复分析中的偏微分方程方法(上)*

J. J. Kohn

I

我们先来考虑著名的 H. Lewy 方程，说明它是如何在多复变中提出的，并要讲一下 P. Greiner, E. Stein 和作者本人最近得到的一些结果[1]。这个题目会把我们直接引向边界 Laplacian 的 Hodge 分解的讨论；而这又把我们带到我们的主要课题，即，经由$\bar\partial$-Neumann 问题来研究正则性。

设 x,y,t 表示 $\mathbf{R}^3$ 中的坐标，命 $z=x+iy$，且

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right),\qquad \frac{\partial}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

则 Lewy 方程为

$$Lu\equiv\partial u/\partial z+i\bar z\partial u/\partial t=f. \tag{1}$$

［2］中 H. Lewy 证明：对很多 f 上述方程无解。［3］中 Sato 给出（1）式微局部可解的充要条件。这里介绍一下[1]给出的结果。它给出（1）式局部可解的充要条件以及最好的光滑解。

考虑域 $\Omega\subset\mathbf{C}^2$,

$$\Omega=\{(z_1,z_2)\in\mathbf{C}^2|\ \mathrm{Im}(z_2)>|z_1|^2\}. \tag{2}$$

用 $b\Omega$ 表示 Ω 的边界，则 $b\Omega$ 为

$$b\Omega=\{(z_1,z_2)\in\mathbf{C}^2|\ \mathrm{Im}(z_2)=|z_1|^2\}. \tag{3}$$

用下式把 $\mathbf{R}^3$ 映到 $b\Omega$上

$$z_1=z,\ \text{和}\ z_2=t+i|z|^2, \tag{4}$$

此映射诱导出 $\mathbf{R}^3$ 切向量到 $b\Omega$ 的切向量的映射；此时 L 的像为

$$L'=\partial/\partial z_1+2i\bar z_1\partial/\partial z_2. \tag{5}$$

可以看出：切于 $b\Omega$ 的形为 $a\partial/\partial z_1+b\partial/\partial z_2$ 的向量都是 L' 的倍数。

设$L_2(b\Omega)$是相应于体积元 $d\sigma=dxdydt$ 的平方可积函数组成的空间，$\mathscr{H}(b\Omega)$表示 Ω 上全纯函数边界值所组成的 $L_2(b\Omega)$ 的子空间．更为精确地，我们取 $\mathscr{H}(b\Omega)$ 为光滑全纯函数边

---

* 本文译自Proceedings of Symposia in Pure Math., 30 (1977).

界值的闭包[4]。再设 H_b: $L_2(b\Omega)\to\mathscr{H}(b\Omega)$是正交投影，$\widetilde{H}_b$: $L_2(b\Omega)\to\mathscr{H}(\Omega)$ (这里$\mathscr{H}(\Omega)$表示 Ω 上的全纯函数空间) 为如下定义的算子：把$\widetilde{H}_b f$取为边界值是 $H_b f$ 的唯一全纯函数。算子$\widetilde{H}_b$ 可以表示为[5]

$$\widetilde{H}_b f(z_1,z_2)=\int_{b\Omega} S(z_1,z_2,x,y,t)f(x,y,t)\,dxdydt, \tag{6}$$

其中

$$S(z_1,z_2,x,y,t)=(i(\overline{w}_2-z_2)\ -2\overline{w}_1 z_1)^{-2}/\pi^2, \tag{7}$$

而 $w_1=z, w_2=t+i|z|^2$。可以看出：若$P\in\mathbf{R}^3$，则$\widetilde{H}_b(f)$可通过 P 解析延拓，当且仅当 $H_b(f)$ 靠近 P 时是实解析的。这一性质仅仅依赖于 f 在 P 的某一邻域的性质。

定理1. 给定 f，则在 $P\in\mathbf{R}^3$ 的邻域中方程（1）有解，当且仅当 $H_b(f)$在 P 点邻域中是实解析的。

我们在更为一般的条件下来证明定理 1 所给条件的必要性[6]。设 $\Omega\subset\mathbf{C}^n$为具有光滑边界的一个区域，即存在一实值函数 $r\in C^\infty(U)$，这里U是 $b\Omega$ 的一个邻域，使得在 $\Omega\cap U$ 内有 $r<0, dr\neq 0$；而在$\overline{\Omega}$的补集中 $r>0$。尽管很容易把这些结果应用到前面所讨论的非紧类型的域，但为简单起见，我们假设$\overline{\Omega}$是紧的。给定在 $b\Omega$ 上体积元 $d\sigma$，我们象上面那样定义空间 $L_2(b\Omega)$，$\mathscr{H}(b\Omega)$以及算子 H_b 和$\widetilde{H}_b$，并且把$\widetilde{H}_b$ 以Cauchy-Szegö 核 $\mathrm{S}(z,w)$表示为

$$\widetilde{H}_b f(z)=\int_{b\Omega}\mathrm{S}(z,w)f(w)\,d\sigma_w, \tag{8}$$

而S 是 $\Omega\times b\Omega$ 上的函数，对每一固定的 $w\in b\Omega$ 是全纯的。

我们要设 S 满足如下的条件：

解析性假设。若W为 $b\Omega$ 的开子集，则存在开集 $\Omega'\supset\overline{\Omega}-\overline{W}$使得函数 $S(z,w)$可连续延拓到 $\Omega'\times W$，并且当w 固定时对 z 是全纯的。

不幸的是并不存在一般的定理能够保证S 满足此假设。后面我们就会看到一个非常自然的猜想：S 要满足此假设仅当 r 是实解析的且 Ω 是强拟凸的。当然，如果S 可用明确的公式给出（如在［7］中），这一假设是很容易验证的。我们能给出一些条件，足以保证S满足下面较弱的假设。

可微性假设。若W是 $b\Omega$ 的任一开子集，则函数 $S(z,w)$可以连续延拓到$(\overline{\Omega}-\overline{W})\times W$，并且当 $w\in W$固定时属于 $C^\infty(\overline{\Omega}-\overline{W})$。

设 $P\in b\Omega$，A 是 P 的某一邻域 U内的向量场

$$A=\sum a_j\partial/\partial\overline{z}_j, \tag{9}$$

其中 $a_j\in C^\infty(U)$。我们假设

$$A(r)=0,\qquad 当\ r=0。 \tag{10}$$

这个假设的意思是，A 可限制在 $U\cap b\Omega$ 上的函数。我们把这一限制记为 A_b，它的形式伴随算子为 A_b^*（即$(A_b^*\ \nu,\omega)=(\nu,A_b\omega)$对一切$C_0^\infty(U\cap b\Omega)$ 中的 ν 和 ω 都成立）。

定理2. 若 S 满足解析性条件。如果 $f\in L_2(b\Omega)$，且存在P 的一个邻域U及U上的向量场A满足（9）和（10），并且有$u\in L_2(U\cap b\Omega)$使得

(11) $$A_b^* u = f \qquad \text{在 } U\cap b\Omega \text{ 上},$$
则$\widetilde{H}_b f$ 可通过 P 全纯延拓（即延拓到某个包含 P 为内点的域）.

证. 依解析性条件和(8)，我们有：如果 f 在 P 点的某一邻域中为零，则$\widetilde{H}_b f$ 可从 P 全纯延拓出去，所以如果 $\zeta\in C_0^\infty(U\cap b\Omega)$，且在 P 的某一邻域中有 $\zeta=1$，则$\widetilde{H}_b$)$f - A_b^{*1}$ (ζu))可以通过 P 全纯延拓. 只要注意到 $\widetilde{H}_b(f-A_b^*\ (\zeta u))=\widetilde{H}_b(f)$ （由于 $A_b^*\ (\zeta u)\perp$ $(b\Omega)$），就得要证的结论.

下述命题是定理和它的证明的直接推论.

推论. 若 f 是 Ω 中的全纯函数，不能从 P 全纯开拓，则（11）在 P 的邻域中无解.

推论. 若 r，f 和 $b\Omega$ 上的体积元在 P 的邻域中是解析的，则$\widetilde{H}_b f$ 可通过 P 解析开拓.

证. 命

$$A=\frac{\partial r}{\partial \bar z_2}\cdot\frac{\partial}{\partial \bar z_1}-\frac{\partial r}{\partial \bar z_1}\cdot\frac{\partial}{\partial \bar z_2},$$

则 A_b^* 的系数是解析的. 因此根据Cauchy-Kowalevsky定理，（11）有解.

推论. 对于由（2）所给定的区域，如果我们命 $A=\partial/\partial\bar z_1-2iz_1\partial/\partial\bar z_2$，则$A_b^*=L'$，因此定理可应用到（1）的可解性.

如果 Cauchy-Szegö 核仅满足可微性假设，则上面的证明给出下述结论.

推论. （11）的可解性可推出$\widetilde{H}_b(f)$能 C^∞ 地延拓到$\Omega\cap(U\cap b\Omega)$.

从以上几个结论容易看出：$H_b(f)$的解析性是（1）可解的必要条件，为了证明它的充分性，我们要简单介绍一下 $b\Omega$ 上导出的 Cauchy-Riemann 方程.

设$\mathscr{A}$表示$\overline{\Omega}$上的复值微分式空间（即它们的系数是 $C^\infty(\overline{\Omega})$的），通常我们有分解

(12) $$\mathscr{A}=\sum\mathscr{A}^{p,q}.$$

如［7］中那样，设 b 表示由那些在 $b\Omega$ 附近等于 r 或$\overline{\partial}r$ 的微分式所生成的理想，而$\widetilde{b}$是由r，$\partial\overline{r}$，∂r,$\partial\overline{r}r$ 所生成的理想. 我们命$b^{p,q}=b\cap\mathscr{A}^{p,q}$，$\widetilde{b}^{p,q}=\widetilde{b}\cap\mathscr{A}^{p,q}$. 可以看出

(13) $$\overline{\partial}b^{p,q}\subset b^{p,q+1},\ \text{且}\overline{\partial}\widetilde{b}^{p,q}\subset\widetilde{b}^{p,q+1}.$$

于是我们有

(14) $$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & b^{p,q+1} & \longrightarrow & \mathscr{A}^{p,q+1} & \longrightarrow & \mathscr{B}^{p,q+1} & \longrightarrow & 0\\
 & & \uparrow\overline{\partial} & & \uparrow\overline{\partial} & & \uparrow\overline{\partial_b} & & \\
0 & \longrightarrow & b^{p,q} & \longrightarrow & \mathscr{A}^{p,q} & \longrightarrow & \mathscr{B}^{p,q} & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

其中$\mathscr{B}^{p,q}$是$\mathscr{A}^{p,q}$对$b^{p,q}$的商，$\overline{\partial}_b$由于有（13）是可以定义的，类似地我们可以定义$\overline{\partial}_b$：$\widetilde{\mathscr{B}}^{p,q}\longrightarrow\widetilde{\mathscr{B}}^{p,q+1}$. 并且注意到$\mathscr{B}^{0,q}=\widetilde{\mathscr{B}}^{0,q}$，在这种情形$\overline{\partial}_b$相同.

设 $T^{1,0}(b\Omega)=CT(b\Omega)\cap T^{1,0}$，则 $A\in T_P^{1,0}(b\Omega)$，$P\in b\Omega$，当且仅当

$$A=\sum a_j\frac{\partial}{\partial z_j}\quad\text{和}\quad\sum a_j\left(\frac{\partial r}{\partial z_j}\right)_P=0.$$

类似地我们取 $T^{0,1}(b\Omega)=CT(b\Omega)\cap T^{0,1}$，可以看出 $T^{1,0}(b\Omega)$和 $T^{0,1}(b\Omega)$相应是$\mathscr{B}^{1,0}$和$\mathscr{B}^{0,1}$的对偶 $CT(\Omega)$ 上的 Hermitian 内积. 给定 $b\Omega$ 上体积元，我们就有 $\mathscr{B}^{p,q}$

上的 L_2-內积，定义为

(15) $$(\varphi,\psi)=\int_{b\Omega}\langle\varphi,\psi\rangle\, d\sigma,$$

其中$\langle\varphi,\psi\rangle$表示 φ 和 ψ 在 $b\Omega$ 上每点的內积. 用 ϑ_b 表示$\bar\partial_b$的形式伴随算子，我们可定义

(16) $$(\vartheta_b\varphi,\psi)=(\varphi,\ \bar\partial_b\psi),$$

则 $\vartheta_b:\mathscr{B}^{p,q}\longrightarrow\mathscr{B}^{p,q-1}$。命

(17) $$\square_b=\bar\partial_b\vartheta_b+\vartheta_b\bar\partial_b,$$

(18) $$\mathrm{Dom}(\square_b^{p,q})=\{\varphi\in L_2{}^{p,q}(b\Omega),\ \varphi\text{ 在}\square_b\text{的定义域中}\},$$

其中$L_2^{p,q}(b\Omega)$表示$\mathscr{B}^{p,q}$的补集。

(19) $$\mathscr{H}_b^{p,q}=\{\varphi\in\mathrm{Dom}(\square_b^{p,q})\mid\square_b^{p,q}\varphi=0\}.$$

可以指出（当 $b\Omega$ 紧），$\varphi\in\mathrm{Dom}(\square_b)$ 等价于$\varphi\in\mathrm{Dom}(\bar\partial_b)\cap\mathrm{Dom}(\vartheta_b)$，$\bar\partial_b\varphi\in\mathrm{Dom}(\vartheta_b)$ 和$\vartheta_b\varphi\in\mathrm{Dom}(\bar\partial_b)$。再者，如果仍用 ϑ_b 表示上面定义的 ϑ_b 的闭包，我们有

(20) $$(\bar\partial_b)^*=\vartheta_b,$$

这里$\bar\partial_b^*$表示$\bar\partial_b$ 的 L_2 伴随。

引理.

$$\mathscr{H}_b^{p,q}=\{\varphi\in\mathrm{Dom}(\bar\partial_b)\cap\mathrm{Dom}(\vartheta_b)\cap L_2^{p,q}(b\Omega)\ |\bar\partial_b\varphi=\vartheta_b\varphi=0\}.$$

证. 从上面的注解可以推出，对 $\varphi\in\mathrm{Dom}(\square_b^{p,q})$，我们有

(21) $$(\square_b^{p,q}\varphi,\varphi)=\|\bar\partial_b\varphi\|^2+\|\vartheta_b\varphi\|^2,$$

从此就很容易得出我们的结果。

可以看出，从这一引理可推出 $\mathscr{H}_b(\Omega)=\mathscr{H}_b^{0,0}$。

可以看出，对函数$\square_b\nu=\vartheta_b\bar\partial_b\nu$ 而言，用定理 2 证明中同样的论证可得下述结果。

定理3. 若 Ω 上 Cauchy-Szegö 核满足解析性假设，如果 $f\in L_2(b\Omega)$，且在 $P\in b\Omega$ 的某一邻域 U中存在 $\nu\in L_2(U\cap b\Omega)$使得

(22) $$\square_b\nu=f,$$

则$\widetilde{H}_bf$ 可通过 P 全纯延拓。

更进一步，如果我们能大范围的解方程 (22)（对于 f 正交于$\mathscr{H}_b$)，则我们也可得到上述命题的逆。

定理4. 如果作用于函数的$\square_b$ 的L_2 闭包的值域是闭的，再加上解析性假设成立，此外，若 r 和 $d\sigma$ 在 $P\in b\Omega$ 的邻域中是解析的，则 (22) 在 P的邻域中的局部可解性等价于$\widetilde{\mathscr{H}}_bf$的全纯延拓性。

证. 仍用$\square_b$ 表示$\square_b$ 的闭包，我们知道$\square_b$ 的闭值域就意味着存在一有界自伴算子 N_b，N_b: $L_2(b\Omega)\ominus\mathscr{H}(b\Omega)\to\mathrm{Dom}(\square^{0,0})\ominus\mathscr{H}(b\Omega)$，这里 $A\ominus B$ 表示A内的B的正交补；N_b定义为

(23) $$\square_bN_bg=g.$$

我们命 $N_b h=0$，对一切 $h\in\mathscr{H}(b\Omega)$，从而把 N_b 扩充到 $L_2(b\Omega)$，这样我们得到正交分解

$$f=\Box_b(N_b f)+H_b f. \tag{24}$$

如果 $H_b f$ 在 P 的一邻域中解析，则依 Cauchy-Kawalevsky 定理，存在 P 的邻域中定义的函数 w，使得 $\Box_b w=H_b f$，证明完毕。

回到 Lewy 方程，对（2）给定的区域 Ω，我们有

$$\Box_b=L\overline{L}. \tag{25}$$

此时算子 N_b 可明确算出，它就给出（22）的一个解，因此（1）对于任何 $\widetilde{H}_b f$ 都可以通过 P 全纯延拓。

计算 N_b 要用这样的事实：$b\Omega$ 在下述运算下成群（Heisenberg 群）.

$$(z,t)\cdot(z',t')=(z+z',\ t+t'+\mathrm{Im}(z\cdot\bar{z}')). \tag{26}$$

取

$$\Phi=\frac{1}{2\pi^2(|z|^2-it)}\log\left(\frac{|z|^2-it}{|z|^2+it}\right), \tag{27}$$

我们有

$$N_b f=f*\Phi, \tag{28}$$

其中 $*$ 表示群的卷积。把定理 2 和定理 4 合在一起，再加上上面这些就得到定理 1. [8]中研究了形如（28）的齐性算子的正则性质，而这给出了（1）的解的正则性。

Ⅱ

我们要谈到的内容之一是所谓 $\overline{\partial}$ 问题。它叙述如下．设 α 是 (0，1) 形式，适合 $\overline{\partial}\alpha=0$. 问题是要找一个函数 u 满足

$$\overline{\partial}u=\alpha. \tag{1}$$

而且要研究 u 对 α 的依赖关系．我们主要强调的是边界上的正则性质．这里的主要宗旨是：我们的兴趣集中于具有某种性质的全纯函数的存在性．这就要熟练地运用偏微分方程 (PDE) 技巧以 α 来控制 u．为了解释这种想法，我们用（1）式来证明 Hartog's 定理[9, 10].

定理1. 若 $\alpha\in\Lambda^{1,0}(\mathbf{C}^n)$，$\overline{\partial}\alpha=0$. 如果 α 有紧支集且 $n\geqslant 2$，则存在（1）的具有紧支集的解。

事实上，u 可用经典的单变量的公式表示为

$$u(z_1,\cdots,z_n)=\frac{1}{2\pi i}\iint_c\frac{a_1(\tau,z_2,\cdots,z_n)}{\tau-z_1}d\tau\wedge d\overline{\tau}. \tag{2}$$

这就很容易看出，由于 u 在 a_1 的支集外是全纯的，且当 $|z_2|$ 充分大时 u 为零，故 u 具有紧支集（参看[11]有关对此定理和下述推论的详细讨论）.

推论 (Hartog's 定理). 若 $\Omega\subset\mathbf{C}^n$，$n\geqslant 2$，如果 h 是定义在 Ω 上的全纯函数，则 h 可开拓成 Ω 和 Ω 补集的有界分支的并上的全纯函数。

证. 设 U 是 Ω 补集的有界分支的闭包的邻域，且 U 与 Ω 补集的非有界分支不相交；我们还要选取 U 使得它的补是无界的、连通的。设 $\rho\in C^{\infty}(\mathbf{C})$，在 Ω 补集的有界分支上有 $\rho=0$，而在 U 外有 $\rho=1$。设 $\alpha=\overline{\partial}(\rho h)=h\,\overline{\partial}\rho$；显然 α 有紧支集，因此存在具有紧支集的 u 满足（1）。由于函数 u 在 U 补集内全纯，且它有紧支集，又因为 U 的补是无界连通的，我们可得：在 U 的补上有 $u=0$。因此函数 $\rho h-u$ 是定义在 Ω 和补集的有界分支的并上，它是全纯的且在 U 外等于 h。这就是所要找的开拓。

Hartog's 定理指明了单复变和多复变的基本差别。在多复变，存在区域的边界点，使所有的全纯函数都能从这些点开拓出去，这一事实引出了下述的 Levi 问题。

局部 Levi 问题。$\Omega\subset\mathbf{C}^n$，给定 $P\in b\Omega$。是否存在 P 的邻域 U 和 $U\cap\Omega$ 上的全纯函数 h，使得 h 不能从 P 开拓出去？

整体的 Levi 问题。$\Omega\subset\mathbf{C}^n$，给定 $P\in b\Omega$，是否存在 Ω 上的全纯函数不能从 P 开拓出去？

注意到：如果 Ω 是凸的，则 Levi 问题有简单的解。即，取 w 为一线性全纯函数使得 $\mathrm{Re}(w)=0$ 定义一过 P 的支撑超平面；则 $h=1/w$ 就给出了这个解。完全类似地，如果存在 P 的邻域 U 使得 $U\cap\Omega$ 是凸的，则局部 Levi 问题也有解。

设 $x_j=\mathrm{Re}(z_j)$，$x_{j+n}=\mathrm{Im}(z_j)$，$j=1,2,\cdots,n$。考虑如下给出的向量 $X\in T_P(b\Omega)$，

$$X=\sum_{1}^{2n}a_k\frac{\partial}{\partial x_k},\quad a_k\in\mathbf{R}. \tag{3}$$

和

$$[X(r)]_P=\sum_{1}^{2n}a_k\left[\frac{\partial r}{\partial x_k}\right]_P=0, \tag{4}$$

这里 r 通常为定义 $b\Omega$ 的函数。在 P 点凸性的微分几何条件可用下式描述，

$$[X^2(r)]_P=\sum_{k,l}a_ka_l\left[\frac{\partial^2 r}{\partial x_k\partial x_l}\right]_P\geqslant 0, \tag{5}$$

对一切满足（3）和（4）的 X 都成立。

条件（5）在全纯变换下不是不变的。可是它的一"部分"是不变的。为说清楚这一点，我们表示为复坐标。

X 可写为

$$X=\sum_{1}^{n}b_j\frac{\partial}{\partial z_j}+\sum_{1}^{n}\overline{b_j}\frac{\partial}{\partial\overline{z}_j}, \tag{6}$$

其中 $b_j=a_j+ia_{j+n}$，$j=1,2,\cdots,n$。这样（4）式变为

$$\mathrm{Re}\left(\sum b_j\left(\frac{\partial r}{\partial z_j}\right)_P\right)=0. \tag{7}$$

而（5）式变为

$$\sum b_j\overline{b}_k\left[\frac{\partial^2 r}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}\right]_P+\mathrm{Re}\left(\sum b_jb_k\left[\frac{\partial^2 r}{\partial z_j\partial z_k}\right]_P\right)\geqslant 0. \tag{8}$$

（7）式和（8）式是对 n 重数组 $(b_1,\cdots,b_n)$ 的条件，也可等价于对向量 $\sum b_j\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right)\in T_P^{1,0}$ 的条件。由（7）式定义的 $T_P^{1,0}$ 的子集 Q 在全纯变换下并不是不变的。显然，Q 的最大不变

子集是下述条件给出的子空间

$$(9)\qquad \sum b_j\left(\frac{\partial r}{\partial z_j}\right)_P=0\;;$$

这个子空间，如上节那样，记为 $T_P^{1,0}(b\Omega)$。我们希望(8)式对 $T_P^{1,0}(b\Omega)$ 中所有向量都成立。可以看出：如果一向量乘以 i 倍，那么(8)式的第一项并不改变，而第二项却变号。因此，要使(8)式对所有的 $\sum b_j(\partial/\partial z_j)\in T_P^{1,0}(b\Omega)$ 都成立，这等价于下面的条件

$$(10)\qquad \sum b_j\overline{b_k}\left[\frac{\partial^2 r}{\partial z_j\partial \overline{z_k}}\right]_P\geqslant 0\,,$$

其中 b_j 要满足 (9) 式。

这就引出了以下的标准的定义。

定义. $T_P^{1,0}(\Omega)$ 上的 Levi 形式是个二次型，定义为

$$(11)\qquad \mathscr{L}(L,\overline{L})=<\partial\overline{\partial}r,\quad L\wedge\overline{L}>_P,$$

这里 $<,>_P$ 表示 P 点的共变张量和逆变张量间的缩并。如果形式 $\mathscr{L}$ 在 P 点是半正定的，我们就称 Ω 在 P 点是拟凸的；如果它是正定的，我们就称 Ω 在 P 点是强拟凸的。我们称 Ω 是拟凸的（强拟凸的），如果拟凸性（强拟凸性）在每点 $P\in b\Omega$ 都成立。

若 Ω 在 P 点是强拟凸的，则如下定义的函数

$$(12)\qquad R=e^{\lambda r}-1,$$

当 λ 充分大时，在 P 的邻域内是强多重次调和的。所谓强多重次调和通常是说矩阵 $R_{z_i\overline{z}_j}$ 是正定的。

下述引理解决了强拟凸域的局部 Levi 问题。

引理. 若 Ω 在 $P\in b\Omega$ 是强拟凸的，则存在 P 的邻域 U 和 U 上的全纯函数 h，使得 $h(P)=0$，而对一切 $Q\in\overline{\Omega}\cap(U-\{P\})$ 都有 $h(Q)\neq 0$。

证. 实际上 h 可取为二次多项式。它可用 R 的 Taylor 展式定义为

$$(13)\qquad h=\sum R_{z_i}(P)(z_i-z_i(P))+\sum R_{z_iz_j}(P)(z_i-z_i(P)\cdot(z_j-z_j(P))\,,$$

这样我们可得

$$(14)\qquad R=\mathrm{Re}(h)+\sum R_{z_i\overline{z}_j}(z_i-z_i(P))(\overline{z}_j-\overline{z}_j(P))+O(|z-z(P)|^3).$$

注意到在 P 附近函数 R 在 $\mathrm{Re}(h)$ 的零点上取值为正，就得所要的结论。

这个结果是古典的，它可一直追到 E. E. Levi 本人。正如下述例子所说明的，这个结果并不能直接推广到拟凸域(非强拟凸)。

设 r 是 $\mathbf{C}^2$ 中给定的函数

$$(15)\qquad r=\mathrm{Re}\,w+|z|^8+(15/7)|z|^2\mathrm{Re}(z^6)+|z|^2|w|^2,$$

〔12〕中证明了

定理. 若 h 是定义在 $(0,0)\in\mathbf{C}^2$ 的某一邻域 U 内的全纯函数，适合 $h(0,0)=0$。则存在两点 (z_1,w_1)，$(z_2,w_2)\in U$ 使得 $h(z_i,w_i)=0$，$i=1,2$；而有 $r(z_1,w_1)>0$，$r(z_2,w_2)<0$，这里 r 是由(15)式给定的。

现在转到整体 Levi 问题。我们有下面的结果。

定理。 若$\Omega\subset\mathbf{C}^n$在点$P\in b\Omega$是强拟凸的，且$\overline{\partial}$在$L_2(\Omega)$的闭包的值域是闭的。则存在$\Omega$上的全纯函数$g$，它不能通过$P$延拓（即不存在$g$的全纯开拓，其定义域是包含$P$的）。

证。 设h是(13)式定义的函数，U是P的一个小邻域，在$U\cap\overline{\Omega}-\{P\}$上有$\mathrm{Re}(h)<0$；且设$\rho\in C_0^\infty(U)$，在$P$的邻域内$\rho=1$。定义(0，1)形式$\alpha$

(16) $$\alpha=\overline{\partial}(\rho/h^N)=\overline{\partial}\rho/h^N,$$

其中N使h^N限制在$V\cap\overline{\Omega}$上都不是平方可积的，这里V为P的任一邻域。显然α在$\overline{\partial}$值域的闭包内，这是由于当$\varepsilon\to 0$时，$(h-\varepsilon)^{-N}$在$\overline{\partial}\rho$的支集上趋于h^{-N}。因为值域是闭的，故存在$u\in L_2(\Omega)$，适合$\overline{\partial}u=\alpha$。此处我们意指$u$在$\overline{\partial}$闭包的定义域内，而且（作为一种共用）我们仍用$\overline{\partial}$表示$\overline{\partial}$的闭包。这样，所求的函数$g$为

(17) $$g=\rho/h^N-u.$$

显然，g是全纯的，而g在P的任一邻域内都不是平方可积的。

下述命题说明，一般说来，并不存在对于(0，1)形式的某种条件足以保证满足$\overline{\partial}u=\alpha$的$u$存在。

命题。 如果$n>1$，则存在区域$\Omega\subset\mathbf{C}^n$，$\overline{\partial}$在其上没有闭值域。

证。 设$\Omega\subset\mathbf{C}^n$是一域，存在$P\in b\Omega$使得 Levi 形式在$P$是正定的，且$P$位于$\Omega$补集的有界分支内。如果$\overline{\partial}$的值域是闭的，则我们可找到一在$\Omega$上全纯的函数，它不能通过$P$开拓。这与 Hartog's 定理矛盾。

下述定理给出$\overline{\partial}$值域的闭性的判别准则，它导致$\overline{\partial}$-Neumann 问题。

定理。 给定A，B，C是 Hilbert 空间，且$T:A\to B$，$S:B\to C$是稠定的闭算子适合$ST=0$。设

(18) $$\begin{aligned}&\mathscr{D}=\mathrm{Dom}(T^*)\cap\mathrm{Dom}(S),\\&\mathscr{H}=\mathcal{N}(T^*)\cap\mathcal{N}(S),\\&\mathscr{I}=\{\varphi\in\mathscr{D}\mid\varphi\perp\mathscr{H}\},\end{aligned}$$

其中$\mathrm{Dom}(T)$表示T的定义域，$\mathcal{N}(T)$表示T的零空间，T^*表示T的 Hilbert 空间伴随算子，它的定义域为

(19) $$\mathrm{Dom}(T^*)=\{\varphi\in B\mid 存在\ c>0,对一切\ \psi\in\mathrm{Dom}(T)都有\ |(\varphi,T\psi)_B|\leqslant\leqslant c\|\psi\|_A\}.$$

我们假设$\mathscr{D}$在B中是稠密的，则下列结论等价：

(i) T和S的值域是闭的。

(ii) T^*和S的值域是闭的。

(iii) 存在常数c，使得对一切$\varphi\in\mathscr{I}$都有

(20) $$\|\varphi\|_B^2\leqslant c(\|T^*\varphi\|_A^2+\|S\varphi\|_C^2).$$

(iv) 设L为B内算子，定义为

(21) $$L=TT^*+S^*S,$$

适合 $\mathrm{Dom}(L)=\{\varphi\in\mathscr{Q}|\ T^*\varphi\in\mathrm{Dom}(T)$，和 $S\varphi\in\mathrm{Dom}(S^*)\}$，则算子 L 有闭值域。

这些定理的证明见[13]。

通过(21)式所定义的算子来研究 $\overline{\partial}$ 的性质，就是所谓 $\overline{\partial}$—Neumann问题。对 $\mathbf{C}^n$ 中的域，算子 L 是 Laplace 算子，并且定义域 $\mathrm{Dom}(L)$ 是由边界条件描述。这一点，我们将在下一节讨论。现在我们指出（iv）的几个推论，以结束本节。

首先，如果 L 的值域是闭的，则存在唯一的有界自伴算子 $N:B\to B$，N 的值域等于 L 的定义域。而且我们有

$$LN=I-H\quad \text{和}\ HN=NH=0,\tag{22}$$

这里 $H:B\to B$ 是 B 到 $\mathscr{H}$ 上的正交投影。

显然，(22)式可推出唯一性。我们定义 N 的方式完全类似于第一节中 N_b 的定义。我们可知，(22)式是正交分解，即对任意 $\varphi\in B$，我们有

$$\varphi=TT^*N\varphi+S^*SN\varphi+H\varphi.\tag{23}$$

命题. 如果存在有界自伴算子 $N:B\to B$ 满足(22)，则给定 $\alpha\in B$，下列条件是等价的：

（i）存在 $\psi\in\mathrm{Dom}(T)$，满足 $T\psi=\alpha$，

（ii）$S\alpha=0$，且 α 正交于 $\mathscr{H}$.

证.（i）⇒（ii）是显然的。假设 α 满足（ii），我们有

$$\alpha=TT^*N\alpha+S^*SN\alpha,\tag{24}$$

用 S 作用，我们有

$$SS^*SN\alpha=0.\tag{25}$$

再对 $SN\alpha$ 做内积，我们得

$$(SS^*SN\alpha,\ SN\alpha)=\|S^*SN\alpha\|^2=0,\tag{26}$$

因此，

$$\alpha=T(T^*N\alpha).\tag{27}$$

于是，我们可命 $\psi=T^*N\alpha$。这就是 $T\psi=\alpha$ 的唯一解，它正交于 $\mathscr{H}$.

上面的计算说明：只要 $S\alpha=0$，就有 $SN\alpha=0$。因此，特别

$$SNT=0.\tag{28}$$

由此，我们可导出到 T 的零空间的正交投影的一个公式，以 $H_T:A\to A$ 表示到 $\mathcal{N}(T)$ 上的正交投影。我们有

命题. 设上一定理的(iv)成立，我们有

$$H_T=I-T^*NT.\tag{29}$$

证. 命 $R=I-T^*NT$。可以看出：对任意 $\psi\in\mathcal{N}(T)$，有 $R\psi=\psi$。因此 R 是自伴的。所以我们只要说明 $TR=0$。依(23)式我们有

$$TR=T-TT^*NT=T-T+S^*SNT+HNT=0,$$

最后两项为零是由(28)和(22)保证的。

(27) 式给出的解以及公式(29)，是这一理论有众多应用的出发点。当T为作用于函数的$\bar{\partial}$的闭包时，只要对N有好的控制，(29)是个非常有用的公式。特别要提到的是，它给出了有关 Bergman 核函数的一些信息。参看[26]和[27]。

Ⅲ

现在，我们的目的，是在上节所描述的L_2理论的框架内，来研究作用于函数或作用于(0,1)-形式的$\bar{\partial}$算子。设$\mathscr{A}$表示$\bar{\Omega}$上的复值C^∞形式，如同Ⅰ中(12)式表示的，$\mathscr{A}$是双阶的，若φ、$\psi\in\mathscr{A}^{p,q}$，我们定义L_2-内积(φ,ψ)为

$$(1)\qquad (\varphi,\psi)=\sum\int_\Omega \varphi_{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q}\bar{\psi}_{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q}dv.$$

我们用$\widetilde{\mathscr{A}}^{p,q}$表示$\mathscr{A}^{p,q}$的完备化所得的 Hilbert 空间。我们把前面的讨论用于$A=\widetilde{\mathscr{A}}^{0,0}$，$B=\widetilde{\mathscr{A}}^{0,1}$，$C=\widetilde{\mathscr{A}}^{0,2}$。并且$T$和$S$分别是$\bar{\partial}$：$\widetilde{\mathscr{A}}^{0,0}\to\widetilde{\mathscr{A}}^{0,1}$和$\bar{\partial}$：$\widetilde{\mathscr{A}}^{0,1}\to\widetilde{\mathscr{A}}^{0,2}$的闭包。我们要做的第一件事是确定$\mathscr{Q}$的光滑元素，即在

$$(2)\qquad \dot{\mathscr{Q}}=\mathscr{Q}\cap\mathscr{A}^{0,1}=\mathrm{Dom}\ (\bar{\partial}^*)\cap\mathscr{A}^{0,1}$$

中的元素，其中$\mathscr{Q}$是上一节(17)式定义的。而且这里我们采用通用的符号$\bar{\partial}$和$\bar{\partial}^*$分别表示$\bar{\partial}$的闭包和伴随。假设$\varphi\in\mathscr{A}^{0,1}$，$u\in\mathscr{A}^{0,0}$，则利用分部积分得到

$$(3)\qquad \begin{aligned}(\varphi,\ \bar{\partial}u)&=\sum(\varphi_j,u_{\bar{z}_j})\\&=-(\sum\varphi_{j z_j},u)+\int_{b\Omega}r_{z_j}\ \varphi_j\bar{u}\,ds.\end{aligned}$$

回想一下$\varphi\in\mathrm{Dom}(\bar{\partial}^*)$的意思，是把$u$对应到$(\varphi,\bar{\partial}u)$的泛函是有界的。这样(3)式可以推出$\varphi\in\dot{\mathscr{Q}}$，当且仅当

$$(4)\qquad \sum r_{z_j}\varphi_j=0\qquad 在\ b\Omega\ 上.$$

再者，定义$\bar{\partial}$的形式伴随ϑ：$\mathscr{A}^{0,1}\to\mathscr{A}^{0,0}$为

$$(5)\qquad \vartheta\varphi=-\sum\varphi_j z_j.$$

为研究拟凸域(非强拟凸域)上的$\bar{\partial}$-Neuman 问题，我们要用 Carleman 型的权函数.这是 Hörmander 在[14]中引入的。在 Hilbert 空间$\mathscr{A}^{p,q}$对每一个$t\geqslant0$我们都要引入内积，记为$(\ ,\ )_{(t)}$，定义为

$$(6)\qquad (\varphi,\ \psi)_{(t)}=(\varphi,\quad e^{-t|z|^2}\psi),$$

其中 $|z|^2=\sum_1^n|z_j|^2$。命

$$(7)\qquad \vartheta\varphi=e^{t|z|^2}\vartheta(e^{-t|z|^2}\varphi),$$

我们可得(3)式的推广

(8) $$(\varphi,\ \bar\partial u)_{(t)}=(\vartheta_t\varphi,u)_{(t)}+\int_{b\Omega}\sum r_{z_j}\varphi_j\bar{u}e^{-t|z|^2}ds,$$

这样 $\mathcal{N}(\bar\partial_t{}^*)\cap\mathcal{A}^{0,1}$ 不依赖于 t，并由（4）式给定。

[14]中证明了下述命题。

命题。若 Ω 是拟凸的，则存在常数 $c>0$，使得对所有 $\varphi\in\dot{\mathcal{Q}}$ 和一切 $t\geqslant 0$ 都有

(9) $$tc\|\varphi\|^2_{(t)}+\|\varphi_{i\bar z_j}\|^2_{(t)}+\sum\int_{b\Omega}r_{z_i\bar z_j}\varphi_i\bar\varphi_j e^{-t|z|^2}ds$$
$$\leqslant\|\bar\partial\varphi\|^2_{(t)}+\|\vartheta_t\varphi\|^2_{(t)}.$$

特别可知，任何 $t>0$，上节的不等式(19)对一切 $\mathcal{Q}_t$ 中的形式都成立。然而这必须对一切 $\mathcal{Q}_t$ 中元素，而不能仅对 $\dot{\mathcal{Q}}$ 中的一个元素来建立(19)。要做到这一点，只要指明 $\dot{\mathcal{Q}}$ 对于(9)式右边所定义的范数而言在 $\mathcal{Q}_t$ 中稠密。稠密性的证明要用到光滑化算子，参看[14]。可以看出，（9）式就包含了 $\mathcal{H}^{0,1}_t=0$（这里 $\mathcal{H}^{0,1}_t$ 定义为 $\mathcal{H}^{0,1}_t=\mathcal{N}(\bar\partial)\cap\mathcal{N}(\bar\partial_t{}^*)\cap\overline{\mathcal{A}}^{0,1}$），依上节结果，这再次说明了 $\bar\partial$ 的 L_2-上同调是零。

现假设 Ω 是有界域，边界是光滑的，Ω 是包含在某一复流形内的。此时 $\bar\partial$ 上同调未必是零，在适当假定之下，我们可以证明类似（9）式的估计，这可推出上同调是有限维的。所附加的假设，是存在一个扮演 $|z|^2$ 角色的函数。

命题．设 X 为一复流形，Ω 为 X 内的有界拟凸域，并且在 X 上存在一个非负函数 f，它在 $b\Omega$ 的邻域 U 内是强多重次调和的，这样类似于（6）我们对每一个 $t\geqslant 0$ 定义内积为

(10) $$(\varphi,\ \psi)_{(t)}=(\varphi,e^{-tf}\psi),$$

这里(,)表示相对于 Ω 上某一固定的 Hermitian 度量所导出的内积。这时，给定 $\zeta\in C_0^\infty(\Omega)$，则存在不依赖于 t 的正常数 c 和 c' 使得对一切 $\varphi\in\dot{\mathcal{Q}}$ 和 $t\geqslant 0$，有

(11) $$tc\|\zeta\varphi\|^2_{(t)}+\sum\|\varphi_{i\bar z_j}\|^2_{(t)}+\sum\int_{b\Omega}r_{z_i\bar z_j}\varphi_i\bar\varphi_j e^{-tf}ds$$
$$\leqslant\|\bar\partial\varphi\|^2_{(t)}+\|\bar\partial_t^*\varphi\|^2_{(t)}+c'\|\varphi\|^2_{(t)}.$$

并且，若 f 是 $\overline{\Omega}$ 上的强多重次调和函数，则 ζ 可以取为在 Ω 上恒等于 1。

这个不等式的证明非常类似于（9）式的证明，[14]中也已给出。可以看出，若 t 充分大且在 $b\Omega$ 附近 $\zeta=1$，我们有

(12) $$\|\zeta\varphi\|^2_{(t)}\leqslant\text{常数}\cdot(\|\bar\partial\varphi\|^2_{(t)}+\|\bar\partial_t^*\varphi\|^2_{(t)}+\|K\varphi\|^2_{(t)}),$$

其中 K 是一紧算子。这一点可从以下事实推得：算子 $(\bar\partial,\ \bar\partial_t^*)$ 在内部是椭圆的，因此在 Ω 的紧子集上 φ 的 L_2-范数可由算子作用于 φ 的 L_2-范数加上 φ 的任何负的 Sobolev 范数所控制(φ 的 Sobolev 范数可用紧算子的范数表示)。这就说明 $\mathcal{H}^{0,1}_t$ 是有限维的，并且上节估计式（19）是成立的。当然，若 f 在整个 $\overline{\Omega}$ 上强多重次调和，则对充分大的 t 有 $\mathcal{H}^{0,1}_t=0$。

Hörmander 在[11]中应用在边界上趋于无穷的权函数，这就极大地简化了存在性定理的证明。然而在我们看来，最有兴趣的问题之一是边界上的正则性。为研究这一点，我们需要光滑的权函数。后面两节我们要讨论正则性。我们现在说明上面的存在定理如何用来证明 Newlander-Nirenberg 定理，以此来结束本节。

定义。 设X为一微分流形，以$CT(X)$表示复切向量丛，用$CT(X)$的子丛给出X上的概复结构，记为$T^{1,0}(X)$，它满足下列条件：

(a) $T^{1,0}(X)\cap\overline{T^{1,0}(X)}=\{0\}$；

(b) $CT(X)=T^{1,0}(X)+\overline{T^{1,0}(X)}$。

我们称$T^{1,0}(X)$所给出的概复结构是可积的，如果任意局部的向量场V，W取值在$T^{1,0}(X)$中，则$[V,W]=VW-WV$也在$T^{1,0}(X)$中取值。

若X为复流形，复结构就定义了唯一的基础(Underlying)概复结构：在$P\in X$命$T_P^{1,0}(X)$为那样一些切向量L，他们对一切h都适合$L(\bar{h})=0$，这里h是P点的全纯函数芽。显然，这个结构是可积的。

定理 (Newlander-Nirenberg)。若X有由$T^{1,0}(X)$给定的概复结构，则X就有复结构，共基础概复结构由$T^{1,0}(X)$给出。

证明大意：命$T^{0,1}(X)=\overline{T^{1,0}(X)}$。只要证明对每一$P\in X$都有邻域$U$和$U$上的函数$z_1,z_2,\cdots,z_n$。使得对一切$L\in T_Q^{0,1}(X)$，$Q\in U$都有$L(z_j)=0$，并且$(dz_1)_P,\cdots(dz_n)_P$是线性无关的。

条件（b）中的分解，就导出了X上的复值外微分式的直接分解，记为

$$\Lambda(X)=\sum\Lambda^{p,q}(X),\tag{13}$$

我们把相对应的投影表示为

$$\underset{p,q}{\Pi}:\Lambda(X)\to\Lambda^{p,q}(X).\tag{14}$$

我们定义算子$\bar{\partial}$：$\Lambda^{p,q}(X)\to\Lambda^{p,q+1}(X)$为

$$\bar{\partial}=\underset{p,q+1}{\Pi}d.\tag{15}$$

容易验证，X上的概复结构是可积的，当且仅当对每一函数f的芽有

$$\bar{\partial}^2f=0.\tag{16}$$

这样，若Ω是X上的域，我们可定义Levi形式为复的形式（见上节(11)式）。于是，在前面的同样假设下，估计式(12)成立。

给定$P\in X$，我们可以找到n个复值函数w_1，$\cdots w_n$，使得$\{\mathrm{Re}(w_j),\ \mathrm{Im}(w_j)\}$是$P$的邻域中的坐标系，并有

$$w_j(P)=0.\tag{17}$$

于是，我们有

$$\bar{\partial}f=\sum\left(a_k^j\frac{\partial f}{\partial w_j}+\tilde{a}_k^j\frac{\partial f}{\partial\bar{w}_j}\right)dw_k+\sum\left(b_k^j\frac{\partial f}{\partial w_j}+\tilde{b}_k^j\frac{\partial f}{\partial\bar{w}_j}\right)d\bar{\bar{w}}_k.\tag{18}$$

对每个小的ε，我们在球$B=\{z\in\mathbf{C}^n,\ |z|<1\}$上定义概复结构为

$$\bar{\partial}_\varepsilon f(z)=\sum\left(a_k^j(\varepsilon z)\frac{\partial f}{\partial z_j}+\tilde{a}_k^j(\varepsilon z)\frac{\partial f}{\partial\bar{z}_j}\right)dz_k+\tag{19}$$

$$+\sum\left(b_k^j(\varepsilon z)\frac{\partial f}{\partial z_j}+\widetilde{b_k^j}(\varepsilon z)\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}\right)d\bar{z}_k.$$

注意，当 $\varepsilon=0$，这一概复结构和 $\mathbf{C}^n$ 的相同。

要完成这一证明，只要找 $0\in\mathbf{C}^n$ 的邻域中定义的 $u_1,\cdots,u_n$ 适合 $du_1,\cdots,du_n$ 是无关的，使得对某些确定的 ε 有 $\bar{\partial}_\varepsilon u_j=0$，$j=1,\cdots,n$。我们取 ε 充分小，使得 $\bar{\partial}_\varepsilon\partial_\varepsilon(|z|^2)$ 是正定的。应用(11)式，我们看到若 ε 充分小，则 (11) 式中的常数与 ε 无关。然后取 t 充分大，则作用在(0，1)形式上的算子 $N_{t,\varepsilon}$，有平凡的零空间而且光滑依赖于 ε。我们定义

$$u_{j,\varepsilon}=H_{t,\varepsilon}(z_j)=z_j-\mathcal{Q}_\varepsilon N_{t,\varepsilon}\bar{\partial}_\varepsilon z_j, \tag{20}$$

则 $\partial_\varepsilon u_j=0$。而且根据内椭圆性，我们对 $\zeta\in C_0^\infty(B)$ 有

$$\|\zeta N_{t,\varepsilon}\alpha\|_{k+2}\leqslant C_k\|\alpha\|_k. \tag{21}$$

把这用于 $\partial_\varepsilon z_j$，并且注意到对所有 m 我们有 $\|\bar{\partial}_\varepsilon z_j\|_k=O(\varepsilon^m)$，因此 (19) 式最后一项是小的，它的一阶导数也是小的，所以 $du_{1,\varepsilon},\cdots du_{n,\varepsilon}$ 是无关的。这就完成了证明。

（未完待续）

〔**石赫译，钟家庆校**〕

代 数 拓 扑 学*

Samuel Eilenberg

基 本 概 念

代数拓扑学是一个生疏的领域，而且初看之下经常使人不好理解。这里有好几个原因。首先，它使用的办法，有时看来比较怪，这种怪即使是在处理比较简单的问题时也不可免，不好理解的更深原因在于：这些办法通常是在它们要应用的问题提出之前就已经研究了。代数拓扑学的成就往往不是通过往前进、利用已经有的办法于新问题取得的，而常常是回过来、提炼新的、更细致的办法，这些办法对取得进一步结果是不可少的。这种发展的结果使得每隔十年，整个领域的面貌就大变，而每个有一段时间不接触它的人，如果想再读文章的话，可能连单词都弄不懂。

在这个讲演里，我打算说明为什么新工具对取得新结果是不可少的。为了使说理有力，我从这样一个问题开始。这个问题容易表达，但却使数学家长期困惑，而它的解答一年前[1)]才获得。这个解答涉及代数拓扑学中已知的众多工作，因此为了证明这样一个定理，可以写一本代数拓扑学的教科书。

这个问题是关于球上的向量场问题，它可追溯到代数拓扑学奠基者之一的荷兰数学家L.E.J.Brouwer。

我们将讨论平面上的圆周 S^1，3维欧氏空间中的2维球面S^2，或者更一般些，$(n+1)$维欧氏空间中的 n 维球面S^n。我们关心的是 S^n的切向量。在 S^1的情形，我们可以沿着顺时针方向前进，并且在S^1的每个点上画一个切向量。这样我们就得到 S^1上的一个向量场，显然，我们可以使切向量的长度和方向连续改变，而且切向量的长度无一为0。这样我们说，在S^1上我们有一个无奇点的连续切向量场。

在 S^2上，可以不太困难的证明：不存在无奇点的连续切向量场。换句话说，如果 S^2 突然间长了头发，那么它们不可能全都是平坦的。或者有一根头发必须被剪成长度是0，或者有一根头发必须竖立。之所以必须如此，可以直观地这么看：对球面上的纬线画切向量。如果我们让这些切向量的长度固定，那么在两极我们就无法决定切向量的指向。如果我们让向量的长度随着趋向两极而递减，我们在两极就必须画0向量。这样，无论在哪种情形，南北极都是向量场的奇点。可以在 S^2上构作一个只含一个奇点的连续切向量场。

L.E.J.Brouwer 在1908年（已经很久了）证明：对所有的偶数维球面情况一样，即在S^{2n}上不存在无奇点的连续切向量场。

---

* 本文译自 *Lectures on Modern Mathematics*, edited by T.L.Saaty, Vol.1, John Wiley & Sons, Inc., New York.London, 1963, 98—114.

1) 指1962年．——译注．