Poincaré 和三维流形的早期历史

John Stillwell

摘要 最近有关三维流形理论的发展，主要集中在 Poincaré (庞加莱) 猜想上，采用一些 Poincaré 及与他同时代的人所没有预想到的方法．然而，三维流形的拓扑主旨是起源于 Poincaré 时代的．这篇文章的目的是通过重温早期拓扑世界来揭示该对象的起源．

1. 引言

距 Poincaré 去世已经有一个世纪，那个世纪人们花了大部分的时间去解决他提出的著名问题 ——Poincaré 猜想．自从 1904 年 Poincaré 提出这个猜想以来，三维流形的理论变得更加复杂．这个猜想的证明是由 Grigory Perelman (佩雷尔曼) 在 2003 年 (按照 1982 年 Richard Hamilton (哈密顿) 概述的路线) 给出的，他采用微分几何和偏微分方程的方法，这些方法在 20 世纪末以前是与拓扑学无关的．有关三维流形最近一段历史的叙述，有关 Perelman 的证明，见 McMullen (麦克马伦) (2011) [39]. 随着这些新方法的到来，我们能达到一个拓扑学家所不知道的新高度，而且是 Poincaré 时代无法想象拓扑学是什么样子的．这篇文章我想重构几乎失去的 Poincaré 世界和他的继承者们．希望能为当今的三维流形拓扑相关问题给出一个深刻的见解．

Poincaré 在代数拓扑方面的工作被收集在 Poincaré 全集里 (2010) [53], 他展示了 Poincaré 的风格，被 Stephen Smale (斯梅尔) 形容为 “连续逼近地做研究”．起初，Poincaré 不确定用哪种方法定义流形最好，用同调还是用基本群．他尝试了各种各样的方法，是否一个特殊的方法能够完全一般化或他认为是拓扑不变的对象是否真的会如此，这都被留作开放性问题．这给他的继承者们留下了很多机会去澄清他的定义，指出缺陷和提出反例．事实上，修正工作在 Poincaré 完成之前，当 Heegaard (赫戈) (1898) [34] 发现了 Poincaré 同调理论中的一个错误时就开始了，这导致了 Poincaré 发现了挠率．

Poincaré 的继承者们自然对 Poincaré 猜想很感兴趣，但他们还未能证明它．另一方面，他们尝试着去理解同调球面的相关概念，取得了一些显著的成功．这导致了*割补术* (*surgery*) 的思想，以及早期对基本群的神秘复杂性的认识，这些刺激了被后人称作组合群论和几何群论的发展．我希望展示这样一个观点，组合问题可能在算法上*不可解*是源于组合群论中的一些困难．

这篇文章的很多材料散见于我的书 Stillwell (1993) [64]. 然而，为了更连贯的叙述，我包含了更多近代学者的结果，特别如 Epple (1999b) [28], Gordon (戈登) (1999) [31] 和 Volkert (2002) [68].

译自：Bulletin (New Series) of The American Mathematical Society, Vol.49, No.4, October 2012, p. 555–576, Poincaré and the early history of 3-manifolds, John Stillwell, figure number 16.

2. Poincaré 和基本群

Poincaré 之前，拓扑学中人们理解得非常清楚的一部分是紧的二维流形 (“闭曲面” 或 “带边界的曲面”). 众所周知，定向闭曲面可以由一个数来分类，即 *亏格* (*genus*) p, 或用等价的 *欧拉特征* (*Euler characteristic*) $2-2p$, 或 *连通度* (*connectivity*) $2p$. 连通度的概念起源于 Riemann (黎曼) (1851) [56], 被 Betti (贝蒂) (1871) [11] 推广到更高维，被人们叫做 *Betti 数*, 后来成为 Poincaré 同调理论的一部分，我们将在后面的文章中看到.

作为这一发展的自然产物，拓扑学的最初目标是寻找拓扑不变数，希望有足够多的 *不变 数* 来对各种不同维数的流形进行完全分类. 对于三维流形的情形，这一目标被 Dyck (迪克) (1884) [26] 明确表述如下：

“目标是对闭的三维空间确定某些特征数，类似于 Riemann 在他的曲面理论中介绍的那样，使得他们的特性表明 ...‘一对一的几何对应’ 是有可能的.”

Poincaré 自己原来的目标是寻找不变数，但是在 1892 年他发现了导致当今代数拓扑的基本群，事实上人们需要寻找的是不变结构而非不变数. 早期三维流形的历史其实是一个慢慢意识到基本群是一个新不变量的过程. 基本群不能合理的用数来编码.

Poincaré (1892) [47] 按照流形中的闭道路介绍了基本群，虽然现在我们也这么做，但是在描述例子时他假设三维流形是一个表面被某种几何变形所确定的多面区域. 显然，Poincaré 是基于他在 19 世纪 80 年代初期对 Fuchs (富克斯) 群的经验 (Poincaré (1985) [52]) 之上的，即每个群是和一个基本多边形相关联的 (通常是双曲线), 它的边是由某种运动所确定的. 事实上，亏格为 2 的曲面的基本群就是一个在 Poincaré (1882) [46] (Poincaré (1985) [52, p. 81]) 中给出的 Fuchs 群的例子. 从现在起，我们将用符号 π_1 表示基本群.

由 Poincaré (1892) [47] 所介绍的三维流形如今我们叫做圆周上的环面丛. 他采用 $\mathbb{R}^3$ 中的单位立方体为基本区域，用如下变换确定相反面：

$$(x, y, z) \mapsto (x+1, y, z),$$
$$(x, y, z) \mapsto (x, y+1, z),$$
$$(x, y, z) \mapsto (\alpha x+\beta y, \gamma x+\delta y, z+1),$$

其中 $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}$ 且 $\alpha\delta-\beta\gamma=1$. 这个流形固定 z 的截面是一个对边由变换确定的正方形，也就是一个环面. 底部环 $(z=0)$ 与顶部环 $(z=1)$ 通过一个环面上的连续双射等价. 无限多个四元组 $\langle\alpha, \beta, \gamma, \delta\rangle$ 给出了无限多个不同胚的流形，因为他们有无限多个不同的群 π_1. Poincaré 之所以能够证明这一点，得益于他在群变换 $z \mapsto \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ 方面的知识 (*模群* (*modular group*) 是一个经典的 Fuchs 群).

另一方面，这些环面丛的 Betti 数为 1, 2 或 3, 所以 Poincaré 的三维流形，可能存在两个流形具有相同的 Betti 数，但有不同的 π_1. 因此在 1892 年，Poincaré 证实 π_1 是一个比 Betti 数更具有辨别能力的不变量. 这使得群论在拓扑学里保持了前所未有的立足点.

然而，在他的第一篇关于拓扑的长文章 Poincaré (1895) [48] 里，Poincaré 继续探索了 Betti 数. 他建立了一套体系去计算他们，通过假设每个流形可以分解成一些同胚于单纯形的胞腔，线性方程称为同调，通过线性代数计算 Betti 数. 通过考虑胞腔分解的对偶

他发现了 *Poincaré* 对偶, 通过它可知与顶部和底部维数等距的 Betti 数是相等. 特别的, 一个三维流形的二维 Betti 数等于一维 Betti 数. 在一个脚注中, Poincaré 注意到如果承认它的生成元可交换, 一维 Betti 数可以从 π_1 中获得, 所以对于一个三维流形, 所有的 Betti 数都暗含在 π_1 里.

同时, Poincaré (1895) [48] 对探索 π_1 做出了贡献. 他重新介绍了他的环面丛类, 详细地证明了他们有无穷多个不同的 π_1, 但是他还给出了新的更简单的例子说明 π_1 是比 Betti 数更强的不变量. 特别的, 通过将八面体的对面等同起来, 他发现一个流形作为 $\mathbb{S}^3$ 中的三维球面具有相同的 (非平凡) 的 Betti 数, 但是有不同的 π_1; 也就是二阶循环群. 这个流形实际上就是实的射影空间 $\mathbb{RP}^3$, 虽然 Poincaré 好像没有意识到这一点.

$\mathbb{RP}^3$ 在 Heegaard (1898) 的论文 [34] 中也是至关重要的例子, 在那里它被用来指出 Poincaré 计算 Betti 数中的一个错误; 也就是不能解释 *挠率* (*torsion*) 的作用. $\mathbb{S}^3$ 和 $\mathbb{RP}^3$ 的差别实际上可以用同调探测到, $\mathbb{S}^3$ 没有挠率, 而 $\mathbb{RP}^3$ 挠率数为 2.

这导致 Poincaré 对 1895 年的论文给出了两个 *补充* 来重新研究同调论, 分别发表在 1899 年和 1900 年. 这个扩展的理论产生了挠率和 Betti 数, 事实上 Poincaré 引入了单词 "挠率", 因为他将其看成是那些在自身上做一个扭曲的流形的一个性质, 比如 Möbius (莫比乌斯) 带. 他的计算它们的方法, 在 Poincaré (1900) [49] 中被描述, 通过一个 *关联矩阵* (*incidence matrix*) 来描述一个流形的胞腔结构, 这样 Betti 数和挠率数可以从 Smith (史密斯) (1861) [61] 的初等除子理论中得到. 他也尝试着将这个理论放到一个好的基础上去, 通过证明每个光滑流形都有一个单纯分解 (一个 "三角剖分"). 他的尝试是离现在接受的标准还很远.

对现代数学家来说, 他们感到很奇怪, Poincaré 从来没有发现现在我们用来打包 Betti 数和挠率数 (根据 Noether (诺特) (1925) [43], 标题为 "来自群论的初等除子理论的衍生") 的同调 *群* 的存在. 但是在 19 世纪, 当所有数学家的目标都是 "算术化" 时, 数字被认为是拓扑不变量的最好的衍生品. 一直到 1934 年, Seifert (赛弗特) 和 Threlfall (特雷法尔) 的著名教材用如下措辞赞扬了 Poincaré 同调的方法: "通过引入了关联矩阵, Poincaré 在拓扑学算术化进程上迈出了决定性的一步. " (见英语翻译, Seifert 和 Threlfall (1980) [58, p. 330].)

通过用挠率数补充 Betti 数, Poincaré 使得他的同调理论足够强以至于能区分 $\mathbb{RP}^3$ 和 $\mathbb{S}^3$, 在 Poincaré (1900) [49] 中, 这使他有胆量第一次陈述 "Poincaré 猜想": *任何一个具有平凡同调的三维流形与 $\mathbb{S}^3$ 同胚*. 这个假设在接下来的几年一直未受打扰, Poincaré 出版了两篇关于将拓扑应用到代数几何的 *补充文章*. 从三维流形的视觉来看, 这两篇文章的主要兴趣是再现 Poincaré 在 Poincaré (1902) [50] 中的环面丛, 文章指出在研究代数曲线类的过程中自然可以产生. Volkert 在 Volkert (2002) [68] 指出这可能是 Poincaré 第一次碰到这些流形.

最后, Poincaré (1904) [51] 回到 π_1 对曲面上的曲线研究同调和同伦的差别. 他找到了一个引人注意的算法来判断一个亏格大于 2 的曲线是否同伦于一个简单曲线. 用双曲线几何, 他将曲面上 "把一个曲线拉紧" 的想法规范化 (找到了它的自由同伦类的一个 *测*

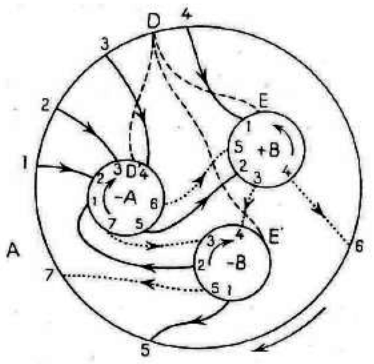

图 1 Poincaré 同调球的图表

地代表 (*geodesic representative*)), 因此证明了一个曲线同伦于一个简单曲线当且仅当它的测地表示是简单的. 这似乎是第一次将*几何化* (*geometrization*) 应用到拓扑上. 这个想法被 Dehn (德恩) 进一步深入研究, Thurston (瑟斯顿) 在这方面也取得了巨大的成功.

对于简单曲线的结果, 仅仅是对 Poincaré (1904) [51] 中主要事件的前期准备: 构造*同调球面* (*homology sphere*) —— 与 $\mathbb{S}^3$ 具有相同同调的三维流形, 但是 π_1 与 $\mathbb{S}^3$ 不同 (所以同调球面与 $\mathbb{S}^3$ 不同胚). Poincaré 的构造很神秘且动机不明. 同调球面是通过将两个亏格为 2 的环饼 (也就是填充亏格为 2 的曲面 —— 见图 1 中的方案) 粘在一起得到的. (令人觉得很神秘的一部分是非常对称的同调球面是怎样从一个完全不对称的图表得到的.) 神奇的是, 目标流形的生成元 a, b 满足如下关系:

$$a^4ba^{-1}b = b^{-2}a^{-1}ba^{-1} = 1.$$

一方面, 这个群是非平凡的, 因为令 $(a^{-1}b)^2 = 1$ 将它映到了 60 个元素的*二十面体群* (*icosahedral group*)

$$a^5 = b^3 = (a^{-1}b)^2 = 1.$$

另一方面, 当生成元可交换时这个群会退化成一个元素, 表明该流形的同调群是平凡的. 所以, 同调球面表明了从同调角度用 π_1 来区分三维流形具有优越性.

随着同调球面的构造, Poincaré 早期的假设已被驳倒, 而真正的 Poincaré 假设产生了: *任何一个闭的 π_1 平凡的三维流形都同胚于 $\mathbb{S}^3$*. Poincaré 没有对这个假设的正确性做出任何回答, 仅仅是说 “这个问题将把我们带离得太远”. 我们现在知道, Poincaré 的假设给拓扑学家留下了足够的问题可以让他们在接下来的 100 年里一直有事做. 短期而言, 仅仅去理解 Poincaré 球面就已经很难了. 至于更广的问题延伸到用 π_1 来区分三维流形就占据了 Poincaré 的继承者们的时间. 我们现在来看这些继承者 —— 最早一代的代数拓扑学家们.

3. Heegaard

除了他对 Poincaré 同调理论的修正, Poul Heegaard (1871—1948) 在研究三维流形上做出了其他一些重要贡献. 他找到了两个新的有趣的方法来构造他们: 用 $\mathbb{S}^3$ 的*分支覆叠* (*branched coverings*) 和用 *Heegaard 图表*.

Heegaard 的分支覆叠, 或他称之为 “Riemann 空间”, 是三维 Riemann 曲面. 正如 Riemann 曲面包含覆盖 $\mathbb{S}^2$ 的在分支*点*熔合的 “叶”, 一个 “Riemann 空间” 包含一些在分支*曲线*上融合的 “叶” ($\mathbb{S}^3$ 的副本). 一个 Riemann 曲面的叶的融合相对比较容易想象, 如图 2 所示.

图 2 摘自 Neumann (诺伊曼) 的 Neumann (1865) [42], 在图 2 中分支点位于半直线的一个末端叫做 “分支剖分”, 作为空间的一叶 (向上的叶) 交另一叶 (向下的叶) 可以任意

选. 图 3 展示了 $\mathbb{S}^3$ 的分支曲线覆盖的类似过程.

分支曲线是一个三叶纽结，它位于圆锥体曲面的末端,也就是经过一叶到另一叶的地方. (在图 3 中圆锥体看起来像圆柱,但是平行的边在无穷远处相交.) 不再可能看到分开的叶；人们必须简单地将此曲面想象成通向 "另一个世界" (也就是 $\mathbb{S}^3$ 的另一个副本) 的大门. 如果这个覆盖具有无穷多个叶, 通过在分支曲线上循环无穷多次将会回到 $\mathbb{S}^3$ 的最初副本.

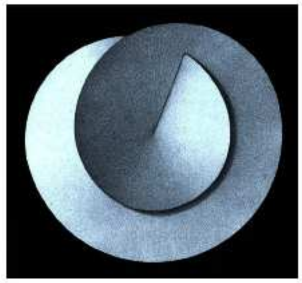

图 2　$\mathbb{S}^2$ 覆盖的分支点

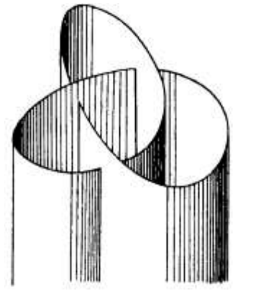

图 3　$\mathbb{S}^3$ 覆盖的分支曲线

在一些情况下，分支覆盖与原流形同胚. 对于 $\mathbb{S}^2$ 的覆盖，当只有两个分支点时，这种情况会发生. 对于 $\mathbb{S}^3$ 的覆盖，当分支曲线是一个圈时会发生 (或者更一般情况是不打结的曲线). 这种覆盖事实上起源于势理论，被 Appell (阿佩尔) (1887) [9] 和 Sommerfeld (佐默费尔德) (1897) [62] 所研究. 最简单的 $\mathbb{S}^3$ 的非平凡的覆盖，被 Heegaard (1898) [34] 所发现，是三叶曲线上的 2–叶覆叠. 他证明了它跟 $\mathbb{S}^3$ 不同胚，因为它的挠率为 3.

这样做，他发现在构造三维流形时纽结起到了很重要的作用. 相反，他证明了 (可能无意识的) 三维流形是研究纽结的工具. 通过找到一个三叶曲线上的不同胚于 $\mathbb{S}^3$ 的分支覆盖，他证明了三叶曲线跟圆圈不一样；也就是说，他是打结的！在当时，人们没有意识到确定纽结有多难，或者区分一个纽结和另外一个纽结有多难，所以 Heegaard 的证明没有被注意到. 但是 20 世纪末，我们将看到，构造分支覆盖是区分大量纽结的第一个有效的方法.

Heegaard 的其他一些显著的想法是将三维流形分解成亏格为 n 的环柄体 B_1 和 B_2. 在 B_1 上给定一些经典的 n 曲线，一个三维流形 M 在同胚的意义下由 B_2 上的像决定 —— 也就是 M 的所谓的 *Heegaard* 图. 第一次最重要的 Heegaard 图的应用是被 Poincaré (1904) [51] 用来构造 *同调球面*. 在这种情况下的环柄体是亏格为 2 的. 不久我们将看到，亏格为 1 的 Heegaard 图将会产生什么样的流形.

4. Wirtinger

Wilhelm Wirtinger (维尔丁格) (1865—1945) 的名字被所有的拓扑学家所知晓，因为有所谓的关于一个纽结补的 π_1 的 *Wirtinger 表现*. 他是纽结理论的一个具有重要影响力的人物，在这个领域他基本没有发表文章，可能是因为他的专长是分析. 他的结果十几年后逐渐流传出去，通过他的学生或者是他在维也纳大学的同事. 最近，Wirtinger 在纽结理论发展方面的角色变得很清楚了，这要感谢 Epple (1999a) [27] 和 (1999b) [28] 的工作.

像 Poincaré 一样，Wirtinger 从复分析找到了研究拓扑的方法，他尝试这将代数方程的一般理论从一个变量推广到两个变量. 这导致他碰到了描述代数曲线的奇点的问题，

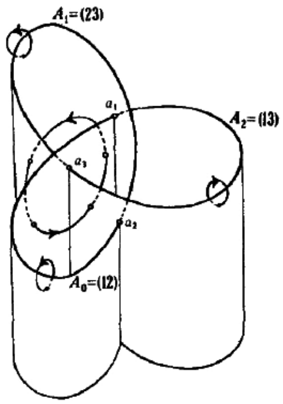

图 4 Brauner 的三叶纽结图

他最终发现纽结形成了一部分的描述. 他的研究大约在 1896 年的时候开始, 被 Heegaard 的分支理论所激励, 在大约 1905 年左右产生了 Wirtinger 表现，只在 Artin (阿廷) (1926) [10] 中出现 (这就是图 3 的来源), 而且他关于奇异性的想法仅被他学生在 Brauner (1928) [13] 中详述.

图 4 来自于 Brauner (1928) [13], 展示了 Wirtinger 获得三叶纽结补的 π_1 的关系的计划. 除了 Heegaard 风格的分支曲线图片，半柱面通过从一个叶到另一个叶，还有生成三叶纽结补的 π_1 的圈，标记为 (12), (23), (13) 以描述一个特殊的 3–叶覆叠的叶是怎么排序的. 这 3 个变换给出了三叶纽结群的置换表示，说明他不是交换的，这是三叶曲线是真的打结的另一个证明.

三叶形是最简单的纽结, 所以它出现在纽结理论的第一个定理中也不足为奇. 然而, 它也是 Wirtinger 描述代数曲线的奇异性程序中的一个最简单的例子：曲线 $y^2 = x^3$, 它在原点是一个尖奇点. 我们知道当 x 和 y 是实的情况下尖点的形状，但是当 x 和 y 是虚数时，则变成了一个四维空间中的曲面，而且我们不能想象出原点附近是什么样的. 我们能做的就是将此曲线与一个三维球面在中心相交，看看相交曲线是什么. 结果交点不是别的，而只是三叶纽结.

5. Tietze

Wirtinger 在拓扑学方面的工作除了他利用基本群外好像没有受到 Poincaré 的影响. 当然不惊奇的是，Poincaré 没有受到 Wirtinger 的影响，因为他几乎不知道 Wirtinger 的工作. Poincaré 和 Wirtinger 的工作第一次在 Heinrich Tietze (蒂策) (1880—1964) 的工作中被放到一起. 在他的长文章 Tietze (1908) [65] 中，基于他在维也纳的资格论文，Tietze 采用了 Poincaré 的基本群，更具有信心和远见的处理了它，且他从 Wirtinger 那里采用了纽结的概念，用它给拓扑学中的基本问题带来了新的领悟，特别是对三维流形. 他的工作不仅用很多方法扩展了 Poincaré 的工作，而且揭露了 Poincaré 工作中一个弱点和缺陷.

特别，Tietze 用一个 *非驯纽结* (*wild knot*) 挑战了 Poincaré 的一般方法，他假设流形能用有限多个简图描述. 比如, Poincaré 假设曲线在同调的意义下可以被有限多个边的多边形替换. Tietze 质疑图 5 中的曲线是否会如此，他对仿射和射影形式都给了证明.

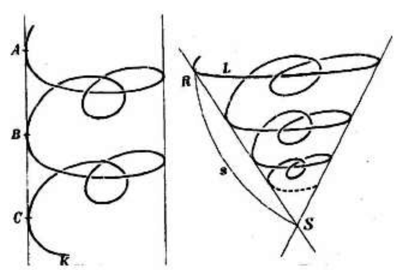

图 5 Tietze 的非驯纽结

甚至在光滑紧流形的情形, Tietze 意识到 Poincaré 的尝试去证明三角剖分是不满足的. 除此之外，他提出了一个主要的猜想：任意两个可三角剖分空间的三角剖分都有一个共同的细分. 光滑流形的三角剖分最终是被 Cairns (凯恩斯) (1934) [15] 证明的，任意三维流形的三角剖分和主要猜想是被 Moise (莫伊斯) (1952) [41] 证明的，

对四维流形三角剖分是被 Freedman (弗里德曼) (1982) [29] 证明是 *错* 的.

因为 Poincaré 本质上是用主要猜想去证明 Betti 数和挠率的拓扑不变量，这些同调不变量因为 Tietze 的批评而遭到质疑. 事实上，他们的不变性是被 Alexander (亚历山大) (1915) [2] 所证明的，用一个不同的方法，所以主要猜想在这个阶段不需要被提出. 此外，Tietze 证明了，对于三维流形，Betti 数和挠率可以从基本群得到. 所以他们的不变性归结为 π_1 的不变性，而这一点是不难证明的.

所以 Tietze 自信利用组合的方法来研究拓扑理由充分，这导致他通过给定生成元和关系来一般性地研究群，特别是对于 π_1. 详述 Poincaré (1895) [48, §13] 的脚标，Poincaré 注意到如果生成元可交换第一个 Betti 数可能从 π_1 中获得，Tietze 定义了 “一个离散子群的 Poincaré 数” G. 现在我们称作 G 的交换子 H 的秩和挠率，Tietze 是通过矩阵计算发现他们的 —— 通过考虑 H 和它的群结构. 这对 Tietze 和他那个时代的人来说是自然的，他们的目标是计算不变 *数*. 如果两个流形具有不同的数值不变量我们立刻可以说他们是不同胚的.

群 π_1 的不变性就没有那么有用，因为人们是用生成元及其关系来 *表示* π_1. 不同的表示可以标志着同样的群，而且 *不* 清楚怎么去区分这种情形. 虽然 π_1 能够包含比 “Poincaré 数” 更多的信息，正如 Poincaré 所知的，没有算法从一个表示得到更多的额外信息. 我们总是不能获得足够的信息来彻底区分 π_1，因为正如 Tietze 在他的论文 §14 中意识到的一样：两列数是否相等通常可以确定，但是 *两个群是同构这个问题*...通常是不可解的. Tietze 是对的，两个群是否同构的问题是不可解的，虽然他比 Church (丘奇) (1936) [17] 和 Turing (图灵) (1936) [66] 要早 30 年给出代数问题 “可解” 的定义，他比 Adyan (1957) [1] 证明同构问题是不可解的早 50 年. 我相信 Tietze 的话语远不是一个幸运的猜测，而是因为 Tietze 真的知道同构问题的一些事情. 他已经解决了一个方向 (在哪种情况下它可解这个方向)，通过证明如下事实：如果 $\mathcal{P}_1$ 和 $\mathcal{P}_2$ 表示两个同构的群，则 $\mathcal{P}_1$ 能够通过有限多个变化变成 $\mathcal{P}_2$. 所需的必要变化被称作是 *Tietze 变换*，而且他们可以机械地应用. 所以，如果我们给定两个同构的群的表示，这个事实可以通过有限步证明.

Tietze 关于不可解的断言在 Reidemeister (赖德迈斯特) (1932) [55, p. 49] 中被再现了，且这里面的断言更强，说没有一个算法可以从一个表示决定群是自由或平凡的. 有趣的是，Reidemeister 组织了 1930 年 8 月在哥尼斯堡 (Königsberg) 的会议，Gödel (哥德尔) 在会议上宣布了他的不完整性理论. 不完整性与不可解性之间的联系当时不是很清楚 —— 它是在 Church (1936) [17] 中描述清楚的 —— 但是数学基础和拓扑学的一些想法的汇聚大约在 1930 年开始进行. Church 是拓扑学家 Oswald Veblen (维布伦) 的学生，Church (1936) [17] 给出了一个如下的问题：在同胚的意义下，如何寻找闭的三维简单流形的一个有效地可计算不变量的完备集. 这个问题作为可解性是开放性问题的一个例子. 我们现在知道同胚问题对于三维流形是可解的，但是对于四维流形是不可解的. 一个对三维流形的解法依赖于 Perelman 的工作 (它是被 Sela (1995) [60] 发现的，在期间 Thurston 几何假设的证明被 Perelman 给出)，而四维流形的不可解性是由 Markov (马尔可夫) (1958) [38] 给出的.

Tietze 考虑了三维流形的同胚问题，他意识到这个问题的难度与区分两个纽结的难度密切相关. 在他文章的 §16, 他给出了 $\mathbb{S}^3$ 的两个子流形的例子：一个是由移动两个相同的三叶纽结得到，一个是由移动左右两个三叶纽结得到 (图 6) 这两个流形有相同的 π_1.

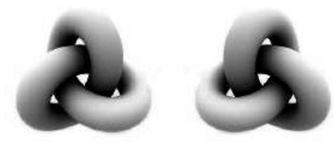

图 6 两个三叶纽结

如果左三叶纽结可以变形到右边，则这两个流形是同胚的，但是 Tietze 说这个 “明显是不可能的”. 看起来很明显，如果两个三叶纽结是不同的则流形是不同的，这些 “明显” 的结果都没有被证明. 事实上在同一节, Tietze 通过指出两个关于纽结补的未证明的两个简单命题，削弱了自己的自信. 这个命题是说：两个同胚的补蕴含着不同的纽结 (在 Gordon 和 Luecke (吕克) (1989) [30] 给出证明之前，此命题一直是个开放性问题). $\mathbb{S}^3$ 中的圆环必然界定了一个纽结补 (此命题来源于 Dehn 在 1907 年的一个已知的假定 —— 见下一节).

在他的论文的 §18, Tietze 简洁地讨论了 $\mathbb{S}^3$ 在纽结上的分支覆盖，重温了上面提到的 Heegaard 和 Wirtinger 的结果. 但是他也预言了 Heegaard 的在三叶纽结上的双重分支覆盖是一个 *透镜空间* (*lens space*), 这是一个新的构造. 透镜空间的构造回到了 Poincaré 构造三维流形的方法，将多面体的边等同起来，Tietze 在他的 §20 描述了它.

这个多面体是一个透镜形的立体图形，顶部和底部分成 m 个相等的区域. 这些区域是多面体的面，每个顶面和地面通过一个变形映射 $2n\pi/m$ 等同 —— 也就是说顶部的第 i 个面和底部的第 $i+n$ 个面是等同的. 这个结果叫做 (m,n) 透镜空间，图 7 展示了 $m=3$, $n=1$ 的表面辨识.[1)] Tietze 断言透镜空间是 “最简单的双边的闭三维流形”. 它之所以最简单是因为 *Heegaard 亏格* 是 1, 也就是说它能够通过粘合立体图形的一对圆环面而得到. 这可以通过将透镜空间切成两片而看出：一个环绕透镜空间轴的圆柱核与剩下的部分. 当顶部和底部通过一个转动看成一样的时候这个核明显构成一个立体的圆环, 同理剩下的部分也是. 图 8 和图 9 展示了 $(3,1)$ 情形的两部分.

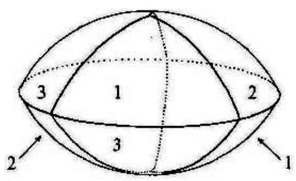

图 7 $(3,1)$ 透镜空间的表面辨识

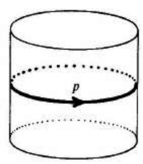

图 8 透镜空间的核

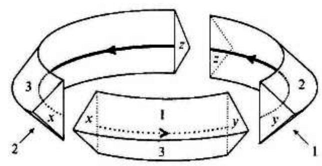

图 9 透镜空间的剩余部分

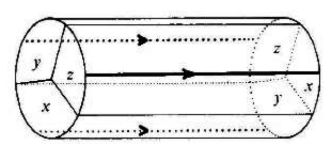

图 10 剩余部分装配成一个圆柱

而且，在核 “腰部” 的曲线与一个在其他立体圆圈的 (m,n) 曲线等同，也就是说是当末端用一个 $2n\pi/m$ 转动连接起来，该曲线是源于圆柱上 m 条相等的空间直线. 图 10 展示了 $(3,1)$ 情形的圆柱是怎么产生的. 圆柱的两端一定要连接起来，所以两个看起来平行的三角形在一起了，形成了立体的具有 $(3,1)$ 曲线的圆环.

1) Poincaré 的一个例子, Poincaré (1895) [48] §10 中的第 5 个例子, 事实上是 $(2,1)$ 透镜空间. Poincaré 是通过一个旋转角度 π 将一个八面体顶部的 4 个面与底部的 4 个面等同起来而构造的.—— 原注

最后，因为立体圆环的 $(3,1)$ 曲线界定了一个圆盘，我们得到了关系 $a^3=1$, 其中 a 是图 10 中绕立体环面的一个圈．这个关系定义了 $(3,1)$ 透镜空间的基本群．一般 (m,n) 透镜空间 π_1 有关系 $a^m=1$. 所以所有的 (m,n) 透镜空间，对固定的 m, 有相同的 π_1. 这又一次提出了 π_1 不是三维流形的完全不变量的可能性，因为固定 m 所有 (m,n) 透镜空间是同胚的这一点值得怀疑．事实上在他论文的最后一节，Tietze 猜想 $(5,1)$ 和 $(5,2)$ 透镜空间 不 是同胚的．

6. Dehn

Max Dehn (1878—1952) 开始了他 19 世纪 80 年代末在哥廷根作为 Hilbert (希尔伯特) 学生的研究生涯．在那段时期，Hilbert 正在研究几何的基础，所以这也是 Dehn 取得他的第一个发现的领域．他因解决了 Hilbert 第 3 问题而成名，证明了一个正的四面体不能等度地分解成立方体；见 Dehn (1900) [18]. 他在拓扑方面也做出同样的贡献，证明了来自 Hilbert 相关公理和次序的多边形 Jordan (若尔当) 曲线理论．这一个来自 1899 年未出版的论文被 Guggenheimer (1977) [32] 所讨论．显然，Dehn 希望在 Hilbert 的几何模型下建立严密的拓扑基础．他与 Heegaard 在 1907 年合作写了一篇拓扑方面的文章 “Enzyclopädie der mathematischen Wissenschaften”.

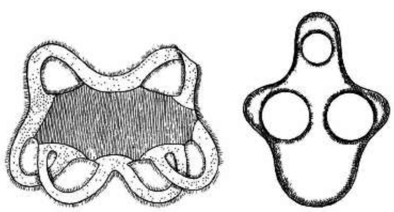

图 11 来自 Dehn 和 Heegaard 文章中的曲面的图片

Dehn 和 Heegaard (1907) [25] 的工作是包含 Poincaré 工作的拓扑概述，他们尝试去构造组合 / 几何的基础．通过观察 Poincaré 是怎样依赖一个简单的结构去计算 Betti 数，挠率和基本群，Dehn 和 Heegaard 采用了简单的结构作为流形定义的一部分，他们用它去定义同调，同伦，同痕和同胚．我们知道这不需要限制维数 ≤ 3, 但是事实上 Dehn-Heegaard 文章大部分的贡献都是他们对二维流形的分类定理的证明．这个定理 —— 紧致的曲面可以通过它们的亏格和定向从拓扑上进行分类 —— 因为 Möbius (1863) [40] 就已经在某种程度上被大家熟知了，但是 Dehn-Heegaard 的证明第一次达到了 Hilbert 的严格标准.

但是对低维的限制不是 Dehn-Heegaard 的文章的主要问题．奇怪的是，他们未能欣赏到群论在拓扑中的巨大力量，他们没有给出基本群的一个简洁定义．他们甚至尝试去修正 Poincaré 关于同调球的讨论以便能避开使用群论．在出版他的文章 Dehn (1907) [19] 后不久，Dehn 发表了一个简短的笔记，承认 Dehn-Heegaard 文章中关于同调球部分的解释有错误，他自己提供了一个新的构造.

在 Dehn (1907) [19] 中的构造很简单，而且再一次使用了群论．他用两个 $\mathbb{S}^3$ 的副本去掉了纽结的管状领域，将他们粘在一起去除目标流形 M 的同调．所以 M 是一个同调球面，但是它和 $\mathbb{S}^3$ 不同胚．因为一个圆圈曲线 (纽结领域的边界) 不能将 $\mathbb{S}^3$ 分成两部分，任何一部分都不是立体圆圈．不难证实 M 的同调群的断言，但是关于一个圆圈曲线不能将 $\mathbb{S}^3$ 分成两个纽结补的断言是不容易验证的，事实上这一点直到 1924 年才得到证明.

似乎由于 Dehn 对群论的忽视导致他早期关于拓扑的研究被束缚．而一旦他利用了

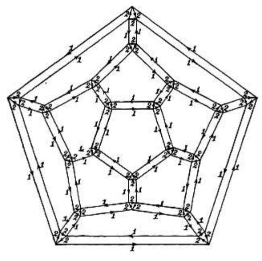

图 12 Dehn 关于二十面体群的群图表

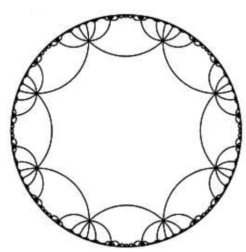

图 13 亏格为 2 的曲面的万有覆叠

群论方法，创造就活跃起来.

Dehn 关于群论的方法在 1909—1910 年出版的关于群论的讲稿中被发展，前两章在 Dehn (1987) [24] 中翻译成英文. 在第 1 章他介绍了群图表 (group diagram)，里面阐述了用几何的方法去研究群. 严格的说，群图表在 Cayley (凯莱) (1878) [16] 中已经介绍，但是仅仅是对有限群. Dehn 包含了一些有限的例子，比如二十面体群 (图 12)，但是他的图表对于无限群更有启发性，他们导致了 *当今的几何群论*.

Dehn 对他的群图表的最有特色的应用是解决关于亏格 ≥ 2 的曲面的 π_1 的一个文字问题，它和确定闭曲面中哪个可以收缩到一个点这个拓扑问题是等价的. 从 Poincaré (1904) [51] 可知，亏格为 g 的曲面上的曲线可以提升到万有覆叠上去研究：镶嵌的双曲平面的 $4g$– 百分度. 对一个亏格为 2 的曲面，比如说如图 13 的镶嵌.

Dehn 意识到镶嵌中的边，自然的对应到曲面上的闭曲线，也对应于曲面的 π_1 的生成元. 所以如果我们能对构成生成元的镶嵌的边做标记，就可以得到群图表. 事实上，对于经典的曲线通常的选择是 $a_1, b_1, \cdots, a_g, b_g$, 每个多边形的边拼写出了 "字":

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}.$$

现在一个在曲面上的闭曲线 p 是一些经典曲线的乘积，可以提升成 (从一个给定的镶嵌的边) 唯一的路径 $\tilde{p}$. 且 p 能收缩成一个点当且仅当 $\tilde{p}$ 是一个闭道路. 这样 "字" 的问题解决了，大体上是通过群图表的构造. Dehn 的最大的发现是双曲镶嵌的组合使得曲面群的 "字" 问题能够通过简单的有效的算法解决，不需要去构造群图表.

他的对于 "字" 问题的解决涉及到几篇文章，最终构成了在 Dehn (1912) [22] 中提到的纯粹组合形式. 这个观点是将镶嵌中的多边形看成是一个连续的层：第 1 层是一个单独的多边形，第 2 层包含多边形 1 的领域，第 3 层包含与第 2 层多边形接触的多边形 (不在之前的层里)，如此下去. 闭道路 $\tilde{p}$, 从第 1 层开始，必定会达到最外层，然后回来. 当它这么做后，它一定会横渡 *多于一半* 的多边形的边，因为对于每个多边形的最外层最多有 3 条边不位于层的外边缘. 这个顺序可以辨认，在 $\tilde{p}$ 中边的标号顺序就是用 "字" 的拼写顺序. 用多于一般边数的 "字" 表示一个多边形，剩余的边可以用补充 "字" 代替. 用这样的替代可以缩短字，我们发现用有限多步就能表示一个闭路.

这个方法叫做 *Dehn算法*.

当 Dehn 在 Dehn (1910) [20] 中回到三维流形，通过他在 Dehn (1907) [19] 中的有前途的但是不完全的努力，他新获得的群论技巧取得了很大的不同. 他现在能够构造整个的无限的同调球面类，通过计算它们的基本群完整的证明了它们不是三维流形. 他用的那个方法，现在被叫做 *Dehn 割补术*, 它是从 $\mathbb{S}^3$ 中移动一个立体圆圈再用 "不同的方法

去看". 有无限多个方法来区分一堆在立体圆圈上的经典曲线和一对在 $\mathbb{S}^3$ 中纽结洞边缘上的曲线，可以产生无限多三维流形. 他们中的无限个有平凡的同调但是有非平凡的 π_1. 他们中的一个有与 Poincaré 同调球面相同的 π_1 (是被 Seifert 和 Weber (韦伯) (1933) [59] 证明出是一样的), 但是其它有无限的 π_1. 而且随后被证明，通过 Dehn 割补术，选取合适的纽结环面 (knotted Tori) 或连接环面 (linked tori), 可以从 $\mathbb{S}^3$ 产生所有的三维流形 (Lickorish (1962) [37]).

在同一篇文章里 Dehn 得到了三叶纽结补的 π_1 的表示，与 Wirtinger 的表示类似，而且得到了它的群图表. 这个图表有有趣的集合结构，自然在三维空间中等于线 $\times$ 双曲平面. Bianchi (比安基) (1898) [12] 发现这种情况会出现在 8 个三维几何中的一个，这是 Thurston 几何假设的主题.

也许 Dehn (1910) [20] 的最深远的结果是 "纽结的 Poincaré 假设", 它是这样叙述的：一个纽结 K 如果具有最可能平凡的群 (比如 $\pi_1(\mathbb{S}^3\setminus K)=\mathbb{Z}$) 则它是平凡纽结. 如 Poincaré 猜想一样，Dehn 的结果很难技术实现. 它依赖于 *Dehn 引理*, 一个在三维流形上的曲线 K, 由一个奇异但是在 K 上不含奇点的圆盘生成，则它可以由一个非奇异的圆盘张成. Dehn 尝试着用一个巧妙的曲面方法，他称该方法为 "*替换* (*Umschaltung*)", 但是他忽略了某些这个方法行不通的情况. 可能 Dehn 是在 1907 年开始思考 Dehn 引理的，但是他在同调球面构造中的缺陷也能通过应用 Dehn 引理弥补 (Stillwell (1979) [63]).[1)]

Dehn 证明中的错误由 Kneser (克内泽尔) (1929) [36] 发现, 且正确的证明由 Papakyriakopoulos 利用一种具有复杂覆叠空间的转换组合所给出 (1957) [45]. 三维流形上的曲面操作实际上是一种可行的想法，并且 Kneser 自己在 1929 年的论文中成功实现. 这种思想由 Papakyriakopoulos 重新使用并在 20 世纪 50 年代盛行，它被用于两个关于三维流形的长期存在的算法问题求解中：Haken (1961) [33] 关于平凡纽结的认识和 Rubenstein (1995) [57] 关于 $\mathbb{S}^3$ 的认识.

Dehn 在基本群和同调球面方面的工作明显是被 Poincaré 所鼓舞的，但是 Tietze 也对他有重要的影响. 在 1908 年，有一次 Dehn 认为他已经证明了 Poincaré 猜想 —— 直到 Tietze 指出他的陈述中的一个错误 (Volkert (1966) [67]). 所以 Dehn 有好的理由去尊重 Tietze 的工作，而且貌似 Tietze (1908) [65] 将 Dehn 的想法用于纽结和组合群论. 正如 Tietze, Dehn (1911) [21] 提出了群的同构问题，同构问题被 Aydan (1957) [1] 证明是不可解的. Novikov (诺维科夫) (1955) [44] 证明这就是某些群的字问题的不可解.

Dehn (1911) [21] 也回答了 Poincaré (1895) [48] §14 提出的两个问题：是否每个有限表出的群可以被看作是一个流形的 π_1? 如果是的话，这个流形是如何构造的？在他论文的第 III 章，Dehn 指出一个 (相对平凡的) 事实，每个有限表出的群 G 可以被看作是一个 2–复形的 π_1, 不很明显的事实是 G 是一个四维流形的 π_1; 比如 2–复形嵌入到 $\mathbb{R}^5$ 的邻域的边界. 这个构造可以用作证明 Markov (1985) [38] 的紧四维流形的同胚问题不可解.

1) Gordon (1999) [31] 给出了 Poincaré 假定 Dehn 引理的例子，但是没有证明或评论. 在 Poincaré (1904) [51] 的 §5, Poincaré 假定存在圆盘 "没有两条曲线" (Poincaré (2010) [53, p. 214]). 这在他构造同调球面之前，所以可能 Dehn 是从那里得到想法的.—— 原注

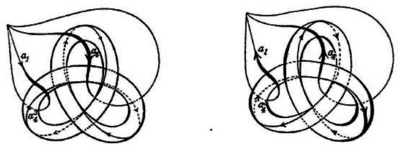

图 14 Dehn 的两个三叶纽结的图

Dehn 在纽结理论中最突出的贡献是 Dehn (1914) [23], 它结束了由 Wirtinger 和 Tietze 起源的纽结理论时代. 在这篇文章中, Dehn 给出了两个三叶纽结是不同的第一个严密的证明. 假设左三叶纽结到右边有一个变形, Dehn 证明他可能诱导某种三叶纽结群上的自同构 (图 14). 然后, 通过一番努力决定所有自同构 (利用了他在 1910 年的论文中发展的三叶纽结的知识), Dehn 能够证明关于三叶逆转自同构的假设不存在.

7. Alexander

当 James Alexander (1888—1971) 是普林斯顿大学的一个学生时, Oswald Veblen 引导他进入拓扑学. 正如 Volkert 在 Volkert (2002) [68, p. 182] 中说的, Alexander 能够被称为是第一个拓扑学家, 从第一个专门研究拓扑领域的人的意义上来说. Alexander (1915) [2] 给出了 Betti 数和挠率是拓扑不变量的第一个证明, 为 Poincaré 同调理论奠定了良好的基础. 在 1916 年他参加了将 Heegaard 的论文翻译成法语的工作, Heegaard (1916) [35] 引导他去研究 Tietze (1908) [65], 在接下来的几年里他解决了 Tietze 的关于透镜空间和纽结方面的未决问题. 特别的, Alexander (1919b) [4] 证明了 $(5,1)$ 和 $(5,2)$ 透镜空间是不同胚的, 所以给出了具有相同 π_1 的不同胚的三维流形的第一个例子. Alexander (1919a) [3] 证明了任何定向的三维流形都是 $\mathbb{S}^3$ 的分支覆盖. 在 1920 年, 他也用 Heegaard 的分支覆盖得到了第一个可计算的纽结不变量. 在 1924 年, 他解决了 Dehn 的关于用一个圆圈分开 $\mathbb{S}^3$ 的问题.

为了解释 Alexander 的思维方式, 我们将更细致的考虑以上 3 个结果: Betti 数和挠率的不变性、纽结不变量的计算和 $\mathbb{R}^3$ 中曲面的嵌入.

正如 Poincaré 一样, Alexander 将流形作为拓扑的主要研究对象, 承认以单纯分解的方式来计算 Betti 数和挠率. 这些数的 *不变性* 是有疑问的, 因为不清楚同样的数是否可以从同一个流形的不同的单纯分解得到. 根据 Riemann (1851) [56], 人们希望 *添加* (*superimpose*) 两个分解获得一个 "共同的划分", 可以从每个原始分解的基本划分获得 (比如将一条边分成两个). 正如 Tietze (1908) [65] 指出的那样, 很容易证明在基本划分下 Betti 数和挠率是不变的, 但是要证明重叠是否可行并 *不* 容易. 麻烦就是在一个简单分解中的胞腔不一定具有直线边 —— 他们只是单体形的同胚像 —— 所以两个不同单纯分解的边通常在无穷远处相交. Alexander (1915) [2] 用 *单纯逼近* (*simplicial approximation*) 回避了这个问题, 对维数为 1 的不变量进行了证明, 单纯逼近是 Brouwer (1911) [14] 提出来的方法.

所以, 通过 Brouwer 的帮助, Alexander 为 Poincaré 的同调理论奠定了一个好的基础. 所以不奇怪, Alexander 特别研究了 Betti 数和挠率, 他设法去应用他们. 当他发现了第一个可计算的纽结不变量时, 他找到了特别的应用, 这个不变量是作为 $\mathbb{S}^3$ 的分支覆盖的挠率. 为了深入剖析他的发现, 将其与最早被知道的纽结不变量 —— 由 Wirtinger 和 Dehn 发现的 *纽结群*(*knot group*)—— 进行比较是很有用的.

纽结 K 的群 $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K)$ 是一个好的不变量是指我们能够区分跟生成元和关系的不同的纽结群. 第一个可能的方法 ——Tietze 的交换化过程和 Poincaré 数的序列萃取过程 —— 失败了是因为所有的纽结群有相同的交换子 (比如 $\mathbb{Z}$).1) 在 1920 年之前, 没有一般的方法来计算不变量, 来区分两个纽结群, 所以, 在 1920 年, 这种情形下纽结群不是一个 *可计算的* (*computable*) 不变量. 在 1920 年, Alexander 通过避开纽结群而回避了这个问题, 而且修正了 Heegaard 的研究纽结处的 $\mathbb{S}^3$ 的分支覆盖的想法.

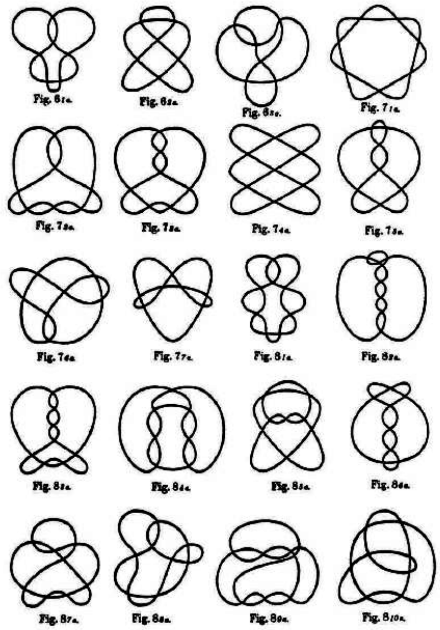

图 15 一些有 6, 7, 8 个交点的纽结

挠率是可计算的, 正如我们所知, Heegaard 观察了三叶纽结处的 $\mathbb{S}^3$ 的分支覆盖的挠率. Heegaard 在研究纽结时未能利用这一发现, 但是在 1920 年 Alexander 利用它计算了在许多不同纽结处的 $\mathbb{S}^3$ 的 2–和 3–叶覆叠的挠率. 他发现这些不变数能够区分所有的能够用 8 个交叉点描述的纽结. 图 15 展示了一些这种图表 (在其中交叉点没有展示出来, 因为它们被理解成 “上” 与 “下” 之间的交替). 这来之于 Alexander 和 Briggs (布里格斯) (1927) [8] 的文章, 该文章实际上是 Alexander 在 1920 年写的美国科学学院的书面记录报告.

Alexander 并不总是会对他的结果写出全部的证明, 但是此时由于 Reidemeister (1926) [54] 的出现不得不去做,Reidemeister 的文章里从纽结群获得了相同的不变量. Reidemeister 用一个不分支的 $\mathbb{S}^3 \setminus K$ 的覆叠替换了 $\mathbb{S}^3$ 的在纽结 K 处的分支覆叠. 他注意到这些覆盖的 π_1 是 $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K)$ 的子群, 具有不平凡的挠率. 这些数和 Alexander 的是相同的, 但是它们第一次由纽结群计算得到. Reidemeister 的方法是一个重大的突破, 预示着拓扑里新的一章, 说明 π_1 能够起到有效的作用. Alexander 的方法更基本, 回顾了 Betti 数和挠率的旧世界. 这可能是挠率的最后的作品, 并被 Heegaard 和 Poincaré 所信服.

最后, 考虑 Alexander (1924b) [6], 它包含任何一个 $\mathbb{S}^3$ 中的环面都至少在一边界定一个立体的圆圈, 因此填补了 Dehn 在 Dehn (1907) [19] 中构造同调球面的缺陷, 并且回答了 Tietze 的是否一个 $\mathbb{S}^3$ 中的圆圈都必然界定一个纽结补的问题. 在同一篇文章中, Alexander 证明了一个 *多面体* (*polyhedral*) $\mathbb{S}^2$ 在 $\mathbb{S}^3$ 中每一边都界定一个球, 这个结果因为 Alexander (1924a) [5] 而变得很重要. 在后来的文章中, Alexander 构造了著名的 *Alexander 角状球* (*horned sphere*)—— 图 16—— 一个非多面体对象, 和球同胚, 它的补并不是单连通的. 本着 Poincaré 的精神, Alexander 让这一点更为明显, 角状球的补不是单连通的. 他仅仅指出图 16 中曲线 β_1 在补空间是不能收缩到一个点的.

1) 人们想知道是否是这一点让 Tietze 意识到群的同构问题的困难性. 他没有明确的提到纽结群的交换子, 但是在后来 Wirtinger 的报告中立刻被提出来了.—— 原注

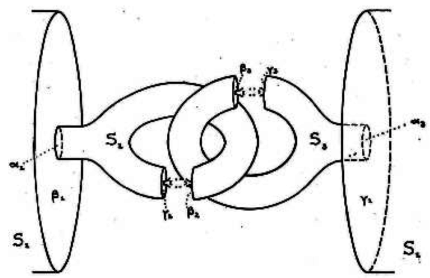

图 16 Alexander 的角状球面

正如这些例子所展示的那样，Alexander 可以填补在 Poincaré 及他的继承者工作中的许多缺陷，且取得了新的进展，但是和他们的方法很相近．从这个意义上来说，Alexander 在 20 世纪 20 年代中期自然接近 Poincaré 开启的三维流形拓扑篇章．Poincaré 的想法继续产生影响，但是他们加入了很多新的观点，比如说在 Alexander (1928) [7] 引入了 *Alexander 多项式*．如果 Alexander 结束了 Poincaré 时代，那么他也开创了后 Poincaré 时代．

参考文献

[1] Adyan, S. I. (1957). Unsolvability of some algorithmic problems in the theory of groups (Russian). Trudy Moskov. Mat. Obshch. 6, 231–298. MR0095872 (20:2370).

[2] Alexander, J. W. (1915). A proof of the invariance of certain constants of analysis situs. Trans. Amer. Math. Soc. 16, 148–154. MR1501007.

[3] Alexander, J. W. (1919a). Note on Riemann spaces. Bull. Amer. Math. Soc. 26, 370–372. MR1560318.

[4] Alexander, J. W. (1919b). Note on two three-dimensional manifolds with the same group. Trans. Amer. Math. Soc. 20, 339–342. MR1501131.

[5] Alexander, J. W. (1924a). An example of a simply connected surface bounding a region which is not simply connected. Proceedings of the National Academy of Sciences 10, 8–10.

[6] Alexander, J. W. (1924b). On the subdivision of 3-space by a polyhedron. Proceedings of the National Academy of Sciences 10, 6–8.

[7] Alexander, J. W. (1928). Topological invariants of knots and links. Trans. Amer. Math. Soc. 30, 275–306. MR1501429.

[8] Alexander, J. W. and G. B. Briggs (1927). On types of knotted curves. Ann. Math. 28, 562–586.

[9] Appell, P. (1887). Quelques rémarques sur la théorie des potentiels multiforms. Math. Ann. 30, 155–156. MR1510440.

[10] Artin, E. (1926). Theorie der Zöpfe. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 4, 47–72.

[11] Betti, E. (1871). Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni. Annali di Matematica pura ed applicata 4, 140–158.

[12] Bianchi, L. (1898). Sugli spazi a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti. Memorie di Matematica e di Fisica della Societa Italiana delle Scienze 11, 267–352. English translation by Robert Jantzen in General Relativity and Gravitation 33, (2001), p. 2171–2253.

[13] Brauner, K. (1928). Zur Geometrie der Funktionen zweier komplexer Veränderliche. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 6, 1–55.

[14] Brouwer, L. E. J. (1911). Beweis der Invarianz der Dimensionzahl. Math. Ann. 70, 161–165. MR1511615.

[15] Cairns, S. S. (1934). On the triangulation of regular loci. Ann. Math. 35, 579–587. MR1503181.

[16] Cayley, A. (1878). The theory of groups: Graphical representation. Amer. J. Math. 1, 174–176. In his Collected Mathematical Papers 10: 403–405. MR1505159.

[17] Church, A. (1936). An unsolvable problem of elementary number theory. American Journal of Mathematics 58, 345–363. MR1507159.

[18] Dehn, M. (1900). Über raumgleiche Polyeder. Gött. Nachr. 1900, 345–354.

[19] Dehn, M. (1907). Berichtigender Zusatz zu III AB3 Analysis situs. Jber. Deutsch. Math. Verein. 16, 573.

[20] Dehn, M. (1910). Über die Topologie des dreidimensional Raumes. Math. Ann. 69, 137–168. English translation in [24]. MR1511580.

[21] Dehn, M. (1911). Über unendliche diskontinuierliche Gruppen. Math. Ann. 71, 116–144. English translation in [24]. MR1511645.

[22] Dehn, M. (1912). Transformation der Kurven auf zweiseitigen Flächen. Math. Ann. 72, 413–421. English translation in [24]. MR1511705.

[23] Dehn, M. (1914). Die beiden Kleeblattschlingen. Math. Ann. 75, 402–413. English translation in [24]. MR1511799.

[24] Dehn, M. (1987). Papers on Group Theory and Topology. New York: Springer-Verlag. Translated from the German and with introductions and an appendix by John Stillwell, and with an appendix by Otto Schreier. MR881797 (88d : 01041).

[25] Dehn, M. and P. Heegaard (1907). Analysis situs. Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, vol. III AB3, 153–220, Teubner, Leipzig.

[26] Dyck, W. (1884). On the "Analysis Situs" of 3-dimensional spaces. Report of the Brit. Assoc. Adv. Sci., 648.

[27] Epple, M. (1999a). Die Entstehung der Knotentheorie. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn.

[28] Epple, M. (1999b). Geometric aspects in the development of knot theory. In History of Topology, p. 301–357. Amsterdam: North-Holland. MR1674917 (2000i : 57001).

[29] Freedman, M. H. (1982). The topology of four-dimensional manifolds. J. Differential Geom. 17 (3), 357–453. MR679066 (84b : 57006).

[30] Gordon, C. A. and J. Luecke (1989). Knots are determined by their complements. J. Amer. Math. Soc. 2, 371–415. MR965210 (90a : 57006a).

[31] Gordon, C. M. (1999). 3-dimensional topology up to 1960. In History of topology, p.449–489. Amsterdam: North-Holland. MR1674921 (2000h : 57003).

[32] Guggenheimer, H. (1977). The Jordan curve theorem and an unpublished manuscript of Max Dehn. Archive for the History of the Exact Sciences 17, 193–200. MR0532231 (58 : 27069).

[33] Haken, W. (1961). Theorie der Normalflächen. Acta Math. 105, 245–375. MR0141106 (25 : 4519a).

[34] Heegaard, P. (1898). Forstudier til en topologisk Teori for de algebraiske Fladers sammenhoeng. Dissertation, Copenhagen, 1898. Available at http://www.maths.ed.ac.uk/~aar/papers/heegaardthesis.pdf. [35] is a French translation of this work.

[35] Heegaard, P. (1916). Sur l'analysis situs. Bull. Soc. Math. France, 161–242. MR1504754

[36] Kneser, H. (1929). Geschlossene Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten. Jber. Deutsch. Math. Verein. 38, 248–260.

[37] Lickorish, W. B. R. (1962). A representation of orientable combinatorial 3-manifolds. Ann. Math. 76, 531–540. MR0151948 (27 : 1929).

[38] Markov, A. (1958). The insolubility of the problem of homeomorphy (Russian). Dokl. Akad. Nauk SSSR 121, 218–220. MR0097793 (20 : 4260).

[39] McMullen, C. T. (2011). The evolution of geometric structures on 3-manifolds. Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.) 48(2), 259–274. MR2774092 (2012a : 57024).

[40] Möbius, A. F. (1863). Theorie der Elementaren Verwandtschaft. Werke 2: 433–471.

[41] Moise, E. E. (1952). Affine structures in 3-manifolds. V. The triangulation theorem and Hauptvermutung. Ann. Math. (2) 56, 96–114. MR0048805 (14 : 72d).

[42] Neumann, C. (1865). Vorlesungenüber Riemann's Theorie der Abelschen Integralen. Leipzig: Teubner.

[43] Noether, E. (1925). Ableitung der Elementarteilertheorie aus der Gruppentheorie. Jber. Deutsch. Math. Verein. 34, 104.

[44] Novikov, P. S. (1955). On the algorithmic unsolvability of the word problem in group theory (Russian). Dokl. Akad. Nauk SSSR Mat. Inst. Tr. 44. English translation in Amer. Math. Soc. Transl. ser. 2, 9, 1–122. MR0092784 (19 : 1158b).

[45] Papakyriakopoulos, C. D. (1957). On Dehn's lemma and the asphericity of knots. Ann. Math. (2) 66, 1–26. MR0090053 (19 : 761a).

[46] Poincaré, H. (1882). Théorie des groupes fuchsiens. Acta Math. 1, 1–62. In his OEuvres 2:108–168. English translation in [52], 55–127. MR1554574.

[47] Poincaré, H. (1892). Sur l'analysis situs. Comptes rendus de l'Academie des Sciences 115, 633–636.

[48] Poincaré, H. (1895). Analysis situs. J.Éc. Polytech., ser. 2 1, 1–123.

[49] Poincaré, H. (1900). Second complément à l'analysis situs. Proc. London Math. Soc. 32, 277–308. MR1576227.

[50] Poincaré, H. (1902). Sur certaines surfaces algébriques; troisième complément à l'analysis situs. Bull. Soc. Math. France 30, 49–70. MR1504408.

[51] Poincaré, H. (1904). Cinquième complément à l'analysis situs. Rendiconti del Circolo matematico di Palermo 18, 45–110.

[52] Poincaré, H. (1985). Papers on Fuchsian Functions. New York: Springer-Verlag. Translated from the French and with an introduction by John Stillwell. MR809181 (87d : 01021).

[53] Poincaré, H. (2010). Papers on Topology, Volume 37 of History of Mathematics. Providence, RI: American Mathematical Society. Translated and with an introduction by John Stillwell. MR2723194 (2011j : 01017).

[54] Reidemeister, K. (1926). Knoten und Gruppen. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 5, 7–23.

[55] Reidemeister, K. (1932). Einführung in die kombinatorische Topologie. Braunschweig: Vieweg.

[56] Riemann, G. F. B. (1851). Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse. Werke, 2nd ed., 3–48.

[57] Rubinstein, J. H. (1995). An algorithm to recognize the 3-sphere. In Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994), Basel, p. 601–611. Birkhäuser. MR1403961 (97e:57011)

[58] Seifert, H. and W. Threlfall (1980). Seifert and Threlfall: a textbook of topology, Volume 89 of Pure and Applied Mathematics. New York: Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers]. Translated from the German edition of 1934 by Michael A. Goldman, With a preface by Joan S. Birman, With "Topology of 3-dimensional fibered spaces" by Seifert, Translated from the German by Wolfgang Heil. MR575168 (82b : 55001).

[59] Seifert, H. and C. Weber (1933). Die beiden Dodekaederräume. Math. Zeit. 37, 237–253. MR1545392.

[60] Sela, Z. (1995). The isomorphism problem for hyperbolic groups. I. Ann. Math. (2) 141(2), 217–283. MR1324134 (96b : 20049).

[61] Smith, H. J. S. (1861). On systems of linear indeterminate equations and congruences. Philosophical Transactions 111, 293–326. (下转 347 页)