Cartwright , Littlewood ,
⑤
324-332
数学合作，分岐理论

M.L.Cartwright 与 J.E.Littlewood 的数学合作

01

McMu., SL , 倪录群

Shawnee L.McMurran and James Jo Tattersall

Balthasar van der Pol 在二十及三十年代的电路实验开创了动力学历史的一个有趣的篇章. 由于无线电技术发展的需求，使得 van der Pol 的工作恰逢其时，同时，他的研究也激发了对非线性振荡器的数学理论的兴趣. 而且， van der Pol 的工作还引起了剑桥数学家 M.L.Cartwright 和 J.E.Littlewood 的注意. 拓扑学和 Poincaré 变换理论解决了如何分析非线性振荡器和耗散系统的形态问题. 由此产生的数学技巧对动力系统以及混沌的现代理论发展都起了至关重要的作用. 此外，非线性振荡器理论还带动了无线电、雷达以及激光技术的发展.

Cartwright 和 Littlewood 之间的合作开始于第二次世界大战前不久，持续大约十年. 他们一起合作发表了四篇文章，在这些合作文章的基础上，又各自发表了几篇文章. 他们的合作工作属于在大参数理论这一领域方面最早的一些严格结果. 他们属于那些最早认识到拓扑方法和分析方法可结合起来有效地解决微分方程中的多种问题的数学家们. 他们的研究结果也有助于促成 Smale 蹄形微分同胚的构造 [1]. 他们的名字可以与以下这些数学家并列： Levinson, Lefschetz, Minorsky、Liapounov, Kryloff、Bogolieuboff, Denjoy, Birkhoff, Poincaré, 这些人的工作极大地推动了现代动力理论的发展.

和 Littlewood 相遇之前， Cartwright 在牛津先认识 G.H.Hardy. 1928 年 1 月，Cartwright 在 New 学院听 Hardy 的星期五课，她和一批不同寻常的人为伍. 听课的人有 Gertrude Stantey, John Evelyn、E.H. Linfoot, L.S.Bosenquet, Frederick Brand 以及 Tirukkannapuram Vijayarhagavan. 几乎所有这些人在 1928 年夏天都取得了博士学位. 这些听课人一致的感觉是他们的老师是一个非常伟大的人物，但目前尚未被公众完全认识. Cartwright 欣赏 Hardy 的风格和他的数学哲理. 她回忆他为学生费尽心力，无论他们是好学生，是差学生，或是平平常常. 有一次，她得到了一个显然是错误的结果，Hardy 说："让我们来看看，当你得到了一个明显的矛盾时，总会有希望."[2] Hardy 成了 Cartwright 最初的学位论文导师. 后来，当 Hardy 到 Princeton 后，她在 E.C.Titschmarsh 指导下完成了学位论文.

Cartwright 第一次和 Littlewood 相遇是在 1930 年 6 月，那时 Littlewood 正去牛津为

原题: The Mathematical Collaboration of M.L. Carteright and J.E.Littlewood. 译自: *American The Mathematical Monthy*, Vol. 103, No. 10, 1996, pp. 833–843.

她的博士学位进行考查. 同年 10 月，她得到一笔为期三年的研究奖学金去了剑桥 Girton 学院. 在那里，她听 Littlewood 的函数论的系列课程，并参加下午五点在三一学院他房间里举行的讨论班、讨论班是以精美的茶点开始的.

1931 年， Hardy 在剑桥担任数学 Sadlerian 讲座教授. Cartwright 问 Hardy, 他是否想举办一个类似于在牛津时每星期五晚上的讨论班，那讨论班曾使她得益非浅. 他回答说也许会和 Littlewood 一起作出某种安排. 不久，课表上公布 Hardy-Littlewood 课程. Cartwright 回忆 [3] 在第一次 Hardy-Littlewood 课上， Littlewood 在演讲， Hardy 迟到了，他大大咧咧地给自己倒了茶，便开始发问. 他好像一定要 Littlewood 讲细节. 但 Littlewood 只想说明要点，视细节为当然. Littlewood 回答 Hardy 说，他不是来被人质问的. Cartwright 记得他们俩从此就再也没有一起来上过课. Hardy 和 Littlewood 分别轮流地出席. Littlewood 在他的课上通常是自己讲，而 Hardy 常常邀请别人来讲. 最后， Littlewood 不再出席，尽管那课仍是在他的房间里进行. 这课便以 "Littlewood 不出席的 Hardy-Littlewood 座谈会" 而闻名. Littlewood 不时地举行他自己计划外的讲座、 Hardy 建议他的一些学生去参加.

在剑桥的第一年， Cartwright 间或地与 Littlewood 通信或面谈讨论一些与他课程有关的课题. 他记得他的方式有点与众不同. 他常常喜欢在户外谈话. 她偶尔能在她自己的晚茶之后，他的早晚餐之前拖住他在电话上讨论. 他从不和她在黑板前面讨论问题，他宁可边走边谈地在墙上画假想的图形. 每当他们开始合作，几乎所有他们之间的合作全通过写信来进行. 偶尔也对一些特别的要点作简短的讨论. 他从来不去她的办公室，她也记不起曾经到过他的办公室. Littlewood 给她的信，信纸背面大都已经用过，常常是文稿的校样.

Cartwright 猜想 Littlewood 对于他们之间的合作可能有某种不曾明言的约定，就像他和 Hardy 合作时一样. Harold Bohr 指出以下四条 "合作公理" 是 Hardy-Littlewood 关系的基石 [4].

1. 当一人写信给另一人时，所写的东西正确与否完全无关紧要.
2. 当一人收到对方来信时，没有义务去读它，更不必说要回信.
3. 虽然，如果两人同时想到了同样的细节，他们毫不在乎. 但是最好不发生这种事.
4. 如果两人之一对他们联名发展的文章毫无贡献，那也无所谓.

Bohr 有这样的看法： "从来没有、或很少有过如此重要而和谐的合作是建立在这样消极的公理的基础之上的."

Cartwright 把这些约定的陈述归功于 Hardy. 她深信这样精确的陈述非他莫属. 她曾向 Littlewood 问起过这些公理、他回答说 Hardy 与他之间的协议是不成文的. 他自己也从来没有向她声明过这些规则. 但是她猜测他对他们之间合作所持的方针与此大同小异. Cartwright 听说，有一次， Littlewood 在准备一份要交给她的材料时， "抽去一部分已经写好的内容，因为那违背了合作的规矩." [5],Cartwright 猜想 Littlewood 可能违反了第一条规定、对她的一些错误作了批评.

据 Cartwright 说 [6], 她与 Littlewood 之间有一段值得记忆的插曲，那是在他的函数论课上、关于他所提出的一个有趣的问题. 问题详述如下：如果函数 $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n$ 在 $|z|<1$ 上解析，且在 $|z|<1$ 上取任何值不超过 p 次，那么，它是否满足 $|f(re^{i\theta})|<A(p)(1-r)^{-2p}$? 其中 $0<r<1$、$A(p)$ 是只依赖于 p 和 $a_1,a_2,\ldots,a_p$ 的常数. Littlewood 给 Cartwright 的印象是，这是一个激动人心的问题，如果她能为解决这问题取得任何重大的进展，他都会有兴趣.

同时，Cartwright 在 Edward Collingwood 的课上，学到了 Ahlfors 的扭曲定理 (Distortion Theorem). 一天晚上，在洗澡时，她想她已经知道怎么用这个定理来解决 Littlewood 的问题. 但当后来坐下来更加仔细地考虑这问题时，她钻进了"牛角尖". 对 $p=1$ 的情况，证明是已知的. 她试图用修改这个证法来证明 $p>1$ 的情况，而不是用她最初的思路. 她把这个证明交给了 Littlewood. 她得到的答复是一个短笺，上面还画了一条蛇 (见图 1). 在 Littlewood 的短笺中，他说明了她证明中所犯的一个常见的错误.

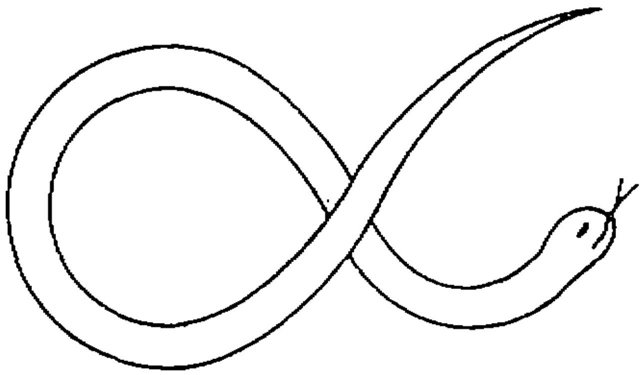

图1.

回返到她最初的想法，Cartwright 给 Littlewood 送去了一份用 Ahlfors 的结果的新证明. 一些时日之后，Cartwright 与女副校长 (Vice-Mistress) 一起在 Trinity 学院附近的 Cam 河上泛舟，她在邻近的河岸上见到了 Littlewood. 鉴于关于她的新证明毫无音讯，她问他曾否看过她的稿子. 他反问道："一定要我看吗？" 她说服他去看. 后来，他对她这个工作深为器之.

她的证明经润色后发表了 [7]. Littlewood 在他的"函数论讲义"一书中引用了这篇文章. Cartwright 相信她关于这个问题的工作促使 Littlewood 和 Hardy 一起给 Girton 学院写信. 结果她得到了助理讲师的职位，她的研究奖学金也延长为四年.

1938 年 1 月，科学和工业研究部无线电研究局发布一个备忘录，请求纯数学家对"无线电工程技术中某些类型的非线性微分方程"给予"切实的专家性的指导"[8]. 副本送到了伦敦数学学会. 无线电工程师要求分析在雷达研究中遇到的一些面目极为可憎的微分方程的解.

这些无线电工程师关心的问题来自真空管 (热离子管) 的使用，它们用来控制发射器和接收器电路中的电流. 在发射器中，晶体管已经替代大部分真空管. 然而，在出现非

常高的电压时，真空管仍有时要用．将它们包裹在陶瓷之中，具有很好的发射能力，可用于导弹．从真空管研究中产生的这一类问题对控制理论数学以及飞机制造影响极大．

求解常系数线性微分方程的显式解析解的现有技巧是早期无线电工程师的主要依靠．线性微分方程被用来近似物理系统，方程的解可用来推断系统状态．据备忘录称“现在已经产生了更加全面地了解包括热离子管在内的一些电子设备的准确形态的需求．为了得到对于实际物理系统更佳的近似，需要用非线性微分方程．

无线电工程师希望数学家能给他们提供非线性微分方程理论，这些理论能和线性微分方程理论一样比较简单．在当时，这种要求不能认为完全是异想天开．虽然，在 1920 年之前，对天体力学的兴趣激发了关于非线性自守振荡子充分的研究，但是，处理无线电研究中产生的耗散系统还没有类似的技巧．物理学家和工程师在实验中碰到了这些系统，现有的大部分研究是他们完成的．除了 Littlewood 和 Poincaré 外，数学家很少对非线性微分方程作过系统的研究．

虽然，工程师能对他们的系统算出数值解，但是，当想知道解是如何随着参数变化的，这些数值解很少有用．在二十世纪初期，求数值解并非易事．而且，要决定解是如何随着物理系统的参数变化的，需要大量的数值解．工程师希望解析的途径能提供更加有效的办法来分析他们的系统．

不巧的是，甚至对于表述物理系统的最简单的方程，数学分析也是非常复杂而且少有实际的应用．备忘录指出，如果能够确定现实情况的确如此，那么弄清楚这一点是很值得的，因为那可以避免“徒劳追求扑朔迷离的东西劳民伤财．”而且，由于真空管本身的复杂和多变，无线电工程师最终相信实验方法比数学分析更加有效．

Cartwright 说：“虽然，我自己参与发展了一般理论，解决了一些理论问题，然而我想我从来没有得出过一个结果，它对任何需要解决的特定的实用问题有用 [9]．”诚然，工程师不能应用像 Cartwright 和 Littlewood 那样的数学家所发展的许多理论，但是，有些理论适合于解决一些来源于自动控制装置的新问题．它们涉及的方程组与无线电工程中出现过的十分相似．由此产生的数学技巧使耗散系统的分析有了长足的发展，而以往这方面进展相当缓慢．这些分析为现代动力学理论提供了部分基础．

如图 2 所示的三极管振荡器是二十世纪早期电路中一个最基本的构成部分．无线电研究局的目的是想要决定电路参数取那些值时，能得到周期解或几乎周期解．另一个同样重要的问题是确定这些振荡器的频率是怎样随电路的参数而变化的．

Cartwright 觉得这些问题很有趣．她根据所列的参考文献，从 20 年代 Appleton 和 van del Pol 的工作着手，开始了她的调研． van del Pol 的一篇重要文章 [10] 中有 87 篇参考文献．这篇文章是她调研工作的一个极好的出发点． van del Pol 文章的着重点是那些线性方程所不能解释的现象．他引用了几篇生物及物理的学术论文，例如， Voltera 关于交互作用的物种的工作， E.W.Brown 关于摆的工作，以及 Poincaré 关于天体力学的工作， Cartwright 感到惊奇的是 van del Pol 没有引用 Birkhoff 的工作， Bendixon 的工作和 Poincaré 的文章：“微分方程所定义的曲线”[11]．她认为 Poincaré 关于曲线以及 Bendixon 关于极限环的著名思想已成为处理一些类型的非线性方程的基本概念．此外，

从 Birkhoff 变换理论的应用得到灵感，她和 Littlewood 发展了一些技巧，将之用于动力系统. 她对 van der Pol 的看法是，像大多数作者一样，包括她本人也不例外， van der Pol 没有全部看过他引用的参考文献.

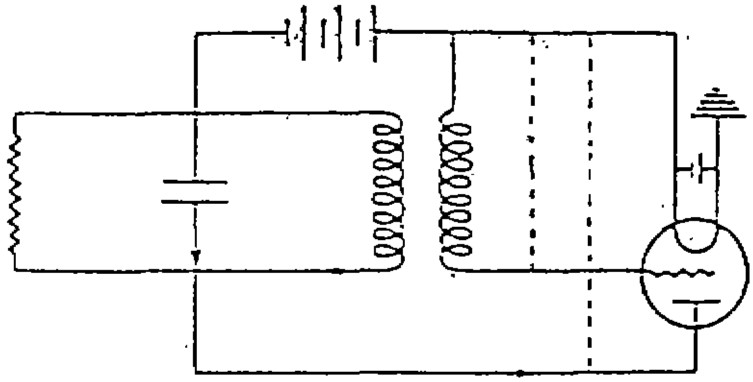

图2.

Cartwright 关心这些应用问题这一点本身是有趣的，因为在牛津时，动力学是一个从未使她产生兴趣的课题. 然而， Cartwright 直觉地认识到这些问题的拓扑背景. 她说："最令我感兴趣的数学问题往往会转化为拓扑问题或拓扑动力学问题"[12].

虽然，起初 Cartwright 对动力学方面的东西知道很少，但她发现无线电工程师的工作要比机械工程师的更有趣，含义更深刻. 无线电工程师希望他们的系统有规则地振荡. 类似的方程在天文学和天体力学中已研究过，但那里的周期是以天或年计的. 无线电振荡的速度极快，其周期以几分之一秒来计算，因此实验能很快，很有效地得出稳定解的形态.

在调研文献时， Cartwright 发现了一些引人入胜的问题，随即她转告给 Littlewood. 那时， Cartwright 有个习惯，她总是把她认为 Littlewood 会感兴趣的所有东西告诉他. Littlewood 撇开一些简单的问题，但他觉得 van der Pol 的一些猜想值得研究.

Cartwright 向 Littlewood 提供她所搜集到的资料，因为她想他能帮助她理解动态. 他一挥而蹴地给出了大部分问题的解法或建议. 他发现某一些问题更有趣. Littlewood 常用动力学的术语来思考，也许这是因为在第一次世界大战期间他的早期工作是在弹道学方面的. 她说他常把解称为"弹道"，仿佛它们是从防空炮发射出来的导弹轨迹 [13]. 他似乎确实懂得无线电工程的动力学内容. van der Pol 在回忆一次与 Littlewood 讨论的情况时，他"以惊异的语气"告诉 Cartwright, Littlewood 的所有方法都与物理概念有对应 [14]. Cartwright 与 Littlewood 和 Colebrook, Appleton, van der Pol 有通信联系，以便对情况有更好的了解.

Cartwright 和 Littlewood 探讨的第一个问题是无强迫项的 van der Pol 方程稳定周期解的振幅问题：

$$\ddot{x} - k(1 - x^2)\dot{x} + x = 0. \tag{1}$$

van der Pol 对 $k = .1, 1, 10$ 的情况得到了图形解 (见图 3). van der Pol 的图形似乎显出三

种情况的解都收敛于振幅为 2 的一个周期解. Littlewood 指出当 k 取小正数时，振幅不是 2. 当 k 为小正数时，方程 (1) 有一个振幅为 $2+O(k)$ 的周期解. Cartwright 和 Littlewood 成功地证明当 k 取大值时，除了 $x=0$ 的显然解以外，方程 (1) 的一切解收敛于一个周期解，其振幅当 $k\to\infty$ 时趋于 2. 他们用的方法是初等的，但是相当复杂 [15].

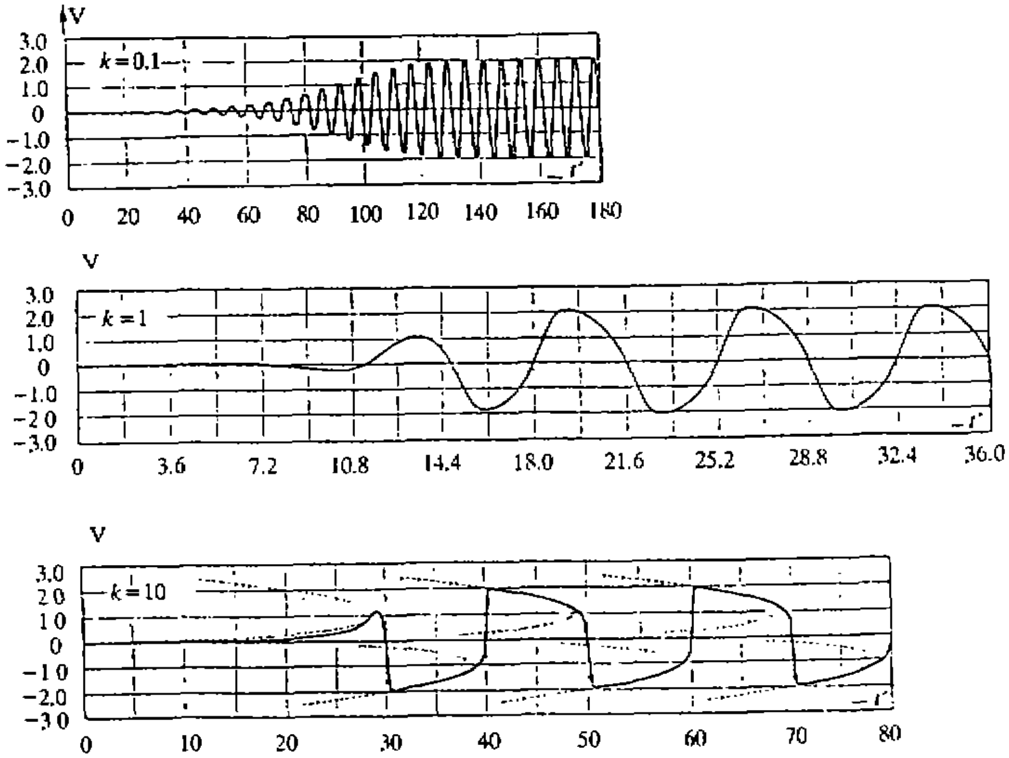

图3.

然后， Cartwright 和 Littlewood 探讨具有振荡强迫项的 van der Pol 方程

$$\ddot{x}-k(1-x^2)\dot{x}+x=bk\lambda\cos\lambda t, \tag{2}$$

当 k 为大值时，是否有两个具有不同周期的稳定周期解. 这件事是 van der Pol 提出的，因为他和 van der Mark 用实验方法发现，当其余参数固定时，增加或减少外力的相对频率 λ, 会产生两个不同阶的次谐振 [16].

Cartwright 和 Littlewood 将他们极大部分注意力集中于 van der Pol 方程. 他们发现这方程有趣而意味深长. 因为它可能是最简单的有两个稳定周期振荡解的方程，而这两个周期互质. 他们一致认为攻克一个复杂问题，最好从最简单的类型开始.

Cartwright 和 Littlewood 的早期研究工作大都集中于具有两个或两个以上稳定周期解的方程. 两人都将这问题视为在他们的合作中在解析方面所研究的最有趣的问题 [17]. 这一问题的拓扑解释产生了他们关于不动点定理的文章 [18]. 他们把这个被 Littlewood 认为 "比较索然无味的东西" 留到靠后再考虑. 但是，当探讨这问题时，他们发现它比

他们预想的更复杂．用一句 Littlewood 对 Cartwright 说过的话："所有细节以一个令人讨厌的方式演变为困难"[19]．他们的结果发表在一篇讨论具有正阻尼的二阶方程的文章中，该文经 Littlewood 多次修改 [20]．

虽然，Cartwright 和 Littlewood 发展了一些有趣而且创新的数学，但他们的合作并非总是和谐的 [21]．Cartwright 被 Littlewood 无休止的改动所激怒．尽管她自己的方法也是在文章发表之前"润色、润色、再润色"．Cartwright 的历史感非常好，她的历史综观将他们的文章提升了一个极佳的层次．当他们分别各自工作时，他们商定 Littlewood 解决最困难的问题，而 Cartwright 完成其余的枝节．她的结果刊登在四十年代末以及五十年代初发表的一系列文章中 [22]．

Cartwright 和 Littlewood 的合作工作的相当大部分以她的名字单独发表．甚至，其中有的文章事实上是根据 Littlewood 的手稿写成，而 Cartwright 只是加了一点内容或补充了一些部分．Littlewood 不让她在不是真正由他亲自执笔写成的文章上署他的名字．于是，她不得不声明这文章是以和他合作研究为基础写成的．但有一个例外，那是关于不动点定理的文章．他们研究的大多数问题来自于工程文献．关于不动点定理的文章是一个特例，因为它是从处理 van der Pol 方程中引伸出来的．

从 1931 年开始 Littlewood 反复发作精神抑郁症，为此他深受其苦并接受了治疗．Cartwright 说他头脑中充满这么多的想法以致于难以休息．她记得每当完成一篇合作文章，他总显得精疲力尽，他有时还对他们的联名文章抱怨．Cartwright 很感激 Littlewood 为了支持她成为皇家学会候选人，为发表他们第一篇文章而竭尽全力．这一联名文章发表于 1945 年，文章对他们关于具有强迫项以及 k 取大值时 van der Pol 方程的成果作了初步的综述 [23]．文中所陈述的那些结果的完整证明一直到十二年之后才发表．那时 Littlewood 的抑郁症已经痊愈．Cartwright 回忆，在 1958 年，虽然他不情愿，她还是说服了 Littlewood 去伦敦接受皇家学会授予有声望的 Copley 奖章．她珍藏着他给她的一个短笺．短笺开头是"好罢，你胜了"[24]．在他痊愈之前，大概 Littlewood 不可能被说服作这样的公开露面．

Cartwright 坚持在 1957 年刊登的两篇文章由 Littlewood 单独署名．这两篇文章对在 1945 年文章宣布的结果给了完整的证明．她或许认为她自己的贡献不重要．其实，由于 Littlewood 正好要回美国，他把证明修改的一些最后细节留给她来完成．在这些文章中，他确认那是他们共同努力的结果．

Cartwright 和 Littlewood 对 van der Pol 方程的分析表明由于两个不同阶次谐振的稳定集合的存在产生了一些复杂的拓扑结构．在这两个集合的吸引域 (attraction Dowain) 之间的边界附近有一个极度非稳定轨迹的错综复杂的精细结构．他们推断这一边界极可能是一个不可分解的连续统．按照 Littlewood 的论断，它是关于点集人们可能说的"最肮脏"的东西．除了它的不稳定性之外，这个结构与奇异吸引子 (stange attractors) 的结构极为相像．由沿着弹道遍历一个周期所定义的平面同胚将这个集合映于其自身之上．Cartwright 和 Littlewood 认为这一现象极为有趣，因为这表示方程的不稳定周期解和次谐振对于这集合在同胚映象或其迭代之下的不动点．他们猜测这些不动点的存在性可以

用适当的不动点定理得出. 这就推动他们研究在平面的微分同态下连续统不变量的不动点定理.

Cartwright 和 Littlewood 所需要的不动点定理不能用现有的代数不动点理论的方法得出，这是由于其中所涉及的连续统的复杂性. 于是，需要一个关于平面连续统的不动点理论，此连续统除了非周期性外，无其它限制. 不过，他们可以应用 Birkhoff 关于具有复杂不变曲线的从平面到其自身之中的解析变换的一些结果. 即使使用合理的正则性论证，他们仍然不能排除奇异的不变曲线. Birkhoff 已经证明了具有复杂不变曲线 k 的从平面到其自身的解析变换的存在性. Cartwright 和 Littlewood 利用这种变换证明了稳定周期次谐振运动，不稳定周期运动，以及反复运动的存在性，每一种运动对应 k 的某个子集. 他们属于最早的一批把这种变换与一个简单的微分方程联系起来的数学家们.

在 Cartwright 和 Littlewood 研究的同时， Lefschetz, Levinson, Minorsky 以及其他一些在美国的数学家也开始探究电路研究中所提出的一些问题，特别是与电路有关的非线性微分方程的解的有界性. 与英国的同行一样，美国数学家的研究也因为政府的要求而得到了推动. 但是 Cartwright 与 Littlewood 的重点是一些特殊的问题，而美国数学家则致力于寻求一种一般的更加易于处理的数学理论. 美国人侧重于振幅和周期，而 Cartwright 和 Littlewood 的工作注重频率和参数. Cartwright 推测 [25] 所以出现这些差别也许是因为工程师变得对非线性更加有兴趣，不管是强非线性或是弱非线性. 与此同时. 基辅学派的 Kryloff,Bogolieuboff,Mitropolsky 使用平均方法来分析诸如 van der Pol 方程那些方程. 直到十九世纪末，平均方法主要用于天体力学， van der Pol 促使平均技术应用到电路理论中产生的方程上去. 但一直没有人对这一方法的合法性给出严格证明，直到 1928 年才由 Fatou 首次证明了渐近法的合法性. 虽然， Cartwright 和 Littlewood 用了一些国外的研究成果，但是如果不是因为战争而产生的隔绝，他们原可以更好地利用美国人和俄国人的结果.

在美国， Levinson 对分片线性方程已得到了与 Cartwright 和 Littlewood 1945 年工作相类似的结果. Cartwright 说 Levinson 的一篇专论 [26] 综合了 Kryloff, Bogolieuboff. Denjoy, 和 Birkhoff 的工作，对她和 Littlewood 的工作有巨大的影响 [27]. Levinson 的思想是用一般的拓扑方法处理非自守，周期二阶微分方程的基础，而且因此也激发了 Cartwright 和 Littlewood 对他们从带强迫项的 van der Pol 方程研究中导出的映象的兴趣.

1947 年， Cartwright 写信给在 Princeton 的 Lefschetz, 希望得到一份 Minorsky 关于非线性振动的报告. Minorsky 正在为海军研究室准备这份报告， Lefschetz 是这一研究项目的负责人. 在信中，她附了她与 Littlewood 的一些结果. 后来，她收到该报告的第一部分，惊奇地发现报告属于 "限制" 级，不对非经批准的人公开. 她收到了 Lefschetz 的回信，信中他表达了对她和 Littlewood 的研究的极大兴趣.

Lefschetz 和 Mina Rees 邀请 Cartwright 从 1949 年 1 月到 6 月去美国讲演非线性微分方程. 她到 Stanford 访问 Minorsky 三个月，在 UCLA 访问 John Curtis 一个月，其余时间在 Princeton. 在 Princeton, Cartwright 作了一系列的演讲 [28]. 对她与 Littlewood

的合作研究作了详细的综述. 在 Princeton 还没有女性教授. Cartwright 和所有她接触到的人相处甚好. 但由于 Bochner 与 Lefzchetz 关系不佳，彼此不说话，因此，她从未见到过 Bochner. 她了解到美国的学术界比较不拘小节. John Tukey 曾告诉她尽可以无拘束地在讨论班上把脚搁在桌子上. 但她仍拘泥于穿裙子，而不是穿长裤. Cartwright 还听说，如果 Lefschetz 在听来宾演讲时有五分钟不提问题，那他一定是睡着了.

Cartwright 猜想 Littlewood 对那些从中提炼出他们的研究问题的参考文献没有怎么读过. 她记得 Littlewood 有一次建议她不要对与问题有关的现有文献太在意. 他认为，"如果以前的作者不能解决它，那么大概是因为他们的路子不对 [29]". 因此，Cartwright 和 Littlewood 处理问题所用的方法与无线电工程师所用的截然不同. Cartwright 和 Littlewood 开创性地解决问题的途径，即结合拓扑和分析的方法是微分方程研究必不可少的. 如 Cartwright 所说："我们应该把拓扑方法的概念扩充到包括所有如今拓扑学家在用的方法，并将之与分析的方法相结合，以便更快得到结果. 我们有必要对现有的拓扑结果、从微分方程的角度来重新认识，…… [30]".Cartwright 还强调，对问题的拓扑解释有助于洞察解的定性形态，即使你不熟悉或你并没想把拓扑方法用到你的分析中去，也一样会如此 [31]".

Cartwright 认为 van der Pol 和 van der Mark 的实验引导她和 Littlewood 发现了拓扑学中那么多尚未解决的问题 [32]. Cartwright 和 Littlewood 合作写成的在大参数理论，即松弛振荡方面的文章是属于这方面最早的那些完全严格的工作. 像他们这样的工作极大地推动了动力系统现代理论的发展. 继他们之后，这一学科已有了长足的进展. 现代的技巧容许当代数学家对具有强迫项的 van der Pol 方程解的渐近性质作更加深入的分析 [34]. 非线性振荡理论促进了无线电、雷达和激光技术的发展，对 van der Pol 方程的研究也在松弛振荡和分歧理论中占有极其重要的地位.

(参考文献略)

附记：

[1]. 假设微分方程含以 p 为周期的强迫函数，如果它有一个以 np 为周期的周期解，其中 n 是正整数，那么此振荡解称为 n 阶谐解 (见 [16]).

[2]. [22] M.L. Cartwright 根据 J.E. Littlewood 合作研究写成的文章有许多 (见 [22]).

(倪录群 译　杨 黛 校)