

# Nash 的代数几何工作

János Kollár

**摘要** 本文叙述 Nash (纳什) 在代数几何学中的贡献, 主要讨论实代数集的拓扑和奇点的弧空间 (arc spaces of singularities).

Nash 写过两篇关于代数几何学的文章: 第 1 篇在其数学职业生涯初期 [Nash 52]; 第 2 篇写作于 1968 年, 在其长期的疾病期间, 但后者直至最近才发表 [Nash 95]. 根据这两篇文章, Nash 领先了他所处的时代; 人们至少用 20 年时间才理解 Nash 工作的重要性. 时至今日, 这样的工作被认为是代数几何学领域某些重要方向的出发点. 笔者有幸在这些领域从事研究、并与 Nash 进行讨论. 值得注意的是, 即便过了 50 年, 这些问题依旧鲜活地存在于 Nash 的脑海中, 他依旧对它们存在深刻的见解.

我们在 §1 给出 [Nash 52] 主定理的证明; §3 简单介绍 Nash 在论文 [Nash 95] 中开创和研究的弧空间. 上述两个部分均相当初等. §2 讨论 [Nash 52] 提出的一个猜想, 以及部分后续工作. 若读者熟悉代数几何, 阅读本文将相对容易.

## 1. 实代数集的拓扑

1950 年左右, 数学家们终日苦恼的一个主要问题是: 如何理解各式各样的流形.

1908 年, Steinitz (施泰尼茨) 和 Tietze (蒂策) 提出如下主猜想: 任一拓扑流形均可三角剖分. 在那个年代, 三角剖分和微分结构的关系尚不明朗. Whitney (惠特尼) 证明: 任一紧致  $C^1$  流形, 均存在微分, 甚至是实解析结构 [Whi36]; Milnor (米尔诺) 开创性的例子尚在不远的将来 [Mil56, Mil61]; 与此结果类似地, 还有实解析结构的嵌入性和唯一性 [Mor58, Gra58].

Nash 从考虑流形是否可以存在更强的结构入手. 在可以想象的足够刻画流形的函数类中, 多项式很可能是最小的函数类.

**定义 1** 我们将满足一些多项式公共零点的集合

$$X := \{\mathbf{x} : f_1(\mathbf{x}) = \cdots = f_r(\mathbf{x}) = 0\} \subset \mathbb{R}^N,$$

称为实代数集 (*real algebraic set*).

**注** 就本文而言, 读者可将上述集合看做  $\mathbb{R}^N$  的子集, 尽管理论上而言, 我们最好将  $X = X(\mathbb{R})$  看作复代数集  $X(\mathbb{C})$  的实数点集, 其中后者表示方程组的所有复数解集. 代数几何学家同样可以指定  $X(\mathbb{C})$  上的正则函数层. 为了强调基础的方面, 我们用“实代数集”的说法取代“实代数簇”.

类似于代数几何学, 我们同样可以定义诸如光滑性、维数等概念, 但此处可以走一个捷径. 我们称  $X$  光滑 (*smooth*), 当且仅当它是  $\mathbb{R}^N$  的一个光滑子流形; 我们采用  $X$  的

---

译自: Bulletin (New Series) of the AMS, Vol. 54 (2017), No. 2, p. 307–324, Nash’s Work in Algebraic Geometry, János Kollár. Copyright ©the American Mathematical Society 2017. All rights reserved. Reprinted with permission. 美国数学会与作者授予译文出版许可.  
作者是普林斯顿大学数学教授, 他的邮箱地址是 kollar@math.princeton.edu.

拓扑维数 (若  $X$  满足代数几何学意义下的光滑性 (参考 [Sha74, § II.1]), 上面的叙述给出准确的刻画, 但这并非总是正确. 例如: 代数几何学家认为  $(x^2 + y^2 = 0)$  是一个奇点在原点的平面曲线, 但上述定义并未将它与 0 维集合  $(x = y = 0)$  区分.).

对于复代数几何学家而言, 若仅在仿射空间中的实代数集框架下讨论似乎有些怪异; 例 4 (4.2) 将给出一些解释.

论文 [Nash52] 的主要结论叙述如下:

**定理 2** 任一光滑紧流形  $M$  均微分同胚于一个光滑实代数集  $X$ .

我们称这样的  $X$  为  $M$  的一个代数模型 (*algebraic model*). 更精确地, Nash 仅仅证明  $M$  微分同胚于光滑实代数集  $X$  的一个连通分支. 上述更强的结论出现于 [Tog73], 这个结果是由 Tognoli 利用 [Wal57] 的结果得到. 对下面将要叙述的变化形式, 即: 嵌入流形可由光滑实代数集近似, 我们给出证明概览.

**定理 3** 令  $M \subset \mathbb{R}^N$  为紧光滑子流形. 设  $N \geq 2 \dim M + 1$ . 则存在  $\mathbb{R}^N$  的一个微分同胚映射  $\phi$ , 无限接近于恒同映射, 使得  $\phi(M) \subset \mathbb{R}^N$  是一个实代数集.

此后建立在 [Tog88] 上的 [AK92a] 的结果表明: 即便  $N < 2 \dim M + 1$ , 流形  $M$  也可由  $\mathbb{R}^{N+1}$  中光滑实代数集逼近.

**例 4** 下面考虑实代数集的构造, 能实现为实代数集和不能实现为实代数集的若干流形:

(4.1) 标准单位球面  $\mathbb{S}^n = (x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ .

(4.2) 根据一般定义,  $\mathbb{RP}^n$  为实代数集, 我们可以通过如下嵌入

$$\mathbb{RP}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n(n+1)/2} : (y_0 : \cdots : y_n) \mapsto \left( \frac{y_i y_j}{\sum_k y_k^2} : 0 \leq i, j \leq n \right).$$

将其看作  $\mathbb{R}^N$  的子集 (这解释了定义 1 的合理性, 任一射影、实代数集均可看作是某个  $\mathbb{R}^N$  的实代数子集).

(4.3) 实代数集的一个连通分支通常不再是实代数集. 例如: 曲线  $C := (y^2 + x(x-1)(x-2)(x-3) = 0)$  包含两个椭圆, 任意多项式  $f(x, y)$  如果在其中一个椭圆上取值为 0, 则它一定在另一椭圆上取值为 0. 事实上, 存在如下表示

$$f(x, y) = h(x, y)(y^2 + x(x-1)(x-2)(x-3)) + (ay + g(x)).$$

若  $f(x, y)$  在一个椭圆上取值 0, 则  $ay + g(x)$  同样取值 0. 由此, 若  $(x_0, y_0)$  在这个椭圆上, 则  $(x_0, -y_0)$  同样在该椭圆上. 因此若  $ay + g(x)$  在两个点上取值 0, 则  $a = 0$ . 注意  $g(x)$  仅能在有限多个  $x$  的取值为 0, 我们得到  $ay + g(x) \equiv 0$ , 由此  $f$  在两个椭圆上均取值为 0.

(4.4) 任意复代数集均可看作实代数集, 如果将它们的复坐标  $z_j$  换做实部和虚部  $x_j, y_j$ . 例如: 由方程  $f(z_1, z_2) = 0$  给出的复平面曲线, 可以表示成  $\mathbb{R}^4$  中一个实曲面

$$\Re(f(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2)) = 0, \quad \Im(f(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2)) = 0.$$

(4.5) 拉开 (blowing-up) 操作是将一个点  $x \in X$  替换为点  $x$  的所有切向量, 参考 [Sha74, § II.4]. 由此, 若  $X$  为  $n$  维实代数集, 而  $x$  是一个光滑点; 则  $B_x X$  微分同胚于

$X \# \mathbb{R}P^n$ , 即  $X$  与  $\mathbb{R}P^n$  的连通和. 特别地, 我们可以通过对  $S^2$  的点采用拉开操作得到所有不可定向曲面.

(4.6) 令  $X(\mathbb{C})$  为复代数集, 并且令  $x \in X(\mathbb{C})$  为孤立奇点. 将  $X(\mathbb{C})$  与  $x$  附近的一个小球面相交, 这样得到的一个光滑实代数集称为  $x \in X(\mathbb{C})$  的一个 *链接 (link)*. 通过这种方法, 可以得到许多有趣的流形. 例如, Poincaré (庞加莱) 同调球面 (homology sphere) 可由

$$(z_1^2 + z_2^3 + z_3^5 = 0) \cap \left( \sum_i |z_i|^2 = 1 \right)$$

给出; 而

$$(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^3 + z_5^{6r-1} = 0) \cap \left( \sum_i |z_i|^2 = 1 \right)$$

给出  $S^7$  上的所有 28 种微分结构, 其中  $r = 1, \dots, 28$ . 关于链接的基本介绍, 见 [Mil68].

借用 Seifert (赛弗特) 的一个结果 [Sei36], 我们将对定理 2 给出证明.

**特殊情形 5 (超曲面)** 设  $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$  为光滑超曲面. Alexander (亚历山大) 对偶表明  $M$  的双边性, 即: 存在一个开邻域  $U_M \supset M$  微分同胚于  $M \times (-1, 1)$ . 对第 2 个因子的投影给出逆紧 (proper) 的  $C^\infty$  浸没 (submersion)  $F : U_M \rightarrow (-1, 1)$ , 该映射的零点集为  $M$ . 根据 Weierstrass (维尔斯特拉斯) 定理, 我们可以使用一系列多项式  $P_m(\mathbf{x})$  逼近  $F$ , 使得实代数超曲面  $X_m := (P_m(\mathbf{x}) = 0)$  逼近  $M$ .

有两点需要澄清. 首先, 正如我们在讨论 14 中即将看到的, 在  $C^1$  范数意义下, 若  $P_m$  收敛于  $F$ , 则  $X_m$  逼近  $M$  (换言之, 在  $U_M$  的任意紧子集上,  $P_m \rightarrow F$  以及对任意  $i$ ,  $\partial P_m / \partial x_i \rightarrow \partial F / \partial x_i$  一致成立). 上述版本的 Weierstrass 定理不难建立, 见 [Whi34] 或 [dlVP08].

其次, 多项式  $P_m(\mathbf{x})$  在  $U_M$  外可能存在其它零点. 因此我们仅能得到: 超曲面  $X_m$  的一个连通分支逼近  $M$ .

通过下述方法可以排除其它多余的连通分支. 取代  $U_M$ , 我们需要把  $F$  拓广到包含  $U_M$  的半径为  $R$  的一个大球  $B$ , 并对  $B$  做逼近. 然后, 我们将逼近多项式  $P_m$  改成如下形式:

$$P_{m,s} := P_m + \left( \frac{1}{R^2} \sum x_i^2 \right)^s.$$

注意, 对于  $s \gg 1$ , 函数  $P_{m,s}$  在  $B$  中非常接近  $P_m$ , 在  $B$  外严格取正号. 因此对于  $s \gg m$ , 我们有  $X_{m,s} := (P_{m,s}(\mathbf{x}) = 0)$  包含于  $B$ , 它们以我们需要的方式逼近  $M$ .

更一般地, 我们可得如下结论 (上面的论证对应于  $Y = \mathbb{R}P^{n+1}$  和  $F = 0$ ).

**断言 5.1** 令  $Y$  为紧光滑实代数集, 令  $F \subset Y$  为代数超曲面, 令  $M \subset Y$  为微分超曲面. 在  $\mathbb{Z}_2$  系数下, 若  $M$  与  $F$  代表同一个同调类. 则  $M$  可由  $Y$  中的代数超曲面逼近.

**证明概览** 注意  $F \subset Y$  定义了  $Y$  上的代数线丛  $L$ . 由假设可知,  $L$  上存在一个光滑截面  $\sigma$ , 它的零点集为  $M$ . 在  $C^1$  范数的意义下, 我们可以用代数截面  $s_i$  逼近  $\sigma$ ; 由此, 代数超曲面  $(s_i = 0) \subset Y$  逼近  $M$ . ■

我们可将上述证明总结成如下 3 步.

首先确定微分映射  $F: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ , 使得  $M = F^{-1}(0)$ . 此种情形非常特殊, 问题关键在于  $\mathbb{R}$  是一个光滑实代数集, 而  $\{0\} \subset \mathbb{R}$  是一个光滑实代数子集.

接下来, 我们通过代数映射  $P_{m,s}: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  逼近  $F: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ , 并最终说明实代数集  $P_{m,s}^{-1}(0)$  逼近  $M$ .

上述讨论给出定理 2 和定理 3 的证明思路.

**证明思路 6** 给定紧流形  $M \subset \mathbb{R}^N$ , 我们按下面 3 个步骤确定它的一个代数逼近:

第 1 步. 确定光滑实代数集  $U$ , 以及它的一个光滑实代数子集  $Z \subset U$ . 确定微分映射  $g: \mathbb{R}^N \rightarrow U$ , 使得  $M = g^{-1}(Z)$  (注意,  $U$  是某种“万有”空间, 与  $M$  并无太多关联).

第 2 步. 通过“代数”映射  $h_i: \mathbb{R}^N \rightarrow U$  逼近  $g: \mathbb{R}^N \rightarrow U$ .

第 3 步. 证明实代数子集  $h_i^{-1}(Z)$  逼近  $M$ .

我们从第 2 步开始, 它也是最为有趣的部分.

**讨论 7** (邻域的形状收缩) 令  $M \subset \mathbb{R}^N$  为  $n$  维紧流形. 下面将会看到, 若  $p \in \mathbb{R}^N$  足够接近  $M$ , 则存在唯一的点  $\pi(p) \in M$ , 它与点  $p$  最近, 我们可在某个开邻域  $M \subset U_M \subset \mathbb{R}^N$  中得到一个收缩 (retraction) 映射  ${}^1\pi: U_M \rightarrow M$ .

我们需理解  $\pi$  的正则性. 第 1 个证明是经典的.

**断言 7.1** 若  $M$  实解析, 则  $\pi$  同样实解析.

**证明** 该问题可约化至局部情形讨论. 选择标准正交坐标, 使得  $\pi(p)$  为原点, 而  $x_1, \dots, x_n$  为切空间  $T_{\pi(p)}M$  的坐标. 这样  $M$  可以表示为图

$$(7.2) \quad M = (x_1, \dots, x_n, \phi_{n+1}(x_1, \dots, x_n), \dots, \phi_N(x_1, \dots, x_n)),$$

其中  $\phi_j$  在原点处零点的阶为 2. 这样  $\pi(p)$  是函数

$$(7.3) \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n (x_i - p_i)^2 + \sum_{j=n+1}^N (\phi_j(x) - p_j)^2$$

的驻点. 由此, 对于  $i = 1, \dots, n$ , 它是方程组

$$(7.4) \quad (x_i - p_i) + \sum_{j=n+1}^N (\phi_j - p_j) \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} = 0$$

的解. 根据隐函数定理, 若方程组 (7.4) 的 Jacobi (雅克比) 矩阵可逆, 这个解依赖于点  $p$  的实解析性质. 计算 Jacobi 矩阵如下

$$(7.5) \quad \mathbf{1}_n + \sum_{j=n+1}^N (\phi_j - p_j) \cdot \text{Hessian}(\phi_j) + \sum_{j=n+1}^N \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial x_k} \right).$$

注意,  $\phi_j$  在原点处零点的阶为 2, 因此最后一项很小. 由此, 若  $p_j$  很小我们可得  $\phi_j - p_j$  很小. ■

Nash 给出两个至关重要的观察: 人们可以从实解析函数过渡到实代数函数, 这样可以得到有趣, 有用的一类函数.

**断言 7.6** 若  $M$  是实代数的, 则  $\pi$  也是“实代数”的 (我们将在定义 9 中给出这个断言的精确解释).

---

1) 令  $X$  为拓扑空间, 并且令  $A$  为  $X$  的子空间. 连续映射  $r: X \rightarrow A$  称为收缩映射, 如果它限制到  $A$  上为恒同映射. 等价地, 若  $\iota: A \hookrightarrow X$  为包含映射, 则形变收缩映射  $r$  满足  $r \circ \iota = \text{id}_A$ .——译注

证明 断言 7.6 可被约化至局部情形, 我们可以假定  $M$  是  $r = N - n$  个实多项式的公共零点集: 即  $M = (f_1 = \cdots = f_r = 0)$  在  $\pi(p)$  满足线性无关梯度<sup>1)</sup>. 因此  $\pi(p)$  是 Lagrange (拉格朗日) 乘数方程的解

$$(7.7) \quad \begin{aligned} \nabla \left( \sum_{i=1}^N (x_i - p_i)^2 \right) &= \sum_{j=1}^r \lambda_j \nabla f_j, \quad \text{并且} \\ f_j(x_1, \dots, x_N) &= 0, \quad j = 1, \dots, r. \end{aligned}$$

接下来我们讨论从 (7.7) 是一个多项式 (polynomial) 方程组能得到  $\pi$  的坐标函数什么性质.

**定义 8** (代数函数) 至少可以追溯至 Euler (欧拉), 我们称单变量函数  $f(x)$  为代数的 (algebraic), 如果它满足如下方程

$$(8.1) \quad g_n(x)f^n + g_{n-1}(x)f^{n-1} + \cdots + g_0(x) \equiv 0,$$

其中  $g_i(x)$  为多项式函数 (注意,  $g_n$  非恒为零). 例如  $f := \sqrt[n]{g(x)}$  为代数函数, 因为它满足方程  $f^n - g(x) \equiv 0$ . 复分析学家通常会称  $f(x)$  看作多值函数, 但是对于实变量, 可以发生一个可能的合理单值选择. (例如, 若  $n$  为奇数时, 我们通常将  $\sqrt[n]{x}$  认为单值实函数.)

类似地, 我们称  $m$  个变量 (可能为多值) 的函数  $f(x_1, \dots, x_m)$  为代数的, 如果它满足如下方程

$$(8.2) \quad g_n f^n + g_{n-1} f^{n-1} + \cdots + g_0 \equiv 0,$$

其中  $g_i \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_m]$  为多项式 (注意,  $g_n$  非恒为零). 通过引入其 “代数图”

$$\Gamma_f := (g_n x_{m+1}^n + g_{n-1} x_{m+1}^{n-1} + \cdots + g_0 = 0) \subset \mathbb{R}^{m+1},$$

我们可重新理解代数函数. 这样,  $\Gamma_f$  是一个实代数集, 因此  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  可看作复合映射

$$(8.3) \quad f: \mathbb{R}^m \xrightarrow{\sigma} \Gamma_f \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}.$$

这里, 若  $f$  连续, 则此处的  $\sigma$  是一个连续截面 (通常不再是代数的), 并且  $\pi$  是最后一个坐标分量的投射 (因此是代数的).

若  $x_{m+1}$  确实出现于任意多项式  $F(x_1, \dots, x_{m+1})$  中, 则  $F$  均可将  $x_{m+1}$  定义成  $x_1, \dots, x_m$  的一个 (多值) 代数函数. 多项式方程组有类似的结论, 但较多项式情形的处理困难一些.

**断言 8.4** 对于  $j = 1, \dots, r$ , 令  $F_j(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0$  为多项式方程组. 若存在某个开子集  $B \subset \mathbb{R}^n$  使得对于任意  $(b_1, \dots, b_n) \in B$ , 方程组

$$F_j(b_1, \dots, b_n, y_1, \dots, y_m) = 0, \quad j = 1, \dots, r$$

仅存在有限多组 (但至少存在一组) 复数解. 则这个方程组定义了  $y_1, \dots, y_m$  是以  $x_1, \dots, x_n$  作为自变量的代数函数.

**注** 一般而言, 断言 8.4 可采用消元法中的结式, 参考 [Kro1881]. 但在当代的代数几何学教科书中, 人们将其认为是 Chevalley (谢瓦莱) 定理的一个特殊情形: 即, 应用于坐标投射, 代数集的像是可构造的. 详见 [CLO92, 第 III 章].

1) 这是光滑性的代数定义. 虽然前文避免定义该性质, 但我们却无法避免. —— 原注

将断言 8.4 应用于方程组 (7.7), 易知  $\pi(p)$  的坐标是  $p$  的代数函数. 由此可得  $\pi(p)$  同样是  $p$  的实解析函数. 这启发我们给出如下定义:

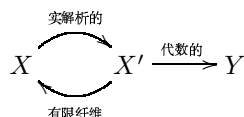
**定义 9** (Nash 函数) 令  $X$  为光滑实代数集. 我们称函数  $\phi: X \rightarrow \mathbb{R}$  为 Nash 函数, 如果它同时是代数的和实解析的.

例如  $\sqrt{1+x^2+y^2}$  是  $\mathbb{R}^2$  上的 Nash 函数.

不难发现, 若  $\phi$  是代数  $C^\infty$  函数, 则它是 Nash 函数, 但低阶可微却不能保证上述结论 (例如  $x \mapsto \sqrt[3]{x^{10}}$  是代数  $C^3$  函数, 但却不是 Nash 函数).

我们称实代数集之间的映射  $\phi: X \rightarrow Y$  为 Nash 映射, 如果对于某一个 (或等价地, 每一个) 嵌入  $Y \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ , 复合映射  $X \rightarrow Y \hookrightarrow \mathbb{R}^N$  的坐标函数是 Nash 函数.

由 (8.3) 可知, 我们可以通过下图



来实现一个 Nash 映射  $\phi: X \rightarrow Y$ , 其中  $\pi: X' \rightarrow X$  为实代数集之间的满射, 它具有有限纤维; 而  $\sigma: X \rightarrow X'$  是一个实解析截面; 此外  $h: X' \rightarrow Y$  为实代数映射, 它满足  $\phi = h \circ \sigma$ .

现在, 我们可将断言 7.6 明确地表述如下: 若  $M$  为实代数流形; 则正交投射  $\pi: U_M \rightarrow M$  为 Nash 映射.

Nash 映射具有很好的逼近性质.

**推论 10** 令  $X, Y$  为光滑实代数集, 并且令  $X^0 \subset X$  为开子集. 令  $g: X^0 \rightarrow Y$  为微分映射. 则在  $X^0$  的紧子集上,  $g$  可由 Nash 函数逼近.

**证明** 选择嵌入  $Y \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ , 应用 Weierstrass 定理, 通过多项式映射逼近复合映射  $X^0 \rightarrow Y \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ . 注意逼近映射的像位于  $U_Y \supset Y$  的一个小邻域中. 因此可以将正交投射  $U_Y \rightarrow Y$  与逼近映射复合, 以得到  $g$  的逼近. 注意, 正交投射  $U_Y \rightarrow Y$  是 Nash 映射, 因此  $g$  也可由 Nash 映射逼近. ■

**推论 11** 任意光滑紧实代数集  $X, Y$  之间的微分同胚均可由 Nash 微分同胚逼近.

讨论证明 6 的第 1 步之前, 我们需要回顾 Grassmann (格拉斯曼) 空间的一些知识.

**定义 12** (实 Grassmann 空间) 令  $W$  为  $N$  维实向量空间. 对于任意  $0 \leq r \leq N$ , 令  $\text{Grass}(r, W)$  表示  $W$  的  $r$  维子向量空间集合. 事实上, 存在许多方式将  $\text{Grass}(r, W)$  看作一个自然的紧流形结构, 乃至一个光滑的实代数集.

选定  $W$  的内积, 我们可以将子空间  $V^r \subset W$  与正交投射矩阵  $P \in \text{End}(W)$  等同, 因为后者的核空间为  $V^r$ . 由此  $\text{Grass}(r, W)$  是  $\text{End}(W) \cong \mathbb{R}^{N^2}$  的子集, 它的方程可由  $P^2 = P, P = P^t, \text{tr}(P) = N - r$  给定. 我们同样可以得到子空间的万有族

$$\text{Univ}(r, W) \subset \text{Grass}(r, W) \times W,$$

它刻画满足  $Pw = 0$  的组合对  $(P, w)$ , 第一个分量的投射  $\text{Univ}(r, W) \rightarrow \text{Grass}(r, W)$  是一个秩为  $r$  的向量丛, 而  $P \mapsto (P, 0)$  则是零截面.

**证明 13** (我们完成证明思路 6 的第 1 步) 如同在讨论 7 中, 选定  $M^n \subset \mathbb{R}^N$ , 其邻域  $U_M \supset M$ , 以及正交投射  $\pi: U_M \rightarrow M$ . 给定点  $q \in M$ , 则存在分解  $T_q \mathbb{R}^N = T_q M + N_q M$ , 即  $M$  点切空间与法空间的正交和. 令  $Y := \text{Univ}(r, \mathbb{R}^N)$ , 令  $Z \subset Y$  表示零截面, 利用公式

$$g(p) := (N_{\pi(p)} M - \pi(p), p - \pi(p)) \in \text{Univ}(r, \mathbb{R}^N)$$

定义  $g: U_M \rightarrow Y$ . 换言之, 将  $\pi(p)$  点的法空间  $N_{\pi(p)} M$  用  $-\pi(p)$  平移, 这样得到  $\mathbb{R}^N$  的一个  $r$  维子空间, 它表示  $\text{Grass}(r, \mathbb{R}^N)$  的一个点. 显然,  $g(p) \in Z$  当且仅当  $p - \pi(p) = 0$ , 即  $p \in M$ . 由此  $g^{-1}(Z) = M$ . ■

完成证明思路 6 的第 3 步, 我们仅仅需要微分拓扑的一些基础知识.

**讨论 14** (纤维间的同痕) 令  $g: X \rightarrow Y$  为光滑连通流形间逆紧的  $C^\infty$  浸没.

由 Ehresmann (埃雷斯曼) 纤维化定理可知: 所有纤维  $g^{-1}(y)$  微分同胚. 更详细地, 若  $y_1, y_2 \in Y$  足够接近, 则存在组合对  $(g^{-1}(y_1) \subset X)$  与  $(g^{-1}(y_2) \subset X)$  间的微分同构, 它接近于恒同映射.

在  $C^1$  拓扑下, 假定存在接近于  $g$  的其它映射  $h: X \rightarrow Y$ . 则对于  $t \in (-\epsilon, 1 + \epsilon)$ , 存在一族映射  $g_t: X \rightarrow Y$ , 使得  $g_0 = g, g_1 = h$ , 且  $G(x, t) := (g_t(x), t)$  定义逆紧的  $C^\infty$  浸没

$$(14.1) \quad G: X \times (-\epsilon, 1 + \epsilon) \rightarrow Y \times (-\epsilon, 1 + \epsilon).$$

由此  $g^{-1}(y)$  与  $h^{-1}(y)$  微分同胚.

为构造  $G$ , 假定  $Y \subset \mathbb{R}^N$ . 首先构造线性组合  $tg + (1-t)h: X \rightarrow \mathbb{R}^N$ , 则  $X \times (-\epsilon, 1 + \epsilon)$  的像在  $U_Y \supset Y$  的一个小邻域中. 利用正交投射  $U_Y \rightarrow Y$  (见讨论 7), 可以构造一族映射  $g_t: X \rightarrow Y$ .

此外, 我们还需上述讨论的如下更一般情形.

令  $g: X \rightarrow Y$  为微分流形间的逆紧微分映射, 并且令  $Z \subset Y$  为子流形. 我们称  $g$  横截于 (transversal)  $Z$ , 如果对于任意  $z \in Z$  和  $x \in g^{-1}(z)$ , 复合映射  $T_x X \xrightarrow{g_*} T_z Y \rightarrow N_z Z$  为满射, 其中  $N_z Z$  表示点  $z \in Z$  在  $Y$  中的法空间. 若  $g$  与  $Z$  横截, 则  $g^{-1}(Z) \subset X$  为子流形.

我们现在假定形如 (14.1) 的  $G(x, t)$ , 使得对于任意  $t$ , 均有  $G(\cdot, t): X \rightarrow Y$  与  $Z$  横截. 将  $G$  限制到浸没

$$G^{-1}(Z \times (-\epsilon, 1 + \epsilon)) \rightarrow (-\epsilon, 1 + \epsilon),$$

我们可得如下结果.

**断言 14.2** 令  $X, Y$  为微分流形, 并且令  $Z \subset Y$  为子流形. 令  $g: X \rightarrow Y$  为逆紧可微映射, 它与  $Z$  横截.

令  $h: X \rightarrow Y$  为另一可微映射. 在  $C^1$  拓扑下, 它与  $g$  接近. 则  $g^{-1}(Z)$  与  $h^{-1}(Z)$  微分同胚:  $g^{-1}(Z) \stackrel{\text{diff}}{\sim} h^{-1}(Z)$ . 此外, 存在微分同胚  $(g^{-1}(Z) \subset X) \stackrel{\text{diff}}{\sim} (h^{-1}(Z) \subset X)$ , 它接近于恒同映射. ■

**证明 15** (定理 2 和定理 3 结论的证明) 令  $M^n \subset \mathbb{R}^N$ , 以及  $r = N - n$ . 令  $U_M \supset M$  为  $M$  的一个小的开邻域. 由证明 13 可知, 存在可微映射  $g: U_M \rightarrow \text{Univ}(r, \mathbb{R}^N)$ , 使得  $g$

横截于零截面  $Z = \text{Grass}(r, \mathbb{R}^N) \subset \text{Univ}(r, \mathbb{R}^N)$ , 以及  $g^{-1}(Z) = M$ .

由于  $\text{Univ}(r, \mathbb{R}^N)$  为实代数集, 由推论 10 可知  $g$  可由 Nash 函数  $\phi : U_M \rightarrow \text{Univ}(r, \mathbb{R}^N)$  逼近. 根据断言 14.2, 可得  $\phi^{-1}(Z) \subset U_M \subset \mathbb{R}^N$  是  $M$  的一个逼近.

若  $\phi^{-1}(Z)$  为实代数集, 我们就完成了证明. 但截至目前, 我们仅能得到: 它们是 Nash 函数的公共零点集. 这种情形下, 图 (9.1) 变为

$$\mathbb{R}^N = X \begin{array}{c} \xrightarrow{\sigma} \\ \xleftarrow{\pi} \end{array} X' \xrightarrow{h} \text{Univ}(r, \mathbb{R}^N)$$

其中  $\sigma$  为实解析函数, 而  $h$  为代数函数. 可以说明  $\phi^{-1}(Z) \subset X'$  为实代数集, 它具有连通分支  $V'_i$ , 使得  $\pi(V'_i)$  为  $M$  的一个逼近. 但是, 通常而言  $\phi^{-1}(Z)$  存在其它连通分支  $V'_i$ , 而且  $\pi(V'_i)$  与  $\pi(V'_1)$  可能存在交点. 现在利用假设  $N \geq 2n+1$ , 将  $\pi'$  记为  $\pi$  的适当扰动, 可以使得诸像  $\pi'(V'_i)$  彼此无交 (实际上, 正如例 18 所见, 存在如下可能, 即  $\pi(\phi^{-1}(Z)) \subset X$  具有的实数点, 是  $\phi^{-1}(Z)$  虚数点的像; 这些并不难处理).

这样我们就完成了 Nash 对该定理的原始叙述.

为了更进一步, [Wal57, Tog73] 利用了 Thom (托姆) 的一个关于不可定向配边定理 [Tho54], 即: 任一紧流形  $M^n$  均为某些实射影空间乘积的配边. 特别地, 任一紧流形  $M^n$  均为某一光滑紧实代数集  $F^n$  的配边. 将这样的两个配边粘合, 我们可得一个紧流形  $N^{n+1}$ , 使得  $M^n \subset N^{n+1}$  与  $F^n \subset N^{n+1}$  同调.

接下来对  $N^{n+1}$  应用 Nash 版本的定理 2. 这样得到一个光滑紧实代数集  $Y^{n+1}$ , 以及  $\tau : N^{n+1} \hookrightarrow Y^{n+1}$ , 它在  $Y^{n+1}$  的一个连通分支上为微分同胚. 注意,  $\tau(M^n)$  与  $\tau(F^n)$  仍然同调,  $Y^{n+1}$  的其它连通分支并未起任何作用. 应用断言 5.1 可得, 存在  $\tau(M^n)$  的代数逼近, 这要求  $\tau(F^n)$  为  $Y^{n+1}$  的代数子集, 此条件通常不满足. 然而, 若适当修正上述证明, 可以说明: 如果光滑子集  $F \subset N^{n+1}$  是代数的, 我们可以选择  $Y^{n+1}$  和  $\tau : N^{n+1} \hookrightarrow Y^{n+1}$ , 使得  $\tau(F) \subset Y^{n+1}$  同样为代数的. 这样就可以应用断言 5.1, 并由此得到定理 2. ■

进一步的工作 前面证明了任一紧流形均可由多项式方程刻画, 自然要问下面两个问题.

**问题 16** 流形上哪种拓扑结构可以由代数的方式实现?

例如: 我们可以尝试流形  $M$  的代数实现, 使得所有 (上) 同调, 或所有向量丛存在代数代表元. 这种问题的第 1 个障碍由 [BD84] 发现. 事实上, 尝试理解在什么情形下流形间映射同伦类是否存在代数代表元的问题是非常有趣的.

**问题 17** 哪些子集  $P \subset \mathbb{R}^N$  可被实代数集逼近?

由 [vdW30] 可知, 我们可对代数集进行三角剖分, 因此自然可以考虑单纯复形. 目前依旧存在某些障碍, 例如: 对于任意实代数集, 由 [Sul71] 可知, 链接的 Euler 特征为偶数; 见例 18. 对此问题, 似乎不存在完整的答案或猜想.

Akbulut, Benedetti (贝内代蒂), Bochnak, King, Kucharz, Shiota, Tognoli, 以及其他许多数学家对此类问题做出了贡献, 读者若尝试了解细节, 以及更多参考文献, 见 [Shi87, AK92b, BCR98]. 关于 [Nash52] 的一个相关问题, 论文 [Kur88] 已经给出答案.



**例 18** 我们从  $\mathbb{R}^3$  开始讨论. 这是一个实代数集, 其中任意一点的链接均为  $\mathbb{S}^2$ , 注意  $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$ .

取对合映射  $\tau: \mathbf{x} \mapsto -\mathbf{x}$ , 并考虑商  $\mathbb{R}^3/(\tau)$ . 直观上原点的链接应为  $\mathbb{S}^2/(\tau) \sim \mathbb{RP}^2$ , 而  $\chi(\mathbb{RP}^2) = 1$ , 注意这与前面提及的奇偶性断言相矛盾 [Sul71].

下面展开详细讨论. 选择  $\mathbb{R}^3$  的坐标  $x_1, x_2, x_3$ . 注意  $\mathbb{R}^3$  上的  $\tau$  不变多项式可由  $x_i x_j$  生成, 其中  $1 \leq i \leq j \leq 3$ . 选取  $\mathbb{R}^6$  的坐标为  $y_{ij}$ , 其中  $1 \leq i \leq j \leq 3$ . 这样, 我们可将商映射  $\mathbb{R}^3/(\tau)$  看作  $\mathbb{R}^3$  在映射

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^6 : y_{ij} = x_i x_j, \quad 1 \leq i \leq j \leq 3$$

的像. 令实代数集  $W \subset \mathbb{R}^6$  为像. 那么  $W$  的实数点是什么? 显然可以得到  $\mathbb{R}^3/(\tau)$ , 但很快我们会发现: 若所有  $x_i$  均为纯虚数, 则所有乘积  $x_i x_j$  均为实数. 由此  $W(\mathbb{R})$  可由两部分组成, 即  $\mathbb{R}^3/(\tau)$  和  $\sqrt{-1}\mathbb{R}^3/(\tau) \sim \mathbb{R}^3/(\tau)$ . 这样, 原点的链接并非  $\mathbb{RP}^2$ , 而是两个  $\mathbb{RP}^2$ , 其 Euler 特征为 2.

$W$  的定义方程可类似于如下形式 (“rank” 为 “秩”):

$$\text{rank} \begin{pmatrix} y_{00} & y_{01} & y_{02} \\ y_{01} & y_{11} & y_{12} \\ y_{02} & y_{12} & y_{22} \end{pmatrix} \leq 1,$$

将其展开, 我们可以得到 6 个二次方程.

## 2. Nash 关于有理参数化的猜想

定理 2 说明: 任意紧流形均可由若干多项式方程刻画. 但若试图通过方程表示流形通常并不容易. 它通常难于计算 (超定多项式方程组<sup>1)</sup> 的解法并不固定); 更困难的一点在于, 对于给定的方程组, 其理论上的可解性都很难判断.

若考虑存在 “简单的” 函数参数化的代数集, 问题将变得相对容易. 关于这个说法, 存在许多不同版本的叙述, 提及最多的应为 有理 (*rational*) 函数, 即, 多项式的商.

理论上而言, 人们应该讨论 有理连通簇 (*rationally connected varieties*) (其一般介绍见 [Kol01b]), 但下述定义却更为清晰.

**定义 19** 实代数集  $X^n \subset \mathbb{R}^N$  的一个 有理参数化 (*rational parametrization*) 是一个有理映射  $\Phi: \mathbb{R}^n \dashrightarrow X^n$ , 其像是稠密的, 这里的稠密也许是在 Euclid (欧几里得) 拓扑意义下, 尽管代数几何学家常用的是 Zariski (扎里斯基) 拓扑. 许多情况下, 甚至可以做得更好一些, 即: 要求  $\Phi$  在  $\mathbb{R}^n$  的一个稠密开子集上为单射; 这是 Nash 所采用的叙述.

若给定一个有理参数化, 我们很容易写出  $X$  的点集.  $\Phi$  可由坐标函数  $\Phi_i = g_i/h_i$  给出, 其中  $g_i, h_i$  为多项式. 我们可以随机选取一个点  $p \in \mathbb{R}^n$ , 并计算  $g_i(p)/h_i(p)$  的值.

在论文末尾, Nash 提出如下问题. 对此问题的答案, Nash 本人踌躇不决, 他写道: “一旦被证明, 该定理将展现出强大的威力.” 尽管此后的学者对此结论存在明确看法.

**猜想 20 (Nash 猜想)** 令  $M$  为紧连通流形. 则存在实代数集  $X$ , 使得  $X(\mathbb{R}) \stackrel{\text{diff}}{\sim} M$ , 且  $X$  存在一个有理参数化.

1) 英文原文为 over-determined system, 指的是方程组的个数比未知量个数多的方程组. —— 译注

事实上, 这应是存在时间最短的一个猜想, 它在形成的 38 年前就被 Comessatti 证伪.

**定理 21** [Com14] 一个紧拓扑曲面  $S$  存在一个带有理参数化的代数模型, 当且仅当  $S$

- (1) 或者是球面、环面,
- (2) 或者不可定向.

**证明概览** 我们假定读者熟悉一些代数曲面知识, 例如 [Bea96, I—V 章].

复代数曲面的一个基本结果为: 任一光滑紧复代数曲面存在有理参数化, 当且仅当它可由如下方式得到:

- 从一些基本例子开始:  $\mathbb{CP}^2$ , 以及在  $\mathbb{CP}^1$  上的  $\mathbb{CP}^1$  丛.
- 对上述基本例子进行重复的拉开点操作.

对于存在有理参数化的光滑紧实代数曲面, Comessatti 给出一个类似刻画. 我们再一次有相同的两步:

- 从这些基本例子开始.
- 对上述基本例子进行重复的拉开点操作.

由 (4.5) 可知, 拉开一点等价于构造一个与  $\mathbb{RP}^2$  的连通和. 若拉开任意一点, 最后得到的流形将不可定向, 因此我们得到定理 21 的情形 (2). 接下来需要列出所有的基本例子, 并证明在拓扑意义下, 它们均为球面或环面.

不难证明, 所有的基本例子均为 Del Pezzo 曲面或极小二次丛, 这表明在同胚意义下, 上述列表是有限集. Comessatti 采用相当复杂的证明得到完整的列表, 若读者试图了解当代的方法, 见 [Kol01a, §5]. 关于实代数曲面的基本讨论, 见 [Sil89]. ■

**例 22** 容易构造球面的参数化. 对于球面方程  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , 从南极点出发的球极平面投影的逆由

$$(x, y) \mapsto \left( \frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2} \right)$$

给出. 下面考虑将  $(x, z)$  平面上的圆周  $(x-b)^2 + z^2 = a^2$  绕  $z$  轴旋转而得到的环面. 一个参数化由

$$(s^2 + t^2 = 1) \times (u^2 + v^2 = 1) \mapsto (u(as+b), v(as+b), at)$$

给出. 将上述表示与圆周的球极平面投影参数化相结合可得

$$\begin{aligned} (s, u) &\mapsto \left( \frac{2s}{1+s^2}, \frac{1-s^2}{1+s^2}, \frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2} \right) \\ &\mapsto \left( \frac{2u(2as+b+bs^2)}{(1+u^2)(1+s^2)}, \frac{(1-u^2)(2as+b+bs^2)}{(1+u^2)(1+s^2)}, \frac{a-s^2}{1+s^2} \right). \end{aligned}$$

对代数几何学者的一个练习 刻画上述环面的奇点, 并描述它们的正则化.

事实上, Comessatti 的方法推广至高维情形则会变得相当微妙. 按照 Mori (森重文) 纲领的说法, 基本步骤与曲面情形相近 (见 [Kol14] 或 [KM98]).

• 一些基本例子: 主要包括 Fano (法诺) 簇——即满足  $-K_X$  为丰富层的簇. 在三维情形, 同样还有有理曲面上的有理曲线族, 以及  $\mathbb{CP}^1$  上的 Del Pezzo 曲面族 (遗憾的是,

这两种情形均存在某些相当奇异的纤维).

- 给定存在有理参数化的任意簇  $X$  (或, 更一般地, 有理连通簇), 均存在一个除子收缩和翻转 (flip) 序列

$$X = X_0 \dashrightarrow X_1 \dashrightarrow \cdots \dashrightarrow X_n = X^{\text{basic}},$$

直至得到基本例子.

此外, 存在两个新的重大困难.

首先, 对基本例子给出完整刻画似乎相当困难 —— 甚至可以认为是没有希望的. 若  $X$  为 Fano 簇, 则存在一般的有限性结论; 但此时, 我们知晓仅仅三维 Fano 簇就有  $10^{10^{500}}$  个不同的拓扑类型. (这似乎是一个荒诞的上界, 更准确的界更有可能是百万左右, 读者可以参考 [DIK00, Kas10] 找到这些长长的列表.) 有理曲面上的有理曲线族和  $\mathbb{CP}^1$  上的 Del Pezzo 曲面族会给出无限多个例外. 这些情形下的有限性结果首先由 [Kol99b, Kol00] 建立, 这些工作后来被 Mangolte (曼戈尔特), 以及他的合作者 Catanese, Huisman 和 Welschinger 推广. 关于综述, 见 [Man14].

其次, 一般情形下的除子收缩和翻转并不容易理解. 乍看之下, 我们或许会对 “翻转” 产生疑惑. 因为翻转通常可以类比于三维流形上的 Dehn (德恩) 手术操作: 一个实代数 3 折叠 (3-fold) 流形上的翻转是指移走一个  $S^1$ , 并将其以不同方式放回去<sup>1)</sup>. 众所周知, Dehn 手术可以完全改变一个三维流形, 因此翻转序列很有可能完全失去对  $X$  的拓扑结构的控制. 幸运的是, 如果我们从一个满足  $X(\mathbb{R})$  可定向的实代数 3 折叠流形  $X$  出发, 那么经过翻转操作并不影响实部的拓扑. 在 [Kol98, Kol99a] 中证明了下述结果断言: 在极小模型纲领下, 实拓扑几乎没有发生改变.

**定理 23** 令  $X$  为一个紧光滑实代数 3 折叠流形, 使得  $X(\mathbb{R})$  可定向. 令  $X = X_0 \dashrightarrow X_1 \dashrightarrow \cdots \dashrightarrow X_n$  为极小模型纲领中的任意序列. 则存在  $a, b \geq 0$ , 使得

$$X(\mathbb{R}) \stackrel{\text{diff}}{\sim} \overline{X_n(\mathbb{R})} \# a\mathbb{RP}^3 \# b(S^1 \times S^2).$$

仅有的区别在于  $X_n$  或许奇异. 因此  $X_n(\mathbb{R})$  不必为流形, 但在我们讨论的情形下, 它可由流形  $\overline{X_n(\mathbb{R})}$  通过等同有限多个点对, 将某些嵌入的球面收缩为点得到.

这些结果表明: 仅存在有限多个可定向双曲三维流形允许具有有理参数化的实代数模型.

**例 24** 在 (4.5) 中我们看到: 拉开一个光滑点对应于一个与  $\mathbb{RP}^3$  的连通和.

我们需要更为复杂的两步拉开操作去实现  $\#(S^1 \times S^2)$ . 为得到一个局部模型, 我们由  $\mathbb{R}^3$  开始, 并拉开曲线  $C := (x_1 = x_2^2 + x_3^2 = 0)$  (注意  $C$  的实数点集仅有原点). 这样得到的 3 折叠流形仅有一个奇点  $p$ . 将其拉开, 我们得到一个光滑代数集. 在拓扑上不难验证, 我们得到  $S^1 \times S^2$  的连通和. 根据这个局部模型, 若  $X$  为任意三维光滑实代数集, 通过两个拉开操作, 我们可以得到一个新的光滑实代数集  $X'$ , 使得  $X' \stackrel{\text{diff}}{\sim} X \# (S^1 \times S^2)$ .

关于 Nash 猜想, Viterbo 和 Eliashberg 发展了一条完全不同的途径. 它依赖于如下观察: 对于自然的辛结构,  $X(\mathbb{R}) \subset X(\mathbb{C})$  是一个 Lagrange 子流形. 注意  $X(\mathbb{C})$  存在正

1) Dehn 手术的定义通常使用管状邻域, 但这两个版本等价. —— 原注

Ricci (里奇) 曲率, 这意味着它的 Lagrange 子流形不应存在负曲率. 下面列出 Viterbo 的一个未发表的结果.

**定理 25** 令  $X$  为紧致光滑实代数集, 它存在有理参数化. 则  $X(\mathbb{R})$  不微分同胚于一个双曲三维流形.

技术性细节相当繁琐, 读者若试图详细了解, 见 [Kha02]. [MW12] 则将上述方法推广至三维流形中, 其对于应 Thurston (瑟斯顿) 分类 (classification) 中的一些其它几何.

**注 26** (非射影情形的 Nash 猜想 [Kol02]) 对比翻转和 Dehn 手术操作, 人们可以证明: 对任意紧连通三维流形  $M^3$ , 存在光滑实代数拉开和爆缩 (blow-down) 的一系列操作

$$\mathbb{RP}^3 = X_0 \dashrightarrow X_1 \dashrightarrow \cdots \dashrightarrow X_r,$$

使得  $X_r$  微分同胚于  $M^3$ . 众所周知, 在三维情形, 通过拉开和爆缩操作的序列, 最后可能会得到光滑紧, 但并非射影的簇, 人们称之为 Moishezon (莫伊舍佐恩) 流形或代数空间. 这表明定理 23 中射影的条件以及定理 25 中辛形式存在的重要性.

### 3. 代数集上的弧空间

Nash 的第 2 篇代数几何学的论文, 写于 1968 年, 但其最后的发表却相当非正式 [Nash95]. 这篇文章通过一系列例子和评论, 讨论了 “人们已经遇到的一些有趣的结论”. 鉴于目前已存在许多关于弧空间的综述, 我们将不再陈述其细节. 关于这个主题, [JK16] 是一个相对初等的讨论, 更完整的讨论, 见 [PS15, dF16].

首先统一记号. 此后我们用到的  $X$  等记号均表示复代数 (解析) 集.

**定义 27** 令  $f_i(\mathbf{x})$  为多项式 (或解析函数), 并且令

$$(27.1) \quad X := \{\mathbf{x}: f_1(\mathbf{x}) = \cdots = f_r(\mathbf{x}) = 0\} \subset \mathbb{C}^N$$

为对应的复代数集 (解析集). 令  $p \in X$  是一个点. 对于很多理论, 下述例子

$$X := (x^a + y^b + z^c = 0) \subset \mathbb{C}^3 \quad p := (0, 0, 0)$$

具有代表性.  $X$  中一个通过点  $p$  的 (解析) 弧 (arc), 是指满足  $\Phi(0) = p$  的全纯映射

$$\Phi: \mathbb{D} \rightarrow X,$$

其中  $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$  是包含 0 的小圆盘. 等价地,  $\Phi$  也可由  $N$  个解析函数  $\phi_k(t)$  表示, 它们满足

$$(27.2) \quad f_i(\phi_1(t), \dots, \phi_N(t)) \equiv 0 \quad i = 1, \dots, r.$$

技术上而言, 通常允许  $\phi_k$  为形式幂级数将会更简单. 因此一个  $X$  上的形式弧 (formal arc) 可由  $N$  个形式幂级数  $\phi_k(t)$  给出:

$$(27.3) \quad f_i(\phi_1(t), \dots, \phi_N(t)) \equiv 0, \quad i = 1, \dots, r.$$

记  $\phi_k = \sum_j a_{kj} t^j$ , 并将 (27.3) 展开成  $t$  的幂级数

$$(27.4) \quad f_i(\phi_1(t), \dots, \phi_N(t)) = \sum_l H_{il}(a_{kj}) t^l,$$

其中  $H_{il}$  为多项式, 它仅涉及有限多个  $a_{kj}$ . 由此可将  $X$  的弧空间 (arc space) 看作无限维代数集

$$(27.5) \quad \text{Arc}(X, p) := \{(a_{kj}) : H_{il}(a_{kj}) = 0 : \forall i, l\} \subset \mathbb{C}^\infty,$$

其中, 对于  $1 \leq k \leq r, 0 \leq j < \infty$ ,  $a_{kj}$  为  $\mathbb{C}^\infty$  的坐标.

关于无限维代数集, 存在许多基本论点. 令人惊讶的是, 它们均满足优良的性质. 先不给定义, 让我们来看一些例子.

**例 28** ( $(xy = z^n)$  的弧空间) 我们通过一些明显的弧族开始. 令  $0 < m < n$ , 记  $x(t) = t^m(a_0 + a_1t + \cdots)$ , 以及  $z(t) = t(c_0 + c_1t + \cdots)$ . 若  $a_0 \neq 0$ , 我们可定义如下的弧:

$$\begin{aligned} x(t) &= t^m(a_0 + a_1t + \cdots), \\ y(t) &= t^{n-m}(a_0 + a_1t + \cdots)^{-1}(c_0 + c_1t + \cdots)^n, \\ z(t) &= t(c_0 + c_1t + \cdots). \end{aligned}$$

这样得到  $n-1$  个具有较好性质的弧族, 它们被自由变量  $a_i, c_i$  确定; 对此, 我们无需解方程.

不难验证, 对于上述  $n-1$  个弧的并集在  $\text{Arc}((xy = z^n), 0)$  的任一合理拓扑中稠密. 一旦建立无限维代数集  $\text{Arc}(X, p)$  的准确定义, 我们可得这  $n-1$  族对应了  $\text{Arc}((xy = z^n), 0)$  的  $n-1$  个不可约分支 (*irreducible components*).

**例 29** ( $(x^2 + y^3 = z^3)$  上的弧) 我们同样从一些“自由”族开始, 但在此处并不显然.

假定存在某个  $\text{ord } z(t)$  (即  $z(t)$  在  $t=0$  处零点的阶) 极小的弧. 除以  $z(t)^2$  可得

$$(29.1) \quad \left(\frac{x(t)}{z(t)}\right)^2 + \left(\frac{y(t)}{z(t)}\right)^3 z(t) = z(t),$$

两个分式均为形式幂级数. 由此若  $1 - (y/z)^3$  可逆, 则  $z = (x/z)^2(1 - (y/z)^3)^{-1}$ . 往回代, 令  $x/z := u(t), y/z := v(t)$ , 它们给出弧:

$$(29.2) \quad x(t) = \frac{t^3 u^3}{1 - v^3}, \quad y(t) = \frac{t^2 u^2 v}{1 - v^3}, \quad z(t) = \frac{t^2 u^2}{1 - v^3},$$

这里  $u, v$  为任意形式幂级数, 且  $v^3(0) \neq 1$ .

接下来需要处理  $y(t), z(t)$  的首项差一个三次单位根  $\epsilon$  的情形. 在  $\text{ord } y(t) = \text{ord } z(t) = 1$  以及  $\text{ord } x(t) = 2$  的情形, 我们怀疑解的存在性. 重新将定义方程表示为  $x^2 = z^3 - y^3$ , 并对右边进行因式分解, 可知

$$(29.3) \quad x^2 = (z - \epsilon y)(z^2 + \epsilon z y + \epsilon^2 y^2),$$

除以  $y^2$ , 可得

$$(29.4) \quad \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \left(\frac{z - \epsilon y}{y}\right) \left(y \frac{z^2 + \epsilon z y + \epsilon^2 y^2}{y^2}\right).$$

若  $\text{ord } y(t) = \text{ord } z(t) = 1$ , 而  $\text{ord } x(t) = 2$ , 则  $\text{ord } (x/y) = 1$ , 最后一项的阶同样为 1. 此外由  $\epsilon$  的选择可知  $\text{ord } (z - \epsilon y) \geq 2$ , 因此  $\text{ord } ((z - \epsilon y)/y) \geq 1$ . 这样, (29.4) 更像是例 28 处理过的方程  $z^2 = xy$ . 其弧为

$$(29.5) \quad \frac{x}{y} = tw(t), \quad \frac{z - \epsilon y}{y} = tu(t), \quad y \frac{z^2 + \epsilon z y + \epsilon^2 y^2}{y^2} = tu(t)^{-1}v(t)^2.$$

对于任一  $\epsilon^3 = 1$ , 只要  $u(0) \neq 0$ , 我们可得弧

$$(29.6) \quad \begin{aligned} x(t) &= tw(t)y(t), \\ y(t) &= tw(t)^2(3\epsilon^2 u(t) + 3\epsilon tu(t)^2 + t^2 u(t)^3)^{-1}, \\ z(t) &= (\epsilon + tu(t))y(t). \end{aligned}$$

虽然并不显然, 但是正确的, 由 (29.2) 和 (29.6) 给出的 4 族弧在  $\text{Arc}((x^2 + y^3 = z^3), 0)$  中稠密, 此外, 它们均不包含于其它弧的闭包中. 这样可得  $\text{Arc}((x^2 + y^3 = z^3), 0)$  有 4 个不可约分支.

进行更多的计算后, Nash 注意到: 找寻“自由”弧族很像奇点分解 (resolution of singularities), 对  $X$  进行奇点分解可用于将  $\text{Arc}(X, p)$  表示为“自由”弧族的无交并 (关于奇点分解, 见 [Kol07]).

令人困惑的方面在于  $X$  可能存在许多不同的奇点分解, 这样将会得到冗余的弧族, 即它们中的一些包含在其它弧的闭包中. 就此课题, Nash 认为下述问题是这一主题的核心困难.

**问题 30** 刻画  $\text{Arc}(X, p)$  的不可约分支以及对应的“自由”弧族, 使得它们可以覆盖  $\text{Arc}(X, p)$  的一个稠密开子集.

对于曲面情形, Nash 提出这些不可约分支恰好对应于例外曲线, 这些例外曲线出现于奇点的极小分解中.

高维情形并不存在极小分解. 计算了一些富有启发性的例子后, Nash 认为  $\text{Arc}(X, p)$  的不可约分支恰好对应于奇点  $p \in X$  任意可能的分解中出现的例外除子. 人们将上述断言称为弧空间的 Nash 猜想.

Hironaka (广中平泛), Lejeune, Jalabert 以及他们的学生普及了上述猜想并取得了进展, 主要对曲面情形. 对此猜想, 最大的进展来自于 Fernández de Bobadilla 和 Pe Pereira 对曲面情形 Nash 猜想的证明 [FdBPP12]. de Fernex 和 Docampo 证明了高维情形的推广 [dFD16].

Ishii 和 Kollár [IK03] 在四维情形提出了第 1 个反例, 它是根据 de Fernex [dF13], 以及 Johnson 和 Kollár [JK13] 得到的. 我们现在已经知晓: 对于奇点

$$(x^2 + y^2 + z^2 + w^5 = 0) \subset \mathbb{C}^4,$$

其弧空间仅有一个不可约分支; 但在所有可能的分解过程中, 存在两个例外除子. 值得注意的是: Nash 指出这个方程是他的问题的第 1 个可能的反例.

在 Kontsevich (孔采维奇) 提出弧空间上的母题 (motivic) 积分 (1995 年未发表的讲义, 见 [DL99, Bat99]), 以及 Mustașă 利用弧空间解决双有理几何的一些问题后 [Mus02], 人们进一步提高了对弧空间的研究兴趣.

**致谢** (略)

## 参 考 文 献

- [AK92a] S. Akbulut and H. King, On approximating submanifolds by algebraic sets and a solution to the Nash conjecture, *Invent. Math.* 107 (1992), no. 1, 87–98, DOI 10.1007/BF01231882. MR1135465
- [AK92b] S. Akbulut and H. King, Topology of real algebraic sets, *Mathematical Sciences Research Institute Publications*, vol. 25, Springer-Verlag, New York, 1992. MR1225577
- [Bat99] V. V. Batyrev, Non-Archimedean integrals and stringy Euler numbers of log-terminal pairs, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* 1 (1999), no. 1, 5–33, DOI 10.1007/PL00011158. MR1677693
- [BCR98] J. Bochnak, M. Coste, and M.-F. Roy, Real algebraic geometry, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*, vol. 36, Springer-Verlag, Berlin, 1998. Translated from the 1987 French original; Revised by the authors. MR1659509
- [BD84] R. Benedetti and M. Dedò, Counterexamples to representing homology classes by real algebraic subvarieties up to homeomorphism, *Compositio Math.* 53 (1984), no. 2, 143–151. MR766294
- [Bea96] A. Beauville, Complex algebraic surfaces, *London Mathematical Society Lecture Note Series*, vol. 68, Cambridge University Press, Cambridge, 1983. Translated from the French by R. Barlow, N. I. Shepherd-Barron and M. Reid. MR732439
- [CLO92] D. Cox, J. Little, and D. O’Shea, Ideals, varieties, and algorithms, An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra, *Undergraduate Texts in Mathematics*, Springer-Verlag, New York, 1992. MR1189133
- [Com14] Annibale Comessatti, Sulla connessione delle superficie razionali reali, *Ann. Mat. Pura Appl.* 23 (1914), 215–283.
- [dlVP08] Ch. de la Vallée Poussin, Sur l’approximation des fonctions d’une variable réelle et de leurs dérivées par des polynômes et des suites finies de Fourier, *Bull. Acad. Sci. Belgique* (1908), 193–254.
- [dF13] T. de Fernex, Three-dimensional counter-examples to the Nash problem, *Compos. Math.* 149 (2013), no. 9, 1519–1534, DOI 10.1112/S0010437X13007252. MR3109732
- [dF16] Tommaso de Fernex, The space of arcs of an algebraic variety, *ArXiv e-prints* (2016).
- [dFD16] T. de Fernex and R. Docampo, Terminal valuations and the Nash problem, *Invent. Math.* 203 (2016), no. 1, 303–331, DOI 10.1007/s00222-015-0597-5. MR3437873
- [DIK00] A. Degtyarev, I. Itenberg, and V. Kharlamov, Real Enriques surfaces, *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1746, Springer-Verlag, Berlin, 2000. MR1795406
- [DL99] J. Denef and F. Loeser, Germs of arcs on singular algebraic varieties and motivic integration, *Invent. Math.* 135 (1999), no. 1, 201–232, DOI 10.1007/s002220050284. MR1664700
- [FdBPP12] J. Fernández de Bobadilla and M. P. Pereira, The Nash problem for surfaces, *Ann. of Math. (2)* 176 (2012), no. 3, 2003–2029, DOI 10.4007/annals.2012.176.3.11. MR2979864
- [Gra58] H. Grauert, On Levi’s problem and the imbedding of real-analytic manifolds, *Ann. of Math. (2)* 68 (1958), 460–472. MR0098847
- [IK03] S. Ishii and J. Kollár, The Nash problem on arc families of singularities, *Duke Math. J.* 120 (2003), no. 3, 601–620, DOI 10.1215/S0012-7094-03-12034-7. MR2030097

- [JK13] J. M. Johnson and J. Kollár, Arc spaces of cA-type singularities, *J. Singul.* 7 (2013), 238–252. MR3094648
- [JK16] J. M. Johnson and J. Kollár, Arcology, *Amer. Math. Monthly* 123 (2016), no. 6, 519–541, DOI 10.4169/amer.math.monthly.123.6.519. MR3510969
- [Kas10] A. M. Kasprzyk, Canonical toric Fano threefolds, *Canad. J. Math.* 62 (2010), no. 6, 1293–1309, DOI 10.4153/CJM-2010-070-3. MR2760660
- [Kha02] V. Kharlamov, Variétés de Fano réelles (d’après C. Viterbo) (French), *Astérisque* 276 (2002), 189–206. Séminaire Bourbaki, Vol. 1999/2000. MR1886761
- [KM98] J. Kollár and S. Mori, *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 134, Cambridge University Press, Cambridge, 1998. With the collaboration of C. H. Clemens and A. Corti; Translated from the 1998 Japanese original. MR1658959
- [Kol98] J. Kollár, Real algebraic threefolds. I. Terminal singularities, *Collect. Math.* 49 (1998), no. 2–3, 335–360. Dedicated to the memory of Fernando Serrano. MR1677128
- [Kol99a] J. Kollár, Real algebraic threefolds. II. Minimal model program, *J. Amer. Math. Soc.* 12 (1999), no. 1, 33–83, DOI 10.1090/S0894-0347-99-00286-6. MR1639616
- [Kol99b] J. Kollár, Real algebraic threefolds. III. Conic bundles, *J. Math. Sci. (New York)* 94 (1999), no. 1, 996–1020, DOI 10.1007/BF02367244. Algebraic geometry, 9. MR1703903
- [Kol00] János Kollár, Real algebraic threefolds. IV. Del Pezzo fibrations, *Complex Analysis and Algebraic Geometry*, de Gruyter, Berlin, 2000, pp. 317–346.
- [Kol01a] J. Kollár, The topology of real algebraic varieties, *Current Developments in Mathematics*, 2000, Int. Press, Somerville, MA, 2001, pp. 197–231. MR1882536
- [Kol01b] J. Kollár, Which are the simplest algebraic varieties?, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 38 (2001), no. 4, 409–433 (electronic), DOI 10.1090/S0273-0979-01-00917-X. MR1848255
- [Kol02] János Kollár, The Nash conjecture for nonprojective threefolds, *Contemp. Math.*, vol. 312, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, pp. 137–152.
- [Kol07] J. Kollár, *Lectures on resolution of singularities*, Annals of Mathematics Studies, vol. 166, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2007. MR2289519
- [Kol14] János Kollár, The structure of algebraic varieties, *Proceedings of ICM*, Seoul, 2014, Vol I., Kyung Moon SA, <http://www.icm2014.org/en/vod/proceedings.html>, 2014, pp. 395–420.
- [Kro1881] Leopold Kronecker, Zur Theorie der Elimination einer Variablen aus zwei algebraischen Gleichungen, *Königl. Preuss. Acad. Wiss. (Berlin)* (1881), 535–600, See also: Leopold Kronecker, *Werke*: Teubner (1895), Chelsea reprint (1968), Vol. I. pp.113–192.
- [Kur88] K. Kurdyka, Ensembles semi-algébriques symétriques par arcs (French), *Math. Ann.* 282 (1988), no. 3, 445–462, DOI 10.1007/BF01460044. MR967023
- [Man14] F. Mangolte, Topologie des variétés algébriques réelles de dimension 3 (French), *Gaz. Math.* 139 (2014), 5–34. MR3183986
- [Man16] Frédéric Mangolte, *Real Algebraic Geometry*, Panoramas et synthèses, Soc. Math. France, Paris, 2016,
- [Mil56] J. Milnor, On manifolds homeomorphic to the 7-sphere, *Ann. of Math. (2)* 64 (1956), 399–405. MR0082103
- [Mil61] J. Milnor, Two complexes which are homeomorphic but combinatorially distinct, *Ann. of Math. (2)* 74 (1961), 575–590. MR0133127
- [Mil68] J. Milnor, Singular points of complex hypersurfaces, *Annals of Mathematics Stud-*



- ies, No. 61, Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1968. MR0239612
- [Mor58] C. B. Morrey Jr., The analytic embedding of abstract real-analytic manifolds, *Ann. of Math. (2)* 68 (1958), 159–201. MR0099060
- [Mus02] M. Mustață, Singularities of pairs via jet schemes, *J. Amer. Math. Soc.* 15 (2002), no. 3, 599–615 (electronic), DOI 10.1090/S0894-0347-02-00391-0. MR1896234
- [MW12] Frédéric Mangolte and Jean-Yves Welschinger, Do uniruled six-manifolds contain Sol Lagrangian submanifolds?, *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2012), no. 7, 1569–1602. MR2913184
- [Nash52] J. Nash, Real algebraic manifolds, *Ann. of Math. (2)* 56 (1952), 405–421. MR0050928
- [Nash95] J. F. Nash Jr., Arc structure of singularities, *Duke Math. J.* 81 (1995), no. 1, 31–38 (1996), DOI 10.1215/S0012-7094-95-08103-4. A celebration of John F. Nash, Jr. MR1381967
- [PS15] C. Plénat and M. Spivakovsky, The Nash problem and its solution: a survey, *J. Singul.* 13 (2015), 229–244, DOI 10.5427/jsing.2015.13m. MR3343624
- [Sei36] H. Seifert, Algebraische Approximation von Mannigfaltigkeiten (German), *Math. Z.* 41 (1936), no. 1, 1–17, DOI 10.1007/BF01180402. MR1545601
- [Sha74] I. R. Shafarevich, Basic algebraic geometry, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1974. Translated from the Russian by K. A. Hirsch; Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 213. MR0366917
- [Shi87] M. Shiota, Nash manifolds, *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1269, Springer-Verlag, Berlin, 1987. MR904479
- [Sil89] R. Silhol, Real algebraic surfaces, *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1392, Springer-Verlag, Berlin, 1989. MR1015720
- [Sul71] D. Sullivan, Combinatorial invariants of analytic spaces, *Proceedings of Liverpool Singularities—Symposium, I (1969/70)*, Springer, Berlin, 1971, pp. 165–168. MR0278333
- [Tho54] R. Thom, Quelques propriétés globales des variétés différentiables (French), *Comment. Math. Helv.* 28 (1954), 17–86. MR0061823
- [Tog73] A. Tognoli, Su una congettura di Nash, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3)* 27 (1973), 167–185. MR0396571
- [Tog88] A. Tognoli, Any compact differentiable submanifold of  $\mathbb{R}^n$  has an algebraic approximation in  $\mathbb{R}^n$ , *Topology* 27 (1988), no. 2, 205–210, DOI 10.1016/0040-9383(88)90039-0. MR948183
- [vdW30] B. L. van der Waerden, Topologische Begründung des Kalküls der abzählenden Geometrie (German), *Math. Ann.* 102 (1930), no. 1, 337–362, DOI 10.1007/BF01782350. MR1512581
- [Wal57] A. H. Wallace, Algebraic approximation of manifolds, *Proc. London Math. Soc.* (3) 7 (1957), 196–210. MR0087205
- [Whi34] H. Whitney, Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets, *Trans. Amer. Math. Soc.* 36 (1934), no. 1, 63–89, DOI 10.2307/1989708. MR1501735
- [Whi36] H. Whitney, Differentiable manifolds, *Ann. of Math. (2)* 37 (1936), no. 3, 645–680, DOI 10.2307/1968482. MR1503303

(陈见柯 译 张宝群 校)