微分拓扑 —— 46 年后的回顾

John Milnor

本刊编者按 近年来，流形拓扑学取得了两项重要的进展：Perelman (佩雷尔曼) 证明了 Thurston (瑟斯顿) 几何化猜想和 Hill (希尔), Hopkins (霍普金斯), Ravenel 解决了 Kervaire (凯韦雷) 不变量 1 问题. 值此之际，微分拓扑学开山大师 John Milnor (米尔诺) 撰文回顾了自 1956 年他发现七维球面上怪异光滑结构的惊人工作以来微分拓扑学的进展. 我们推荐这篇综述文章，帮助读者了解微分拓扑学近半个世纪的发展脉络.

在 1965 年赫德里克演讲 (Hedrick Lectures) 上 1), 我描述了微分拓扑作为一个年轻且发展迅速的领域的概貌. 在之后的这些年里，微分拓扑和几何拓扑中很多以前看似完全不可能解决的问题由于引入全新的工具而被解决. 我在下面简短的综述中将描述这些发展中的一些精彩部分.

1. 主要发展

第一个大的突破是 Kirby (柯尔比) 和 Siebenmann [1969, 1969a, 1977] 的对于把一个拓扑流形三角剖分成分片线性 (piecewise linear, PL) 流形的问题的阻碍理论 (这是早期 Casson-Sullivan (卡森 – 沙利文) 和 Lashof (拉萧夫)- Rothenberg 工作的深化. 参看 [Ranicki, 1996]). 如果 B_{Top} 和 B_{PL} 为稳定分类空间 (如同在演讲中所描述), 他们证明相对同伦群 $\pi_j(B_{\mathrm{Top}}, B_{\mathrm{PL}})$ 在 $j=4$ 时为二阶循环群，而在其它情形都为零. 从而对于给定的 n 维拓扑流形 M^n, 存在一个将 M^n 三角剖分成分片线性流形的阻碍 $\mathbf{o} \in H^4(M^n, \mathbb{Z}/2)$. 当维数 $n \geq 5$ 时这是唯一的阻碍. 给定一个三角剖分，有一个在 $H^3(M^n, \mathbb{Z}/2)$ 中的类似的阻碍，在相差一个拓扑同痕于恒等映射的分片线性同构的意义下阻碍是唯一的. 特别地，他们证明了下面结果.

定理 1 *如果一个无边的拓扑流形 M^n 满足*

$$H^3(M^n; \mathbb{Z}/2) = H^4(M^n; \mathbb{Z}/2) = 0 \text{ 且 } n \geq 5,$$

则它在分片线性同构的意义下具有唯一一个分片线性流形结构.

(对于带边流形需要假设 $n > 5$.) 对于维数 $n \leq 3$ 的所有流形，相应的定理在更早的时候已经被 Moise (莫伊斯) [1952] 证明. 然而，我们将看到相应的结论在四维时是错的.

从分片线性结构过渡到光滑结构的一个类似的阻碍理论此前已经由 Munkres [1960,

译自： Notices of the AMS, Vol.58 (2011), No.6, p.804–809, Differential Topology Forty-six Years Later, John Milnor, figure number 1.
作者是石溪大学的数学教授，他的邮箱地址是 jack@math.sunysb.edu.

1) 这些演讲已经被 MSRI 数字化, 很快将可以获得. 感谢 Dusa McDuff 找到原来的录音. (关于 Wilder 的引言，请参看 [Milnor, 1999]).—— 原注

1964a, 1964b] 和 Hirsch (赫希) [1963] 引入. (也可以参考 [Hirsch-Mazur (马祖尔), 1974].) 此外, Cerf (瑟夫) 填补了一个关键性步骤, 他通过困难的几何论证证明三维球面上的保定向微分同胚构成的空间是连通的. (参看 Cartan (嘉当) 讨论班 1962/63 年讲义和 [Cerf, 1968].) 再综合其它一些已知结果, 可以得到下面结论.

定理 2 *每个维数 $n \leq 7$ 的分片线性流形都有一个相容的微分结构, 且当 $n < 7$ 时, 在微分同胚的意义下唯一.*

更多的信息参见本文最后的 *进一步的细节*.

第 2 个大的突破是 Freedman (弗里德曼) [1982] 对单连通的闭四维拓扑流形的分类. 他运用极其不可微的方法证明了这种流形由下列不变量唯一决定:

(1) 对称双线性型 $H^2 \otimes H^2 \to H^4 \cong \mathbb{Z}$ 的同构类, 其中 $H^k = H^k(M^4; \mathbb{Z})$;

(2) Kirby-Siebenmann 不变量 $\mathbf{o} \in H^4(M^4; \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2$.

除了双线性型的行列式为 ± 1 和在 "偶情形" (即对任意 $x \in H^2$ 有 $x \cup x \equiv 0 \pmod{2H^4}$) 时 Kirby-Siebenmann 不变量必须同余于 (1/8) 倍的号差这两个限制之外, 这些不变量可以任意指定. 作为例子, 四维拓扑流形的 Poincaré (庞加莱) 假设是一个直接推论. 因为如果 M^4 是一个同伦球, 则 H^2 和阻碍类都为零.

一年之后, Donaldson (唐纳森) [1983] 用规范理论的方法证明这些拓扑流形中很多都没有任何光滑结构 (因此由定理 2 可知它们也不能被三角剖分成分片线性流形). 确切的说, 如果 M^4 是光滑, 单连通的并且具有正定的双线性型, 他证明这个双线性型必定能被对角化. 因此 M^4 一定同胚于若干个复射影平面的连通和. 有很多行列式等于 1 的正定双线性型, 在偶情形时满足号差能够被 16 整除, 但是不能被对角化. (例如, 参考 [Milnor-Husemoller, 1973].) 每个这样的双线性型都对应一个不具有微分结构的拓扑流形 M^4, 但使得 $M^4 \times \mathbb{R}$ 在微分同胚的意义下具有唯一一个光滑结构.

结合 Freedman 的拓扑结果和 Donaldson 的解析结果很快可以得出一些令人吃惊的推论. 例如, $\mathbb{R}^4$ 具有不可数多个不同构的光滑或分片线性结构 [Gompf, 1993]. 所有其它维数具有很好的性质: 对于 $n > 4$, Stallings [1962] 证明拓扑空间 $\mathbb{R}^n$ 在分片线性同构的意义下有唯一的分片线性结构. 结合 $n < 4$ 时 Moise 的结果和 Munkres-Hirsch-Mazur 的阻碍理论可以知道在微分同胚的意义下 $\mathbb{R}^n$ 具有唯一的微分结构, 其中 $n \neq 4$.

一个关于三维流形令人满意的理论的出现花了更长的时间. 第一个里程碑是 Thurston [1982, 1986] 的几何化猜想, 这一猜想为三维流形理论应该是什么样的建立了目标. 这个猜想最终被 Perelman [2002, 2003a, 2003b] 应用基于 Ricci (里奇) 流的困难的偏微分方程论证而证明了. (参考 Morgan-Tian (莫尔根 – 田刚) [2007] 和 Kleiner-Lott [2008].) 三维 Poincaré 假设作为一个特殊的情形而得证.

2. Poincaré 假设: 3 种版本

首先考虑纯粹的拓扑版本.

定理 3 *拓扑 Poincaré 假设对于所有维数都成立.*

即, 每一个同伦于 n 维球面的闭拓扑流形必同胚于 n 维球面. 当 $n > 4$ 时, 这个结果被 Newman (纽曼) [1966] 和 Connell [1967] 证明. 他们都应用了 Stallings [1960] 的

"engulfing 方法". $n=4$ 时则是 Freedman 的结果. $n=3$ 时这归功于 Perelman: 用 Moise [1952] 结果从拓扑情形转到分片线性情形，然后用 Munkres-Hirsch-Mazur 的阻碍理论从分片线性情形转到光滑情形. □

定理 4 *分片线性 Poincaré 假设对于所有 $n \neq 4$ 的 n 维流形都成立，对于四维还是未知的.*

即每一个同伦于 n 维球面的 n 维闭分片线性流形必分片线性同胚于 n 维球面，其中 $n \neq 4$. 当 $n>4$ 时，这个结果被 Smale (斯梅尔) [1962] 证明. 而 $n=3$ 时由 Perelman 的工作和 Munkres-Hirsch-Mazur 的阻碍理论得到. □

微分 Poincaré 假设更加复杂，它对某些维数正确而对其他一些维数是错的，在四维还是完全神秘的. 我们把问题阐述得更加精确些，首先我们注意到所有闭的光滑的 n 维同伦球 ($=n$ 维拓扑球) 的保定向微分同胚类所构成的集合在连通和运算下构成一个交换幺半群 S_n. 事实上这个幺半群是一个有限交换群，可能除了 $n=4$. 下面的大部分梗概都基于文章 [Kervaire-Milnor, 1963], 该文章主要描述了在 $n>4$ 时怎样通过球面的稳定同伦群来计算这些群. [1] 不幸的是，很多证明都被推迟到该文章的第 2 部分，但是这部分一直都没有完成. 然而，未给出的论证已经在其他地方得到补充，特别可参看 [Levine, 1985].

在 $n=3$ 时应用 Perelman 的结果，对较小的 n, 群 S_n 可以描述如下 (表 1). (其中，例如 $2 \cdot 8$ 代表群 $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/8$, 1 代表平凡群.)

表 1

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
S_n	1	1	1	?	1	1	28	2	2·2·2	6	992	1	3	2	2· 8128	2	2·8	2·8

因此当维数为 1, 2, 3, 5, 6 和 12 时，微分 Poincaré 假设成立，但是对于四维还不知道. 我曾经猜想它对于所有更高维都是错的. 然而, Mahowald 已经指明至少有一个例外的情形： *群 S_{61} 也是平凡的.*(参考下面的 *进一步的细节*.)

问题 对于所有 $n>6$ 且 $n \neq 12, 61$, 群 S_n 是否非平凡？

(因为球面的稳定同伦群只有在 64 维以下才被完全计算出来，所以当 n 大时，任何精确的计算是不可能的. 然而，很有可能我们的知识已经足够回答上面这个问题了.)

记球面的稳定同伦群为

$$\Pi_n = \pi_{n+q}(\mathbb{S}^q) \text{ 其中 } q > n+1,$$

设 $J_n \subset \Pi_n$ 为稳定 Whitehead (怀特黑德) 同态 $J: \pi_n(\mathbf{SO}) \to \Pi_n$ 的像 [Whitehead, 1942]. 这个子群 J_n 是循环群，其阶为 [2]:

1) Kervaire-Milnor 的文章考虑的是同伦球在 $h-$配边下的等价类构成的群 Θ_n. 由 Smale [1962] 的 $h-$配边定理可知，当 $n \neq 4$ 时, $S_n \xrightarrow{\cong} \Theta_n$, 所以只有在 $n=4$ 时才有区别. 然而这个区别在四维时是非常重要的，因为 Θ_4 是平凡的，而 S_4 的结构是一个尚未解决的重要问题. —— 原注

2) 计算 $|J_{4k-1}|$ 是 *Adams* (亚当斯) 猜想 [Adams, 1963, 1965] 的一个特殊情形. 它的证明由 Mahowald [1970] 完成, 整个 Adams 猜想被 Quillen (奎伦) [1971], Sullivan [1974] 和 Becker (贝克尔)-Gottlieb [1975] 证明. Adams 还证明了 J_n 总是 Π_n 的直和项. —— 原注

$$|J_n| = \begin{cases} \dfrac{B_k}{4k} \text{ 的分母} & \text{当 } n = 4k-1, \text{ 时} \\ 2 & \text{当 } n \equiv 0, 1 \pmod 8 \text{ 时, 和} \\ 1 & \text{当 } n \equiv 2, 4, 5, 6 \pmod 8 \text{ 时.} \end{cases}$$

其中 B_k 是 Bernoulli (伯努利) 数，例如，

$$B_1 = \frac{1}{6},\ B_2 = \frac{1}{30},\ B_3 = \frac{1}{42},\ B_4 = \frac{1}{30},\ B_5 = \frac{5}{66},\ B_6 = \frac{691}{2730},$$

分式 $\frac{B_k}{4k}$ 必须约化到最简形式. (比较 [Milnor-Stasheff, 1974, 附录 B].)

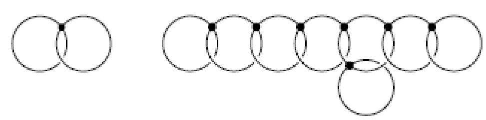
根据 Pontrjagin (庞特里亚金) 和 Thom (托姆), 第 n 个稳定项 Π_n 也可以表示为所有标架流形的标架配边类所构成的群. (这里所有的流形被看做嵌入在一个高维的欧式空间中，一个 标架 表示选择法丛的一个平凡化.) 任何一个同伦球都可以稳定平行化，因此具有标架. 如果我们改变标架的选择，那么在 Π_n 中相应的类被 J_n 中的一个元素所改变. 因此有正合列：

$$0 \to S_n^{\mathbf{bp}} \to S_n \to \Pi_n / J_n, \tag{1}$$

其中 $S_n^{\mathbf{bp}} \subset S_n$ 是由所有界定一个可平行化流形的同伦球所构成的子群. 这个子群是 S_n 中被理解的最好的一部分. 它可以部分的如下描述.

定理 5 假设 $n \neq 4$, 群 $S_n^{\mathbf{bp}}$ 是一个有限阶循环群，它的一个生成元可以确切地写出. 事实上，这个群是：

- 平凡的，若 n 为偶数；
- 平凡的或二阶循环群，若 $n = 4k-3$;
- $2^{2k-2}(2^{2k-1}-1) \cdot \mathrm{Num}\left(\frac{4B_k}{k}\right)$ 阶循环群, 若 $n = 4k-1 > 3$, 其中 $\mathrm{Num}\left(\frac{4B_k}{k}\right)$ 表示 $\frac{4B_k}{k}$ 的分子.



(最后一个数依赖于上面所描述的 $|J_{4k-1}|$ 的计算.) 在奇数情形，假设 $n = 2q-1$, $S_{2q-1}^{\mathbf{bp}}$ 的一个具体的生成元能够通过 q 维球面的切丛的球体丛作为基本构件按照上图方式构造出来.

这里每一个圆周表示我们的一个 $2q$ 维构件，它是一个带边的可平行化流形，每个点代表两个这样的流形交叉粘贴使得它们的中心 q 维球面横截相交并且相交数为 1 的垂直构造 (plumbing construction). 结果得到一个光滑的可平行化带角流形. 把角光滑化之后我们得到一个具有光滑边界的光滑流形 X^{2q}.

当 q 为奇数，应用左图，当 q 为偶数，应用右图. 在每一种情形中，如果 $q \neq 2$, 得到的光滑边界 ∂X^{2q} 将是一个表示 $S_{2q-1}^{\mathbf{bp}}$ 的生成元的同伦球. (当 $q = 2$ 时除外，因为 ∂X^4 仅仅是一个三维同调球，在 $S_{2q-1}^{\mathbf{bp}}$ 是平凡时的其它情形，边界将微分同胚于标准的 $2q-1$ 维球面.)

正合序列 (1) 能够被下面信息所补充.

定理 6 设 $n \neq 2 \pmod 4$, Π_n 中的任何元素能够被一个拓扑球表示. 因此正合序列 (1) 有一个更细致的形式

$$0 \to S_n^{\mathbf{bp}} \to S_n \to \Pi_n / J_n \to 0. \tag{2}$$

然而，对于 $n=4k-2$, 它扩展成一个正合序列

$$0 \longrightarrow S_{4k-2}^{\mathbf{bp}} \longrightarrow S_{4k-2} \longrightarrow \Pi_{4k-2}/J_{4k-2} \xrightarrow{\Phi_k} \mathbb{Z}/2 \longrightarrow S_{4k-3}^{\mathbf{bp}} \longrightarrow 0. \tag{3}$$

Brumfiel [1968, 1969, 1970] 进一步证明在 $n \neq 2^k-3$ 时，正合列 (2) 是分裂正合的. (事实上，它仅仅在 $n=2^k-3 \geq 125$ 时可能不是分裂的. 参见下面的讨论.)

(3) 中的 *Kervaire*同态 Φ_k 由 [Kervaire, 1960] 引入. (像 $\Phi_k(\theta) \in \mathbb{Z}/2$ 被称为同伦类 θ 的 *Kervaire* 不变量.) 因此这里有两种可能:

- 如果 $\Phi_k=0$, 则 $S_{4k-3}^{\mathbf{bp}} \cong \mathbb{Z}/2$, 由上面所描述的流形 ∂X^{4k-2} 生成，且 Π_{4k-2} 中的每个元素都可以用同伦球表示.
- 如果 $\Phi_k \neq 0$, 则 $S_{4k-3}^{\mathbf{bp}}=0$. 这表示 X^{4k-2} 的边界微分同胚于标准球面 S^{4k-3}. 我们能够粘贴一个 $(4k-2)$ 维球体到这个边界从而得到一个不标架配边于任何同伦球的带标架 $(4k-2)$ 维流形. 在这种情形下, Φ_k 的核是 Π_{4k-2}/J_{4k-2} 中由那些能够被同伦球表示的标架配边类所组成的一个指数为 2 的子群.

判断何时 $\Phi_k=0$ 是理解同伦球所构成的群的最后一个主要未解决问题. 现在除了一种情形外，它基本上由 Hill , Hopkins 和 Ravenel 完全解决:

定理 7 当 $k=1, 2, 4, 8, 16$, 和可能 $k=32$ 时, Kervaire 同态 Φ_k 非零，但是其他情形都为零.

事实上，Browder (布劳德) [1969] 证明只有当 n 为 2 的幂次时，Φ_k 才可能非零. Barratt, Jones (琼斯) 和 Mahowald [1984] 验证了当 $k=1, 2, 4, 8, 16$ 时 Φ_k 确实非零. 最终，Hill, Hopkins 和 Ravenel [2010] 证明当 $k>32$ 时 $\Phi_k=0$. (他们的基本工具是一个精心构造的周期为 256 的广义上同调理论.)

因此只有 $k=32$, 即 $4k-2=126$ 时,这个问题还没有解决. 特别的,对于 $n \neq 4, 125, 126$ 时，如果 $|\Pi_n|$ 的阶已知，则我们能够计算 n 维怪球的数目 $|S_n|$. 实际上，如果我们去掉 $4, 126$ 和 $2^k-3 \geq 125$ 这些情形，则当 Π_n 的结构已知时，群 S_n 能够被完全确定. [1)]

3. 进一步的细节

这里是现有的关于 Π_n 的知识的一个概要. 因为直和项 J_n 精确的知道，我们只需要看商 Π_n/J_n. 最主要的困难部分是 2−准素分支. 其中 $n \leq 64$ 的所有情形都被 Kochman [1990] 计算以及 Kochman 和 Mahowald [1995] 校正. 3 和 5−准素分支在更大的范围内被 Ravenel [1986] 所计算. 对于 $p \geq 7$, p−准素分支在 $n<82$ 时是平凡的. (实际上，对于任何 p, 当 $n<2p(p-1)-2$ 时, Π_n/J_n 的 p−准素分支是平凡的. 当 $n=2p(p-1)-2$ 时 [2)] 为 p 阶循环群.)

因此当 $n \leq 64$ 时，稳定项 Π_n 是完全知道的，因此群 S_n 在 $n \leq 64$ 且 $n \neq 4$ 时也完全知道. 在表 2 中记号 b_k 表示子群 $S_{4k-1}^{\mathbf{bp}} \subset S_{4k-1}$ 的阶，而记号 $2^3 \cdot 4$ 代表 3 个 $\mathbb{Z}/2$ 项和一个 $\mathbb{Z}/4$ 项的直和. 平凡群用加重的点表示. 所有对应于子群 $S_n^{\mathbf{bp}}$ 的项都已经用下划

1) 这里还需要知道 Φ_k 总是 Π_{4k-2} 的直和项 (至少对于 $4k-2 \neq 126$) 这一事实. Mahowald 告诉我在 62 维这是正确的，而在其他 4 种情形是直接了当的.—— 原注

2) 原文把等号左端的 n 误为 p .—— 校注

表 2

n	0	1	2	3	4	5	6	7
0 +	–	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	?	$\bullet$	$\bullet$	$\underline{b}_2$
8 +	2	$\underline{2}\cdot 2^2$	6	$\underline{b}_3$	$\bullet$	3	2	$\underline{b}_4\cdot 2$
16 +	2	$\underline{2}\cdot 2^3$	$2\cdot 8$	$\underline{b}_5\cdot 2$	24	$\underline{2}\cdot 2^2$	2^2	$\underline{b}_6\cdot 2\cdot 24$
24 +	2	$\underline{2}\cdot 2$	$2\cdot 6$	$\underline{b}_7$	2	3	3	$\underline{b}_8\cdot 2^2$
32 +	2^3	$\underline{2}\cdot 2^4$	$2^3\cdot 4$	$\underline{b}_9\cdot 2^2$	6	$\underline{2}\cdot 2\cdot 6$	$2\cdot 60$	$\underline{b}_{10}\cdot 2^4\cdot 6$
40 +	$2^4\cdot 12$	$\underline{2}\cdot 2^4$	$2^2\cdot 24$	$\underline{b}_{11}$	8	$\underline{2}\cdot 2^3\cdot 720$	$2^3\cdot 6$	$\underline{b}_{12}\cdot 2^3\cdot 12$
48 +	$2^3\cdot 4$	$\underline{2}\cdot 6$	$2^2\cdot 6$	$\underline{b}_{13}\cdot 2^2\cdot 4$	$2^2\cdot 6$	$\underline{2}\cdot 2^4$	$2\cdot 4$	$\underline{b}_{14}\cdot 3$
56 +	2	$\underline{2}\cdot 2^3$	2^2	$\underline{b}_{15}\cdot 2^2$	4	$\bullet$	$2\cdot 12$	$\underline{b}_{16}\cdot 2^3$

表 3

k	2	3	4	5	6	7	8	9
b_k	28	992	8128	261632	1.45×10^9	6.71×10^7	1.94×10^{12}	7.54×10^{14}

k	10	11	12	13	14	15	16
b_k	2.4×10^{16}	3.4×10^{17}	8.3×10^{21}	7.4×10^{20}	3.1×10^{25}	$5.\times 10^{29}$	1.8×10^{31}

线标明. (注：$S^{\mathbf{bp}}_{4k-3}$ 是二阶循环群, 在 1 或 5 列由一个 $\underline{2}$ 表示, 其中除掉 $k = 1, 2, 4, 8, 16$ 的情形.) 在这个取值范围内，群 S_n 仅在当 $n = 1, 2, 3, 5, 6, 12, 61$ 和可能为 4 的时候才为平凡群.

对应的 b_k 的值不是很难计算，但是增长的很快. 参考表 3 (其中对于 $k > 5$ 是近似值). 注意到对于其中有很多因子的 k, 相应的 b_k 会比较大.

最后，我们给出前文所推迟的一个证明.

定理 2 的证明梗概 不难验证由所有单位球面上的保定向微分同胚的光滑同痕类组成的群 $\pi_0(\mathrm{Diff}^+(\mathbb{S}^n))$ 是交换的. 令 Γ_n 是 $\pi_0(\mathrm{Diff}^+(\mathbb{S}^{n-1}))$ 模掉由所有能够扩张到单位球体的同痕类所构成的子群而得到的商群. 有一个自然的嵌入 $\Gamma_n \subset S_n$: 将每一个 $(f) \in \Gamma_n$ 对应到将两个 n 维单位球体沿着边界用 f 粘贴起来所得的 “扭曲的 n 维球面” (twisted n-sphere). 从 [Smale, 1962] 可知，当 $n \geq 5$ 时, $\Gamma_n = S_n$. 从 [Smale, 1959] 可知 $\Gamma_3 = 0$. 因为很容易验证 $\Gamma_1 = 0$ 和 $\Gamma_2 = 0$, 我们有

$$\Gamma_n = S_n \quad \text{对于任何} \quad n \neq 4.$$

另外, Cerf 证明 [1] $\pi_0(\mathrm{Diff}^+(\mathbb{S}^3)) = 0$, 因此 $\Gamma_4 = 0$ (虽然 S_4 完全不知道). 应用上面所描述的关于 S_n 的结果，可以得到当 $n < 7$ 时, $\Gamma_n = 0$, 且对于所有的 n, Γ_n 是一个有限交换群.

对于给定的分片线性流形 M^n, M^n 上存在光滑结构的 Munkres-Hirsch-Mazur 阻碍类在群 $H^k(M^n;\Gamma_{k-1})$ 中，而光滑结构唯一性的阻碍类在群 $H^k(M^n;\Gamma_k)$ 中. (不像上面所讨论的大多数构造，这个工作对四维也成立.) 因而我们证明了定理 2. $\square$

更多关于历史的讨论请参看 Milnor [1999, 2007, 2009].

1) Hatcher [1983] 证明了含入映射 $SO(4) \to \mathrm{Diff}^+(\mathbb{S}^3)$ 是一个同伦等价这个更强结果. 另一方面，当 $n \geq 7$ 时, Antonelli, Burghelea 和 Kahn [1972] 证明 $\mathrm{Diff}^+(\mathbb{S}^n)$ 不具有任何有限复形的同伦型. (关于更早的结果，参看 [Novikov, 1963].) 当 $n = 6$ 时，群 $\mathrm{Diff}^+(\mathbb{S}^n)$ 不是连通的，因为 $\Gamma_7 \neq 0$; 但是我不知道关于 $n = 4, 5$ 的任何结果. —— 原注

参考文献

[Adams, 1963] J. F. Adams, On the groups J(X) I, Topology 2 (1963), 181–195.

[Adams, 1966] ______ , On the groups J(X) II, Topology 3 (1965), 137–171.

[Antonelli, Burghelea and Kahn, 1972] P. L. Antonelli, D. Burghelea, and P. J. Kahn, The nonfinite homotopy type of some diffeomorphism groups, Topology 11 (1972), 1–49.

[Barratt-Jones-Mahowald, 1984] M. G. Barratt, J. D. S. Jones, and M. E. Mahowald, Relations amongst Toda brackets and the Kervaire invariant in dimension 62, J. London Math. Soc. 30 (1984), 533–550.

[Becker-Gottlieb, 1975] J. C. Becker and D. H. Gottlieb, The transfer map and fiber bundles, Topology 14 (1975), 1–12.

[Browder, 1969] W. Browder, The Kervaire invariant of framed manifolds and its generalization, Ann. of Math. 90 (1969), 157–186.

[Brumfiel, 1968] G. Brumfiel, On the homotopy groups of BPL and PL/O, Ann. of Math. 88 (1968), 291–311.

[Brumfiel, 1969] ______ , On the homotopy groups of BPL and PL/O. II, Topology 8 (1969), 305–311.

[Brumfiel, 1970] ______ , On the homotopy groups of BPL and PL/O. III, Michigan Math. J. 17 (1970), 217–224.

[Cerf, 1968] J. Cerf, Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension trois ($\Gamma_4 = 0$), Lecture Notes in Mathematics, 53, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1968, xii+133 pp.

[Connell, 1967] E. H. Connell, A topological Hcobordism theorem for $n \geq 5$, Illinois J. Math. 11 (1967), 300–309.

[Donaldson, 1983] S. K. Donaldson, An application of gauge theory to four-dimensional topology, J. Differential Geom. 18 (1983), 279–315.

[Freedman, 1982] M. H. Freedman, The topology of four-dimensional manifolds, J. Differential Geom. 17 (1982), 357–453.

[Gompf, 1993] R. Gompf, An exotic menagerie, J. Differential Geom. 37 (1993), 199–223.

[Hatcher, 1983] A. E. Hatcher, A proof of the Smale conjecture, $\mathrm{Diff}(S^3) \simeq O(4)$, Ann. of Math. 117 (1983), 553–607.

[Hill-Hopkins-Ravenel, 2010] M. A. Hill, M. J. Hopkins, and D. C. Ravenel, On the nonexistence of elements of Kervaire invariant one, arXiv 0908.3724v2 [math.AT] (November, 2010).

[Hirsch, 1963] M. W. Hirsch, Obstruction theories for smoothing manifolds and maps, Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963), 352–356.

[Hirsch-Mazur, 1974] M. W. Hirsch and B. Mazur, Smoothings of Piecewise Linear Manifolds, Annals of Mathematics Studies, No. 80. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1974. ix+134 pp.

[Kervaire, 1960] M. A. Kervaire, A manifold which does not admit any differentiable structure, Comment. Math. Helv. 34 (1960), 257–270.

[Kervaire-Milnor, 1963] M. A. Kervaire and J. Milnor, Groups of homotopy spheres, I, Ann. of Math. 77 (1963), 504–537.

[Kirby-Siebenmann, 1969] R. C. Kirby and L. C. Sieben- mann, On the triangulation of manifolds and the Hauptvermutung, Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969), 742–749.

[Kirby-Siebenmann, 1969a] ______ , For manifolds the Hauptvermutung and the triangulation conjecture are false, Notices Amer. Math. Soc. 16 (1969), 695.

[Kirby-Siebenmann, 1977] ______ , Foundational Essays on Topological Manifolds, Smoothings, and Triangulations. With Notes by John Milnor and Michael Atiyah, Annals of

Mathematics Studies, 88, Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, vii+355 pp.

[Kleiner-Lott, 2008] B. Kleiner and J. Lott, Notes on Perelman's papers, Geom. Topol. 12 (2008), 2587–2855.

[Kochman, 1990] S. O. Kochman, Stable Homotopy Groups of Spheres. A Computer-assisted Approach, Lecture Notes in Mathematics, 1423, Springer- Verlag 1990, viii+330 pp.

[Kochman and Mahowald, 1995] S. O. Kochman and M. E. Mahowald, On the computation of stable stems, Contemporary Mathematics 181 (1995), 299–316.

[Levine, 1985] J. P. Levine, Lectures on groups of homotopy spheres. In: Algebraic and Geometric Topology, 62–95, Lecture Notes in Math., 1126, Springer, 1985.

[Mahowald, 1970] M. Mahowald, The order of the image of the J-homomorphism, Proc. Advanced Study Inst. on Algebraic Topology (Aarhus, 1970), II, 376–384, Mat. Inst., Aarhus Univ., 1970.

[Milnor, 1999] J. Milnor, Growing up in the old Fine Hall. In: Prospects in Mathematics, 1–11, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[Milnor, 2007] ______ , Collected Papers. III, Differential Topology, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.

[Milnor, 2009] ______ , Collected Papers. IV, Homotopy, Homology, and Manifolds, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[Milnor-Husemoller, 1973] J. Milnor and D. Husemoller, Symmetric Bilinear Forms, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 73, Springer-Verlag, 1973, viii+147 pp.

[Milnor-Stasheff, 1974] J.Milnor and J. Stasheff, Characteristic Classes, Annals of Math. Studies, 76, Princeton University Press, Princeton, N. J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1974, vii+331 pp.

[Moise, 1952] E. E. Moise, Affine structures in 3- manifolds. V. The triangulation theorem and Hauptvermutung, Ann. of Math. 56 (1952), 96–114.

[Morgan-Tian 2007] J. Morgan and G. Tian, Ricci Flow and the Poincaré Conjecture, Clay Mathematics Monographs, 3, Amer. Math. Soc., Providence, RI; Clay Mathematics Institute, Cambridge, MA, 2007, xii+521 pp.

[Munkres 1960] J. Munkres, Obstructions to the smoothing of piecewise-differentiable homeomorphisms, Ann. of Math. 72 (1960), 521–554.

[Munkres 1964a] ______ , Obstructions to imposing differentiable structures, Illinois J. Math. 8 (1964), 361–376.

[Munkres 1964b] ______ , Obstructions to extending diffeomorphisms, Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964), 297–299.

[Newman, 1966] M. H. A. Newman, The engulfing theorem for topological manifolds, Ann. of Math. 84 (1966), 555–571.

[Novikov, 1963] S. P. Novikov, Homotopy properties of the group of diffeomorphisms of the sphere (Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR 148 (1963), 32–35.

[Perelman, 2002] G. Perelman, The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, 2002, arXiv: math.DG/0211159 .

[Perelman, 2003a] ______ , Ricci flow with surgery on three-manifolds, 2003, arXiv: math. DG/0303109.

[Perelman, 2003b] ______ , Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds, 2003, arXiv: math.DG/0307245.

[Quillen, 1971] D. Quillen, The Adams conjecture, Topology 10 (1971), 67–80.

[Ravenel, 1986] D. C. Ravenel, Complex Cobordism and Stable Homotopy Groups of Spheres, Pure and Applied Mathematics, 121, Academic Press, Orlando, FL, 1986, xx+413 pp.

[Ranicki, 1996] A. Ranicki (editor) The Hauptvermutung Book, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1966.
[Smale, 1959] S. Smale, Diffeomorphisms of the 2-sphere, Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), 621–626.
[Smale, 1962] ______ , On the structure of manifolds, Amer. J. Math. 84 (1962), 387–399.
[Stallings, 1960] J. Stallings, Polyhedral homotopyspheres, Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960), 485–488.
[Stallings, 1962] ______ , The piecewise-linear structure of Euclidean space, Proc. Cambridge Philos. Soc. 58 (1962), 481–488.
[Sullivan, 1974] D. Sullivan, Genetics of homotopy theory and the Adams conjecture, Annals of Math. 100, 1–79.
[Thurston, 1982] W. Thurston, Hyperbolic geometry and 3-manifolds, In: Low-dimensional topology, (Bangor, 1979), 9–25, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 48, Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York, 1982.
[Thurston,1986] ______ , Hyperbolic structures on 3- manifolds. I. Deformation of acylindrical manifolds. Ann. of Math. (2) 124 (1986), 203–246.
[Whitehead, 1942] G. W. Whitehead, On the homotopy groups of spheres and rotation groups, Ann. of Math. 43 (1942), 634–640.

(熊跃山 译　　苏阳 校)

****

(上接 316 页)
孙善忠， Tadashi Tokieda 提供批评意见.

参考文献

[A] V. I. Arnold Petits dénominateurs et problème de la stabilité du mouvement en mécanique classique et céleste, Usp. Mat. Nauk 18 (1963), 91–192.
[AKN] V. I. Arnold, V. V. Kozlov & A. I. Neishtadt Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics, 3rd ed., Dynamical Systems III, Encyclopædia of Mathematical Sciences, vol. 3, Springer 2006.
[BG] J. Barrow-Green, Poincaré and the Three Body Problem AMS, History of Mathematics, vol. 11, 1997.
[C] A. Chenciner Three-body problem, Scholarpedia.
[K] A. N. Kolmogorov On the Conservation of Conditionnally Periodic Motions under Small Perturbations of the Hamiltonian, Dokl. akad. nauk SSSR, 1954, vol. 98, p. 527–530.
[M1] J. Moser On invariant curves of area preserving mappings of an annulus, Nachr. Akad. Wiss. Gött., Math. Phys. Kl. (1962), 1–20.
[M2] J. Moser Convergent Series Expansions for Quasi-Periodic Motions, Math. Annalen 169, 1967, 136–176.
[Ra] J. P. Ramis Poincaré et les développements asymptotiques (Première partie), Gazette des mathématiciens 133, juillet 2012, p. 33–72.
[Ro] A. Robadey Différentes modalités de travail sur le général dans les recherches de Poincaré sur les sytèmes dynamiques, Thèse Paris 2006.
[Y] J. C. Yoccoz Une erreur féconde du mathématicien Henri Poincaré, Gazette des mathématiciens, no 107, 2006, p. 19–26.

(赵磊 译　　姚景齐 校)