遍历理论，李群，数论，动力系统，

③

遍历理论，李群和数论间之关系

95-97

Ratner, M

Marina Ratner 许以超

本次演讲讨论将动力系统和遍历理论的思想用于解决从李群和数论中长期存在的问题. 这些问题来自观察李群在它的齐性空间上的作用，特别，观察 $Ad-$ 幂作用，后者的作用虽然从动力系统的观点来看是随机的和混沌的，却似乎是密切地和齐性空间的代数结构相联系：它的各态历经不变测度和轨道闭包间有代数性质，这些结果对数论和遍历理论有很重要的应用.

设 G 为具有第二可数公理的李群， Γ 为 G 的离散子群. $\Gamma\backslash G=\{\Gamma_{g:g}\in G\}$, $\pi:G\to\Gamma\backslash G$ 为复盖投影 $\pi(g)=\Gamma_g, g\in G$. 群 G 按右平移作用于 $\Gamma\backslash G$, 即 $x\to xg$, $x\in\Gamma\backslash G$, $g\in G$. 设 U 为 G 的子群，且 $x\in\Gamma\backslash G$, 则子集 $xU=\{xu:u\in U\}$ 称为 x 的 $U-$ 轨道. 离散子群 Γ 称为 G 中的格，如果在 $\Gamma\backslash G$ 上有有限 $G-$ 不变测度.

对 G 的子群 U, $\Gamma\backslash G$ 的典型的轨道 xU 是随机的和混沌的. 我们提出下面的问题：1) 什么是轨道 xU 在 $\Gamma\backslash G$ 中的闭包？ 2) 什么是 $\Gamma\backslash G$ 上各态历经 U- 不变 Borel 概率测度 μ?(μ 称为概率测度，如果 $\mu(\Gamma\backslash G)=1$. 又 U- 不变 Borel 测度 μ 称为遍历的，如果 $\Gamma\backslash G$ 中每个 U- 不变可测集都有 $\mu-$ 测度为 0 或 1).

我们给出一些自然的例子. 设 $U=\{u(t):t\in R\}$ 是 G 的单参数子群而 xU 是周期轨道. 于是 $xU=\overline{xU}$ 且 xU 上正规化长度之测度是 U- 不变历经的.

更为一般的例子则假设闭包 $\overline{xU}$ 和某个包含 U 的大子群 H 的轨道重合，即 $\overline{xU}=xH$. 还可能加上如下条件，即 xH 是一个在 U 作用下遍历的 $H-$ 不变 Borel 概率测度 ν_H 的支集 (这种情况发生当且仅当 ${}_XH_X^{-1}\cap\Gamma$ 是 ${}_XH_X^{-1}$ 之格， $X\in\pi^{-1}\{x\}$).

这些例子引出了下面的定义.

定义1. 子集 $A\subset\Gamma\backslash G$ 称为齐性的，如果存在 G 中闭子群 H 及点 $x\in\Gamma\backslash G$ 使得 $A=xH$, 且 xH 为一个 H- 不变 Borel 概率测度 ν_H 的支集.

定义2. $\Gamma\backslash G$ 上 Borel 概率测度 ν 称为代数的、如果存在点 $x\in\Gamma\backslash G$ 及 G 之闭子群 H, 使得 xH 是齐性的，且 $\nu=\nu_H$.

很多子群 U 不是齐性轨道的闭包或没有代数遍历测度，然而也有一些子群 U 是齐性轨道的闭包或有代数遍历测度.

记 $\mathcal{G}$ 为 G 的李代数，对每个 $g\in G$、记 $Ad_g:\mathcal{G}\to\mathcal{G}$ 为 g 的伴随映射 (它是映射 $h\to$

原题: Interactions between ergodic theory, Lie groups and number theory.

$g^{-1}hg$, $h \in G$, 在单位元处的微分). 元素 $g \in G$ 称为 $Ad-$ 半单的, 如果 Ad_g 在 $\mathbb{C}$ 上可对角化. 元素 $u \in G$ 称为 $Ad-$ 幂么的, 如果 $Ad_u - Id$ 是幂零的. 这时 $Ad_{u^r} = \sum_{k=1}^{n}(r^k T_u^k/k!)$ 对所有 $r \in \mathbb{Z}$ 成立, 这里 $n \geq 0$ 上某个整数, T_u 为 $\mathcal{G}$ 的幂零自同态. 在下面叙述的所有结果中 Ad_{u^r} 的多项式扮演了决定性的角色, G 的子群 U 是 $Ad-$ 幂么的, 如果每个 $u \in U$ 都是 $Ad-$ 幂么的.

定理1. (轨道遍历测度的代数性) 设 G 为连通李群, U 为由 G 的 $Ad-$ 幂么元生成的连通子群. 则对 G 的离散子群 Γ, $\Gamma\backslash G$ 上每个遍历 U- 不变 Borel 概率测度是代数的.

定理2. (轨道闭包的齐性性) 设 G 和 U 有如定理 1. 则对 G 的任一格 Γ 及任一元 $x \in Ga\backslash G$, 在 $\Gamma\backslash G$ 轨道 xU 的闭包是齐性的.

定理 1 和 2 给出了 M. S. Raghunathan 猜想 (在 G 是约化李群且 U 为 $Ad-$ 幂么时之证明在 [1] 中) 和 G. A. Margulis[2, 猜想 1, 2], [3, 猜想 1, 2] 的肯定回答.

定理3. ($Ad-$ 幂么流的一致分布) 设 G 是连通李群, Γ 是 G 中的格, 又 $U = \{u(t) : t \in \mathbb{R}\}$ 为 G 的单参数 $Ad-$ 子群, 则对任意 $x \in \Gamma\backslash G$, 存在 G 的闭子群 H, 使得 $\overline{xU} = xH$ 是齐性的, 且

$$t^{-1}\int_0^t f(xu(s))ds \to \int_{\Gamma\backslash G} f d\nu_H$$

对 $\Gamma\backslash G$ 上每个有界连续函数 f 成立.

定理 3 是 Margulis 在 [3, 猜想 3 和 4] 中提出的猜想.

我们讨论了用于证明定理 1-3 和这些定理的进一步推广 (见 [4-10]) 的思想和方法, 也得到了由其他作者给出的早期工作.

在数论上的应用.

定理A1 (Margulis) 设 $B(x_1, \cdots, x_n)$ 为 n 个变数的实非退化不定二次型, $n \geq 3$. 设 B 的某两系数之比为无理数. 则 B 在整点的值集在 $\mathbb{R}$ 中稠密.

这是在 1986 年 Margulis[2] 证明的 Oppenhein 猜想的内容. 事实上, Raghunathan 已经注意到为了得到这个定理, 我们只要对 $G = SL(3, \mathbb{R})$ 及 $U = SO(2, 1)$ 证明定理 2 的弱形式就行了. 这事由 Margulis 完成, 由于定理 2 远强于 Margulis 证明的情形, 这允许我们去简化他的证明. 从而也使我们能得到 Margulis 的定理的更强的推广, 且可推广到一般数域的二次型上. 近来这已由 A. Borel 和 G. Prasad 做了.

应用于遍历理论.

定理A2 (刚性定理) 设 G_i 为连通李群，Γ_i 为 G_i 中格且不包含 G_i 之非平凡正规子群，$i=1,2$. 设 $u^{(i)}$ 为 G_i 的 $Ad-$ 幂么元，它遍历地作用于 $M_i=\Gamma_i\backslash G_i$ 上，M_i 有 G_i- 不变 Borel 概率测度 ν_i. 设若从 M_1 到 M_2 上存在一一保测变换 ψ, 使得 $\psi(xu^{(1)})=\psi(x)u^{(2)}$ 对 ν_1- 几乎所有 $x\in M_1$ 成立. 则存在从 G_1 到 G_2 上之群同构 α, 使得 $\psi(xh)=\psi(x)\alpha(h)$, 对 ν_1- 几乎所有 $x\in M_1$ 且所有 $h\in G_1$, 又对某些 $c\in G_2$ 有 $\alpha(\Gamma_1)=c^{-1}\Gamma_2 c$.

特别地，这定理说若 Ad 幂么元 $u^{(1)}$ 和 $u^{(2)}$ 的作用是测度论同构，则 G_1 必须同构于 G_2, Γ_1 同构于 Γ_2. 我们在 1979 年在 $G=SL(2,\boldsymbol{R})$ 时证明定理 A2, 用同样方法， D. Witte 推广到任意连通李群. 但是现在我们能够直接地从定理 1 推出此定理. 定理 1 也证明了 $Ad-$ 幂么作用的因子和合成也全是代数的. $Ad-$ 幂么作用的刚性质与 $Ad-$ 半单作用形成显著的对照.

参考文献

[1] S. G. Dani, *Invariant measures and minimal sets of horospherical flows,* Invent. Math. **64** (1981), 357-385.

[2] G. A. Margulis, *Discrete subgroups and ergodic theory,* Proceedings of the Conference in Honor of A. Selberg (1987), Oslo.

[3] G. A. Margulis, *Dynamical and ergodic properties of subgroup actions on homogeneous spaces with applications to number theory,* Proc. of ICM (1990), Kyoto.

[4] M. Ratner, *Strict measure rigidity for unipotent subgroups of solvable groups,* Invent. Math. **101** (1990), 449-482.

[5] ——, *On measure rigidity of unipotent subgroups of semisimple groups,* Acta Math. **165** (1990), 229-309.

[6] ——, *On Raghunthan's measure conjecture,* Ann. of Math. **134** (1991), 545-607.

[7] ——, *Raghunathan's topological conjecture and distributions of unipotent flows,* Duke Math. J. **63** (1991), 235-280.

[8] ——, *Invariant measures and orbit closures for unipotent actions on homogeneous spaces,* to appear in "Geometry and Functional Analysis".

[9] ——, *Raghunathan's conjectures for p-adic Lie groups,* International Mathematics Research Notices, No. **5** (1993), 141-146.

[10] ——, *Raghunathan's conjectures for Cartesian products of real and p-adic Lie groups,* Preprint.

(许以超 译　冯绪宁 校)