隔热问题中的两个优化问题

Dorin Bucur Giuseppe Buttazzo Carlo Nitsch

摘要 我们考虑隔热问题中的两个优化问题. 在这两种情形, 目的都是在发热体的边界周围找到一个提供最佳的隔热效果的薄层. 第 1 个问题讨论存在给定热源的情形. 在第 2 种情形, 没有热源, 目的是要求温度衰减最慢. 在第 1 种情形, 对于均匀的热源, 围绕球的隔热材料是均匀分布的, 但是对于正方形, 隔热材料更集中在其各边的中间. 在第 2 种情形, 即使对于球状物体来说, 当隔热材料总量低于某个阈值时, 最好不要均匀分布. 我们还提供了数值计算和一系列未解决的问题.

1. 引言

尽管隔热问题对节能、污染控制和环境改善至关重要, 在可预见的未来, 隔热问题有望成为一个重要的研究领域. 隔热问题涉及到几个科学学科: 用于设计能耗更有效的新建筑的土木工程学科, 用于研究具有更好隔热性能的新材料的物理学和化学学科, 以及用于研究存在隔热区域的热传导的偏微分方程 (PDE) 的数学学科.

在这篇短文中, 我们提出了两个与最优隔热有关的问题. 在这两个情形, 在 $\mathbb{R}^d$ 中的区域 Ω 都是给定的. 我们假设 Ω 是一个具有正则边界 $\partial\Omega$ 的有界开集. 为简单起见, 我们假设 Ω 是具有恒定热传导系数的导热区域, 我们假设该恒定热传导系数等于 1. 我们的目标是以某种有效的方式在 $\partial\Omega$ 周围分布一层隔热材料 Σ; 我们使用的最优准则将在后面再来描述. 我们用 $\partial\Omega$ 上的切向坐标和法向坐标来描述隔热层 Σ: $\Sigma_\varepsilon=\{\sigma+tv(\sigma):\sigma\in\partial\Omega, 0\le t<\varepsilon h(\sigma)\}$, 其中 $v(\sigma)$ 是在点 σ 处 $\partial\Omega$ 的外法线向量, 函数 h 描述可变化的隔热层的厚度. 下标 ε 描述了隔热层的平均厚度, 取值非常小 (对于一栋小房子, 可能只有几厘米). 隔热层 Σ_ε 中隔热材料的热传导系数 δ 也非常小. 最后, 我们假设在集合 $\Omega\cup\Sigma_\varepsilon$ 外边的温度为零.

下面用确切的数学形式来描述我们处理的两个问题.

问题 1 我们在 Ω 中放置一个热源 $f\in L^2(\Omega)$; 等待足够长的时间后, 温度 $u(t,x)$ 接近于稳态温度 $u(x)$, $u(x)$ 是在 $\partial\Omega$ 上满足热传递条件的椭圆型方程的解

$$\begin{cases} -\triangle u=f & \text{在}\,\Omega\,\text{内},\\ -\triangle u=0 & \text{在}\,\Sigma_\varepsilon\,\text{内},\\ u=0 & \text{在}\,\partial(\Omega\cup\Sigma_\varepsilon)\,\text{上},\\ \dfrac{\partial u^-}{\partial v}=\delta\dfrac{\partial u^+}{\partial v} & \text{在}\,\partial\Omega\,\text{上}. \end{cases} \tag{1}$$

译自: Notices of the AMS, Vol. 64 (2017), No. 8, p. 830–835, Two optimization problems in thermal insulation, Dorin Bucur, Giuseppe Buttazzo, and Carlo Nitsch, figure number 7.

Dorin Bucur是法国 Savoie Mont Blanc大学教授, 他的邮箱地址是 dorin.bucur@univ-savoie.fr.
Giuseppe Buttazzo 是意大利比萨大学数学教授, 他的邮箱地址是 giuseppe.buttazzo@unipi.it.
Carlo Nitsch 是意大利那不勒斯大学数学教授, 他的邮箱地址是 carlo.nitsch@unina.it.

等价地，稳态温度 u 可看作是能量泛函 (2)

$$E_{\varepsilon,\delta}(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{\delta}{2}\int_{\Sigma_\varepsilon} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} f u\, dx \qquad (2)$$

在 $H_0^1(\Omega \cup \Sigma_\varepsilon)$ 上极小化问题的解. PDE (1) 实际上是关于费用 (cost) 泛函 (2) 的极小化问题的 Euler-Lagrange (欧拉－拉格朗日) 方程. 用 u 表示 PDE (1) (或能量 (2) 的变分问题) 的解, (1) 中乘以 u, 标准的分部积分使我们能用形式

$$\min_{H_0^1(\Omega \cup \Sigma_\varepsilon)} E_{\varepsilon,\delta} = -\frac{1}{2}\int_{\Omega} f u\, dx$$

表示能量泛函 (2) 的极小化问题. 注意，当热源均匀分布时，上述能量泛函的极小化问题对应于平均温度的极大化问题.

我们要处理的优化问题是，当规定了隔热材料总量，$\partial\Omega$ 周围隔热层 Σ_ε 形状的最佳选择. 强调能量泛函对 h 的依赖性并用 $E(h)$ 表示量

$$E(h) = \min_{H_0^1(\Omega \cup \Sigma_\varepsilon)} E_{\varepsilon,\delta},$$

我们的第一个优化问题是要寻求

$$\min\{E(h): h \in \mathcal{H}_m\},$$

其中 $\mathcal{H}_m$ 表示容许选择的函数类

$$\mathcal{H}_m = \left\{h: \partial\Omega \to \mathbb{R},\, h \geq 0,\, \int_{\partial\Omega} h\, d\sigma = m\right\}. \quad (3)$$

例如，这适用于如图 1 所示的房屋或如图 2 所示的管道的隔热. 在这个领域最关键的问题之一是:“哪些部分必须得到更多的保护？” 例如，对如图 3 展示的一个径向对称的拱形圆顶冰屋，我们是否应该放置一层具有恒定边界厚度的绝缘材料？

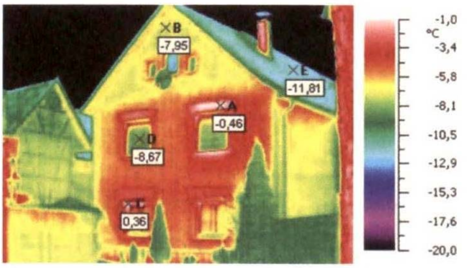

图 1　热量在不同的地方以不同的速度从房子散发出去.什么是隔热层厚度的最佳分布？

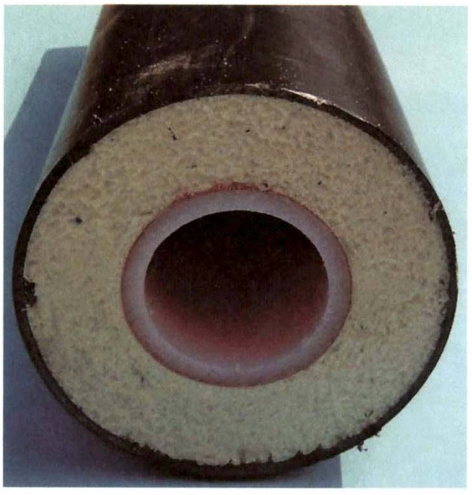

图 2　管道有很厚的隔热层

图 3　由一层雪构成冰屋的隔热层

问题 2　我们考虑的第 2 个问题是追随 A. Friedman (弗里德曼) 的文章 [5] 处理和前述一样的区域 Ω, 初始温度固定为 u_0 且没有任何热源. 在这种情形，温度衰减到零，而我们的目标是将隔热材料置于 Ω 附近，使这种衰减速率尽可能低. 这适用于例如图 4 所示咖啡壶的隔热.

由相应的热扩散方程的 Fourier (傅里叶) 分析，温度的衰减如 $e^{-t\lambda}$, 其中 λ 是以弱形式

$$\langle \mathcal{A}u, \phi\rangle = \int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi\, dx + \delta \int_{\Sigma_\varepsilon} \nabla u \nabla \phi\, dx \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega \cup \Sigma_\varepsilon)$$

表示的椭圆算子的第一本征值. 所以, 用 $\lambda(h)$ 表示上述的第一本征值, 强调该本征值对函数 h 的依赖性, 问题 2 化归为求解

$$\min\{\lambda(h): h \in \mathcal{H}_m\}, \tag{4}$$

其中 $\mathcal{H}_m$ 是 (3) 中引进的容许选择的函数类.

图 4　咖啡壶的隔热

2. 渐近问题

为了简化我们的最优隔热问题, 跟随 E. Sanchez-Palencia 1974 年的文章, 我们考虑当隔热层的厚度 ε 和隔热材料的热传导系数 δ 都趋于零时的渐近模型. 跟随 G. Buttazzo 和 E. Acerbi 早年研究工作中所谓的 Gamma 收敛方法, 我们考虑泛函

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{\delta}{2}\int_{\Sigma_\varepsilon} |\nabla u|^2 dx \qquad u \in H_0^1(\Omega \cup \Sigma_\varepsilon).$$

- 当 $\varepsilon \ll \delta$ 时温度在边界处趋于零, 而极限问题是与泛函

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \qquad u \in H_0^1(\Omega)$$

有关的 Dirichlet (狄利克雷) 问题.

- 当 $\varepsilon \gg \delta$ 时温度的法向导数在边界处趋于零, 而极限问题是与泛函

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \qquad u \in H^1(\Omega)$$

有关的 Neumann (诺伊曼) 问题.

- 当 $\varepsilon \approx k\delta, k > 0$ 时极限问题是与泛函

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2k}\int_{\partial\Omega} \frac{u^2}{h}\, d\sigma \qquad u \in H^1(\Omega)$$

有关的既包含 Dirichlet 边界条件又包含 Neumann 边界条件的 Robin (罗宾) 型问题.

下面我们将讨论最后一种情形的处理框架. 即当 ε 和 δ 趋于零且 $k \approx \varepsilon/\delta$ 的情形, 我们可以重新表示问题 1 和问题 2 的渐近形式.

问题 1 的渐近形式变成

$$\min\{\mathcal{E}(h): h \in \mathcal{H}_m\}, \tag{5}$$

其中 $\mathcal{H}_m$ 在 (3) 中给出, 而 $\mathcal{E}$ 是渐近能量

$$\mathcal{E}(h) = \min\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2k}\int_{\partial\Omega} \frac{u^2}{h}\, d\sigma - \int_\Omega fu\, dx:\ u \in H^1(\Omega)\right\}.$$

上述极小化问题的 Euler-Lagrange 方程是

$$\begin{cases} -\triangle u = f & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ \dfrac{1}{k}u + h\dfrac{\partial u}{\partial v} = 0 & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}. \end{cases}$$

记 u_h 是该问题的解, 方程两边乘以 u_h 并分部积分就给出

$$\mathcal{E}(h) = -\frac{1}{2}\int_\Omega fu_h\, dx.$$

类似地，问题 2 的渐近形式由

$$\min\{\lambda(h)\colon h\in\mathcal{H}_m\},\tag{6}$$

给出，其中 $\lambda(h)$ 是写成弱形式的椭圆算子

$$\langle\mathcal{A}u,\phi\rangle=\int_\Omega\nabla u\nabla\phi\,dx+\frac{1}{k}\int_{\partial\Omega}\frac{u\phi}{h}\,d\sigma\qquad\forall\phi\in H^1(\Omega)$$

的第一本征值．等价地，$\lambda(h)$ 可以用 Rayleigh (瑞利) 商

$$\lambda(h)=\min\left\{\frac{\displaystyle\int_\Omega|\nabla u|^2dx+\frac{1}{k}\int_{\partial\Omega}\frac{u^2}{h}\,d\sigma}{\displaystyle\int_\Omega u^2dx}:\ u\in H^1(\Omega),u\neq 0\right\}$$

来表示．

3. 能量最优化

最优化问题 (5) 是一个双重极小化问题

$$\min_{h\in\mathcal{H}_m}\min_{u\in H^1(\Omega)}\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2dx+\frac{1}{2k}\int_{\partial\Omega}\frac{u^2}{h}\,d\sigma-\int_\Omega fu\,dx\right\}.$$

交换两个极小的次序我们得到结论：对于任何在 $\partial\Omega$ 上不恒等于零的 $u\in H^1(\Omega)$, h 的最优选择是

$$h=m\frac{|u|}{\int_{\partial\Omega}|u|\,d\sigma},$$

当 $u\in H_0^1(\Omega)$ 时 h 的选取是无关紧要的．这就把极小化问题 (5) 化归为

$$\min\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2dx+\frac{1}{2km}\left(\int_{\partial\Omega}|u|\,d\sigma\right)^2-\int_\Omega fu\,dx\,:\,u\in H^1(\Omega)\right\}.\tag{7}$$

定理 1 ([2], [1]) *假设 Ω 是连通的．那么泛函*

$$F(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2dx+\frac{1}{2km}\left(\int_{\partial\Omega}|u|\,d\sigma\right)^2$$

在 $H^1(\Omega)$ 上是严格凸的．由此，对于任何 $f\in L^2(\Omega)$ 极小化问题 (7) 有唯一解 $\bar{u}$. 因此，问题 (5) 的最优函数 h_m 由

$$h=m\frac{|\bar{u}|}{\int_{\partial\Omega}|\bar{u}|\,d\sigma}$$

给出．

由唯一性，如果在 $\mathbb{R}^d$ 中 $\Omega=B_R$, 并且 $f=1$, 那么上述问题的最优解 $\bar{u}$ 是径向的：

$$\bar{u}(r)=\frac{R^2-r^2}{2d}+\frac{km}{d^2\omega_dR^{d-2}},$$

因此，最优厚度 h_m 是常数．

如果 Ω 不是连通的，那么最优隔热策略是不同的．设在 $\mathbb{R}^d$ 中 $\Omega=B_{R_1}\cup B_{R_2}$ (两个不相交的球之并), 并且 $f=1$. 那么：

- 如果 $R_1=R_2=R$, 那么围绕 B_{R_1} 和 B_{R_2} 的任何不变厚度的 h_m 就是最优选择；
- 如果 $R_1\neq R_2$, 那么最优选择就是把所有的隔热材料都等厚度地包在大的那个球上，不去保护小的那个球，如图 5 所示．

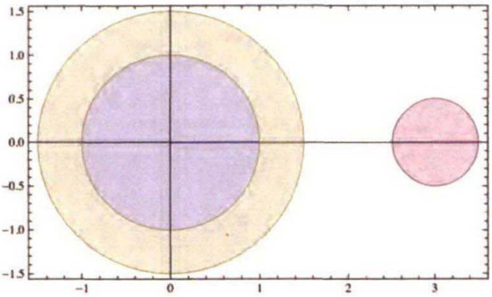

图 5　具有均匀热源单个球的最佳隔热层厚度不变 (如左). 对于两个不同大小的球, 将所有隔热材料放在较大的一个球上

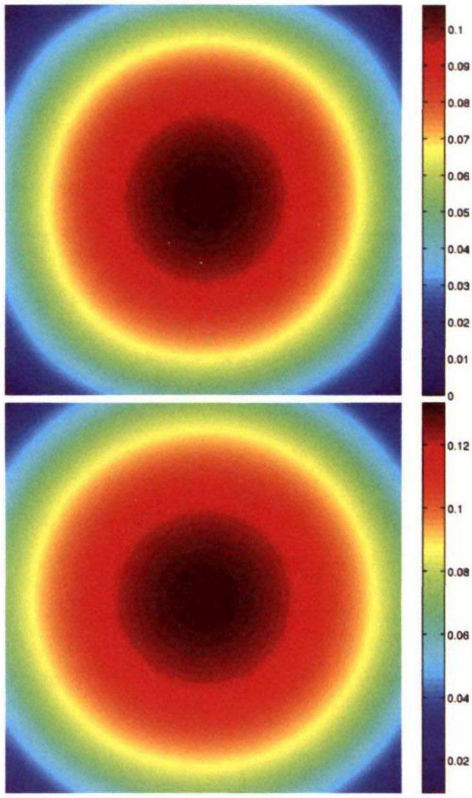

图 6　对于正方形区域, 最优策略是把隔热材料集中置于正方形各边的中部, 特别是, 当隔热材料的总量 m 小的情形 ($m=1$ 的情形见上图, $m=2$ 的情形见下图)

对于具有均匀热源的正方形区域, 数值计算表明最优策略是把隔热材料集中置于正方形各边的中部, 让正方形顶角部分保持相对低的温度, 如图 6 所示.

当隔热材料总量 $m \to 0$ 时研究厚度 h_m 的行为是很有趣的. P. Esposito 和 G. Riey [4] 证明了重新标度的函数 h_m/m 作为测度弱收敛到集中于法向导数 $\partial u_0/\partial v$ 达到其最小值的集合上的一个概率测度, 其中 u_0 是如下 Dirichlet 问题的解:

$$-\triangle u = f, \qquad u \in H_0^1(\Omega).$$

例如, 当 Ω 是正方形时, h_m/m 的聚集区域 (region of concentration) 由正方形各边的中点组成.

4. 本征值优化问题

第 2 个优化问题 (6) 看起来和第 1 个优化问题非常相似, 但是其解的行为非常不同. 一篇 1999 年的文章 [3] 断言对于球形区域来说最优隔热材料的放置是均匀放置, 但是仅当隔热材料的总量 m 足够大时其论证才行得通 [1].

就像问题 (5) 一样, 问题 (6) 也是一个双重极小化问题; 最优函数 h_m 由

$$h_m = m\frac{|\bar{u}|}{\int_{\partial\Omega}|\bar{u}|\,d\sigma} \tag{8}$$

给出, 其中 $|\bar{u}|$ 是下述辅助变分问题 (*auxiliary variational problem*) 的解:

$$\min\left\{\int_{\Omega}|\nabla u|^2 dx + \frac{1}{km}\left(\int_{\partial\Omega}|u|\,d\sigma\right)^2 : u \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} u^2\,dx = 1\right\}.$$

定理 2　([1]) 对于任何 Ω 优化问题 (6) 存在解 h_m. 如果 $\Omega = B_R$, 那么存在阈值 $m_0 > 0$, 使得

- 如果 $m > m_0$, 且 $\bar{u}$ 是径向的, 那么 h_m 是常量;
- 如果 $m < m_0$, 且 $\bar{u}$ 不是径向的, 那么 h_{opt} 不是常量.

阈值 m_0 确定为使得 $\lambda_m = \Lambda$ 唯一的 m, 其中

$$\lambda_m = \min\left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{km}\left(\int_{\partial\Omega} |u|\, d\sigma\right)^2 : \right.$$
$$\left. u \in H^1(\Omega), \int_\Omega u^2\, dx = 1 \right\},$$

并且 Λ 是第一个非零 Neumann 本征值:

$$\Lambda = \min\left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 dx : u \in H^1(\Omega), \right.$$
$$\left. \int_\Omega u^2\, dx = 1, \int_\Omega u\, dx = 0 \right\},$$

维数 $d = 1$ 时不会发生对称性破缺. 事实上, 在这种情形, 第 1 个非零 Neumann 本征值 Λ 和第 1 个非零 Dirichlet 本征值 Λ_0 是一样的, 所以对于任何隔热材料的总量 m 来说 $\lambda_m < \Lambda$.

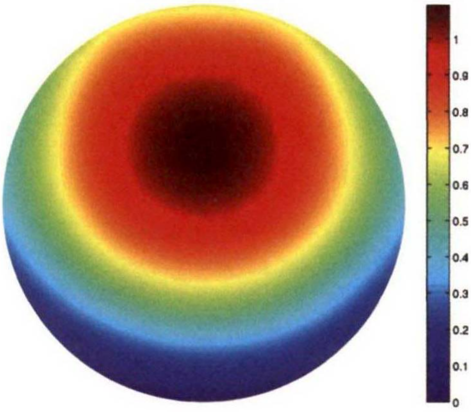

图 7 最优本征值隔热, 与边界厚度成比例, 当隔热材料的总量低于某个阈值时破坏对称性

图 7 对单位圆域和 $k = 1$, 对隔热材料的总量 m 的两个值展示了计算最优分布. 由 (8), 隔热材料的厚度与温度成比例.

5. 一些未决问题

在前面的表述中我们总是考虑 Ω 是固定的; 然而寻求区域的最优形状以及隔热这些区域的最佳方式会是非常有趣的. 更确切地说, 用 $\mathcal{E}(\Omega)$ 和 $\lambda(\Omega)$ 分别表示问题 1 和问题 2 的最小值

$$\mathcal{E}(\Omega) = \min\left\{ \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2km}\left(\int_{\partial\Omega} |u|\, d\sigma\right)^2 - \int_\Omega f u\, dx : u \in H^1(\Omega) \right\},$$
$$\lambda(\Omega) = \min\left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{km}\left(\int_{\partial\Omega} |u|\, d\sigma\right)^2 : u \in H^1(\Omega), \int_\Omega u^2\, dx = 1 \right\},$$

两个区域形状优化问题表为

$$\min\{\mathcal{E}(\Omega) : |\Omega| = M\},$$
$$\min\{\lambda(\Omega) : |\Omega| = M\}.$$

上面的问题看起来非常困难, 我们甚至还没有证明最佳区域形状的存在性. 证明 (或否证) 以下事实是非常有趣的.

- 在具有一般热源 f 的能量的情形, 证明区域的最佳形状存在.
- 在具有均匀热源的能量的情形, 证明区域的最佳形状是球状区域. 我们确实能够证明球状区域关于其边界的光滑扰动是 *稳定的* (*stationary*).
- 在维数 $d = 2$ 温度衰减的本征值的情形, 证明区域的最佳形状存在. 如果 $d \geq 3$, 把 Ω 取作多个不相交小球区域的并集, 易证 $\lambda(\Omega)$ 的值可以任意接近零.
- 在维数 $d = 2$ 温度衰减的本征值的情形, 如果 m 大的话 $(m > m_0)$ 区域的最佳形状是球形区域.

• 在维数 $d=2$ 温度衰减的本征值的情形，当 m 小 ($m<m_0$)，刻画最佳区域 (如果存在任何这种区域的话) 的特征．我们能够证明如果 $m<m_0$，那么球形区域不可能是最佳的，或者甚至关于其边界的光滑扰动不可能是稳定的．

致谢 (略)

参考文献

[1] D. Bucur, G. Buttazzo, and C. Nitsch, Symmetry breaking for a problem in optimal insulation, J. Math. Pures Appl. (9) 107 (2017), no. 4, 451–463. MR 3623640

[2] G. Buttazzo, Thin insulating layers: the optimization point of view, Proceedings of "Material Instabilities in Continuum Mechanics and Related Mathematical Problems", Edinburgh 1985–1986, edited by J. M. Ball, Oxford University Press, Oxford (1988), 11–19. MR 0970514

[3] S. J. Cox, B. Kawohl, and P. X. Uhlig, On the optimal insulation of conductors, J. Optim. Theory Appl. 100 (1999), no. 2, 253–263. MR 1673432

[4] P. Esposito and G. Riey, Asymptotic behaviour of a thin insulation problem, J. Convex Anal. 10 (2003), 379–388. MR 2043863

[5] A. Friedman, Reinforcement of the principal eigenvalue of an elliptic operator, Arch. Rational Mech. Anal. 73 (1980), no. 1, 1–17. MR 555579

(叶其孝 译　吴庆宝 校)

****

(上接 69 页)

[14] Domenico Bertoloni Meli, Equivalence and priority: Newton versus Leibniz, Oxford University Press, 1993.

[15] Sir Isaac Newton, The Correspondence of Isaac Newton, 7 v., edited by H. W. Turnbull, J. F. Scott, A. Rupert Hall, and Laura Tilling, Cambridge University Press, 1959–1977.

[16] ——, The Mathematical Papers of Isaac Newton, 8 v., edited by D. T. Whiteside with the assistance in publication of M. A. Hoskin, Cambridge University Press, 1967–1981.

[17] Jacqueline A. Stedall, A Discourse Concerning Algebra: English Algebra to 1685, Oxford University Press, 2002.

[18] ——, Mathematics Emerging: A Sourcebook 1540–1900, Oxford University Press, 2008.

[19] A. Weil, Review: Joseph E. Hofmann, Leibniz in Paris 1672–1676: His Growth to Mathematical Maturity, Bull. Amer. Math. Soc. 81 (1975), 676–688.

[20] Richard S.Westfall, Never At Rest:A Biography of Isaac Newton, Cambridge University Press, 1980.

(赵振江 译　张崇 校)