

关于三维旋转中的 \mathbb{Z}_2

Vesna Stojanoska Orlin Stoytchev

1. 旋转, 带, 辫, 旋量 $-1/2$ 粒子, 及相关内容

所有三维旋转构成的空间通常记为 $SO(3)$. 这个空间具有一个众所周知的迷人的拓扑性质——对象的完全旋转是一个运动, 它也许可以但也许不可以连续地形变为平凡运动 (平凡运动意为根本没有动), 但不能形变为平凡运动的两个运动的复合可以给出一个能形变为平凡的运动. (此处及以后, 我们用“完全旋转”表示在时刻 $t=0$ 取这个对象, 当 t 从 0 变到 1 时, 将它任意围绕一个固定点转动, 使得在 $t=1$ 时, 该对象回到其初始位置.) 围绕某个固定轴作 360° 的旋转不能连续地形变为平凡运动, 但它能够形变为围绕 (在任何方向) 任何其它轴作 360° 的旋转. 然而, 720° 的旋转可以形变为平凡运动.

你可以尝试在家里用一个盒子, 保持它的一个顶点不动, 来演示盒子的完全旋转. 我们首先围绕它的一条边来旋转这个盒子, 然后尝试把这个运动形变为平凡运动. 如果你盯着一条非固定边上的一个顶点, 它将在一个球面上描绘出一个大圆. 现在, 对于该盒子 (围绕同一个固定的顶点) 的任何完全运动, 我们盯着的这个顶点将在那个球面上画出一条闭路. 所以当你试图把初始运动连续地形变为平凡运动时, 这个顶点画出的将是越来越小的路, 开始是一个大圆, 最后是一条常路, 这恰好是起点也是终点. 当你这样做的时候, 被初始运动保持不动的其它顶点却画出越来越大的路, 逐渐靠近一个球面上的一个大圆. 从效果上说, 要想把围绕一条边的旋转收缩为平凡运动, 你只需设法把它形变为围绕另一条边的旋转. 存在某种内在的“拓扑障碍”, 与收缩这样的运动相抵触. 你需要充分的想象来明白第 2 个性质——如果初始运动由围绕某条轴的两个整 (full) 旋转组成, 它就能够形变为平凡运动. 有一些依赖于这个性质的著名“技巧”, 特别是“Dirac (狄拉克) 带技巧”和“Feynman (费曼) 盘子技巧”. 在“带技巧”中, 你抓住带的一端, 并把另一端 (称为带扣) 做 720° 的旋转. 然后, 不改变带扣的方向, 围绕带扣拆开带. (见 Greg Egan 的网页 [6] 上的生动描述以及由 Bob Palais [9] 用 Java 程序对这些“技巧”的分析.) “盘子技巧”基本上相同. 把一个盘子握在掌中, 不要移动你的脚, 把盘子旋转 720° , 同时把它移到腋下再移到头上. 在起点位置结束动作, 而手臂和身体没有被拆开.

这些实验会给你带来一些问题: 围绕一条轴的一个完全旋转真的不能缩为平凡运动吗? 如果有任意两个不可缩的运动, 是否总是可以把其中一个形变为另一个? 如果把两个不可缩的运动复合, 是否总是得到一个可缩的运动? (最后那个问题的肯定回答实际上可从前一个问题的肯定回答加上“带技巧”的效果得到.) 我们将描述一个实验, 称为“辫技巧”, 它将给出足够的方法来严格地回答这些问题. 在这个过程中, 我们展示三维旋

译自: Mathematics Magazine, Vol.81 (2008), No.5, p.345–357, Touching the \mathbb{Z}_2 in Three-Dimensional Rotations, Vesna Stojanoska and Orlin Stoytchev, figure number 10. Copyright ©2008 the Mathematical Association of America. Reprinted with permission. All rights reserved. 美国数学协会授予译文出版许可.

转和群之间的一个迷人关系。

一个对象的完全旋转与 $SO(3)$ 中的闭路之间存在一一对应。拓扑空间中两条具有相同起点和终点 (称为基点) 的闭路称为同伦的, 如果一条可以连续形变为另一条。由于路的同伦是一种等价关系, 所有的路被分到不相交的等价类中。当我们取路的复合作为乘法并取反方向的路作为逆时, 闭路同伦类的集合就成为一个群。这个群一般是非交换的, 是空间最重要的拓扑不变量之一, 由 Poincaré (庞加莱) 首先引进。它称为基本群或一次同伦群, 记作 π_1 。于是, 对三维旋转所组成的空间, 我们讨论的拓扑性质可以简写为 $\pi_1(SO(3)) \cong \mathbb{Z}_2$ 。这意味着 $SO(3)$ 中起点和终点相同的所有闭路 (例如单位元) 落入两个同伦类——其中一类同伦于常路, 而另一类不同伦于常路。第 2 类中两条路的复合产生一条第 1 类中的路。

具有基本群 \mathbb{Z}_2 的拓扑空间对于想象力是一种挑战——很容易想象基本群为 \mathbb{Z} 的空间 (有孔平面), 基本群为 $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}$ 的空间 (有几个孔的平面), 甚至基本群为 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 的空间 (环面), 但 \mathbb{R}^3 中没有以 \mathbb{Z}_2 为基本群的子空间。

$SO(3)$ 的这个特殊结构在物理世界发挥着基本的作用。恰好有两种主要的不同类型的初等粒子, 具有整数旋量的玻色子 (boson) 和具有半整数旋量的费米子 (fermion), 它们的物理性质大不相同。这种差别可以追溯到以下事实: 一个玻色子的量子态由一个 (可能是多分量的) 波函数来描述, 当坐标系作整旋转 (360°) 时, 它是不变的, 但费米子的波函数在完全旋转作用下被乘以 -1 。稍微粗略地说, 第 2 种可能性来自于这样一个事实: 只有波函数的模数 (modulus) 才有直接的物理意义。数学物理学家很早就认识到 [11, 2], 波函数只有在单位元的小邻域中的变换作用下才真正改变。当一个“大”变换 (例如 360° 的旋转) 作用到波函数上时, 它可以通过一系列“小”变换来实现, 但是终点——变换了的波函数——不一定与起点相符。另一方面, 如果在 $SO(3)$ 中取一条始终在单位元的小邻域中的闭路, 则变换了的波函数在终点必定与起点相符。事实上, 重要的是, 这条闭路是否能够缩为单位元。显然, 从连续性考虑, 如果 $SO(3)$ 中的这条路是可缩的, 则终点波函数必然与起点波函数相符。因此, 当作用两个整旋转 (即 720° 旋转) 时, 波函数将回到最初, 这说明相应于 360° 旋转的变换必定是 2 阶的。

证明 $\pi_1(SO(3)) \cong \mathbb{Z}_2$ 有几个标准的方法。最有名的一个本质上利用了李群和李代数理论。空间 $SO(3)$ 可以认为是行列式为 1 的 3×3 实正交矩阵的空间。它有一个嵌入 \mathbb{R}^9 的闭三维光滑流形的结构 (闭光滑曲面嵌入 \mathbb{R}^3 的高维类似)。它又是一个群, 其群作用是光滑映射。这样的空间称为李群。另一个与 $SO(3)$ 密切相关的李群是 $SU(2)$ ——行列式为 1 的 2×2 复酉矩阵群。相对来说, 容易知道 $SU(2)$ 从拓扑上看就是三维球面 S^3 。这两个群是局部相同的, 即可以找到二者的单位元的开邻域之间的一个一一对应, 它既是群同构又是 (拓扑) 同胚。然而, 从整体上说, 该映射可扩展为一个 2 对 1 同态 $SU(2) \rightarrow SO(3)$, 把 $SU(2)$ 上任何两个对径点映到 $SO(3)$ 上的单个点。用拓扑的语言, 这个映射被称为 $SO(3)$ 的一个二重覆盖。现在 $SO(3)$ 的拓扑可以很容易理解了——它是三维球面 S^3 , 把其中任何两个对径点看成一个点。

我们在本文描述另一种理解的方式并证明 $\pi_1(SO(3)) \cong \mathbb{Z}_2$ 。这种方法不用李群, 甚

至不用矩阵. 在性质上它是纯代数拓扑的, 而且非常形象. 它显示了整旋转 ($SO(3)$ 中的闭路) 和辫之间的一个简单联系. 我们相信, 对于学习几何和拓扑入门课程的学生来说, 这是证明一个不平凡拓扑结果的有趣方式, 同时也是引起对辫和辫群兴趣的适当方法, 辫和辫群自然地出现在各种各样的数学问题中, 从代数拓扑通过算子代数到机器人技术和密码学.

辫和同伦群之间的关系出现在各种不同的场合. 首先, 辫群可以定义为某些构型空间的基本群. 辫已被用来确定球面 S^2 的同伦群 (例如见 [4]). 我们在本文还要提出辫群和某个基本群之间的另一个简单联系.

本文的目的主要是教育学方面的——用一种自我包含和容易理解的方式提出一些结果, 这些结果对于代数拓扑学家以及正在学习辫群的人来说基本上是已知的. $SO(3)$ 的一次同伦群与球面辫有联系这一事实是以下一般性陈述 [7] 的一个 (伪装下的) 特殊情形: “一个 r -球面上 3 个点的构型空间同伦等价于 $r+1$ 维欧氏空间中正交 2-标架的 Stiefel (斯蒂弗尔) 流形”. Fadell [7] 考虑 $\pi_1(SO(3))$ 的一个特别元素, 并用它的阶是 2 这个事实证明了对一个相应的辫的一个类似的陈述. 我们的方向正相反——我们对辫进行分析, 得出 $SO(3)$ 的一些拓扑性质.

在下一节, 我们描述一个简单的实验, 实际上证明三维旋转的 \mathbb{Z}_2 性. 然后在 §3, 我们对该实验给出一个正式的处理. 我们构造从 $\pi_1(SO(3))$ 到 3 根绳的辫群的一个子群的某商群的一个映射. 我们证明该映射是同构, 其像为 \mathbb{Z}_2 .

2. 辫技巧

取一个球 (网球即可), 在它表面 3 个不同的点上系上 3 根绳. 把 3 根绳的另一端系在你桌上 3 个不同的点 (图 1). 围绕任意轴, 对球作任意多次整旋转. 你将得到一条打成的“辫”. (当你旋转时, 那 3 根绳必须充分放松. 而且, 当你正在对球作没有平移运动的旋转时, 你将得到的是一条“辫”, 而不是更复杂的每根绳被自己打结的“混乱状态”. 尽管这种更复杂的情形也容易处理, 我们还是宁可避开它.) 现在保持球的定向不变. 如果整旋转的总数是偶数, 只要围绕球翻转那几根绳, 你将总是能够解开这条“辫”. 如果旋转数是奇数, 你将永远不能解开辫, 但你总可以将它简化为一个简单构型的情形, 例如, 围绕第 1 个点旋转球, 再把第 2 和第 3 根绳互相扭转所得到的情形.

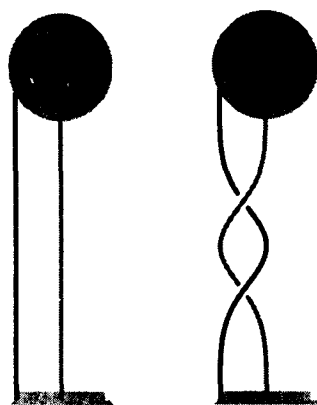


图 1 旋转带有绳的球

正如我们所期待的, 可以连续地变形为平凡旋转 (即没有旋转) 的旋转导致平凡的编辫. 这里我们只能从我们的实验来猜测 $SO(3)$ 的基本群包含 \mathbb{Z}_2 作为一个因子.

3. 把三维旋转与辫相联系

把 $SO(3)$ 中的每条闭路, 与 \mathbb{R}^3 中的 3 条闭路相联系, 它们从半径为 1 的球面出发, 终止于半径为 $1/2$ 的球面. 我们可以想象从时刻 $t=0$ 到 $t=1$ 连续地旋转一个球面, 使

得结束时该球面与初始时的定向相同. 与此同时, 我们将球面的半径从 1 收缩到 $1/2$ (图 2). 球面上的任何 3 个点将在 \mathbb{R}^3 中画出 3 条连续路的轨迹, 它们互不相交. 进而, 对于固定的 t , 这些路上的那 3 个点位于半径为 $1-t/2$ 的球面上. 为了表达的形式化, 令 $\omega(t) (t \in [0, 1])$ 为 $SO(3)$ 中的任一连续路, 满足 $\omega(0) = \omega(1) = I$. $\omega(t)$ 作用在 \mathbb{R}^3 中的向量 (点) 上. 在 \mathbb{R}^3 中取 3 个初始点, 例如 $\mathbf{x}_0^1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{x}_0^2 = (-1/2, \sqrt{3}/2, 0)$, $\mathbf{x}_0^3 = (-1/2, -\sqrt{3}/2, 0)$. 定义 3 条连续路

$$\mathbf{x}^i(t) := (1-t/2)\omega(t)(\mathbf{x}_0^i), \quad t \in [0, 1], \quad i = 1, 2, 3.$$

由此我们得到一个称为 球面辫 (spherical braid) 的对象——球面上几个不同的点以及在较小球面上同样位置同样数目的点, 它们通过几根绳连接, 每根绳对于 t 是单调的.

注 我们可以将两个球面辫相乘, 即把第 1 个的终点与第 2 个的起点连接起来 (并重新调节参数). 当考虑同痕的 (isotopic) 球面辫的类时, 就得到所谓 球面的辫群 [8], 在代数中是 B_3/R (见下文). 这是大家知道的 (没有孔也没有边界的) 球面的映射类群, 它已被拓扑学家研究过.

利用球极平面投影, 我们可将球面辫映为常规辫 (图 2). 首先选择一条从原点出发的射线, 它与任何绳不相交. 该射线与每个球面相交于一点, 我们把这个点当做“北极”. 然后, 相对于这个“北极”, 我们将半径为 $\rho (1/2 \leq \rho \leq 1)$ 的球面 (去掉其“北极”) 在球极平面投影下映到一个相应的 (水平) 平面上. 最后, 我们定义像的 z -坐标为 $z = -\rho$.

回顾由 Artin (阿廷) [1] 引进的通常的 辫 的概念. (当代关于辫理论及与其他学科关系的评论, 也可见 [4].) 我们在 \mathbb{R}^3 中取平行于 XY 平面的两个平面, 在每个平面固定 n 个不同的点, 并将下方平面的每个点通过一条连续路 (绳) 与上方平面的一个点相连. 那些绳互不相交. 此外, 每根绳的 z -坐标是其参数的单调函数, 因而 z 可用来作为所有绳共同的参数. 两根不同的辫称为等价的或同痕的, 如果存在绳的一个同伦 (保持端点不变), 使得对同伦参数 s 的每个值我们都有一根辫, $s = 0$ 对应最初那条辫, 而 $s = 1$ 对应最后那条辫. 当下方和上方平面上的点具有相同位置 (它们具有相同的 x 和 y 坐标) 时, 我们可以把一个叠在另一个的顶上, 对辫做乘法. 考虑带有刚才所定义的乘法的同痕辫的类, 就得到 辫群. 阿廷证明了, n 根绳上的辫群 B_n 可用 $n-1$ 个生成元和一组简单关系 (称为阿廷辫关系) 表达出来. 我们给出情形 $n = 3$ 的辫关系, 因为这是我们特别感兴趣的. 此时辫群 B_3 由生成元 σ_1 和 σ_2 所生成, σ_1 对应于第 1 和第 2 根绳的扭转, σ_2 对应于第 2 和第 3 根绳的扭转 (绳向左扭总是在它向右扭之后进行) (图 3). 这些生成元受制于单个辫关系 (图 4):

$$\sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1. \quad (1)$$

我们说, B_3 有一个用生成元 σ_1 和 σ_2 以及由方程 (1) 给出的关系式来表示的表达式, 简言之

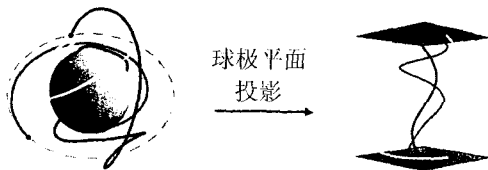


图 2 “球形辫”与正规辫

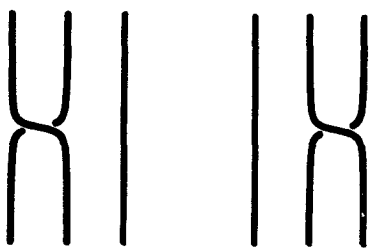


图 3 B_3 的生成元 σ_1 和 σ_2

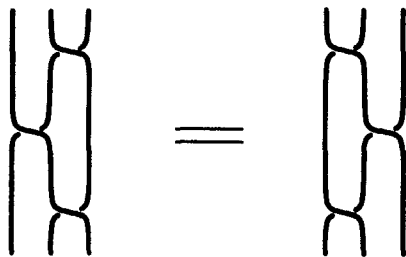


图 4 B_3 的辫关系元 σ_1 和 σ_2

$$B_3 = \langle \sigma_1, \sigma_2; \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \rangle. \quad (2)$$

在我们的情形, 由于球面的整旋转使 3 个点回到它们原来的位置, 我们总是得到 纯辫, 即辫中的每根绳将下方平面的点与它平移到上方平面的点相连. 纯辫构成 B_3 的一个子群, 记为 P_3 . 注意, 从直观上, 应该有一个从 B_3 到对称群 S_3 的同态 π , 因为 B_3 中的每条辫对 3 个点进行置换. 我们在生成元上正式定义 π :

$$\pi(\sigma_1)(1, 2, 3) = (2, 1, 3), \quad \pi(\sigma_2)(1, 2, 3) = (1, 3, 2), \quad (3)$$

并将它拓展到整个群 B_3 (重要的是 π 将方程 (1) 映为平凡恒等式). 纯辫在此映射下的像恰好是对点不进行置换, 因此我们得到下面 P_3 的代数刻画:

$$P_3 := \text{Ker } \pi.$$

换言之, S_3 是 B_3 模去附加等价关系 $\sigma_i^2 \sim I (i = 1, 2)$ 的商, 并且如果 N 是包含 σ_i^2 的极小正规子群, 则 $\pi: B_3 \rightarrow B_3/N$ 是自然投射. 于是容易明白, π 的核必须是以下形式的词的乘积:

$$\sigma_{i_1}^{\pm 1} \sigma_{i_2}^{\pm 1} \cdots \sigma_{i_k}^{\pm 1} \sigma_{i_{k+1}}^{\pm 2} \sigma_{i_k}^{\pm 1} \cdots \sigma_{i_2}^{\pm 1} \sigma_{i_1}^{\pm 1}.$$

事实上, 整个子群 P_3 可由以下 3 个 扭结 生成 (图 5):

$$a_{12} := \sigma_1^2, \quad a_{13} := \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2^{-1} = \sigma_1^{-1} \sigma_2^2 \sigma_1, \quad a_{23} := \sigma_2^2. \quad (4)$$

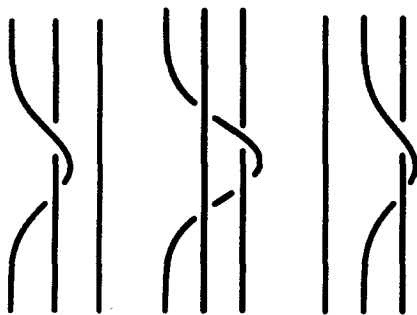


图 5 P_3 的生成元 a_{12} , a_{13} 和 a_{23}

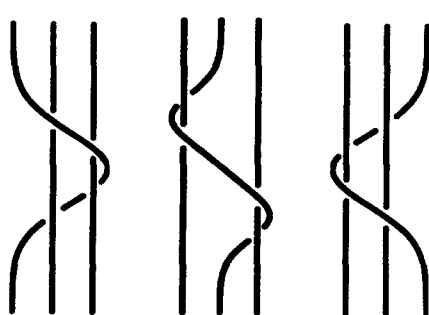


图 6 翻转 r_1 , r_2 和 r_3

至此, 在我们的构造中, 我们将 $SO(3)$ 中任一闭路映为一条球面辫, 然后利用球极平面投影将它映为常规的纯辫. 然而, 最后那个映射依赖于 \mathbb{R}^3 中射线的选取, 更糟的是, 明显意义下同痕的球面辫可能映为不同痕的辫. 为改进这个情况, 我们将 P_3 中某些辫类视为同一. 也就是说, 我们引进以下等价关系 (见图 6):

$$r_1 := \sigma_1 \sigma_2^2 \sigma_1 \sim I, \quad r_2 := \sigma_1^2 \sigma_2^2 \sim I, \quad r_3 := \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2 \sim I. \quad (5)$$

在我们的网球模型中, 元素 $r_i (i = 1, 2, 3)$ 对应于第 i 根绳围绕球向上翻转. 下面将要证明, 这样的运动导致同痕的球面辫. (方程 (5) 给出的 3 个特别的翻转的选取依赖于来自实验的直观——把平凡辫的 3 根绳想象为在一个圆中, 把其中 1 根拉出, 并将它围绕球顺时针向上翻转, 这样得到一个 r_i , 或者围绕球逆时针向上翻转得到 r_i 的逆. 于是, 在图 6 中, 中间的那根绳在后台, 而第 1 和第 3 根绳在前台. 我们不取“更复杂”的元素, 如 $\sigma_2^2 \sigma_1^2$, 它对应于先把中间那根绳从其他两根绳之间拉到前台, 再实施翻转 r_1 , 即 $\sigma_2^2 \sigma_1^2$ 是用 σ_1 和 σ_1^{-1} 对 r_1 作共轭得到.)

注 如果球面辫任何部分的任何一根绳与我们用作球极平面投影的射线交叉, 这个投影将把球面辫映为一个不同的 (阿廷) 辫, 我们应把它与原来的视为同一. 这意味着我们必须利用生成元 $r_i (i = 1, 2, 3)$ 在 B_3 中 (不是 P_3 中!) 的正规闭包 (即 B_3 中包含这 3 个生成元的最小正规子群) 进行因子分解. 这就允许我们将一个词任何部分中的任何 r_i (或它的逆) 设置为 I . 容易明白, 只需一个生成元即可, 因为另外两个包含在第 1 个的正规闭包中. 然而, 从实验我们注意到, 我们只是用方程 (5) 中定义的 3 个翻转 r_i 及其逆的一个序列, 在辫的终点来设法解开任何平凡辫. 与此同时, 即使允许在辫的任何部分进行翻转, 相应于奇数次旋转的非平凡辫也不能解开. 只有当那些翻转 r_i 生成 B_3 中的一个正规子群, 它们才能够解开 (当然, 此时该正规子群与任何一个 r_i 的正规闭包一致, 且它在 P_3 中也是正规的).

引理 1 由 r_1, r_2, r_3 生成的子群 $R \subset P_3$ 在 B_3 中是正规的.

证明 我们需要证明可以把 B_3 生成元及其逆对 r_i 所作的所有共轭表示成 r_i 及其逆的乘积. 反复利用阿廷辫关系 (方程 (1)), 直接计算得到以下恒等式:

$$\begin{aligned} \sigma_1 r_1 \sigma_1^{-1} &= r_2, & \sigma_2 r_1 \sigma_2^{-1} &= \sigma_2^{-1} r_1 \sigma_2 = r_1, \\ \sigma_1 r_2 \sigma_1^{-1} &= r_2 r_1 r_2^{-1}, & \sigma_2 r_2 \sigma_2^{-1} &= r_3, \\ \sigma_1 r_3 \sigma_1^{-1} &= \sigma_1^{-1} r_3 \sigma_1 = r_3, & \sigma_2 r_3 \sigma_2^{-1} &= r_1^{-1} r_2 r_1 = r_3 r_2 r_3^{-1}, \\ \sigma_1^{-1} r_1 \sigma_1 &= r_1^{-1} r_2 r_1, & \sigma_1^{-1} r_2 \sigma_1 &= r_1, \\ \sigma_2^{-1} r_2 \sigma_2 &= r_1 r_3 r_1^{-1} = r_2^{-1} r_3 r_2, & \sigma_2^{-1} r_3 \sigma_2 &= r_2. \end{aligned} \quad (6)$$

作为例子, 我们证明第 2 行第 1 个恒等式. 我们有

$$\begin{aligned} \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 &= \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2, \\ \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 &= \sigma_2^2 \sigma_1 \sigma_2^2 \sigma_1, \\ \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 &= \sigma_2^2 \sigma_1 \sigma_2^2 \sigma_1, \\ \sigma_1 \sigma_2^2 \sigma_1 \sigma_2^2 &= \sigma_2^2 \sigma_1 \sigma_2^2 \sigma_1, \\ \sigma_1 \sigma_2^2 \sigma_1 &= \sigma_2^2 \sigma_1 \sigma_2^2 \sigma_1 \sigma_2^{-2}, \\ \sigma_1^3 \sigma_2^2 \sigma_1^{-1} &= \sigma_1^2 \sigma_2^2 \sigma_1 \sigma_2^2 \sigma_1 \sigma_2^{-2} \sigma_1^{-2}, \end{aligned}$$

因此

$$\sigma_1 r_2 \sigma_1^{-1} = \sigma_1 \cdot \sigma_1^2 \sigma_2^2 \cdot \sigma_1^{-1} = \sigma_1^2 \sigma_2^2 \cdot \sigma_1 \sigma_2^2 \sigma_1 \cdot \sigma_2^{-2} \sigma_1^{-2} = r_2 r_1 r_2^{-1}. \quad \blacksquare$$

利用适当的整旋转, 我们得到 P_3 所有的生成元. 例如, a_{12} 可以通过围绕向量 $\mathbf{x}_0^3 = (-1/2, -\sqrt{3}/2, 0)$ 的旋转而得到, 它扭转第 1 和第 2 根绳. 此外, $SO(3)$ 中闭路之间的同伦对应于球面辫的同痕, 因而 $SO(3)$ 中同痕的闭路映到商群 P_3/R 中的同一个元素. 因此我们有满射 $\pi_1(SO(3)) \rightarrow P_3/R$.

命题 1 商群 P_3/R 同构于 \mathbb{Z}_2 .

证明 为使记号更简单, 我们用同一字母表示 P_3/R 中一个类的代表以及这个类本身, 相信从上下文看意思是清楚的. 在 P_3/R 中, 我们有

$$\sigma_1 \sigma_2^2 = \sigma_1^{-1} = \sigma_2^2 \sigma_1$$

和

$$\sigma_2 \sigma_1^2 = \sigma_2^{-1} = \sigma_1^2 \sigma_2.$$

下面一系列的恒等式可以依次得到:¹⁾

$$\begin{aligned} \sigma_2 \sigma_1^2 &= \sigma_1^2 \sigma_2, & \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^2 &= \sigma_1^3 \sigma_2, \\ \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 &= \sigma_1^3 \sigma_2, & \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 &= \sigma_1^4 \sigma_2, \\ \sigma_1 \sigma_2^2 \sigma_1 \sigma_2 &= \sigma_1^4 \sigma_2, & I &= \sigma_1^4. \end{aligned}$$

证明中我们两次用了辫关系 (方程 (1)) 以及方程 (5) 中的第 1 个等价关系. 用完全类似的方法, 可证得

$$\sigma_2^4 = I.$$

联合最后的两个结果和方程 (5) 中的诸等价关系, 我们最终得到

$$\sigma_1^2 = \sigma_1^{-2} = \sigma_2^2 = \sigma_2^{-2}. \quad (7)$$

现在很清楚, 在 P_3/R 中, 由方程 (4) 所定义的 3 个生成元都化简为阶为 2 的一个元素. 因此它们生成 \mathbb{Z}_2 . 证明完成. ■

至此, 我们已经构造了一个映射 $\pi_1(SO(3)) \rightarrow P_3/R$, 根据构造, 它是满射, 且已证明映射的像同构于 \mathbb{Z}_2 . 为了证明该映射实际上是同构, 我们只需:

命题 2 映射 $\pi_1(SO(3)) \rightarrow P_3/R$ 是一个单态射.

证明 只需证明: 如果 $SO(3)$ 中一条连续闭路被映到 R 中的一根辫, 则这条路同伦于常路. 证明基本上归结为如下的观察: —— 任何纯的球面辫 (绳把外球面上的每个点与内球面上同一点相连) 确定 $SO(3)$ 中的一条闭路. 两条同痕的纯球面辫确定 $SO(3)$ 中同痕的闭路. 事实上, 回顾对球面辫, 我们能够对每根绳上的点给一个单参数 t , 而对固定的 t , 那 3 个点位于半径为 $1-t/2$ 的球面上. 对每个固定的 t , 这 3 个有序的点 $\mathbf{x}^i(t)$ ($i=1, 2, 3$) 给出 \mathbb{R}^3 中某个方向的一个非退化三角形. 令 $\mathbf{l}(t)$ 为连接三角形质心和顶点 $\mathbf{x}^1(t)$ 的向量, 即 $\mathbf{l}(t) = \mathbf{x}^1 - (\mathbf{x}^1(t) + \mathbf{x}^2(t) + \mathbf{x}^3(t))/3$, 并定义 $\mathbf{e}^1(t) := \mathbf{l}(t)/\|\mathbf{l}(t)\|$. 令 $\mathbf{e}^3(t)$ 为垂直于三角形所在平面的单位向量, 相对于边界定向 $(1, 2, 3)$ 为正向. 最后, 令 $\mathbf{e}^2(t)$ 为垂直

1) 即, 从前一个恒等式, 至多再借助于 (1) 的辫关系与 (5) 的等价关系, 可以得到后一个恒等式. — 校注

于 $\mathbf{e}^1(t)$ 和 $\mathbf{e}^3(t)$ 的单位向量, 使得这 3 个向量形成一个右旋标架. 于是存在唯一的元素 $\omega(t) \in SO(3)$, 把 3 个向量 $\mathbf{e}_0^1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_0^2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_0^3 = (0, 0, 1)$ 映到三元组 $\mathbf{e}^i(t)$. 根据定义, $\omega(0) = \omega(1) = I$, 且我们得到一个连续函数 $\omega: [0, 1] \rightarrow SO(3)$, 其中连续性应该理解为相对于 $SO(3)$ 上某个自然的拓扑, 例如强算子拓扑.

回顾对每条球面辫, 第 i 根绳 ($i = 1, 2, 3$) 开始于点 \mathbf{x}_0^i , 终止于点 $\mathbf{x}_0^i/2$. 如果有两条同痕的球面辫, 由定义, 存在连续函数 $\mathbf{x}^i(t, s)$ ($i = 1, 2, 3$), 使得对任何固定的 $s \in [0, 1]$, $\mathbf{x}^i(t, s)$ 是一条辫, $\mathbf{x}^i(0, s) = \mathbf{x}_0^i$, $\mathbf{x}^i(1, s) = \mathbf{x}_0^i/2$, 并且 $\mathbf{x}^i(t, 0)$ 给出初始辫, 而 $\mathbf{x}^i(t, 1)$ 给出最终辫. 如上所述, 对任何三元组 $\mathbf{x}^i(t, s)$, 指定了一个元素 $\omega(t, s)$, 这样我们得到 $SO(3)$ 两条闭路之间的一个同伦.

令 $\omega'(t)$ 为 $SO(3)$ 中一条闭路, 它被映到类 $r_1 \in R$ 中的辫 b . 我们可以构造一条球面辫, 它的像与辫 b 同痕. 令 \mathbf{z} 为单位球面上的点, 我们相对于这个点来实施球极平面投影. 这个点总是可以选择北极或离北极很近的点 (如果一根绳与通过北极的轴相交的话). 注意, 点 \mathbf{x}_0^i ($i = 1, 2, 3$) 在赤道上. 在单位球面上构造一条简单闭路, 从 \mathbf{x}_0^1 出发, 围绕 \mathbf{z} 按反方向走 (与赤道不相交, 除非在端点), 终止于 \mathbf{x}_0^1 . 于是, 我们有了两个连续函数 $\varphi(t), \theta(t), t \in [0, 1]$ ——球面 (角) 坐标刻画了这条路. 令 $\mathbf{x}^1(t)$ 为 \mathbb{R}^3 中的点, 它的球面坐标为 $\rho(t) := 1 - t/2, \varphi(t), \theta(t)$, 令 $\mathbf{x}^i(t) := (1 - t/2)\mathbf{x}_0^i$ ($i = 2, 3$). 这 3 条路给出我们需要的球面辫. 它和来自于 $SO(3)$ 中常路的平凡辫同痕, 同时它与 b 在球极平面投影下的原像同痕. 由此, 我们知道, $\omega'(t)$ 必与常路同伦. 显然, 用 r_2 和 r_3 或它们的逆代替 r_1 , 类似的结论成立. 因 R 中任一元素是这些生成元的乘积, 又因同痕辫的乘积仍然同痕, 故证明完成. ■

4. 更多讨论, 结果以及推广

当我们看被众多不同的球旋转打成的一个复杂的辫时, 要回答它能否 (通过实施翻转 r_i) 被解开, 似乎是很困难的. 实际上, 有一个简单的判断法则来确定. 假设这个辫用阿廷生成元表示为某个词:

$$b = \sigma_1^{m_1} \sigma_2^{n_1} \sigma_1^{m_2} \sigma_2^{n_2} \cdots \sigma_1^{m_k} \sigma_2^{n_k}. \quad (8)$$

定义以下不变量, 称为辫的长度:

$$p(b) := m_1 + n_1 + m_2 + n_2 + \cdots + m_k + n_k. \quad (9)$$

注意, m_i 和 n_i 可以是任何整数 (正, 负或零). 我们观察到这个数 $p(b)$ 是阿廷辫的不变量, 因为在任何词的内部作用辫关系 (方程 (1)) 不改变那个词的 $p(b)$. 其次, 因为我们的辫是纯的, 它可以写成方程 (4) 所定义的生成元 a_{12}, a_{13}, a_{23} 及其逆的乘积. 注意, 这些生成元的每一个都有 $p(b) = 2$. 所以, 我们得出结论: $p(b)$ 是偶数. 现在, 如果 $p(b) \equiv 0 \pmod{4}$, 这意味着 b 是偶数个生成元 a_{ij} (及其逆) 的乘积. 在命题 1 的证明中, 我们看到 P_3/R 中的 3 个生成元 a_{ij} 都化简为阶为 2 的元素, 所以 $p(b) \equiv 0 \pmod{4}$ 蕴含 b 在 P_3/R 中是平凡的或者它可通过翻转解开. 另一方面, 如果 $p(b) \equiv 2 \pmod{4}$, 则 b 是奇数个生成元 a_{ij} (及其逆) 的乘积, 从而可化简为 P_3/R 中单个非平凡元素. 用这种办法, 我们提供了解决

所谓 P_3/R 的词问题的一个(简单)算法,即可以通过算法在有限步骤内决定两个词是否表示同一个群元素.

我们的“难题”有一个更迷人的方面——给出一个复杂的辫,它在 P_3/R 中是平凡的,我们能提供一系列翻转 r_i 的秘诀来解开它吗?(当用网球来做实验时,我们通常可以直观地找到一系列的翻转,但我们能用电脑编程来做吗?)从数学上讲,问题归结如下:给定元素 $b \in R \subset B_3$, 它用 B_3 的生成元表出,我们能给出一个算法用 R 的生成元重新写出它来吗?我们(作者)不知道问题的答案,尽管它也许很简单.应该指出,关于辫群,它的子群和商群的这样一些问题已经激起了相当大的兴趣,特别是关于它们在密码学中可能的用途(例如见 [5]).

我们可以利用代数学容易地理解“带技巧”或“盘子技巧”.在用球做的实验中,我们围绕一条垂直的轴作两次整旋转(整扭转)(图 8).图 7 所示的单个整扭转导致辫 $d := (\sigma_1\sigma_2)^3$.对两个整扭转,利用两次阿廷辫关系,得到:

$$\begin{aligned} d^2 &= (\sigma_1\sigma_2)^6 = (\sigma_2\sigma_1)^6 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1(\sigma_2\sigma_1)^3 = \sigma_2\sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_1(\sigma_2\sigma_1)^3 \\ &= r_3\sigma_1^2\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = r_3\sigma_1^2\sigma_2\sigma_2\sigma_1\sigma_2^2\sigma_1 = r_3r_2r_1. \end{aligned}$$

因此,我们可应用一系列翻转 $r_3^{-1}, r_2^{-1}, r_1^{-1}$ (按此顺序)来解开辫 d^2 .直观上说,这与从球的上方和绕着球翻转 3 根绳是一样的.同样明显的是,从哪一根绳开始并不重要,所以对上述系列的翻转作一个循环置换也能解开这个辫.看下方程 (6) 中某些恒等式,我们事实上有 $r_3r_2r_1 = r_2r_1r_3 = r_1r_3r_2$.



图 7 情形 $n = 3$
时的整扭转 d

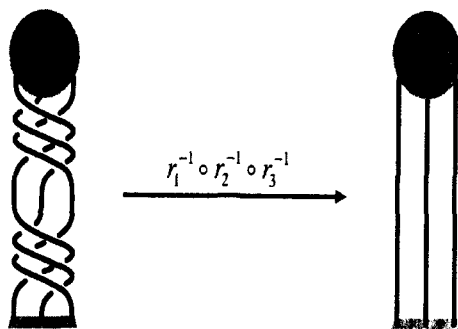


图 8 “带技巧”



图 9 翻转 r_i

前几节某些结果对 $n > 3$ 有一个明显的推广.要得到 $SO(3)$ 非平凡的基本群,绳的最小数目是 $n = 3$.当 $n > 3$ 时,任何整旋转将引出纯的球面辫,但纯辫的整个群却不是这样生成的.用这个办法可以相对容易地知道,在作了球极平面投影后,我们将得到 P_n 的一个子群,它由所有绳围绕一个外点所作的单个整扭转 d 和一组 n 个翻转 r_i 生成:

$$\begin{aligned} d &:= (\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})^n, \\ r_1 &:= \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_{n-2}\sigma_{n-1}^2\sigma_{n-2} \cdots \sigma_1, \\ r_2 &:= \sigma_1^2\sigma_2 \cdots \sigma_{n-2}\sigma_{n-1}^2\sigma_{n-2} \cdots \sigma_2, \\ r_i &:= \sigma_{i-1} \cdots \sigma_2\sigma_1^2\sigma_2 \cdots \sigma_{n-2}\sigma_{n-1}^2\sigma_{n-2} \cdots \sigma_i, \quad i = 2, 3, \dots, n-1, \\ r_n &:= \sigma_{n-1}\sigma_{n-2} \cdots \sigma_2\sigma_1^2\sigma_2 \cdots \sigma_{n-2}\sigma_{n-1}. \end{aligned}$$

图 7 显示了有 3 根绳的整扭转, 而图 9 显示了一个一般的翻转. 直接计算给出引理 1 的以下推广:

引理 1' 由 $r_i (i = 1, \dots, n)$ 生成的子群 $R \subset P_n$ 在 B_n 中正规.

证明 如同引理 1 的证明, 我们展示所有翻转 r_i 的共轭的明确公式:

$$\begin{aligned}\sigma_j r_i \sigma_j^{-1} &= \sigma_j^{-1} r_i \sigma_j = r_i, \quad i - j > 1 \text{ 或 } j - i > 0, \\ \sigma_{i-1} r_i \sigma_{i-1}^{-1} &= r_i r_{i-1} r_i^{-1}, \\ \sigma_{i-1}^{-1} r_i \sigma_{i-1} &= r_{i-1}, \\ \sigma_i r_i \sigma_i^{-1} &= r_{i+1}, \quad i \leq n-1, \\ \sigma_i^{-1} r_i \sigma_i &= r_i^{-1} r_{i+1} r_i, \quad i \leq n-1.\end{aligned}$$

用 S 记由 d 和诸 r_i 生成的子群. 利用纯拓扑的知识, 即 $\pi_1(SO(3)) \cong \mathbb{Z}_2$, 可以推出命题 1 的以下推广:

命题 1' 商群 S/R 同构于 \mathbb{Z}_2 .

这个命题的等价陈述是 $d^2 \in R$.

给出一条多于 3 根绳的辫, 确定它是否属于群 S , 或换句话说, 当它的绳在每个端点打结在一起, 能否从平凡辫开始, 实施诸翻转 r_i 和扭转 d 及其逆 (对上面的端点), 从而将它解开, 一般说来是并不简单的. 这个问题对于编织机器的构造非常重要, 它已在 [10] 中被清楚地解决了. 例如, 图 10 中的辫可以通过一系列翻转得到. 由于在此情形的绳是成对出现的, 我们可以把它们想象成表示带子. 你可以用这个例子玩耍一下, 取一条纸带, 在平行于长边的方向割开两条缝, 打成所示图形的辫, 或者看一下 Bar-Natan 的打结物体图库 [3], 这个例子就来自那里. 事实上, 图 10 中的“编辫 theta”可以通过实施一系列的带子翻转 R_1, R_2, R_3 及其逆 (类似于图 6 中的翻转, 但作用在 3 条带子上) 而得到. 根据定义, 我们有 $R_i := r_{2i} r_{2i-1}$, 翻转 R_i 的效果类似于通常的翻转 r_i 的效果, 只是它把第 i 条带子按逆时针方向扭转 720° . 在实验中比代数运算更容易发现, 图 10 中的“编辫 theta”就是乘积 $R_3 R_2^{-1} R_3^{-1} R_2$.

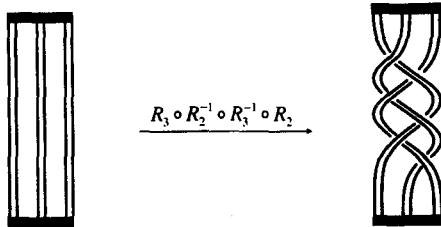


图 10 “编辫 theta”

如果有人试图把本文的主要结果推广到高维情形, 他会立刻发现同构不成立. 一方面, 在高于三维的空间中的辫总是能够解开的. 另一方面, $SO(n)$ 的基本群是非平凡的. 造成失败的原因是我们能把 $SO(3)$ 中一条路看成属于有 3 根绳的任何一条球面辫, 但 $n > 3$ 时却并非如此. (S^3 上 4 个点也许不能确定 \mathbb{R}^4 中正交标架的定向.)

参考文献 (略)

(李福安 译 陆柱家 校)