常微分方程五十年（下）*

福原满洲雄

§9. 解在无穷远处的性质

设微分方程

$$dy/dt=f(t,y) \tag{9.1}$$

中的 y 是 n 维向量，它的分量可以是实数也可以是复数，自变量 t 取实数值．视 t 为时间变量，问题在于弄清楚当 $t\to\infty$ 时，在什么样的条件下出现下述现象：解收敛于一个定值，或者解在有界范围内振动，或者振幅无限增大，从而单调地发散于无限大．

若将 t 换为 $x=\frac{1}{t}$，以 x 作自变量，则 $t\to+\infty$ 时 $x\to+0$，因此，"$t\to+\infty$ 则 $y\to b$"的情形对应于"$x\to+0$ 则 $y\to b$"的初值问题．由于我们处理初值问题时包括了微分方程右端在初值的邻域内不连续的情形，所以对于我们来说研究解在无穷远处的性质并不困难．在初值问题中，解存在是否唯一？若不唯一，那么全体解的集合又具有什么性质？这些问题是定性的问题，而研究解在无穷远处的性质可以说是定量的问题，两者有本质的区别．不过，关于初值问题的比较定理具有定量的性质，所以作为研究技巧来说并不是没有关系的．

在北海道大学与九州大学理学院创建之前，文献最丰富的就算东北大学，当时要了解国外在进行什么研究并不容易．1930 年前后，我们所注意的是以 Perron 为中心的研究，由〔78〕可以想象当时的状况．

Perron[79] 指出，Fatou 死后发表的论文[52] 有错误．问题是说：一个实二阶微分方程

$$d^2y/dt^2+f(t)y=0 \tag{9.2}$$

若 $t\to\infty$ 时 $f(t)\to c$ （>0），那么，当 $t\to\infty$ 时所有的解是否有界？Fatou 认为所有的解都有界，这个看法为 Perron 的一个具体例子所否定．对此，南云和福原指出，若条件

$$\int_t^\infty \left|f(t)-c\right|dt<\infty \tag{9.3}$$

成立，则所有的解都有界[72]．我们不满足于这个条件，所以立即求出了 n 元方程组（9.1）的解为有界的更一般的条件[73]．这个结果并不是易于理解的，但把它用于（9.2），便得到使所有的解为有界的条件是

$$\int_t^\infty \left|f'(t)\right|dt<\infty\,. \tag{9.4}$$

Caccioppoli 也得到了这个结果[49]．

---

* 原题：常微分方程の50年，Ⅱ.译自：《数学》，34：3（1982），262—269．

于是问题就在于把这样的问题推广到 n 阶方程或一阶方程组。为简便计，我们就线性的情形加以说明。将线性方程写成

$$dy/dt = A(t)y + f(t), \tag{9.5}$$

y, $f(t)$是 n 维向量，$A(t)$是 $n\times n$ 矩阵。多数情形都假定了 $A(t)$, $f(t)$的连续性，但不难推广到 $A(t)$, $f(t)$不连续但可积分的情形，即(9.5)是所谓的Carathéodory 型的情形。因此，这种推广暂时放在一边，等必要时再说。

这类问题中，我们所注意的是 Perron[80]，Lettenmeyer[67] 和Spāth[88]。

$A(t)$有界时，考虑以有界矩阵 $P(t)$（其逆矩阵亦有界）为系数的线性变换

$$y = P(t)z, \tag{9.6}$$

经过变换（9.6）得到的微分方程为：

$$dz/dt = B(t)z + g(t), \tag{9.7}$$

Perron 证明了（9.7）的系数矩阵 $B(t)$可化为三角矩阵。这个结果看起来是有意义的，但实际上却不大使用，可能是因为搞不清楚所给的矩阵和 $B(t)$的对角线元素之间有什么关系。

Lettenmeyer 证明：如果 $t\to\infty$时存在极限矩阵

$$A_0 = \lim A(t), \tag{9.8}$$

又 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 A_0的特征值，其实部分别为 $\mu_1,\cdots,\mu_n$，则齐次方程

$$dy/dt = A(t)y \tag{9.9}$$

有解，对各个 j 满足条件

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\log\sum_{k=1}^{n}\left|y_k(t)\right| = \mu_j; \tag{9.10}$$

而且，令 $j=1,2,\cdots,n$ 即得（9.9）的一组基本解。

其前不久，Späch 考虑 n 阶线性微分方程

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)y = 0, \tag{9.11}$$

他假定 $t\to\infty$时极限

$$\lim\ a_j(t) = a_j \tag{9.12}$$

存在，得到了下面的结果：若极限方程

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_ny = 0 \tag{9.13}$$

的解都有界，且满足条件

$$\int_t^\infty \left|a_j(t) - a_j\right|dt < \infty, \tag{9.14}$$

则（9.11）的解都有界。

这包含了前述(9.3)作为(9.2)的解有界的条件，但当时未能得到广泛的理解。Peyovicth[81,82] 把 Späth 的结果推广到方程组的情形。Späth 还讨论了(9.11) 的右端带有非齐次项的情形，Peyovitch 讨论了右端的函数 $f(t,y,\cdots,y_n)$其 Lipschitz 条件的系数充分小的情形，详细说明甚长，此处从略。

福原[56] 将 Lettenmeyer 的结果作了精确化与推广。若极限矩阵 A_0存在，就可以用常系数线性变换将 A 化为 Jordan 标准型。即使极限矩阵对角线以外的元素虽不能为零，但可以使之充分小，因此，方程可写成

(9.15)
$$dy/dt = \Lambda y + A(t)y,$$
$$\Lambda = \mathrm{diag}\ [\lambda_1, \cdots, \lambda_n]\ .$$
当 $t \to \infty$ 时 $A(t)$ 的极限尽管不确定，但可对充分大的 t，令 $A(t)$ 的元素比较小。这时，令

(9.16)
$$M(t) = \max\{\ |y_j(t)|\ ;\ j = 1, \cdots, n\},$$
$$M_0(t) = \max\{\ |y_j(t)|\ ;\ \mu_j = \mu\}.$$
福原证明存在满足下列条件的解：

(9.17)
$$\begin{cases}(\mu - \delta)t + o(t) \leqslant \log M(t) \leqslant (\mu + \delta)t + o(t), \\ M(t) = O(M_0(t))\ ,\end{cases}$$
其中，δ 是小正数，解的个数等于使得 $\mu_j = \mu$ 的 j 的个数。

精确叙述上面的结果篇幅太长，这里从略，不过只要注意 $A(t)$ 的极限矩阵 A_0 存在时，对充分大的 t，可设 A_0 的对角线以外的元素充分小，因此 δ 可以充分小，从而可使 (9.17) 中的 $\delta = 0$。福原的论文很不好读，这里想提请注意的是，$M(t)$ 的大小有上下界控制。普通的比较定理是用上界控制，不是用下界控制。为了得到下界的估计，要害在于利用前面提到的福原问题的存在定理。

把实系数线性微分方程 (9.9) 视为 Carathéodory 型，其解都有界的条件由 Cesari [50] 获得如下：

令 $A(t) = A_0 + A_1(t) + A_2(t)$，$A_0$ 为常数矩阵，其特征值都小于或等于零，实部为零的特征值都是单重的，$A_1(t)$ 有界变差，$A_0 + A_1(t)$ 的特征值的实部都小于或等于零，$\| A_2(t) \|$ 直到 ∞ 的积分收敛。

上面的结果又得到 Levinson [68]，千叶・木村 [66] 等人的推广。

§10. 非正则奇点处的渐近展开

福原从上述研究出发，进而研究解的渐近展开问题。关于线性微分方程的正则奇点，现在毋需说明，使用向量符号，以 ∞ 为非正则奇点的一阶线性微分方程组可记为

(10.1)
$$dy/dx = x^{\sigma-1}A(x)y,$$
$A(x)$ 在 $x = \infty$ 处正则，$A_0 = A(\infty) \neq 0$，σ 为正整数。这时，∞ 叫作(10.1)的（形式的）σ 阶非正则奇点。所谓“形式的”，是指利用一个线性变换，其系数是顶多以 ∞ 为极点的函数，可以使 σ 取更小的值，否则就叫做本质的 σ 阶，这些内容颇为复杂，这里给以非正式的介绍。

考虑微分方程

(10.2)
$$y^{(n)} + x^{\sigma-1}p_1(x)y^{(n-1)} + x^{2(\sigma-1)}p_2(x)y^{(n-2)} + \cdots$$
$$+ x^{(n-1)(\sigma-1)}p_{n-1}(x)y' + x^{n(\sigma-1)}p_n(x)z = 0,$$

其系数函数至多以 ∞ 为极点，确定正整数 σ 尽可能小，使 $p_1(x), p_2(x), \cdots, p_n(x)$ 在 ∞ 处为正则，∞ 称为(10.2)的 σ 阶非正则奇点。无论是方程组还是单个方程的情形，$\sigma \leqslant 0$ 时 ∞ 最多是正则奇点，这点自不待言。

如果以 $p_j = p_j(\infty)$ 为系数的代数方程

(10.3)
$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \cdots + p_n = 0$$
有 n 个相异的根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$，则对应于各 λ_j，存在形式的级数解

$$y=\exp\ l_j(x)\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu \gamma^{-\nu} \qquad (c_0 \neq 0) \tag{10.4}$$

这里 $l_j(x)$ 是 σ 次多项式，称为特征多项式，其 σ 次项的系数为 λ_j/σ。这个级数一般是发散的。众所周知，Poincaré 首先解决了解的渐近表示问题，其后，又把结果推广到方程组的情形。还有，Poincaré 假定系数为有理数，利用Laplace 变换，并考虑了取消这一限制的问题。和正则奇点的情形一样，有时（10.3）有重根，出现对数项。包括这种情形，也包括最一般的情形下形式解的渐近展开在内，其证明见 Trjitzinsky[89]。

在微分方程组（10.1）的情形，设 A_0的特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，Trjitzinsky[89]，福原[56]，Malmquist[70]得到了同样的结果。不消说，这时系数 c_ν是 n 维向量。

在非正则奇点处，渐近展开的有效范围是以奇点为顶点的角形区域。福原讨论了使这个角形区域尽可能大的问题。将一个形式解渐近展开后，如果解存在的角形区域已经尽可能扩大，对应于形式解的这个角形区域就被确定了，因此，这个角形区域称为形式解或相应特征多项式的固有角形区域。又称构成角形区域边界的射线方向为形式解或特征多项式的奇异方向。与某个形式解的奇异方向相应的射线称为Stokes 线。这就是说，以这条射线为界，同一个解的渐近表示在其两侧有变化。

在非正则奇点的情形，形式解一般是发散的，但Perron[77]指出，有时形式解是收敛的。福原，岩野[59]又推广了这一结果。

福原的方法分为两步。首先，为了求形式解，完全不考虑收敛性。用形式变换将已知方程尽可能化简，若最终得到的简化型方程能用求积法求解，那么，将其解代入形式变换，便得已知方程的形式解。这时，为了容易计算，采用的方法是把一般的形式变换分解为简单变换的无穷乘积。此即 Turrittin[90]所谓的逐步过程（Step by step procedure）。福原与岩野一起把这个方法用于非线性情形，取得了成果。

其次，为了确定究竟在什么意义下形式解就可视为解，应以形式解的部分和作为近似解，去作误差估计。

为了证明形式解的收敛性，历来使用的方法不是优级数，就是逐次逼近法或利用 Laplace 积分，相比之下，福原的方法应用范围广泛，不管收敛还是发散都适用，有效地应用存在和唯一性定理，所以是特别好的结果。实际上，由此导出的比较定理就是这种结果的有意识的应用。

§11. 非线性微分方程的奇点

设一阶微分方程已化为标准形，其右端在初值的邻域内不确定，即设

$$dy/dx=f(x,y)/g(x,y) \tag{11.1}$$

中的 $f(x,y)$、$g(x,y)$是在（0,0）处为零的正则函数。

众所周知，Briot 和 Bouquet[48] 首先讨论了使得 $x\to 0$ 时 $y\to 0$ 的正则解的存在性。当分母 $g(x,y)=x$ 时，上面的方程可写成

$$x\,dy/dx=f(x,y). \tag{11.2}$$

这时，若 $f(x,y)$对 y 的偏导数在（0,0）点的值 λ 不是特征值，则在 x,y 很小的范围内，解 y 可用 x 和 Cx^{λ}（C 为任意常数）的二重幂级数表示，从而，解 y 收敛于零的充要条件是：

x 沿复平面上 Cx^{λ} 与 x 都收敛于零的道路趋于零。

把 (11.1) 一般化，Poincaré，Picard 等人讨论过[83]微分方程组

$$\frac{dy_1}{f_1(y_1,\cdots,y_n)}=\cdots=\frac{dy_n}{f_n(y_1,\cdots,y_n)}, \tag{11.3}$$

其中分母是在 $(0,\cdots,0)$ 为零的正则函数，以及更一般的方程

$$x\,dy_j/dx=f_j(x,y_1,\cdots,y_n)\qquad(j=1,\cdots,n), \tag{11.4}$$

其中右端是在 $(0,\cdots,0)$为零的正则函数。实际上，已经证明：(11.4) 的右端关于 $y_1,\cdots,y_n$ 的函数矩阵，若在 $(0,\cdots,0)$ 点的特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$之间无特殊关系，则 (11.4) 有$x$，$C_1x^{\lambda_1}$，$\cdots$，$C_nx^{\lambda_n}$的$n+1$重形式幂级数解；若$\lambda_1,\cdots,\lambda_m(m\leqslant n)$和 1 都在过 0 的一条直线的同一侧，则令 $C_{m+1}=\cdots=C_n=0$而得的 $m+1$ 重形式幂级数解收敛。至于其余的情形，问题复杂不明之处甚多，这里只指出 Dulac 的文章[52]就算了。关于其后的研究，仅请注意 Siegel[86,87]所得的下列结果。

对于过 0 的任意直线，即使 $1,\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 分别在其两侧，只要 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 满足某个条件，x，$C_1x^{\lambda_1},\cdots,C_nx^{\lambda_n}$的$n+1$重形式幂级数解就收敛。再者，即使在Hamilton方程组的情形，实际上形式解有时也发散。

与线性微分方程的非正则奇点对应

$$x^{\sigma+1}dy/dx=f(x,y) \tag{11.5}$$

也是研究对象。这里，y 是 n 维向量，σ 是正整数，右端是正则向量值函数，满足条件：$x=0$，$y=0$ 时为零。这时，若把$f(x,y)$的线性部分记为 $\Lambda(x)y$ （$\Lambda(x)$是以在 0 点为零的正则函数为元素的 $n\times n$ 矩阵），则以 $x=0$ 为非正则奇点的线性微分方程

$$x^{\sigma+1}dy/dx=\Lambda(x)y \tag{11.6}$$

有重要作用.在前面的说明中，是以∞为非正则奇点，此地若取 $1/x$ 为自变量，便化为该情形。

(11.5) 的研究是线性微分方程 (11.6) 研究的继续，(11.5) 的研究颇依赖于 (11.6) 研究的发展，与(11.4)一样，对(11.5)说来，求 $n+1$ 重形式幂级数解也是首要问题.正是福原对这个问题做了一般的处理。随之而来的问题是形式解实际上作为解的表示具有什么样的意义？Trjitzinsky[89]，Malmquist[70]也研究了这个问题，最详尽的结果由岩野[61]获得。

(11.6) 的形式解是x^{-1}的多项式（称为特征多项式）的指数函数与 x 的幂级数的乘积，特征多项式的次数一致则容易处理，否则，尤其是在非线性的情形则难以处理。岩野[62,63]还研究了形如

$$x^{\sigma+1}dy/dx=f(x,y,z),\quad x\,dz/dx=g(x,y,z)$$

的方程，这是非正则奇点与正则奇点混杂的情形，取得了成果。

§12. 关于单个一阶微分方程的局部问题

微分方程的局部问题，即使特殊的场合也不容易弄清楚，福原用前述的方法作了彻底的研究[57]。首先对 Briot 和 Bouquet 研究的情形 (11.2) 作形式变换

$$y=\sum_{j,k}p_{jk}x^jz^k\quad(p_{00}=0,\ p_{01}=1), \tag{12.1}$$

得到以下四个简化型：

(0) $xz'=\lambda z$.

(i) $xz' = \lambda z + bx^{\lambda}$,

(ii) $xz' = z^{m+1}(b + b'z^{m})$,

(iii) $xz' = z(\lambda + b(x^{\mu}z^{\nu})^{m} + b'(x^{\mu}z^{\nu})^{2m})$

(b, b'为常数，m为正整数）．

这里，(0)是一般情形：λ不是特殊值，(i) 是λ为正整数，(ii) 是$\lambda=0$，(iii) 是$\lambda=-\mu/\nu$（μ，ν为互素的正整数）．这些方程都可用求积法求解，因此，将其通解$z(x,C)$（C为任意常数）代入（12.1）的右端便得到二重形式幂级数．

其次，把（12.1）的右端直到N次的项集中起来，设为$P_N(x,z)$，令

(12.2) $$y = u + P_N(x, z(x,C)).$$

对u的微分方程可以应用存在与唯一性定理．这样就肯定了仅存在一个解，再说明将此解代入（12.2）所得的（11.2）的解与N无关．这时，要用到使x与$z(x,C)$都收敛于0的路径，因此，如果不能取这样的路径，则此法不适用．不好办的是λ为负无理数的情形和（iii）中$b=b'=0$的情形，在后一情形，由于解是$t=\log x$的函数，以$2\pi i$为周期，可以证明形式解的收敛性．最后剩下未解决的就是λ为负无理数的情形．Dulac[51]相当巧妙地构造了一个形式解发散的例子．另一方面，涉谷[85]证明了，即使是简单微分方程

(12.3) $$x\frac{dy}{dx} = \lambda y + y^2 + \frac{axy^3}{1-x},$$

只要λ满足某种条件，x，Cx^{λ}的二重形式幂级数就发散．

在（ii）的情形，由解的展开式可知，在0点非正则的解以0为寻常超越奇点．这就是Forsyth在其大著[54]中讨论过但终未解决的问题．

设（11.1）的$f(x,y)$，$g(x,y)$是x,y的多项式，或者更一般是y的多项式，其系数是在0的正则函数．若（11.1）的解$y(x)$在0处有本性奇点，则对其聚值集的任意值b有$g(0,b)=0$，从而$g(0,y)$恒为零，而$g(x,y)$以$x^{\sigma+1}$为因式（σ为非负整数）．于是

$$g(x,y) = x^{\sigma+1}h(x,y),$$

$h(0,y)$不恒为零．设b为$h(0,y)$的一个零点，以$z=y-b$代替y作未知函数，再把z改写成y，设所得的方程为（11.1），从而化为$b=0$的情形．

因$h(0,y)$在$y=0$处为零但不恒为零，故y的代数方程

$$h(x,y) = 0$$

具有从x的某个正幂开始的根，作变换

$$y = x^{m}z,$$

如果与$y(x)$相应的$z(x)$以0为本性奇点，就对z的微分方程重复同前面一样的讨论，如此操作有限次之后，必能得到如（11.2）或（11.5）的微分方程，因此，要知道以$x=0$为本性奇点的解$y(x)$的性质，只需考察特殊的类型即可，从而在$x=0$，$y=0$的邻域内考察（11.2）和（11.5）的解的性质具有重要意义．

§13. Malmquist，吉田，木村的定理

为简单计，设(11.1)中$f(x,y)$，$g(x,y)$都是x,y的多项式．由前节所论可知以下事实．

若（11.1）的解$y(x)$以$x=a$为超越奇点，则$g(x,y)$恒为零，或者y的两个代数方程

(13.1) $$g(a,y) = 0, \qquad f(a,y) = 0$$

有公共根。在后一情形，a 是寻常超越点，其聚值集由公共根之一构成。

若 $g(x,y)$实际上与 y 有关，则对任意值 a，使 $g(a,y)=0$的 y 值 b 满足 $f(a,b)\neq 0$。这时，考察 $y(x)$的反函数 $x(y)$可知，$y(x)$以 a 为代数分支点；又因 a 可取任意值，故 a 叫动分支点。如果沒有动分支点，则 $g(x,y)$ 不含 y。对 $z=\frac{1}{y}$的方程亦然。因此，若 (11.1) 无动分支点，就必定是 Riccati 微分方程，这点容易明白，也是早已知道的结果。对此，Malmquist 得到了下面的定理[69]：

若 (11.1) 的一个解以 a 为本性奇点，在此点的任意小的邻域内取有限多值，又除 a 之外沒有分支点，则 (11.1) 实际上是 Riccati 微分方程。

这个定理也可叙述如下：

若 (11.1) 不是 Riccati 微分方程，其解 $y(x)$ 在 a 的邻域內取有限多值，又除 a 以外沒有分支点，则 a 是$y(x)$的代数奇点。

他进而不假定不存在动分支点，得到下面的定理：

若 (11.1) 的一个解 $y(x)$以 a 为本性奇点，在此点的邻域內取有限多值，则在 y 的有理变换下，(11.1) 变成 Riccati 微分方程。

Malmquist 把这样的结果推广，就非标准型代数微分方程

$$F(x,y,dy/dx)=0 \tag{13.2}$$

得到下面的结果：

若 (13.2) 的一个解有本性奇点，在此点邻域内取有限多值，则在有理变换下，(13.2) 可化为 Riccati 微分方程，或者导致以椭圆函数为通解的微分方程。

所谓 (13.2) 是代数微分方程，是指 $F(x,y,y')$是 x,y,y' 的多项式。Malmquist 采用 Boutroux[47] 的方法作估计，利用函数论中著名的 Picard 定理得出了上述的诸结果。

吉田[93,94] 应用函数论中 Nevanlinna 关于有理型函数及其在代数型函数的推广，改进了 Malmquist 的结果，得到下面若干结果：

设 $R(x,y)$，$R_1(x,y)$是 x,y 的有理函数，其中 y 的次数分别为 d_1，d_2，若微分方程

$$R_1(x,d^m y/dx^m)=R(x,y) \tag{13.3}$$

具有超越有理型解，则有

$$(m+1)d_1 \geqslant d. \tag{13.4}$$

若

$$(dy/dx)^m=R(x,y) \tag{13.5}$$

具有 k 值超越解，则有

$$k \geqslant \max\{p/2m,\ 1+q/2m\}, \tag{13.6}$$

这里p,q分别是 $R(x,y)$的分子、分母中 y 的次数。

设 (13.5) 具有 k 值超越代数型解，$y(z)$在圆盘 $|z|<r$ 上的 Riemann 面部分中的分支点的分支度总和为 $n(r)$，定义$N(r)$为

$$N(r)=\frac{1}{k}\int_0^r \frac{n(t)-n(0)}{t}\,dt+\frac{1}{k}n(0)\log r.$$

再设 y 的特征函数为$T(r,\ y)$，这时，若

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{N(r)}{T(r,y)}=0.$$

则（13.5）的右端可写成

$$\frac{1}{Q(x)}\sum_{j=0}^{2m}P_j(x)y^j,$$

其中，$P_j(x)$，$Q(x)$是x的多项式。

对于上述任一定理的证明，本质的假定都是解的有限多值性。但即使是Riccati微分方程，其解一般也是无限多值的。因此，从微分方程的立场来说，去掉有限多值性的限制至为重要，为此，福原开创了局部问题的研究。

对于微分方程的解，木村[64,65]不假定有限多值性也证明了Picard型定理，他利用福原的结果得到下面的决定性结论：

（11.1）不是Riccati微分方程时，设其一个解以a为本性奇点，若在此点邻域内无动分支点，则（11.1）可化简为（ii）型。a必然是对数分支点，有无限多值。

木村还把结果推广到在动分支点附近解取有限多值的情形，但对于非标准型的微分方程（13.2），问题仍然悬而未决。

即使在（11.1）以a为本性奇点的场合，除开例外的情形，松田[71]证明了，如果x沿直线趋近于a，则解$y(x)$的极限值一般是存在的。关于上述问题，日本所取得的成果的综合报告见[60]。

§14. 结束语

最后，再补充一些未涉及的分支的研究动态，本文便告终了。

沒有动分支点的高阶微分方程的研究始于Painlevé[63]，他的工作被认为具有划时代的意义。其后，直至今天，大概只有Garnier锲而不舍，还在继续研究，由于近年来人们发现了某些物理量是Painlevé方程的解，使得Painlevé方程引起了数学界极大重视。好在岡本已就此撰文[74]载于本刊。

Fuchs[55]，Schlesinger[84]指出了单值群不变的线性微分方程和Painlevé方程，或更一般的沒有动分支点的非线性微分方程之间的关系。与非线性问题相比，线性问题在理论上也易于处理；求已知线性微分方程的单值群，本身就是线性微分方程理论中的重要課题。再者，从应用数学的立场来说，希望解决由微分方程的解定义的特殊函数的延拓问题。这个问题一旦解决，单值群也自然解决。这类线性微分方程的大范围问题，尽管很重要，但由于难以解决，尚无可喜的进展。不过，近来各国许多数学家都在苦攻这个问题，在日本，有大久保，河野，高野等人在研究[75]，期望今后有所进展。

稳定性作为实域的问题，除第9节所述外，战后有了引人注目的发展。非线性振动的研究，战前以Krylov，Bogoljubov为中心，主要在苏联盛行，战后在西欧也逐渐发展起来，特别在美国，以Lefschetz为中心的数学家们对此寄予很大的关心，各界研究人员云集，现在已经在这方面作出了贡献。在本日，以占部，吉沢，加藤为中心，开展了引人注目的研究。本刊第13卷第4期（1962）出了非线性振动专集。此外，日本数学会出版的丛书中也有吉沢的著作[91]，因此无须画蛇添足。吉沢还有著作[92]可参考。

在微分方程依赖于参数的场合，解关于参数的展开问题与关于独立变量的展开问题一

样，以前就有许多研究，近来又与力学问题有了联系，现在已经处理了内容更加复杂的问题。

本文还应当提到动力系统，不过由于动力系统与函数方程以外的分支也很有关联，最好另文解说，此地就割爱了。

不当之处甚多，尚乞读者见谅。

（白苏华、胡师度译　刘璋温校）

参 考 文 献

[1] K.Akô, Subfunctions for ordinary differential equations, I-V.J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, 12 (1965), 17-43; Funk. Ekv., Ekv., 10 (1967), 145-162; 11 (1968), 145-162; 12 (1969), 231-249.

[2] M.Bôcher, Lecons sur les méthodes de Sturm dans la thélorie des équations différentielles linéaires et leurs développemnts modernes, Gauthier-Villars (1917).

[3] E.Bompiani, Un teoreme di confronto ed un teorema di unicità per l'equazione differenziale $y'=f(x,y)$, Rendic.R. Accad. Naz. Lincei, 1(1925), 298-302.

[4] C.Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, Teubner (1927).

[5] G.D.Birkhoff and O.D.Kellog, Invariant points in function space, Trans.Amer. Math. Soc., 23(1922), 96-115.

[6] K.Deimling, Ordinary differential equations in Banach spaces, Springer, Lecture Notes in Math., 163(1977).

[7] Ky Fan, Fixed point theorem and minimax theorem in locally convex topological linear spaces, Proc. Nat. Acad., U.S.A., 38(1952), 121-126.

[8] 藤原松三郎，常微分方程式论，岩波书店(1930).

[9] 福原满洲雄，常微分方程式论，岩波讲座'数学'(1934).

[10] 福原满洲雄，常微分方程式の基本定理，数物会志，5(1931), 328-337.

[11] M.Hukuhara, Sur l'ensemble des courbes intégrales d'un système des èquations diffèrentielles ordinaires, Proc. Imp. Acad., 6(1930), 260—262.

[12] M. Hukuhara, Sur les familles de fonctions ò une variable réelle, J. Fac. Sci, Imp.Univ. Hok. kaido, 1(1933), 163—209.

[13] M. Hukuhara, Sur la fonction $S(x)$ de M. E. Kamke, Japan. J. Math., 17(1941), 289-298.

[14] M. Hukuhara, Familles kneseriennes et ie probième aux limites pour l'équation différentiell ordinaire du second ordre, Publ. RIMS. Kyoto Univ., 4(1968), 131-147.

[15] S. Kakutani, A generalization of Brouwer's fixed point theorem, Duke Math.J., 8(1941),457-459.

[16] R.A. Kalman, The theory of optimal control and the calculus of variations, RIAS Techn. Rep. 61, 3(1961).

[17] E. Kamke, Über die eindeutige Bestimmtheit der Integrale von Differentialgleichungen, I. Sitzungsber, Akad. Heidelberg, (1931), 10-15.

[18] H. Kneser, Über die Lösungen gewöhnlicher Differentialglecgichungen, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., Phys.Math. Kl.(1923), 171—174.

[19] H.W.Knobloch, Eine neue Methode zur Approximation periodischer Lösungen nicht-lihearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Math. Z, 82(1963), 177—197.

[20] H. W. Knobloch, Comparison theorems for nonlinear second order differential equations, J.Diff. Eq., 1(1965), 1-26.

[21] M.A.Lavrentieff, Sur une equation diffélentielle du premier ordre, Math. Z., 23(1925), 197-209.

[22] J.Leray et J. Schauder, Topologie et équations fonctionnelles, Ann. Ec.Norm. Sup., 51(1934),

45-78.

[23] A.Marchaud, Sur les champs de demi-droites et les équations différentielles du premier ordre Bull.Soc.Math. France, 62(1934), 1-38.

[24] P.Montel, Sur l'intégrale supérieure et l'intégrale inférieure d'une équation différentielle, Bull. Sci. Math., 50 (1926), 205—217.

[25] M. Nagumo, Eine hinreichende Bedingung für die Unität der Lösung von Differentialgleichungen erster Ordnung, Japan. J. Math, 3(1926), 107-112.

[26] M.Nagumo, Über das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen, Japan. J. Math., 4 (1927), 307-309.

[27] M.Nagumo, Anwendung der Variationsrechnung auf gewähnliche Differentialgleichungssysteme welche willkürliche Funktionen enthalten, Japan.J.Math.6(1930), 251-261.

[28] M.Nagumo, Über die Lage der Integralkurve gewöhnlicher Differentialgleichungen, Proc. Phys.-math. Soc. Japan., 24(1942), 551-559.

[29] M.Nagumo, Über das Randwertproblem der nicht linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Proc. Phys.-math. Soc. Japan., 24(1942), 845—851.

[30] M.Nagumo, Degree of mapping in convex linear topological spaces, Amer. J.Math.,73(1951), 497-511.

[31] 南云道夫，写像度と存在定理，河出书房，(1948).

[32] M.Nagumo et M. Hukuhara, Un théorème relatif à l'ensemble des courbes intégrales d'un système d'équations différentielles, Proc. Physmath Soc. Japan, 12(1930), 233-239.

[33] H. Okamura, Sur l'unicité des solutions d'un système d'équations différentielles ordinaires, Mem.Coll.Sci., Kyoto Imp. Univ., 23(1941), 225-231.

[34] H. Okamura, Condition nécessaire et suffisante par les équations différentielles ordinaires sans point de Peano, Mem. Coll. Sci., Kyoto Imp.Univ., 24(1942), 21-28.

[35] 冈村博，微分方程式序说，河出书房，(1950).

[36] 冈村博，$y''=f(x,y,y')$ んついこ，函方，27 (1941), 27-35.

[37] P. Painlevé, Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles, professées à Stockholm 1895, Herman, (1897).

[38] P. Painlevé, De la détermination unique des intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires par les conditions initiales de auchy, Bull.Soc. Math. France, 28(1900), 191-196.

[39] G. Peano, Démonstration de intégrabilité des équations différentielles ordinaires, Math.Ann., 37(1890), 182-228.

[40] O. Perron, Ein neuer Existenzbeweis für die Integrale der Differentialgleichung $y'=f(x,y)$, Math. Ann., 76 (1915), 471-484.

[41] E.Roxin, A geometric interpretation of Pontryagin's maximum principle, RIAS Techn.Rep., 61, 15 (1961).

[42] J. Schauder, Der Fixpunktsatz in Funktionlräumen, Studia Math.2 (1930), 171-180.

[43] A.N.Tychonoff, Ein Fixpunktsatz, Math. Ann., 111 (1935), 767-776.

[44] T.Ważewski, On an optimal contfiol problem in connexion with the theory of orientor relds of A. Marchaud and S.K. Zaremba, Proc. Conf. Prague, 1962, Czechoslovak Akad. Sci., (1963), 229-242.

[45] 吉江琢儿，初等常微分方程式，裳华房，(1937).

[46] S.K.Zaremba, Sur les équations au paratangent, Bull. Sci. Math., 60 (1936), 139-60.

[47] P.Boulroux, Lecons sur les fonctions défimies par les équations différentielles du premier ordre, Gauthier. Villars, Paris, 1908.

[48] Briot et Bouquet, Recherehes sur les propriétés des fonctions défnies par des équations differ-

entielles, J. Ec. Polyt., 21 (1956).

[49] R.Caccioppoli, Sopra un criterio di siabilità, Rend.Accad. Lincei., (6) 11 (1930) , 251254.

[50] I. Cesari, Un nuovo crilerio di stabilité per le soluzioii delle equazioni differenziali lineari, Ann. Souola Norm. Sup. Pisa. (2) , 9 (1940) , 163-186.

[51] Il Dulac, Recherches sur points singuliers des équations différentielles, J. Ec. Polys.Sér.2, 3 (1904) , 1125.

[52] II.Dulac, Points singuliees des équations différentielles, Mémnrial des Scɪ. Math., Gauthicr Villars, Paris, 1934.

[53] P. Fatou, Sur un critère de stabilié, C.R. Acad. Sci. Paris., 189 (1929) , 967-969.

[54] A.R.Forsyth, Theory of Differential Equations, ll, Cambridge, 1900.

[55] R.Fuchs, Über hncare homngene Differenialgleichungen nit drei im Endlichen gelegene wesemlich singulären Stellen, Math.Ann., 63 (1907) , 301321.

[56] M Hukuhara, Sur les points singuliers des épuations différentielles linéaires, J.Fac.Sci, llokkaido Univ.v, 2 (1934) , 13-88; Ibid., 5 (1937) , 124-166; Mem. Fac.Sci., Kyusyu Univ., A(1941(, 125137.

[57] M. llukuhara, Sur les points singuliers d'une équations différentielle du premier ordre, Mem. Fac. Eng., Kyushu Univ. 8(1937), 203-247; Proc. Phys.-Math.Soc. Japan, 20(1938), 157-189; Ibid., 20(1938), 409-411; Ibid., 20(1938), 865-907; Mem. Fac. Sci., Kyusyu Univ., 2(1942), 125-137.

[58] M. Hukuhara, Intégration formelle d'un système d'équations différentielles non linéaires dans le voisnage d'un point singulier, Ann. di Mat. pura et Appl., 19(1940), 35-44.

[59] M.Hukuhara et M. Iwano, Etude de la convergenee des solutions formelles d'un système différentiel ordinaire linénire, Funkc. Ekvac., 2(1959), 1-15..

[60] M.llukuhara, T.Kimura, T. Matuda, Equations diffélentielles ordinaires du premier ordre dans le champ complexe, Publ, of Matn. Soc. Japan, 1961.

[61] M. lwano, Intégration analytiqued'un système d'équations différentielles non linéaires dans le vosinage d'un point singuher, Ann. di Mat. pura ed Adpl., 44(1957), 261-292; lbid.47(1959),91 150.

[62] M.Iwano, A method to construet analytic expressions tor bounded solutions ol nonlinear ordinaɪy differntial equations with an ɪrregular singular point, Funkcial. Ekvac., 10(1967), 75 105.

[63] M. Iwano, Determination of stable domains lor bounded solutions of simplifed equations, Funkcial. Elvac., 12(1970), 351 268.

[64] T. Kimura, Suɪ one généralisation d'un théorème de Malnnluist, Conment. Math.Univ.Sancti Pauli., 2(1953), 23 28; Ibid., 3(1955), 97 107; Ibid., Pauli., 2(1953), 23 28, lbid., 3(1955), 97 107; lbid., 4(1955), 25 41.

[65] T. Kimmra. On comlilionr lm an ordiinary drt ferential equation of the hrst order to be reducible to a Riccati eptation by a rational transformation, Funkcial. Ekvac., 8(1966), 251 259.

[66] T.Kimura and K. Chiba. On the asympic behavion of soiutions of a systern of linear ordinary differential equations, Comnent. Math. tiniv. Sancli Pauli, 18(1970), 61 80.

[67] F. Letenmeyer, Über das arymptotiosches Verhaitien der Löstngen von Differentialgleichungen und Differntialgleiclmngs-systemen, Sitzungsber. Akad München. Mash. Naturw. KI.(1930), 201 252.

[68] N. Levinson, The asymptoitc nature of the solutions linear system of differential equations, Duke Math. I, 15(1948), 111-126.

[69] J.Maimquist. Sur les fonctions à un nombre finj de branches définies par les équations différentielles du premier oɪdre, Acta Math, 36(1913), 297 343; lbid, 74(1941), 109 128.

[70] J. Malmquist. Sur Pétude asymptotique des solutons d'un système d'équations différentielles dans le voisinage d'un point singueier d'indétermination, Acta Math., 73(1940, 87 129; lbid. 74(1941), 164; Ibid., &4(1941), 109128.

[71] Mme.T Matuda (Nèe Kato), Sur les poinls singuliers des quateions ditterenielles ordinares du premier ordre, Nat. Sci Rep., Ochanizu Univ.2(1951), 13 17; Ibid., 4(1953), 36-39; Ibid.5(1954),1 4; Ibid., 5(1954), 176 177; Iqid., 8(1957), 1 6; Ibid., 10(1959), 7-18.

[72] M.Naguno et M. Ilukuhara, On a condition of stability for a differential equation, Proc. Imp-Acad. Japan., 6(1930), 131 132.

[73] M. Nagumo et M.Hukuhara, Sur la stabilité des intégrales des solutions d'un système d'équations différentielles, Ibid, 6(1930), 357-359.

[74] 冈本和夫, Painlevé 方程式, 数学, 32(1980), 30-43.

[75] K. Okubo, On the group of Fuchsian Equations, 昭和55年度科学研究费补助金(课题番号454034), 研究成果报告, 1981.

[76] P.Painlevé, Ménoire sur les équations différentielles dont l'intégrale génèrale est umtorme, Bull. Sic. Math. France., 28(1900), 201-261.

[77] O.Perron, Über diejenigen Intergraie linearer Differentialgleichungen, welche sich an einer Unbestinmtheitsstelle besimmt verhalten, Math. Ann., 70(1911), 1-32.

[78] O.Perron Über Stabilität und asymptotisches Verhalten der Integrale von gewöhnlichen Differentialgleichungen und Differenzengleichungen, Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna, (1928), 7582.

[79] O. Perron, Über ein vermeintliches Stabilitätskriterium, Nachn. Math. Ges.Göttingen,(1930), 28-29.

[80] O.Perron, Über eine Matrixtansformation, Math.Z.32(1930), 465-473.

[81] T.Peyovitch, Sur les solutions asymptotiques des équations differentielles linéaires,Publ.Math. Univ. Belgrade, 1(1932), 1-47.

[82] T. Peyovitch, Sur la méthode des approximations successives d'équations différentielles, Publ. Math. Univ. Belgrade, 3(1934), 49-64.

[83] E. Picard, Traité d'Analyse, III, Gauthier Villars, Paris.

[84] L. Schlesinger, Über eine Klasse von Differentialsystemen beliebiger Ordnung mit festen kirtischen Punkten, J. für Math., 141(1921), 96145.

[85] Y.Sibuya, Recherches sur les points singuliers d'une équation differentielle ordinaire du premier ordre, Proc.Japan Acad., 31(1955), 41-44.

[86] C.L. Siegel, Über die Normalform analyischer Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslögung, Nachr. Akad. Wiss.Göttingen, Math-Phys.Kl.(1952), 21-30.

[87] C.L.Siegel.Über die Existenz einer Normalform analytischer Hamiltonscher Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung, Math.Ann., 128(1954), 144-170.

[88] H. Späth, ber Üdas asymptotisches Verhalten der Lösungen nichthomogener linearer Differentialgleichungen, Math.Z., 30(1929), 487-513.

[89] W.J.Trjitzinsky. Analytic theory of linear differential equations, Acta Math., 62(1934), 167-226.

[90] H.L.Turrittin, Convergent solutions of ordinary linear homogeneous differential equations in the neighborhood of an irregular singular point, Acta Math, 93(1955), 27-66.

[91] T.Yoshizawa, Stability theory by Lyapunov's second method, Publ. of Math. Soc. Japan, 1966.

[92] T.Yoshizawa, Stability theory and the existence of periodic solutions and almost periodic solutions, Springer, 1975.

[93] K.Yosida, A generalization of a Malmquist's theorem, Japan.J.Math., 9(1933), 253-356.

[94] K.Yosida, On algebroid solution of ordinary differential equationsr Japan. J.Math.,10(1934), 199-206.

(1982年2月2日提出)

点集拓扑学发展的几个奠基性时刻*（下）

П. С. Александров В. В. Федорчук

（В. И. Зайцев参加部分工作）

§6. 一般拓扑学战后发展的某些情况：仿紧性和尺度化；映像和新的空间类；逆谱；基数不变量

在战后最初的年代里，一般拓扑学在各个方向上迅猛发展。我们已经提到过紧致空间的一般同调拓扑学（К. А. Ситников）和欧氏空间中非闭集合的一般同调拓扑学（П. С. Александров，К. А. Ситников，Г. С. Чогошвили及其学派的工作），其结果建立了n维欧氏空间中任意集合的一般对偶定理。

一般拓扑学战后的另一个发展方向涉及拓扑空间的仿紧性和尺度化。同古典的“连续空间”的直觉观念密切相关的，是空间的“无限可约性”的直觉观念。从一般拓扑学的角度来看，这就相当于对空间X的每一个开覆盖α，这个空间存在“更小的”覆盖β这样的观念。覆盖β是覆盖α的加细并不能保证β实质上比覆盖α更小，这是因为每个覆盖都是自身的加细。能保证一个覆盖事实上变小或“分裂”的，是更强的星加细的概念①。这个概念应用于一致空间公理系统后，得到了广泛的推广。一个空间，其任何开覆盖都有星加细的开覆盖，我们称为可裂空间。

自然产生了一个问题：怎样的拓扑空间是可裂的？这个问题的重要性在于，正是可裂空间似乎最符合我们关于空间是某种“连续介质”的直觉观念。不难证明，任何尺度空间都是可裂的。完满回答了上述问题的，是深刻而困难的“A. Stone大定理”[268]：正规空间的仿紧性等价于它的可裂性。这无疑是一般拓扑学最卓越的成果之一。特别是，从这一定理容易推出尺度空间的仿紧性。

Dowker[91] 1951年提出下述问题：是否任何正规空间都是可数仿紧的？这在一般拓扑学中留下了显著的痕迹。这里正规空间X称为可数仿紧的，如果它的任何可数开覆盖都有局部有限的加细覆盖。Dowker证明：空间X可数仿紧的充要条件是：它与线段的积空间$X \times I$是正规的。这样，Dowker问题本质上与1937年Borsuk[60]提出的正规空间的“双正规性”问题是一致的。1971年M. E. Rudin[235]构造了不是可数仿紧的正规空间的例子。

A. Stone大定理和Dowker定理[88]，即仿紧尺度空间嵌入广义Hilbert空间的定理，有助于寻找拓扑空间可尺化的新判别法，R. H. Bing[56]，J. Nagata[194]和Ю. М. Смирнов[263]独

---

* 原题：Основные моменты в развитии теоретико множественной топологии。译自：Успехи математических Наук，33:3（1978），3—48。

① 这里说覆盖β是覆盖α的星加细，如果对任一点$x \in X$，覆盖β中含有点x的所有元素的并均含于覆盖α的某个元素内。——原注。

立给出了这种判别法。Bing–Nagata–Смиров 定理是 Урысон 关于具有可数基的正规空间可尺化定理的自然推广，它说：下列两个条件每一个都是正则空间可尺化的充要条件：

(a) 空间X有σ离散基① (简称B基)。

(b) 空间X有σ局部有限基 (简称NS基)。

A.Stone定理出现之后，第一个可尺化的判别法——Александров和Урысон判别法[33]有了更简单的形式：Hausdorff 空间X可尺化的充要条件是：它是仿紧空间，且具有开覆盖组成的可数加细族②。

稍后，П.С.Александров[25]和А.В.Архангельский[42]都提出了新的可尺化判别法，也涉及空间中存在特殊形式的基。

可尺化判别法还有А.С.Мищенк定理[185]：具有点式可数基的双紧致空间是可尺化的。这个定理后来由В.И.Пономарёв[225]推广到最终紧致的P空间类，由В.В.Филипов[300]推广到仿紧P空间类。Катетов尺度化定理[126]是出人意料的一个特殊的尺化判别法：双紧致空间X可尺化的充要条件是：它的立方$X\times X\times X$是继承正规的。

战后占据一般拓扑学主导地位的工作，涉及连续映像一般理论各个方面以及与之相邻的一些问题。我们已经谈到了与这一领域有关的绝对原像理论以及与它密切相关的二重双紧致空间理论。涉及二重双紧致空间的工作特别应指出E.Marczewski[181]，Н.А.Щанин[348]，А.Пелчинскций[218]，R.Engelking[362, 363]，А.В.Архангельский和В.N.Пономарёв[52]，Б.А.Ефимов[99–101]，更晚的还有С.Сирота[241]，П.Б.Щапиро[340]，Е.В.Шепин[359]，P.Haydon[324]等人的工作。

在与连续映像一般理论有关的问题中，我们要指出：Michael 定理[174]，即闭映像保持仿紧性，В.И.Пономарёв 定理[221]，即满足第一可数公理的任何T_1空间，且仅是这种空间才是某个尺度空间在开映像下的像，В.В.Филиппов 定理[302]，即完全映像甚至双因素③ S映像④保持点式可数基。

1961年在布拉格拓扑学会议上，П.С.Александров提出了三个彼此密切相关的问题：

Ⅰ. 在什么情况下，某个固定空间类A中的每个空间，都可以用映像类$\mathscr{L}$的映像映成空间类B中的某个空间？（如果可能，约定记为$A\mathscr{L}B$）。

Ⅱ. 空间类$C\mathscr{M}$的空间具有什么样的内蕴特性？这里$C\mathscr{M}$表示C中的空间在映像类M中的映像下的像所构成的空间类。

Ⅲ. 约定用$\mathscr{N}$ (A, B) 表示一类映像，其定义域是类A中的空间，值域是类B中的空间。设$\mathscr{L}$为另外一类映像，映像类$\mathscr{N}$ (A, B) $\cap\mathscr{L}$中的映像其性质如何？

特别，这些一般性的提法概括了下述问题：哪些拓扑性质是所有映像下都能保持的？

头几个具体的这类问题五、六十年前就解决了：П.С.Александров定理把任意紧致空间表为Cantor集的连续像；Hausdorff把具有可数基的任意尺度空间刻划为无理数空间的子空间的开连续像，把局部连通的连续统表为线段的连续像。

① 一个集族称为σ离散的（σ局部有限的），如果它是可数多个离散的（局部有限的）集族的并。

② 空间X的覆盖族$\mathscr{U}=\{\alpha\}$称为加细的，如果对任何一点$x\in X$和它的任何邻域Ox，能找到$\alpha\in\mathscr{U}$，使点x关于覆盖α的星形含于Ox。——原注。

③ 连续映像$f:X\to Y$称为双因素映像，如果对每一点$y\in Y$以及X中开集构成的集$f^{-1}y$的任何覆盖γ，都存在有限子族$\lambda\subset\gamma$，使集合$\cup\{fU:U\in\lambda\}$包含点y的一个邻域。——原注。

④ 映像$f:X\to Y$称为S映像，如果任何点$y\in Y$的原像$f^{-1}y$都是可分集。——原注。

与这些问题有关的，特别值得提到 A.B.Архангельский 他不仅详细研究了开映像、伪开映像、商映像，而且首先系统地研究了空间和映像的相互分类问题，A.B.Архангельский 引进许多类新的引人注目的空间，例如层状空间，点式可数空间，等等。

层状空间特别重要，完全正则空间称为层状空间，如果对空间X的某个（从而也对所有的）双紧致扩张 bX，存在 bX 的开集族组成的可数序列（γ_i），满足$X\subset\bigcup\gamma_i$①，且对任何点$x\in X$有$\bigcap_{i=1}^{\infty}\text{зв}_{\gamma_i}x\subset X$②。任何在Čech意义下任何完备空间都是层状空间（在相应的定义中的每个集族均由一个集合组成）。

A.B.Архангельский[45] 的一个定理断言，层状仿紧空间正好是尺度空间的完全原像。B.B.Филиппов 还有一个深刻的结果也是与此有关的：层状仿紧空间的完全像是层状仿紧空间[299]。

Michael定理[178] 由于其广泛的应用成为一般拓扑学最卓越的定理之一：把零维仿紧空间映入完备尺度空间的下半连续值映像存在连续选择③。

多值映像的理论，最初是由于泛函分析而发展起来的，本质上属于几何方向，因此主要是考虑点的像是紧致凸集的多值映像。

与前述不可约完全映像和绝对原像的概念密切相关的，是 B.И.Пономарёв[224] 引入的共有绝对原像的概念，正则空间X称为与正则空间Y共有绝对原像，如结空间X和Y的绝对原像AX和AY是同胚的。这样一来，共有绝对原像的关系定义在整个正规空间类上，这一关系显然满足等价公理。在这种意义下，一方面，孤立点构成处处稠密子集的所有无限紧致空间是两两等价的（等价类中含有收敛序列αN）。另一方面，没有孤立点的所有紧致空间也是两两等价的（等价类中含有线段）。把空间X的开集族$\mathscr{B}$称为X中的π基（B.И.Пономарёв），如果空间X的任何非空开子集都含有族$\mathscr{B}$的某个元素。B.И.Пономарёв 基本定理再添上完全映像保持层状仿紧性的 B.B.Филиппов 定理，就可断言：空间X与尺度空间共有绝对原像的充要条件是：空间X是具有σ局部有限π基的层状仿紧空间。因此，双紧致空间X与紧致空间共有绝对原像的充要条件是：X有可数π基。

A.B.Архангельский 和 B.И.Пономарёв的学生对研究连续映像的一般理论做出重大贡献，其中，除B.B.Филиппов外，首先应提到M.M.Чобан和H.C.Лащнев。

最近，Б.А.Пасынков[216] 把一般拓扑学的基本概念，如紧致、可尺化、基数特征和维数不变量等类型的性质，转用到连续映像上，推动了连续映像一般理论的发展，出人意料地开辟了一般拓扑学的某些新方向。

E.B.Щепин定义并研究了他所谓的K可尺空间，这在一般拓扑学的发展中跨出了一大步。这里他对尺度空间的推广提出了崭新的方法，完全不象使尺度公理“弱化”的方法。

在K尺度空间中定义的是点到充分大的集合，就是到典范闭集的“距离”。因此，K尺度$\rho(x, C)$是点x和典范闭集C这两个变元的非负函数，满足下列公理：

1.属于公理：$\rho(x, C)=0 \Longleftrightarrow x\in C$。

---

① 应为$X\subset\bigcup_{P_j\in\gamma_j\in\{\gamma_i\}}P_j$。——校注。

② $\text{зв}_{\gamma_i}x$表示x在γ_i中的星形。——译注。

③ 多值映像$F: X\to Y$称为下半连读的，如果对任何开集$U\subset Y$，集合$\{x: Fx\cap U\neq\emptyset\}$是开集。（单值）连续映像$f: X\to Y$称为映像$F$的选择，如果对所有的点$x\in X$，都有$fx\in Fx$。——原注。

2.单调公理：若$C \subset C'$，则 $\rho(x, C) \leqslant \rho(x, C')$。

3.连续公理：当C固定时，$\rho(x, C)$关于X连续。

4.并公理：若典范闭集族$\{C_i\}_{i\in I}$按包含关系线性有序，则：

$$\rho(x, [\bigcup_{i\in I} C_i]) = \inf_{i\in I} \rho(x, C_i).$$

特别重要的是K可尺化的双紧致空间，这是E.B.Шепин理论的中心，这类空间包含所有的紧致尺度空间，关于开映像和Тихонов乘积运算是封闭的。这新的一类双紧致空间原则上的重要性，前面已经谈得很多了。

谈到任意的K可尺化空间，我们首先指出下列与之有关的事实：所有可尺化空间和所有局部双紧致群的空间都是K可尺化的空间；任意多个K可尺化空间的积空间是K可尺化空间，由此可见，K可尺化空间可能不是正规空间。但它们全是完全K正规空间。从所述事实推出，双紧致群空间既是二重双紧致空间，又是K可尺化双紧致空间。同时，也存在不是K可尺化的二重双紧致空间，以及K可尺化的非二重双紧致空间，例如$\exp D^{\aleph_2}$。但是，二重双紧致空间和K可尺化双紧致空间有许多共同性质，例如，K可尺化双紧致空间满足Souslin条件，如果满足第一可数公理，也就是可尺化空间。

拓扑空间的逆谱在一般拓扑学中占据显著地位。如果把属于投影谱的复形N_α看做离散的T_0空间，则投影谱是逆谱的特殊情况（参见[21]）。A.Г.Курош定理[158]说，非空双紧致间组成的逆谱的极限空间是非空的双紧致空间，这是涉及一般空间逆谱的最初几个定理之一。

继Фройденталь和Мардешич的近似表示定理（参见本文§7）之后，Б.А.Пасынков的一些结果则是对拓扑空间的逆谱理论的重要贡献。他证明了关于拓扑空间近似表示的重要定理，指出了谱分解与存在特殊类型的ω映像的关系，卓有成效地把逆谱方法应用于维数理论。Б.А.Пасыков的学生И.М.Козловский[140]证明了尺度空间绝对谱分解的定理，即把尺度空间X表为（无限）多面体组成的逆谱的极限空间，使得它的任何子空间X'，都是某个子谱$S' \subset S$的极限空间。甚至当X是直线上的有理数空间时，这一定理也是新结果，由此可以看出它的意外性和效力。

E.B.Щепин证明了所谓同胚关系的谱定理，开辟了逆谱理论的新篇章，实质性地扩大了逆谱在拓扑学中的应用，这一定理断言，如果（满足某些自然条件的）双紧致空间组成的两个不可数的谱的极限空间同胚，则这两个谱含有同构的共尾子谱。同胚关系的谱定理使我们足够有效地解决了两个具有不可数权的双紧致空间的同胚问题。在这一方面，E.B.Шепин[359]解决了Пелчинский的两个问题：1)$\exp D^{\tau}$并不总是同胚于D^{τ}；2)Милютин空间类和Dugundji空间类是不同的空间类。

但是下述自然产生的问题至今尚未解决：两个谱的极限空间同胚是否蕴涵这两个谱本身等值（意义见§3的脚注）？

基数不变量的理论是一般拓扑学最新的领域之一。拓扑空间的许多基数不变量早在关于紧致拓扑空间的《研究报告》时期，甚至Hausdorff的著作发表时期就已经知道了。例如权，密度，特征，伪特征等。关于基数不变量有一系列深刻而又重要的结果：П.С.Урысон把Hilbert方体的子集刻划为具有可数权的正规空间；上述《究研报告》中关于完全正规双紧致空间的势的定理；关于二重双紧致空间的一些定理：Ю.М.Смирнов[261]关于作为具有可数基的空间之和的双紧致空间的加法定理以及A.B.Архангельский[41]把上述定理推广到

任意权的空间。而这些零星的定理在六十年代后期才开始形成完整的理论。一方面，数理逻辑的结果和方法渗透到一般拓扑学对此有很大推动。P.J.Cohen[147,148]解决连续统问题；Jech, Tennenbaum, Solovay和R.B.Jensen[120—122,271]等人对Souslin假设日趋成功的研究推动了对拓扑空间基数不变量的系统研究。力迫法，Martin公理，Jensen原则以及三十年代Gödel就已经提出的可构造公理的另一些推论，所有这些在拓扑空间的研究中都得到了广泛的应用。

另一件大事是1969年А.В.Архангельский[49]肯定地解决了П.С.Александров和П.С.Урысон假计：第一可数的双紧致空间的势不超过连续统的势，出现了新的研究方法和研究课题：拓扑空间的密度和π权，以及另一些不变量，在致力于基数不变量理论的大量结果中，除了А.В.Архангельский的工作外，首先应指出В.И.Пономарёв, Б.А.Ефимов, В.И.Малыхин, Б.Э.Шапировский, A.Hajnal, I.Juhasz, K.Кипеп, M.E.Rudin, A.J.Ostaszewski的工作。В.В.Федорчук 构造了一系列重要的例子。其中我们指出应用Jensen原则构造的势为2^c的继承可分的双紧致空间[294]。

§7. 一般维数论

П.С.Урысон和K.Menger的工作奠定了一般维数论的基础之后，其进一步发展涉及W.Hurewicz和Л.А.Тумаркин 1925—1926年间把紧致空间的维数理论推广到具有可数基的任意尺度空间，以及Hurewicz关于映像维数的定理。注意，映像f: $X\to Y$的维数$\dim f$是指点$y\in Y$的原像维数$\dim f^{-1}y$的上确界。Hurewicz证明：对于具有可数基的尺度空间之间的闭映像f: $X\to Y$有

（1） $$\dim X\leqslant\dim Y+\dim f.$$

如果映像f的重数小于或等于$k+1$，即任何集合$f^{-1}y$所含的点不多于$k+1$个，则有公式

（2） $$\dim Y\leqslant\dim X+k.$$

这些公式称为Hurewicz减少维数和提高维数的映像公式。

特别是，从公式(1)推出，对于任意的紧致空间X和Y，有不等式

（3） $$\dim(X\times Y)\leqslant\dim X+\dim y,$$

借助于ω映像定理这个不等式容易推广到双紧致空间的情况，甚至就紧致空间而言，对乘积空间的维数所能讲出的事实也不过就是不等式(3)罢了。Л.С.Понтрягин[227]根据维数的同调理论构造了$\boldsymbol{R}^4$中的两个二维紧致空间X和Y，其乘积$X+Y$的维数是3，并证明对$\boldsymbol{R}^3$中的紧致空间X和Y，总有$\dim(X+Y)=\dim X+\dim Y$。

Катетов[129]和Morita[189]把公式(3)推广到任意的有尺度空间。Б.А.Пасынков[215]和В.В.Филиппов[305]得到了有关不等式(3)的某些最一般结果。不久前Wage[69]（在连续统假设下）和Przymusiński[232]构造了一个零维最终紧致空间X，其平方是正规空间，维数为

$$\dim(X\times X)=1.$$

许多作者扩大了Huriwicz公式(1)和(2)的应用范围：K.Morita[191]，Е.Г.Скляренко[252]，А.В.Зарелуа[112]（应用了簇束论），Б.А.Пасынков[208]，В.В.Филиппов[305]，后者构造了一个完全映像f: $X\to Y$，把正规局部双紧致空间X映成正规局部双紧致空间Y，使得

$$1=\dim X>\dim Y+\dim f.$$

В.В.Федорчук[295]附加了集论假设后，构造了一个类似的完全映像f: $X\to Y$，把完全正规

的可数紧致空间X映成完全正规的可数紧致空间Y。这个例子的原则意义在于下列结果与ZFC集论公理① 相容：对于完全正则的可数致空间X和Y之间的任何闭映像$f: X\to Y$，Hurewicz公式(1)成立。

Huriwicz 的另一个定理断言，紧致空间X的维数小于或等于n的充要条件是：存在零维映像f：$X\to Q^n$，把X映入n维方体Q^n。Катетов[128]对尺度空间给出了相似的定理：尺度空间X如果满足$\dim X\leqslant n$，则存在一个完全零维的映像②，把X映入一个具有可数基的空间Y，且有$\dim Y\leqslant n$。

Катетов[128]应用这一定理对尺度空间X证明了恒等式$\dim X=\operatorname{Ind}X$。他把Урысон-Menger关于$n$维空间可以分解为$n+1$个零维子空间之和的定理推广到尺度空间。Morita[190]给出了尺度空间维数的另一种刻划，他把Kuratowski[152]和Hurewicz[83]关于具有可数基的空间的类似定理加以推广，证明了n维尺度空间是零维尺度空间在重数小于或等于$n+1$的闭映像下的像。

Катетов恒等式不可能推广为任意尺度空间所有三个基本维数dim，ind，Ind之间的恒等式，这是P.Roy[234]指出的，他构造了一个尺度空间R，使得

$$\operatorname{ind}R=0<1=\dim R=\operatorname{Ind}R.$$

П.С.Александров[22]证明：任何n维双紧致空间含有n维Cantor流形。已知n维双紧致空间中的极大n维Cantor流形称作它的维数成分。这个定义之所以合理，是因为Mazurkiewcz对紧致空间证明了Александров定理：在完美正规的双紧致空间中维数成分实质上是各不相同的，即是，维数成分A不仅不包含在其余的维数成分的并集B中，而且$\dim(A\cap B)\leqslant n-2$。В.В.Федорчук[291]指出，这个定理甚至不能推广继承正规的、第一可数的双紧致空间。

在维数论中，首先突破空间要有可数基这一限制的是Čech（1932年）。他证明：对完美正规空间X而言，大归纳维数求和定理成立：若$X=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$，诸$A_i$是数$\operatorname{Ind}A_i\leqslant n$的闭集，则$\operatorname{Ind}X\leqslant n$。

Čech由此推出了对于完美正规空间X维数Ind的单调性定理（对任何子空间$X_0\subset X$有$\operatorname{Ind}X_0\leqslant\operatorname{Ind}X$）及可加定理：对任何闭子集$F\subset X$，$\operatorname{Ind}X\leqslant\max\{\operatorname{Ind}F,\ \operatorname{Ind}(X\setminus F)\}$。

此后，Dowker[93]把Čech的结果推广到一类所谓完全正规，同时把可加定理推广到继承正规的空间。由О.В.Локучиевский[166]的一个例子可见，在这类空间之外（甚至对双紧致空间），维数Ind的可加定理不成立。维数dim的可加定理也得到证明。此外，Dowker证明了著名的约化定理：如果已知继承正规空间中维数Ind对开集是继承单调的，则它具有继承单调性质，并继承地满足求和定理。

继承正规空间维数理论的基本事实有Урысон-Menger公式：对任意子集P和Q有

$$\operatorname{ind}(P\cup Q)\leqslant\operatorname{ind}P+\operatorname{ind}Q+1,$$

以及Ю.М.Смирнов[254]对于维数dim得到的类似公式。

Čech和Dowker对继承正规空间分别提出了维数dim和Ind的单调性问题。В.В.Филиппов[306]首先在存在Souslin连续统的假定下对这两个问题给出了否定的解决。E.Pol和

---

① 指Zermelo-Frankel公理加上选择公理。——校注。

② 把尺度空间X映入空间Y的连斗映像f：$X\to Y$称为完全零维映像，如果对任何$\varepsilon>0$和任意一点$Y\in fX$，存在Y中邻域Oy，其原像$f^{-1}Oy$可以分解为X中直径小于ε的开集组成的离散族。——原注。

R.Pol[219] 提出了没有附加集论假定的解决。B.B.Федорчук[296] 在连续统假设下构造了一个继承正规的双紧致空间，使得维数 dim 和 Ind 不具有单调性质。此外，B.B.Федорчук 指出，继承正规的 n 维双紧致空间 X 的内蕴维数核 K_X 及其补集 $X\backslash K_X$ 的维数可以独立取任意大的值①。

对于完美正规双紧致空间 X，根据维数的单调性，总有 $\dim(X\backslash K_X)\leqslant\dim K_X=\dim X$。不久前，A.B.Иванов 指出等式 $\dim(X\backslash K_X)=\dim X$ 是可以达到的。

任意正规空间中维数 dim 的求和定理是Čech[309] 1933年证明的。但这一结果长期湮没无闻，后来又由 Wallace[277]（1945年）和 Hemmingsen[320]（1946年）重新加以证明。

Čech 还证明了完美正规空间维数 dim 的单调性定理。Ю.М.Смирнов[255] 推广了这一定理如下：如果正规空间 X 的子空间 X_0 分布正规②，则 $\dim X_0\leqslant\dim X$。由此推出，维数 dim 对所有最终紧致子空间具有单调性。Morita[188] 对强性仿紧子集证明了同样的事实。B·П.Золотарёв[113] 得到了这方面的最终结果，他证明了维数 dim 对正规空间的所有完全仿紧子空间具有单调性。这一论断不能推广到即使是双紧致空间的仿紧（尺度）子集合，因为归纳零维的 Roy 空间包含在零维双紧致空间 D' 内。

间隔的概念是维数论的基本概念之一，是归纳定义维数的依据，有其直观的几何意义，出自 Poincaré[231]。除了 ω 映像定理、本质映像定理以外，间隔定理也是维数理论的核心定理之一：

设 $\dim X=n$。对于 $n+1$对互不相交的闭集

$$(A_1,B_1),\ \cdots,\ (A_{n+1},\ B_{n+1}),$$

总可以选取 A_i和B_i的间隔C_i，使它们的交为空集。同时，总存在 n 对互不相交的闭集

$$(A_1,\ B_1),\ \cdots,\ (A_n,B_n),$$

使得它们的任何间隔C_1，…，C_n之交非空。

这个定理是 Otto 和 Eilenberg[361] 1938年对具有可数基的空间证明的，而对于正规空间的情形则是 Hemmingsen[320] 1940年证明的。

战后年代，在拓扑学中得到广泛推广的局部有限覆盖的概念和仿紧概念也触及到维数论的基础。Dowker[87] 指出，如果在维数 dim 的定义中把原来的有限覆盖换成局部有限覆盖或星形有限覆盖，则得到等价的维数定义。Morita[187] 和 Катетов[129] 对局部有限闭集族证明了维数 dim 的求和定理。

各种维数不变量的比较在维数论中占有重要的地位，最重要的不变量是dim，Ind，ind。我们已经提到过尺度空间的 Урысон 恒等式和 Катетов 恒等式。关于维数论的基本关系还应提出一些不等式，如 H.Б.Веденисов[70] 对正规空间证明的不等式

$$\dim X\leqslant\operatorname{Ind} X,$$

还有 П.С.Алекснадров[19]，Ю.М.Смирнов[254]，K.Morcta[187] 以及 A.B.Зарелуа[108] 分别对双紧致空间，最终紧致空间，强性仿紧空间和完全仿紧空间证明的不等式

$$\dim X\leqslant\operatorname{ind}X.$$

Roy 的例子指出，后一不等式不可能推广到仿紧空间（甚至尺度空间）。

由于不等式

---

① 双紧致空间X的内蕴维数核是指它的所有维数成分的并。——原注。

② X_0在X中分布正规，如果任何邻域OX_0中存在X中的F_δ型集，$X_1\supset X_0$。——原注。

$$\dim X \leqslant \operatorname{ind} X \text{ 和 } \dim X \leqslant \operatorname{Ind} X,$$

已经得到相当完全的分析，自然就该开始分析不等式

$$\operatorname{ind} X \leqslant \dim X \text{ 和 } \operatorname{Ind} X \leqslant \dim X.$$

1949年，О.В.Локуциевский[166]构造一个双紧致空间X，使得

$$1 = \dim X < \operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X = 2.$$

此外，这一例子还表明，双紧致空间的归纳维数的求和定理（即使是有限和）并不成立。

因此，寻找满足不等式

$$\operatorname{ind} X \leqslant \dim X \text{ 和 } \operatorname{Ind} X \leqslant \dim X$$

的足够广泛的几类仿紧空间、甚至双紧致空间的问题就是具有重大的意义。В.И.Понсмарёв（见[31]和[222]）对这个问题给出了各种令人满意的解决。维数 $\dim X = n$ 的仿紧空间X称为完全 n 维的仿紧空间或 Пономарёв 仿紧空间，如果它是零维空间的 $n+1$ 重闭像。对于任意完全 n 维的仿紧空间，不等式 $\operatorname{Ind} X \leqslant \dim X$ 成立，从而等式 $\operatorname{Ind} X = \dim X$ 成立。对于所说的空间X，存在把一个零维空间映成X的 $n+1$ 重闭映像等价于X中存在 $n+1$ 重强加细的有向分划族。使得不等式 $\operatorname{ind} X \leqslant \dim X$ 成立的空间类也有类似的说法。

对于完全 n 维的完全仿紧空间而言，Урысон 恒等式成立。完全 n 维的仿紧空间是相当广泛的一类空间，它包含了所有的 n 维尺度空间和局部双紧致群的商空间。

因此，对于局部双紧致群的双紧致商空间来说，Урысон 恒等式成立。这个结果是 Б.А.Пасынков[200]得到的，后来又由他推广到几乎可尺化群的商空间[209]。对任意的代数齐次的双紧致空间，即是对任何拓扑群的商空间的双紧致空间，各种维数定义的一致性问题尚未解决。同时，В.В.Федорчук[289]构造了一个拓扑齐次的双紧致空间，其维数 dim 和 ind 并不相同。

双紧致空间的大、小归纳维数的一致性问题长期未获解决，1969年 В.В.Филиппов[301]构造了一个双紧致空间X，满足

$$2 = \operatorname{ind} X < \operatorname{Ind} X = 3,$$

这个问题才得到解决。В.В.Филиппов[304]构造的另一个著名例子表明，对双紧致空间的维数 dim 成立的不等式(3)

$$\dim(X \times Y) \leqslant \dim X + \dim Y,$$

对于归纳维数并不成立：他构造了双紧致空间X和Y，其维数满足

$$\operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X = \operatorname{ind} Y = \operatorname{Ind} Y = 2,$$

但乘积的维数是 5。И.К.Лифанов[165]，Б.А.Пасынков[215]，В.В.Филиппов[305]找到了某些松弛的充分条件，使得双紧致空间的乘积的归纳维数满足不等式(3)。

研究欧氏空间 $\boldsymbol{R}^m$ 所含集合的维数性质，这是维数论的大块文章，П.С.Урысон 提出利用 n 维集合在空间 $\boldsymbol{R}^m$ $(n \leqslant m)$ 中的分布性质来说明这个集合的特性，П.С.Урысон 本人仅对平面的闭子集解决了这一问题。Александров 的障碍定理完全解决了任意空间 $\boldsymbol{R}^n$ 的闭子集的 Урысон 问题，Александров 定理是维数同调理论中的一个基本定理，它有一个推论如下：紧致空间 $\Phi \subset \boldsymbol{R}^m$ 具有维数 $m-1$ 的充要条件是：它不包含内点，且分裂某个球体 $U^m \subset \boldsymbol{R}^m$。

К.А.Ситников[246]对非闭集建立的维数同调理论解决了（任何集合而不仅是闭集的）一般性 Урысон 问题。我们指出，1937年 Г.С.Чогошвили[335]对 Урысон 问题提出下述不

同解法：m维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^m$ 的紧致集X具有维数 $n\leqslant m$ 的充要条件是：对任何 $\varepsilon>0$ 和任何 $(m-n-1)$ 维平面 $\boldsymbol{R}^{m-n-1}\subset\boldsymbol{R}^m$，存在紧致集$X$的一个 ε 位移 $f: X\to\boldsymbol{R}^m$，使得它的像 fX 与该平面不相交。

Mazurkiewicz[171] 加强了 n 维流形成为 n 维 Cantor 流形的定理：空间 $\boldsymbol{R}^m$ 不仅不能被维数小于或等于 $m-2$ 的任何集合所分裂，甚至不能被这种集合所分割①。另一方面，К.А. Ситников[245] 构造了一个著名的二维集合 $M\subset\boldsymbol{R}^3$，不能分割任何区域 $G\subset\boldsymbol{R}^3$。

研究欧氏空间子集的维数性质使 П.С.Александров 引入了新的维数不变量——尺度维数。尺度空间X的尺度维数 $\mu\dim X$ 是具有下述性质的最小整数 $n\geqslant 0$：对任何 $\varepsilon>0$，空间X中都存在局部有限的 $(n+1)$ 重 ε 开覆盖。К.А.Ситников[242]，Ю.М.Смирнов[260]，М.Катетов[130] 以及其它一些作者的工作中，研究了尺度维数，所得到的那些结果中最著名的是 Катетов 公式

$$\mu\dim X\leqslant\dim X\leqslant 2\mu\dim X.$$

尺度空间的维数 dim 具有许多尺度特性，其中可以提出 Nagata 在他的著作[197]中详尽叙述的一些结果。

从维数的观点看，开映像具有重要意义。零维空间可以用重数有限的闭映像映成维数任意大的空间，同时 П.С.Александров[17] 1936 年证明：紧致空间的重数可数的开映像不能提高它的维数。稍后，Б.А.Пасынков[211] 对于双紧致空间证明了这一定理。

但任意的(甚至零维的)开映像却可以提高维数。1936年，А.Н.Колмогоров[146] 构造了把紧致空间X映成维数更大的紧致空间Y的零维开映像的第一个例子，即是把一维紧致空间映成了二维（均匀残缺的）Понтрягин 曲面。

此后，构造了许多提高维数的各种开映像的例子，特别是 Л.В.Келдыш[131, 132] 构造了一个单调开映像的著名例子，把三维方体映成任意维数 $n>3$ 的方体。О.В.Локуциевский[167] 指出，任何紧致空间都可以成为某个一维紧致空间在开映像下的像。但除了Л.В.Келдыш[133] 构造的把一维紧致空间映成正方形的零维开映像的例子外，所有这些映像都不是零维映像。Б.А.Пасынков[203] 依靠 Келдыш 的这个例子证明了下述一般定理：任何正维数双紧致空间都是某个一维双紧致空间在零维开映像下的像。

在证明这一定理的过程中，除了逆谱以外，还广泛运用了扇形乘积或分层乘积这个工具。把拓扑空间 X_α 映入拓扑空间 X_0 的连继映像族

$$f_\alpha: X_0\to X_0,\quad \alpha\in\mathscr{U}$$

的扇形乘积是指映像

$$f_\beta p_\beta:\ \prod_{\alpha\in\mathscr{U}} X_\alpha\to X_\beta\to X_0$$

在集合 $X\subset\prod\limits_{\alpha\in\mathscr{U}} X_\alpha$ 上的限制，其中X由满足下述条件的所有点 x 组成：对任意的$\alpha,\alpha'\in\mathscr{U}$，

$$f_\alpha p_\alpha x=f_{\alpha'}p_{\alpha'}x.$$

容易看出，空间 $X=\bigcup\limits_{x_0\in X_0}\prod\limits_{\alpha\in\mathscr{U}} f_\alpha^{-1}x_0$，称为诸空间 X_α 关于映像 f_α 的扇形乘积。现

① 集合$A\subset X$分割空间X，如果存在一对点x，$y\in X\setminus A$不能用$X\setminus A$中的连续统联结起来。——原注。

在，扇形乘积在一般拓扑的各种结构中起着重要作用。

Б.А.Пасынков 的另一个著名定理说，有限维紧致空间的任何 k 维映像 f 都可以表为 k 个一维映像 $f_1\cdots$，f_k 的复合，其中有 $k-1$ 个映像 f_1，…，f_{k-1} 不是简单一维的，而是平行于线段的射影。

И.А.Шведов[150] 指出，可尺化空间维数的公理定义问题在 Menger 尝试失败之后，已由Е.Б.Щепин[356] 完全解决。这种公理体系，一方面对所有可尺化空间类 A_1 构造出来；另一方面也对所有可分可尺化空间类 A_2 构造出来，但两种情形的公理是一样的。得到的结果是：维数 dim 对 A_1 类或 A_2 类的所有空间X都是唯一确定的函数 $d(X)$，对于该类中所有的X取整数价 $n\geqslant-1$ 或取值∞，并且满足下列公理：

1．不变性公理：如果 X_1 和 X_2 同胚，则 $d(X_1)=d(X_2)$。

2．规范化公理：$d(X)=-1$ 的充要条件是：X是空的空间。对 n 维方体 Q^n 有 $d(Q^n)=n$。

3．可数并公理：如果 $X=\bigcup\limits_k X_k$，其中所有的 X_k 都是空间X的闭子空间，则 $d(X)=\sup\limits_k d(X_k)$。

4．Brouwer 公理：如果 $d(X)$是有限数 n，则存在空间X的有限开覆盖 ω，使得通过ω映像由X得到的任何空间X'(与X同属 A_1 类或 A_2 类) 满足 $d(X')\geqslant d(X)$。

5．Poincaré 公理：如果 $d(X)$是有限数 $n\geqslant0$，则存在闭子空间 $X'\subset X$，使得 $d(X')<d(X)$，且 $X\backslash X'$ 不连通 (即集合 X'分裂空间 X)。

如果在上面的叙述中，把所考虑的空间类换成所有(可尺化的)紧致空间类 A_3，定理仍然为真。这时可以把可数并公理换成有限并公理：仅要求对闭集 $X_1\subset X$，$X_2\subset X$，且 $X=X_1\bigcup X_2$，$d(X)$等于 $d(X_1)$和 $d(X_2)$中最大的一个。此外，Brouwer 公理现在可以叙述为：若 $d(X)=n$，则存在数 $\varepsilon>0$，使得通过 ε 映像由X得到的任何紧致空间 X' 满足 $d(X')\geqslant d(X)$。Е.Е.Щепин 证明的一般定理的这一特殊情况 П.С.Александров[15] 早在1932 年就得到了。此外，还证明了如果对所有双紧致空间X可以定义一个函数 $d(X)$，满足上述公理，则这个函数只能是 dim X。然而，由于 В.В.Федорчук[287] 构造了一个双紧致空间，不被维数更小的任何闭子集所分裂，可见对于所有双紧致空间类，函数 dim X 并不满足上述公理。

О.В.Локуциевский 指出，对于所有双紧致空间类，应该如何改变 Poincaré 公理，才能使所得到的维数定义满足 $\dim X=\operatorname{ind} X$，得到所有这些结果之后，构造维数公理体系的任务才可以算是完成了。

研究拓扑空间双紧致扩张的维数性质也是维数论的大块文章。首先应指出，任意正规空间X满足等式

$$\dim\beta X=\dim X \qquad \text{(Wallman[73])}$$

和

$$\operatorname{Ind}\beta X=\operatorname{Ind} X \qquad \text{(Н.Е.Веденисов[79])}$$

完美正规空间X满足等式

$$\operatorname{ind}\beta X=\operatorname{Ind} X \qquad \text{(Ю.М.Смирнов[254])}.$$

一般维数论的最基本结果有 Е.Г.Скляренко 定理[248]，这是已经提到的可数权空间的 Hurewicz定理的推广：任何正规空间都有相同权和相同维数的双紧致扩张。还有Зарелуа[111]-Пасынков[205]定理：对任何无限基数 τ 和任何自然数 n，存在双紧致空间 Π_n^τ，其权为

τ，维数 $\dim \Pi_n^\tau = n$，且包含权小于或等于 τ 而维数小于或等于 n 的任何正规空间的拓扑像。

Freudenthal[311] 证明：就具有可数权的正规空间 X 而言，表面双紧致空间，并且只有这种空间，其双紧致扩张 bX 才具有归纳零维的瘤状集。这时，已知空间的这些双紧致扩张中有一个最大的。这一方向上的进一步研究，使 Е.Г.Скляренко 引进并研究了非常重要的一类完美双紧致扩张[250,251]。

Ю.М.Смирнов[266,267] 运用邻近空间理论的方法来研究双紧致扩张的瘤状集的维数 dim。他对相当广泛的一类空间得到了存在双紧致扩张，其瘤状集维数小于或等于 n 的充要条件。于是如果已知空间 X 具有双紧致扩张，其瘤状集维数小于或等于 n，则可推出此空间具有双紧致扩张 bX，权为 $\omega bX = \omega X$，其瘤状集维数小于或等于 n。

现代拓扑学最强有力的方法之一的逆谱方法，在维数理论中有重要的应用。与此有关的第一个定理是 Freudenthal 定理：任何 n 维紧致空间是 n 维多面体组成的(可数)逆谱的极限空间[310]。对于(不可尺化)双紧致空间，类似的定理是Mardešić 定理：任何 n 维双紧致空间是 n 维紧致空间组成的逆谱的极限空间[179]，Mardešić[179] 和 Б.А.Пасынков[201] 指出这一定理的重要性还在于存在有限维的双紧致空间，一般不是多面体组成的任何逆谱的极限空间。

Mardešić 定理的证明，万有双紧致空间 Π_n^τ 的构造都是基于 Mardešić 对于双紧致空间的分解定理。(维数dim的) 分解定理说，在有关映像 $f: X \to Z$ 的确定的条件下，存在空间 Y 和映像 $g: X \to Y$，$h: Y \to Z$，使得 $f = hg$，$\dim Y \leqslant \dim X$，Y 的权不超过 Z 的权数；并且如果 Z 属于某一个确定的空间类 $\mathscr{M}$，则 Y 也属于这一类。已经指出，双紧致空间的分解定理是Мардешич[179] 证明的，当 X 是正规空间，Y 和 Z 是尺度空间的分解定理则是 Б.А.Пасынков[212] 证明的。然后，Б.А.Пасынков[213] 对维数 Ind 证明了分解定理。不久前，许多不同的作者证明了更加一般的分解定理，其中首先应当提到 Б.А.Пасынков[214,217]。分解定理在维数论中的重要作用在于，一方面有可能构造不同的万有空间，另一方面有助于在研究许多维数性质时把任意空间的情形归结为权更小的空间，特别是归结为具有可数基的空间。

例如，对维数Ind的分解定理使 Б.А.Пасынков 能够对已知权和已知维数Ind的空间建立万有双紧致空间，即是建立同样权和同样维数的双紧致扩张[213]。

这样，从双紧致的观点看，维数 dim 和 Ind 是意义相同的。至于小归纳维数，Ю.М.Смирнов[263] 构造了一个空间 X，对于它的任何双紧致扩张 bX，都有 $\operatorname{ind} bX > \operatorname{ind} X$。

逆谱在维数论中的进一步应用涉及Федорчук引入的完全闭映像和可展谱的概念。双紧致空间之间的连续映像 $f: X \to Y$ 称为完全闭映像，如果闭集 $F_1, F_2 \subset X$ 互不相交蕴涵交 $fF_1 \cap fF_2$ 有限（就非双紧致而言则是离散）。

任何完全闭映像都是闭映像。把双紧致空间 X 的某个（非空）闭集压缩成一点，就是完全闭映像最简单的例子。原来，把一个双紧致空间映成另一个双紧致空间的任何完全闭映像都是那些简单映像的扇形积。

可展 (Scannable) 谱的概念与谱树的概念有关。设 O 是树，即是方向朝下的半格①，使得它的任何元素 X 之前的所有元素的集合 $(-\infty, X)$ 是全序集。现在假设树 O 的元素是拓扑空间，此外，对任何一对空间 X，$Y \in O$，$Y \leqslant X$，都有唯一的映像 $\pi_Y^X: X \to Y$，使得 $\pi_Z^X = \pi_Z^Y \cdot \pi_Y^X$，其中 $Z \leqslant Y \leqslant X$。那么二元组 (O, P) 称为谱树，这里

① 即是一个半有序集，使得其中任何两个元素都有确定的下界。——原注。

$$P = \{ \pi^X_Y;\ X,\ Y \in O,\ Y \leqslant X \}.$$

谱树的概念推广了全序谱的概念。

对于每个谱树存在唯一一个全序谱，称为这个谱树的卷积。这里全序谱的卷积与它本身重合，而高为 2 的谱树的卷积与扇形积重合，全序谱称为可展的，如果它是质谱树的卷积。这里所谓质谱树是指其中任何投影至多只有一个非单点原像，并且关于相邻的投影

$$\pi^{X_i}_Y:\ X_i \to Y \qquad (i = 1, 2)$$

两点y_1和y_2的原像如果都是非单点集，则这两点是不同的。质谱树T的卷积如果是可展谱S，则T可嵌入唯一的质谱树Sat T，这个质谱树满足某个饱和性条件，称为谱S的展开。这时卷积运算是展开运算的左逆运算（见[297]）。

可展谱的所有性质都包含在它的展开中，而展开对于研究可展谱是很方便的。可展谱中的射影都是完全闭映像。同时，完全闭映像f：$X \to Y$满足 Hurewicz 公式的加强形式（见[288]）：

$$\dim X \leqslant \max \{ \dim Y, \dim f \}.$$

因此，可展谱是维数论和一般拓扑学其它领域中构造例子的非常有效的工具。本文所述B.B.Федорчук的所有例子，或者是可展谱的极限空间，或者是这些极限空间的简单变化。

§8. 一般拓扑学的新分支：无限维拓扑学；收缩核理论；型论

无限维空间的理论，其兴起和迅速发展是近年来拓扑学中的重大事件。维数论这个引人注目的篇章中最初的基本概念，以及与之有关的某些基本问题П.С.Урысон早就知道了。在他生命的最后一个月里（1924年）Урысон掌握了可数维空间的概念（即是可数多个有限维空间之和的空间，在可数权的情况下，也就是指零维集合之和），以及弱性可数维空的概念（即可以表为自身的可数多个有限维闭子集之和的空间）。他提出了这些概念与超限维数的关系问题，有志于证明Hilbert方体的维数不可数（他坚信这一点）。П.С.Урысон未能证明他对无限维数空间提出的任何一个假设，他沒有发表任何有关的东西（甚至沒有发表他已经证明的一个事实：紧致空间的超限维数是可数序数）。

现在形势发生了根本的变化，我们有了发展得充分深入的可数维空间以及超限维数空间的理论。这里我们指出Hurewicz 和 Wallman[85]，以及Смирнов[264]证明的定理：对于紧致空间，下列条件等价：

1. 超限维数 ind X 有定义，
2. 超限维数 Ind X 有定义，
3. 紧致空间X是可数维空间。

还有 Nagata[195,196]，А.В.Архангельский[48]和 Б.А.Пасынков[214]证明的定理：可数维空间和弱性可数维空间存在万有空间。还有 В.В.Федорчук[298]证明的定理：双紧致空间存在小超限维数等价于存在大超限维数。

根据间隔定理最终得到强性无限维（双）紧致空间的定义。对任意空间，这个定义分成了П.С.Александров 和 Ю.М.Смирнов 提出的A强性无限维空间与S强性无限维空间两种定义。这里，X是S强性无限维空间等价于存在把X映成Hilbert方体的本质映像（Б.Т.Левщенко[154]）。对S弱性无限维空间和具有给定超限维数的空间证明了存在相应的双紧致

扩张(Б.Т.Левщенко[164], Е.Г.Скляренко[249], Б.А.Пасынков[213])。

Скляренко[249]定义了无限维 Cantor 流形的概念，证明了任何强性无限维双紧致空间中存在无限维 Gantor 流形。

然而下述核心问题仍未解决：弱性无限维紧致空间与可数维紧致空间是否是同一类空间？但就（甚至完美正规的）双紧致空间类而言，这个问题得到否定的解决。В.В.Федорчук[298]构造了一个弱性无限维双紧致空间，它的任何子连续统在 dim，ind，Ind 这三种意义下都不是可数维空间。

早在1925年Л.А.Тумаркин 就提出了下述问题：是否存在无限维紧致空间，它的任何非空闭子集的维数或者是零，或者是无限？这个问题使人们对无限维空间的理论产生很大的兴趣。

这个问题只是在1967年才由 Henderson[321] 解决：他构造了一个具有上述性质的紧致空间，他甚至证明了这些“Тумаркин 紧致空间”在某种意义下代表了无限维紧致空间的“大多数”，即是所有无限维紧致空间的空间中处处稠密的$G\delta$集。В.В.Федорчук[290]构造了 n 维双紧致空间的一个例子，其中任何非空闭子集或者是零维的，或者是 n 维的。Тумаркин 问题和这个例子的某些自然的相似之处把两者联系起来。在连续统假设下甚至构造了一个双紧致空间，它的任何闭子集或者是有限集，或者是 n 维空间[293]。

几何拓扑比较年轻的分支之一是Borsuk早在三十年代（见[61]）奠基的收缩核理论。Dowker[90,82]，胡世桢[322]，Dugundji[95-97]，Kodama[136,137] 等人在战后时期对收缩核理论的研究做出了巨大的贡献。这个理论是拓扑学的一个分支，与点集拓扑和代数拓扑这两个方面都有联系。收缩核理论的原始概念属于一般拓扑学，但是这些概念的完美发展则需要应用代数工具。

收缩核理论可以定义为研究一类特殊的拓扑性质的理论，这些性质与所谓 r 映像的一类函数有密切关系。连续映像 f：$X\to Y$ 称为 r 映像，如果存在映像 g：$Y\to X$，是 f 的右逆映像，即是复合映像 fg：$Y\to Y$ 是恒同映像。把空间 X 映成它的子空间 Y 的收缩映像 r：$X\to Y$ 是 r 映像的一个特殊情形。

收缩映像的概念与映像延拓问题密切相关．对于许多空间类$\mathscr{M}$而言，类$\mathscr{M}$中的绝对收缩核（$AR(\mathscr{M})$空间），即是类$\mathscr{M}$当中任何包容空间的收缩核，正好就是类$\mathscr{M}$中的绝对外延子（$AE(\mathscr{M})$空间），即是一个空间Y，使得 $X\in\mathscr{M}$的任何闭子集 Z 上的任何连续映像 f：$Z\to Y$ 都可以延拓到整个空间X上。同样，绝对邻域收缩核(ANR空间)也恰好就是绝对邻域外延子（ANE空间）。ANR空间在有限维的情况下就是局部可缩的紧致空间，比起与之密切相关的多面体来，是更为广泛的一类空间。同时West[72]证明了任何紧致ANR空间具有有限多面体的伦型。Е.В.Щепин[360]把这一定理推广到双紧致空间，他还证明了任何有限维的 ANR 双紧致空间都可尺化。

Borsuk[62]建立的型论和收缩核理论密切相关，本质上是拓扑学中同伦论的一个分支。这种理论的作用表现在一般的同伦方法不能应用的地方，即是所研究对象的局部结构过于复杂的情形．在其它情况下，例如多面体，尤其是绝对邻域收缩核的情形，型论与同伦论是一致的。

Borsuk 是对紧致空间建立他的理论的。很多拓扑学家把这种理论推广到更广泛的几类空间，应当特别提到的是 Мардешич[180]，他应用逆谱把型论推广到任意的拓扑空间。

有直观几何特征的Chapman定理[343]是型论中著名的成就之一，它说：在Hilbert方体 Q

的伪内部的紧致空间X和Y同型的充要条件是：它们的补集$Q\setminus Y$和$Q\setminus X$同胚。

这一定理使我们进入所谓无限维拓扑或Q拓扑的领域。Kelly（1931年，[159]）的一个定理说：Hilbert空间中任何无限维紧致凸集都同胚于Hilbert方体Q；这个定理可以认为是无限维拓扑的开端。这一领域的进一步研究产生了Кадец定理：任何可分Banach空间都同胚于可数多条直线的乘积[123]。P.Anderson（1967年，[38,39]）在Hilbert方体Q中引进并研究了Z集合的概念，随后又定义了Q流形，即局部同胚于Hilbert方体的空间，这是Q拓扑中的重大事件。Q流形的研究产生整个一系列辉煌的成果。

我们指出以下的结果：1）Q流形X的可三角剖分定理，即把X表为Q和一个多面体Y的乘积（Chapman[345]）；2）多面体间的映像$f: X\to Y$是简单同伦等价的充要条件是：映像

$$fXid_Q: X\times Q\to Y\times Q$$

同伦于一个同胚映像（Chapman[344]）；3）可尺化的ANR空间与Hilbert方体的乘积是一个Q流形（Edmards，见[346]）。

后一结果与Q流形的可三角剖分定理一起，给出了我们已提及的ANR空间和多方面体同伦的West定理。

结　束　语

Brouwer在1911—1913年的工作中大力而深刻地把组合拓扑学的几何代表方法与专门处理集合论的逻辑分析结合起来，所以拓扑学发展的Brouwer时期也就是在拓扑学中综合运用组合代数的思想方法和集论的思想方法的第一个时期。这一事态由于下述事实而更加明显：所谓紧致空间的Vietoris同调论，其依据就是上述Brouwer的工作[67]，而Brouwer的工作[64]也为维数论奠定了第一个严格而又足够一般的基础。这里不能忘记，欧氏空间的维数不变性问题，甚至证明经典的Jordan定理的问题，全都是“集论”数学；要是数学只搞古典的“光滑”函数、“光滑”映像和“光滑”流形，上述问题本当失掉自身的内容的。

在一般拓扑学中综合运用几何思想和真正的集论思想的第二个时期（1925—1943年），就是建立紧致空间以及更广泛的空间一般同调理论，建立拓扑对偶关系的一般理论，维数的同调理论以及拓扑学中与此有关的篇章。

在一般拓扑学中把几何思想和集论思想结合起来的第三个时期延续至今，首先是Borsuk开创收缩核理论，然后是近年来提出的所谓型论①，Borsuk建立的这两种理论在许多作者的工作中得到进一步的发展，就型论而言，首先应当提出Мардешич型论一开始就把点集拓扑与现代同伦论结合在一起，正是在Мардешич的工作中，建立了型论与逆谱理论之间的深刻联系，进一步促进了型论渗入上同调理论。型论和无限维拓扑学的现代分支，Q流形理论之间有非常密切的联系。一般拓扑学近代思想中这个显然已粗具规模的综合方向，在Щепин的工作中得到了崭新的形形色色的发展，特别是，他结合自己的谱定理建立了Q流形理论，定义了类似于Q流形的不可数维的对象，即所谓的Тихонов流形，这是一个双紧致空间，局部同胚于Тихонов方体I^τ，并且能够证明Тихонов流形是Тихонов方体I^τ与某个Q流形的乘积。

（下转第366页）

① 据К.И.Чуковский的说法，“шейп”一词属于乱造词语的范畴。这个词不是俄语词汇，而是英文的Shape一语用俄文字母改写而成。Shape意指“外形，形式，外貌”希望不久能换成合适的俄语术语。——原注。

学科介绍

拓 扑 与 力 学 II* （下）

—— 平面 n 体问题

S. Smale

第 二 节

本节的任务是证明定理C及定理D的(a)。我们要应用[4]中第六节里的函数V_p。下面要用到的有关这方面的基础知识读者可参阅该文。

回顾在该文中我们知道，对每一具有对称性的力学系统（M_0, K, V, G），联系着一个函数$V_p: M_0 - \Lambda \to \boldsymbol{R}$，其中$M_0$及$\Lambda$在目前的情形下分别为$M_0 = M - \Delta$，$\Lambda = \varnothing$，角动量$p$在$R$中取值，且简单地有$V_p(x) = V(x) + \dfrac{p^2}{4K(x)}$。

记$S_K = \{z \in M \mid K(z) = 1\}$，从而$M - 0 = \boldsymbol{R}^+ \times S_K$，而微分同胚$M - 0 \to \boldsymbol{R}^+ \times S_K$则由$x \to \left(\|x\|_K, \dfrac{x}{\|x\|_K}\right)$给出。

在此映射下$M - \Delta$被微分同胚地映到$\boldsymbol{R}^+ \times (S_K - \Delta)$上。令$V_s: S_K - \Delta \to \boldsymbol{R}$为$V: M - \Delta \to \boldsymbol{R}$的限制。令$\sigma(f)$记映射$f$的临界点集。

（2.1） **命题.**

$$(a)\ \sigma(V_p) = \left\{(t, z) \in M - \Delta \mid z \in \sigma(V_s), t = \frac{-p^2}{2V(z)}\right\}.$$

$$(b)\ \sigma(V - \|X\|^2_K) = \left\{(t, z) \in M - \Delta \mid z \in \sigma(V_s), t = \sqrt{\frac{-V(z)}{2\|X(z)\|^2_K}}\right\}.$$

(b)中的函数是(1.1)中$M - \Delta \to R$，其中$G = S'$，X可由一实数来刻划。注意(a)中包括括了$p = 0$的情形，因而在这一情形中V_p没有临界点。

(2.1) 的证明. 由微积分知，当在(t, z)处V_p的两个偏导数为零，或当$D_t V_p(t, z) = 0$及$D_z V_p(t, z) = 0$时，(t, z)就是V_p的临界点。现在有

$$D_t V_p(t, z) = D_t\left(\frac{V(z)}{t} + \frac{p^2}{4t^2}\right) = \frac{-V(z)}{t^2} - \frac{p^2}{2t^3}.$$

---

* 原题：Topology and Mechanies II, the planar n-bady problem, 译自：Inrentions Math., 11 (1970), 45—64. 这是本刊第2卷第1，2期（1983）发表的同题文章的续篇。