实验数学 · 恒等式 · 哥德巴赫猜想

正确理解实验数学的意义

Borwe., J 余敏宇

O1

J. Borwein, P. Borwein, R. Girgensohn, S. Parnes

引言

发现与验证. 哲学家经常将数学与物理科学区别开来. 当物理科学不得不通过实验使自己符合于现实世界之时，数学家或多或少可以在思维的抽象世界中自由驰骋. 几千年来，这种情况对数学家一直很适用，但计算机已开始使之发生变化. 计算机为我们提供了观察新的数学领域的能力 (这种新的数学领域在人类的思维活动没有任何帮助时是进入不了的), 但这是有代价的. 有许多领域目前只能通过实验了解. 计算机使我们能穿越真空的双曲空间的领地，考察 π 的 10 亿多位数字，但是，经历一件事与理解一件事是很不相同的.

对数学荒原的这些探索，多数是孤立的实例. 在一个局部的领域中研究出的富有启发的约定，图象，图形等，在另一个局部的领域中往往没有什么用处. 在每个局部的领域中，未被证明的结论不断增加，他们作为猜想、强信念 (即对某一陈述的真理性或某个事物的实在性具有极强的信念 —— 译者注) 或可能只是些令人好奇的东西，象民间传说似的穿梭于国际互联网络.

我们希望，通过今天对实验数学的关注，将为明天研究出一种统一的方法论.

我们从何处来. 本文起因于一个简单的问题："我们如何使用计算机来研究只能靠计算来解决的数学问题？" 通过考察某些长期存在的关于基本常数的小数和连分数展开式的猜想和强确信，我们开始了目前对 实验数学 的探索. 这些问题，人们一致认为用现有数学方法是绝对解决不了的. 统一场论或用于治疗癌的"魔术弹"(magic bullet) 比较起来似乎还是可以入手研究的问题. 但是，他们的陈述却诱人的简单.

我们认为，我们的方法不会产生针对这些陈述的反例或证明，我们的目的是实现系统化和交流.

为了实现 实验数学 的系统化，我们关心如何产生 "完全" 可靠的数据，如何产生可以量化和进行有效交流的各种洞察所见. 起初，我们将实验物理作为模型. 我们特别感兴趣的是，物理学家是怎样验证结论的，为保证数据的可靠性他们又是怎样努力的. 在

原题：Making Sense of Experimental Mathematics. 译自：*The Mathematical Intelligencer*, Vol. 18, No. 4, 1996, pp. 12–18.

此，我们可以在实验物理和数学之间划一条有用的区分界线．从自然界中显然不可能获得完美无缺的实验数据，而数学的情形并非如此，原始数学数据的可靠通常是可以确保的．

我们发现，最令人伤脑筋的问题是对洞察所见的交流．与大多数实验性的领域不同，数学没有适合于传递压缩数据和洞察所见的词汇．与大多数物理实验一样，从数学实验中获取的原始信息的数量一般都太大，任何人都难以掌握．因此，收集到的数据需要压缩和分类．

为了弥补缺少统一词汇的不足，我们大量借用统计学和数据分析中的术语来解释我们的结论．现在，我们只能试着用直观，好懂，可信的方式表述结果．我们最终希望，数学有一种多层次的，超出原主题 (hypertextual) 的表达方式，使不同领域的数学家能够浏览和解释别人的结果，从而跨越将数学的不同分支互相隔离开来的语言障碍．所有这些问题在研究报告 [3] 和 [4] 中都有较长篇幅的论述．

在本文的其余部分，我们将提出实验数学的各种模式，并且要问：他们如何才能并入严格意义下的数学之中．

实验数学

杂志．当前，人们关注实验数学的一个焦点是一本叫做《实验数学》 (Experimental Mathematics) 的杂志．但是，它是否真正试图改变我们做数学的方式，或改变我们写数学的方式呢？我们从该刊的一篇介绍性文章 [6]"论本刊" (作者 David Epstein, Silvio Levy, Rafael de la Llave) 中摘录"实验"的定义开始．

实验一直是，现在更是数学发现的一种重要方法．(高斯称，他获取数学真理的途径是"通过系统的实验".) 然而，这容易被只给出漂亮，周密，严格结论的传统所掩盖． ([6], p. 1).

坚持这种传统的作者不是有意要将实验的结论贬低为不漂亮，不全面，不严格的吗？我们认为这些不是实验数学的本质特性，相反，这些正是我们必须避免的陷井．

该刊感兴趣刊登些什么呢？编辑们仍然重视传统数学的优点，而且不反对发表得到证明的由实验发现的结果．然而，他们指出："将数学创造过程中的一个重要部分在公开讨论中隐藏起来，我们认为是不正常的．数学界大部分人几乎总是不知道新结果是怎样发现的，这是我们的损失．"([6], p. 1). 编辑们好象主张改变写数学的风格，相对于演绎和分析，他们强调数学的创造和综合方面．他们希望，"更早地共享洞察所见，会增加将其引向定理的可能性：有趣的猜想常常由缺乏给出正式证明方法的研究人员表述出来，而手头上有这些方法的人却在其他地方到处寻找．" ([6], p. 1).

那么，那本杂志刊登的文章看起来是什么样的呢？最近的一个例子是 D. H. Bailey, J. Borwein 和 R. Girgensohn[2] 所写的"欧拉和的实验计算"．作者描述了如何由一个惊人的发现引发了他们对欧拉和的兴趣：

1993 年 4 月，滑铁卢大学的大学生 Enrico, Au-Yeung 使我们中的一位注意到了下

述奇怪的现象 ([2], p. 17):

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k})^2K^{-2}=4.59987\cdots$$
$$\approx\frac{17}{4}\zeta(4)=\frac{17\pi^4}{360}.$$

这种凭好运气的发现想必随时都有，但除它涉及更广泛的内容，否则它仍只是一件令人好奇的珍品而已．我们现在着手考虑更广泛的问题：将一个用于探测整数关系的算法系统地用于上述类型的但内涵更广的各类求和问题，试图求出用 ζ 函数表示的这些和的估值 (详见附 1)，接着，一些通过实验发现的计算结果得到了严格证明，另一些则还是猜想．尽管 Au-Yeung 的洞察力可能使我们大为惊讶，但实验者的方法看起来却是很自然，很系统的．

演绎主义风格：《实验数学》的编辑正在提倡改变写数学文章的方式，更强调做数学的过程．Imre Lakatos 在其虽有争议但很有影响的《证明与反驳》一书中，主张进行类似的改变．

Lakatos 用一种与介绍《实验数学》时用的很相似的口气，谈论欧几里得的方法论．

欧几里得方法论发展了某种带强制性的表达风格．我称之为"演绎主义风格"．这种风格以一串煞费苦心陈述的公理，引理和 (/或) 定义开始．公理和定义看上去往往是人为的且是令人迷惑的复杂、绝没有告诉你这复杂性缘何而来．一串公理和定义之后则是用词谨慎的定理，它们都带有众多的条件，而这些条件似乎谁都不可能猜到．定理之后便是<u>证明</u>．([9], p. 142)．

这是所谓的形式理解 (formal understanding) 的本质．我们知道那些结论是正确的，因为我们已经通过了数学过程的考验，留下来的就是真理的实质．但是，"演绎主义风格隐藏了人们所作的努力，隐藏了经历过的冒险；整个故事消失了，在证明过程中不断尝试的定理的表述注定被遗忘了，最终的结果被提升到神圣的绝对正确的境地．"([9], p. 142)

或许，演绎主义风格最极端的例子是那些由 Wilf 和 Zeilberger 的算法证明理论作后盾的计算机生成的证明．对于包括"超几何"恒等式的更广泛的一类问题，这一理论确实提供了一种超出洞察力的理解 (meta-insights)．然而计算机生成的证明，虽然大部分数学家能理解，却是索然无味的．在此，我们不讨论这一理论的细节，建议读者参阅 Doron Zeilberger 在 [14] 中的精彩介绍．我们要问的是，这种证明如何才能有助于我们对数学的直观想象．

Zeilberger 和恒等式的包裹

对可靠性估价．目前，所谓对一个恒等式得到了 Wilf-Zeilberger(WZ) 式的证明只相当于知道该恒等式是成立的．实际上，Doron Zeilberger[13] 主张只在命题的结尾处留一个 QED(证毕) 和作者的一个标记 (表明他已用计算机做了证明该恒等式所需的计算) 即可．这种方法的优点是结论完全被包裹起来了．正如人们不会操心计算机如何乘两个大整数，或如何求一个逆矩阵一样，我们现在有了不必检验其证明的结论．

如果只考虑确实性而不考虑其他，我们到此就可以结束了．幸运的是，数学所需要的远比这多．本节我们将讨论这一理论所蕴含的意义以及 Zeilberger 的数学哲学（参见"标明价格的定理：明天的半严格数学文化"[14]）．

在主张真正的实验数学的人中，两个人的声音最强烈，语言有时也最夸张．我们将集中讨论 Zeilberger，但是 G. J. Chaitin 不应也不会被忽视．

我们从 Zeilberger 的"未来的抽象"开始：

在某种精确意义下，我们证明哥德巴赫猜想成立的概率大于 0.99999，但要彻底证明其真实性，需要一笔 100 亿美元的预算．（[14]，p. 980）．

看到将概率赋予数学真理，我们可能会感到震惊，但一旦从震惊中清醒过来，通常就会抱怨 100 亿美元太荒谬了．这些年来，计算机正越来越好，越来越便宜．"要彻底证明它，需要 100 亿美元的预算"这意味着什么？从他的文章看很显然，这是对彻底解决这个问题的难度的一个附加的度量．假如我们知道，分别花费 100 亿，20 亿和 2 万亿美元证明了有关引理，黎曼猜想将得到证明．那么，我们不仅立刻就能说出证明该猜想的"费用"，而且知道证明中，什么地方的新思想是本质的．（假定 2 万亿美元是一大笔钱）．

"费用"的引入马上促使我们优先考虑生产率与效率的问题，这在商业界是普遍的，但现在正迅速侵入学术界．

获得绝对的确实性是浪费金钱，除非问题中所猜想的恒等式蕴含了对黎曼猜想的证明．（[14]，p. 980）．

这一观点反映了一个虽小但正在扩大的数学家群体的看法，他们要求我们不仅要看到可靠性在数学中的有益之处，而且要看到相应的代价．例如，参见 A. Jaffe 和 F. Quinn[7] 及 G. Chaitin[5]．我们还没讨论中心问题，即为什么 Zeilberger 需要引进概率性"真理"？从"形式主义者"的角度看，我们如何才能觉得这不是一个巨大的牺牲？

一切都是关于洞察力． 为什么 Zeilberger 这么愿意放弃绝对真理？最合理的回答是，他在追求更深层次的真理．在"寻找恒等式时的特征"一文中，Zeilberger 主张为研究恒等式而考察恒等式．诚然，如 Wilf 和其他人所指出的，产生无限多恒等式是可能的，不过正是因为我们有使用和演算这些恒等式的能力才使得它们有意义．那么，为什么我们可以认为，为了恒等式本身的缘故而来研究恒等式，会引导我们走上金光大道，而非花园小径．

现在我们来查看可能被称为元数学结构的东西．我们让数学跟它的源头分开，把它孤立起来，并尝试来发现新的结构．我们不可能只收集与新发现相关的信息，而是收集具有一定相似性和熟悉程度的对象（如定理，统计数字，猜想等），然后去除无关的或不真实的对象（反例）．我们这是在做某种形式的消元归纳．在这种情况下，引入其真实性并不确实可信的对象不是毫无道理的，因为一切对象，无论已经证明与否，都将受到同样细致的检查．进一步，这些可能是真实的对象如果落入期待的对象类中（即他们符合新的猜想），那么，就有可能在新的条件下找到一个合法证明．

我们有可能以这样一种方式使用 WZ 算法，即它并不产生对某个恒等式的绝对可靠

的证明，而代之以该恒等式成立的一个概率值 (可能很高). 我们应该如何解释这样的一种结果？如果不严格地证明这个恒等式，我们该怎么做呢？

如果同意 Chaitin 的观点，我们可能会想将其作为公理引入.

我相信，初等数论和其他数学的研究应当更富有实验科学的精神，应当乐于采用新原则. 我相信欧几里得关于公理是不言自明的真理的说法是一个大错！[1] *Schröndinger 方程肯定不是不言自明的真理！黎曼猜想也不是不言自明的，但它十分有用. 物理学家会说，黎曼猜想已有足够的实验证据，而且还会增加，这些就可作为一种实用的假定* ([5], p. 24).

在这种情况下，关于恒等式的真实性，我们有大量的实验证据. 而且我们可能想将其作为比实用的假设更进一步的某种东西，或许想将其正式引入数学体系. 我们要避免的是引进新公理的随意性.

实验和 "理论"

在 "给年轻科学家的忠告" 一文中，P. B. Medawar 定义了四种不同类型的实验：康德式的，培根式的，亚里士多德式的和伽利略式的. 数学总是深深地介入前三类实验，但设法避免使用伽利略模式. 但在发展实验数学的概念时，我们将尽量遵守伽利略的模式.

我们从康德式的实验开始. Medawar 举的例子是：

将欧几里得的平行公理 (或与其等价的条件) 代之以其他形式，生成经典的非欧几何 (双曲的，椭圆的)([11], pp. 73–74).

似乎很显然，数学家难以摆脱康德思想的影响. 即使柏拉图主义者也一定会承认，数学只有通过人类的大脑才能进入. 因此，一切数学都可以视为康德式的实验. 到底欧氏几何只是自然界的几何的一种理想化 (其中点没有长度和宽度，直线有长度但没有宽度) 呢，还是自然界是 "纯" 几何客体的不完全的反映，对此我们还可以争论，但不管哪种情形，对什么感兴趣都取决于心灵的眼睛.

同样，我们不能避开培根式的实验. 用 Medawar 的话说，这*是一种相对于自然的现象的人造的事物 —— 是 "试出来" 的，甚或是闲荡时摆弄出来的结果*. ([11], p. 69). 大多数被描述为实验的研究，本质上是培根式的. 当然人们也可以认为，全部数学都出自于培根实验. 我们在这里试出来一个变换，在那里试出来一个恒等式，然后减弱这个条件或增强那个条件，看看会发生什么现象. 甚至概率论证在数论中的应用，也可以看成是培根式的实验. 我们可能想出很好的实验，而且极有可能成功，但该结果能否发表在文献中，其判别标准是它成功还是失败. 如果这种 "摆弄" 获得成功 (如定理得证或找到反例), 那么，有关材料就保留下来了，否则，将被扔到垃圾堆中.

亚里士多德式的实验被说成是实物演示：

将电极接到青蛙的坐骨神经，瞧，青蛙的腿就会踢动；总是在给狗吃食物前摇铃，

[1] 没有证据表明欧几里得曾有过这种说法. 不过，它确实有无可争辩的感召力. —— 原文注.

膘，仅铃声就很快会使狗流口水！([11], p. 71).

亚里士多德式的实验等价于我们用来解释定义、定理时所举的具体例子，或给学生出的例题.

最后是伽利略式的实验：

伽利略式的实验是一种判决性实验，用以辨别各种可能性. 做这种实验或者使我们对正在形成的观点增强了信心，或者使我们考虑对它进行修正. ([11], p. 71).

理想地说，我们可以设计一种实验来区别两种或更多种可能的不同的假设. 在象医学这样的学科中，问题一般更显然一些，虽然 Will Rogers 现象将事情弄复杂了. [2] 如这种药物有效吗 (寿命，生活质量，价格 / 疗效比等等)? 这种治疗方法比那一种好吗？遗憾的是，这些问题极难回答，而且 Medawar 在此提供的模型不符合当今物理学实验的观点. 牛顿物理学曾经用得很漂亮，但最终还是被取而代之 [10], 所以现在人们普遍认为，实验证据再多也不能证明关于我们周围世界的定理，而且众所周知，在现实世界中，用于试验的模型不是真实的. Medawar 承认证明一个结论有难度，但对否证一个假设他比现代哲学家更有信心.

如果实验不能鉴别假设的真伪或证明定理，我们还能做什么？

"理论的" 实验

虽然数学正面临危机，但没有物理学的危机严峻，部分理论物理内容的不可实验验证性 (例如弦理论) 导致了 "实验检验" 对于数学的更大依赖性. 这可能是导致 Arthur Jaffe 和 Frank Quinn 主张他们称为的理论数学 (Theoretical Mathematics) 的原因之一 (请注意，许多数学家认为他们多年来一直在做理论数学).

毫不奇怪，仿照理论物理研究模式的 "理论数学", 与伽利略 (或 Popper) 式实验的某些部分是最相似的. 在做实验前，我们必须先陈述出假设. 正是在这一阶段，非严格的方法确实能大放光彩.

Arthur Jaffe 和 Frank Quinn 的《"理论数学": 数学和理论物理的文化综合》，看起来主要是呼吁放松严格性的束缚. 他们担心，由于一切研究工作在发表之前必须经过严格推导，数学前进的步伐将变得缓慢. 然而，他们也担心随意引入猜想的数学会带来混乱.

他们的解决办法分为两部分. 他们建议：

应明确承认理论工作是理论性的和不完全的；特别地，最终结果主要应归功于证明

[2] Will Rogers 现象或称 Simpson 悖论，这两个术语都是指行重新相聚问题. 有一次，当 Will Rogers 听到一个熟人已经从俄亥俄搬到加里弗尼亚时，他说那个人由此提高了两个州的平均智商 (IQ). 这一术语在医学论述中变得很流行：将先前的肿瘤研究的对象从低风险组再分到高风险组，两个组看起来都更有效. 对这类问题的认识往往归功于 E. H. Simpson(1951). 在一个棒球赛季，举行过两个半场球，一个球员在每个半场中都获得了击球冠军，但他不一定能获得整场比赛的击球冠军. [$4/9 > 10/23$ 且 $2/7 > 3/11$, 但 $(4+2)/(9+7) < (10+3)/(23+11)$].

其正确的严格工作. ([7], p. 10).

他们想确保在探索和证明所猜想的结果时具有激励作用，并且区别已证明的定理和“理论数学”中的猜想.

但这正是数学家们已经在做的，尽管是低层次的；也就是说，动机与猜想已经成为许多数学家的研究结果中不可缺少的一部分，虽然只是作为更严格工作的附录.

如果说他们的建议有什么不足的话，那就是他们试图将理论物理的长处移植到数学上，却没有讲实验物理给予理论物理的重要的验证作用. 也许“理论数学”不能真正自立，它需要实验数学的检验.

由于我们主要关注计算，所以特别重视计算方面的猜想和验证，但当然还有其他的可能.

结论

我们以实验数学的一个定义结束本文：

> **实验数学** 是这样一个数学分支：它通过对猜想和非形式化的信念的实验探索，以及对此过程中所获信息的仔细分析，最终对数学界提出的各种洞察到的事物加以组织、分类和传播.

一般说来，实验发现的结果缺乏数学的某些严格性，但能提供对于数学问题的洞察，从而引导我们进一步作实验的或传统的探索. 经过实验验证的猜想，更增强了我们向这个方向前进的信心，即使当强信念很难证明时也是如此. 相对于目前的直观认识只能从个人到个人进行传播的系统而言，我们可以期望产生一种以具体例子和对它们的分析来传播的直观数学.

如果数学界总体上不是分成那么多领域，我们就有可能从定义中去掉“组织，分类”这样的词. 但不同领域之间确实存在一个互相交流的问题. 实验的研究者必须尽一切努力组织好他们的看法，并以尽可能为更广泛的人理解的方式提出他们的信息.

附 1

好运气和实验

在 Enrico Au-Yeung 凭运气的发现之后，D. Bailey, J. Borwein 和 R. Girgensohn 对这个问题进行了训练有素的研究. 这在“欧拉和的实验计算”中有详细记载 (下述材料选自 David Bailey 的幻灯片).

实验方法

1. 对于一个类中的各种常数，用一先进的流程来计算高精度 (100 位以上) 的数值.
2. 在各种闭形式的数值计算中，猜想一般项的形式.
3. 用一种发现整数关系的算法来确定一个欧拉和的值是否可由所猜想项的有理线

性组合给出.

4. 试找出实验结果的严格证明.

5. 试将特殊情形的证明推广至欧位和的一般类.

附 2

若干实验结果

定义

$$\zeta(s) := \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s},$$

$$S_h(m,n) := \sum_{k=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k})^m(k+1)^{-n}, \quad m \geq 1, n \geq 2.$$

一些由实验推导出的猜想

$$S_h(3,2) = \frac{15}{2}\zeta(5) + \zeta(2)\zeta(3).$$

$$S_h(3,6) = \frac{197}{24}\zeta(9) - \frac{33}{4}\zeta(4)\zeta(5) - \frac{37}{8}\zeta(3)\zeta(6) + \zeta^3(3) + 3\zeta(2)\zeta(7).$$

给定原始的研究数据，通过仔细组织，我们对于这个问题能有所洞察. 注意到第一个公式 $S_h(3,2)$ 中， 3+ 2= 5, 而在方程右边有 $\zeta(5)$ 和 $\zeta(3)\zeta(2)$. 这暗示了在其他和的闭形式计算中，我们可期待得到的一般项的形式.

一些已证明的欧拉和

$$S_h(2,2) = \frac{3}{2}\zeta(4) + \frac{1}{2}\zeta^2(2) = \frac{11\pi^4}{360},$$

$$S_h(2,4) = \frac{2}{3}\zeta(6) - \frac{1}{3}\zeta(2)\zeta(4) + \frac{1}{3}\zeta^3(2) - \zeta^2(3) = \frac{37\pi^6}{22680} - \zeta^2(3)$$

已证明的 $S_h(2,2)$ 的值意味着 Au-Yeung 的发现是对的.

参考文献

[1] M. Atiyah, A. Borel, G. J. Chaitin, et al., Responses to "Theoretical Mathematics: Towards a Cultural Synthesis of Mathematics and Theoretical Physics" by A. Jaffe and F. Quinn, *Bull. Am. Math. Soc.*, 30(2), 1994, pp. 178-207.

[2] D. H. Bailey, J. M. Borwein, and R. Girgensohn, Experimental evaluation of Euler sums, *Experimental Math.*, 3(1), 1994, pp. 17-30.

[3] J. M. Borwein, P. Borwein, R. Girgensohn, and S. Parnes, Expermental mathematical investigation of decimal and continued fraction expansions of select constants. (unpublished)

[4] J. M. Borwein, P. Borwein, R. Girgensohn, and S. Parnes, Making sense of experimental mathematics, CECM Preprint 95:032, 1995.

[5] G. J. Chaitin, Randomness and complexity in pure mathematics, *Int. J. Bifurcation Chaos*, **4**, 1994, pp. 3–15.

[6] D. Epstein, S. Levy, and R. Llave, de la, About this journal, *Experimental Math.*, **1**(1), 1992, pp. 1–3.

[7] A. Jaffe and F. Quinn, Theoretical mathematics: Towards a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics, *Bull. Am. Math. Soc.*, **29**(2), 1993, pp. 1–13.

[8] A. Jaffe and F. Quinn, Response to comments on "Theoretical Mathematics", *Bull. Am. Math. Soc.*, **30**(2), 1994, pp. 208–211.

[9] I. Lakatos, *Proofs and Refutations*, Cambridge: Cambridge University Press, 1970.

[10] I. Lakatos, The Methodology of Scientific Research Programmes: Philosophical Papers Volume 1, Combridge: Cambridge University Press, 1978.

[11] P. B. Medawar, Advice to a Young Scientist, New York: Harper Colophon, 1981.

[12] W. P. Thuston, On proof and progress in mathematic *Bull. Am. Math. Soc.*, **30**(2), 1994, pp. 161–177.

[13] D. Zeilberger, Identities in search of identities, preprint 1992.

[14] D. Zeilberger, Theorems for a price: Tomorrow's semi-rigorous mathematical culture, *Notices Am. Math. Soc.*, **40**(8), 1993, pp. 978–981. Reprinted in The Mathemtical Intelligencer, **16**(4), 1994, pp. 11–14.

(余敏安 译　袁向东 校)