拟阵的 Hodge 理论

Karim Adiprasito June Huh Eric Katz

1. 引言

对数凸性是实数序列的一个性质，出现在整个代数几何学，凸几何学和组合学中．正数的一个序列 $a_0,\ldots,a_d$ 是*对数凹的* (*log-concave*), 如果

$$a_i^2 \geq a_{i-1}a_{i+1} \qquad \text{对所有的 } i.$$

这意味着其对数 $\log(a_i)$ 构成一个凹序列．这个条件蕴含着序列 (a_i) 的单峰性，这是一个易于可视化的性质：一个序列是*单峰的* (*unimodal*), 如果存在一个下标 i 使得

$$a_0 \leq \cdots \leq a_{i-1} \leq a_i \geq a_{i+1} \geq \cdots \geq a_d.$$

我们将讨论我们关于建立各种组合学序列的对数凹性的工作，例如图的色多项式的系数和拟阵 (matroids) 复形 (的面数)．我们的方法受代数几何学，尤其是 Hodge (霍奇) 理论的激励．从一个给定的组合学对象 M (一个拟阵), 我们在实数上构作一个分次的交换代数

$$A^*(M) = \bigoplus_{q=0}^{d} A^q(M),$$

它满足与 Poincaré 对偶，硬 Lefschetz (莱夫谢茨) 定理和对于光滑射影簇的上同调的 Hodge-Riemann (黎曼) 关系类似的性质．对数凹性将从对 M 的 Hodge-Riemann 关系导出．我们相信任何在自然界中出现的对数凹性序列的背后存在这样一个与对数凹性对应的 “Hodge 结构”.

2. 图的染色

1932 年，在推广 George Birkhoff (伯克霍夫) 较早的工作中，Hassler Whitney (惠特尼) 引入了一个连通图 G 的*色多项式* (*chromatic polynomial*) 作为由

$$\chi_G(q) = |\{G \text{ 使用 } q \text{ 种颜色的正常染色}\}|$$

定义在 $\mathbb{N}$ 上的函数．换言之，$\chi_G(q)$ 是使用 q 种颜色染色 G 的顶点的方式的个数，使得每条边的端点有不同的颜色．Whitney 注意到色多项式确实是一个多项式．事实上，我们可以对一些正整数 $a_0(G),\ldots,a_d(G)$ 写出

$$\chi_G(q)/q = a_0(G)q^d - a_1(G)q^{d-1} + \cdots + (-1)^d a_d(G),$$

译自： Notices of the AMS, Vol.64 (2017), No. 1, p. 26–29, Hodge Theory of Matroids, Karim Adiprasito, June Huh and Eric Katz, figure number 1.

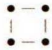
Karim Adiprasito 是以色列耶路撒冷希伯来大学的数学助理教授，他的邮箱地址是 adiprasito@math.huji.ac.il.

June Huh 是 Clay 数学促进会的研究员和普林斯顿大学的 Veblen 研究员，他的邮箱地址是 huh@princeton.edu.

Eric Katz 是俄亥俄大学的数学助理教授，他的邮箱地址是 katz.60@osu.edu.

这里 d 是比 G 的顶点数小 1 的一个数.

例 1 正方形图



有色多项式 $1q^4-4q^3+6q^2-3q$.

色多项式本来是为攻击四色问题而想出来的一个工具，但不久就其本身而言引起了注意. Ronald Read 在 1968 年猜想对于任意图，其色多项式的系数构成一个单峰序列. 几年之后，Stuart Hoggar 猜想色多项式的系数事实上构成一个对数凹序列：

$$a_i(G)^2 \geq a_{i-1}(G)a_{i+1}(G) \qquad \text{对任意的 } i \text{ 和 } G.$$

数论学家 William Tutte (塔特) 讽刺说："在理解解决四色猜想的失败上, [色多项式] 对我们进一步的困惑向我们提供了单峰猜想."

能用 删除 – 收缩关系 (*deletion-contraction relation*) 计算色多项式：如果 G/e 是从 G 删除边 e 且 G/e 是同一条边的收缩，那么

$$\chi_G(q)=\chi_{G\setminus e}(q)-\chi_{G/e}(q).$$

第 1 项对 G 的正常的染色计数；第 2 项则是对 G 的非正常的染色计数，这里 e 的端点允许有相同的颜色；第 3 项则是对 G 的非正常的染色计数，这里 e 的端点要求有相同的颜色. 注意，一般地，两个对数凹序列的和不是对数凹序列.

例 2 为了计算上面的正方形的色多项式，我们写出

并使用

$$\chi_{G\setminus e}(q)=q(q-1)^3, \quad \chi_{G/e}(q)=q(q-1)(q-2).$$

对于代数 $A^*(M)$ 的 Hodge-Riemann 关系，这里 M 是在下面的 "拟阵" 部分与 G 相联系的拟阵，蕴含 G 的色多项式的系数构成一个对数凹序列. 这与 Alan Sokal 的一个结果 —— 所有图的色多项式的根的集合在复平面上是稠密的 —— 形成对照.

3. 独立子集的计数

在代数学和几何学中，线性独立性是一个根本的概念：向量的一个集合是线性独立的，如果没有非平凡的线性组合之和等于零. 在向量的一个给定的构型中，i 个向量的线性独立的集合有多少个？用 A 表示一个向量空间的一个有限的子集，$f_i(A)$ 表示规模为 i 的 A 的独立子集的个数.

例 3 如果 A 是二元域上的三维向量空间中所有非零向量的集，那么

$$f_0=1, \ f_1=7, \ f_2=21, \ f_3=28.$$

例子暗示了一种模式，这个模式导致了 Dominic Welsh 的一个猜想：

$$f_i(A)^2 \geq f_{1-1}(A)f_{i+1}(A) \quad \text{对任意的 } i \text{ 和 } A.$$

对任意小的特别的情形，这个猜想可以通过利用 删除 – 收缩关系 计算 $f_i(A)$ 验证：如果 A/v 从 A 删除一个非零向量 v, 且 A/v 是 A 在 v 的方向上的投影，那么

$$f_i(A)=f_1(A\setminus v)+f_{i-1}(A/v).$$

第 1 项对规模为 i 的独立子集的数目计数，第 2 项对规模为 i 的不包含 v 的独立子集计数，第 3 项对规模为 i 的包含 v 的独立子集计数．正如在图的情形，我们注意到对数凹性猜想和 $f_i(A)$ 的加性性质之间的表面上的冲突．一般地，两个对数凹序列之和不是对数凹的．Dominic Welsh 猜想对于数 $f_i(A)$ 和 A 对应的一个结构暗示了一种新的描述．

4. 拟阵

在 20 世纪 30 年代，Hassler Whitney 观察到在图论和线性代数学中的几个概念一起适合一个共同的框架 ——*拟阵* 的框架．这一观察开始了一个新的主题，这个主题应用于论题的一个宽广的范围，指出几个的话，如示性类，最优化和模空间．

设 E 是一个有限集．E 上的一个 *拟阵* M 是 E 的被称为 M 的 *平坦集* (*flats*) 的子集的一个集合，满足如下的公理：

(1) 如果 F_1 和 F_2 是 M 的平坦集，那么它们的交是 M 的一个平坦集．

(2) 如果 F 是 M 的一个平坦集，那么 $E\backslash F$ 的任意一个元素恰好包含在覆盖 F 的 M 的一个平坦集中．

(3) 基集 E 是 M 的一个平坦集．

这里，M 的一个平坦集被说成覆盖 F, 如果它在正常包含 F 的 M 的平坦集之中是最小的．为了我们的目的，我们可以假设 M 是 *无环的* (*loopless*):

(1) E 的空子集是 M 的一个平坦集．

M 的平坦集的每个最大链有相同的长度，而且这个共同的长度被称为 M 的 *秩* (*rank*). 从 M 的平坦集中删除 e 得到的拟阵我们写成 $M\backslash e$, 从 M 的包含 e 的平坦集中删除 e 得到的拟阵我们写成 M/e. 当 M_1 是 E_1 上的一个拟阵，M_2 是 E_2 上的一个拟阵，而且 $E_1 \cap E_2$ 是空的， *直和* (*direct sum*) $M_1 \oplus M_2$ 被定义为 $E_1 \cup E_2$ 上的拟阵，其平坦集是形为 $F_1 \cup F_2$ 的所有集，这里 F_1 是 M_1 的一个平坦集，F_2 是 M_2 的一个平坦集．

拟阵编码了对图和向量构形共同的一个组合结构．如果 E 是一个有限图 G 的边集，称 E 的一个子集 F 是一个平坦集，当在 $E\backslash F$ 中不存在边，其端点被在 F 中的一条路连接．这定义了 E 上的一个 *图拟阵* (*graphic matroid*). 如果 E 是一个向量空间的一个有限子集，称 E 的一个子集 F 为一个平坦集，当在 $E\backslash F$ 中没有向量被包含在 F 的线性生成空间中．这定义了 E 上的一个 *线性拟阵* (*linear matroid*).

例 4　把例 1 中的正方形图 G 的边集写成 $E=\{0,1,2,3\}$. 则与 G 相联系的 E 上的图拟阵 M 有平坦集

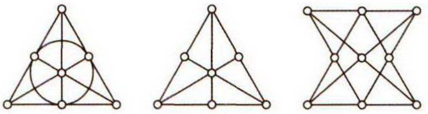
$$\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{0,3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{0,1,2,3\}.$$

例 5　把例 3 中向量 A 的构形写成 $E=\{0,1,2,3,4,5,6\}$. 则与 A 相联系的 E 上的线性拟阵 M 有平坦集

$$\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{1,2,3\}, \{3,4,5\}, \{1,5,6\},$$
$$\{0,1,4\}, \{0,2,5\}, \{0,3,6\}, \{2,4,6\}, \{0,1,2,3,4,5,6\}.$$

源自一个域 k 上的一个向量空间的一个子集的一个线性拟阵被说成在 k 上是 *可实现的* (*realizable*). 一点也不奇怪，这个概念对域 k 很敏感．一个拟阵可能源于一个域上的

一个向量构形，同时在其他域上不存在这样的向量构形. 许多拟阵在任何一个域上是不可实现的.



在右面画出的秩为 3 的无环的拟阵中，秩为 1 的平坦集由点表示，而且包含超过 2 个点的秩为 2 的平坦集由线表示，第 1 个拟阵在 k 上是可实现的，当且仅当 k 的特征是 2; 第 2 个拟阵在 k 上是可实现的，当且仅当 k 的特征不是 2; 第 3 个拟阵在任何一个域上是不可实现的.

一个拟阵 M 的特征多项式 $\chi_M(q)$ 是一个图 G 的色多项式 $\chi_G(q)$ 的一个推广. 它可以使用如下的法则递归地定义:

(1) 如果 M 是直和 $M_1 \oplus M_2$, 那么

$$\chi_M(q) = \chi_{M_1}(q)\chi_{M_2}(q).$$

(2) 如果 M 不是一个直和，那么，对任意 e,

$$\chi_M(q) = \chi_{M\setminus e}(q) - \chi_{M/e}(q).$$

(3) 如果 M 是 $\{e\}$ 上秩为 1 的拟阵，那么

$$\chi_M(q) = q - 1.$$

(4) 如果 M 是 $\{e\}$ 上秩为 0 的拟阵，那么

$$\chi_M(q) = 0.$$

由对偏序集的 MÖbius (默比乌斯) 反演的结论，M 的特征多项式是定义良好的.

现在我们可以陈述在 [AHK] 中我们的结果，它证实了 Gian-Carlo Rota 和 Dominic Welsh 的一个猜想.

定理 6 ([AHK, 定理 9.9]) *对任意一个拟阵 M, 它的特征多项式的系数构成一个对数凹序列.*

这蕴含着序列 $a_i(G)$ 的对数凹性 [Huh 12] 和序列 $f_i(A)$ 的对数凹性 [Len 12].

5. 拟阵的 Hodge-Riemann 关系

设 X 是 "维数" d 的一个数学对象. 它常常可以用自然的方式从 X 构建实数上的一个分次向量空间

$$A^*(X) = \bigoplus_{q=0}^{d} A^q(X),$$

配有一个分次的双线性配对

$$P : A^*(X) \times A^{d-*}(X) \to \mathbb{R},$$

和一个分次的线性映射

$$L : A^*(X) \to A^{*+1}(X), \quad x \mapsto Lx$$

("P" 代表 Poincaré, "L" 代表 Lefschetz). 例如，$A^*(X)$ 可以是一个紧 Kähler (凯勒) 流形 X 上的实 (p,p) 形式的上同调，或一个光滑射影簇 X 上的代数闭链模同调等价的环，或一个凸多胞腔 X 的组合相交上同调 [Kar 04], 或一个 Coxeter (考克斯特) 群 X 的一个元素的 Soergel 双模 [EW 14], 或下面定义的一个拟阵 X 的周 (Chow) 环. 我们期望对于每个非负整数 $q \le \frac{d}{2}$:

(1) 双线性配对

$$P: A^q(X) \times A^{d-q}(X) \to \mathbb{R}$$

是非退化的 (对 X 的 Poincaré 对偶),

(2) 线性映射的合成

$$L^{d-2q}: A^q(X) \to A^{d-q}(X)$$

是一一映射 (对 X 的硬 Lefschetz 定理), 以及

(3) 由

$$(x_1, x_2) \mapsto (-1)^q P(x_1, L^{d-2q}x_2)$$

定义在 $A^q(X)$ 上的双线性形是对称的, 且在

$$L^{d-2q+1}: A^q(X) \to A^{d-q+1}(X)$$

的核上是正定的 (对 X 的 Hodge-Riemann 关系).

对上面列出的对象, 除了一个关于代数闭链的 Grothendieck (格罗滕迪克) 标准猜想的主题之外, 已知这 3 个性质都成立.

对于 E 上一个无环拟阵 M, 向量空间 $A^*(M)$ 有分次代数的结构可以明确地描述.

定义 7 对 M 的每个非空正常平坦集 F, 我们引入一个变量 x_F, 并且令

$$S^*(M) = \mathbb{R}[x_F]_{F\neq\emptyset, F\neq E}.$$

M 的周环 $A^*(M)$ 是 $S^*(M)$ 除以一个理想的商, 这个理想由线性型

$$\sum_{i_1\in F} x_F - \sum_{i_2\in F} x_F$$

以及二次单项式

$$x_{F_1}x_{F_2}$$

生成, 对 E 的不同元素 i_1 和 i_2 的每个对有一个线性型, 对 M 的不可比非空正常平坦集 F_1 和 F_2 的每个对有一个单项式.

M 的周环是由 Eva Maria Feichtner 和 Sergey Yuzvinsky 引入的. 当 M 在一个域 k 上可实现时, 它正是定义在 k 上一个超平面安排的补的 "神奇" 紧化的周环, 正如 Corrado de Concini 和 Claudio Procesi 所描述的.

设 d 是比 M 的秩小 1 的整数.

定理 8 ([AHK, 命题 5.10]) *存在一个线性一一映射*

$$\deg: A^d(M) \to \mathbb{R},$$

它由对每个非空正常平坦集的极大链

$$F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \cdots \subsetneq F_d$$

成立的性质

$$\deg(x_{F_1}x_{F_2}\cdots x_{F_d}) = 1$$

唯一地确定. 此外, 双线性配对

$$P: A^q(M) \times A^{d-q}(M) \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \deg(xy)$$

对每个非负的 $q \leq d$ 是非退化的.

对 M 线性算子 L 应该是什么？我们在一个非空的开凸锥上汇集 L 所有有效的选择. 该锥是在复几何学中 Kähler 锥的一个类似物.

定义 9　2^E 上的一个实值函数 c 被说成是 *严格次模的* (*strictly submodular*), 如果

$$c_\emptyset = 0, \quad c_E = 0,$$

而且对于任意两个不可比的子集 $I_1, I_2 \subseteq E$, 有

$$c_{I_1} + c_{I_2} > c_{I_1 \cap I_2} + c_{I_1 \cup I_2}.$$

一个严格的次模函数 c 定义一个元素

$$L(c) = \sum_F c_F x_F \in A^1(M),$$

它通过一个乘法像一个线性算子一样起作用

$$A^*(M) \to A^{*+1}(M), \quad x \mapsto L(c)x.$$

所有这样元素的集是在 $A^1(M)$ 中的一个凸锥.

[AHK] 的主要结果断言三元组 $(A^*(M), P, L(c))$ 对每个严格次模函数 c 满足硬 Lefschetz 定理和 Hodge-Riemann 关系：

定理 10　*设 q 是小于 $\frac{d}{2}$ 的一个非负整数. 则*

(1) 由乘以 $L(c)$ 的乘法定义一个同构

$$A^q(M) \to A^{d-q}(M), \quad x \mapsto L(c)^{d-2q}x.$$

(2) 在 $A^q(M)$ 上由

$$(x_1, x_2) \mapsto (-1)^q P(x_1, L(c)^{d-2q}x_2)$$

定义的对称双线性型在 $L(c)^{d-2q+1}$ 的核上是正定的.

对上面列出的不同类型的对象，已知的硬 Lefschetz 定理和 Hodge-Riemann 关系的证明有特定的结构上的相似性，但没有已知的方式，从一个证明导出另一个证明.

6. 对数凹性证明的梗概

现在我们解释为何对 M 的 Hodge-Riemann 关系蕴含对 $\chi_M(q)$ 的对数凹性. 事实上，对 M 的 Hodge-Riemann 关系蕴含在表达式

$$\chi_M(q)/(q-1) = m_0 q^d - m_1 q^{d-1} + \cdots + (-1)^d m_d$$

中的序列 (m_i) 是对数凹的，这更强些.

我们定义 $A^1(M)$ 的两个元素：对任意的 $j \in E$, 令

$$\alpha_M = \sum_{j \in F} x_F, \quad \beta_M = \sum_{j \notin F} x_F.$$

这两个元素不依赖 j 的选择，而且它们是对严格次模 c 的型 $L(c)$ 的元素的界. 一个短的组合论证证明 m_i 是 α_M 和 β_M 的一个混合的次数：

$$m_i = \deg(\alpha_M^i \beta_M^{d-i}).$$

因此，对每个 i 证明

$$\deg(\alpha_M^{d-i+1}\beta_M^{i-1})\deg(\alpha_M^{d-i-1}\beta_M^{i+1}) \le \deg(\alpha_M^{d-i}\beta_M^i)^2$$

就够了. 这是在代数几何学中对相交数的 *Teisser-Khovanskii 不等式* 和凸几何学中对混合体积的 *Alexandrov-Fenchel (亚历山德罗夫 – 芬切尔) 不等式* 的类似物. 主要情形是当 $i = d-1$ 的时候.

通过一个连续性论证，我们可以用足够接近 β_M 的 $L = L(c)$ 代替 β_M. 于是，在主要情形想要的不等式变成

$$\deg(\alpha_M^2 L^{d-2})\deg(L^d) \le \deg(\alpha_M L^{d-1})^2.$$

这由下述事实即得：限制于 α_M 的生成空间 (span) 的、以及 L 是半不定的，则双线性型

$$A^1(M) \times A^1(M) \to \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2) \mapsto \deg(x_1 L^{d-2} x_2)$$

的符号差依次是对 M 的 Hodge-Riemann 关系在 $q = 0, 1$ 时的结论.

这个应用只用了对 M 的 Hodge-Riemann 关系的一个小片段. 对 M 的一般的 Hodge-Riemann 关系可能被用来提取关于 M 的其他有趣的组合学信息.

参考文献

[AHK] Karim Adiprasito, June Huh, and Eric Katz,Hodge theory for combinatorial geometries, arXiv: 1511.02888.

[EW14] Elias-Williamson, Ben Elias, and Geordie Williamson, The Hodge theory of Soergel bimodules, Ann. Math. (2) 180 (2014), 1089–1136. MR3245013.

[Huh12] June Huh, Milnor numbers of projective hypersurfaces and the chromatic polynomial of graphs, J. Amer. Math. Soc. 25 (2012), 907–927. MR2904577.

[Kar04] Kalle Karu, Hard Lefschetz theorem for nonrational polytopes, Invent. Math. 157 (2004), 419–447. MR2076929.

[Len12] Matthias Lenz, The f-vector of a representable-matroid complex is log-cncave, Adv. in Appl. Math. 51 (2013), no. 5, 543–545. MR3118543.

(赵高弟 译　　赵振江 校)

****

(上接 66 页)

尽管这局限于近来的学位. 令人沮丧的是，许多引擎不允许通过主题或导师搜索；事实上，一些机构没有保存对两者的记录. 加州理工学院 (Caltech) 的网址 `thesis.library.caltech.edu` 是最佳者之一，甚至允许通过导师或委员会的成员进行搜索. 在这样的机构可能做成一个不错的学生项目，以确保合适的论文都增加到 MGP 中.

同时，为了变得更大而且更准确，MGP 完全依赖数据的自愿提供，它也需要资金的支持. 执行主任 Mitch Keller 注意到："在过去的 20 多年，每个涉及 MGP 的人感谢数学界的支持，而且我们期待在未来的许多年它继续是一个宝贵的资源. MGP 长期使用捐赠的资金雇用学生工作者帮助处理数据. 因为该项目在 2002 年移到北达科他州立大学 (NDSU), 研究生助理们除了他们正常的教学任务，这些大多是他们做的. 因为 2008—2009 年的预算范围每年是从 6,000 美元 —9,000 美元，其中差不多一半用于支付研究生助理处理数据的费用. 余下的通常是旅行和打印招贴画的费用. 为了进一步改进这个项目，我们正在为增加每年收到的捐赠的数额而工作. 当下，我们积压了一个月的工作，原因是人员配置的限制，这主要与资金有关，而且我们已经需要考虑在 2018 年参加国际数学家大会 (ICM) 的费用."

鼓励捐赠支持 MGP 的不间断的工作，无论是一次性的礼物 (甚至是遗产礼物) 或多次捐赠. 使用在 MGP 主页的侧边菜单上的捐赠按钮是捐赠的一种途径.

图片来源　图 1—3 由数学谱系项目提供，图 4 由 Ezra Brown 提供.

(赵振江 译　　张崇 校)