复分析, 零导数, 柯西-黎曼方程

数学小品

⑥

333-334

论零导数

0174.5

Desbr., D

Darrell Desbrow

肖杰

复分析中有一件事是说：区域上的局部或整体的零导数推出常数值. 这结论通常是用 Cauchy- Riemann 方程验证实部和虚部的偏导数同时为零来证明的. 从此或从其它意义上来看，这件事就转化成了实微积分中的相应结果. 即是说：区域上的零导数诱导出常数值. 而此结论的传统证明依赖于平均值定理，虽然已经有几种证法是避开它的. 这类证法的新近例子以及早期的实微积分证明之参考文献请看 Richmond [3]. 用类似的思想，Cohen [2] 也给出了一个较早的实微积分证明. 在实值情形，特别建议读者去看 Bers 的证明 [1], 而它又 "来自初等原理". 因此在很大程度和我们将要提供的证明是相通的.

至少对于初学者来说，所有这一切看起来就像一件精心杰作，因为结果早已成熟，而其证明又可直接产生于导数的定义. 这里我们提供的证明不仅初等而且完全适应于函数值或变量为实的或复的 (或相当一般的) 情形. 这里尽管结论是用传统的复分析方式陈述，但是很容易以我们的愿望把它转化成实值或实变量 (或，事实上可推广到 Banach 空间) 的情形.

定理. 对某复数 a 和正实数 r, 设 f 是一个复值函数并且其导数在圆盘 $D:|z-a|<r$ 上处处为零. 那么 f 在 D 上是常数.

由它可推出若一个函数的导数在开集 (或区域) 上为零，则这函数在局部 (或整体) 上为常数.

考虑函数 $g: g(z)=f(z+a)-f(a)$. 因为当 $f'(z+a)=0$ 时有 $g'(z)=0$, 所以可假设 $a=0=f(a)$. 于是必须证明 f 与其导数在 $D:|z|<r$ 上处处为零. 就此我们对照地处理.

证明： 设 $f(0)=0$ 并且 f 可微，但在圆盘 $D:|z|<r$ 上不处处为零. 那么存在一非零的 $w\in D$ 和 $C>0$ 使得 $|f(w)|=C|w|$. 令

$$A=\{t:0<t\le 1,|f(tw)|\ge C|tw|\}.$$

原题: On zero derivatives. 译自: *The American Mathematical Monthly*, Vol.103, No.5, 1996, pp. 410–411.

则 $1 \in A$, 所以 A 必有最大的下界，比方说是 $\lambda, \lambda \le 1$. 显然 $|f(\lambda w)| \ge C|\lambda w|$.

情形 $\lambda = 0$: A 中存在序列 (t_n) 使得 $t_n \to \lambda = 0$.
于是对每个 n, 有

$$\left|\frac{f(t_n w)}{t_n w}\right| \ge C.$$

置 $n \to \infty$, 则 $t_n w \to 0$, 进而 $|f'(0)| \ge C > 0$. 故 $f'(0) \ne 0$.

情形 $\lambda > 0$: 对任意的 $\mu : 0 < \mu < \lambda$, 如果 $|f(\mu w) - f(\lambda w)| \le C|\mu w - \lambda w|$ 那么

$$\begin{aligned}|f(\mu w)| &\ge |f(\lambda w)| - |f(\mu w) - f(\lambda w)| \\ &\ge C\lambda|w| - C(\lambda - \mu)|w| = C|\mu w|,\end{aligned}$$

这与 λ 定义相背. 因此当 $0 < \mu < \lambda$ 时有

$$\left|\frac{f(\mu w) - f(\lambda w)}{\mu w - \lambda w}\right| > C.$$

令 $\mu \to \lambda$ 得 $\mu w \to \lambda w$, 从而 $|f'(\lambda w)| \ge C > 0$. 故 $f'(\lambda w) \ne 0$.

不论哪种情形，结论都得以证明.

参 考 文 献

[1] Bers, L., On avoiding the mean value theorem, *Amer. Math. Monthly* **74** (1967), 583.

[2] Cohen. L. W., On being mean to the mean value theorem, *Amer. Math. Monthly* **74** (1967), 581–582.

[3] Richmond, D. E., An elementary proof of a theorem of calculus, *Amer. Math. Monthly* **92** (1985), 589–590.

(肖 杰译　何育赞校)