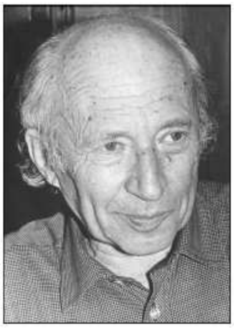
Israel Moiseevich Gelfand (I–1)

Vladimir Retakh (协调编辑)



I. M. Gelfand

Gelfand 的父母

Gelfand 3 岁，1916 年

Israel Moiseevich Gelfand (盖尔范德) 这位被 Henri Cartan (嘉当) 称为可以与 Poincaré (庞加莱) 及 Hilbert (希尔伯特) 媲美的数学家于 1913 年 9 月 2 日出生于乌克兰的敖德萨附近的小镇 Okny (后来被称为 Red Okny), 于 2009 年 10 月 5 日逝世于美国新泽西州的 New Brunswick.

Gelfand 自学成才. 他在镇上唯一的一所学校上学, 他的数学老师无法给他除精神上的鼓励以外的帮助 —— 当然这对他而言也是非常重要的. 用 Gelfand 自己的话说:“给予鼓励是身为教师最重要的工作.” 1923 年 Gelfand 举家搬到另一个地方, 之后 Gelfand 进入一所培养化学实验室技术人员的职业学校. 可是由于他的父亲是工厂经理, 他作为“资产阶级分子” (在苏联被称为“netrudovoi 分子”) 的儿子在九年级的时候被学校开除. 之后, 在 Gelfand 16 岁半的时候他决定去莫斯科投靠远房亲戚.

在 1930 年 Gelfand 去莫斯科之前, 他的数学世界十分孤立. 他唯一能接触到的书是中学课文和一些社区大学课本. 这其中最先进的书声称有 3 类函数: 分析的, 这些由公式给出; 凭经验的, 这些由表格给出; 以及描述相关性的. 他像 Ramanujan (拉马努金) 一样尝试了很多. 在 12 岁左右 Gelfand 就明白几何中的一些问题无法用代数解决, 他还绘制了关于弦和弧长度比的表格. 后来他才明白事实上他是在绘三角函数表.

从那时起 Gelfand 就形成了他的 Mozart (莫扎特) 风格以及对数学统一与和谐的信仰 (其中还包括应用数学)—— 统一不取决于刚性的和大声宣布的计划, 而是看起来不同领域之间不易看到的有时隐藏起来的联系. Gelfand 在《量子 (Quantum)》这一为高中学生写的科学杂志的一篇访问 [1] 中描述了他的学生生涯及其数学的学习过程. 用 Gelfand 自己的话说:“我深信未来大多数职业数学家的数学天赋出现在 . . . 他们 13—16 岁的时候 . . . 在这一时期我形成了自己做数学的风格. 我学习了不同的科目, 但在那时生根的对数学艺术形式的追求时至今日都对我选择问题影响颇深. 我认为不了

译自: Notices of the AMS, Vol.60 (2013), No.1, p.24–49, Israel Moiseevich Gelfand, Part I, Vladimir Retakh, Coordinating Editor, figure number 20 (5 幅未获得版权, 故未在译文中给出).

Vladimir Retakh 是 Rutgers 大学的数学教授. 他的邮箱地址是 `vretakh@math.rutgers.edu`. 他对 Mark Saul 帮助他准备这份回忆录表示感谢.

解这一动机就不可能明白我在工作中及在工作课题的选择上那些看起来似乎不合逻辑的选择. 由于这种动力，它们就变得有序合理了.”

访问中还展示了一个小地方男孩如何取得数学上跨世纪的发现. Gelfand 在 15 岁时听说了一个计算正弦函数的级数. 他在《量子》采访中描述这段期间时说:“在这之前我认为只有两种类型的数学, 代数的和几何的 ... 当我发现正弦函数可以用级数代数地表达时, 这一壁垒轰然倒塌, 数学成为一个整体. 时至今日我见过了数学中各种各样的分支, 与数学物理一样，是整体中的一部分.”

来到莫斯科之后，Gelfand 没有稳定的工作，仅靠做杂活的收入生活. 某一天他幸运地得到了在国家 (列宁) 图书馆的结账柜台工作的机会. 这给了 Gelfand 一个罕见的与来自莫斯科大学的数学学生交流的机会. 他也开始参加大学的研讨班，他在这里感受到了强烈的心理压力：数学中吹起了一阵对严格证明的新要求的微风. 这与他 “自制” 的实验和对数学的浪漫想法是如此地不同. 他还认识到他之前的发现都不是新的. 但这和他生活中的其他境遇都没能阻止他，他的数学兴趣持续增长.

就像他突然被学校开除一样, Gelfand 命运的下一次转变也是苏联生活中许多自相矛盾的现象之一. 一方面，作为一个 “资产阶级分子” 的儿子，他不能成为大学学生. 另一方面，他在 18 岁能获得众多新成立的技术学院的一个教职，并且在 19 岁进入莫斯科大学攻读博士学位. 原因很简单：苏联需要知识渊博的教师来教育合适的，有 “无产阶级出身” 的未来工程师和科学家们. 但当时的体系不够严格而无法清除或规范研究生院. 因此一个天才男孩可以在没有大学或高中毕业文凭的情况下攻读博士学位.

在 Gelfand 的职业生涯初期，他受到几位莫斯科数学家的影响，尤其是他的论文导师 A. N. Kolmogorov (柯尔莫戈洛夫). 在《量子》采访中 Gelfand 说，他从 Kolmogorov 那里学到了 “一个真正的数学家必须是一个自然哲学家.” 另一个对他影响颇深的是才华横溢的 L. G. Shnirelman (施尼雷尔曼). Gelfand 在 1935 年得到了自己的 “候选人”(副博士) 学位, 并于 1940 年获得更高的科学博士学位. 从 1933 年开始, 他在莫斯科大学教学, 在那里他于 1943 年成为教授, 并开始了他有影响力的讨论班. 他在 1952 年因臭名昭著的 “反世界主义者” (事实上是反闪米族人) 活动暂时失去了这个位置但被允许继续开讨论班. Gelfand 也曾在 Steklov (斯捷克洛夫) 研究所工作，并在应用数学研究所工作了很多年. 在那里他参加了苏联版本的曼哈顿计划及其扩展的秘密计划. Andrei Sakharov (萨哈罗夫) 提到了他与 Gelfand 合作的工作 [1].

1934 年的 Gelfand

Gelfand, 约 1950 年

1953 年 Gelfand 当选科学院的通讯院士 (在苏联等级制度中一种重要的头衔). 这件事发生在斯大林死后及反世界主义者运动结束时. 据 Gelfand 说, 时代政治的不确定性使他的被选成为可能. 后来苏联的情况稳定下来，反闪族主义成为苏联体系的一部分，而 Gelfand 直到 1984 年成为国外学术界领袖之后才成为苏联科学院正式院士.

1989 年 Gelfand 移居到美国. 在哈佛大学和麻省理工学院呆了一段时间后, 他成为罗格斯 (Rutgers) 大学的教授, 直到他去世, 他一直在那里工作.

《美国数学会通讯 (Notices of the AMS) 》的文章从 Gelfand 多层面的研究, 他做数学的方式以及与他人的相互影响对他进行了多方面的描述. 一位美国专家曾经告诉我在读完 Gelfand 文章中所有定义后, 他可以很容易地证明他所有的定理. 当然, 这种容易性基于长时间的计算和对各种精心挑选例子的彻底思考. Gelfand 本人喜欢重复一位俄罗斯数学家的表述: "Gelfand 不能证明困难的定理, 他只是将任何定理变容易."

Gelfand 总是被众多合作者围绕身边, 他们被他传奇的直觉和永不停息的新思想所吸引: 每 10 年他都会建立一个新的研究领域. 正如在 A. Vershik, A. Zelevinsky 和我的回忆录中描述的那样, 他会用不同的方法与不同人合作. 他的学生和合作者们表现出各种不寻常的风格和兴趣. Gelfand 学派成员的唯一相似之处便是他们继承的对数学的激情.

在描述 Gelfand 这样一个人的时候不能不提及他传奇的讨论班, 他的讨论班始于 1943 年, 并一直持续到他去世. Gelfand 把讨论班看成他最重要的创造之一. 仅用只言片语来描述讨论班是很难的: 这是一个 "数学交易所", 一个年轻科学家的滋生地, 一个如何去思考数学的展示, 一个个人表演的场所, 等等. 它并不是仅仅关于泛函分析或几何, 它是关于整个数学的. 有些人来这里只是为了听 Gelfand 讲笑话和悖论. 例如, 他从美国访问回来后说, "数学世界不是个度量空间: 从哈佛大学到麻省理工学院的距离大于从哈佛到莫斯科和从莫斯科到麻省理工学院的距离之和."

应该补充一点, Gelfand 的笑话有时会很尖锐, 但对于成为 Gelfand 笑话对象的年轻人而言这意味着他受到注意, 被 "封爵". 讨论班是一个了解来自难以企及的西方的新鲜预印本的好地方. 但大多数参加者会被 Gelfand 充满力量和独创性的数学方法吸引. 他用最简单的基本例子, 但他可以用完全意想不到的方式将它们变得与众不同.

Gelfand 总是特别关注作为讨论班参加者主体的学生. 他会不时说: "我的讨论班是为高中学生, 优秀的大学生, 聪明的研究生, 和杰出的教授所开的." S. Gindikin 给了讨论班最好的描述 [3]. 你也可以从 Zelevinsky 和我的短文中看到 (我的短文会在下一期《 Notices 》中出现). Dusa McDuff 描述了一个年轻外国人对讨论班的印象.

讨论班也会对 Gelfand 的合作者提供长期帮助, 这些人对 Gelfand 的风格和他的思维方式已经熟悉. 他们的角色是相当不同的. 有时他们会讨论具体的例子, 有时则是模糊的思想; 有时他们会提出自己的建议, 而这些建议可能将被嘲笑, 被撕裂, 被推翻, 然后转变成一些更精致的想法. 只有少数人可以承担任务, 而莫斯科数学家的备用群体是巨大的.

Gelfand 试图教来自各处的各种人, 而讨论班反映了他教学的激情. 他过去的学生有 F. Berezin, J. Bernstein (伯恩斯坦), E. Dynkin (邓肯), A. Goncharov (贡恰罗夫), D. Kazhdan, A. Kirillov (基里洛夫), M. Kontsevich (孔采维奇), 和 A. Zelevinsky. 他的非正式学生就多得没法计算了.

从 Gelfand 的早期生活可以看出他对教育, 特别是远离研究中心的学生的教育的关注. 他是莫斯科数学奥林匹克的创始人之一, 后来他组织了著名的数学函授学校来教育

初中和高中学生 (见本文第 II 部分 Sergei Tabachnikov 的回忆). Gelfand 为学校创立编写了几本教科书. 他的大学教科书《线性代数 (Linear Algebra) 》和《变分学 (Calculus of Variations) 》 (与 S. Fomin 合写) 也秉承了他的风格和个性.

很难描述 Gelfand 在数学上的所有成就. 他在各处都留下了他的独特强大的印记 (可能, 不包括数理逻辑). Simon Gindikin, David Kazhdan, Bertram Kostant (科斯坦), Peter Lax (拉克斯), Isadore Singer (辛格) 和 Anatoly Vershik 在这里描述了一些他的重大进展 (但远非全部). 但 Gelfand 的兴趣远不止在纯数学与应用数学上. 他还写了很多生物学, 生理学, 医学和其他领域的文章.

Gelfand 在 1978 年获得第一届 Wolf (沃尔夫) 奖 (和 C. L. Siegel (西格尔) 一起), 之后还有包括京都 (Kyoto) 奖 (1989 年) 和 MacArthur (麦克阿瑟) 奖金 (1994 年) 的许多其他奖项. 他被选为各著名科学院的荣誉院士, 并且获得许多大学的荣誉学位.

本文还收集了一个外国人 (Dusa McDuff) 对 Gelfand 讨论班的印象, 学校内部人士对 Gelfand 学派的看法 (Andrei Zelevinsky 和 Vladimir Retakh), 通过信件对 Gelfand 学派的描述 (Sergei Tabachnikov), 以及 Mark Saul 的文章 " 92 岁的 Gelfand".

参考文献

[1] A talk with professor I. M. Gelfand, recorded by V. Retakh and A. Sosinsky, Kvant (1989), no. 1, 3–12 (in Russian). English translation in: Quantum (1991), no. 1, 20–26.
[2] A. Sakharov, Memoirs, Alfred Knopf, New York, 1990.
[3] S. Gindikin, Foreword to I. M. Gelfand Seminar, Advances in Soviet Mathematics, vol. 16, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

I. M. Singer

I. M. Gelfand

Israel Gelfand 是 20 世纪最有影响力的数学家之一 —— 我敢说, 他是过去 60 年里最优秀的.

不幸的是, 我们的社会既不了解也不喜欢数学. 尽管它有众多应用, 尽管它的知识力量改变了我们研究科学的方式, 数学家一直被低估和忽视. 它的从业人员, 它的领导者不被重视. 他们既没有权力也没有影响力. 看一下负面影响在其他领域中的流传以及一些关于数学的肤浅文章, 我认为情况就是这样的.

1973 年在接受牛津大学的荣誉学位后. 左边是与 Gian-Carlo Rota 在一起

我们总是会遇到不能解决的问题, 于是大多数数学家往往对自己及其成就十分谦逊. 这也许就是为什么我们没能认出我们之中巨人的原因. 我不会把 Gelfand 和 20 世纪其他杰出的数学家或

I. M. Singer 是麻省理工学院的荣誉退休学院教授. 他的邮箱地址是 ims@math.mit.edu.
改编自 I. M. Singer, "Tribute to I. M. Gelfand", Progress in Mathematics, vol.132, Birkhäuser Boston, 1995.

科学家相比较;如果我这样做的话,你将开始为你是否同意我的观点而作检查.但注意我的观点 —— 我们之中有一个巨人. 我转而去看一下其他领域与之相媲美的成就: Balanchine (巴兰钦) 在舞蹈方面, 或 Thomas Mann(曼) 在文学方面, 或 Stravinsky (斯特拉文斯基) 甚至 Mozart (莫扎特) 在音乐方面, 但是对我而言, 与 Cezanne (塞尚) 和 Matisse (马蒂斯) 这些艺术家比较可能会更好一些. 我推荐你读一下伟大诗人 Paul Rilke (里尔克) 给 Cezanne 的一封信. 他说, “Paul Cezanne 曾是我最重要的榜样, 因为他在他工作的最深处坚持了 40 年 ... 这解释了他作品新鲜度和纯度之外的东西. ” (当然, Gelfand 坚持了更久.)

提起 Matisse 也许更合适. Matisse 是惊人的. 不论他个人的情况如何, 他都能充满欢乐和活力地面对新的前沿. 特别突出的是他晚期的工作: 爵士乐和在 19 世纪 80 年代初所做的著名工作 “papier-decouples”.

Gelfand 新鲜深刻的想法总是让我们眼花缭乱. 他与 Kapranov 和 Zelevinsky 合写的新书尽力地描绘了未来几十年的新方向.

在准备这篇文章时, 我询问过许多人我应该强调的主题. 你会对接下来的内容感兴趣. 首先, 与我通信的这些人所选择的内容很少有重复的. 其次, 每个人都给了我一个关于 Gelfand 贡献精髓 —— 简单而深刻 —— 的 5—20 分钟的热情洋溢的演讲.

回顾 Gelfand 在数学上的贡献是一种教育. 让我提醒你一些他的主要工作.

1. 赋范环
2. C^*–代数 (与 Raikov 合作)—— GNS 构造
3. 复的和实的半单群的表示 (与 Naimark (奈马克) 和 Graev 合作)
4. 积分几何 —— Radon (拉东) 变换的推广
5. Sturm-Liouville (斯图姆 – 刘维尔) 系统的逆散射 (与 Levitan (列维坦) 合作)
6. 关于 Lax 算子和 KdV 方程的 Gelfand-Dickey 方法 (Gelfand-Dickey on Lax operators and KdV)
7. 广义函数论专著
8. 椭圆方程
9. 无限维 Lie (李) 代数的上同调 (与 Fuchs (富克斯) 合作)
10. 组合特征类 (开始与 MacPherson 合作)
11. 二重对数, 判别式, 超几何函数
12. Gelfand 讨论班

用如此短的篇幅来描述他的巨大贡献是不可能的, 这里我只评论一些影响我的结果.

当我还是一名研究生的时候, Gelfand 的赋范环文章带给我第一次强烈的影响. Marshall Stone (斯通) 已经告诉我们, Bool (布尔) 代数中的点可视为极大理想. 但 Gelfand 将分析与代数以一种简单而美丽的方式结合在一起. 他使用复交换 Banach (巴拿赫) 代数中的极大理想将该代数表示为函数的代数. 因此他开启了交换 Banach 代数理论的篇章. 谱定理和 Wiener (维纳) 的 Tauber (陶伯) 定理是初等推论. 我深深地受到从那开始的革命性观点的影响.

对 Gelfand 而言，下一步自然是研究非交换 C^*– 代数. 他通过使用著名的 GNS 构造将这样的代数表示为算子代数. 使用他们的卷积代数来找到局部紧群的酉表示似乎是不可避免的. 之后复的和实的半单 Lie 群表示理论迅速建立. 我感触最深的是 Gelfand 和他的同事使用的几何方法. 直到最近，这个主题才再次成为几何的.

1973 年与 M. Atiyah 在一起

1973 年与 I. M. Singer 在一起

1963 年 20 位美国偏微分方程方面的专家将要作为首批外国科学家访问新西伯利亚的学术城. 这在赫鲁晓夫的解冻期内. 当我知道这件事后, 我问我能否凭借 Atiyah (阿蒂亚) 和我刚证明的指数定理加入到访问者的行列. 看完他早期的论文后我很想见见 Gelfand. 在新西伯利亚两周的每一天我都会问 Gelfand 的学生他什么时候会来，而答复总是 “明天”. Gelfand 终究还是没有来，我伤心地回到莫斯科. 当我回到我在著名的乌克兰酒店房间的时候，我接到了一个电话，电话里说 Gelfand 想见我，问我可不可以到楼下去. 而 Gelfand 就在那儿. 他邀请 Peter Lax 和我一起去散步. 在散步期间 Peter 试图告诉 Gelfand 关于他和 Ralph Phillips (飞利浦斯) 在 $SL(2, R)$ 方面的工作. 而 Gelfand 试图告诉 Peter 他自己关于 $SL(2, R)$ 的看法，但他的英语不够好. (他英语很生疏；但不到两天就很流利了.) 我打断了 Gelfand, 并将他的想法告诉 Peter. 在拐角处 Gelfand 停下来，转过身来对我说, “但你是我的学生. ” 我回答说，“是的，我是你的学生. ”(顺便说一下，Gelfand 告诉我他不来新西伯利亚是因为他讨厌长时间的会议.)

作为 Gelfand 的学生是一种荣誉，同时也是一种负担. 我们试图模仿 Gelfand 带给数学的深度和统一. 他使我们思考得比我们认为可能的更深刻. Gelfand 和我在短短的几分钟内成为亲密的朋友，并在那以后始终保持这一关系. 我在莫斯科生病时 Gelfand 耐心地照顾我.

我在之后 10 年没有再见到他. 在我正访问牛津大学的时候，他被安排去接受牛津大学的名誉学位. 我不清楚，他能否获准离开苏联到西方去访问，因此我决定不再等待并返回家乡. 一个星期以后，我收到 Atiyah 的一封电报：Gelfand 要过来了 —— 女王已经要求俄罗斯大使为其说情. 我飞回英格兰，并在他访问期间陪同他 —— 一段令人愉快的时光. 这期间发生了许多事情，我只提一下下面这件事：我们逛派克钢笔店的经历. 曾经陪同 Gelfand 逛街买东西的人这时会笑了；因为这是一次令人难忘的体验. 15 分钟内，他使得每一位售货员都在为不同的笔乱作一团. 一个小时内，我知道了比我曾注意到的以及曾认为可能的更多的关于钢笔构造的知识. Gelfand 对细节的无限好奇和集中精力令人难以置信；再加上他对本质特征的深刻直觉使他显得如此罕见. 他简直是超人.

谈到牛津，让我再强调 Gelfand 关于椭圆方程的文章. 1962 年，Atiyah 和我找到了旋量流形上的 Dirac (狄拉克) 算子，并且对与任何向量丛适配的几何算子得到了指标函

数. 尽管我们又花了 9 个月才证明我们的定理. Smale 提醒我们去看 Gelfand 的论文. 和往常一样，它在很大程度上开阔了我们的视野，之后我们很快意识到，基于 Bott (博特) 的周期性定理，我们可以对任何椭圆算子证明指标定理.

我还应该提到 Gelfand 的工作对物理学的应用：例如，关于圆上向量场的 Gelfand-Fuchs, 即所谓的 Virasoro (维拉索罗) 代数 (事实上这并不是由 Virasoro 定义的). 虽然我前面已提到 Gelfand-Dickey, 这里我还要强调它对矩阵模型理论的影响. 我还要描述一下他是多么地鼓舞人心，和他对一篇当时似乎很晦涩的文章的理解，是多么地领先于他的时代.

Claude Itzykson 告诉我说，他和 Brezin, Parisi 及 Zuber 合作的关于三角模空间的著名文章起初被科学家们所忽视，幸好之后 Gelfand 向作者们索要重印本.

Ray 和我对于我们类拉普拉斯算子 (Laplacian-like) 的行列式的定义以及应用它可以得到流形的解析不变挠率这一事实感到很激动. 在早期美国学者对此没什么反应；而 Gelfand 给我们送来了贺电.

最后，我想提一下 Gelfand 的特性. 他就像个魔术师. 对于只是凡人的我们来说，保持我们的年龄差并非难事 —— 一点也不难. 但对于 Gelfand, 当我在他 50 岁和 60 岁时遇见他时，我觉得他比我年纪大. 而 10 年之后我觉得我们年龄相仿. 后来，我才发觉，事实上 Gelfand 远比大多数数学家年轻.

David Kazhdan

I. Gelfand 在表示论方面的工作

群表示论是 Gelfand 最感兴趣的. 我认为这与这个领域的性质有关，它以一种复杂的方式结合了分析学, 代数学和拓扑学. 但是, 表示论的丰富不应该被视为不言自明的. 在很大程度上，我们对该理论的理解应归功于 Gelfand 的工作，归功于他将数学视为不同观点的统一的独特方式.

在 20 世纪 30 年代后期，当 Gelfand 开始他的数学生涯时，基于 Hermann Weyl (外尔) 的工作, 关于紧群上的表示论以及紧群上调和分析的一般原理都得到了很好的理解. Lev Pontryagin (庞特里亚金) 发展了局部紧 Abel (阿贝尔) 群的调和分析理论. Murray (默里) 和 von Neumann (冯 · 诺伊曼) 弄清楚了算子代数的一般结构. 但非紧的非交换群表示论几乎不存在. 我所知道的那时的唯一结果是 Eugene Wigner (威格纳) 有关非齐性 Lorentz (洛伦兹) 群的工作. Wigner 的研究表明，物理学上感兴趣的对这类群的不可约表示的研究可以简化为对它的紧子群的不可约表示的研究.

而对于实半单非紧群的表示理论是否恰当，即不可约表示的集合是否可以由 “合理” 的集合中的点参数化，以及酉表示能否唯一地分解成不可约表示，这些问题都没有明确答案. 传统想法期望 Murray-von Neumann 因子的漂亮理论是描述实半单非紧群的表示的必要条件. 另一方面，将 Gauss (高斯) 和 Riemann (黎曼) 视为英雄的 Gelfand 预计这类群的表示论应具备古典美.

David Kazhdan 是爱因斯坦数学研究所的数学教授. 他的邮箱地址是 kazhdan@math.huji.ac.il.

1942 年，在群表示论上，Gelfand 与 D. Raikov 的第一个结果是对任意局部紧群 G 证明其存在 "足够多的" 酉表示．换言之，群 G 的任何不可约酉表示都是不可约表示的直积分．这一结果的证明基于以下这一非常重要的观察：群 G 的表示理论等同于有紧支撑的 G 上测度的卷积代数的表示理论以及 Gelfand 赋范环理论的应用．

接着，在 20 世纪 40 年代末，Gelfand 写了大量关于建立非紧经典群 G 上表示论主要概念的论文 (大部分工作与 M. Naimark 合作). 描述后来出现的概念比描述该工作的丰富性要简单许多．

Gelfand 认为群 G 的不可约表示空间 $\widehat{G}$ 是一个合理的 "经典" 空间．如果我没理解错的话，这一直觉的正确性的迹象首先来自于球面函数理论，该理论发展于 20 世纪 40 年代初，但到了 1950 年才得以发表．设 $K \subset G$ 是极大紧子群，而 $\widehat{G}_0 \subset \widehat{G}$ 是 *第 1 类* 不可约表示构成的子集 (即，群 G 的使得 $V^K \neq 0$ 的表示 (π, V)). Gelfand 发现子集 $\widehat{G}_0$ 等于 G 的双 K 不变泛函子代数的不可约表示构成的集合，证明了该代数的交换性，并将其极大理想的空间等同于商 ${}^LT/W$, 这里 ${}^LT$ 是 G 的极大分裂环 $T \subset G$ 的对偶环，而 W 是 Weyl 群．Harish-Chandra (哈里希 – 钱德拉) 和 Godement 在 20 世纪 50 年代对该方法的推广引导了对群 G 任何表示分解成不可约表示的唯一性的证明．

鉴于第 1 类不可约表示的这样一个漂亮的分类，自然会去猜想总空间 $\widehat{G}$ 是一个代数变量．但为此，人们必须找到一个方法去构建 G 的不可约表示．Gelfand 介绍了 (对经典群) 的抛物归纳 (induction) 的概念，并且特别地，研究了由群 G 的一个 Borel (博雷尔) 子群 $B \subset G$ 的一个特征标 ξ 所诱导的群 G 的表示 π_ξ. 他表明，对于 $T = B/U$ 的一般 (generic) 特征标 ξ, 表示 π_ξ 是不可约的，并且表示 π_ξ 和 $\pi_{\xi'}$ 是等价的当且仅当 T 的特征标 ξ, ξ' 在 Weyl 群 W 的作用下是共轭的．该证明基于对经典群的分解 $G = \bigcup_{w \in W} BwB$. 这种分解由 Harish-Chandra 推广到任意半单群的情形，而现在被称之为 Bruhat (布吕阿) 分解．

这种构造给出许多不可约表示．但如何表明并没有丢失很多信息呢？众所周知在群 G 是紧群的情况下，所有的表示都由正则表示构成．因此，要说明一列表示 $\pi_a\,(a \in A)$ 是完备的，只需表明可以将 G 上的 delta 函数 δ_e 表示成特征标 $tr(\pi_a)$ 的线性组合．但是对通常是无穷维的非紧群 G 的表示 (π, V), 算子 $\pi(g)\,(g \in G)$ 的迹是没有定义的．Gelfand 的巧妙构思在于将特征标 $tr(\pi)$ 定义为 *分布*. 即，他证明，对任何具有紧支集的光滑函数 $f(g)$, 算子

$$\pi_\xi(f) := \int f(g)\pi_\xi(g)dg$$

是迹类，并且由 $tr(\pi)(f) := tr(\pi(f))$ 定义了分布 $tr(\pi)$. 现在可以在 T 的酉特征标空间 X 上找到 W– 不变测度 (被称为 *Plancherel* (*普朗谢雷尔*) *测度*) μ_X, 使得

$$\delta_e = \int \xi \in X tr(\pi_\xi)\mu_X. \tag{1}$$

不难看出，这样的测度 μ_X 是唯一的 (如果它存在的话), 并且对 μ_X 的认识等同于将正则表示 $L^2(G)$ 显式分解为不可约表示．

在与 M. Naimark 合作的一系列文章里，Gelfand 猜到对经典复群的 Plancherel 测度

的一个漂亮的代数表达式，并通过复杂的显式计算证明了 (1) 式 —— 对困难工作的一个伟大的奖赏.

作为这一系列工作的后续，Gelfand 提出了一些问题 (他只能给出一些特定情形下的答案), 而这影响了表示论许多年.

1. 在与 M. Graev 合作的工作里，Gelfand 将群 $SL(n,\mathbb{R})$ 的通用 (generic) 不可约表示进行了分类. 他们发现，$\widehat{G}$ 是对应于极大环共轭类的被称为 *系列* (*series*) 的一些片段的并. 此外，对应于非分裂环的系列可以在解析函数空间 (部分) 实现. Gelfand 猜想，对于所有实半单群，空间 $\widehat{G}$ 应该满足类似的描述，而且在适当的解析函数空间，它应该能够实现为离散系列. 猜想的第 1 部分被 Harish-Chandra 证实，他们对实半单群构造了离散系列，并且发现 Plancherel 测度集中于 Levi (莱维) 子群的离散系列诱导的酉表示. 第 2 部分被 Langlands (朗兰兹) 修正，他建议了离散系列 (离散系列的存在当且仅当有一个极大紧环 $T^c\subset G$) 在 G/T^c 上齐性全纯矢量丛 $\mathcal{F}$ 的同调 $H^i(G/T^c,\mathcal{F})$ 空间上的实现 (但 Gelfand 只考虑在这些矢量丛的截面上的实现).

2. 在与 Graev 合作的工作中，Gelfand 对于 $SL_2(\mathbb{C})$ 和 $SL_2(\mathbb{R})$ 群的 Paley (佩利)–Wiener 定理进行了类似的构造 (即，G 在紧支集光滑函数空间 $\mathbb{C}_c^\infty(G)$ 的表示的分解), 并提出了将该结果推广到其他群的问题. 该推广由 J. Arthur 于 1983 年得到.

3. 也在与 Graev 的合作工作里,Gelfand 构造了群 $SL_2(\mathbb{C})$ 在空间 $L^2(SL_2(\mathbb{C})/SL_2(\mathbb{R}))$ 上表示的分解, 并询问群 G 的表示在 $L^2(G/H)$ 上如何分解这一问题, 其中 $H\subset G$ 是对合的不动点组成的集合. 直到最近才得到这个结果在任意偶对 (G,H) 的推广 (见 P. Delorme 2002 年在 ICM 大会的报告).

4. Gelfand 表明，许多特殊函数，如 Bessel (贝塞尔) 和 Whittaker (惠特克) 函数及 Jacobi (雅可比) 和 Legendre (勒让德) 多项式，会作为不可约表示的矩阵系数出现. 这种对特殊函数的诠释立即解释了这些特殊函数的泛函和微分方程. 现在很清楚，在 19 和 20 世纪研究的 (几乎) 所有的特殊函数可以被解释为矩阵系数抑或群或者其量子类似表示的迹 (可见 Tsuchiya-Kanie, Koelink, Noumi, Rosengren, Stokman, Sugitani 和其他人关于 Askey-Wilson (阿斯基 – 威尔逊), Macdonald 和 Koornwinder 多项式的表示论解释的文章).

接下来 Gelfand 的一系列工作 (与 M. Tsetlin 一起) 是关于经典群 G 的有限维不可约表示的. 这些表示 (π_λ,V_λ) 的分类是已知的，但出于他对物理的兴趣的部分影响，Gelfand 问了一个新的问题：如何找到这些表示的一个 “好的” 实现. 换句话说，对于 $g\in G$, 如何在 V_λ 中找到一组基来计算 $\pi_\lambda(g)$ 在这组基下的矩阵系数. 对于群 SL_n 和 SO_n 的不可约表示，这样一组基 (Gelfand-Tsetlin 基) 如今已经得以构建，并且成为表示论与组合学的许多工作的核心.

Gelfand 和 Graev 发现可以用 $\Gamma-$ 函数的离散形式来表达表示 π_λ 的矩阵系数. 有限维表示的这种实现对于局域场上群的无限维表示有一个重要的类似推广.

作为有限维表示理论的一部分，Gelfand 研究了 Clebsch-Gordan (克莱布施 – 戈丹) 系数，它将不可约表示的张量积分解成对不可约分量. 他注意到了 (至少对于 $G=SL_2$)

群 G 的 Clebsch-Gordan 系数是 Jacobi 多项式的离散类似，而 Jacobi 多项式是群 G 的不可约表示的矩阵系数．这可能可以通过量子群理论给出解释，其中乘法和余乘法几乎是相互对称的．

Gelfand 接下来的一系列工作是关于有限及局部域 F 上的群表示的. 这里的基本结果是证明了 Whittaker 向量的唯一性和对 $GL_n(F)$ 的尖点表示 Whittaker 向量的存在性, 对于这类表示构造了一族类似于 Gelfand-Tsetlin 的基, 以及用 Γ 函数的形式来描述 $GL_n(F)$ 尖点表示 (与 M. Graev 及 D. Kazhdan 合作). 但我认为在这个领域里他最重要的工作是对留数不为 2 的局部域上群 $SL_2(F)$ 和 $GL_2(F)$ 不可约表示的完整描述 (与 M. Graev 和 A. Kirillov 合作). 他们发现 $GL_2(F)$ 的不可约表示本质上是由共轭类对 (T, ξ) 参数化，这里 $T \subset GL_2(F)$ 是一个极大环，$\xi : T \to \mathbb{C}$ 是一个特征标．此外，他们发现了关于这些表示的特征标 $tr_{T_\xi}(g)$ 的公式，并找到了 Plancherel 测度的明确表达式．这些公式的一个惊人的，直到现在都无法解释的特征是它们基本上是代数的．例如，关于 $tr_{T_\xi}(g)$ 里 ξ 的 Mellin (梅林) 变换 $L(g, t)$, 作为 $GL_2(F) \times T$ 的函数由下式给出

$$L(g, t) = \delta(\det(g), \mathbf{N}m(t))\epsilon_T \times (tr(g) - \mathbf{t}r(t))/|tr(g) - \mathbf{t}r(t)|.$$

这里 $T = E^*$, 其中 E 是 F 的二次扩张，$\epsilon_T : F^* \to \pm$ 是关于 E 的二次特征标，tr 是矩阵的迹，而 $\mathbf{t}r$ 和 $\mathbf{N}m$ 分别是从 E 到 F 的映射的迹和范数.

Langlands 澄清了对于局部域上群的不可约表示与数论之间存在内在联系的理解. 另一方面，特征标的 Mellin 变换和 Planchere 测度的代数公式的推广还没有被发现.

Gelfand 和 Graev 在其他工作中发现 F 上四元数乘积群 D^* 不可约表示的描述可由合适子群的一维表示诱导得到．这是 D^* 不可约表示的构造，后来被 R. Howe 推广到 p–进位群.

对局部域群 $SL_2(F)$ 和 $GL_2(F)$ 表示的描述在与 Graev 和 I. Piatetski-Shapiro (沙皮罗) 合著的《广义函数 (Generalized Functions) 》第六卷中被提及．在该书中, Gelfand 对于整体场 K 上半单阿代尔 (adele) 群 $G(\mathbb{A}_K)$ 发展了表示论．他定义了自守形式空间的尖点部分

$$L_0^2(G(\mathbb{A}_K)/G(K)) \subset L^2(G(\mathbb{A}_K)/G(K)),$$

证明了 $G(\mathbb{A}_K)$ 在 $L_0^2(G(\mathbb{A}_K)/G(K))$ 的表示是不可约表示的直和，并且发展了模形式的表示论解释．Langlands 的工作受到 Gelfand 这些结果的很深影响.

很显然，任何半单 Lie 群或 Lie 代数的通用表示几乎不依赖于特定群的选择，所以 Gelfand 试图找到一个固有的方式来表达这种相似性．在和 A. Kirillov 合作的一系列论文里，他研究了对于 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的泛包络代数片段的除环 $F(\mathfrak{g})$．他发现除环 $F(\mathfrak{G})$ 几乎完全由中心 $Z(\mathfrak{g})$ 的超越阶 (等于 $\mathfrak{g}$ 的秩 $r(\mathfrak{g})$) 和他们的 *Gelfand-Kirillov* 维数 (等于 $(\dim(\mathfrak{g}) - r(\mathfrak{g}))/2$) 定义．这些结果是 A. Joseph 关于 Harish-Chandra 模范畴结构工作的基础.

Gelfand 在表示论方面最后的一系列工作是在半单 Lie 代数表示的范畴 $\mathcal{O}$ 上的．表示的这一类范畴由 Verma 定义，但基本结果都是由 J. Bernstein, I. Gelfand 和 S. Gelfand

完成的．他们构造了用 Verma 模 $V_w\,(w \in W)$ 的有限维表示的分解 (称为 BGG 分解), 发现了在范畴 $\mathcal{O}$ 上不可约模和投影模之间的对偶性及范畴 $\mathcal{O}$ 和 Harish-Chandra 模范畴的关系．这些结果形成半单 Lie 代数及其仿射类似表示论的基石.

然而，他们的主要发现是半单群旗空间 $\mathcal{B}$ 的代数几何和范畴 $\mathcal{O}$ 结构之间存在紧密联系．例如，他们表明，存在 V_w 到 $V_{w'}$ 的嵌入当且仅当 Bruhat 胞腔 (cell) $BwB \subset \mathcal{B}$ 属于 $Bw'B$ 的闭包．代数几何和表示范畴之间的联系是近代表示几何理论的基础.

Gelfand 在表示论方面还有其他重要的工作 (如半单 Lie 群的不可分解表示，表示的模型，无穷维群表示), 但我想提一下两个起源于表示论但相互独立的工作．这些工作的出现是很自然的，因为对 Gelfand 而言表示论是分析的更广泛结构的一部分.

积分几何是表示论的一个分支．对复群 Plancherel 定理的证明等价于反演公式的构造, 它以极限圆上积分的形式给出了函数值. Gelfand (在与 Graev, Z. Shapiro 和 S. Gindikin 及其他人合作的一系列工作里) 发现以合适子流形族上积分的方式重新构造流形上函数值的反演公式. 这种反演公式在辛几何, 多维复分析, 代数分析, 非线性微分方程, Riemann 几何，以及应用数学 (层析成像) 等领域中存在应用．(关于 Gelfand 在积分几何方面工作更详细的描述由 S. Gindikin 在《 Notices 》最近的文章里给出.)

类似地，Gelfand 与 V. Ponomarev 以及之后与 J. Bernstein 在箭图 (quiver) 上的工作，受到表示论中问题的启发 ——Lorentz 群不可分解表示的描述．但这个主题的内在发展导向了一个美丽而深刻的理论，后来成就了 Ringel, Lusztig 和 Nakajima 的工作，并成为 Lie 代数和量子群几何表示理论的基础.

Anatoly Vershik

1. Gelfand, 我的灵感

Israel Moiseevich Gelfand 的成就对 20 世纪的数学是不寻常的．建立 20 世纪数学的人的名单中，必然会有他的名字．他开创了许多新的思路和知识的全新领域．他的主要特性中包括特殊的直觉，具有深度和广度的思想，以及对数学生动的理解.

但这位伟大数学家最重要的素质是激发他人灵感的能力．在俄罗斯和国外的许多其他数学家都觉得与 Gelfand 谈话或联系能得到惊人的灵感．而他的想法和意见，促使别人得到许多发现并做了大量研究.

2. Gelfand 和列宁格勒数学

我是 20 世纪 50 年代列宁格勒的一个学生，当时 Gelfand 的名字被所有列宁格勒数学家及对数学感兴趣的学生所熟知．这一点也不奇怪．大多数列宁格勒的数学家 (包括 L. V. Kantorovich (康托罗维奇), V. I. Smirnov (斯米尔诺夫), G. M. Fikhtengoltz 等) 的兴趣集中在泛函分析及其应用上，而这个 “列宁格勒方法” 是在 1930 年 —1950 年苏联发展起来的泛函分析的一个分支．I. M. Gelfand 在这方面的发展中是一个标志性人物.

列宁格勒方法与莫斯科 (A. N. Kolmogorov, I. M. Gelfand, L. A. Lyusternik (柳斯捷尔

Anatoly Vershik 是俄国科学院 Steklov 数学研究所圣彼得堡分部的数学教授．他的邮箱地址是 `vershik@pdmi.ras.ru`. 这段文章由 Vladimir Retakh 和 Mark Saul 从俄文翻译而来.

尼可) 和 A. I. Plessner (普莱斯纳)) 和乌克兰 (M. G. Krein (克赖因) 和 N. I. Akhiezer (阿希耶泽尔)) 不同. 列宁格勒方法围绕函数论, 算子理论及其微分方程和计算方法的应用. 莫斯科方法和另外两个的区别在于 Gelfand 倡导的对群和代数的无限维表示的研究，并且相比于 Banach 代数，他对非交换 Fourier (傅里叶) 分析或从更广泛的意义上，代数，经典分析和函数论的组合更感兴趣．这些想法很多年内在列宁格勒都不存在.

Gelfand 的名气和权威使其在列宁格勒讨论班不会受到质疑. 虽然还很年轻, Gelfand 凭借惊人的交换 Banach 代数极大理想理论 (所谓的 “Gelfand 变换”) 成为代表最高水平的莫斯科数学这个精英俱乐部的一员，并且成为这个俱乐部的领导者直至去世.

在列宁格勒数学家中，Gelfand 尤其重视 L. V. Kantorovich, D. K. Faddeev (法捷耶夫) 和 V. A. Rokhlin (罗赫林), 他们让 Gelfand 想起他的学生时代. 同 Kantorovich 一样，Gelfand 在原子能研究项目中起到了积极的作用，他知道 Kantorovich 在泛函分析方面的工作．这两个杰出的数学家在应用问题上做了很多工作.

在 1986 年 Kantorovich 的葬礼上，Gelfand 告诉我，Kantorovich 所有的结果中给他印象最深的是他的开创性的线性规划工作．我也是这么认为的．另一方面，1971 年当我请 Kantorovich 把我的论文投到《数学报告 (Doklady Mathematics) 》杂志时，他指出这篇文章实际上代表了 Gelfand 的工作, 而 Gelfand 不是苏联科学院正式成员这一事实对于苏联是不光彩的. 除了我之外，Gelfand 只和几个年轻的列宁格勒数学家有直接联系 —— 特别地，其中包括 L. D. Faddeev 和 M. S. Birman (伯曼).

3. 我首先接触的 Gelfand 的工作

我看的第一个重要的数学论文是 I. M. Gelfand, D. A. Raikov 和 G. E. Shilov (希洛夫) (我称呼他们为 Gimdargesh) 关于交换赋范环和之后关于广义 Fourier 分析的文章. 这个理论在数学上唤醒了我．我被它的美丽和简洁，及其一般性和深度所吸引.

在此之前，我一直犹豫不决．我可以加入代数部，在那里我可以参加 D. K. Faddeev 的讲座．或者，我可以在分析部工作，我的第一个导师 G. P. Akilov 在那里，而在那里我可能会选择专攻复分析 (V. I. Smirnov, N. A. Lebedev (列别杰夫)) 或实分析，抑或泛函分析 (G. M. Fikhtengoltz, L. V. Kantorovich, G. P. Akilov). 现在泛函分析是我唯一的选择. 我的兴趣主要是在莫斯科学派的分析 ——Gelfand 的泛函分析, 正如我在前面所述. 自那时以来，Gelfand 的工作和他在各个领域的学派成为了我数学上的引导.

有人可能会对 Gelfand 各种各样的兴趣和工作说很多. 事实上, 他对一切都感兴趣: 生物学, 音乐, 政治, 不只是数学．我想在这里叙述一下他在数学领域中我最感兴趣的方面的工作，以及我有幸与他一起研究的问题.

我会说 Gelfand 初期工作的主要遗产是 (同他带领的学生一起) 赋范交换环理论 (也就是现在所说的交换 Banach 代数), 以及最重要的是，局部紧群的酉无穷维表示理论．尽管作者很年轻，但这些论文成为数学中的经典.

作为这一理论的副产品，Gelfand 和 Naimark 给出了现在常用的一般 C^*– 代数的定义．早在 20 世纪 70 年代，有一次 Gelfand 就对我说,“如果我能和 von Neumann 交谈,

我会对他解释为什么我们的 C^*- 代数比 W^*- 代数 (von Neumann 代数) 更重要.” 我还会说 Gelfand 总是对拓扑和光滑的问题 (这与 C^*- 代数相关) 比对理论度量问题 (用 W^*- 代数的语言表示) 更感兴趣. 而与他的名字永远连在一起的表示论一直是 Gelfand 喜欢的对象，但他关于这一理论的关系和细节的想法总是在不停地变化着. 对他自己先前的结果无所畏惧的讽刺恰恰是他的一个美妙的特质. 当我告诉他，作为一名学生，我对他 Banach 代数的工作留下了很深印象时，Gelfand 回答说，“但是，为什么我们只考虑极大理想而非素理想呢？” 这与我在 20 世纪 70 年代的一次谈话中提到我对他早期的论文感兴趣时所说的话类似. “人们总是称赞我 5 年或更久前的工作，与此类似，人们对我现在的工作不满意.” 他解释他常见的批评时说道. 事实上，他能超越他的时代并创建一个新时尚.

我记得我被 Gelfand 在 1956 年关于泛函分析的讲话强烈地影响着 (他可能在仿效 von Neumann 在 1954 年国际数学家大会上类似的讲话). 在那次演讲中，他提出了几个一般性问题，并谈到它们与各种数学现象的关系. 这些问题之一是猜想 Wiener 测度和 von Neumann 因子可能的关系及其在今后的工作中可能的作用. Gelfand 指出 “这种美丽不会在尚未使用前便毁灭”. 当时我是一个学生，这种强烈断言审美作为评价数学理论首要标准的说法给我留下了深刻的印象.

4. 关于 Gelfand 20 世纪 50 年代和 60 年代的工作

也许 Gelfand 的最高成就是与 M. A. Naimark, M. I. Graev 和其他人一起创立的紧半单 Lie 群的无穷维酉表示理论.

在这里完整地评论这一发展几乎是不可能的，但值得注意的是 Gelfand 面临着许多先驱们同样遇到的困难：许多细节不得不加以澄清或者证明需要重写，所以它会产生优先权或贡献属于其他研究人员的问题. 但是，我们必须记住，Gelfand 是第一个开启和发展这个在物理中非常有用的巨大数学领域的人. 在 Gelfand 之前没有无穷维表示论. 通过 A. N. Kolmogorov 最近公布的日记可以了解在 20 世纪 40 年代这些作品是如何打动数学界的. Gelfand 有如此信心来开启全新的领域是十分卓越的.

莫斯科国立大学的函数理论实验室，大约于 1958 年. 从左至右坐者，I. Gelfand, Polyakov, D. E. Menshov, N. K. Bari, G. P. Tolstov; 站者，P. L. Ulyanov, A. G. Kostychenko, F. A. Berezin, G. E. Shilov, R. A. Minlos

Gelfand 在 20 世纪 50 年代中后期和 60 年代的下一个伟大的激情 —— 数学中心的共同兴趣 —— 是 L. Schwartz (施瓦兹) 分布理论 (在俄罗斯被称为 “广义函数”). 一些俄罗斯数学家对该主题有浓厚的兴趣，但有着淡淡的心酸，也许懊恼. 原因很简单：Gelfand, 以及之前的 N. M. Gyunter (圣彼得堡著名数学家), L. V. Kantorovich, 当然还有 S. L. Sobolev (索伯列夫) 不只是利用了，并且创造了广义函数理论. 20 世纪 60 年代 Gelfand 在列宁格勒的一次演讲中，直接表示他和 Naimark 在其表示理论工作中使用了分布. 但是，L. Schwartz 工作的优点是他理解一般理论的重要性，

并用许多例子证实它. 另外, 值得补充的是, 正如在函数论里经常出现的那样, 这一改写给出了一门新的语言, 并使得人们对许多概念有了新的认识.

然而, 当时燃起的这个改写将带来本质上的新结果的希望并没有成为现实. 尽管当时期望是这样, 但无论是 Banach 空间理论还是局部凸空间理论都没有本质的变化.

Gelfand 和他的合作者的著名的六卷《广义函数》展示了其对该领域无与伦比的深刻理解. 这一领域的广度覆盖了从偏微分方程到表示论和数论, 这是典型的 Gelfand 的风格.

特别地, Gelfand 是最早意识到从泛函分析的 Banach 方法转到更一般拓扑 (核) 空间的重要性及其在算子谱理论 (Gelfand-Kostyuchenko 定理) 和线性空间测度论 (Minlos (明洛斯) 定理) 的价值的人. Gelfand 也立刻明白了广义随机过程的作用 (Gelfand-Ito (伊藤) 过程). 这激励了 A. N. Kolmogorov 在 20 世纪 30 年代就开始进行的线性空间测度论的构造. 著名的 "三位一体" (三重 Hilbert 空间) 推广了谱分解这一 Levi 过程和 Gelfand-Segal 构造, 以及拟不变测度的原始方法, 之后被数百名数学家研究和发展.

5. 我和 Gelfand 的首次见面

不算在 1966 年的数学家大会或 20 世纪 60 年代后期与 Gelfand 的几次简短讨论, 以及我少有的几次恰好在莫斯科访问时参加他的讨论班, 我与 Gelfand 的第一次亲密见面发生在 1972 年的春天, 那一次我在莫斯科呆了两个月. 讨论班结束后, 我和一些参与者一起去了他家. 我开始谈论我最近做的关于随机排列周期长度渐近统计的工作. 该论文开启了我和我的学生关于后来被我称为群表示渐近理论的一系列工作. Gelfand 对此很感兴趣, 并邀请我第 2 天到他家里继续谈. 我记得 Dima Kazhdan 也在那儿, 他比 Gelfand 理解得更快, 后者经常让我重复说过的内容. 如果你能忽略他的批评方式的话, 他的活跃的, 有时甚至有些咄咄逼人的追问对问题的发展和谈话的进行是非常有益的. 很久以前我就听说过 Gelfand 在这些事情上的方式. 在谈到数学时, 他会对他的听众公开表达他的不满. 下面是他的一个对培育年轻数学家非常有用的表达, "让你的工作和你的自尊分开." 换句话说, 不要将有关知识的严厉批评看作对个人的批评.

1966 年 ICM 期间. 左 2 I. Gelfand; 左 3 A. Kolmogorov; 左 5 S. V. Fomin; 最右 O. A. Oleinik

我告诉 Gelfand 我研究对称群和其表示的计划. 我的这一研究的动机不仅来自研究它本身, 还来自其在最优化理论, 线性规划和组合数学方面的应用. (当时我在计算数学与运筹学系.) 当时还有一种将渐近理论与遍历联系在一起的方法. Gelfand 在我们的讨论中评论到, 关于有限群的一切似乎都已经很清楚了, 然后就开始热情地谈论对称函数. 他建议我去看一下 E. Thoma (托马) 有关无穷维对称群特征的文章, 我对这篇文章特别感兴趣.

我对对称群的许多事情并不清楚, 我对其表示理论的经典论述并不满意, 尽管它是

由 Frobenius (弗罗贝尼乌斯), Schur (舒尔) 和 Young (杨) 以及 von Neumann 和 H. Weyl 这样的大家发展起来的. 在我看来该理论的基础及其与组合数学的关系尚不清楚. 多年以后, 在了解并欣赏我与 S. Kerov, 以及后来与 A. Okounkov 一起做的工作后, Gelfand 给出了他最后的结论. 他大致上是这么说的, "现在一切都清楚了." 然而这已经是几年后了. 事实上, 粗略地讲, 我的主要思想方法是 Gelfand-Tsetlin 方法在对称群理论上的应用, 该方法是 20 世纪 50 年代早期为紧 Lie 群的表示而创建的. 值得注意的是对既定理论的不满往往开始于这些理论研究成熟时. 这是在我身上发生的事. 我的表示论研究开始得较晚, 而这给了我一定的优势.

在莫斯科 Gelfand 的家中我们第一次谈话的时候, Gelfand 表现得再次让我大吃一惊. 他向后来才到的 Dima Kazhdan 重述了我们讨论的部分内容 —— 我正在做的关于 Young 图渐近性的研究, 并说得好像它已经完成. 然而, 我并没有提到它, 并且只是计划去做. 当我纠正他时, Gelfand 说, "是啊, 是啊, 但你会去做." Gelfand 这种独特的可以看到 "他的对话者站立处地下 3 米" 的能力是他最显著的特质之一. 他对许多了解他的人的判断给予了他们信任, 但也使许多人望而却步, 因为他们担心自己被他的能力识破. 他立即并且 (通常) 猜中了他的同伴们将要说什么或者他们想到但没表达的内容, 并且他通常可以推断讨论会变得怎么样. 关于这有许多例子, 其中最引人注目的是他数学上的直觉, 这使得他猜测结果 (经常不加计算) 并预见到从一个给定的方法, 一个数学家, 甚至一个团队未来的工作可以期望得到什么. 在此讨论期间 Gelfand 认可了我的思路 (后来被称为渐近表示论). 之后 S. Kerov, G. Olshanski, A. Okounkov, A. Borodin 和一些西方数学家采取了许多行动来实现该计划.

在 Gelfand 1977 年讨论班上, 我对 S. Kerov 谈了我关于 Young 图极限形式和我们用逼近方法去表示无限对称群的结果. 当时 Gelfand, Graev 和我已经开始研究流动 (current) 群的表示. I. M. (Gelfand 名的缩写 —— 编注) 在讨论班上总是对每一个谈话发表评论. 在我的演讲中, 他说 (并重复了很多次), 组合将成为未来数学的一个核心部分. 正如一个讨论班的长期参与者对我说的那样, "他很激动."

6. 我们的合作

让我回溯 1972 年我们合作的历史. 我们的谈话后, 我说了再见并打算离开前往列宁格勒. 在莫斯科我总是和我的老朋友, 病毒学家 N. V. Kaverin 呆在一起. 他曾经参加过 Gelfand 关于生物学的讨论班. Gelfand 记得他, 但他们并没有其他的接触. 我告诉 Gelfand 我和 Kaverin 住在一起. 在我出发的那一天, Gelfand 突然给 Kaverin 打电话 (找到这个电话号码有些困难),[1)] 并让我马上过去. 他还邀请了 M. I. Graev, 在我们漫长的散步中他开始谈论半单群表示非交换积分的构造, 主要是 $SL(2, R)$. 他说, 他已经考虑这个问题很长时间了, 并且曾建议他的其他学生考虑该问题, 但他相信这个问题最适合我.

我有点惊讶的是 Gelfand 知道我对 Lie 群, 特别是对 $SL(2, R)$ 的表示有所了解. 我们之前没谈到过这些. 但 Gelfand 是正确的: 对我而言, 问题在恰到好处的时间被提出.

1) 在莫斯科, 当时并没有 "官方" 的手段去得到某人的电话号码.—— 原注

在 20 世纪 70 年代初，独立于其他的工作，我开始讲授群表示，C^*– 代数和分解．也许 Gelfand 听说过这一点，但不是从我这里．这更可能是通过他的预见能力从我前面提到的事情中得出．Gelfand 说，为了构建乘法积分的表示，我们要研究 “无穷” 表示，即恒同表示的一个邻域．在 1972 年的夏天，Gelfand 来到列宁格勒参加 M. Gromov (格罗莫夫) 的论文答辩，我告诉他我关于 Heisenberg (海森伯) 群的初步实验，通过其他方法，其积分的构造已经知道了．在 1972 年 12 月，我们发现一个解，这是一个 $SL(2, R)$ 所需表示的球面函数，或 Gelfand 建议我们称呼的 “规范状态”．我来到莫斯科后，我们起草了文本．几个月后我们解决了这个问题．第 2 年春天，Gelfand 和 M. I. Graev 来到列宁格勒并和我们呆在一起．Zorya Yakovlevna[1] 指导我的家庭佣工准备食物．我们和 Graev 一起工作的时候，I. M. 跟我的妻子 Rite 聊起他最喜欢的音乐和绘画．当然，我们也去了冬宫博物馆，在那里 Gelfand 谈了很多关于 El Greco 的一幅绘画 (圣徒彼得和保罗 (Saints Peter and Paul))，而且我们还讨论了如何继续我们的工作．

我记得 1984 年是 Gelfand 再次也是最后一次访问列宁格勒．在列宁格勒数学会会议上，我请他谈谈他自己的生活 (76 个月以前，他拒绝了这个要求)．这是一个有趣的谈话，他谈到许多他学数学初期的细节，其中包括他早期发现的 Euler-Maclaurin (欧拉 – 麦克劳林) 公式 (记得他几乎完全自学，从来没有上过高中)．

我们的第一篇论文于 1973 年发表在《数学进展 (Mathematics-Uspekhi) 》的纪念 Kolmogorov 70 寿辰的一期上，这是我与 Gelfand 和 Graev 合作的开始，之后我们的合作断断续续地持续了 10 多年．(在某些时候，我会写更多与此有关的内容．) 在这一系列的第一篇 (Gelfand 和我都认为是最好的一篇) 涉及那个时候许多重要的学科．特别地，我们讨论了不可约表示里的系数的上同调．在接下来的文章里，我们描述了所有不满足 Kazhdan 性质的半单群的上同调，而且给出了秩为 1 的半单群的明确公式．我们还构造了相应流动群的不可约非局部表示．在接下来的文章里，我们开始致力于微分同胚群的表示和构形的几何学及其在表示论中的应用．我们毫不怀疑 (后来被证实并再次确认) 这一系列论文中有各种各样的应用，并且工作将继续进行．近年来 M. I. Graev 和我已经找到了新的构造和函数群的新表示，而这个想法肯定是有前途的．

我在这里想回顾一个特别的故事．我们的第一篇论文可自然推广到取值在单紧 Lie 群上的流形上的光滑函数群的表示．这些所谓的 “能量” 表示依赖于流形的维数．

这不是陈述细节的地方，但我们能够证明当维数是 3 或更高时表示是可约的，并且当维数是 2 时在某些有关单根长度的条件下也可证明 (见我们的论文和 R. Ismagilov, R. Hoeg-Krohn, S. Albaverio 和 N. Wallach 的文章)．一维是特殊的，即使在我们的工作初期，Gelfand 说，我们可能会面对与 von Neumann 因子相关的表示．那时还没有显而易见的原因，甚至是初步估计；我们刚刚开始有关工作．若干年后 Gelfand 的预测被证实：在一维情形能量表示是 III1 型的一个因子表示，它与 Wiener 测度有关 (与标量情形无关，但与紧群上 Brown (布朗) 运动生成的测度有关)．你还记得 50 年前 Gelfand 关于因子与

1) Zorya Yakovlevna 是 Gelfand 当时的妻子，她伴随 Gelfand 写出了一些重要论文.—— 原注

Wiener 测度有关的神秘预测吗？今天，该理论在蓬勃发展.

7. 讨论班

Gelfand 给我们留下了关于不同数学科目的数量庞大的陈述. 有耐心的人应该整理它们. 同样，应该有人保留 Gelfand 讨论班的记录. 不幸的是，没有人承担该责任. 现在我们只能找到一星半点. 讨论班就像一个人的表演，有时成功，有时粗糙，带着幽默，往往是相关联和有启发性的. 我在 Gelfand 莫斯科的讨论班，后来在罗格斯大学的讨论班上作了几次报告. 我已经提到了我的第 1 次非常成功的报告. 第 2 次报告较短且不太成功，但也是与众不同的. 当我提到一个并不很有趣但是新的结果时，Gelfand 让他的一个研究生到黑板上马上给予证明. 我应该认为这是一种冒犯吗？当然不是.

我第一次参加讨论班时是一个研究生. 一位法国数学家正在谈论 von Neumann 的论文. 他的报告不是很清楚. Gelfand 说，“下一次，某某会报告本文”, 他并提到数名教授和研究生，并立即开始评估未来的讨论内容. 他说，某个教授的讲座看似已经理解，但无论是本人还是听众都不知道发生了什么事情. 另一个应该谈谈别的东西，包括他自己的结果等等. 所有这一切都给讨论班增加了戏剧性. 人们可以把它当回事，或者一笑了之. 很久以后 Gelfand 告诉我，L. D. Landau (朗道) 开了一个 Pauli (泡利) 风格的讨论班 (表面上该讨论班类似于 Gelfand 的，但较为粗糙). Gelfand 参加了 Landau 的讨论班. 有一次他告诉我 M. Migda 说的一个笑话：“Gelfand 走近物理学家正如知识分子下乡那样.”[1)]

与此同时，我们必须注意的是，Gelfand 风格并不适合每一个人. 这使一些人离开甚至将他们的生活复杂化. 例如，他的第一个并且是最心爱的学生之一，F. A. Berezin. 在某一点上，他们分道扬镳. 在 20 世纪 70 年代，我试图让他们见面交谈. 如今，Berezin 的工作，尤其是超数学 (supermathematics) 方面，已经得到了全世界的认可，但他并没有活着看到这一点. 因为我离得较远且并不经常和 Gelfand 讨论，我能够避免与他关系更为密切的一些合作者那样的挫折. 另一方面，他对我总是非常礼貌和友好. 他在我生日时发的电报总是充满赞美的.

8. 在苏联的生活

现在给我的西方同事，以及在俄罗斯的年轻人解释，苏联的学术生活是什么样的或者其他生活是什么样的，越来越困难了. 例如，为什么 Gelfand 尽管在科学和国家机密项目上有很多贡献 (被视为异常重要), 却在很久后才成为苏联科学院正式院士呢？当然，原因之一是官方学术甚至政府反闪族主义. 但是，例如，对物理学家，这种感觉就没有那么强烈. 这还有其他的原因.

有一次 Gelfand 告诉我，“对我而言，在 20 世纪 50 年代初这种情况是相当简单的 [在臭名昭著的 “此消彼长”[2)] 的斗争中，Gelfand 失去了他在莫斯科大学的教职]: 只有那些对数学真正感兴趣的人成了我的学生.” 在当时 (也是后来) 有另一个导师对职业生涯更好. 但他仍然有很多的学生. 在这里也体现了 Gelfand 一个最重要的，在某些方面超然

1) 指的是在 19 世纪 70 年代俄罗斯政府的以 “到人民中去” 知名的政治运动，期间，知识分子下乡以期教育农民.—— 原注

2) 一个反闪族主义的政府纲领的委婉说法.—— 原注

的品质：他可以吸引各种不同的人．他被数学家以及初涉数学领域者，生物学家等所包围．他的讨论班是讨论问题，交流新闻和意见的地方．著名的捍卫 A. Esenin-Volpin[1)]的 "99 位数学家的来信" 在他的讨论班公开签名，这并非偶然．这遭到了当局极度的反感和恐惧．在苏联这样的一个极权国家，只有那些被国家信赖和经过测试的人才能像磁体那样吸引人．出于这个原因，官员，包括官方数学家不喜欢 Gelfand 和他的圈子，不只是由于他们的出身，还由于 "要么支持我们，要么反对我们" 的原则．

"当然，我们住在一所监狱里．" 在 20 世纪 70 年代后期，莫斯科郊外的会议期间，当我们的科学家和其他来自西方来访者之间热烈讨论时，Gelfand 曾经这样告诉我．不过，他一直拒绝从我这里得到任何地下出版物书籍．人们应该写更多关于这些的内容．

在他的几次出国访问之前，像几乎所有的苏联人一样，Gelfand 需要通过一些不愉快的程序. 我和我的朋友公开拒绝以任何目的出国旅行，因此得以在我们党的委员会关于我们行为和我们政治知识的审查中幸免．这似乎给我们不幸，但在同时有显著的区别.

2003 年在 90 岁生日会议上演讲

在 20 世纪 80 年代末和 20 世纪 90 年代初，许多科学家想要离开俄罗斯 (这一点在当时是可以理解的)，这也影响了 Gelfand. 他的莫斯科讨论班在那之后不久就终止了．它的领导者是不可取代的．该讨论班的一个相对温和的版本在罗格斯大学重建．人们只能猜测如果 Gelfand 还留在莫斯科会发生什么.

我在美国遇到过 Gelfand 数次．在美国的数学生活是不同的，Gelfand 找到了属于他的地方．在哈佛对他 90 岁生日的庆祝会得到了完美的组织，并且由于他才华横溢的演讲成为一个真正的科学事件.

我从未怀疑过 I. M. Gelfand 的名字将会成为 20 世纪数学的一个标志，因为 20 世纪不只是一个杰出成就的世纪也是新概念的世纪．I. M. Gelfand 重视并创造了这类数学.

(未完待续)

(王耀华 译　　李艳芳 校)

****

(上接 92 页)

[5] W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1964.
[6] Z. Zahorski, Sur l'ensemble des points de non-derivabilite d'une function continue, Bull. Soc. Math. France 74 (1946) 147–178.

(陆柱家 译　　陈凌宇 校)

1) 1969 年，Esenin-Volpin 由于政治原因被投入精神病 "医院".—— 原注