

数学哲学

数学哲学中的一阵清风

Reuben Hersh

自毕达哥拉斯以来, 数学哲学试图诠释数学实体和数学对象的本质.

数、圆、 n 维流形, 这些都不同于我们所思考的其它任何事物, 它们既不是物质的, 也不是精神的. 说它不是精神的, 是因为毕达哥拉斯定理和任何其它已建立的数学事实独立于你或我是如何想的. 无论我们知道与否, 相信与否, 毕达哥拉斯定理始终是真实的. 然而, 它也不是物质的! 柏拉图和亚里士多德解释说, 几何学家的三角形和圆不是物质的三角形和圆, 而是某种“理想”的东西.

那么当我们做数学时, 我们做的是什么呢? 对此人们给出了各种解释, 有唯灵论的, 经验主义的, 心理学的, 形式主义的, 逻辑主义的等等, 但没有一种解释能令人心悦诚服. 目前, 一些作者正在构筑人文主义的答案.

以色列一位研究数学教育的学者 Anna Sfard, 最近提出了一种有趣的看法: 在学习数学概念时, 儿童首先把它作为算法程序或方法来学习的; 之后, 他们才把算法转换成客观实体 (object), 她称之为“具体化”(reification). 后者是很难实现的, 常常需要老师的帮助. 这种说法接近于俄罗斯心理学家 Lev Vygotsky 的理论.

例如, 减法是一种算法, 这不难, 但将其具体化为负数, 则非常难!

哪些数学实体就是固定的算法? 做和存在之间, 算法和实体之间有何相互联系? 这是将数学视为一种人类活动, 并基于数学实践之上的一种数学哲学所讨论的问题, 而不是基础主义者讨论的问题.

基础的丧失. 在有关数学哲学的书籍中, (Korner 的, 或是 Benacerraf 和 Putnam 的), 你看到的首要问题是“基础问题”. 如何使数学知识成为确定、明晰和毫无疑问的呢? 历史上解决这个问题主要方法有三种: 逻辑主义 (柏拉图主义)、形式主义和直觉主义. 但它们都不成功. 逻辑主义和形式主义的方法, 半个多世纪以来没有出现新的重要思想. 直觉主义和它的子嗣构造主义确实曾努力实现已由 Bishop 教授加以合理化了的 Brouwer 计划, 但他们用构造性方法重建数学的目标, 现在比六、七十年前更遥远了.

原题: Fresh Breezes in the Philosophy of Mathematics. 译自: *The American Mathematical Monthly*. Vol. 102, No. 7, 1995, pp. 589-594.

基础主义幸存的一点东西叫做“新弗雷格主义”(“neo-Fregeanism”), 是 Philip Kitcher 提出的. 这一概念仍然主导着数学哲学. 它说: “对数学的哲学思考除了集合和集合论的孪生姐妹逻辑之外, 无需关注任何其它东西.” 但是大多数研究人员、使用者、教师、数学史家感兴趣的, 主要的不是集合. 因此, 数学哲学家忽视数学和数学家, 而数学家则觉得数学哲学毫无有趣之处.

呜呼! 数学哲学的主要问题的研究在半个多世纪中停滞不前! 数学家和数学哲学家无视彼此的存在! 哈佛大学哲学家 Hilary Putnam 发表了一篇基础主义的论文, 题为“没有基础的数学”. 难道数学哲学是没有意义, 没有必要的吗? 抑或是到了它重新开始的时候了?

数学哲学和科学哲学. 现代哲学中的一个奇怪现象是, 科学哲学和数学哲学几乎是相互脱离的. 科学哲学的作者极少提到数学哲学, 反之亦然. 对这两个课题都有研究的作者, 在他的任何一篇文章中只写其中的一个课题, 非此即彼. 就像棒球和足球运动, 打棒球或踢足球, 两者不能同时进行.

我来比较一下当今的数学哲学和三、四十年代的科学哲学. 后者曾由逻辑实证主义者 Rudolf Carnap 和他的“维也纳圈子”里的朋友们所支配. 由于太看重 Bertrand Russell 和 Ludwig Wittgenstein 的缘故, 他们自信懂得科学工作的正确的方法: (1) 描述公理; (2) 给出词语和物质现象之间的对应规则; (3) 导出理论, 就像欧几里德导出几何学和马赫导出力学一样.

稍后人们注意到, 逻辑实证主义者所说的与科学家所做的或想做的几乎没有共同之处. 科学哲学的新思想来自 Karl Popper, Tom Kuhn, Imre Lakatos 和 Paul Feyerabend 等人. 这些颠覆分子互相反对, 但都认为科学哲学家能思考科学家实际所做的, 而且不附带那些科学家不屑一顾的先决条件和要求.

数学哲学早就期待着出现它的 Popper, Kuhn, Lakatos 和 Feyerabend, 早就期待着对数学家实际所做的进行分析, 早就期待着对此中的哲学问题进行研究.

事实上, 这一转机正在发生. Wittgenstein 和 Lakatos 对于转机的出现助了一臂之力. 近年来加入的有 Michael Polanyi, George Polya, Alfred Renyi, Leslie White, Rey Wilder, Greg Chaitin, Phil Davis, Paul Ernest, Nick Goodman, Phil Kitcher, Penelope Maddy, Michael Resnik, Gian-Carlo Rota, Brian Rotman, Gabriel Stolzenberg, Robert Thomas, Tom Tymoczko, Jean Paul van Bendegem 和 Hao Wang.

下面是他们中的一些人所持的观点:

(1) 数学是属于人类的, 它是人类文明的一部分并与之相适应. (不是弗雷格(Frege)所认为的抽象的、非时间的、非感知的客观现实.)

(2) 数学知识难免有错. 和科学一样, 数学可以通过犯错误, 改正, 再改正而得到发展. (这一“错误主义论”在 Lakatos 的《证明与反驳》中有精采的论述.)

(3) 根据时间、地点和其他情况的不同, 存在不同形式的证明或严密性. 证明中采用计算机属于非传统形式的严密性.

(4) 经验性的证据、数值的实验和概率的证明都有助于我们决定在数学中应该

相信什么。亚里士多德逻辑并不总是做决定的最好方法。

(5) 数学对象是社会 - 文化 - 历史对象的一种特殊类型。我们能够分辨文学或宗教与数学的区别。但无论如何, 数学对象是人们共享的概念, 像文学中的 Moby Dick¹⁾ 或宗教中圣母玛利亚的纯洁受孕说。

人文主义者如何回答这个大问题: “什么是数学对象的本质?” 这个问题似乎难以回答, 因为西方哲学中有个数百年之久的假设: 世上有两类东西, 不是物质的就是精神的, 不是精神的物质的。当弗雷格证明数学既不是物质的也不是精神的时候, 他用第三种实体来解释, 即 “抽象对象”; 但对此种解释, 除了说它既非物质又非精神之外, 他再没说出些什么。

精神是思想、个体意识、主观; 愿望、恐惧、知觉、希望、欲望和内心想法。

物质则是占据空间, 具有重量, 可以通过科学仪器进行研究的, 如大山、臭虫、星星、伽玛射线。

是否存在既非物质又非精神的东西呢? 是的! 奏鸣曲、诗歌、教堂、宗教、公文、军队、战争、大学、科学院!

是否存在纽约科学院? 毫无疑问。它是一种精神的实体吗? 假如科学院的秘书和院长死于健忘症, 科学院还会继续生存下去。科学院不仅仅是某些人的思想! 即使大楼被炸掉, 理事们把科学院搬到了约克市, 它还会继续存在。科学院在物质上和精神上必然会有所体现, 但它并不是这两者。科学院不是任何人的头脑或躯体, 也不是科学院大楼的石头。

它是什么呢? 是一种社会机构。从精神和物质两方面还不足以描述纽约科学院, 也不足以描述我们最关心的大多数事情。结婚与离婚、就业、购物、价格与工资, 战争与和平、职业体育与电视节目, 所有这一切都有精神和物质的方面, 但他们都不是精神的或物质的实体, 他们是社会实体。

因此, 世上存在不是两种而是三种类型的东西。

那么, 数学对象如何呢? —— 比如说数。假如一切事物不是精神的、物质的, 那就是社会的, 那么数属于什么范围呢? 我们已经看到, 数既不是精神也不是物质的, 由排中律, 它必是社会的。但是我们不要太武断, 不妨先将其看成是一种假设。数学是社会 —— 文化 —— 历史的吗?

当然它是历史的。数学的历史是一门发达的学科。历史学家研究了远至巴比伦时代的数学。我们不知道数学遥远的起源, 也不知道文字、语言、宗教、或家庭的遥远的起源。这些起源是人类自我创造的一部分。考古学、语言学、遗传学和人种学告诉了我们更多的东西。计数和说话都有其跟人类相联的起源。

数学是一种社会实体。数学家从来不是离群的隐士。今天, 他们在院校、政府和工业部门中工作, 直接或间接由政府支付工资。

Srinivasa Ramanujan 是一名自学成材的印度数学天才, 他的勤奋刻苦得到了英

¹⁾ 《Moby Dick》是十九世纪美国著名小说家 Herman Melville(1819-1891) 用象征主义手法写的一部著名的小说。——校注。

国数学机构的赏识。他应邀到了英国，在家庭、宗教信仰和饮食习惯等方面付出了代价，他这么做是为了能和理解他的工作的数学家一起工作。

16 和 17 世纪时的 Fermat、Huygens 和 Leibnitz 勤于写信，经常与其他城市和其他国家的同事交流思想。

今天，一个新的结果要经专家审阅并认可后才能成为数学的一部分。我们检查自己的成果，一个人要得到承认或被接受为数学家，同行的认可是必不可少的。

数学的全部内容和发展方向反映了社会的压力。第二次世界大战期间美国数学军事化就是一个例子。

牛顿的微积分在他的万有引力理论中是一个工具。他的万有引力反映了人们对进一步了解行星运动的需要。因为英国是一个航海国家，所以了解行星运动十分重要。对于英国来说，掌握比西班牙和葡萄牙更先进的航海方法，具有经济价值。

我说这些，关没有低估纯数学家对自主研究的执著追求。

接受考验，要检验一种数学哲学的优劣，可以提出下列问题：

- (1) 什么使得数学与众不同？
- (2) 数学是研究什么的？
- (3) 数学为什么会获得近乎普遍的认同？
- (4) 除了证明，我们如何获得数学知识？
- (5) 尽管数学具有社会属性，但为什么数学结果与时间、地点、民族、种族、性别无关？
- (6) 无限是否存在？若存在，是怎样的？
- (7) 为什么纯数学常常会变得那样有用？

比起新弗雷格哲学、直觉主义者—构造主义者的哲学或我所知道的其他哲学而言，人文主义的方法能更好地回答问题 (1) 至 (5)。

问题 (6) 和 (7) 更难。我没有说人文主义能回答这些问题，但也没有其他任何人回答过这些问题。

最后，我要折断反对者最爱使用的射向数学人文主义的一支箭。

他们说， $2 + 2 = 4$ ，无论何时何地，都是如此。事实上，在人类社会出现前，甚至在人类出现之前， $2 + 2$ 就等于 4。当两只雷龙来到水湾，碰到另外两只雷龙时，水湾中就有四只雷龙。数学真理是普遍的，不仅独立于个体意识也独立于社会意识。

这是柏拉图主义，是 Wittgenstein 猛烈攻击的观点。但又是 (让我们正视它) 大多数数学家接受的观点。

人文主义者如何回答这个问题？

首先，“二”扮演两个角色。它既是一个形容词，又是一个名词。当你说“两只雷龙”时，“二”是形容词。“两只雷龙加两只雷龙等于四只雷龙”是关于雷龙而不是关于数字的陈述。即使你说：“两个分立的、合理永恒的、无相互作用的事物与另两个具有同类特性的事物集中到一起得到四个这样的事物。”你还是在谈论分立的、合理永恒的、无相互作用的事物的性质。这只是初等物理学的一个陈述。

另一方面，正如自毕达哥拉斯以来众所周知的，名词“二”不是指物理上可观察到的东西；它是指某种抽象的或理想的实体。柏拉图、笛卡尔和弗雷格都知道，“二”是一个理想的事物。他们对于理想事物只用否定的词语——不是精神的、不是物质的——来解释。我所要指出的是，这些抽象的理想事物是社会概念。

“但是，”柏拉图主义者说，“你怎么样解释这个事实：为什么不论何时何地，不分政治、宗教、种族、性别， $2+2$ 总是等于4？唯一的理由是，它是一个客观真理。因为它是客观真理，所以我们都承认。否则，对于 $2+2=4$ 的普遍认同将是无法解释的奇迹。”

对此，我的回答是：“因为想不到其他解释而说某一事物一定是真理，这是一种有害的逻辑。这是哲学家习惯用以证明上帝存在的方法——他们想不出宇宙存在的任何其他原因。

“你说，因为关于数学的客观性，我没有作出使你满意的解释，所以我必须相信这样一种抽象实体，这种抽象实体与物质世界的关系模糊不清，它不可思议地在计算那些几乎不可能存在、也无法数清的各种无穷，而且它又是由我们的智力和体力以一种完全无法解释的方式去理解的。

“我不相信。你相信是因为你无视其荒谬。

“我知道，某些社会性的或意识共有性的概念具有物理科学的严密性和复验性。数学计算的复验性只类似于物理的测量或实验的复验性。”

有人或许会问：“为什么物质世界具有如此一致的、可复验的属性？为什么万有引力常数每天都一样？为什么光速在真空中如此确实可靠？”

没有哪一位物理学家和哲学家觉得必须回答这种问题。存在一门物理科学这一事实已为我们所接受的。我们从这里开始，我们不想再追究这件事。Heidegger问，“宇宙为什么存在？”我不知道他取得了什么进展，这种研究没有前途。

正如物质世界的有些方面存在规律性和稳定性，社会性概念世界的某些方面也存在规律性和稳定性。我不知道为什么会如此。我敢肯定去追究这个问题不会有结果，就像追究物质世界中的这个问题不会有结果一样。

对于物质世界有规律、可预测的部分的研究有一个名字，叫做“物理学”。对于社会性概念世界中有规律、有共性部分的研究也有一个名字，叫做“数学”。

(吕 航 译 袁向东 校)