进展简介

有限单群分类的现状

Michael Aschbacher

公众一般认为，有限单群的分类定理是在 1980 年前后被证明的. 但是，由于证明本身的长度与复杂程度，分类定理的证明并不是通常意义下的一个证明，即使在上世纪 80 年代，该证明也是颇有争议的. 在该定理确立不久，Gorenstein, Lyons 与 Solomon (GLS) 就启动了一个计划，该计划要将分类定理证明的大部分内容进行简化，或许更为重要的是，仅仅借助于一些关于有限群与代数群的基本知识，把证明清晰并仔细地写下来. 并将第一代证明中的所有 "众所周知" 的结果给出证明，因为这些结果的证明分散在文献之中，或者更为糟糕的是，有的从来就没有在文献里出现过. 但是 GLS 计划迄今尚未完成，并且，在过去的 20 年里，第一代证明中的漏洞不断被发现. 大多数漏洞都很快被消除了，但是有一个漏洞显得非常棘手. 这个严重的漏洞最近被弥补了，所以现在也许是重温分类现状的好时机. 本文将从问题的引入和某些动机的叙述开始.

回想一下，一个群 G 称为 *单群*，如果 G 的正规子群只有 1 与 G 本身；等价地，G 的商群只有 $G \cong G/1$ 与 $1 \cong G/G$.

假设 G 是有限群，令 $H \trianglelefteq G$ 表示 H 是 G 的一个正规子群. G 的一个 *正规列* 是一个群列

$$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_n = G,$$

该群列的 *因子* 族是由该群列得到的商群组成的族

$$(G_{i+1}/G_i : 0 \le i < n).$$

注意到，该群列是极大的 (即不能在 G_i 与 G_{i+1} 之间添加额外的项) 恰好是每一个因子都是单群的时候. 那些极大的群列称为 G 的 *合成列*. 我们有

Jordan–Hölder 定理 *G 的所有的合成列都具有相同的长度及相同的单因子族* (*不计次序*).

G 的一个合成列中的单因子称为群 G 的 *合成因子*. G 的合成因子不能在相差一个同构的意义下确定 G, 但是它们对于 G 的总体结构而言，起着非常大的控制作用. 因此单群就像数论中的素数一样，虽然对每一个群而言，不一定都有 "唯一分解".

例 回想一下，群 G 是 *可解* 的，如果它的每一个合成因子都是素数阶的. 而 Galois 的定理说，可解群就是与可用根式解的多项式相对应的那一类群. 更进一步，根据 Philip Hall 的一个结果，可解群满足 Sylow 定理的一个重要的推广，并且这个性质确实刻画了可解群. 该推广说：如果 G 是 n 阶可解群，m 是 n 的一个因子且 $(m, n/m) = 1$, 则 G 有

原题：The Status of the Classification of the Finite Simple Groups. 译自：Notices of the AMS, Vol.51 (2004), No.7, p.736–740.

一个 m 阶的子群，G 的所有 m 阶子群都两两共轭，并且 G 的每一个阶整除 m 的子群都包含在 G 的某一个 m 阶子群之中.

基于对下面两个问题的解答，人们可以想象怎样对有限群进行分析：

分类问题 *确定所有的有限单群.*

扩张问题 *给定群 X 与 Y，确定所有 X 被 Y 的扩张；即，确定所有的具有正规子群 H 的群 G，使得 $H \cong X$ 且 $G/H \cong Y$.*

实际上，除了特殊情形之外，扩张问题是非常困难的. 看起来最好不要研究一般的有限群，而是在面对一个关于有限群的问题时，试图把该问题或者与之相关的一个问题简化为单群或者与单群密切相关的群的问题，然后利用有限单群的分类与单群的知识，来解决简化后的问题. 注意，这一方式仅当对单群知道的足够多，多到足够用来解决单群的问题时才有效；这就是单群分类问题出现的所在：它可以提供有限群的一个清楚的列表，该列表可以被用来利用分类提供的关于群的有效的刻画来进行详尽的研究.

自 1980 年以来，当有限单群被认为已经分类以后，这种用来解决群论问题的方法就开始被使用. 这种方法曾经取得了极大的成功：事实上，1980 年以前有限群论中悬而未决的主要问题，现在都已经被解决了. 并且，有限群论已经被用来解决许多其它数学分支中的问题.

简而言之，分类是有限群论中最重要的结果，并且它已经在数学的其它领域中变得日益重要起来.

现在是叙述分类定理的时候了.

分类定理 *每个有限单群必同构于下面的群之一：*

1. *素数阶群；*
2. *交错群；*
3. *Lie 型群；*
4. *26 个零散群.*

观察到上述给出的分类定理的叙述是如此令人迷惑地简单. 为了对该定理有一个实实在在的感觉，我们必须定义什么叫做 "Lie 型群" 与 "零散群". 由于篇幅所限，这里我们不能给出这些定义，而代之以下面的观察：除了一些零散群之外，定理中出现的每一个群 G 在本质上都可以视为某些相当容易得到的数学对象 X 的自同构群. X 的存在性给出 G 存在性的证明，但更为重要的是，群 G 在 X 上的表示给出了研究 G 的一种方法，与此同时，还将得到单群在各种不同范畴中表示的信息，其中最独特的表示是置换群 (即 G 的子群结构) 与线性群. 这些表示某些特殊性质的证明通常是对于应用分类来解决一个给定的问题时所必需的额外信息.

事实上，诸如此类的信息在证明分类的时候是必不可少的. 就是说，在分类定理的证明中，从定理中所述的单群列表 $\mathcal{K}$ 开始，考察分类定理的一个极小反例：一个满足 $G \notin \mathcal{K}$ 的有限极小单群 G. 这样，G 的每一个真子群 J 是一个 $\mathcal{K}$- *群*：如果 $K \trianglelefteq H \leq J$，其中 H/K 是单群，则*瓣* (section) H/K 属于 $\mathcal{K}$. 分类定理的证明非常强烈地依赖于 $\mathcal{K}$- 群的关于子群结构与线性表示方面的事实.

在本文中我将讨论两个不同的证明：分类定理的“第一代证明”与 1980 年前后开始的、旨在改进、简化以及将分类的证明仔细写下来的工作．第一代证明寻求的仅是，证实文献中确实包含了声称证明分类定理的某一计划的所有部分．第二代证明则将目标集中于给出一个可读性更强的处理方式，从而给人们一个关于该分类正确性的更强的信心．

Gorenstein 有关于第一代证明的部分内容的两卷本 [G1] 与 [G2]. Gorenstein 的书没有试图给出证明的细节，而是仅仅给出了被遗留下来部分的大纲．而且，Gorenstein 在完成这一系列书籍的第 3 卷前就去世了．

第二代证明的最大部分是由 Gorenstein, Lyons 与 Solomon [GLS] 开始的计划．但是，该计划并没有企图处理第一代证明的所有部分，如果象想象的那样该计划完成的话，它将处理第一代证明的大部分．这项工作正由美国数学会出版，在我写这篇文章的时候，[GLS] 中的前 5 卷已经面世了．在 [GLS] 中，可以找到第二代证明的其它部分的参考文献．

我已经把分类描述为一个定理，并且此时我相信这是正确的． 20 年前，我也曾试图将分类描述为一个定理．另一方面， 10 年前，尽管我经常把分类描述为一个定理，我确知事实并非如此，因为那时专家们已经知道，第一代证明中一个极为重要的部分没有被完整地解决并写下来．确切地说，就是第一代证明中所谓的“拟薄群 (quasithin groups)”并没有被充分地处理过． Steve Smith 与我工作了 7 年，最终我们将拟薄群进行了分类，从而弥补了这一分类定理证明中的漏洞．去年我们完成了定理的写作，这将由美国数学会出版 (可能在 2004 年). 稍后，我将宣布该结果：这一结果既可以被视为是第一代证明的一部分，也可以被视为是第二代证明的一部分．

现在是讲述一些细节的时候了．分类的证明是由研究所谓的 G 的 *局部子群* 来进行的．令 p 为一个素数． G 的一个 *p- 局部子群* 是 G 的一个非平凡 p- 子群的正规化子．

设 G 是我们的一个极小反例．可以认为分类定理的证明由下面两个步骤组成：

步骤 1　证明 G 的局部结构类似于某个 $\tilde{G} \in \mathcal{K}$ 的局部结构．

步骤 2　利用步骤 1 的类似性证明 $G \cong \tilde{G}$.

用来考察零散群的步骤 2 是第二代证明的一部分，这是 [GLS] 中没有提到过的．但是，自第一代证明以来，已经在改进步骤 2 的处理方式上取得了相当大的进步．在第一代证明中，关于零散群的存在性与唯一性的证明都有机器来帮助，并且其中涉及到的数学都是不必要的繁复．在过去的 20 年里，出现了带有组合群论和 (或) 代数拓扑特色的方法，这些方法提供了更为简单，更为概念化的步骤 2 的唯一性的处理方法，并且消除了几乎所有的计算机计算．然而，我相信，过去存在性与唯一性的一些机器辅助证明并没有被取代．例如， Thompson 群的唯一性与 O'Nan 群的存在性几乎仍然是机器辅助证明的．下面我们将不再提及步骤 2, 而集中于步骤 1.

一般性的有限单群是一个 Lie 型群．每一个这样的群 G 都可以通过一个线性群的表示来刻画，即 $G \leq GL(V)$, 其中 V 是某个有限域 F 上的有限维向量空间．因此 G 有一个特征，这是一个素数 p, 即域 F 的特征 p. 类似地， G 的 Lie 型秩是 G 的“大小”的一个度量，就我们的用途而言，我们可以粗略地认为 G 的 Lie 型秩就是 V 的维数．最后，给

定一个素数 r, G 的 r- 局部结构的性质在 $r=p$ 时与 $r\neq p$ 时截然不同. 为了实现步骤 1, 我们必须将这些概念从线性群翻译到抽象群的相关概念.

令 p 为素数, G 为有限群, H 为 G 的一个 p- 局部子群. 定义 H 为 *特征* p 的, 如果

$$C_H(O_p(H)) \leq O_p(H),$$

其中 $O_p(H)$ 是 H 的最大正规 p- 子群, 并且对于 $U\subset G$, $C_H(U)$ 是由 G 的所有与 U 的每一元素都可交换的元素构成的子群. 定义 G 为 *特征* p-*型* 的, 如果 G 的每一个 p- 局部子群都是特征 p 的; 定义 G 是 *偶特征* 的, 如果 G 的每一个包含 G 的某个 Sylow 2-子群的 2- 局部子群 H 都是特征 2 的. 这样, 每个特征 p 的 Lie 型群都是特征 p- 型的.

由于种种原因, 1) 我们将不提及素数 2 在有限单群的局部理论中起着特殊的作用这一事实. (例如, 根据 Feit-Thompson 定理 [FT], 非交换单群是偶数阶的.) 因此, 在第一代证明中有了下面的划分:

情形 I 极小反例 G 是特征 2- 型的.

情形 II G *不是* 特征 2- 型的.

出现于情形 I 的一般性的群是特征 2 的 Lie 型群, 而几乎所有其它的单群都出现在情形 II 中.

还有一个根据群的大小的划分, 这里的大小大致上对应于 Lie 型群的大小: 给定一个素数 p 和一个有限群 G, 定义 G 的 p- *秩* $m_p(G)$ 为 G 的具有最大维数的指数为 p 的交换子群的维数, 该子群可以视为阶为 p 的域上的向量空间. 在情形 II, G 的 "大小" 可以取为 G 的 2- 秩 $m_2(G)$. 在情形 I, 群的大小是 Thompson 在 "n- 群" 论文 [T] (关于情形 I 的所有后续工作的模型) 中定义的参数 $e(G)$:

$$e(G)=\max\{m_p(H): H \text{ 是 } G \text{ 的 2- 局部子群}, \ p \text{ 为奇素数}\}.$$

定义 G 为 *拟薄* 的, 如果 $e(G)\leq 2$. 情形 I 里的 "小" 群是指拟薄群. 在第一代证明中我们有 4 大分块, 分别对应于特征 2- 型的大群和小群, 以及非特征 2- 型的大群和小群. 特征 2- 型的拟薄群构成了上述 4 大块之一.

在 GLS 计划中, 由于 "特征" 定义的变化, 上述分块之一也相应地发生了改变. 由于 GLS 的定义过于技术化, 我们这里不打算给出该定义. 但是, 为了适应 GLS 的变化, 在我们关于拟薄群的研究中, Steve Smith 与我也研究了一个不同的特征的概念: 回想一下, 群 G 称为偶特征的, 如果对每一个包含 G 的某一 Sylow 2- 子群的 2- 局部子群 H, 都有 $C_H(O_2(H))\leq O_2(H)$. 定义有限群 G 为 QTKE-群, 如果 G 是偶特征的拟薄群, 并且 G 的每一个单的真瓣都属于 $\mathcal{K}$.

QTKE - 群的分类(Aschbacher-Smith) *令 G 为一个非交换的单 QTKE- 群, 则 G 同构于下列群之一:*

1. *特征 2 的 Lie 型群, 其 Lie 型秩最多为 2, 但不是 $U_5(q)$;*
2. *$L_4(2)$, $L_5(2)$, $Sp_6(2)$, 或 $U_5(4)$;*

1) 这里说的原因包括 Brauer-Fowler 定理. 该定理说, 具有给定的 2- 对合 (群中的 2 阶元) 中心化子的偶阶有限单群只有有限个. —— 译注

3. 交错群 A_9;

4. $L_2(p)$, 其中 p 为 Mersenne 素数或 Fermat 素数, $L_3(3), U_3(3), L_4(3), U_4(3)$, 或 $G_2(3)$;

5. 11 个零散群之一: Mathieu 群, Janko 群 (J_1 除外), HS, He 或 Ru.

这个定理的证明将要发表在美国数学会出版的两卷本 [AS] 中. 该证明的长度大约有 1,200 页. 这部分地反映了该证明的复杂性, 也反映了包含可以在分类的第一代证明中找到的更多细节的书籍的风格, 同时也反映了我们力图使我们的处理做到内容是自足的这一决定. 事实上, 这两卷本的其中之一就是致力于群论的基础性建设, 比如一些流传于坊间的定理以及有关 K- 群的一些事实的证明等.

就我所知, [AS] 中的主要定理弥补了第一代证明中的最后一个漏洞, 因此 (目前) 可以认为分类定理是一个定理了. 另一方面, 我希望我已经使你确信, 通过仔细地撰写更加可信的证明来完成这一计划是很重要的, 因为这样能够把将来发现其它漏洞的机会降低到最低限度. 因此, 如果不讲述尚待完成的计划, 我们关于分类现状的讨论将是不完整的.

回想一下, 条件 "G 是偶特征的" 弱于 "G 是特征 2 的";[1)] 因此如果将第一代证明中的划分改变, 变为基于偶特征这一条件的划分, 在情形 I 中将会出现更多的群. GLS 处理了所谓的 *偶型群*, 这一条件是弱于特征 2- 型的条件, 所以在他们的划分中, 情形 I 也出现了更多的群, 从而这一部分的问题也就变得更加困难. 但是, 作为我们的主要定理的一个推论, Steve Smith 与我在 [AS] 中也确定了偶型的拟薄群, 这是在 GLS 关于分类的方法中需要用到的关于拟薄群的结果. 因此, 任何涉及到处理扩大了的情形 I 的困难, 至少对于情形 I 中的小群已经被克服了.

在分类定理的第一代证明中, 从时间上而言, 情形 II 的处理比情形 I 的处理要早, 更多的时间是被用来处理情形 II 的, 更多的人在这种情形上工作. 或许作为一个结果, 在第一代证明中的情形 II 的处理比情形 I 的处理要处于更好的状况. [GLS] 系列中的第 6 卷是处理 (他们重新定义的) 情形 II 的小群的. GLS 从 [GLS] 的第 5 卷开始同时处理了情形 I 与情形 II 的大群; 这项工作将在后续的几卷中完成. 因此, 第二代证明的还远未完成的部分是情形 I 的初始阶段.

处理情形 I 中的大群的方法集中于 p- 局部子群的处理, p 是奇素数, 但是把 2- 局部子群也考虑在内. 这导致下面的定义: 给定一个 2- 局部子群 H, 定义

$$\sigma(H) = \{p : p \text{ 为奇素数, 且} m_p(H) > 2\},$$

并令 σ 为所有集合 $\sigma(H)$ 的并, 其中 H 遍历 G 的所有 2- 局部子群. 对于 $p \in \sigma$ 我们考察 p- 局部子群.

在第一代证明中, 情形 I 中的两个问题需要特别的处理:

A. 唯一性情形. 存在一个 2- 局部子群 H 使得 $\sigma(H) \neq \emptyset$, 且对每一个 $p \in \sigma(H)$, H 在 G 中是强 p- 嵌入的: 即对每一个 $g \in G - H$, $|H \cap H^g|$ 与 p 互素. (下转 331 页)

1) 原文误为 "特征 2- 型 (characteristic 2-type)".—— 译注

4. Chevalley 的工作

在 [文集 39] 中没有证明且在写作时 Borel 并不知晓的是正规化子定理： G 的一个 Borel 子群 B 与它的正规化子重合：即，如果 $g \in G$, 满足 $gBg^{-1} = B$, 那么 $g \in B$.

Chevalley 不久证明了这个定理，然后发展了半单群的结构理论．他给出了任意代数封闭域上单代数群的完全分类．这与 Cartan-Killing 的 $\mathbb{C}$ 上单 Lie 代数的分类"一样".

Borel 在 [15, p.158] 说道：他在 1955 年夏天给了 Chevalley 一本他的论文的拷贝．第 2 年夏天 Chevalley 告诉他在读完这篇论文后，他已经证得正规化子定理，有了这个定理之后"通过解析延拓其余可以得出".

Chevalley 从 Lie 群中引入混合概念，像根系和 Weyl 群．他的工作发表在巴黎讨论班记录 (Paris Seminar Notes) 上 [Che]; 它们好多年都是关于代数群理论的标准教材.

这记录中代数群的有关论文 [Che, exp.15] 还包括 "Borel-Weil 定理" (没有给其命名) 的第一次出版时的表述．这定理宣称：在一个半单代数群 G 的特征零不可约表示，可以在 G/B 上的适当线丛的截影空间上实现．这里 B 是 G 的一个 Borel 子群.

Borel 和 Weil 在 1954 年研究紧 Lie 群的表示，表面上这是有点不同的内容．在两件事情之间，已经变得很清楚：紧 Lie 群的表示论与 $\mathbb{C}$ 上的可约代数群的表示论等价.

Borel 自己关于 Borel-Weil 定理的笔记没有发表，直到它们以 [文集 30] 出现在文集里．Lie 群或代数群 G 的表示可以运用带一个 G- 作用的适当的簇的线丛的截影 (或者，更一般地，上同调群) 来构造，这个观察已经结出硕果.

(袁斌贤 译　何育赞 校)

(上接 296 页)

B. $e(G) = 3$ 的情形.

最初， GLS 希望 1980 年后发展起来的新方法 (例如：所谓的融合 (amalgam) 方法) 可以被用来同时处理情形 A 与情形 B 中的更大类的偶型群，并且他们的计划建立在上述假设之上，即上述方法的专家可以处理这两种情形．但是，这样的事情到现在为止还没有发生，于是对偶型群的情形，对情形 A 与情形 B 的处理仍然可能是完成第二代证明的最大障碍．这些情形中的关于特征 2- 型的群的工作可以在第一代证明之中作为一个样板找到，但是偶型群中的问题比特征 2- 型群中的问题究竟困难多少，尚未可知．在 G 是偶型的假设下， Gernot Stroth 与 Inna Korchagina 分别完成了情形 A 与情形 B 的前期工作．情形 B 需要特别的处理，因为当 p- 秩等于 3 时与 p- 秩大于 3 时要用到不同的标志函子 (signalizer functors)(参见 [GLS] 的卷 1 与卷 2).

最后，除了第一代证明以及 GLS 的第二代证明之外，还有分类的第三代证明计划．该计划涉及许多人，特别是 Ulrich Meierfrankefeld, Bernd Stellmacher 与 Gernot Stroth. 该计划要用融合方法处理所有的特征 2- 型的群 (而且可能最终是所有的偶特征的群). Steve Smith 与我在我们的工作 [AS] 中利用了该方法的变形．该方法可能给出情形 1 或者至少是情形 B 的一个更好的处理.

参考文献 (略)　　　　(马玉杰 译　陆柱家 校)