Maclaurin 不等式和一个推广的 Bernoulli 不等式

Iddo Ben-Ari Keith Conrad

摘要 Maclaurin (麦克劳林) 不等式是一个自然的，但是不平凡的算术 - 几何平均不等式的一个推广. 我们提出一个基于 Bernoulli (贝努利) 不等式类似推广的证明. 本文讨论了 Maclaurin 不等式对于迭代序列和概率论的应用，以及 Maclaurin 不等式和 Bernoulli 不等式的图论形式.

数学中最著名的不等式之一是 算术 - 几何平均不等式 (*arithmetic-geometric mean inequality*): 对于每个正整数 n 和 $x_1,\ldots,x_n>0$, 有

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}, \tag{1}$$

并且不等式是严格的, 除非所有 x_i 均相等. 每个学生, 即使不是不等式的积极使用者, 也知道 (或者应该知道 !) 这个不等式. 你是否知道, (1) 有一个推广，它包含左端平均值与右端 n 次根之间的一些项？Maclaurin 在 1729 年首先叙述了这个推广 [5, 第 80—81 页], 但仍然相对地不熟悉，除非是不等式的爱好者.

为了找出 (1) 中的中间项，我们利用 $x_1,\ldots,x_n$ 的 初等对称多项式 (*elementary symmetric polynomials*), 它们是

$$e_k(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}=\sum_{\substack{I\subset\{1,\ldots,n\}\\ \#I=k}}\prod_{i\in I}x_i,\qquad 1\leq k\leq n.$$

例如，当 $n=3$ 时

$$e_1(x,y,z)=x+y+z,\quad e_2(x,y,z)=xy+xz+yz,\quad e_3(x,y,z)=xyz.$$

作为下述多项式的系数，初等对称多项式是自然产生的:

$$(T-x_1)(T-x_2)\cdots(T-x_n)=T^n-e_1T^{n-1}+e_2T^{n-2}-\cdots+(-1)^ne_n.$$

特别地，有 $e_1=x_1+\cdots+x_n$ 和 $e_n=x_1\cdots x_n$.

每个 $e_k(x_1,\ldots,x_n)$ 是 $\binom{n}{k}$ 项的一个和式，其平均值

$$E_k(x_1,\ldots,x_n)=\frac{e_k(x_1,\ldots,x_n)}{e_k(1,\ldots,1)}=\frac{e_k(x_1,\ldots,x_n)}{\binom{n}{k}}$$

被称为 $x_1,\ldots,x_n$ 的第 k 个 初等对称平均 (*elementary symmetric mean*). 当 $n=3$ 时,

---

译自: Math. Mag., Vol. 87 (2014), No. 1, p. 14–24, Maclaurin's Inequality and a Generalized Bernoulli Inequality, Iddo Ben-Ari and Keith Conrad, figure number 3.

Iddo Ben-Ari 的邮箱地址是 iddo.ben-ari@uconn.edu.
Keith Conrad 的邮箱地址是 kconrad@math.uconn.edu.

$$E_1(x,y,z)=\frac{x+y+z}{3},\quad E_2(x,y,z)=\frac{xy+xz+yz}{3},\quad E_3(x,y,z)=xyz.$$

现在我们可以来叙述 Maclaurin 不等式了：对于 $n\geq 2$ 和正数 $x_1,\ldots,x_n$, 有

$$\boxed{\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\geq\sqrt{\frac{\sum\limits_{1\leq i<j\leq n}x_ix_j}{\binom{n}{2}}}\geq\sqrt[3]{\frac{\sum\limits_{1\leq i<j<k\leq n}x_ix_jx_k}{\binom{n}{3}}}\geq\cdots\geq\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n},}$$

或者，等价地有

$$E_1(x_1,\ldots,x_n)\geq\sqrt{E_2(x_1,\ldots,x_n)}\geq\sqrt[3]{E_3(x_1,\ldots,x_n)}\geq\cdots\geq\sqrt[n]{E_n(x_1,\ldots,x_n)}. \tag{2}$$

此外，所有不等式都是严格的，除非所有 x_i 均相等. 例如，当 $n=3$ 时，Maclaurin 不等式断言，对正数 x,y 和 z 有

$$\frac{x+y+z}{3}\geq\sqrt{\frac{xy+xz+yz}{3}}\geq\sqrt[3]{xyz},$$

其中两个不等式都是严格的，除非 $x=y=z$.

从 Maclaurin 不等式即得算术 - 几何平均不等式 (看其首项和末项), 并且这些不等式历史地被联系在一起：Maclaurin 叙述其不等式的论文也是叙述 n 项的算术 - 几何平均不等式，而不只是两项的，这些内容首次出现在 [5, 第 78—79 页].

Maclaurin 不等式的标准证明 [1, 第 10—11 页；3, 第 52 页；9, 第 97 页，定理 4; 12, 第 12 章] 基于 Newton (牛顿) 不等式，后者断言

$$E_k(x_1,\ldots,x_n)^2\geq E_{k-1}(x_1,\ldots,x_n)E_{k+1}(x_1,\ldots,x_n),\quad 对 x_1,\ldots,x_n>0 和 1\leq k\leq n-1,$$

其中 $E_0(x_1,\ldots,x_n)=1$. 最近，Maligranda [6, 定理 3], [7] 证明了算术 - 几何平均不等式等价于 Bernoulli 不等式：对于正整数 n 和实数 $t>-1$, 有

$$(1+t)^n\geq 1+nt, \tag{3}$$

当 $n>1$ 时不等式是严格的，除非 $t=0$. Maligranda 的工作提出了一个问题：能否推广 Bernoulli 不等式，以完成下面的图式？

$$\text{算术 - 几何平均不等式}\iff\text{Bernoulli不等式}$$
$$\text{Maclaurin不等式}\iff ???$$

我们将提出 Bernoulli 不等式的这样一种扩张，在 Maclaurin 不等式的一个新的证明中利用它，并证明这两个不等式是等价的. 这之后，我们将描述 Maclaurin 不等式的两个用途，以及 Maclaurin 不等式和 Bernoulli 不等式对图论的一个扩张.

1. 一个推广的 Bernoulli 不等式

为了推广 Bernoulli 不等式，我们把它重写为一种更方便的形式. 当 $-1<t\leq -1/n$ 时，不等式 (3) 是显然的，因为其左端是正的，而右端是负的或零. 当 $t>-1/n$ 时，令 $x=nt$, 并改写 (3) 为

$$1+\frac{1}{n}x\geq\sqrt[n]{1+x},\qquad x>-1, \tag{4}$$

等号成立 (对于 $n>1$) 当且仅当 $x=0$. 此后，我们将认为 (4) 就是 Bernoulli 不等式. 我们对 (4) 的扩张称为*推广的 Bernoulli 不等式* (*generalized Bernoulli inequality*), 它如下所述：对于整数 $n\geq 2$ 和实数 $x>-1$, 有

$$\boxed{1+\frac{1}{n}x\geq\sqrt{1+\frac{2}{n}x}\geq\sqrt[3]{1+\frac{3}{n}x}\geq\cdots\geq\sqrt[n]{1+\frac{n}{n}x},}\tag{5}$$

其中所有不等式都是严格的，除非 $x=0$. 它与 (4) 的关系和 Maclaurin 不等式与算术 - 几何平均不等式的关系是类似的.

我们来证明 (5). 当 $x=0$ 时所有项都相等. 对于 $x\neq 0$, 我们要对 $n\geq 2$ 和 $1\leq k\leq n-1$ 证明

$$\sqrt[k]{1+\frac{k}{n}x}>\sqrt[k+1]{1+\frac{k+1}{n}x}.$$

等价地，我们要证明

$$\frac{1}{k}\log\left(1+\frac{k}{n}x\right)>\frac{1}{k+1}\log\left(1+\frac{k+1}{n}x\right),$$

其中 log 是自然对数. 从 $\log t$ 是下述*严格凹的* (*strictly concave*) 这一事实将推得上述不等式：对不同的正数 u 和 v, 以及 $0<\lambda<1$, 有 (图 1)

$$\log(\lambda u+(1-\lambda)v)>\lambda\log u+(1-\lambda)\log v.\tag{6}$$

因为 $1+\frac{k}{n}x$ 严格位于 $u=1$ 和 $v=1+\frac{k+1}{n}x$ 之间, 把 $1+\frac{k}{n}x$ 写成 u 和 v 的一个凸组合:

$$1+\frac{k}{n}x=\lambda u+(1-\lambda)v,$$

其中 $\lambda=\frac{1}{k+1}$. 则

$$\begin{aligned}&\frac{1}{k}\log\left(1+\frac{k}{n}x\right)\\&=\frac{1}{k}\log(\lambda u+(1-\lambda)v)\\&>\frac{1}{k}(\lambda\log u+(1-\lambda)\log v)\quad 由 (6)\\&=\frac{1}{k+1}\log\left(1+\frac{k+1}{n}x\right).\end{aligned}$$

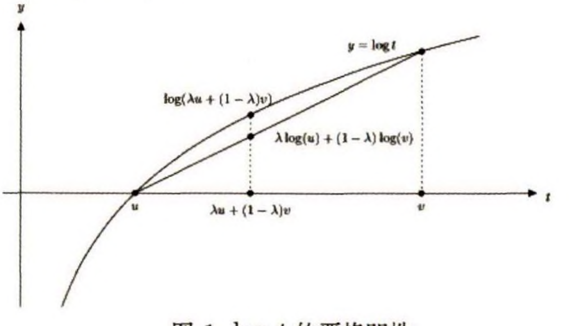

图 1 $\log t$ 的严格凹性

这就完成了推广的 Bernoulli 不等式 (5) 的证明. 现在，我们要由对 n 的归纳法从 (5) 来推导 Maclaurin 不等式.

在 $n=2$ 的基础情形, Maclaurin 不等式即为两项的算术 - 几何平均不等式，这有很多种证明. 这里是从 $n=2$ 的推广的 Bernoulli 不等式 —— 对 $x>-1$ 有 $1+\frac{1}{2}x\geq\sqrt{1+x}$, 它是严格的不等式，除非 $x=0$—— 出发的一个证明. 对于正的 x_1 和 x_2, 有

$$\begin{aligned}\frac{x_1+x_2}{2}&=x_2\left(\frac{x_1/x_2}{2}+\frac{1}{2}\right)=x_2\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{x_2}-1\right)\right)\\&\overset{\text{推广的 Bern.}}{\geq}x_2\sqrt{1+\left(\frac{x_1}{x_2}-1\right)}=\sqrt{x_1x_2},\end{aligned}$$

并且这个不等式是严格的，除非 $x_1/x_2-1=0$, 即 $x_1=x_2$.

假设 Maclaurin 不等式对于 $n-1$ 个变量成立，其中 $n \geq 3$. 我们要证明，它对于 n 个变量也如形式 (2) 成立. 因为每个 $E_k(x_1,\dots,x_n)$ 对于诸 x_i 是对称的，不失一般性，不妨假设 $x_n = \max_i x_i$. 为了简化记号，我们令

$$\begin{aligned} E_k &= E_k(x_1,\dots,x_n), && 1 \leq k \leq n, \\ \varepsilon_k &= E_k(x_1,\dots,x_{n-1}), && 1 \leq k \leq n-1, \end{aligned}$$

并令 $\varepsilon_0 = 1$ 和 $\varepsilon_n = 0$.

我们将利用诸 E_k 的递推公式：

$$E_k(x_1,\dots,x_n) = \left(1-\frac{k}{n}\right)E_k(x_1,\dots,x_{n-1}) + \frac{k}{n}E_{k-1}(x_1,\dots,x_{n-1})x_n, \quad 1 \leq k \leq n, \tag{7}$$

或用更简化的形式

$$E_k = \left(1-\frac{k}{n}\right)\varepsilon_k + \frac{k}{n}\varepsilon_{k-1}x_n. \tag{8}$$

这个递推公式从关于初等对称多项式的一个递推公式

$$e_k(x_1,\dots,x_n) = e_k(x_1,\dots,x_{n-1}) + e_{k-1}(x_1,\dots,x_{n-1})x_n, \quad 1 \leq k \leq n \tag{9}$$

即得，其中我们令 $e_0(x_1,\dots,x_{n-1}) = 1$ 和 $e_n(x_1,\dots,x_{n-1}) = 0$:

$$\begin{aligned} E_k(x_1,\dots,x_n) &= \frac{e_k(x_1,\dots,x_{n-1}) + e_{k-1}(x_1,\dots,x_{n-1})x_n}{\binom{n}{k}} \qquad \text{由 (9)} \\ &= \frac{\binom{n-1}{k}E_k(x_1,\dots,x_{n-1}) + \binom{n-1}{k-1}E_{k-1}(x_1,\dots,x_{n-1})x_n}{\binom{n}{k}}, \end{aligned}$$

这就是在简化了二项式系数之后的 (7).

由 $n-1$ 个变量的 Maclaurin 不等式知，对 $2 \leq k \leq n-1$ 有 $\varepsilon_{k-1}^{1/(k-1)} \geq \varepsilon_k^{1/k}$. 用两种方式重写它，则对 $1 \leq k \leq n-1$ 有

$$\varepsilon_{k-1} \geq \varepsilon_k^{(k-1)/k} \quad \text{和} \quad \varepsilon_{k+1} \leq \varepsilon_k^{(k+1)/k}. \tag{10}$$

(由 ε_0 的定义，$k=1$ 时第 1 个不等式成立，并且由 ε_n 的定义，$k=n-1$ 时第 2 个不等式成立.) 利用 (8) 和 (10), 当 $1 \leq k \leq n-1$ 时，有

$$\begin{aligned} E_k &= \left(1-\frac{k}{n}\right)\varepsilon_k + \frac{k}{n}\varepsilon_{k-1}x_n \geq \left(1-\frac{k}{n}\right)\varepsilon_k + \frac{k}{n}\varepsilon_k^{(k-1)/k}x_n \\ &= \varepsilon_k\left(1+\frac{k}{n}\left(\varepsilon_k^{-1/k}x_n - 1\right)\right) \end{aligned} \tag{11}$$

和

$$\begin{aligned} E_{k+1} &= \left(1-\frac{k+1}{n}\right)\varepsilon_{k+1} + \frac{k+1}{n}\varepsilon_k x_n \geq \left(1-\frac{k+1}{n}\right)\varepsilon_k^{(k+1)/k} + \frac{k+1}{n}\varepsilon_k x_n \\ &= \varepsilon_k^{(k+1)/k}\left(1+\frac{k+1}{n}\left(\varepsilon_k^{-1/k}x_n - 1\right)\right). \end{aligned} \tag{12}$$

令 c_k 表示 (11) 和 (12) 中的 (正) 项 $\varepsilon_k^{-1/k}x_n$, 我们把这些结果组合在一起来完成证明：

$$E_k^{1/k} \overset{(11)}{\geq} \varepsilon_k^{1/k}\sqrt[k]{1+\frac{k}{n}(c_k-1)} \overset{\text{推广的 Bern.}}{\geq} \varepsilon_k^{1/k}\sqrt[k+1]{1+\frac{k+1}{n}(c_k-1)} \overset{(12)}{\geq} E_{k+1}^{1/(k+1)}.$$

何时 (2) 中等号成立？从上面我们利用推广的 Bernoulli 不等式 (5) 的方式知，若 $c_k-1\neq 0$, 则 $E_k^{1/k}>E_{k+1}^{1/(k+1)}$. 如何能使 $c_k-1=0$, 或等价地，当 $1\leq k\leq n-1$ 时如何能使 $\varepsilon_k^{1/k}=x_n$? 因为

$$\varepsilon_k^{1/k}\leq\varepsilon_1=\frac{1}{n-1}(x_1+\cdots+x_{n-1}),$$

并且 $x_n=\max_i x_i$, 则当任一 x_i 小于 x_n 时有 $\varepsilon_1<x_n$, 因而 $\varepsilon_k^{1/k}<x_n$. 这样，(2) 中使用不等式都是严格的，除非每个 x_i 都是 x_n, 在此情形 (2) 中所有项皆等于 x_n.

推广的 Bernoulli 不等式不仅蕴涵着 Maclaurin 不等式，而且也从后者而得到. 对 $n\geq 2$ 和 $x>-1$, 在 (7) 中取 $x_1=\cdots=x_{n-1}=1$, 以及 $x_n=1+x$, 则对于 $1\leq k\leq n-1$ 就得到

$$E_k(\underbrace{1,\ldots,1}_{n-1\text{次}},1+x)=\left(1-\frac{k}{n}\right)E_k(\underbrace{1,\ldots,1}_{n-1\text{次}})+\frac{k}{n}E_{k-1}(\underbrace{1,\ldots,1}_{n-1\text{次}})(1+x).$$

因为 $k<n$, 其右端即为 $(1-k/n)+(k/n)(1+x)=1+(k/n)x$. 当 $k=n$ 时，这个关于 $E_k(1,\ldots,1,1+x)$ 的公式也有效：

$$E_n(1,\ldots,1,1+x)=1+x=1+\frac{n}{n}x.$$

这样，当 $x_1=\cdots=x_{n-1}=1$ 和 $x_n=1+x$ 时，Maclaurin 不等式 (2) 即为推广的 Bernoulli 不等式 (5). 并且如果在 Maclaurin 不等式中的诸不等式都是严格的，除非所有的 x_i 都相等，那么在推广的 Bernoulli 不等式中所有的不等式也都是严格的，除非 $x=0$.

不等式 (6) 在 $\lambda=\frac{1}{k+1}$ 时被用于证明推广的 Bernoulli 不等式 (5), 后者蕴涵 Maclaurin 不等式 (2), 而 (2) 以算术 – 几何平均不等式 (1) 作为其特殊情形. 我们通过从算术 – 几何平均不等式来证明其中 $\lambda\in(0,1)$ 为有理数时的 (6), 因而 Maclaurin 不等式和推广的 Bernoulli 不等式都等价于含有理数 $\lambda\in(0,1)$ 的 (6), 从而来完成这个循环.

把任一有理数 $\lambda\in(0,1)$ 对于某个整数 $n\geq 2$ 和 $k\in\{1,\ldots,n-1\}$ 写成 $\frac{k}{n}$. 对于 $0<u<v$, 令 $x_1=x_2=\cdots=x_k=u$, 以及 $x_{k+1}=\cdots=x_n=v$. 由算术 – 几何平均不等式，有

$$\begin{aligned}\lambda u+(1-\lambda)v&=\frac{(x_1+\cdots+x_k)+(x_{k+1}+\cdots+x_n)}{n}\\&>\sqrt[n]{(x_1\cdots x_k)(x_{k+1}\cdots x_n)}\\&=u^\lambda v^{1-\lambda},\end{aligned}$$

因为 $x_1\neq x_n$, 其中的不等式是严格的. 取对数就产生 (6).

2. 第一个应用：一个递归序列的收敛性

(对我们 [1]) 而言), Maclaurin 不等式最有趣的应用是对于 n 个变量的一个递归序列，这推广了 Gauss (高斯) 的两个变量的算术 – 几何平均递归序列.

1) 在这里，“我们” 指两位作者.—— 译注

对于任意正数 x 和 y, 对于 $j \geq 0$ 如下定义序列 $\{x_j\}$ 和 $\{y_j\}$: $x_0 = x$, $y_0 = y$, 以及

$$x_j = \frac{x_{j-1} + y_{j-1}}{2}, \qquad y_j = \sqrt{x_{j-1}y_{j-1}}, \qquad j \geq 1.$$

序列 $\{x_j\}$ 和 $\{y_j\}$ 收敛到一个公共极限, Gauss 用 $M(x, y)$ 表示它, 并称其为 x 和 y 的算术 – 几何平均 (*arithmetic-geometric mean*). 收敛性的一个证明基于两个数的算术 – 几何平均不等式 [2, §1].

利用初等对称平均, $M(x, y)$ 的构造从两个数推广到 n 个数: 对于 $x_1, \ldots, x_n > 0$, 对于 $j \geq 0$ 如下定义序列 $\{x_{1,j}\}, \ldots, \{x_{n,j}\}$

$$x_{k,0} = x_k \quad 和 \quad x_{k,j} = \sqrt[k]{E_k(x_{1,j-1}, \ldots, x_{n,j-1})}, \qquad j \geq 1.$$

例 1 令 $x_1 = 1, x_2 = 2$ 和 $x_3 = 3$. 表 1 列出了十进小数点后 16 位的前面几个迭代值. 虽然 $x_{1,0} < x_{2,0} < x_{3,0}$, 但由 Maclaurin 不等式, 对于 $j \geq 1$ 有 $x_{1,j} > x_{2,j} > x_{3,j}$.

表 1 3 个数的 $E_1, \sqrt{E_2}$ 和 $\sqrt[3]{E_3}$ 的一个迭代

j	$x_{1,j}$	$x_{2,j}$	$x_{3,j}$
0	1	2	3
1	2	1.9148542155126762	1.8171205928321396
2	1.9106582694482719	1.9099276289927102	1.9091929427097283
3	1.9099262803835701	1.9099262335408387	1.9099261866980376
4	1.9099262335408155	1.9099262335408153	1.9099262335408151

这个例子说明了对于正数 $x_1, \ldots, x_n$ 及 $1 \leq k \leq n$, n 个序列 $\{x_{k,0}, x_{k,1}, \ldots\}$ 收敛到一个公共极限, 被称为 $x_1, \ldots, x_n$ 的对称平均 (*symmetric mean*), 并记为 $M(x_1, \ldots, x_n)$. 对于 $n \geq 2$ 的收敛性的证明利用 Maclaurin 不等式 [8].

Gauss 发现了 $M(x, y)$ 的一个公式, 或者不如说是其倒数的一个公式, 是一个积分:

$$\frac{1}{M(x,y)} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{x^2\cos^2 t + y^2\sin^2 t}} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{du}{\sqrt{(u^2+x^2)(u^2+y^2)}},$$

其中第 2 个积分是从变量变换 $u = y\tan t$ 以及利用了 $M(x, y)$ 中 x, y 的对称性而得. 对于 $n \geq 3$, 给出 $M(x_1, \ldots, x_n)$ 的一个显式公式仍是一个未決问题.

3. 第二个应用: 随机变量的乘积

我们将用概率的语言来表示 Maclaurin 不等式以及何时它变成等式. 我们假设读者熟悉概率论中一些基本概念, 如随机变量及其期望, 任何一本概率论的本科教科书都包含了这些概念, 如 [11].

固定正数 $x_1, \ldots, x_n$, 并把 n 个球标以诸 x_i 放入一个容器中. 从容器中取球, 一个接一个, 不能重新放回, 直到所有 n 个球都被取出. 令 X_j 是被取出的第 j 个球的标签, 因此 X_j 是取值于 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ 中的一个随机变量. 这样的样本的结果是诸数 $(X_1, \ldots, X_n)$ 的一个序列. 因为我们的样本没有重复放置, 因此 X_j 的值受 $X_1, \ldots, X_{j-i}$ 诸值的影响, 因而 $X_1, \ldots, X_n$不 是独立的 (除非诸 x_i 相等). 然而, 诸 X_j 是恒等分布的. 我们用一个

例子来解释它.

例 2 如果我们有 3 个球，编号为 1， 2， 3, 有 6 种可能的方式来取出它们：123, 132, 213, 231, 312, 321. 如果球 1 和 2 标号以 x, 球 3 标号以 y, 并且 $x \neq y$, 那么在所有可能方式下取球时，我们看到的标号是 $xxy, xyx, xxy, xyx, yxx, yxx$. 在第 1 个样本中 $X_1 = X_2 = x$ 和 $X_3 = y$. 在第 2 个样本中 $X_1 = X_3 = x$ 和 $X_2 = y$. 对于第 1 次，第 2 次和第 3 次抽取的样本球，看看 x 和 y 作为标签出现的次数，我们得到，在每个位置都是 x 出现 4 次，y 出现 2 次，因而 X_1, X_2 和 X_3 有相同的分布 1): $\mathrm{Prob}(X_j = x) = 2/3$ 和 $\mathrm{Prob}(X_j = y) = 1/3$.

在我们的容器模型中，乘积 $X_1 \cdots X_k$ 的期望 $\mathbb{E}(X_1 \cdots X_k)$ 对于 $1 \leq k \leq n$ 都等于 $E_k(X_1, \ldots, X_n)$, 因而 n 项的 Maclaurin 不等式等价于

$$\mathbb{E}(X_1) \geq \sqrt{\mathbb{E}(X_1 X_2)} \geq \cdots \geq \sqrt[n]{\mathbb{E}(X_1 \cdots X_n)}. \tag{13}$$

这与取正值的 n 个独立恒等分布的随机变量 $X_1, \ldots, X_n$ 成鲜明对比, 对于后者, (13) 中的 “$\geq$” 都要代之以等号. 由 Jensen (延森) 不等式，如果 $X_1, \ldots, X_n$ 都等于一个取正值的公共随机变量，则 (13) 都要以 “$\leq$” 处处代之以 “$\geq$”.

Maclaurin 不等式向我们提供了有关容器模型中诸 X_j 的乘积的协方差的信息. 固定正数 ℓ_1 和 ℓ_2, 使得 $\ell_1 + \ell_2 \leq n$, 并取 $Y_1 = X_1 \cdots X_{\ell_1}$ 和 $Y_2 = X_{\ell_1+1} \cdots X_{\ell_1+\ell_2}$. 因为 Y_2 与 $X_1 \cdots X_{\ell_2}$ 同分布，因此 $\mathbb{E}(Y_2) = \mathbb{E}(X_1 \cdots X_{\ell_2})$. 如果 $\ell_1 \leq \ell_2$, 则 Maclaurin 不等式蕴涵着 $\mathbb{E}(Y_2)^{\ell_1/\ell_2} \leq \mathbb{E}(Y_1)$, 因而

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_1 Y_2) &= \mathbb{E}(X_1 \cdots X_{\ell_1+\ell_2}) \leq \mathbb{E}(Y_2)^{(\ell_1+\ell_2)/\ell_2} \\ &= \mathbb{E}(Y_2)^{\ell_1/\ell_2} \mathbb{E}(Y_2) \leq \mathbb{E}(Y_1)\mathbb{E}(Y_2). \end{aligned} \tag{14}$$

如果 $\ell_2 \leq \ell_1$, 则 Maclaurin 不等式蕴涵着 $\mathbb{E}(Y_1)^{\ell_2/\ell_1} \leq \mathbb{E}(Y_2)$, 因而

$$\mathbb{E}(Y_1 Y_2) \leq \mathbb{E}(Y_1)^{(\ell_1+\ell_2)/\ell_1} = \mathbb{E}(Y_1)\mathbb{E}(Y_1)^{\ell_2/\ell_1} \leq \mathbb{E}(Y_1)\mathbb{E}(Y_2). \tag{15}$$

这样，在两种情形下都有 $\mathbb{E}(Y_1 Y_2) \leq \mathbb{E}(Y_1)\mathbb{E}(Y_2)$, 因而 2)

$$\mathrm{cov}(Y_1, Y_2) = \mathbb{E}(Y_1 Y_2) - \mathbb{E}(Y_1)\mathbb{E}(Y_2) \leq 0.$$

何时有 $\mathrm{cov}(Y_1, Y_2) = 0$? 这会使得 (14) 或 (15) 中的所有不等式 —— 依赖于是否 $\ell_1 \leq \ell_2$ 或者 $\ell_2 \leq \ell_1$—— 都成为等式. (14) 或 (15) 中的第一个不等式，作为一个等式，断言 $E_{\ell_1+\ell_2}(x_1, \ldots, x_n)^{1/(\ell_1+\ell_2)}$ 等于 $E_{\ell_2}(x_1, \ldots, x_n)^{1/\ell_2}$ 或 $E_{\ell_1}(x_1, \ldots, x_n)^{1/\ell_1}$, 而由 Maclaurin 不等式成为等式的规则，这两个等式都蕴涵着 $x_1 = \cdots = x_n$. 反之，如果诸 x_i 都相等，则 Y_1 和 Y_2 都只取一个值，因而 $\mathrm{cov}(Y_1, Y_2) = 0$. 因而，Maclaurin 不等式成为等式的条件等价于蕴涵关系 $\mathrm{cov}(Y_1, Y_2) = 0 \Rightarrow Y_1$ 和 Y_2 对于所有使得 $\ell_1 + \ell_2 \leq n$ 的正整数 ℓ_1 和 ℓ_2 是常数.

是否有一个基于概率的 (13) 形式的 Maclaurin 不等式的证明？

1) 下文中 $\mathrm{Prob}(V)$ 表示事件 V 发生的概率.—— 译注

2) 下文中 $\mathrm{cov}(Y_1, Y_2)$ 表示 Y_1 与 Y_2 的协方差 (covariance).—— 译注

4. 图论中的一些不等式

Maclaurin 不等式的领域延伸到图论中. 我们将描述这是如何生效的, 以及相应的 (等价的) Bernoulli 不等式看起来像什么.

令 G 是一个有 $n \geq 2$ 个顶点的图. 我们总是假设它没有闭路 (即没有起点与终点是同一个点的边), 并且没有重边 (以致在任意两个顶点之间至多有一条边). G 中的一个 团 (*clique*) 是 G 的一个完全子图: 该子图的任意两个顶点由一条边相连. 一个 k 团是由 k 个顶点的团. 例如, 一个 1 团是 G 中的一个顶点, 一个 2 团是 G 中的一对顶点和连接它们的一条边. 一个 3 团是 G 中的 3 个顶点的一个集合和连接每对顶点的边. 图 2 中有 1 团, 2 团和 3 团, 但是对于 $k > 3$, 没有 k 团.

令 $m = m_G$ 是使得 G 有一个 k 团的最大整数 k, 因而 $1 \leq m \leq n$. 对 G 的每个顶点 v 分配一个变量 X_v. 令 $\mathbf{X}$ 是这些变量的向量, 并对 $1 \leq k \leq m$, 令

$$e_{k,G}(\mathbf{X}) = \sum_{k团\, G_k} \prod_{v \in G_k} X_v.$$

这是诸 X_v 的一个多项式. 令

$$E_{k,G}(\mathbf{X}) = \frac{e_{k,G}(\mathbf{X})}{\binom{m}{k}}.$$

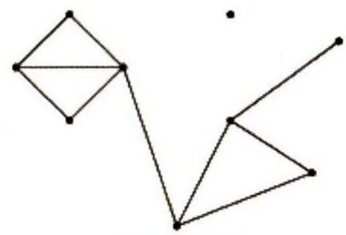

图 2 一个图

例 3 在右侧图中, $m = 3$. 用图中的顶点标签, 有

$$E_{1,G} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5}{3},$$

$$E_{2,G} = \frac{X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3 + X_4X_5}{3},$$

$$E_{3,G} = X_1X_2X_3.$$

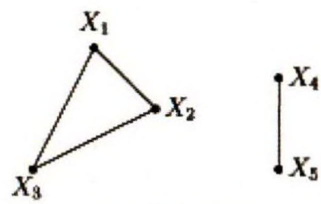

图 3 例 3 的图

例 4 n 个顶点的完全图记为 K_n, 它是 n 个顶点的图, 每对顶点之间有一条边相连. 例如, K_4 是一个四面体的边和顶点. 当 G 有 n 个顶点, 则 $m_G = n$ 当且仅当 $G = K_n$.

如果 $G = K_n$, 则 $E_{k,G}$ 是以诸顶点作为 n 个变量的第 k 个初等对称平均.

对 G 中每个顶点 v 取数 $x_v \geq 0$, 并令 $\mathbf{x}$ 是这些数的向量. Khadzhiivanov [4] 证明了

$$E_{1,G}(\mathbf{x}) \geq \sqrt{E_{2,G}(\mathbf{x})} \geq \sqrt[3]{E_{3,G}(\mathbf{x})} \geq \cdots \geq \sqrt[m]{E_{m,G}(\mathbf{x})}. \tag{16}$$

这就是当 $G = K_n$ 时的 Maclaurin 不等式. Nikiforov [10] 给出了 (16) 的一个新近的描述, 包括等号的情形, 当 $G \neq K_n$ 时这是相当困难的.

前面我们通过取每个变量为 1, 除了对最后一个变量取其为 $1 + x$, 其中 $x > -1$, 从 Maclaurin 不等式推导了推广的 Bernoulli 不等式. 这就暗示了 Bernoulli 不等式对图论的一个自然的延拓: 在 (16) 中对每个 x_v 取为 1, 除了对一个单个的 x_v 取其为 $1 + x$, 其中 $x > -1$. 当 $G = K_n$ 时, 这就是推广的 Bernoulli 不等式. 由于大多数图的对称性, 对于一个图, 通常有数个 Bernoulli 不等式.

例 5 在例 3 中, 如果我们取 X_1 (或 X_2, 或 X_3) 等于 $1 + x$, 其中 $x > -1$, 其它 4 个变量等于 1, 则 (16) 变为

$$1+\frac{2+x}{3}\ge\sqrt{1+\frac{1+2x}{3}}\ge\sqrt[3]{1+x},$$

而如果我们取 X_4 (或 X_5) 等于 $1+x$, 其中 $x>-1$, 其它 4 个变量等于 1, 则 (16) 为

$$1+\frac{2+x}{3}\ge\sqrt{1+\frac{1+x}{3}}\ge\sqrt[3]{1+x}.$$

Maclaurin 不等式与推广的 Bernoulli 不等式的等价性可延伸到图论中：对于所有 G 的 Khadzhiivanov 不等式 (16) 等价于对于所有 G 的 Bernoulli 不等式，其实因为我们在所有 G 上都做度量化，所以对所有 G, Bernoulli 不等式中的 $x=0$ (即，对所有 G, (16) 中所有的 x_v 都等于 1). 这在 [10] 中被解释. 例如，我们从对所有 G 令所有 $x_v=1$ 的 (16) 得到两项的算术 - 几何不等式. 对于正整数 a 和 b 构作一个图，它有 $a+b$ 个顶点，在前 a 个顶点和后 b 个顶点之间各有一条边相连. 这个图的不等式 (16) 断言

$$\frac{\sum_{i=1}^{a+b}x_i}{2}\ge\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{a}x_i\right)\left(\sum_{j=a+1}^{a+b}x_j\right)},$$

并且，当所有 x_i 都是 1 时，它即为 $(a+b)/2\ge\sqrt{ab}$. 这里 a 和 b 是正整数. 对于正有理数 a 和 b, 写成 $a=A/C$ 和 $b=B/C$, 其中 A, B 和 C 是正整数. 则 $(A+B)/2\ge\sqrt{AB}$, 在其两端除以 C 即给出 $(a+b)/2\ge\sqrt{ab}$. 从有理数的情形通过连续性就对所有正实数 a 和 b 得到 $(a+b)/2\ge\sqrt{ab}$.

参考文献

[1] E. F. Beckenbach and R. Bellman, Inequalities, Springer-Verlag, New York, 1983.

[2] D. Cox, The arithmetic-geometric mean of Gauss, L'Enseignement Mathématique 30 (1984) 275–330.

[3] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Polya, Inequalities, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1934.

[4] N. Khadzhiivanov, Inequalities for graphs (Russian), C. R. Acad. Bulgare Sci. 30 (1977) 793–796.

[5] C. Maclaurin, A Second Letter from Mr. Colin McLaurin to Martin Folkes, Esq.; Concerning the Roots of Equations, with the Demonstration of Other Rules in Algebra, Phil. Trans. 36 (1729) 59–96.

[6] L. Maligranda, Why Hölder's inequality should be called Rogers'inequality, Math. Inequal. Appl. 1 (1998) 69–83.

[7] L. Maligranda, The AM-GM inequality is equivalent to the Bernoulli inequality, The Mathematical Intelligencer 34 (2012) 1–2. http://dx.doi.org/10.1007/s00283-011-9266-8.

[8] Math Overflow, http://mathoverflow.net/questions/37576.

[9] D. S. Mitrinovic, Analytic Inequalities, Springer-Verlag, New York, 1970.

[10] V. Nikiforov, An extension of Maclaurin's inequality, http://arxiv.org/abs/math/0608199.

[11] S. Ross, A First Course in Probability (8th ed.), Pearson Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 2010.

[12] J. M. Steele, The Cauchy-Schwarz Master Class: An Introduction to the Art of Inequalities, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.

(陆柱家 译 童欣 校)