Fibonacci 数之商

Stephan Ramon Garcia Florian Luca

摘要 多年来在《美国数学月刊 (America Mathematical Monthly)》上关于商集合有很多文章. 这里我们进入 p–进制框架走第一步, 我们希望这将激起进一步的研究. 我们证明, 对于每个素数 p, 非零 Fibonacci 数之商的集合在 p–进数域中是稠密的.

第 n 个 Fibonacci (斐波那契) 数 F_n 由递推关系 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ 以及初始条件 $F_0 = 0$ 和 $F_1 = 1$ 所定义. 令 $\mathbb{F} = \{1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\}$ 表示非零 Fibonacci 数的集合, 并令 $R(\mathbb{F}) = \{F_m/F_n : m, n \in \mathbb{N}\}$ 是 $\mathbb{F}$ 中元素所有商的集合. Binet (比内) 引理

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \tilde{\varphi}^n) \tag{1}$$

蕴涵着当 $n \to \infty$ 时 $|F_n - \varphi^n/\sqrt{5}|$ 以指数形式趋于零 [37, p.57], (1) 式中

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\ldots \quad 以及 \quad \tilde{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0.618\ldots.$$

因而, 作为 $\mathbb{R}$ 的一个子集, $R(\mathbb{F})$ 只在点 φ^k $(k \in \mathbb{Z})$ 处有聚点 [8, 例 17].

另一方面, $R(\mathbb{F})$ 是有理数系 $\mathbb{Q}$ 的一个子集, 它可以被赋予不同于由 $\mathbb{R}$ 诱导的度量. 对每个 p, 在 $\mathbb{Q}$ 上有 p–进制度量, 关于此度量, $\mathbb{Q}$ 可以被完全化从而形成 p–进数集 $\mathbb{Q}_p$.

本文的目的是证明下述定理.

定理 1 对于每个素数 p, $R(\mathbb{F})$ 在 $\mathbb{Q}_p$ 中稠.

这意味着, $R(\mathbb{F})$ 关于 p–进制度量在 $\mathbb{Q}_p$ 中的闭包是 $\mathbb{Q}_p$. 虽然多年来在《美国数学月刊》上关于商集合有很多文章 [1, 4, 8, 9, 15, 17, 26, 33], 但是我们并未发现有在 p–进制框架中进行讨论的类似工作. 我们希望这个结果将激起进一步的研究.

定义 1 如果 p 是一个素数, 则每个 $r \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ 有唯一表示

$$r = \pm p^k \frac{a}{b}, \tag{2}$$

其中 $k \in \mathbb{Z}$, $a, b \in \mathbb{N}$, 并且 a, b, p 是成对地互素的. p-进制赋值 (*p-adic valuation*) $v_p: \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ 由 $v(0) = +\infty$ 以及对于 (2) 中的 r 成立 $v_p(r) = k$ 定义. 对于 $x, y \in \mathbb{Q}$, 它满足 $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$. $\mathbb{Q}$ 上的 p-进制绝对值 (*p-adic absolute value*) 是 $\|r\|_p = p^{-v_p(r)}$, $\mathbb{Q}$ 上的 p-进制度量 (*p-adic metric*) 是 $d_p(x, y) = \|x - y\|_p$.

p–进数系 (*p-adic number system*) $\mathbb{Q}_p$ 是 $\mathbb{Q}$ 关于 p–进制度量的完全化 (completion). Ostrowski (奥斯特洛斯基) 定理断言, 对于素数 p 的 $\mathbb{Q}_p$, 以及 $\mathbb{R}$, 最重要的只有从一个绝

译自：The Amer. Math. Monthly, Vol. 123 (2016), No. 10, p. 1039–1044, Quotients of Fibonacci Numbers, Stephan Ramon Garcia and Florian Luca.

Stephan Ramon Garcia 的邮箱地址是 stephan.garcia@pomona.edu.
Florian Luca 的邮箱地址是 Florian.Luca@witz.ac.za.

原文把定理, 定义, 例, 引理, 以及公式统一排序. 译文把这些都分别排序.—— 译注

对值生成的 $\mathbb{Q}$ 的完全化 [20]. 这样，寻找如定理 1 那样的结果是自然的，因为在 $\mathbb{R}$ 中类似的问题自从被探索以来已有大量的结果了.

事实上， $\mathbb{Q}_p$ 是一个包含 $\mathbb{Q}$ 为其子域的一个域. 其元素可以被表示为具有形式 $\sum_{n=k}^{\infty} a_n p^n$ 的无穷级数，它关于 $p-$进制度量收敛，其中 $k \in \mathbb{Z}, a_n \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$. $p-$进制赋值，范数，和度量被以承认这些级数表达式的方式唯一地延拓到 $\mathbb{Q}_p$ 上.

例 1 在 $\mathbb{Q}_2$ 中我们有 $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots = -1$, 因为当 $N \to \infty$ 时

$$\left\| \sum_{n=0}^{N-1} 2^n - (-1) \right\|_2 = \left\| \frac{1-2^N}{1-2} + 1 \right\|_2 = \|1 - (1-2^N)\|_2 = \|2^N\|_2 = 2^{-N}$$

趋于零.

运用 $p-$进数类似于处理实数的十进制展开. 替代幂 10^n 当 n 从某个非负的 N 趋向 $-\infty$, 我们有幂 p^n 当 n 从 N (可能为负的) 趋向 $+\infty$. 关于 $\mathbb{Q}_p$ 的更多细节可以在 [11, 20] 中找到.

为了证明我们的定理，我们需要一些预备性结果. 下文中，我们用 $a|b$ 表示整数 b 被整数 a 整除. 以下一些论断的证明可以在 [37, p. 82, p. 73 和 p. 81] 中找到.

引理 1

(a) 如果 $j|k$, 则 $F_j | F_k$.

(b) 对于每个 $m \in \mathbb{N}$, 存在一个最小的指标 $z(m)$, 使得对所有正整数 k 有 $m | F_{kz(m)}$.

(c) 对于任何奇素数 p 和 $j \in \mathbb{N}$ 有 $v_p(F_{z(p)p^j}) = v_p(F_{z(p)}) + j$.

我们还需要 $\mathbb{Q}_p$ 的一个方便的稠子集. 我们可以随意地利用下述事实: $d_p(x, y) \le 1/p^k$ 当且仅当 $v_p(x-y) \ge k$.

引理 2 对于每个素数 p, 集合 $\{p^{-r} n : n, r \in \mathbb{N}\}$ 在 $\mathbb{Q}_p$ 中稠.

证明 由于 $\mathbb{Q}_p$ 是 $\mathbb{Q}$ 关于 $p-$进制度量的闭包, 因此只需证明在 $p-$进制度量中每个有理数可以被形如 $p^{-r}n$ 的有理数任意逼近即可, 这里 $n, r \in \mathbb{N}$. 如果 $x = p^k \sum_{j=0}^{\infty} a_j p^j \in \mathbb{Q}_p$, 则令 $N \ge k+1$ 和 $n = \sum_{j=0}^{N-k-1} a_j p^j$, 以致

$$v_p(x - p^k n) = v_p\left(p^k \sum_{j=N-k}^{\infty} a_j p^j\right) = k + v_p\left(\sum_{j=N-k}^{\infty} a_j p^j\right) \ge k + (N-k) = N. \qquad \blacksquare$$

一个 代数整数 (*algebraic integer*) 是整系数首一多项式的根. 例如, $2, \sqrt{5}$ 和 φ 是代数整数. 它们分别是 $x-2, x^2-5$ 和 x^2-x-1 的根. 下述是 [24, 推论 1, p.15].

引理 3 有理代数整数是整数.

我们还需要关于域 $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ 中算术的一些事实. 令 $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ 表示 $\mathbb{K}$ 中代数整数的集合. 它是一个环; 事实上, $\mathcal{O}_{\mathbb{K}} = \{a + b\varphi : a, b \in \mathbb{Z}\}$ [24, 推论 2, p.15]. 特别地, $\varphi, \tilde{\varphi}$ 和 $\sqrt{5}$ 都属于 $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$.

$\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ 中一个 理想 (*ideal*) 是 $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ 的一个对所有 $\alpha \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ 成立 $\alpha\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{i}$ 的加法子群 $\mathfrak{i}$. $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ 中的 素数 (*prime*), 指的是环 $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ 中素理想. 一个 素理想 (*prime ideal*) 是具有下述性质的理想 $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$: 对于任何 $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$, 条件 $\alpha\beta \in \mathfrak{p}$ 蕴涵着 $\alpha \in \mathfrak{p}$ 或者 $\beta \in \mathfrak{p}$. 为了避免混淆, 我们称素数 $2, 3, 5, 7, \ldots$ 为 有理素数 (*rational primes*).

$\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ 中两个理想 $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$ 的乘积由 $\mathfrak{ij} = \{\alpha\beta: \alpha \in \mathfrak{i}, \beta \in \mathfrak{j}\}$ 定义；它也是 $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ 中的一个理想. 理想的正幂由 $\mathfrak{i}^1 = \mathfrak{i}$, 以及对于 $n = 2, 3, \ldots$ $\mathfrak{i}^n = \mathfrak{i}(\mathfrak{i}^{n-1})$ 归纳地定义. 我们说 $\mathfrak{i}$整除 (*divides*) $\mathfrak{i}$, 如果 $\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{i}$.

对于 $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ 中一个理想 $\mathfrak{i}$, 我们写成 $\alpha \equiv \beta \pmod{\mathfrak{i}}$, 即意味着 $\beta - \alpha \in \mathfrak{i}$. 在模一个理想时，同余式的一些熟悉的性质也成立. 例如，$\alpha \equiv \beta \pmod{\mathfrak{i}}$ 蕴涵着对于 $j \in \mathbb{N}$ 成立 $\alpha^j \equiv \beta^j \pmod{\mathfrak{i}}$. 类似地，如果 $\mathfrak{p}$ 和 $\mathfrak{q}$ 是不同的素理想，并且 $\alpha \equiv \beta \pmod{\mathfrak{p}}$ 和 $\alpha \equiv \beta \pmod{\mathfrak{q}}$, 则 $\alpha \equiv \beta \pmod{\mathfrak{pq}}$.

引理 4 令 $a, b \in \mathbb{Z}$ 和 $j \in \mathbb{N}$. 如果 $a \equiv b \pmod{\mathfrak{p}^j}$, 则在 $\mathbb{Z}$ 中 p^j 整除 $b - a$.

证明 假设 $a, b \in \mathbb{Z}$ 和 $a \equiv b \pmod{\mathfrak{p}^j}$. 则对于某个 $\alpha \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ 有 $b - a = p^j\alpha$. 由于 $\alpha = (b-a)/p^j$ 是一个有理代数整数，由引理 3, 它是一个整数. 因而，在 $\mathbb{Z}$ 中 p^j 整除 $b - a$. ■

每个有理素数 p 在 $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ 中产生一个理想 $\mathfrak{p} = p\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$. 这个理想作为素理想的乘积是唯一的 [24, 定理 16, p. 59]. 事实上，由于 $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ 是 $\mathbb{Q}$ 的一个延拓，我们即有 [24, p. 74]:

引理 5 令 $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, 并令 p 是一个有理素数. 则 $\mathfrak{p} = p\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ 是至多两个 (不必不同的) 素理想的乘积.

我们还可以更具体些. 唯一的有理素数 p, 对于它 $\mathfrak{p}$ 是一个素理想的平方的, 是 $p = 5$; 这表明了因子分解 $5 = (\sqrt{5})^2$ [24, 定理 24, p. 72].

定理 1 的证明 根据 p 是奇数或 $p = 2$, 有两种情形. 令 p 是一个奇有理素数，并令 $\mathfrak{p} = p\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$. 对于每个 $j \in \mathbb{N}$, 引理 1 保证了 $p^{2j} | F_{z(p)p^{2j}}$. 由于 $\sqrt{5} \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$, 则 (1) 揭示了

$$\varphi^{z(p)p^{2j}} - \tilde{\varphi}^{z(p)p^{2j}} = \sqrt{5} F_{z(p)p^{2j}} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{2j}},$$

因而对于 $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ 中每个整除 $\mathfrak{p}$ 的素理想 $\mathfrak{q}$, 有

$$\varphi^{z(p)p^{2j}} \equiv \tilde{\varphi}^{z(p)p^{2j}} \pmod{\mathfrak{q}^{2j}}.$$

由于 $\tilde{\varphi} = -1/\varphi$, 我们有

$$\varphi^{2z(p)p^{2j}} \equiv \varphi^{-2z(p)p^{2j}} \pmod{\mathfrak{q}^{2j}},$$

以致

$$\varphi^{4z(p)p^{2j}} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{q}^{2j}} \quad \text{和} \quad \tilde{\varphi}^{4z(p)p^{2j}} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{q}^{2j}}. \tag{3}$$

在恒等式

$$x^m - y^m = (x - y)(x^{m-1} + x^{m-2}y + \cdots + y^{m-1}), \quad m \in \mathbb{N}$$

中令 $x = \varphi^{4z(p)p^{2j}}$ 和 $y = \tilde{\varphi}^{4z(p)p^{2j}}$, 并由 (3) 即蕴涵着

$$\begin{aligned}
\frac{F_{4z(p)p^{2j}m}}{F_{4z(p)p^{2j}}} &= \frac{\varphi^{4z(p)p^{2j}m} - \tilde{\varphi}^{4z(p)p^{2j}m}}{\varphi^{4z(p)p^{2j}} - \tilde{\varphi}^{4z(p)p^{2j}}} \\
&= (\varphi^{4z(p)p^{2j}})^{m-1} + (\varphi^{4z(p)p^{2j}})^{m-2}(\tilde{\varphi}^{4z(p)p^{2j}}) + \cdots + (\tilde{\varphi}^{4z(p)p^{2j}})^{m-1} \\
&\equiv m \pmod{\mathfrak{q}^{2j}}.
\end{aligned}$$

现在引理 5 保证了对于任何 $m \in \mathbb{N}$ 有

$$\frac{F_{4z(p)p^{2j}m}}{F_{4z(p)p^{2j}}} \equiv m \pmod{\mathfrak{p}^j}.$$

然而，由引理 1, $F_{4z(p)p^{2j}m}/F_{4z(p)p^{2j}}$ 是一个有理整数，因而由引理 4 得

$$\frac{F_{4z(p)p^{2j}m}}{F_{4z(p)p^{2j}}} \equiv m \,(\mathrm{mod}\, p^j). \tag{4}$$

求助于引理 1, 我们有

$$v_p(F_{4z(p)p^{2(k+2r)}}) = v_p(F_{4z(p)p^{2(k+r)}}) + 2r, \tag{5}$$

因而

$$\frac{F_{4z(p)p^{2(k+2r)}}}{F_{4z(p)p^{2(k+r)}}} = p^{2r}\ell, \ \ \ell \in \mathbb{Z}, \quad \gcd(\ell, p) = 1. \tag{6}$$

在 (4) 中令 $m = p^r n\ell$ 和 $j = k + r$, 并利用 (6), 得到

$$p^{2r}\ell \cdot \frac{F_{4z(p)p^{2(k+r)}p^r n\ell}}{F_{4z(p)p^{2(k+2r)}}} = \frac{F_{4z(p)p^{2(k+r)}p^r n\ell}}{F_{4z(p)p^{2(k+r)}}} \equiv p^r n\ell \,(\mathrm{mod}\, p^{k+r}).$$

因为 $\gcd(\ell, p) = 1$, 上式就导致

$$p^r \frac{F_{4z(p)p^{2k+3r}n\ell}}{F_{4z(p)p^{2k+4r}}} \equiv n \,(\mathrm{mod}\, p^k),$$

因而

$$v_p\left(\frac{F_{4z(p)p^{2k+3r}n\ell}}{F_{4z(p)p^{2k+4r}}} - p^{-r}n\right) \geq k.$$

此式对所有 $n, r \in \mathbb{N}$ 和所有 $k > r$ 成立，因而由引理 2, $R(\mathbb{F})$ 在 $\mathbb{Q}_p$ 中稠.

如果 $p = 2$, 我们必须以 $3 \cdot 2^{j+2}$ 替代 (3) 中的指数 $4z(p)p^j$, 因为 $z(2) = 3$ 和 $4 = 2^2$. 证明可以如前一样地进行，如果我们用对于 $p = 2$ 的相应陈述代替 (5). 只需对 $j \in \mathbb{N}$ 证明 $v_2(F_{3\cdot 2^j}) = j + 2$ 即可；一个更一般的结果见 [22]. 我们对 n 用归纳法来进行. 基础情形 $j = 1$ 是 $v_2(F_6) = v_2(8) = 3$. 现在我们假设对某个 $j \geq 2$ 有 $v_2(F_{3\cdot 2^j}) = j + 2$. 令 L_n 表示第 n 个 Lucas (卢卡) 数; 这些数满足递推式 $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$, 并且有初始条件 $L_0 = 2$ 和 $L_1 = 1$. 因为 $L_{2n} = 2(-1)^n + 5F_n^2$ [37, p. 177], 并因为 $2 = F_3$ 整除 $F_{3\cdot 2^{j-1}}$, 我们即有

$$v_2(L_{3\cdot 2^j}) = v(L_{2(3\cdot 2^{j-1})}) = v_2\big(2(-1)^{3\cdot 2^{j-1}} + 5F_{3\cdot 2^{j-1}}^2\big) = 1.$$

因为 $F_{2n} = F_n L_n$ [37, p. 177], 我们得到

$$v_2(F_{3\cdot 2^{j+1}}) = v_2(F_{2(3\cdot 2^j)}) = v_2(F_{3\cdot 2^j}) + v_2(L_{3\cdot 2^j}) = (j+2) + 1 = (j+1) + 2,$$

这就完成了归纳. ■

致谢 (略)

参考文献

[1] B. Brown, M. Dairyko, S. R. Garcia, B. Lutz, M. Someck, Four quotient set gems, Amer. Math. Monthly 121 no. 7 (2014) 590–599.

[2] J. Bukor, P. Erdős, T. Šalát, J. T. Tóth, Remarks on the (R)-density of sets of numbers. II, Math. Slovaca 47 no. 5 (1997) 517–526.

[3] J. Bukor, T. Šalát, J. T. Tóth, Remarks on R-density of sets of numbers, Tatra Mt. Math Publ. 11 (1997) 159–165.

[4] J. Bukor, J. T. Tóth, On accumulation points of ratio sets of positive integers, Amer. Math. Monthly 103 no. 6 (1996) 502–504.

[5] S. A. Burr, On moduli for which the Fibonacci sequence contains a complete system of residues, Fibonacci Quart. 9 no. 9 (1971) 497–504.
[6] J.-M. De Koninck, A. Mercier, 1001 Problems in Classical Number Theory. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.
[7] B. Fine, G. Rosenberger, Number Theory: An Introduction via the Distribution of Primes. Birkhäuser, Boston, 2007.
[8] S. R. Garcia, V. Selhorst-Jones, D. E. Poore, N. Simon, Quotient sets and Diophantine equations, Amer. Math. Monthly 118 no. 8 (2011) 704–711.
[9] S. R. Garcia, Quotients of Gaussian Primes, Amer. Math. Monthly 120 no. 9 (2013) 851–853.
[10] R. Gelca, T. Andreescu, Putnam and Beyond. Springer, New York, 2007.
[11] F. Q. Gouvêa, p-adic Numbers: An Introduction. Second ed. Springer-Verlag, Berlin, 1997.
[12] R. Gupta, M. R. Murty, A remark on Artin's conjecture, Invent. Math. 78 no. 1 (1984) 127–130.
[13] G. H. Hardy, E. M. Wright, An Introduction to the Theory of Numbers. Sixth ed. Oxford Univ. Press, Oxford, 2008.
[14] G. Harman, Metric Number Theory. London Mathematical Society Monographs, Vol. 18. Clarendon Press, New York, 1998.
[15] S. Hedman, D. Rose, Light subsets of $\mathbb{N}$ with dense quotient sets, Amer. Math. Monthly 116 no. 7 (2009) 635–641.
[16] D. R. Heath-Brown, Artin's conjecture for primitive roots, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 37 no. 145 (1986) 27–28.
[17] D. Hobby, D. M. Silberger, Quotients of primes, Amer. Math. Monthly 100 no. 1 (1993) 50–52.
[18] C. Hooley, On Artin's conjecture, J. Reine Angew. Math. 225 (1967) 209–220.
[19] E. T. Jacobson, Distribution of the Fibonacci numbers mod 2^k, Fibonacci Quart. 30 no. 3 (1992) 211–215.
[20] N. Koblitz, p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta-Functions. Second ed. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1984.
[21] T. Koshy, Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience, New York, 2001.
[22] T. Lengyel, The order of the Fibonacci and Lucas numbers, Fibonacci Quart. 33 no. 3 (1995) 234–239.
[23] F. Luca, C. Pomerance, S. Wagner, Fibonacci integers, J. Number Theory 131 no. 3 (2011) 440–457.
[24] D. A. Marcus, Number Fields. Springer-Verlag, New York, 1977.
[25] I. Niven, H. S. Zuckerman, H. L. Montgomery, An Introduction to the Theory of Numbers. Fifth ed. John Wiley & Sons, New York, 1991.
[26] A. Nowicki, Editor's endnotes, Amer. Math. Monthly 117 no. 8 (2010) 755–756.
[27] P. Paullack, Not Always Buried Deep: A Second Course in Elementary Number Theory. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.
[28] P. Ribenboim, Classical Theory of Algebraic Numbers. Springer-Verlag, New York, 2001.
[29] ——, The Book of Prime Number Records. Second ed. Springer-Verlag, New York, 1989.
[30] I. Steward, D. Tall, Algebraic Number Theory and Fermat's Last Theorem. Third ed. AK Peters, Natick, MA, 2002.
(下转 136 页)

言后，催促我从有理数域转到任意数域，并研究 Hecke (赫克) 的工作. 他还建议我去见 Selberg. 因此，我与 Selberg 进行了唯一一次数学对话. 当然，都是他在说.

Harish-Chandra 也发挥了巨大的作用，主要是因为他的论文 (这些是在与他见面之前很多年我自己主动阅读的)，也是因为我在高等研究院的任命 —— 我猜测 —— 是他的提议. 我还应该注意到，这是一位年轻的普林斯顿同事 (尽管他们比我年长) 指导我读 Harish-Chandra 的论文. 所以你的问题的答案肯定是 "是". 我非常感谢我在英属哥伦比亚大学的教育，在那里，一个非常聪明的年轻人，一个男孩，如果你喜欢，被引导到他一生依附的知识分子的可能性，并引导到耶鲁，他以他自己的想法在那里待了两年，并有数学家支持他的独立性. 无论我对普林斯顿及其两个学术机构有何疑惑，从前面的评论中可以清楚地看出，我认真地感恩于那些与之相关的特定个人.

自左至右：Bjørn Ian Dundas, Christian Skau 和 Robert P. Langlands. ©Anne-Marie Astad/The Norwegian Academy of Science and Letters

D & S: 也许在我们结束访谈之前，听听您是否有私人的，非数学上的激情或某些兴趣可能是有趣的，例如：音乐，文学，语言还是诗歌？

L: 激情？我没有任何激情. 但是，你知道，你想看看其他事情是真的，你懂的. 历史是迷人的：现代史，古代史，地球史，宇宙史 —— 这些都是令人着迷的. 经历生活并且没有花时间考虑这一点是让人遗憾的 —— 当然不是一切，只是想一点点.

D & S: 我们代表挪威数学学会和欧洲数学学会以及我们自己，感谢您做成这个非常有趣的访谈，并再次祝贺您获得 Abel 奖.

L: 谢谢您的邀请.

编注 有关 Abel 奖更多信息，请参阅 Abel 奖官方网站 `http://www.abelprize.no/`.

(陆柱家 译　　陈亦飞 校)

****

(上接 188 页)

[31] T. Šalát, On ratio sets of sets of natural numbers, Acta Arith. 15 (1968) 273–278.

[32] ——, Corrigendum to the paper "On ratio sets of sets of natural numbers," Acta Arith. 16 (1969) 103.

[33] P. Starni, Answers to two questions concerning quotients of primes, Amer. Math. Monthly 102 no. 4 (1995) 347–349.

[34] O. Strauch, J. T. Tóth, Asymptotic density of $A \subset \mathbb{N}$ and density of the ratio set $R(A)$, Acta Arith. 87 (1998) 67–78.

[35] ——, Corrigendum to Theorem 5 of the paper: "Asymptotic density of $A \subset \mathbb{N}$ and density of the ratio set $R(A)$," Acta Arith. 87 no. 1 (1998) 67–78.

[36] C. Vanden Eynden, Proofs that $\sum 1/p$ diverges, Amer. Math. Monthly 87 no. 5 (1980) 394–397.

[37] S. Vajda, Fibonacci & Lucas Numbers, and the Golden Section. Ellis Horwood Series: Mathematics and its Applications. Theory and applications, with chapter XII by B.W. Conolly. Ellis Horwood, Chichester; Halsted Press John Wiley & Sons, 1989.

(陆柱家 译　　许以超 校)