代数 数史 代数论：

数学史栏

1800–1870 年代数的发展

I. G. Bashmakova 和 A. N. Rudakov

原编者注：本文是 1800–1870 年代间代数和代数数论发展的一篇论文的导言中的主要部分．该论文成为《19 世纪数学》(讨论 19 世纪的数理逻辑、代数、数论和概率论) 一书的第 2 章．第二章由 I. G. Bashmakova 和 A. N. Rudakov 主笔， A. N. Parshin 和 E. I. Slavutin 协助完成．该书于 1992 年由 Birkhäuser Verlag 出版社出版，是 1978 年由 Nauka 出版社出版的俄语原著的英文翻译本．

1801 年 C. F. Gauss 《算术研究》 (Disquistiones Arithmeticae) 的出版是这一时期的首要大事．虽然该书七章内容仅有一章研究代数问题，即割圆方程 $x^n-1=0$, 但是作者光辉的代数思想却贯穿全书．该书是代数数理论方面划时代的著作，在很长一段时期内还是代数思想的源泉和指南．在研究割圆方程方面， Gauss 指出如果从解可以用根式表示这个角度来讲，对于任意的 n, 此方程都可解，并且给出了一种寻找这些解的明确的方法．他还选出了那样的 n 的值，使相应的方程的解能够用平方根式表示，从而知道了哪些正 n 边形有可能用直尺和圆规作图．跟他所有的研究一样， Gauss 的这项研究相当深入和详细． N. H. Abel 继续 Gauss 的工作，证明了一般五次方程的根式不可解性，并且找出了一类可以用根式解出的方程，此类方程现以 Abel 的名字命名．在 Abel 的论文里更加明确地出现了域 (有理域) 和群 (一个方程的群) 的新概念．沿此方向的下一项工作是年青的 E. Galois 在他的几篇论文里完善了该理论；在 1830-1832 年期间发表了部分内容，完整的论文在他去世后由 Liouville 于 1846 年发表．

今天， Abel 的，特别是 Galois 的论文已经属于代数中被广泛接受的新思潮．在研究古代的根式求解方程的过程中， Galois 将重点从问题的解转向研究求解的方法上．他给出了域的概念和方程的群的概念的清楚的定义；建立了一个方程的群的子群和该方程左边多项式分裂域的子域之间的对应；最后，选出群的正规子群并且研究它的合成序列．这些是全新的及富有成果的研究方法，直到 19 世纪 70 年代才被

原题： The Evolution of Algebra 1800–1870. 译自： *Amer. Math. Monthly*, Vol. 102, No. 3, 1995, pp. 266-270.

数学家们理解．一个例外是置换群的研究， Galois 考虑了这类群，对它们的研究在 40 年代就已经开始．

群论的另一个来源是 Gauss 的关于型的类的复合理论．该理论对与数相差甚远的对象进行类似于数的加法 (或乘法) 的运算． Gauss 对有相同判别式的型的研究实际上是对循环群和一般阿贝尔群基本性质的研究．

Gauss 的著名论文 "双二次剩余理论"(The theory of biquadratic residues) 的两部分内容分别发表于 1828 和 1832 年． Gauss 在此论文中不仅给出了复数的几何解释 (这在他之前已有人做过)，而且更重要的是，在复数中引入了整数概念．这一概念似乎与 2000 多年来的有理整数概念是不可分的．

Gauss 构造了一种复数的算术，它完全类似于普通的算术，并且用新数系统描述双二次互反性定律．这就为算术打开了无限的新视野．不久 Eisenstein 和 Jacobi 系统表述并证明了三次互反性定律，为此他们使用了形如 $K+m\rho, \rho^3=1, \rho\neq 1$ 的数．1846 年， P. Lejeune-Dirichlet 找出了域 $\mathbb{Q}(\theta)$ 的整数环的所有单位元 (指可逆元素)，其中 θ 为方程

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0 \qquad (a_i\in\mathbb{Z}^{1)})$$

的一个根．这篇论文含有代数数理论的深刻结果，而且从群论的角度看也很重要；Dirichlet 在其中首次构造了无限阿贝尔群的非平凡的例子，并研究了其结构．

代数数理论的进一步发展与互反性定理及费马最后定理 (亦称费马大定理) 有关．为了证明这一定理， E. Kummer 开始研究域 $\mathbb{Q}(\zeta)(\zeta^p=1,\zeta\neq 1)$ 的算术．在 1844-1847 年间，他发现如果定义 "素" 数为在域 $\mathbb{Q}(\zeta)$ 中不可分解的整数，那么对于域 $\mathbb{Q}(\zeta)$ 中的整数，唯一分解成素因子的定律不成立．为了 "扭转局面" 和重建一种类似于普通算术的算术，他引入了理想因子．这样他就为代数数论中最精妙和最抽象的那些理论奠定了基础． Kummer 的方法是有局限性的，后来，由 E. I. Zolotarev, K. Hensel 以及其他人加以发展，现已成为交换代数的核心．

线性代数在 19 世纪上半叶继续发展．在其发展过程中，首先值得注意的是，虽然 Gauss 的《算术研究》没有任何直接研究线性代数的内容，但其中关于两个变量的整二次型的详细论述，的确刺激了线性代数的发展． A. Cauchy 的《决定行星运动长期均差的方程》 (1826)(On an equation for the determination of the secular inequalities of planetary motions) 虽未言明但实际上研究了任意阶的矩阵特征值．随后，在 1834 年，出现了 C. G. J. Jacobi 的 "关于通过线性变换，将两个任意二次齐函数变换成两种仅含有变量的二次幂的形式；以及许多关于重积分的变换的定理"．他在其中明确研究了二次型和将其转化为标准型的问题． Jacobi 还完善了行列式理论 (1841)．但该理论仍然缺少其几何的刻划，首先是缺少最重要的和基本的线性空间的概念．第一个稍清晰的线性空间概念，由 H. Grassmann 于 1844 年在他的《线性扩张理论》(Die Lineale Ausdehnungslehre) 一书中给出．这本著作含有丰富的新思想，但写得杂乱含混． 1862 年当作者将其修改后再版时才受到重视．特别要指出的是，该书包

1) $\mathbb{Z}$ 是有理数环， $\mathbb{Q}$ 是有理数域 —— 原注．

含有外积的构造和现今著名的 Grassmann 代数. 1843 年 A. Cayley 的《n 维解析几何》(Chapters in the analytical geometry of (n) dimensions) 出版. 该书思想内容不是很丰富但广为同时代的数学家所了解. 当时线性代数的发展和超复数理论 (现被称为代数论) 之间有紧密联系, 后者在当时颇受到重视. 虽然多年来推广复数的努力没有取得进展, W. R. Hamilton 却在 1843 年成功地发现了四元数. 此后, Hamilton 终其毕生精力, 用 20 多年的时间钻研四元数. 他的研究成果总结在两部重要著作里:《四元数讲义》(Lectures on quaternions, 1853) 和《四元数理论基础》(Elements of the theory of quaternions, 1866). 这些著作对后来的影响主要不在四元数方面, 更重要的是由此引入了新的 "向量演算" 的概念和方法.

现在再来回顾群论的进一步的发展, 为此我们需要提到 A. Cauchy 在 1844–1846 年间发表的一系列论文, 他在其中证明了有关置换群 (对称群的子群) 的各种定理, 包括著名的 Çauchy 定理, 其大意是群的阶若是可以被素数 p 整除, 则此群包含一个阶为 p 的元素. 群论历史上的下一件大事为 Cayley 的论文 "与符号方程 $\theta^n = 1$ 相关的群论" (On the theory of groups, as depending on the symbolic equation $\theta^n = 1$). 该论文分三部分, 分别发表于 1854, 1854, 1859 年. 受英国学派精神的影响, Caylay 将群看成是具有给定合成律的一种抽象的符号集, 并且定义了许多抽象群的基本概念, 其中主要的是群和同构的概念. 它是代数发展史上有关新的抽象数学思维演进中的重要一步.

群论进一步发展中最重要的标志是 1870 年 C. Jordan 的《论置换与代数方程》(Traité des substitutions et des équations algébriques) 的出版. 这部著作首次系统全面地解释了 Galois 理论, 并且详细论述了到那时为止在群论方面所取得的成果, 包括作者本人在这些领域的重要成果. Jordan 还在该书中引入现在被称为线性变换矩阵的 Jordan 标准型. 该书的出版对整个数学发展是一件大事.

在 19 世纪中叶必须一提的是代数中不变式理论的蓬勃发展, 该理论介于线性代数和代数几何之间. 一方面, 它推广和发展了线性代数的某些课题, 如化二次型和线性变换矩阵为标准型等. 另一方面, 就具体的情形解答了下列问题: "已知在某坐标系中按确定的代数条件给出的几何对象; 试找出一种途径, 能从该代数条件得到对象的在坐标变换下不变的几何特征. "1840–1870 年间, 出现了许多数学家的著作, 研究在不同具体情况下, 确定不变式系. 最著名的是 Cayley, Eisenstein, Sylvester, Salmon 和 Clebsch 的著作. 另外我们必须特别提到 Hesse 分别发表于 1844 和 1851 年的两篇论文, 他在其中引入了 Hesse 矩阵的概念, 并将其应用到几何中; 还必须提到 P. Gordan 1868 年发表的著名论文, 他在其中证明存在不变式的有限基这个有普遍性的代数定理. 与上述研究有关的一篇重要论文是 Cayley 的《关于代数形式的第六篇论文》(A sixth memoin upon quantics)(1859) . 它说明了如何仅从不变式理论的角度, 来考虑几何图形的度量性质. 这篇论文是后来导致几何学领域革命性变革的 F. Klein 的埃尔兰根纲领 (Erlangen program) 的源泉之一.

那时在线性代数方面的重要成就是 Sylvester 于 1852 年证明了二次型的惯性定

理，发表在他的论文《证明每一个齐次二阶多项式，通过实正交变换能够化约为一个正、负平方和的形式》．该定理早些时候曾由 Jacobi 证明过，但未发表．1858 年 Cayley 的《关于矩阵理论的研究报告》(Memoir on the theory of matrices) 问世．在其中他引入了方阵代数，并且建立了四元素代数和二阶矩阵代数（所有二阶复方阵代数的子代数）之间的同构关系．这部著作对澄清代数论和线性代数之间的关系起到了巨大作用．

在 19 世纪 60 年代，K. Weierstrass 的活动极大地影响了数学的发展．他的研究结果只在他的柏林大学授课时的讲义里提到．在 1861 年的讲义里，Weierstrass 引入了代数的直和概念，并且证明每一个无幂零元的（有限维）交换代数（在实数域上）可分解为几个实数域和复数域的直和．这是代数学中最早的分类结果之一．

在 19 世纪 60 和 70 年代，代数数理论的主要问题之一是 Kummer 的可除性理论从分圆域到一般代数数域的扩展．这个问题分别由三位数学家 E. I. Zolotarev、R. Dedekind 和 L. Kronecker 用三种不同的构造加以解决．在这三项工作中，Dedekind 的著作 —— 对 Dirichlet 1871 年发表的数论讲义的第十个补充以及对随后的版本的第十一个补充，被所有数学家公认为解决了上述问题．Dedekind 清晰明了的代数表达方式成为其后数十年数学风格的典范．Dedekind 的这部著作和其它一些著作为当代数学理论的公理化陈述方式奠定了基础．

在我们回顾代数学发展的历程时，没有提及 19 世纪数学发展的主线之一 —— 椭圆函数理论和阿贝尔函数理论，Gauss, Abel, Jacobi, Clebsch, Gordan, Weierstrass 和其他一些数学家曾为此做出了巨大贡献．在 19 世纪，这一领域属于分析学特别是复变函数论的范畴，代数思想在其中的作用到了 19 世纪末才逐渐变得十分重要．

该领域的代数化始于 Dedekind 将其理论转换到代数函数域，这是他与 H. Weber 合作的成果 (1882)．这建立了代数数论和代数函数论之间深刻的平行性，对于确立域、模、环和理想等概念的抽象定义是关键的一步．从上个世纪末开始，研究转向另一个相反方向，从代数函数论转向数论．其结果是通过 p 进度量，引入了 p 进数和拓扑，不过这已是本世纪数学的一部分．

上面所描述的有关思想、方法和理论的发展，导致了抽象的"近世代数"及稍后的代数几何的创立，我们今天已目睹了它们的繁荣发展．

（孙康 译　袁向东 校）