同伦李群，同伦论，李群，p紧群
中心化子

综合报告 1997\977515\016\003

97，16(3)
177-191

0189.23

同伦李群

Jesp., M.M
Jesper M. Møller 潘建中

摘要：同伦李群的概念是由 W. G. Dwyer 和 C. W. Wilkerson[13] 最近引进的．它是一系列研究工作的产物．早在大约 25 年前，Rector[32, 33] 就在他从同伦的角度研究李群时，勾划了指导后来这些研究的设想．同伦论中近来所取得的重大进展，例如，Miler 证明的 Sullivan 猜想 [25] 以及 Lannes 的 division 函子 [22]、使得过去技术上不可能做的事情现在成为可能．现在，由于有了 Dwyer 和 Wilkerson 落实 Rector 设想的工作，即使最棘手的分类问题我们似乎也有能力对付它．

本文利用富有启发性的例子和分清泾渭的习题，尽可能快地从经典的有限回路空间介绍到这个新理论的重要定义及惊人的结果．同时也扼要介绍了证明方法．

1. 引论

本报告的目的是介绍 W. G. Dwyer 和 Wilkerson 所发现的一类重要的空间，这类空间称为同伦李群或 p- 紧群．这些纯同伦论对象抓到了李群的实质．在文 [13] 中，Dwyer 和 Wilkerson 引进同伦李群并证明了下面的 (1.1) 和 (1.3)．我们将主要介绍他们的这一工作．最后一节我们还将扼要介绍他们的后续工作 [11,12,14]，这些工作使我们有可能在不远的将来获得一个分类定理．

p-紧群 是一个带基点的拓扑空间 BX，它的同伦性质都集中在素数 p 处，并且其回路空间 $X = \Omega BX$ 满足一个上同调有限性条件．p- 紧环面 $BT = K(\mathbb{Z}_p, 2)^r$ 是 p- 紧群的一个例子．

p- 紧群 BX 的 极大环面 是满足某种单性和极大条件的映射 $Bi : BT \to BX$．

定理 1.1 [13, 8. 13, 9.4]. 任何 p- 紧群都有一个极大环面，并且在共轭意义下它是唯一的．

如果 X 连通，对于极大环面 $Bi : BT \to BX$，有一个 *Weyl* 群 $W_T(X)$，它在向量空间 $H_2(BT; \mathbb{Q}_p)$ 中有一个忠实表示．$W_T(X)$ 等变映 Bi 诱导出代数同态

$$H^*(Bi; \mathbb{Q}_p) : H^*(BX; \mathbb{Q}_p) \to H^*(BT; \mathbb{Q}_p)^{W_T(X)}, \tag{1.2}$$

原题：Homotopy Lie Groups．译自：*Bulletin of the American Mathematical Society*，Vol. 32. No. 14, 1995, pp. 413–428.

这个同态将 BX 的 p-adic 有理上同调映到 $W_T(X)$ 的不变量环中.

定理 1.3 [13, 9.7]. 设 X 是连通 $p-$ 紧群， $T \to X$ 是其极大环面. 则

(1) T 和 X 有相同的秩 (rank).

(2) Weyl 群 $W_T(X)$ 可以为 $\mathbb{Q}_p$ 向量空间 $H_2(BT;\mathbb{Q}_p)$ 中的忠实表示反射群.

(3) 同态 (1.2) 是同构.

不久我们将给出 $p-$ 紧群的准确定义，而该定义是从有限回路的概念演变过来的.

1.4. 有限回路空间. 设 G 是紧群. 取自由，可缩 $G-$ 空间 EG 并定义 $BG = EG/G$ 为轨道空间. 则对应的纤维化序列

$$\Omega EG \to \Omega BG \to G \to EG \to BG$$

包含同伦等价 $\Omega BG \to G$.

有限回路空间正是以这个同伦等价作为定义的.

定义 1.5. 有限回路空间是一个连通，带基点的空间 BX, 使得 $X = \Omega BX$ 同伦等价于一个有限 CW 复形.

注意，根据定义， X 是 BX 的回路空间，尽管不太准确，但习惯上说到有限回路空间 BX 时，指的是空间 X, 而将 BX 称为是 X 的分类空间.

我们已经看到紧李群是有限回路空间. 例如， $SU(2)$ 的分类空间是无穷维四元数投影空间 $SU(2) = \mathbb{H}P^\infty$. 然而，有限回路空间要多得多. Rector[31] 发现了一类惊人的例子. 他发现了一族不可数无穷多个有限回路空间 BX. 它们的同伦类型互不相同，但 $X = \Omega BX$ 都同伦等价于 $SU(2)$. 换句话说，同伦类型 $SU(2)$ 上有不可数无穷多个不同的回路空间结构.

Rector 的例子表明，如果我们一定要在 “整同伦论”(或通常同伦论) 中考虑问题，那么就不可能有类似于紧李群的分类定理. 然而，在 $\mathbb{F}_p-$ 局部空间的范畴中，情况则要好得多.

1.6. 记号. 下面， p 表示一个固定的素数， $\mathbb{F}_p$ 表示 p 个元素的数域， $\mathbb{F}_p$ 表示 p-adic 整数环， $\mathbb{Q}_p = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Q}$ 表示 p-adic 数域.

$H^*(-)$ 表示以 $\mathbb{F}_p$ 为系数的奇异上同调 $H^*(-;\mathbb{F}_p)$, 而 $H^*(-;\mathbb{Q}_p)$ 则表示 $H^*(-;\mathbb{Z}_p) \otimes \mathbb{Q}_p$(而不是以 $\mathbb{Q}_p$ 为系数的奇异上同调).

空间 K 称为 $\mathbb{F}_p$–有限 若 $H^*(K)$ 是 $\mathbb{F}_p$ 上的有限维向量空间. 映射 $A \to B$ 是 F_P-等价 若它导出同构 $H^*(B) \to H^*(A)$.

1.7. $\mathbb{F}_p-$ 局部空间. 空间 K 称为是 **$\mathbb{F}_p$–局部的**, 如果任何 $\mathbb{F}_p-$ 等价 $A \to B$ 导出映射空间的同伦等价 $map(B, K) \to map(A, K)$.

$\mathbb{F}_p-$ 局部空间是存在的, 比如函子 $H^i(-)$ 的分类空间 $K(\mathbb{F}_p, i)$ 是一个明显的例子. 事实上，可按一个自然的方式从每一个空间构造出一个 $\mathbb{F}_p-$ 局部空间.

定理 1.8 (Bousfield [4, 3.2]). 存在从 CW 复形的同伦范畴到自身的一个函子 $K \rightsquigarrow K_p$ 和一个自然变换 $\eta_K K \to K_p$, 使得 η_K 是 $\mathbb{F}_p$- 等价且 K_p 是 $\mathbb{F}_p$- 局部的.

注意由这个定义和定理以及范畴理论立即可得以下推论:

- $\mathbb{F}_p$- 局部空间之间的 $\mathbb{F}_p$- 等价是同伦等价.
- 映射是 $\mathbb{F}_p$- 等价 $\Longleftrightarrow$ 它的 $\mathbb{F}_p$- 局部化是同伦等价.
- K 是 $\mathbb{F}_p$- 局部的 $\Longleftrightarrow \eta_K : K \to K_p$ 是同伦等价.

若 K 是幂空间或者 K 是连通的且 $H_1(K;\mathbb{F}_p) = 0$ 或者 $\pi_1(K)$ 为有限群, 则 [5, VI. 5.3, VII. 3.2, VII. 5.1][13§11] Bousfield 局部化 K_p 和 (或许更熟悉的) Bousfield-Kan 局部化 $(\mathbb{F}_p)_\infty K$ 相同. 特别有 [5, VI. 5.2],$\pi_i(K_p) \cong \pi_i(K) \oplus \mathbb{Z}_p$, 其中 K 是带基点, 连通, 幂零, 且所有同伦群均为有限生成的交换群 (如果没有幂零条件, 这一结论不成立).

1.9. 同伦李群. 根据构造, 实际上是不可避免的 [7],Rector 例子中的不可数多个有限回路空间经过 $\mathbb{F}_p$- 局部化全都变为标准的 $(BSU(2))_p$. 这表明 "$\mathbb{F}_p$- 局部的有限回路空间" 的性质比 "整回路空间" 好得多. 然而问题在于有限这个词用得很糟. 因为有限复形未必是 $\mathbb{F}_p$- 局部的. [13] 中提出的解决方案是将 (1.5) 中的拓扑有限条件换为上同调有限性.

定义 1.10. [13, 2.2]. p- 紧群是 $\mathbb{F}_p$- 局部空间, 使得

$$X = \Omega BX \text{为} \mathbb{F}_p - \text{有限}.$$

同样, 习惯上用 X(根据定义它是 BX 的回路空间) 指 p- 紧群 X, 以 BX 指 X 的分类空间.

2. P- 紧群的例子

设 G 是任一紧李群, 其 $\pi_0(G)$ 是 p- 群. 定义 $B\widehat{G} = (BG)_p$. 则 $\widehat{G}$ 是 p- 紧群. 使 $H^*(B\widehat{G}) = H^*(BG), \pi_0(\widehat{G}) = \pi_0(G)$, 而且

$$\pi_i(\widehat{G}) = \pi_i(G) \oplus \mathbb{Z}_p \quad \forall\, i \geq 1 [13, §11]$$

这个例子包括所有象平凡群 $\{1\}$ 和循环 p- 群 $\mathbb{Z}/p^n, n \geq 1$ 这样的有限 p 群.

2.1. 拟环面群.

如果把上面构造应用于 r 维环面 $S = SO(2)^r$, 就得到 p- 紧 r 维环面 $T = \widehat{S}$. 其分类空间 $BT = K(\mathbb{Z}_p, 2)^r$ 是 Eilenberg-MacLane 空间. 其上同调 $H^*(BT) = \mathbb{F}_p[t_1, \ldots, t_r]$ 是具 r 个 2 维生成元的多项式代数.

换一种说法, $BT = (B\widehat{T})_p$, 其中 $\widehat{T} = (\mathbb{Z}/p^\infty)^r$ 是 p- 离散 r 维环面.

更一般地, 一个 p-**紧拟环面群** P 是 p- 紧群使得 $BP = (B\widehat{P})_p$, 其中 $\widehat{P}$ 是 p-**离散拟环面群**, 即, $\widehat{P}$ 是 p- 离散环面 $\widehat{T}$ 按有限 p 群 π 的扩张, 且次数是 p 的幂次. 注意

$\mathbb{F}_p$– 局部化序列 $BT \to BP \to B\pi$ 是纤维化序列 [5, II, 5.1], 因为 π 必定幂零地作用在 $H_i(B\widehat{T}, \mathbb{F}_p)$ 上.

当 X 是 p– 紧群, 而 $\widehat{P}$ 是一系列一外包含一个的有限 p– 紧的并时, $\mathrm{Map}(Bp, BX) \simeq map(B\widehat{P}.BX)$, 因而通过 离散逼近[13, §6], 对有限 p– 群成立的结果常常可以推广到 p– 紧拟环面群的情形.

2.2. 怪异 p– 紧群. 称连通 p– 紧群为 **怪异的**(exotic), 如果它不能表为 $\widehat{G}$, 这里 G 是连通紧李群. Sullivan 球面, 更一般地, (许多)Clark-Ewing p– 紧群是怪异的.

命题 2.3. (Sullivan). 设整数 $n > 2$ 整除 $p-1$, 则 $\mathbb{F}_p$– 局部球面 $(S^{2n-1})_p$ 是 p– 紧群.

其具体构造如下: 循环群 $\mathbb{Z}/n$ 作用在 $\widehat{T} = \mathbb{Z}/p^\infty$ 上, 其作用由 $\mathbb{Z}/n < Aut(\widehat{T}) \cong \mathbb{Z}_p^*$, 当 $n|(p-1)$ 时, 给出, 定义 $BX = (B\widehat{N})_p$, 其中 $\widehat{N} = \widehat{T} \rtimes \mathbb{Z}/n$ 是半直积. 由于 n 与 p 互素, 再利用 (1.7). 可证明

$$H^*(BX) = H^*(N(\widehat{N}) = H^*(B\widehat{T})^{\mathbb{Z}/n} = \mathbb{F}_p[t]^{\mathbb{Z}/n} = \mathbb{F}_p[t^n].$$

从而知道 BX 的 mod$p$ 上同调是一个具 $2n$ 维生成元的多项式代数. 因此 $\mathbb{F}_p$– 局部空间 BX 是 $(2n-1)$ 连通 [5, I. 6.1], 而其回路空间 X 为 $(2n-2)$ 连通, 又 $H^*(X)$ 与 $H^*(S^{2n-1})$ 抽象同构. 从 Hurewicz 定理知道, 这个抽象同构可用一个 $\mathbb{F}_p$– 等价 $S^{2n-1} \to X$ 来实现: 由 (1.7),$(S^{2n-1})_p \to X_p = X$ 是同伦等价.

Clark 和 Ewing[6] 注意到 Sullivan 的构造不只限于秩为 1 的情形. 设 $\widehat{T}$ 是 p– 离散 r 维环面, $W < Aut(\widehat{T}) \cong GL_r(\mathbb{Z}_p)$ 是一个阶与 p 互素的有限群, W 自然地作用在 $\widehat{T}$ 上. 令 $BX = (B\widehat{N})_p$, 其中 $\widehat{N} = \widehat{T} \rtimes W$ 本质上是利用 Shephard-Todd 定理 [2, 7.2.1][21,§23], 可以证明:

$$H^*(BX) = H^*(B\widehat{N}) = H^*(B\widehat{T})^W = \mathbb{F}_p[t_1, \ldots, t_r]^W$$

是有限生成多项式代数当且仅当 W 是 $GL_r(Q_p)$ 中的反射群. 如果 W 确是 $GL_r(Q_p)$ 中的反射群, 则 $H^*(X)$ 是有限多个奇维生成元所生成的外代数. 特别, X 是 $\mathbb{F}_p$– 有限, 因而 BX 是 p– 紧群. 由于 [8], 我们对这些 Clark-Ewing$p$– 紧群已经有很好的了解.

在 [6] 中列出了不可约 p–adic 反射群, 其中有一部分不是 Coxeter 群. 它 5 所对应的 Clark-Ewing$p$– 紧群是 (7.6) 怪异的, 当 p 为奇数时, 由此可以构造许多怪异 p– 紧群, 但是 $p=2$ 时, 情况并非如此, 因为仅有的非 Coxeter 2–adic 反射群是 $W(DI(4))$, 它在表中编号 24, 秩是 3, 但其阶是偶数.

要造出怪异的 2– 紧群, 需要更有效的方法. 在他们里程碑式的论文 [18] 中, Jackowski 和 McClure 证明任何紧李群 G 的分类空间 BG 可分解成子群的分类空间的广义 pushout(当 G 的中心为平凡群时, 这些子群是真子群).Dwyer 和 Wilkerson 意识到类似的分解在 p– 紧群时也存在 [11, §8], 并且这可用来构造怪异 2– 紧群.

定理 2.4. [12]. 存在连通 2– 紧群 DI(4) 使得 $H^*(BDI(4), \mathbb{F}_2)$ 作为 Steenrod 代数上

的代数同构于秩为 4 的 mod 2 Dicson 代数 $H^*(B(\mathbb{F}_2)^4,\mathbb{F}_2)^{GL_4(\mathbb{F}_2)}$ 且 $H^*(BDI(4),\mathbb{Q}_2)$ 同构于 $W(DI(4))$ 的不变量环.

假设这样一个空间存在，从它的上同调可构造 [10] 出一个有限的交换表，这个图很像是从一个空间的交换图取上同调而得的，最终可以验证情况的确是这样的，所得交换图的广义 pushout 是怪异 2– 紧群.

因为 $G_1=SO(3)=DI(2), G_2=DI(3)$, 自然要记 $G_3=DI(4)$. 但是当 $n\geq 5$ 时，不存在可以称作 $DI(n)$ 的 2– 紧群.

2.5. 上同调不变量. 若空间 K 是 $\mathbb{F}_p$– 有限的，那么 $H^*(X,\mathbb{Q}_p)$ 在 $\mathbb{Q}_p$ 上也是有限维的，因而可以定义 [13, 4.3, 6.1] Euler 示性数

$$\chi(K)=\sum(-1)^i dim_{\mathbb{F}_p}H^i(K)=\sum(-1)^i dim_{\mathbb{Q}_p}H^i(K;\mathbb{Q}_p)$$

以及上同调维数

$$cd(K)=max\{i|H^i(K)\neq 0\}$$

特别当 X 是连通 p– 紧群时，$H^*(X;\mathbb{Q}_p)$ 是连通有限维 Hopf 代数，因面根据 Borel[3] 或 Milnor-Moore[26],$H^*(X;\mathbb{Q}_p)=E(x_1,\dots,x_r)$ 是有限个奇数维生成元上的外代数，$|x_i|=2d_i-1$, 而 $H^*(BX;\mathbb{Q}_p)=\mathbb{Q}_p[y_1,\dots,y_r]$ 是偶数维生成元上的多项式代数，其中 $|y_i|=1+|x_i|, 1\leq i\leq r$. 生成元的个数 $r=fk(X)$ 称为 [13, 5.9]X 的**秩**.X 的上同调维数是 [14, 3.8]$cd(X)=\max\{i|H^i(X;\mathbb{Q}_p)\neq 0\}=\sum_{i=1}^r(2d_i-1)$. 例如，$cd(\widehat{G})=\dim G, rk(\widehat{G})$ 是 G 的秩，p– 紧 r 维环面的秩为 $r.cd(p)=rk(p)$ 当（且仅当）p 是 p– 紧拟环面群，$rk(S^{2n-1})=1$ 又 $cd(S^{2n-1})=2n-1$、而 $rk(DI(4))=3, cd=(DI(4))=27$[2, Appendix A].

习题 2.6. 平凡 p– 紧群的 Euler 示性数 $\chi(\{1\})=1$. 空的空间的 Euler 示性数 $\chi(\phi)=0$. 对连能 p– 紧群 X,X 平凡 $\Leftrightarrow\chi(X)\neq 0\Leftrightarrow rk(X)=0$ [13, 5.10].

3、态射

***p*–紧群态射**$f:x\to Y$ 是分类空间之间的保持基点的映射 $Bf:BX\to BY$. **平凡态射**$0:X\to Y$ 是常值映射 $B0:BX\to BY$, 而 **恒等态射** $1:X\to X$ 则是恒等映射 $B1:BX\to BX$. 注意在纤维化序列

$$X\overline{f}\to\longrightarrow Y\to Y/f\to BY\overline{Bf}\to\longrightarrow BY \tag{3.1}$$

中，Y/f 表示 Bf 的同伦纤维，如果不会造成误解，Y/f 有时也简记为 Y/X.

两个态射 $f,g:X\to Y$ 称为是 **共轭的** 如果 $Bf,Bg:BX,BY$ 自由同伦. 我们用 $Rep(X,Y)=\Pi_0\mathrm{map}(BX,BY)=[BX,BY]$ 表示 X 到 Y 的同态的共轭类的集合.

3.2. 单射，满射及同构. 态射 $f:X\to Y$ 称为是 **单射** 如果 Y/X 是 $\mathbb{F}_p$– 有限的，如果 Y/X 是某个 p– 紧群的分类空间，则称 f 为 **满射**，如果 Y/X 可缩，就称 f 是 **同构**.

例 3.3. 由于 $X/\{1\}=X,\{1\}\to X$ 是单射，由于 $\{1\}/X=BX,X\to\{1\}$ 是满射，而 $X/X=\{1\}$，因而 $1:X\to X$ 是同构，另外 X^n/X 同伦等价于 X^{n-1}，因而对角映射 $\nabla:X\to X^n$ 是单射．此外还存在 [12, 1.8] 从 $\widehat{Spin}(7)$ 到 $DI(4)$ 的单射．

这些定义是受以下例子的启发而给出的．

例 3.4. 设 $f:G\to H$ 是紧李群之间的单射 (满射)，诱导映射 $Bf:BG\to BH$ 的同伦纤维是 $H/f(G)$(BKerf)，因而对应的 $p-$ 紧群态射 $\widehat{h}:\widehat{G}\to\widehat{H}$ 是单射 (满射)(但是并非 $\widehat{G}$ 与 $\widehat{H}$ 之间所有同态都能从 G 到 H 之间的群同态诱导出来 [16])．

一列 $p-$ 紧群态射 $X\to Y\to Z$ 称为是 **短正合序列** 如果 $BX\to BY\to BZ$ 是纤维化序列．任何 $p-$ 紧群 X 都能嵌入到一个形如 $x_0\to X\to\pi_0X$ 的短正合序列，其中 X_0 是 X 的 **单位分支**; 例如， $p-$ 紧拟环面群的单位分支是 $p-$ 紧环面群 (2.1)．

习题 3.5. 设 $f:X\to Y$ 和 $g:Y\to Z$ 是态射．

(1) 若 f 和 g 是单射，则 $g\circ f$ 也是单射．

(2) 若 X 是 $p-$ 紧拟环面群， $\circ f$ 是单射，则 f 是单射．

(3) 假设 $X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z$ 是短正合列．证明 f 是单射而 g 是满射．再证明如果 X 是 $p-$ 紧 r 维环面， Z 是 $p-$ 紧 s 维环面，则 Y 是 $p-$ 紧 $(r+s)$ 维环面．

应该说，这个练习的第二部分是相当不平凡的，因为要用到 **核** 的理论 [13, 7.1-7.3]．(关于 X 的条件可以去掉 [13, 9.11]．)

对 (3.1) 左端应用 Serre 谱序列可证明

命题 3.6. [13, 6.14]. 若是单射，则

3.7. 非平凡元素．对非平凡元 $p-$ 紧群构造极大环面的第一步也是关键的一步为证明非平凡 $p-$ 群中存在非平凡元素．

定理 3.8. [13, 5.4, 5.5, 7.2, 7.3]．设 X 是非平凡 $p-$ 紧群．则

(1) 存在单射 $\mathbb{Z}/p\to X$．

(2) 若 X 连通，则存在单射 $S\to X$.adw k Sj $p{-}1$ 维环面．

注意由 (2) 可推出 (1): 若 X 的单位分支 X_0 连通，则由 (2) 可得 (3.5) 单射 $\mathbb{Z}/p\to S\to X_0\to X$．若 X_0 平凡，用阻碍理论可证明 (1).(§6 将给出 (3.8) 的一个简略证明

类似地，任何非平凡，连通紧李群包含 $SO(2)$(它们落在极大环面中)．

习题 3.9.

用 (3.8) 和 Lannes 理论 [22] 证明：仅当 X 平凡时， BX 对是 $\mathbf{F}_p-$ 有限的．其次证明：如果一个 $p-$ 紧群态射又是满射，那么它是同构．

4. 同伦不动点空间

设 π 是有限 $p-$ 群， K 是空间．从空 K 为支撑的 **$\pi-$空间** 是指纤维化 $K\to K_{h\pi}\to B\pi$,**$\pi-$映射** 是 $B\pi$ 上的映射 $u_{h\pi}:K_{h\pi}\to L_{h\pi}$.

同伦轨道空间 是全空间， $K_{h\pi}$,**同伦不动点空间**$K^{h\pi}$ 则是截面空间 (它完全可能是空的). 取值映射 $B\pi \times K^{h\pi} \to K_{h\pi}$ 将这些空间联系起来.

为简单起见，我们常常只用空间 K 代表 $\pi-$ 空间，而不提到对应的纤维化， $\pi-$ 映射也用对应纤维之间的映射表示.

例 4.1、 K 上的 **平凡**$\pi-$ 空间结构是平凡纤维化 $K \times B\pi \to B\pi$, 此时同伦轨道空间是 $K_{h\pi} = B\pi \times K$, 同伦不动点空间是 $K^{h\pi} = \mathrm{map}(B\pi, K)$.

同伦不动点空间 $K^{h\pi}$ 对两个变量都是自然的：

• 对任何 $pi-$ 映射 $u: K \to L$, 与 $u_{h\pi}: K_{h\pi} \to L_{h\pi}$ 作复合决定了一个映射 $u^{h\pi}: K^{h\pi} \to L^{h\pi}$.

• 对任何子群 $K < \pi$, 任何 $\pi-$ 空间也是 $K-$ 空间. 置入 $l: k \to \pi$ 诱导出 $Bl: Bk \to B\pi$ 上的映射 $K_{hl}: K_{hk} \to K_{h\pi}$, 以及同伦不动点空间的映射 $K^{hl}: K^{hk} \to K^{hk}$.

同伦轨道空间以及同伦不动点空间都是同伦不变构造，这是说：如果 $pi-$ 映射 $u: K \to L$ 是通常 (非等变) 的同伦等价，那么它诱导出同伦等价 $u_{h\pi}: K_{h\pi} \to L_{h\pi}$ 以及 $u^{h\pi}: K^{h\pi} \to L^{h\pi}$.

4.2. 正合性. 设 U 是 $\pi-$ 映射 $u: K \to L$(通常、非等变) 的同伦纤维 (其中 L 假设是连通的), 或者等价地说， U 是 $u_{h\pi}: K_{h\pi} \to L_{h\pi}$ 的同伦纤维，从 pullback 交换图

$$\begin{tikzcd}
U_{h\overline{u}} \arrow[r] \arrow[d] & K_{h\pi} \arrow[d, "u_{h\pi}"] \\
B\pi \arrow[r, "l"'] & L_{h\pi}
\end{tikzcd}$$

命题 4.3. [13, 10.6]. $U \to K \to L$ 是 $\pi-$ 空间之间的 $\pi-$ 映射，的纤维化序列 $U^{h\pi} \to K^{h\pi} \to L^{h\pi}$ 是同伦不动点空间的纤维化序列 (这里 $l \in L^{h\pi}$ 用作基点).

4.4. 指数律. 指数律的简单的形式为

$$\mathrm{map}(K_{h\pi}, A) = \mathrm{map}(K, A)^{h\pi} \tag{4.5}$$

更一般地，对任何正规子群 $k \lhd \pi$, 有

$$K^{h\pi} = (K^{hk\pi})^{h(\pi/k)}. \tag{4.6}$$

这是因为 $K_{h\pi} = (K_{hk})_{h(\pi/k)}$.

这儿 π 是有限群的假设并不是非要不可的， π 可以 (以后我们将这么做) 是 $p-$ 离散拟环面群或者甚至是 $p-$ 紧拟环面群.

5. 中心化子

设 P 是 $p-$ 紧拟环面群， Y 是任何 $p-$ 紧群， $g: P \to Y$ 是态射.

g 的 **中心化子**,$C_Y(g)$, 有时也简记为 $C_Y(P)$. 它是 $BC_Y(g) = \mathrm{map}(BP, BY)_{Bg}$ 的回路空间, 其中 $\mathrm{map}(BP, BY)_{Bg}$ 指 $\mathrm{map}(BP, BY)$ 中包含 Bg 的分支. 注意到有取值映射 $BC_Y(g) \times BP \to BY$. 作为特例, 在基点取值映射 $BC_Y(g) \to BY$ 给出第一个非平凡的单射的例子.

定理 5.1. [13, 5.1, 5.2, 6.1] $C_Y(g)$ 是 $p-$ 紧群, $C_Y(g) \to Y$ 是单射.

这里的困难在于证明 $C_Y(g)$ 以及 $Y/G_Y(g)$ 是 $\mathbb{F}_p-$ 有限空间. (当 P 是一般 $p-$ 紧群时, 尚不知道上述定理是否依然成立.)

5.2. 中心映射 态射 $g: P \to Y$ 称为是 **中心的**, 如果

(1) $C_Y(g) \to Y$ 是同构, 或者

(2) g 可扩充为态射 $Y \times P \to Y$ 且限制在 Y 上是恒同映射.

这两个条件等价是因为 (2) 中态射的伴随是 (1) 中取值单射的逆.

例 5.3. [15][7, 2.5] [34, 9.6] [11, 12.5]. 令 $C_G(f)$ 是同态 $f: \pi \to G$ 的中心化子, 其中 π 是有限 $p-$ 群, G 是紧李群, $\pi_0(G)$ 是有限 $p-$ 群. 则 $\pi_0(C_G(f))$ 是 $p-$ 群 [17, 1.4]. 且有同构

$$\widehat{C_G(f)} \to C_{\widehat{G}}(\widehat{f})$$

这一同构与同态 $C_G(f) \times \pi \to G$ 诱导出的映射 $BC_G(f) \times B\pi \to BG$ 的 $\mathbb{F}_p-$ 完备化相伴. 因此, 如果 $f: \pi \to G$ 作为李群的同态是中心的, 那么 $\widehat{f}: \pi \to \widehat{G}$ 是 $p-$ 紧李群之间的中心态射.

下面是另外两个中心态射的例子.

定理 5.4. [13, 5.3, 6.1]. **常值态射**$0: P \to Y$ 是中心的.

这关一个例子是 H. Miller [25] 证明的 Sullivan 猜想的直接推论.

与非常艰深的定理 5.4 相反, 对第二个中心态射的例子只须用到初等的阻碍理论.

引理 5.5. 恒同映射$1: S \to S$**是中心的, 其中**S **是**p**-紧环面.**

换句话说, S 是 **交换的**(关于中心映射和交换 $p-$ 紧群, 在 §8 我们还要作更多的讨论). 事实上, **任何** 到 S 的态射都是中心的.

考虑定义在 $p-$ 紧环面上的态射 $g: S \to Y$. 把 S 与其恒同态射的中心化子等同, 那么映射的复合给出态射 $C_Y(g) \times S \to C_Y(g)$. 这个态射在第二个因子上的限制是 g 通过它自己的中心化子的 $g': s \to C_Y(g)$.

引理 5.6. [13, 8.2, 8.3]. 设 $g: S \to Y$ 是 $p-$ 紧环面到 Y 的单射. 则存在 $p-$ 紧群的短正合列

$$S \xrightarrow{g'} C_Y \to C_Y(g)/g'$$

且 $S \xrightarrow{g'} C_Y \to Y$ 与 g 共轭.

注意 (5.6) 保证了齐次空间 $C_X(g)/g'$ 的分类空间 $B(C_X(g)/g')$ 的存在性.

习题 5.7. 任何单射 $S \to S$ 是同构.

6. 代数 Smith 理论

设 π 是有限 $p-$ 群，而 $p-$ 紧群 X 和 Y 的分类空间 BX 和 BY 是 $\pi-$ 空间. 令 $f: X \to Y$ 是单射使得 $Bf: BX \to BY$ 是 $\pi-$ 映射. 选取基点 $y \in (BY)^{h\pi}$ 由 (4.3.) 知在 Y/X 上有 $\pi-$ 空间结构使得 $Y/X \to BX \to BY$ 是 $\pi-$ 映射的纤维化序列，而 $(Y/X)^{h\pi} \to (BX)^{h\pi} \to (BY)^{h\pi}$ 是同伦不动点空间的纤维化序列.

所谓代数 Smith 理论可概括在下面的定理中. 它主要是 J.Lannes 及其合作者的工作. 这个理论涉及纤维 $(Y/X)^{h\pi}$ 的上同调性质，尤其是它的 Euler 示性数 (2.5).

定理 6.1. [13, 4.5、4.6, 5.7] [9] [24]. 在上面的条件下，以下性质成立:

(1) $(Y/X)^{h\pi}$ 是 $\mathbb{F}_p-$ 有限的.

(2) $\chi((Y/X)^{h\pi} = \chi(Y/X)$ modp.

(3) $\chi((Y/X)^{h\pi}) = \Lambda(Y/X.\pi)$、当 π 是循环群时，6.1(3) 中的 Lefschetz 数是交错和

$$\Lambda(Y/X,\pi) = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \mathrm{trace} H^i(\xi;\mathbb{Q}_p)$$

其中 ξ 是 π 的任一生成元， $H^i(\xi;\mathbb{Q}_p)$ 是 $H^i(Y/X,\mathbb{Q}_p)$ 上由 ξ 诱导出的自同构.

在经典 Smith 理论中有类似的 Euler 示性数公式，在那儿研究的是有限复形上有适当的群作用的不动点空间.

我不对 (6.1) 的证明作任何说明，细节请读者参阅 [23].

如果用 $p-$ 离散环面 (2.1)$\widehat{T}$ 代替有限 $p-$ 群 $\pi-$, 就得到一个特有用的结果:

推论 6.2. [13, 4.7, 5.7][9]. 设 $Bf: BX \to BY$ 是 $\widehat{T}-$ 映射. 则:

(1) $\chi((Y/X)^{hA}) = \chi(Y/X)$, 这里 $A < \widehat{T}$ 是任何有限子群.

(2) $(Y/X)^{h\widehat{T}} \neq \phi$, 如果 $\chi(Y/X) \neq 0$.

对 $\widehat{T}$ 的无限子群，特别 $\widehat{T}$ 自己，尚不知道 (1) 是否依然成立.

为了表明 Smith 理论的威力，我现在提纲挈领地证明 (3.8).

设 X 是连通的，非平凡 $p-$ 紧群，于是 (2.6) $rk(X) > 0$. 考虑映射

$$\mathrm{map}(B\imath, BX) : \mathrm{map}(B\mathbb{Z}/p^{n+1}, BX) \to \mathrm{map}(B\mathbb{Z}/p^n, BX) \tag{6.3}$$

它是由置入 $\imath: \mathbb{Z}/p^n \to \mathbb{Z}/p^{n+1}, n \geq 0$ 诱导出的. 将 BX 当作平凡 $\mathbb{Z}/p^{n+1}-$ 空间, $B\mathbb{Z}/p^n = (\mathbb{Z}/p)_{h\mathbb{Z}/p^{n+1}}$ 当作 $B\mathbb{Z}/p^{n+1}$ 的 $p-$ 层复盖映射的全空间，我们得到 (4.1, 4.5)

$$\mathrm{map}(B\mathbb{Z}/p^{n+1}, BX) = (BX)^{h\mathbb{Z}/p^{n+1}}.$$

$$\mathrm{map}(B\mathbb{Z}/p^n, BX) = \mathrm{map}(B\mathbb{Z}/p.BX)^{h\mathbb{Z}/p^{n+1}} = (BX^p)^{h\mathbb{Z}/p^{n+1}}$$

而 $\mathrm{map}(B\imath, BX) = (B\triangle)^{h\mathbb{Z}/p^{n+1}}$ 则是由 $p-$ 重对角映射 (3.3) $B\triangle: BX \to \mathrm{map}(\mathbb{Z}/p, BX)$

$= BX^p$ 诱导出的，后者是一个 $\mathbb{Z}/p^{n+1}-$ 射，其纤维是 X^p/X.

由 (6.1),(6.3) 的同伦纤维 $(X^p/X)^{h\mathbb{Z}/p^{n+1}}$ 是 $\mathbb{F}_p-$ 有限的，而漂亮但又简单的 Lefschetz 数计算 [13, 5.11]

$$\chi((X^p/X)^{h\mathbb{Z}/p^{n+1}}) = \Lambda(X^p/X;\mathbb{Z}/p^{n+1}) = p^{rk(X)}$$

表明 (2.6) 它非空而且不可缩.

如果 $B\mathbb{Z}/p$ 到 BX 的所有映射都是平凡的，则 (5.4) $\mathrm{map}(B\iota, BX)$ 就是全空间 map $(B\mathbb{Z}/p, BX) = BC_X(0)$ 到 $n=0$ 时 (6.3) 的底空间 BX 之间的同伦等价，因而其同伦纤维必定可缩 —— 但事实并非如此，因此存在非平凡映射 $Bf_1 : B\mathbb{Z}/p \to BX$、即 [13, §7] 存在单射 $f_1 : \mathbb{Z}/p \to X$. 当 $n=1$ 时，(6.3) 的映射在 Bf_1 上的同伦纤维非空，由 [13. §7] 知，f_1 差一个共轭可扩充为单射 $f_2 : \mathbb{Z}/p^2 \to X$. 用归纳法，就得到态射 $f_\infty : B\mathbb{Z}/p^\infty \to X$, 且 f^∞ 在 $B\mathbb{Z}/p^n, \forall n \geq 1$ 上的限制为单射. 因此 Bf_∞ 的 $\mathbb{F}_p-$ 局部化是 (2.1)$p-$ 紧 1 维环面 S 到 X 的单射 $f : S \to X$.

这就证明了 (3.8).(5.1) 也也是 (6.1) 直接推论.

7. 极大环面和 Weyl 群

设 X 是 $p-$ 紧群，X 的极大环面可归纳造出.

若 $X(= C_X\{1\}/\{1\})$ 不是同伦离散的，则由 (3.8) 有一个从 1 维 $p-$ 紧环面 S_1 到 X 的单射 S_1 AVIX. 从 (5.6) 知，这个单射有一个通过其中心化子的分解，并给出 $p-$ 紧的短正合列

$$S_1 \to C_X(S_1) \to C_X(S_1)/S_1.$$

若 $C_X(S_1)/S_1$ 不是同伦离散的，同样根据 (3.8), 存在从 1 维 $p-$ 紧环面 S_2/S_1 到 $C_X(S_1)$ $/S_1$ 的单射 $S_2/S_1 \to C_X(S_1)/S_1$. 沿这个单射作 Pullback 诱导出 $p-$ 紧群态射的交换图

$$\begin{array}{ccccc}
S_1 & \longrightarrow & S_2 & \longrightarrow & S_2/S_1 \\
\| & & \downarrow & & \downarrow \\
S_1 & \longrightarrow & C_x(S_1) & \longrightarrow & C_x(S_1)/S_1
\end{array}$$

其中 S_2 由 (3.5) 知是 2 维 $p-$ 紧环面，中间的垂直箭头是单射 (因为 $C_X(S_1)/S_2 \simeq \frac{C_X(S_1)/S_1}{S_2/S_1}$ 是 $\mathbb{F}_p-$ 有限的). 因此存在定义在 2 维 $p-$ 紧环面上的单射 $S_2 \to C_X(S_1) \to X$.

根据上同调维数的公式 (3.6), 归纳过程最终将停止，并得到 X 的 "所谓" 极大环面. 这正是下面所要定义的概念.

定义 7.1. [13, 8.8, 8.9] 极大环面是 $p-$ 紧环面 T 到 X 的单射 $i;T \to X$, 使得 $C_X(T)/T$ 是同伦离散 $p-$ 紧群.

这样我们便建立了 (1.1) 的存在性部分.

令 $i:T \to X$ 是极大环面，且 $Bi: BT \to BX$ 是纤维化，Weyl空间 $\mathcal{W}_T(X)$ 是 BX 上 BT 的所有自映射构成的拓扑 monoid. 作为空间，$\mathcal{W}_T(X)$ 是映射 $\mathrm{map}(BT, Bi)$: $\mathrm{map}(BT, BT) \to \mathrm{map}(BT, BX)$ 在 Bi 上的纤维，由 (5.5) 知

$$\mathcal{W}_T(X) = (X/T)^{hT} \coprod_{\omega} C_X(i)/C_T(\omega) = \coprod_{\omega} C_X(T)/T. \tag{7.2}$$

其中不交并是对所有那些 $\omega \in \mathrm{Rep}(T,T)$ 取的，根据 (3.5)、(3.7), 它们首先必须是中心自同构，其次 $i \circ \omega$ 与 i 必须共轭. (7.2) 的右边表明 weyl 空间是同伦离散的.

定义 7.3. [13, 9.6]. Weyl群 $W_T(X)$ 是 Weyl 空间的连通分支所组成的群 $\pi_0\mathcal{W}_T(X)$.

利用 (7.2)、再由离散逼近 (2.1) 知，同伦不动点空间 $(X/T)^{hT}$ 同伦等价于 [13, 6.1, 6.7]$(X/T)^{hA}$. 其中 $A < \check{T}$ 某个有限子群，因面 $(X/T)^{hT}$ 是 $\mathbb{F}_p-$ 有限的，再由 (6.2) 我们有

$$\chi(X/T) = \chi((X/T)^{hA}) = \chi((X/T)^{hT}) = |W_T(X)| \tag{7.4}$$

这表明齐次空间 X/T 的 Euler 示性数等于 Weyl 群的阶；特别有 $\chi(X/T) > 0$.

现在，(6.2) 的另一应用是可证明 (1.1) 的唯一性部分：设 $i_1 : T_1 \to X$ 和 $i_2 : T_2 \to X$ 都是极大环面. 由于 $(X/T_2)^{h\check{T}_1} \neq \phi \neq (X/T_1)^{h\check{T}_2} = (X/T_1)^{hT_2}$, 这意味着存在态射 u : $T_1 \to T_2$, $v : T_2 \to T_1$, 使得 i_1 共轭于 $i_2 \circ u$ 而 i_2 共轭于 $i_1 \circ v$, 又由 (3.5, 3.7) 知 u, v 必定同构.

如果我们转向连通 $p-$ 紧群，就得到 [13] 的关键结果.

命题 7.5. [13, 9.1]. 设 X 上连通 $p-$ 紧群，$T \to X$ 是极大环面，则态射 $T \to C_X((T)$ 是同构.

证明同样也要用到 Smith 理论.

叵 $C_X(T)/T = \{1\}$, 用 (7.2) 可证明：monoid 态射 $W_T(X) \to \mathrm{Rep}(T,T) = [BT, BT]$ 是单的，即，$W_T(X)$ 在 $H_2(BT, \mathbb{Q}_p) := H_2(BT, \mathbb{Z}_p) \oplus \mathbb{Q}$ 中的表示上忠实的. $W_T(X)$ 等变映射 $Bi : BT \to BX$ 诱导出代数映射

$$H^*(Bi; \mathbb{Q}_p) : H^*(BX; \mathbb{Q}_p) \to H^*(BT; \mathbb{Q}_p)^{W_T(X)}$$

后者是这个忠实表示的不变量环. 在 [13, 9.13] 中，Dwyer 和 Wilkerson 把 Becker-Gottlieb transfer 推广到纤维是 $\mathbb{F}_p-$ 有限的情形，他们的构造用到 Kan-Thurston 定理 [20], 然后他们用这个 transfer 证明：$H^*(Bi; \mathbb{Q}_p)$ 是单射. 由于 X/T 是 $\mathbb{F}_p-$ 有限的，因此 $H^*(BX; \mathbb{Q}_p) \subseteq H^*(BT; \mathbb{Q}_p)$ 是有限扩张，因而这两个环的 Krull 维数相同，即，$rk(T) = rk(X)$(1.3.(1)).[13] 的最成功处是 (1.3, 12) 证明 $H^*(BX; \mathbb{Q}_p)$ 同构于 Weyl 群的不变量环. 由于不变量环是多项式代数 (2.5), 经典的 Shephard-Todd 定理 [2, 7.2, 2.1] 告诉我们 (1.3.(3))$W_T(X)$ 可表示为向量空间 $H_2(BT; \mathbb{Q}_p)$ 中的反射群. 因此，$W_T(X)$ 必定同构于 Clark-Ewing 的表 [2, 7.1] 中的不可约 p-adic 反射群的乘积，从而 $H^*(BX; \mathbb{Q}_p)$ 必定同构于对应分次不变量环的张量积.

例 7.6. 设 G 是紧李群，$\pi_0(G)$ 为 $p-$ 群. 则李群论中的任何极大环面 $T\to G$ 诱导出 $p-$ 紧群 $\widehat{G}$ 的极大环面 $\widehat{T}\to whG$. 它们相对应的 Weyl 群彼此同构. $p-$ 紧群拟环面群 P 的 Weyl 群是 $\pi_0(P)$.Sullivan 球 $(S^{2n-1})_P$ 的 Weyl 群是 $\mathbb{Z}/n$, 而 Clark-Ewing $p-$ 紧群 $(B(\check{T}\rtimes w))_p$ 的 Weyl 群是 W. $DI(4)$ 的 Weyl 群是 $W(DI(4))$, 它抽象同构于一个阶为 2 的循环群与另一个阶为 168 的单群的乘积.

习题 7.7. 将上述构造 $p-$ 紧群的极大环面的方法稍作修改，可用来构造紧李群的极大环面，这与通常的作法不相同的，参见 [23], [13, 1.2].

尽管我们已掌握了 $H^*(BX;\mathbb{Q}_p)$, 但处理 $\mathbb{F}_p-$ 系数上同调代数 $H^*(BX)$ 却完全是另一回事，两者的区别在于，$H^*(BX;\mathbb{Q}_p)$ 嵌入到多项式环 $H^*(BT;\mathbb{Q}_p)$ 中，而 $H^*(BX)$ 则嵌入到 $H^*(BN_p(T))$ 中，其中 $BN_p(T)$、称为极大环面的 $p-$正规化子[13, 9.8], 是从 Weyl 群的 Sylow$p-$ 子群在 BT 上的作用用 Borel 构造所得的空间. 结果是，$H^*(BX)$ 未必是多项式代数，而实际上可能是令人吃惊的复杂 [36]. 然而，Dwyer 和 Wilkerson 仍然能解决或许是最基本的结构性问题.

定理 7.8. [13, 2.3]. 对任何 $p-$ 紧群 X,$H^*(BX)$ 是有限生成 $\mathbb{F}_p-$ 代数.

已知 (7.8), 就比较容易验证 [13, 1.1] 如下长时间未得到解决的猜想：对任何有限回路空间 X.$H^*(BX)$ 是有限生成 $\mathbb{F}_p-$ 代数.

8. 分类

分类 $p-$ 紧群的方案虽尚未完成，但却已展示了它与李群论之间深刻的类似关系.

8.1. 中心. $p-$ 紧群称为是交换的，如果它上面的恒同映射是中心的. 由 (5.5),$p-$ 紧环面是交换的.

定理 8.2. [29, 3.1] $p-$ 紧群交换当且仅当它同构于一个有限交换 $p-$ 群与一个 $p-$ 紧环面的乘积.

若 $Z\to X$ 是中心单射，则由 [11, 5.1][29, 3.5] 知，Z 是交换的.

定理 8.3. [11, 1.2][29, 4.4]. 对任何 $p-$ 紧群 X, 存在中心的单射 $Z(X)\to X$ 使得任何映射到 X 的中心单射均有通过 $Z(X)$ 的分解，而且本质上这种分解是唯一的.

(8.3) 给出的终端 (terminal) 中心单射，根据 (8.3) 本质上是唯一的，称为 X 的中心.

中心 (的离散逼近) 可定义为 $C_X(T)$(的离散逼近) 中这样一些元素的群：在 X 中是中心的. 另一可以称为中心的对象是恒同态的中心化子. 幸运的是，二者之间没有差别.

定理 8.4. [11, 1.3] 对应于同构 $C_X(Z(X))\to X$ 的映射，$BZ(X)\to \mathrm{map}(BX,BX)_{B1}$ 是同伦等价.

(8.4) 的证明涉及到将 BX 分解为广义的 pushout、这一技巧在 (2.4) 的证明中也用到过.

例 8.5. 设 G 是连通紧李群，$Z(G)$ 是李群意义上的中心. 则映射

$$(BZ(G))_p \to \mathrm{map}(B\widehat{G}, B\widehat{G})_{B1} \leftarrow BZ(\widehat{G})$$

分别共轭于 $BZ(G)\times BG \to BG$ 和 $BZ(\widehat{G})\times B(\widehat{G}) \to B(\widehat{G})$ 的 $\mathbb{F}_p$- 局部化，且这两个映射都是同伦等价 [11, 14, 12.1](8.4). 若 $p=3$,p- 紧群 $\widehat{E_6}$ 的中心是 3 阶循环群，其它情况下，它是平凡的.

对连通 p- 紧群 X, 我们有 [29, 5.2]

$$rk(Z(X)) = \dim_{\mathbb{Q}_p}(\pi_1(X)\otimes\mathbb{Q}_p) = \dim_{\mathbb{Q}_p} H_2(BT;\mathbb{Q}_p)^{W_T(X)}, \tag{8.6}$$

因此中心是有限群当且仅当基本群是有限群. p- 紧商群 $X/Z(X)$[13, 8.3] 的中心平凡 [11, 6.3][29, 4.6]

由于以下结果，连通 p- 紧群的分类本质上归结为单连通 p- 紧群的分类.

定理 8.7. [29, 5.4] 对任何连通 p- 紧群 X, 存在短正合序列

$$A \to Y \times X$$

其中 A 是有限交换 p- 群，$A\to Y\times S\overline{pr_1}\to\!\!\to Y$ 是到单连通 p- 紧群 Y 的中心单射，S 是 p- 紧环面.

(8.7) 中，Y 是 X 的万有覆盖 p- 紧群，A 是 $\pi_1(X)$ 的挠子群，$S=Z(X)_0$ 是中心的单位分支.

8.8. 半单性. 设连通 p- 紧群 X 有极大环面 $T\to X$, 称 X 是 单的 如果 Weyl 群 $W_T(X)$ 在 $H_2(BT;\mathbb{Q}_p)$ 上的忠实表示是不可约表示. 根据构造，Sullivan 球和 Clark-Ewing p- 紧群 (2.2) 是单的. 对任何连通紧单李群 G, $\widehat{G}$ 是单的.

对任何连通 p- 紧群 X,$W_T(X)$ 表示 $H_2(BT;\mathbb{Q}_p)$ 分解为不可约表示的直和

$$H_2(BT;\mathbb{Q}_p) = M_1\oplus\cdots\oplus M_n$$

只要中心 $Z(X)=0$ 平凡，所有 M_i 都是非平凡的 (8.6). 而且由 [14, 1.5] 知，这个 $\mathbb{Q}_p[W_T(X)]$ 模的分裂给出 $\mathbb{Z}_p[W_T(X)]$ 模的分裂

$$H_2(BT;\mathbb{Z}_p) = L_1\oplus\cdots\oplus L_n$$

其中 $L_i = H_2(BT;\mathbb{Z}_p)\cap M_i$.[14, 1.4] 给出了一个分裂的判别准则，它保证 $\mathbb{Z}_p[W_T(X)]$ 模 $H_2(BT;\mathbb{Z}_p)$ 的任何分裂可实现为 X 的分裂，由此得到以下关于半单性的主要结果.

定理 8.9. [14, 1.3] [30]. 中心平凡的任何连通 p- 紧群同构于一些单 p- 紧群的乘积.

对任何单连通 p- 紧群 Y,$Z(Y)$ 为有限群，中心平凡的商群 $Y/Z(Y)$ 可分解为单因子的乘积，[14, 1.6] 保证这个分解可提升为 Y 的分解，因而 Y 也是单因子的乘积.

(8.7) 和 (8.9) 的分解对 p- 紧群的自同态的分类也是有益的，参见 [28, 27].

分类方案的最后一步是研究单 p- 紧群的存在与唯一性，这个问题尚未获得解决. 这个问题的核心似乎是两个障碍群.

参 考 文 献

[1] J.C.Becker and D.H.Gottlieb, *Transfer maps for fibrations and duality*, Comp. Math. **33** (1976), 107–133.

[2] D.J. Benson, *Polynomial invariants finite groite groups*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 190. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.

[3] A.Borel, *Sur la cohomologie des espaces fibrés prinsipaux et des espaces homogénes de groupes de Lie compacts*, Ann. of Math. (2) **57** (1953), 115–207.

[4] A.K. Bousfield, *The localization of spaces with respect to homology*, Topology **14** (1975), 133–150.

[5] A.K. Bousfield and D.M.Kan, *Homotopy limits, completions and localizations*, 2nd ed., Lecture Notes in Math., vol. 304, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, and New York, 1987.

[6] A.Clark and J.R. Ewing, *The realization of polynomial algebras as cohomology rings*, Pacific J. Math. **50** (1974), 425–434.

[7] W.G.Dwyer, H.R. Miller, and C.W.Wilkerson, *The homotopy uniqueness of* BS^3, Algebraic Topology (Barcelona, 1986)(J. Aguadé and R. Kane, eds.), Lecture Notes in Math., vol. 1298, Springer-Verlag, Beidelberg, and New York, 1987, pp. 90–105.

[8] ——, *Homotopical uniqueness of classifying spaces*, Topology **31** (1992), 29–45.

[9] W.G.Dwyer and C.W.Wilkerson, *Smith theory and the functor T*, Comment. Math. Helv. **66** (1991), 1–17.

[10] ——, *A cohomology decomposition theorem*, Topology **31** (1992), 433–443.

[11] ——, *The center of a p-compact group*, The Čech Centennial: A Conference on Homotopy Theory (M. Cenkl and H. Miller, eds.), Contemp. Math., vol. 181, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, pp. 119–157.

[12] ——, *A new finite loop space at prime 2*, J. Amer. Math. Soc. **6** (1993), 37–64.

[13] ——, *Homotopy fixed point methods for Lie groups and finite loop spaces*, Ann. of Math. (2) **139** (1994), 395–442.

[14] ——, *Product splittings for p-compact groups*, Preprint, 1994.

[15] W.G.Dwyer and A.Zabrodsky, *Maps between classifying spaces*, Algebraic Topology (Barcelona, 1986) (J. Aguadé and R.Kane, eds.), Lecture Notes in Math., vol. 1298, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, and New York, 1987, pp. 106–119.

[16] S. Jackowski, J.McClure, and R. Oliver, *Homotopy classification of self-maps of BG via G -actions*, Part I, Ann. of Math. (2) **135** (1992), 183–226.

[17] ——, *Homotopy classification of self-maps of BG via G-actions, Part* II, Ann. of Math. (2) **135** (1992), 227–270.

[18] S.Jackowski and J.E.McClure, *Homotopy decomposition of classifying spaces via elementery abelian subgroups*, Topology **31** (1992), 113–132.

[19] A.Jeanneret and U.Suter, *Réalisation topologique de certaines algébres associées aux algébres de Dickson*, Algebraic Topology, Homotopy and Group Cohomology (Proceedings, Barcelona, 1990)

(F.R.Cohen, J.Aguadé, and M.Castellet, eds.), Lectyre Notes in Math., vol. 1509, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, and New York, 1992, pp. 235–239.

[20] D.M.Kan and W.P. Thurston, *Every connected space has the homology of a* $K(pi, 1)$, Topology **15** (1976), 253–258.

[21] R.Kane, *The homology of Hopf spaces*, North-Holland Math. Library, vol. 40, Elsevier, Amsterdam, 1988.

[22] J.Lannes, *Sur les espaces fonctionnels dont la source set la classifiant d'un p-group abélien élémentaire*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **75** (1992), 135–244.

[23] ——, *Theorie homotopique des groupes de Lie [d'aprés W.G.Dwyer and C.W.Wilkerson]*, *Sém. Bourbaki* **776** (1993), 1–23.

[24] J.Lannes and S.Zarati, *Théorie de Smith algébrique et classification des* $H^*V-\mathcal{U}$*-injectifs*, Preprint.

[25] H.R.Miller, *The Sullivan conjecture on maps from classifying spaces*, Ann. of Math. (2) **120** (1984), 39–87.

[26] J.W.Milnor and J.C.Moore, *On the structure of Hopf algebras*, Ann. of Math. (2) **81** (1965), 211–264.

[27] J.M.M≤ller, *Completely reducible p-compact groups*, The Čech Centennial: A Conference on Homotopy Theory (M. Cenkl and H. Miller, eds.). Contemp. Math.,vol.181, Amer. Math. Soc., Providence, Rl, 1995, pp. 369–383.

[28] ——, *Rational isomorphisms of p-compact groups*, Topology (toappear).

[29] J.M.M≤ller and D.Notbohm, *Centers and finite coverings of finite loop spaces*, *J.Reine Angew. Math* **456** (1994), 99–133.

[30] D.Notbohm, *Unstable splittings of classifying spaces of p-compact groups*, Preprint, 1994.

[31] D.Rector, *Loop structures on the homotopy type* S^3, Symposium on Algebraic Topology (P. Hilton, ed.), Lecture Notes in Math., vol. 249, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, and New York, 1971, pp. 99–105.

[32] ——, *Subgroups of finite dimensional topological groups*, J. Pure Algebra **1** (1971), 253–273.

[33] D.Rector and J.Stasheff, *Lie groups from a homotopy point of view*, Localization in Group Theory and Homotopy Theory and Related Topics (P.Hilton, ed.), Lecture Notes in Math., vol. 418, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, and New York, 1974, pp. 121–131.

[34] L.Schwartz, *Unstable modules over the Steenrod algebra and Sullivan's fixed point conjecture*, Univ. of Chicago Press, Chicago, IL, 1994.

[35] L. Smith and R.M. Switzer, *Realizability and nonrealizability of Dickson algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **89** (1983), 303–313.

[36] H.Toda, *Cohomology of the classifying spaces of exceptional Lie groups*, Manifolds Tokyo 1973 (A.Hattori, ed.), Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1975, pp. 265–271.

(潘建中 译　沈信耀 校)