2014 Fields 奖

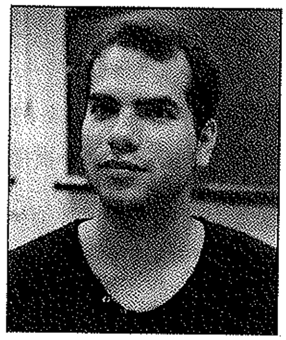
IMU

原文按 2014 年 8 月 13 日，在南韩首尔国际数学家大会开幕式上公布了 2014 年 Fields (菲尔兹) 奖，由国际数学联盟 (IMU) 发布的新闻提供了几位 Fields 奖得主的工作介绍，见下文. 此次大会上宣布的其它 IMU 奖项的新闻内容将刊登在下一期的《美国数学会通讯 (Notices of the AMS) 》上.

——Allyn Jackson

Artur Avila 的工作

Artur Avila 在动力系统、分析以及其它领域做出了杰出贡献，在多种情况下证明了决定性的结论，这些结论解决了长期存在的公开问题. Artur Avila 原籍巴西，在巴西和法国生活和工作，在他身上结合体现了这两个国家强烈的数学传统和文化. 他的几乎所有工作都是通过与世界上三十几位数学家的合作完成的，他给这些合作带来了令人敬畏的技巧，独创性，和大师级问题解答者的韧性，以及对于深奥和重要问题的正确感知.



Artur Avila

Avila 的成就很多并且覆盖了广泛的论题；这里只集中介绍几个亮点. 他的一项早期有意义的成果终结了一个从 20 世纪 70 年代开始出现的长长的故事. 在 20 世纪 70 年代，物理学家们，其中最引人注目的是 Mitchell Feigenbaum (法伊根鲍姆)，试图理解混沌怎么能够从非常简单的系统中产生，他们关注的是一些基于对诸如 $3x(1-x)$ 这样的数学函数作迭代的系统. 从一个给定的点开始，我们观察重复应用所考虑的数学函数后所得到的点的轨迹，这个数学函数可以看成是随着时间变化来移动起点的规则. 对于某些函数来说，点的轨迹最后进入了稳定的轨道，但是对于另外一些函数，轨迹会变得混乱，毫无秩序.

在努力理解这种现象的驱使下，产生了离散动力系统这门学科. 随后的几十年，数学家对这个学科做出了贡献，其中心的目标就是发展可以预测长期行为的方法. 对于那些进入稳定轨道的轨迹，预测一个点怎样移动是直截了当的，但对于混沌轨迹并不如此简单：准确预测初始点在经过了很长时间后的位置在哪儿，其困难犹如预测硬币在扔了 1000000 次以后，第 1000001 次是正面还是反面. 不过我们可以应用 随机 (*stochastic*) 这样的工具对硬币投掷建立概率模型，并且对前面所说的轨迹可做同样的研究. 数学家们注意到他们所研究的映射许多都属于下面两类范畴中的一类："正则的" 范畴，即映射的轨迹最后变成稳定的，或者是 "随机的" 范畴，即映射的轨迹混乱无序，但可以随机模拟和刻画. 正则与随机这样的二分理论在许多特殊情况下已经被证明，最终的期望是能够

译自： Notices of the AMS, Vol.61 (2014), No.9, p.1074–1081, 2014 Fields Medals, IMU, figure number 4.

对现象有更完全的理解. 这一期望由 Avila, Welington de Melo, 以及 Mikhail Lyubich 在 2003 年的一篇文章中实现了，给这项冗长的研究画上了句号. Avila 和他的合作者考虑了一类广泛的动力系统 —— 那些由抛物形状产生的，称为单一模型映射的系统，并且证明了如下结论：如果我们随机选取了这样的一个映射，那么这个映射要么是正则的，要么是随机的. 他们的工作给这些系统提供了一个统一的、综合的图像.

Avila 的另一项杰出成果是他与 Giovanni Forni 在弱混性 (*weak mixing*) 方面的工作. 如果我们洗一副纸牌，只是切开它 —— 即从这副牌的上部切下一部分放到底部，那么这副纸牌不会真正地混合，只是循环移动着. 但是如果我们以平常的交错的方式洗牌 —— 比如，第 1 张牌放到第 3 张牌后面，第 2 张牌放到第 5 张后面，等等，那么，这副牌将会真的被混合了. 这是 Avila 和 Forni 考虑的混合这个抽象概念的本质上的想法. 他们研究的系统不是一副牌，而是切割成几个闭的子区间. 例如，一个区间可以被切分成 4 部分，ABCD, 然后我们根据互换子区间的位置在区间上定义一个映射，比如可使 ABCD 变成 DCBA. 通过迭代这个映射，我们得到了一个称为 "互换区间变换" 的动力系统.

考虑与切分或重洗一副牌相类似的问题，我们可以问一个互换区间变换是否会真正地混合了子区间. 长时间以来认为这是不可能的. 但是，存在量化混合性程度的方式，这种方式导致了 "弱混性" 概念的出现. "弱混性" 描述了刚刚不能称为具有真正混合性质的系统. Avila 和 Forni 证明的结论是几乎每一个互换区间变换都是弱混性的. 也就是说，如果我们随机选取一个互换区间变换，那么极大的可能就是：经过迭代，它会生成一个弱混性的动力系统. 这项工作联系到了 Avila 和 Vincent Delecroix 近来的一个工作，其中他们研究了正多边形弹球系统 (billiard system) 的混性 (mixing), 弹球系统在统计物理中被用作粒子运动的模型. Avila 和 Delecroix 发现由此产生的几乎所有的动力系统都是弱混性的.

在以上提到的两方面的工作中，Avila 将他在分析方面厚重的造诣应用到了动力系统的问题上. 他有时候也反其道而行之，即将动力系统方面的研究方式应用到分析问题. 其中的一个例子是他关于拟周期 Schrödinger (薛定谔) 算子的工作，它们是关于模拟量子力学系统的数学方程. 此研究领域的一个标志性图像是 Hofstadter (霍夫施塔泰尔) 蝴蝶. 这是由 Douglas Hofstadter 在 1976 年首先发现并以他的名字命名的分形斑图. Hofstadter 蝴蝶表现了一个电子在极端磁场运动下的能谱. 物理学家注意到，对于 Schrödinger 方程中的某些参数值，此能谱是 Cantor (康托尔) 集，Cantor 集是一个引人注目的数学对象，它蕴含了看起来是互不相容的稠密或者稀疏的性质，对此物理学家感到很惊愕. 在上世纪 80 年代，数学家 Barry Simon (西蒙) 普及了 "十马提尼问题 (Ten Martini Problem)" (以 Mac Kac (卡茨) 的名字命名，他宣称为解决此问题的人购买 10 份马提尼鸡尾酒). 这个问题是：一个特别的 Schrödinger 算子，称为拟 (almost) Mathieu (马蒂厄) 算子，它的谱实际上是 Cantor 集，Avila 同 Svetlana Jitomirskaya 一起解决了这个问题.

Avila 的工作如此壮丽，反映了他关于 Schrödinger 算子研究工作冰山的一角. 从 2004 年开始，他花了多年时间来发展一般的理论，并在 2009 年的两篇预印本中予以完成. 不像拟 Mathieu 算子的那些特殊情形，这项工作建立了这样的结论，一般 Schrödinger 算子

在不同的势的范围内转换不出现临界行为，Avila 在这项工作中使用了动力系统理论的方法，包括重整化技巧.

Avila 工作的最后一个例子是从关于保体积映射的正则化定理的证明中产生的结果. 这个证明解决了一个长达 30 年的猜想；数学家们认为这个猜想是对的，但是一直未能证明它. Avila 的证明开创了光滑动力系统的整个研究方向，并且已经产生了丰富的成果. 特别地，正则化定理是 Avila, Sylvain Crovisier, 以及 Amie Wilkinson (威尔金森) 他们近期的一项工作中所获得重要进展的一个关键的因素，这项尚在准备中的工作是证明带正度量熵的一般保体积微分同胚是一个遍历动力系统.

以 Avila 在分析方面的巨大能力和在动力系统方面的深刻的直观能力，并以这两方面的结合所显示：Artur Avila 必定会在未来多年中成为一个数学的领导者.

参考文献

A. Avila, W. de Melo, and M. Lyubich, Regular or stochastic dynamics in real analytic families of unimodal maps, Inventiones Mathematicae, 2003.

A. Avila and G. Forni, Weak mixing for interval exchange transformations and translation flows, Annals of Mathematics, 2007.

A. Avila and V. Delecroix, Weak mixing directions in non-arithmetic Veech surfaces, preprint 2013.

A. Avila and S. Jitomirskaya, The Ten Martini Problem, Annals of Mathematics, 2009.

A. Avlia, Global theory of one-frequency Schrödinger operators I, II, preprints 2009.

——, On the regularization of conservative maps, Acta Mathematica, 2010.

简历　Avila 1979 年出生在巴西，是法国入籍公民. 他于 2001 年在 Rio de Janeiro 的 Instituto Nacional de Mathematica Pura e Aplicada (IMPA) 获博士学位，导师是 Welington de Melo. 从 2003 年开始，Avila 是国家科学研究中心 (Centre National de la Recherche Scientifique) 的研究人员，2008 年成为研究主任，也是附属于 Jussieu-Paris Rive Gauche 的数学研究院研究人员，从 2009 年开始，他也是 IMPA 的研究人员. 他以前获得的荣誉有，Salem 奖 (2006), 欧洲数学协会奖 (2008), 法国科学院 Jacques Herbrand 大奖 (2009), Michael Brin 奖 (2011), 巴西数学协会奖 (2013), 以及世界科学院数学的 TWAS 奖 (2013).

Manjul Bhargava 的工作

Manjul Bhargava 在数论中的工作在其研究领域有着深远的影响. 他是一个有非凡创造力的数学家，对陈述简单且具有永恒美的问题有特别的品味，并且通过发展能够提供深刻洞察力的美妙且强大的新方法加以解决.

在他读研究生时, Bhargava 阅读了不朽的《算术研究 (Disquisitiones Arithmeticae)》, 这是 Carl Friedrich Gauss (高斯) (1777—1855) 写的关于数论的书. 所有数学家都知道这本书, 但是很少有人实际上读过, 因为书中的符号和计算很难让现代读者看懂. 然而 Bhargava 发现这本书是灵感的源泉. Gauss 对 *二元二次型* (*binary quadratic forms*) 感兴趣. 二元二次型是这样的多项式：$ax^2 + bxy + cy^2$, 其中 a, b, 和 c 都是整数. 在 “算术研究” 中，Gauss 发展了一种巧妙的 *复合律* (*composition law*), 它给出了一种从两个二元二次型

Manjul Bhargava

复合得到第 3 个二元二次型的方法. 这个复合法则成了代数数论的中心工具，到现在依然如此. Bhargava 在苦苦读完 20 页长的内容一直到复合律的计算后，觉得其中应该有更好的方法.

有一天，Bhargava 在玩 Rubik 魔方的时候发现了这样的方法：考虑给魔方的每一个角标记一个数字，然后切分魔方从而得到两组由 4 个数字组成的集合. 每组由 4 个数字组成的集合自然构成一个矩阵，对这些矩阵作简单计算可以得到二元二次型. 从切分魔方的 3 种方法得出 3 个二元二次型. Bhargava 然后计算了这 3 个二次型的判别式. (判别式，被人们所熟悉的表达式为平方根符号里面的二次式，是一个与多项式相关的基本量.) 当他发现这些判别式跟 Gauss 复合律中的式子完全相同时，他意识到他已经找到了一种简单的，形象化的方法来得到 Gauss 复合律.

Bhargava 还意识到能够把魔方标记的技巧推广到其它的高次多项式 (次数为多项式中出现的最高次幂；例如，x^3-x+1 的次数是 3). 这样他发现了高次多项式的 13 种新的复合律. 直到那时，数学家们还好奇地认为 Gauss 复合律只在二元二次型中存在，在 Bhargava 的工作之前，没人认识到高次多项式之间存在其它的复合律.

Gauss 复合律为什么这么重要？一个原因是它提供了二次 *数域* (*number fields*) 的信息. 通过扩张有理数使其包含一个多项式非有理数的根，我们就可以构造数域. 如果多项式是二次的，那么我们就得到一个二次数域，多项式的次数和它的判别式是伴随于数域的两个基本量. 尽管数域是代数数论中的基本对象，但关于数域的一些基本信息并不为人所知，当固定次数和固定判别式时，不知道相应的数域有多少个. 知道了他的新复合律后，Bhargava 开始使用它们来研究数域.

有一项称为 "数的几何" 的技巧隐含在 Gauss 的工作里面，这项技巧在 Hermann Minkowski (闵科夫斯基) (1864—1909) 于 1896 年里程碑式的工作中被充分地发展了. 在数的几何中，我们把平面，或者三维空间想象为占满了由整数坐标来标记的点的格. 如果我们有一个二次多项式，那么对三维空间里面一个特定区域中整格点计数会给出相关的二次数域的信息. 特别地，我们能够使用数的几何证明，对于绝对值小于 X 的判别式，存在大约 X 个二次数域. 在 20 世纪 60 年代，一种由 Harold Davenport (达文波特) (1907—1969) 和 Hans Heilbronn (海尔布伦) (1908—1975) 提出的更精细的数的几何方法解决了 3 次数域的情况. 从那以后研究没有任何进展. 因此 Bhargava 对判别式为有界的 4 次和 5 次数域进行计数的工作使人们相当兴奋. 这些结果使用了 Bhargava 新的复合律，以及他对数的几何的系统发展，这样的发展极大地扩展了这项技巧的范围和效果. 次数大于 5 的情况依旧是一个公开问题，并且 Bhargava 的复合律也解决不了. 但是，人们有可能模拟他的复合律对这些情况做深入的探讨.

近来，Bhargava 和他的合作者使用他扩展的数的几何得到了关于 *超椭圆曲线* (*hyperelliptic curves*) 方面引人注目的结果. 这个研究领域的核心之一是：在什么时候一种算术

计算会产生一个平方数这个古老的问题. Bhargava 发现的一个答案叙述起来极其简单:次数至少是 5 的一个特定的有理系数多项式永远不会取平方值. 一条超椭圆曲线是形式为 y^2 = 有理系数多项式的方程的图像. 在多项式的次数等于 3 的情形, 这个图像称为**椭圆曲线** (*elliptic curve*). 椭圆曲线拥有特别吸引人的性质, 并且是大量研究的主题; 它在 Andrew Wiles (怀尔斯) 关于 Fermat (费马) 大定理的著名的证明中扮演了突出的角色.

关于超椭圆曲线的一个主要问题是怎样对曲线上具有有理数坐标的点进行计数. 结果显示有理点的个数与曲线的次数紧密相关. 对于次数 1 和 2 的曲线, 存在有效方法可以找出所有的有理点. 对于次数为 5 以及更高的情况, Gerd Faltings (法尔廷斯) (1986 年 Fields 奖获得者) 的一个定理说明只存在有限多个有理点. 最神秘的情况为次数等于 3 的情形 —— 即椭圆曲线, 以及次数等于 4 的情形. 现在甚至不知道有什么算法可以确定次数为 3 或者 4 的曲线上是存在有限多个有理点还是存在无限多个有理点.

这样的算法看起来是得不到的. Bhargava 采取了不同的方针, 并且这样问, 在一条**特定的** (*typical*) 曲线上关于有理点我们能说什么呢? 在与 Arul Shankar 以及与 Christopher Skinner 合作的工作中, Bhargava 得到了让人诧异的结论: 正比例的一类椭圆曲线上面只有一个有理点, 同时正比例的另一类椭圆曲线上存在无限多个有理点. 类似地, 在次数是 4 的超椭圆曲线情形, Bhargava 证明正比例的一类这样的曲线上面没有有理点, 同时正比例的另一类这样的曲线上面有无限多的有理点. 在这些工作中, 需要在高维空间的无界区域里面对格点计数, 这样的区域螺旋向外, 呈现复杂的 "触手". 没有 Bhargava 在数的几何技巧上的扩展, 这样的计数是不可能完成的.

Bhargava 也使用了他在数的几何上的扩展来考虑高次超椭圆曲线的更一般的情形. 像上面提到的, Faltings 的定理告诉我们在 5 次或者更高次的曲线上有理点的个数是有限的, 但定理没有给出寻找有理点的任何方法或者没有告诉刚好有多少有理点. Bhargava 则再次将考虑的问题变成对于特定曲线会怎么样? 当次数是偶数时, 他发现特定的超椭圆曲线上根本不存在有理点. 同 Benedict Gross (格罗斯) 的联合工作, 以及 Bjorn Poonen 和 Michael Stoll (斯托尔) 的后期工作, 在奇数次情形建立了同样的结论. 这些工作也为当次数增加时, 存在有理点的曲线的个数的递减速度提供了相当准确的估计. 例如, Bhargava 证明, 对于一个特定的 10 次多项式, 有大于 99% 的可能性它所给出的曲线上不存在有理点.

Bhargava 成就的最后一个例子是他同 Jonathan Hanke 在所谓的 "290-定理" 上的工作. 这个定理涉及到一个可以追溯到 Pierre de Fermat (1601—1665) 时代的问题, 也就是, 怎样的二次型能表示所有整数? 例如, 不是所有整数都是两个整数的平方和, 因此 x^2+y^2 不能表示所有整数. 3 个数平方和 $x^2+y^2+z^2$ 也不行. 但是, 就像 Joseph-Louis Lagrange (拉格朗日) (1736—1813) 建立了这样的著名结论, 四元数平方和, $x^2+y^2+z^2+w^2$, 能表示所有整数. 在 1916 年, Srinivasa Ramanujan (拉马努金) (1887—1920) 增加了 54 个这种 4 个变元的形式可以表示所有整数的例子. 可能还有其它的这样的 "通有" 形式吗? 在 20 世纪 90 年代早期, John H. Conway (康韦) 和他的学生, 特别是 William Schneeberger 以及 Christopher Simons (西蒙斯), 以不同的方式考虑了这个问题, 他们问是否存在一个数 c, 使得如果一个二次型能够表示小于 c 的所有整数, 那么它就能表示所有整数. 通过大

量计算，他们猜测 c 大概可以取 290. 他们取得了引人注目的进展，但是一直到 Bhargava 和 Hanke 参与后，问题才得到完全解决. 他们找到了一个小于或者等于 290 的由 29 个整数构成的集合，使得如果一个二次型 (任意多个变元) 能够表示这 29 个整数，那么它就能表示所有整数. 它的证明是独出心裁的技巧与广泛的计算机程序设计的结合.

Bhargava 不仅是世界领先的数学家，还是一位有成就的音乐家，他演奏被称为手鼓的印度乐器具有专业水准. 作为杰出的交流者，他赢得了多项教学奖，他清澈和优雅的写作使他获得了综述性文章方面一个奖项.

Bhargava 敏锐的直观会毫无偏差地把他带入深刻优美的数学问题. 凭借他深睿的洞察力和强有力的技巧驾驭力，他看起来在他研究的所有问题上都能点石成金. 在接下来的年代他将必定会给数学界带来更多的惊喜.

参考文献

M. Bhargava, Higher composition laws, parts I, II, and III, Annals of Mathematics, 2004; part IV, Annals of Mathematics, 2008.

——, The density of discriminants of quartic rings and fields, Annals of Mathematics, 2005.

——, The density of discriminants of quintic rings and fields, Annals of Mathematics, 2010.

M. Bhargava and B. Gross, The average size of the 2-Selmer group of the Jacobians of hyperelliptic curves with a rational Weierstrass point, in: Automorphic Representations and L-functions, TIFR Studies in Mathematics, 2013.

M. Bhargava and A. Shankar, Binary quartic forms having bounded invariants, and the boundedness of the average rank of elliptic curves, Annals of Mathematics, to appear.

——, Ternary cubic forms having bounded invariants and the existence of a positive proportion of elliptic curves having rank 0, Annals of Mathematics, to appear.

M. Bhargava and J. Hanke, Universal quadratic forms and the 290-theorem, preprint 2011.

M. Bhargava, Most hyperelliptic curves over $\mathbb{Q}$ have no rational points, preprint 2013, http://arxiv.org/abs/1308.0395.

B. Poonen and M. Stoll, Most odd degree hyperelliptic curves have only one rational point, preprint 2013, http://arxiv.org/abs/1302.0061.

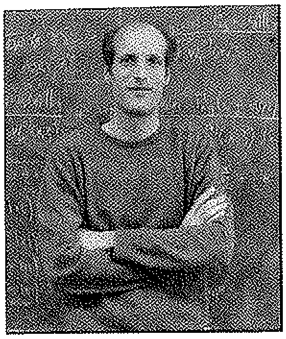
M. Bhargava, A positive proportion of plane cubics fail the Hasse principle, http://arxiv.org/abs/1402.1131, preprint 2014.

M. Bhargava and C. Skinner, A positive proportion of elliptic curves over $\mathbb{Q}$ have rank one, preprint 2014, http://arxiv.org/abs/1401.0233.

简历 Manjul Bhargava 于 1974 年出生在加拿大，自小在美国长大，也在印度度过了许多时间. 他在 2001 年从普林斯顿大学获得博士学位，导师是 Andrew Wiles, Bhargava 在 2003 年成为普林斯顿大学的教授. 他获得的荣誉包括，美国数学协会的 Merten M. Hasse 奖 (2003), 基础数学研究进展方面的 Blumenthal 奖 (2005), SASTRA Ramanujan 奖 (2005), 美国数学协会在数论方面的 Cole 奖 (2008), 以及 Infosys 奖 (2012). 他在 2013 年入选美国国家科学院院士.

Martin Hairer 的工作

Martin Hairer 在随机偏微分方程的研究中取得了重要突破，他创造了一种新的理论



Martin Hairer

可以为冲击迄今为止看起来坚不可摧的问题提供有用的工具.

微分方程这门学科的根源出自 17 世纪 Isaac Newton (牛顿) 和 Gottfried Leibniz (莱布尼茨) 的微积分的发展. 在那个年代, 一个主要的驱动力是要理解太阳系中行星的运动. Newton 的运动法则可以用来公式化描述诸如地球围绕太阳运动的微分方程. 这样的一个方程的 *解* (*solution*) 是给出在任何时间 t 的地球位置的函数. 从那时开始, 微分方程在科学和工程领域中无处不在, 它们用来描述随时间变化的系统.

描述星球运动的微分方程是具有 *确定性的* (*deterministic*), 也就是说在将来的一个确切时间, 它可以恰好确定一个星球在什么地方. 其它的微分方程是具有 *随机性的*, 也就是说, 它们描述的系统包含了固有的随机成分. 其中的一个例子是描述股票价格怎样随时间变化的方程. 这样的方程包含了一项表示股票市场价格波动的式子. 如果我们能够恰好预测这些波动, 我们就能准确预测未来的股票价格 (从而变得非常富有). 但是, 这些波动虽然有些依赖于初始的股票价格, 它们本质上是随机的, 不可预测的. 股票价格方程是 *随机* 微分方程的一个例子.

在星球运动方程中, 系统只依赖于一个变量而变化, 也就是时间. 这样的方程称为 *常* (*ordinary*) 微分方程 (ODE). 与此相比, *偏* (*partial*) 微分方程 (PDE) 描述随着多个变量, 比如时间和位置变化的系统. 许多 PDE 是 *非线性的* (*nonlinear*), 即方程中的项不是简单成比例的, 例如, 其中可能有幂指数. 最重要的一些自然现象由非线性 PDE 控制, 因此, 理解这些方程是数学和科学的一个主要目标. 但是, 非线性 PDE 是最难理解的数学对象之一. Hairer 的工作带来了很大的振奋, 因为他发展了一种一般的理论能够应用到一大类非线性随机 PDE.

一个在 Hairer 的工作中扮演了重要角色的例子是 KPZ 方程, 它以 Mehran Kardar, Giorgio Parisi, 和 Yi-cheng Zhang 这些物理学家的名字命名, 他们在 1986 年提出了交界面增长的运动方程. 为了领悟这个方程的一些自然属性, 我们考虑下面关于弹道沉积的简化模型. 粒子会向一个底层移动, 并且在到达后依附在上面, 结果, 底层的高度会随时间线性增长, 同时会不断地变得粗造不平. 在此背景下, KPZ 方程描述了介于真空和凝聚物质之间交界面随时间的演化. 粒子到达时的位置和时间的随机性使得在方程中引入了时空白噪音, 因此把 KPZ 转化成了随机 PDE, 它描述了在上面的真空和下面集凝的物质间粗糙不规则交界面对于时间的演化. 对于任意时间和底层中底边界上任意的点, KPZ 方程的解可给出此点上面交界面的高度.

KPZ 造成的挑战是: 尽管从物理学的观点来看是有意义的, 但是在数学上没有意义. KPZ 方程的解应该是表示交界面粗糙, 不规则自然性质的数学对象. 这样的对象没有光滑性; 用数学术语来说, 它不是 *可微的* (*differentiable*). 然而, KPZ 方程中的两项需要这个对象是可微的. 有一种方法可以绕过这个困难, 就是使用一种称为 *分布* (*distribution*) 的对象. 但那样的话, 一个新的问题就会出现, 因为 KPZ 方程是非线性的: 它包含了一

个平方项，而分布是不能平方的. 因为这样的原因，KPZ 方程曾经是不能很好定义的. 尽管研究人员想出了一些技术上的诀窍在特殊情况下来减弱这些困难，但是不能良好定义这个基本问题在很长时间都悬而未解.

作为一项惊人的成就，Hairer 克服了这些困难，他描述了处理 KPZ 方程的一个新方法，这个新的方法允许我们能够给出方程以及解的准确含义. 更多地，他使用从研究 KPZ 方程所得到的思想来建立一种一般的理论，*正则结构理论* (*the theory of regularity structures*)，使得能够应用到一类广泛的随机 PDE 中. 特别地，Hairer 的理论可以应用到高维的情形.

以下是 Hairer 在 KPZ 方程中的方法的基本思想. 代替小随机效果只是在无限小规模上出现这样的假设，他采用随机效果的规模跟所观察系统的规模相比是小的这样的假设. 去掉了无限小假设，这被 Hairer 称为 "正则化噪音"，促成了可解的方程. 如此导致的 *并非* 是 KPZ 的解；不过，它能够用作为构造一系列对象的起点，这个序列的极限收敛到 KPZ 的一个解. 同时 Hairer 证明了一个事实：不管采用什么类型的噪音正则化，极限解总是一样的.

Hairer 的一般理论研究了其它东西，以及不能良好定义的高维随机 PDE. 对这些方程，就像 KPZ 一样，主要的挑战在于，解的行为在非常小的规模上非常粗糙和不规则. 如果解是光滑函数，我们可以运用 *Taylor* (*泰勒*) *展开*，这是利用次数不断增多的多项式来逼近函数的方法. 但是解的粗糙性说明不能用多项式来很好地逼近. Hairer 与之代替的东西是可以小范围逼近解的行为的对象，可随手为方程定制 (custom-built). 这些对象扮演的角色类似于 Taylor 展开中的多项式，在每一点，所讨论的解就像是这些对象的无穷叠加，在每点处的叠加作粘合后，我们就得到了最后的解. Hairer 建立了这样的事实：最后的解不依赖于用来得到它的逼近的对象.

在 Hairer 的工作出现之前，研究人员在理解 *线性* (*linear*) 随机 PDE 方面已经取得了很大进展，但是还存在需要澄清非线性这一基本的情形，Hairer 的新理论在推动这一块未解决问题的方向上走了很远. 更多地，使用该理论的这类方程包括了好几项处于数学和科学中心兴趣的内容. 另外，他的理论可能为理解普适现象打开了路子. 其它方程在重整以后会收敛到 KPZ 方程，因此在潜在背景下看起来存在某种普适现象. Hairer 的理论有潜力为研究普适性提供严格的分析工具.

在发展正则结构理论之前，Hairer 做出了另一些杰出的贡献. 例如，他与 Jonathan Mattingly 的联合工作在理解随机版本的 Navier-Stokes (纳维 – 斯托克斯) 方程方面是一项重要进展，Navier-Stokes 方程是描述波运动的一个非线性 PDE.

Hairer 不仅是世界上顶级的数学家，还是一位很好的计算机程序员. 当他还是学校学生的时候，他发明了音频编辑软件，这个软件后来由他继续开发并且以 "音频编辑瑞士军刀" 成功上市. 他在数学上的工作不依赖于计算机，但是他确实发现编写小模拟程序可以帮助开发直观能力.

以 Hairer 具极强的技巧优势和对于物理系统深睿的直觉，Hairer 是这个领域的领导者，毋庸置疑，他将做出许多更进一步的重要贡献.

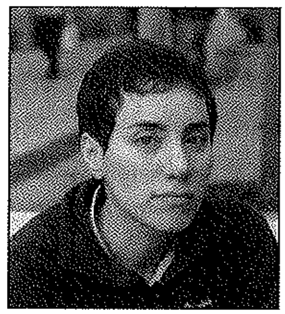
参考文献

M. Hairer, Solving the KPZ equation, Annals of Mathematics, 2013.
——, A theory of regularity structures, Inventiones Mathematicae, 2014.

简历 Martin Hairer 于 1975 年出生，是奥地利公民. 他在 2001 年从日内瓦大学 (University of Geneva) 获得物理方面的博士学位，导师是 Jean-Pierre Eckmann (埃克曼). 他现在是沃里克 (Warwick) 大学数学讲座 (Regius) 教授. 他获得的荣誉包括，伦敦数学会的 Whitehead 奖 (2008), Philip Leverhulme 奖 (2008), 皇家学会 Wolfson Research Merit 奖 (2009), Fermat 奖 (2013), 伦敦数学会 Frohlich 奖 (2014). 他于 2014 年入选皇家学会会员.

Maryam Mirzakhani 的工作

Maryam Mirzahani 在几何与动力系统方面做出了令人震惊并且高度原创的贡献. 她在 Riemann (黎曼) 曲面和它们的模空间方面的工作为几个数学学科 —— 双曲几何，复分析，拓扑学和动力学架起了桥梁，并且，反之其影响亦然. 她在双曲几何上的早期工作得到了广泛的赞誉，同时，最近她关于动力系统方面的工作获得重大进展.



Maryam Mirzakhani

Riemann 曲面以 19 世纪数学家 Bernhard Riemann 的名字命名，他是第一位理解抽象曲面重要性的数学家，所谓的抽象曲面，刚好与在某一个大空间中以具体的形式出现的曲面相反. 建立在 Riemann 的洞察力上，数学家们在 100 多年以前就搞懂了这样的曲面可以根据一个简单的数字 —— 把柄数目作拓扑的分类，即连续形变的分类，这个数称为曲面的 *亏格* (*genus*). 球面的亏格是 0, 咖啡杯曲面的亏格是 1, 正规的椒盐卷饼曲面的亏格是 3. 如果我们不考虑精细几何形状，那么对于每一个正整数 g 都刚好有一个亏格是 g 的曲面.

一个曲面在赋予了额外的几何结构时就成了 Riemann 曲面，我们可以把这样的几何结构认为是所谓的复结构，它允许我们在抽象曲面上做复分析. 因为一个复数有两个实参数，所以一个曲面在实数域上是两维的，但在复数域上是一维的，从而曲面有时候也称为复曲线. 下面的事实把 Riemann 曲面理论与代数几何联系了起来：任何复曲线都是代数曲线，这是说，尽管复曲线是抽象定义的，但可以实现为一个标准的、更大的空间中的曲线，它是一些适当选取的多项式的零点. 因此得到：Riemann 曲面存在由多项式方程给出的代数描述，尽管 Riemann 曲面首先是在抽象曲面上以复分析的语言所定义的解析对象.

另外一个定义 Riemann 曲面的等价方式是通过引入允许我们测量角度，长度，和面积的几何来实现. 此类几何最重要的是 *双曲几何* (*hyperbolic geometry*), 它是由 Bolyai (波尔约), Gauss, Lobachevsky (罗巴切夫斯基) 发现的最初始的非欧几里得几何的例子. 在曲面上复代数和双曲结构的等价性是丰富的 Riemann 曲面理论的根源.

Mirzakhani 早期的工作涉及双曲曲面上的闭测地线. 它们是长度不能在形变下变得更短的闭曲线. 50 多年前证明的很经典的一个定理给出了一个估计长度小于某个上界 L

的闭测地线数目的准确方法. 闭测地线数目以 L 的指数方式增长; 特别地, 对于大 L 它渐近于 e^L/L. 这个定理称为 "测地线的素数定理", 因为它完全相似于通常关于整数的 "素数定理", 整数的素数定理给出了小于一个给定数的素数个数的估计. (在那种情形, 对于大 L, 小于 e^L 的素数个数渐近于 e^L/L.)

Mirzakhani 研究了 "测地线的素数定理" 会是怎样的这个问题, 如果人们只考虑那些简单的闭测地线的话, 简单的 (*simple*) 意思是指这些测地线无自相交, 此种情形的结论非常不同: 长度最大是 L 的测地线数目不再以 L 的指数增长, 而是它的阶成了 L^{6g-6}, 其中 g 是亏格. Mirzakhani 证明, 对于大 L (趋向于无穷), 测地线的个数渐近于 $c \cdot L^{6g-6}$, 其中常数 c 依赖于双曲结构.

然而, 以上是关于单个曲面, 尽管是任意的, 双曲结构的结论, Mirzakhani 是通过同时考虑所有这样的结构证明一些结论的. 亏格为 g 的曲面上的复结构组成一个连续的或者是非离散的空间, 因为它们之间存在连续形变. 在形变的时候, 内在的拓扑曲面保持一样的同时, 它们的几何形状会发生变化. Riemann 知道这些形变依赖于 $6g-6$ 个参数, 或者称为 "模", 意思是指亏格为 g 的 Riemann 曲面的 "模空间" 的维数是 $6g-6$. 但是此结论关于模空间的整体结构这没有说明任何事情. 现在依然很神迷, 它自身就有非常错综复杂的几何, 而且以不同的方式观察 Riemann 曲面会导致对它的几何和结构有不同的领悟. 例如, 把 Riemann 曲面看成代数曲线时, 所导致的结论是: 模空间自身是称为代数簇的一个代数对象.

在 Mirzakhani 对简单闭测地线计数结果的证明中, 模空间上另外一种结构出现了, 即所谓的辛结构, 特别地, 它允许我们测量体积 (尽管不是长度). 在推广了 G. McShane 早期工作的同时, Mirzakhani 在模空间上体积的计算和在单曲面上对单闭测地线的计数问题之间建立了联系. 她计算了在模空间中的某些体积, 然后从此计算中推导出了对单闭测地线的计数结果.

这样的观点导致了 Mirzakhani 关于模空间其它问题新的直觉, 其中一个结果是得到了 Edward Witten (威顿) (1990 年 Fields 奖得主) 的一个猜想的意想不到的新证明. Edward Witten 是弦论领袖人物之一. 模空间中有许多特殊的轨迹对应于具有特定性质的 Riemann 曲面, 这些轨迹可以相交. 对于适当选取的轨迹, 这些相交数有物理上的解释. 基于物理直观和并非很严格的计算, Witten 提出了一个关于这些相交数的猜想. 这个猜想引起了数学家的注意, Maxim Kontsevich (孔采维奇) (1998 年 Fields 奖得主)1992 年直接证明了 Witten 的猜想. 15 年以后, Mirzakhani 的工作建立了 Witten 关于模空间深刻的猜想和曲面上测地线的基本的计数问题的联系.

近几年, Mirzakhani 对模空间的几何的其它方面进行了探索. 像以前提到的, 亏格为 g 的 Riemann 曲面的模空间自身是一个 $6g-6$ 维的, 拥有复结构且实际上是代数结构的几何对象. 另外, 模空间拥有度量, 其测地线是自然的研究对象. 受到 Margulis (马尔古利斯) 工作的启迪, Mirzakhani 和她的合作者证明了素数定理的又一个类似的结果, 即他们计数了测地线, 是在模空间上, 而不是在单个的曲面上. 她也研究了模空间上的一些动力系统 (意指时间演化系统), 特别地, 她证明了由 William Thurston (瑟斯顿) (1982

年 Fields 奖得主) 引入的称为 “地震流” 的系统是混沌的.

最近, Mirzakhani 与 Alex Eskin, 特别是与 Amir Mohammadi 一起在理解与模空间中的测地线行为有关的模空间上的另一个动力系统方面作出了重大突破. 模空间中不封闭的测地线是非常不稳定的, 甚至是病态的, 而且想要理解任何些许它们的结构以及在微小扰动下它们是怎样变化的都非常困难. 但是, Mirzakhani 等人证明了 复 (*complex*) 测地线和它们在模空间的闭包实际上是正则的, 而不是非正则的或是分形的, 令人吃惊. 结果是, 虽然复测地线是根据分析和微分几何定义的超越对象, 但它们的闭包是根据多项式定义的代数对象, 因而具有刚性.

这项工作获得此领域学者高度的赞誉, 基于这个新的结果, 这些学者正致力于做推广的研究. 这项工作这么令人激动的一个原因是 Mirzakhani 和 Eskin 证明的定理类似于 Marina Ratner (拉特纳) 1990 年代给出的著名结果, Ratner 对齐性空间上的动力系统建立了刚性 - 齐性空间是指空间中任意一点的邻域看起来跟任何其它点的邻域一样. 相反, 模空间则是完全非齐性的, 它的每一部分看起来跟其它部分不同. 发现齐性空间中的刚性在模空间的非齐性世界里有共性, 令人惊愕.

由于模空间的复杂性和非齐性, 它经常是看起来没法直接在上面做什么工作的. 但是, 对于 Mirzakhani 来说不是这样, 她有很强的几何直观可以让她直接抓住模空间的几何. 在拥有极其广泛的熟练数学技巧和完全不同的数学文化的背景下, 她身上少有地同时包含了杰出的技术能力, 无畏的追求, 深远的视觉, 以及强烈的好奇心这些特点. 模空间是一个广阔的世界, 有许多新领域等待开发, 对其持续的探索, Mirzakhani 肯定会依旧是一位领导者.

参考文献

M. Mirzakhani, Simple geodesics and Weil-Petersson volumes of moduli spaces of bordered Riemann surfaces, Inventiones Mathematicae, 2007.

——, Weil-Petersson volumes and intersection theory on the moduli spaces of curves, Journal of the American Mathematical Society, 2007.

——, Growth of the number of simple closed geodesics on hyperbolic surfaces, Annals of Mathematics, 2008.

——, Ergodic theory of the earthquake flow, International Mathematics Research Notices, 2008.

A. Eskin and M. Mirzakhani, Invariant and stationary measures for the $SL_2(R)$ action on moduli space, preprint 2013; see arXiv:1302.3320.

A. Eskin, M. Mirzakhani, and A. Mohammadi, Isolation, equidistribution, and orbit closures for the $SL_2(R)$ action on moduli space, preprint, 2013; see arXiv:1305.3015.

简历 Maryam Mirzakhani 于 1977 年出生在伊朗的德黑兰, 2004 年从哈佛大学获得博士学位, 导师是 Curtis McMullen (麦克马仑). 2004—2008 年, 她是克莱 (Clay) 数学促进会的研究人员, 同时是普林斯顿大学的助理教授. 她现在是斯坦福大学教授. 她获得的荣誉包括, 2009 年给予基础数学研究进展的 Blumenthal 奖, 以及 2013 年美国数学会 (AMS) 的 Satter 奖.

(杨紫峰 译　王世坤 校)

数学译林

第 33 卷　2014 年

总　目　录

(下转 384 页)