现天皇的年号，昭和元年是1926年，昭和初期通常指1930年前后. ——校注.

中，y 一般是以复数作分量的向量。如果（2.1）的右端在初值 a，b 的邻域内正则，那么当 $x=a$ 时存在唯一的正则解 $y=b$。这是大家熟知的 Cauchy 存在定理，然而，$x\to a$时满足 $y\to b$的解是否一定在 $x=a$ 正则却是一个问题。在 $x=a$ 不正则的解不存在，这是 Painlevé 的唯一性定理[38]。在复变数的情形，没有比这更深的结果，Painlevé 的唯一性定理在微分方程的解析研究中起着重要的作用，所以要提醒下面使用了奇点处聚值集合这一概念的结果：

如果（2.1）的右端有有限多值，其诸分支都在 (a,b) 处正则，那么，在以 a 为奇点的解在该处的聚值集合不含 b。

在 Riemann 面的概念还不像现在这样得到确切理解的时代，在[37]中，尽管出于必要包含无限多值的情形在内，把超越奇点分成通常超越奇点与本性超越奇点两类，这是值得注意的。

§3. 实域中的存在定理

实变数的情形则大不一样。对于写成标准形式的微分方程，在右端连续的范围内取已知初值的解必定存在，就一个微分方程而言，根据 Peano 证明的定理，如果取已知初值的解不是唯一的，那么其中有最大解与最小解，并且这两个解的表示曲线之间由满足同一初始条件的解曲线（解的图形）填满[39]。

在已知初值的邻域内，考虑一个任意小的邻域，如果在其中取初值的解不唯一，粗略地讲，就是一离开初始点就存在有分支的解曲线，那么，这种（初始）点就叫 Peano 点，Lavrentieff 造出了一个标准形式的微分方程的例子，使得方程右端连续的区域内的每一点都是 Peano 点，这表明了唯一性问题有其复杂的一面[21]。

Perron 把 Peano 定理作了下述改进[40]。

设单个微分方程

$$y'=f(x,y) \tag{3.1}$$

的右端$f(x,y)$在

$$a\leqslant x\leqslant a',\quad \underline{\omega}(x)\leqslant y\leqslant \overline{\omega}(x) \tag{3.2}$$

内连续，$\underline{\omega}(x)$，$\overline{\omega}(x)$在$[a,a']$连续，右可微，且满足$\underline{\omega}(x)\leqslant\overline{\omega}(x)$和

$$\begin{cases}D^{+}\underline{\omega}(x)\leqslant f(x,\underline{\omega}(x)),\\ D_{+}\overline{\omega}(x)\geqslant f(x,\overline{\omega}(x)).\end{cases} \tag{3.3}$$

那末，在区间$[a,a']$内存在解 $y(x)$，满足

$$\underline{\omega}(x)\leqslant y(x)\leqslant\overline{\omega}(x), \tag{3.4}$$

并且，$x=a$ 时取初值 $b\in[\underline{\omega}(a),\overline{\omega}(a)]$。这样的解中存在最大解，最小解，它们之间的部分由取得同一初值的解曲线填满。

这结果诚然改进不大，不过由此导出了比较定理，使微分方程基础定理开始发展。把这定理推广至微分方程组则是很自然的问题。

对于解的存在条件，福原[10]提出并解决了下述的问题：

设 y 是 n 维向量变量，（3.1）的右端在区域 E 有定义且连续，E 是集合 D 的闭集，试求从 E 的各点能向右作出解曲线的充要条件。

南云[28]改进了福原的结果，为简单计，设 D 是开集合，E 满足下述条件：

设 $E_x=\{y;(x,y)\in E\}$，则对各 $(\xi,\eta)\in E$ 有

$$\lim_{x-\xi+0}\inf \operatorname{dist}(\eta+(x-\xi)f(\xi,\eta),E_x)=0, \tag{3.5}$$

此处

$$\operatorname{dist}(y,A)=\inf\{\operatorname{dist}(y,z);z\in A\}.$$

而且含于E的解曲线恒可向右延拓至D的边界。

在单个微分方程（3.1）的情形，可取D为半平面$x<a'$，E是从（3.2）中除去使得$x=a'$的点（a', y）后得到的区域，从（3.3）推出（3.5）。而且任一解都能延拓至$x=a'$，所以在 Perron 存在定理的条件下，在$[a,a']$有解这一结果可推广至方程组的情形。

§4. 曲线族的理论

对于方程组（3.1），Kneser[18] 证明了：利用与x轴垂直的超平面去截通过一点的解曲线集合，那么截口是连续统。南云不知道这结果，关于微分不等式，他发现了可以说是和 Kneser 相同的结论[26]。发表 Kneser 的论文的杂志，在东北大学是有的，但那时信息的传播还不像今天这样方便，所以南云是不知道这个消息而独立地取得了同样的结果的。

Peano 定理中，表示最大解、最小解的两曲线，它们之间的部分由满足同一初值条件的解曲线填满，从而，如果利用与x轴垂直的直线去截该部分区域，那么截口是直线段，Kneser 定理正是把这事实推广了。于是发生了一个问题，即 Kneser 定理中什么东西相当于最大解、最小解？解决这一问题的是福原[11]。其结果可叙述如下：

存在这样的解曲线，从满足同一初值条件的解曲线填满的集合的边界点出发，沿边界又回到初值点。

福原最初的证明很难懂，在试图改进证明的过程中发现：满足下述三条件的曲线族$\mathscr{F}$，虽然与微分方程无直接关系，但却有同样的结论：

（i）曲线族$\mathscr{F}$由定义在$[a,a']$上的连续函数的图象组成，这些曲线填满$x=a$与$x=a'$这两张超平面之间的部分。

（ii）曲线族等度连续，关于一致收敛拓扑是闭的。

（iii）曲线是可结合的，即两条曲线如果共有一点，那么与此点左侧的曲线以及右侧的曲线一致的曲线仍属于$\mathscr{F}$。

属于$\mathscr{F}$的曲线叫特征线。设E是含于两张超平面$x=a$与$x=a'$之间的一个集合，$R(E)$表示通过E中各点的特征线所填满的集合，称为E的放出域，$R^+(E)$表示位于E的右边那一部分（包含E），叫做E的右放出域，如果E是一个点，用与x轴垂直的超平面去截$R(E)$，那么截口成为连续统，这一性质叫做性质（K）。因此，如果f在两张超平面$x=a$与$x=a'$之间有界连续，则 Kneser 定理表明解曲线族具有性质（K）、$\mathscr{F}$具有性质（K）时，就叫 Kneser 族。

$E=\{P\}$时，如果存在从$R(E)$的边界上的点出发沿边界回到P的特征线，这样的性质就叫做性质（H）。只由边界点组成的特征线叫做表面特征线。福原的结果表明 Kneser 族具有性质（H）。可以证明[32]：把表面特征线向前端延长会全部进入$R(E)$的内部。

$f(x,y)$虽然不连续，但只要所谓的 Carathéodory 型的情形，即作为x的函数可测、一致可积、关于y连续，这时，如果除测度为 0 的集合外（即几乎处处）满足微分方程(3.1)

的绝对连续函数也叫做解，那么，和右端 f 连续的情形一样，不仅存在解，并且解曲线族具有性质（K）[4]。从而性质（H）也成立。

南云所处理的微分不等式可作下述推广：

设对于 $R^1 \times R^n$ 中区域 D 的各点 (x,y) 有 R^n 中一个有界闭集 $F(x,y)$ 与之对应，称为在 (x,y) 处的方向体，而

(4.1) $$F = \{F(x,y);\ (x,y) \in D\},$$

则称为方向体的场。适当选取收敛于 0 的降列 $\{h_k\}$，用 $D^+y(x)$ 表示满足

$$\frac{y(x+h_k) - y(x)}{h_k} \to b'$$

的点（向量）b' 的集合。这时，满足

(4.2) $$D^+y(x) \subset F(x, y(x))$$

的连续函数 y 叫做方向体场 F 的特征函数，而 y 的图象叫做特征线．若各 $F(x,y)$ 仅由唯一的元素 $f(x,y)$ 组成，则（4.2）与微分方程（3.1）是一回事。

南云所处理的微分不等式中，$F(x,y)$ 由

$$F(x,y) = \{(z_1, \cdots, z_n);\ \underline{f}_j(x,y) \leqslant z_j \leqslant \overline{f}_j(x,y)\}$$

定义，这里假定 $\underline{f}_j$ 下半连续，$\overline{f}_j$ 上半连续。

（4.2）的右边是紧致凸集，作为 x, y 的函数如果半连续，则 F 的特征线族是Kneser族，具有性质（H）。Marchaud[23]，Zaremba[46] 曾讨论过这种情况。当时，这些事实我们是容易推测到的，不过不认为有多么重要，未予深究。

§5. 与最佳控制问题的关系

战后，工程控制论面目一新，在数学中也提出了新问题，这和方向体场论密切相关。

设变量 x 表示时间，y 表示状态（或反应），u （x,y的函数）表示输入（控制），它们之间的关系满足一个微分方程

(5.1) $$y' = f(x, y, u).$$

$y(x), u(x,y)$ 是向量值函数，它们的维数可以不一样。给了依赖于 y 与 u 的实值泛函

$$J[u] = \int_{x_0}^{x_1} g(x, y(x), u(x, y(x)))\,dx,$$

对于一定范围内的函数 u （叫做容许函数），使 $J[u]$ 取最小值的问题就是一个最佳控制问题。

表面上似乎可视为变分学的问题，其实不然。在古典变分学中，是在第一变分为 0 的条件下求解。粗略地讲，这解是在容许范围的内部，但我们现在的问题，解是属于容许范围的边界。为了理解两者的差别，只需注意，在微分学的最大、最小问题中，当函数值在变域的边界上达到最大或最小时，在导数为 0 处的函数值并不是最大最小问题的解。

对于各 (x,y)，给了与之相应的集合 $\Delta(x,y)$（容许域），设 $u(x,y)$ 满足条件：$u(x,y) \in \Delta(x,y)$。由于 u 关于 x 未必连续，所以数学上要加上所谓的可测条件。由

(5.2) $$F(x,y) = \{f(x,y,u);\ u \in \Delta(x,y)\}$$

定义了方向体场F。(5.1) 的解是场F的特征线，反之亦然。这时，(5.1) 的右端 u 是x,y的函数，故应视为 Carathéodary 型微分方程。

这样一来，我们的问题就与控制问题发生了关系。指出这一点的是 Ważewski[44]，他是 Zaremba 论文的审稿人，所以知道 Zaremba 的结果，战后，他指出了 Zaremba 的结果与最佳控制问题的密切关系。问题的实质不要求 $F(x,y)$ 一定是凸的，现在就这种情形简单说明 Ważewski 的想法于下：

用 conv E 表示包含紧致集E的最小凸集。E 如果是凸集，E 的极端点(不是联结E中任何两点的线段的内点）的集合叫做E的极端，用tend E表示，E 不是凸集时显然也有

(5.3) $$\text{tend conv } E \subset E.$$

如果$F(x,y)$不是凸集，可以不考虑$F(x,y)$ 而考虑有向体 conv $F(x,y)$ 的场 conv F.它的特征线的集合是 Kneser 族。特征线是方向体 tend conv $F(x,y)$ 的场 tend conv F 的特征线的极限。由于包含关系 (5.3)，tend conv F 的特征线是F的特征线。

现在来考虑方向体场F。设E是超平面 $x=x_0$ 的紧致集，C 是 R^n 的紧致集，存在 $x>x_0$，使得

$$C\cap\{y;(x_0,y)\in E\}=\varnothing$$

且

$$C\cap\{y;(x,y)\in R^+(E)\}\neq\varnothing.$$

这意味着在有限时间内可能达到C。设这样的x的最小值为x_1，则存在点 (x_1,y_1)，使得

$$y_1\in C,\qquad (x_1,y_1)\in R^+(E),$$

因为它是 $R^+(E)$ 的边界点，所以由性质 (H)，从E沿着 conv F的表面特征线能到达 (x_1,y_1)。这可以用F的特征线任意逼近。这样就得到与冲击型 (bang-bang type) 控制有关的结果。据 Ważewski 讲，把控制问题作为有向体场来处理的倾向早已见于 Kalman [16]，Roxin[41]。

南云很早就着手处理微分不等式，也考虑过依赖于任意函数的微分方程[27]。但是，他是着眼于与全微分方程的完全可积条件的关系去处理问题，所以，对我们来讲，控制系统是个未知的问题。直到在布拉格数学家代表大会上听了 Ważewski 的报告，才知道和工程控制的关系，这是何等脱离实际，可以作为数学家与工程师缺乏接触的一例。

§6. 比较定理

微分方程 (3.1) 的解虽然不能直接求出，但如果 $g(x,y)$ 与 $f(x,y)$ 近似，而以$g(x,y)$作为右端的方程

(6.1) $$y'=g(x,y)$$

的解容易求出，那么可以考虑把这个解当作 (3.1)的近似解。为了判断近似解的可靠程度可以利用比较定理。

设 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ 分别是 (3.1)，(6.1) 的解，在 (6.1) 中令 $y=z+\varphi(x)$，则有

(6.2) $$z'=g(x,z+\varphi(x))-f(x,\varphi(x)).$$

如果z趋近于0，上式右边就小。z的这个微分方程以$\psi(x)-\varphi(x)$ 为解，这里要求 $\psi(x)-\varphi(x)$ 很小。于是问题就在于求出它所满足的不等式。若取 $g(x,y)$ 就是 $f(x,y)$，则$\psi(x)$也是 (3.1) 的解。如果 $\psi(x)-\varphi(x)$ 能够与任意小的量比较，那么 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 一致，于

是得到唯一性定理：（3.1）的解中，满足与 $\varphi(x)$ 一样的初值条件的解只有 $\varphi(x)$。为了这个目的，就要寻求一个容易使用的比较定理。

在（3.1）是单个微分方程的情形，考虑满足

(6.3) $$f(x,y)<F(x,y)$$

的 $F(x,y)$ 作右端的微分方程

(6.4) $$Y'=F(x,Y).$$

这时，（6.4）的解对于（3.1）是上函数，（3.1）的解对（6.4）是下函数，所以，如果 $y(x)\leqslant Y(x)$ 对 $x=a$ 成立，则此不等式对 $x>a$ 也成立。如果把（6.3）换为较弱的不等式

$$f(x,y)\leqslant F(x,y),$$

那么由 Perron 存在定理知，（3.1）与（6.4）的最大解之间，最小解之间同样可作比较。这样的比较定理早已见于 Bompiani[3]，Montel[24]。把比较定理推广至方程组的工作主要是在德国以及日本进行的。

如果（3.1）是方程组（y 为向量），Kamke[17] 使用满足

$$D^{\pm}S(y(x))\leqslant S(D^{\pm}y(x))$$

的函数 S，这里 $y(x)$ 是左、右可微的任意向量值函数；当 $y(x)$ 是解时，他把 $S(y(x))$ 与实值函数比较，作为这种函数的例子，比如有

$$\max\{|y_1|,\cdots,|y_n|\} \quad 或 \quad |y_1|+\cdots+|y_n|$$

等等。福原指出下述事实[13]：把 S 理解成满足下列条件的连续函数，结果也一样：

(i) $S(y)$ 是凸函数。

(ii) 对于 $0<\lambda<\infty$，$S(\lambda y)=\lambda S(y)$。

如果再增加两个条件：

(iii) $S(-y)=S(y)$，(iv) $S(y)=0\Rightarrow y=0$，则 $S(y)$ 满足范数的条件。

进一步，比较定理可推广至右端 $f(x,y)$ 在初值 a 不连续的情形，这是微分方程的解在奇点处的展开问题中要用到的，下列结果常常使用。

设函数 $S(y)$ 满足 Kamke 条件，并且 $S(y)=0\Rightarrow y=0$；方程组（3.1）的右端在

$$0<x\leqslant\delta,\qquad S(y)\leqslant\rho$$

内连续，并满足 Lipschitz 条件

$$S(f(x,y)-f(x,z))\leqslant AS(y-z)$$

以及

$$S(f(x,0))\leqslant Bx^N,$$

并且 $N>A$，于是

(6.5) $$xy'=f(x,y)$$

在区间 $(0,\min\{\delta,((N-A)\rho/B)^{1/N}\})$ 内有唯一解满足 $y=o(x^A)$，而且

$$S(y(x))\leqslant Bx^N/(N-A).$$

南云关于唯一性的条件[25] 是在用一般的比较定理导出唯一性条件之前得到的，它相当于上述结论中 $A=1$ 的情形，这是因为：如果（3.1）的右端在初值的邻域内连续，那么在 x 的初值 0 处取同一值的两个解的导数在 $x=0$ 取同一值，两个解的差成为 $o(x)$。

从比较定理可以得到充分条件，得不到必要条件。岡村得到的唯一性的充要条件可叙述如下[33,34]。

设恒为 0 的函数是一个解，要使除恒为 0 的函数外不存在初值为 0 的解，其充要条件是存在满足下述条件的函数 V：

$V(x,y)$ 在解曲线上作为 x 的函数是广义减函数，且 $V(x,y)\geqslant 0$；仅当 $y=0$ 时才有 $V=0$。

条件的充分性显然，至于条件的必要性，还有 V 的连续可微性也都可证明。

也许读者已经注意到，岡村函数 V 与 Liapunov 函数有相似的性质，这是因为在处理解的稳定性与唯一性中它们有共同的性质。岡村在战后三年去世，来不及发展他的想法，这很可惜，聊可告慰的是在论文[35]中可以了解到他的思想。

§7. 不动点定理

为了证明解的存在，还有利用不动点定理的方法。设 I 是包含 x 的初值 a 的区间，对于定义在 I 上的函数 φ，令函数

$$\bar{\varphi}(x)=b+\int_a^x f(x,\varphi(x))dx \tag{7.1}$$

与之对应，记成 $\bar{\varphi}=T\varphi$，如果映射 T 存在不动点，即存在 φ，使得 $\bar{\varphi}=\varphi$，那么 φ 就是(3.1)的解，以 a，b 作初值。

最早用不动点定理证明微分方程有解的人是 Birkhoff-Kellog[5]。其方法是：考虑有限集合的增序列 $\{E_k\}$，使得 $\bigcup E_k$ 在 I 稠密；如果存在 φ_k，在 E_k 上满足 $\bar{\varphi}_k(x)=\varphi_k(x)$，则利用有限维空间的 Brouwer 不动点定理。如果从 $\{\varphi_k\}$ 取出收敛子列，则其极限函数满足(7.1)，所以微分方程有解。

在抽象化尚未充分渗透到分析领域的时代，这是崭新的方法。它的构思是有趣的，不过应用上说不上方便。在属于函数族 $\mathscr{F}$ 的函数 φ 中，像上面那样定义了 $\bar{\varphi}=T\varphi$ 后，如果有定理能直接断定存在不动点 $\varphi=T\varphi$，那就很方便了。最早考虑这种不动点定理的人是 Schauder[42]。

他把定义了距离（不限于范数）的线性空间中的紧致凸集取作 $\mathscr{F}$，声称把 $\mathscr{F}$ 映入 $\mathscr{F}$ 的连续映射 T 有不动点。但是因为没有假定空间是局部凸的，南云、角谷等对此提出了疑问，这个定理不假定局部凸是否正确？还未听到什么结果。

Tychonoff[43] 把 Schauder 不动点定理推广至一般的线性拓扑空间，但假定了局部凸。福原和佐藤德意指出，$\mathscr{F}$ 的紧致性假定在应用上未必方便，宁可假设 $\mathscr{F}$ 是凸闭集，$\mathscr{F}$ 中有一个紧致集合含有 $\mathscr{F}$ 对 T 的像。

在有限维的情形，如果 E 是凸集，即使它对 T 的像不含于 E，只要 $I-T$（I 是恒等映射）在 0 点的映射度不为 0，则映射 T 有不动点，对于 Banach 空间中的紧致映射 T，Leray-Schauder[22] 定义了具有同样性质的映射度，并把它用到偏微分方程。南云把映射度的定义推广至局部凸的线性拓扑空间[30]。

在日本，很早就有人认识到应用不动点定理来研究微分方程是有效的，并尝试把不动点定理改成便于使用的形式，为了易于实现这种想法，南云用比较初等的方法定义了映射度，通俗地阐述了它对微分方程的应用[31]。

如果映射不是点与点成对应，而是点与集合成对应，那么满足 $\varphi\in T\varphi$ 的 φ 称为不动点。这自然可以视为把点与点对应的映射定理推广到 T 是半连续紧致映射的情形。其实，Tychonoff 定理正是在各 $T\varphi$ 是凸集的条件下得到推广的[7,15]。

还可以用 Hausdorff，Kuratowski 引入的非紧致测度来推广不动点定理。在有限维空间中有界闭集是紧致集，因此，这样的推广无意义。不过，倘若在 Banach 空间中研究常微分方程，就会成为非常有效的手段。这个方法可用于（3.1）是 Banach 空间中的微分方程，f 是一个紧致映射和一个满足 Lipschitz 条件的映射之和的情形[6]。这样就考虑了用常微分方程的手法处理偏微分方程的问题。

§8. 边值问题

最典型的边值问题是：求二阶微分方程

$$y''=f(x,y,y') \tag{8.1}$$

的解，满足边界条件

$$y(a_1)=b_1,\qquad y(a_2)=b_2, \tag{8.2}$$

其中，边值 a_1,b_1,a_2,b_2 是已知值。这个问题可以形式地推广，研究下述问题：求 n 元一阶微分方程组

$$y'_j=f_j(x_1,y_1,\cdots,y_n)\quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{8.3}$$

的解，满足条件

$$y_j(a_j)=b_j\qquad (j=1,2,\cdots,n). \tag{8.4}$$

福原把这个问题的存在定理成功地用来研究解的性质，因此，南云称它为福原问题。

就二阶微分方程（8.1）而言，可以推广边界条件（8.2），对于 y,y' 的已知线性组合 $L_1(y,y')$，$L_2(y,y')$ 和已知的边值 a_1,b_1,a_2,b_2，研究使

$$\begin{cases}L_1(y(a_1),y'(a_1))=b_1,\\ L_2(y(a_2),y'(a_2))=b_2\end{cases} \tag{8.5}$$

成立的条件。也可以研究（8.1）中的 y 为向量变量，（8.1）为 n 元二阶微分方程组的问题。

边值问题比初值问题复杂，沒有篇幅评述。特征值问题既与边值问题关系密切，本身又有丰富的內容，并且与偏微分方程关系密切，当另文介绍，此地仅就二阶非线性的情形介绍典型的边值问题。

因为 Cauchy 折线法对于证明解的存在不适用，所以过去只利用了逐次逼近法。由于函数空间中的不动点定理已经是众所周知，它成了证明存在性的有力手段。例如，为了证明（8.1）有满足条件（8.2）（$b_1=b_2=0$）的解，令

$$G(x,t)=\begin{cases}(a_2-x)(t-a_1)/(a_2-a_1) & (t<x),\\ (a_2-t)(x-a_1)/(a_2-a_1) & (t>x),\end{cases}$$

对于 $[a_1,a_2]$ 上的连续可微函数 φ，令函数

$$\bar{\varphi}(x)=-\int_{a_1}^{a_2}G(x,t)f(t,\varphi(t),\varphi'(t))dt$$

与之对应，记成 $\bar{\varphi}=T\varphi$，只要证明这样定义的映射 T 存在不动点即可。若 b_1，b_2 不为零，可取未知函数为

$$z=y-\left\{b_1\frac{a_2-x}{a_2-a_1}+b_2\frac{x-a_1}{a_2-a_1}\right\}.$$

对此，南云的下述存在定理[29]是一个显著的结果。

设（8.1）的右端 $f(x,y,y')$ 作为 x,y,y' 的函数在

$$a_1 \leqslant x \leqslant a_2,\quad \underline{\omega}(x) \leqslant y \leqslant \overline{\omega}(x),\quad \underline{\Omega}(x,y) \leqslant y' \leqslant \overline{\Omega}(x,y)$$

上连续，$\underline{\omega}$，$\overline{\omega}$ 在 $[a_1,a_2]$ 上二次可微，且

$$\begin{aligned}
&\underline{\Omega}(x,\ \underline{\omega}(x)) \leqslant \underline{\omega}'(x) \leqslant \overline{\Omega}(x, \underline{\omega}(x)),\\
&\underline{\Omega}(x, \overline{\omega}(x)) \leqslant \overline{\omega}'(x) \leqslant \overline{\Omega}(x, \overline{\omega}(x)),\\
&\underline{\omega}''(x) \geqslant f(x, \underline{\omega}(x), \underline{\omega}'(x)),\\
&\overline{\omega}''(x) \leqslant f(x, \overline{\omega}(x), \overline{\omega}'(x)),
\end{aligned}$$

又设 $\underline{\Omega}$，$\overline{\Omega}$ 在

$$a_1 \leqslant x \leqslant a_2,\quad \underline{\omega}(x) \leqslant y \leqslant \overline{\omega}(x)$$

上连续可微，且

$$f(x,y,\underline{\Omega}(x,y)) - \underline{\Omega}_x(x,y) - \underline{\Omega}_y(x,y)\underline{\Omega}(x,y) > 0,$$

$$f(x,y,\overline{\Omega}(x,y)) - \overline{\Omega}_x(x,y) - \overline{\Omega}_y(x,y)\overline{\Omega}(x,y) < 0$$

成立。再若

$$\omega_1(a_1) = b_1 = \overline{\omega}(a_1),\ \underline{\omega}(a_2) \leqslant b_2 \leqslant \overline{\omega}(b_2),$$

则（8.1）具有满足边界条件（8.2）的解。

与单个一阶方程的情形相比，可以理解，加给 $\underline{\omega}$，$\overline{\omega}$ 的条件是界限。阈村[36]，Knobloch[19,20]改进了这一结果，可以认为，他们研究的问题是加给 $\underline{\Omega}$，$\overline{\Omega}$ 的条件。Knobloch 还证明了存在满足周期条件

$$y(a_1) = y(a_2),\quad y'(a_1) = y'(a_2)$$

的解。福原应用 Kneser 族的理论把这些结果作了统一的讨论[14]。安香在削弱条件 $\underline{\omega}, \overline{\omega} \in C^2$ 的同时，在比（8.2）更广泛的形式下处理了边界条件[1]。

最后，值得注意的是，对二阶线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

利用 Sturn、Picone 的古典结果[2]可得到比较定理。关于这个特殊情形，以后几乎沒有什么需要补充的。

（未完待续）

〔白苏华、胡师度译　江嘉禾校〕

为了预卜数学的前途，眞正的方法是研究它的历史和现状。

——H. Poincaré

数学上沒有眞正的爭论。

——C. F. Gauss

泛函分析五十年*

吉田耕作

0. 序论

这个标题使人回想起1931年，在以Hilbert积分方程论（1904—1910）开创的线性算子理论的历史上，那是特别重要的一年。我们之所以这样说，是因为那一年出版了三本堪称为里程碑的著作，研究了象微分算子那样的不连续线性算子。这三本著作是：

［1］ J. von Neumann: Die Mathematische Grundlagen der Quanten Mechanik, Springer.

［2］ M.H.Stone: Linear Transformation in Hilbert Space and Their Applications to Analysis, Providence.

［3］ S.Banach: Théorie des Opérations Linéaires, Warszawa.

为了便于介绍1931年以后的发展，先扼要介绍以上三本著作。

著作［1］。Hilbert把微分方程问题化为积分方程，当作**有界线性算子的谱理论**来处理。另一方面，为了直接处理象量子力学中的Hamilton算子那样的不连续算子的谱论，von Neumann证明了在（可分的）Hilbert空间中**有稠密定义域的闭线性算子**T中，自共轭算子可以象$T=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE(\lambda)$那样唯一地**谱分解**，他还强调了这是**量子力学的数学基础**。这里，**自共轭算子**是指满足$T=T^*$的算子T，T^*是由$(Tx, y)=(x, T^*_y)$界定的（复）共轭算子，(x, y)表示内积。至于这个定理的证明，则是受到其恩师E.Schmidt的启发，注意到T的Cayley变换$(T+iI)/(T-iI)=U$是**酉算子**（$U^*=U^{-1}$），从而把有界酉算子U的谱分解的证明归结为Hilbert的谱理论。

著作［2］。Stone根据（可分的）Hilbert空间中自共轭算子T的预解式$(T-\mu I)^{-1}$ $(\mathscr{T}(\mu)\neq 0)$的谱分解$\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda-\mu)^{-1}dE(\lambda)$，给出了导致$T$的谱分解方法。［2］还介绍了H.Weyl关于二阶线性常微分方程边值问题的研究（1910）的发展（后来，E.C.Titchmarsh（1946）和小平邦彦（1949）对其中引入的$E(\lambda)$给出了具体的表现）以及E.Hellinger（1909）的关于**自共轭算子酉等价的研究**（后来，E.Wechen（1939）和H.Nakano（1941）在不可分的Hilbert空间中对此加以讨论）等等。

与著作［1，2］有关的是

不可分Hilbert空间（或者叫一般欧氏空间）的研究。1934年，F.Riesz不用X的可分性证明：定义在Hilbert空间X上的**有界线性泛函**f可表示为内积形式$f(x)=(x, y)$，这里

---

* 原题：函数解析50年，译自：《数学》，34：4（1982），66—75。