维普资讯 http://www.cqvip.com

量子理论，几何学，量子力学

学科与专题介绍

③

0413
018

208-211,221

量子理论与几何学

Michael Atiyah Atiyah, M

I. 过去

几何学与物理学之间有着由来已久的共生关系. 它源于以欧氏几何做为基础的牛顿力学，而在 Einstein 的广义相对论中达到了顶峰. 在这段古典时期里，关键想法始终是，无论哪种力都会引起对于线性的偏差. 这种想法最终用曲率的概念表达出来. 而且这种做法是局部性的，从而可以使用代数的和分析的方法将作用力以及相应曲率清楚地计算出来.

规范理论中诸如电磁理论亦可归于此框架之中，尽管相应的几何还要考虑附加的位相变量. 这类理论在时空中仍可认为是局部的，但在增添了位相变量的空间里本质上讲它们却是整体的，当然这些整体性质要受很强的对称性限制.

本世纪二十年代量子力学的出现打破了几何学与物理学之间的和合关系. 连续为离散所取代，而且由于 Heisenberg 测不准原理，严格的局部化过时. Hilbert 空间及算子理论成了物理学中现时使用的主要工具，几何学的地位则在下降. 与此同时，通过群论语言表达的对称性成了物理学的一项指导原则，代数学因此盛行起来.

几何学迎来了它的新生，终于以拓扑学这一新的形式东山再起. 这可以从两个方面来加以理解和解释. 一方面，从 Riemann 及 Poincaré 那个时代起，几何学越来越关心整体性质，由此拓扑学逐渐产生，并且成了一门最重要的基础学科. 二十世纪数学发展中，有一大部分是拓扑学思想的发展以及这些思想在数学其它分支中的应用. 三十年代提出的 Hodge 理论以及五十年代出现的层理论正反映了拓扑学与其它数学分支 —— 从分析学一直到数论，其中也包括群 —— 相融合的倾向.

因此，到了七十年代，拓扑学的思想已渗透到数学的各个领域. 另一方面，拓扑学与量子物理相互关联的迹象也早已存在. 事实上，拓扑学中整体的性质总是用离散量来刻划的. 拓扑学家研究在连续变形下保持不变的性质，而这些性质通常是使用整数，而不是实数来加以区别的. 例如闭道路关于原点的 "环绕数" 就是一个典型的例子. Dirac 关于电荷量子化的著名论述本质上依赖于一个适当选取的环绕数.

量子理论与拓扑学之间的这种早期联系在当时并未引起重视. 只是在几十年之后，

原题: Quantum theory and geometry. 译自: *J. Math. Phys.* Vol 36, No. 11, 1995, pp. 6069–6072.

维普资讯 http://www.cqvip.com

规范理论进一步发展了，对于它们之间的关系，人们才有了真正的认识.

到了七十年代，量子理论与拓扑学这两大学科终于交汇在一起. 物理学家认识到拓扑学对于阐明他们的理论非常重要，同时他们也意外地发现所需要的一大堆拓扑的知识在数学领域中早已现成. 当物理学家开始吸收拓扑的思想和技巧，同时数学家开始了解量子场论的奥秘时，半是物理半是数学的新鲜名词，诸如量子群、量子上同调、量子拓扑学、拓扑量子场论等等大批涌现，不啻一场大的爆炸. 现在到处都在谈论这些东西. 这些新名词的意义还不十分清楚，它们确切定义仍在形成之中. 尽管如此，在这些花哨的名词之下，的确也隐藏了很多东西，因此还有许多工作正在进行.

历史的回顾就到此为止，我们选择了这样一个角度看历史 (或许有些事后诸葛亮的意味)、其目的在于表明：拓扑学与量子理论的融合乃是历史的必然，接下来我们将更为详细地描述量子理论与几何学相结合的现状. 然后再对其未来做些窥测.

II. 现状

综览一下现状就可知道有关量子理论与拓扑学的各方面研究正热火朝天. 然而对此人们却很难获得一种既富有连贯性又充满希望的感觉. 下面，我想提供一种有益的看法来看待当今的研究.

众所周知，对称的观点在数学以及物理学中是举足轻重的. 特别地，在量子理论中，对称性正扮演着日益重要的角色. 一方面是因为对称的观点使许多复杂的情形变得容易分析，这种分析中群表示理论是一个基本的工具. 另一方面，在更深层次上，人们越来越相信对称性以某种不明显的方式决定了几乎所有东西. 如果我们寻求一种不受外在因素与随意性选择的基本理论，那么对称性就是仅有的几个可以利用的资源之一. 数学上我们已知道简单的对称性能够产生极为错综复杂的结构. 而物理学家则反其道而行，试图从繁杂的现象中寻求蕴含着的简单的对称性.

一旦认识到对称性在物理学中所扮演的富有哲学意味的角色之后，我们就能够进而认为拓扑学也将扮演类似的角色. 其实，群论与拓扑学之间有许多相似之处：这两门学科兴起都比较晚；两者都从极简单的概念和假设出发却能得出高度抽象的结果；两者都包含了极其复杂的代数公式；也许它们还都与分析学有着重要的联系. 另外，对于圆周这一基本情形，群论与拓扑学通过整数紧紧连在一起. 整数在其中充任双重角色：在群论中它被看作特征标，而在拓扑学中则被看作环绕数.

群论与拓扑学之间还有许多密切的联系，具体一点说，例如：每一个拓扑空间都产生一个离散群 —— 由形变等价的闭道路所构成的基本群. 每一个 Lie 群都有一个有意义的拓扑结构，能够很微妙地反映该 Lie 群的代数结构. 还有，随着物理学中人为约定的对称性的增多，传统的群论语言已显得不够. 然而这种对称性本身却具有拓扑学上的意义. 外代数和超对称就是人所共知的例子.

有鉴于此，如同看待对称性一样，把拓扑看成某种有助于理解复杂现象的统一的基本原则并非毫无道理. 然而拓扑学的研究范围本身比群论广. 它的限制条件相对也更

维普资讯 http://www.cqvip.com

少，其结构也更为松散．因此，无怪乎拓扑学更难把握，发展进程也更缓慢．

近十年，我们看到许多例子表明量子场论的思想已被成功地用来发现和分析低维流形几何学的新结果．接连不断的成功给人印象颇深，其中包括 Vaughan Jones 的纽结多项式不变量，四维流形的 Donaldson 不变量以及辛流形的量子上同调．另外，还包括关于 Riemann 曲面及相应模空间的许多结果．其中多数情形是先有物理的办法，然后物理的想法刺激数学思想的产生，还有一些情形是先有数学的结果，而随后提出的物理学看法把数学的想法明确化并加以推广．

由此我们获得两则一般性的启示．其一，随着量子场论准确预言数学结果例子的增多，该理论的可信度也在不断提高．量子场论本来缺乏严格的基础，而这一系列成功的例子给了物理学家们极大的鼓舞，使他们相信他们的思想是基本正确的．另一则启示是给数学家的．目前人们所谈论的整体几何问题，传统的处理方法本质上讲是线性化方法，包括同调论以及关于相应调和形式的 Hodge 理论．而量子场论则提供了处理整体问题的非线性的新方法．这些方法看上去切中要害．很显然，数学家需要把握这些新想法并且将其纳入数学的框架之中．在不少领域里，这方面的工作正在进行，但在另一些领域里仍是困难重重，难以克服．

事实证明拓扑量子场论的概念 (见 [1, 2,]) 很有价值．这方面的理论目前不胜枚举．较之物理的理论，这些理论或许不够反映现实．但它们有可能会在这些物理理论的数学严格化中扮演主要角色．也许应该把这些理论看成是关于真空 (在引进粒子和场之前) 的理论，它们完全由拓扑的考虑所决定．尽管很难用分析学的方法给这些理论以严格的定义，但却可以将它们很简单地公理化，有时甚至可以用组合或者代数的方法把它们构造出来．

一个值得注意的事实是量子场论到目前为止对低维，亦即不超过四维的几何研究有重大影响．我们还知道低维出现的某些现象在高维就会消失．例如在 Donaldson 理论以及四维流形分类问题中就有这类现象产生．这些现象所蕴含的物理学以及数学上有意义仍有待人们进一步思索．

III. 未来

未来要从现在开始．因此我想从一个易于接受的新近进展开始讲起，它很可能会开辟将来的一个主要的研究方向．我所指的是 Seiberg 和 Witten 关于四维超对称性对偶理论及其应用的工作．特别是在 Donaldson 理论中的应用．（见 [3, 4, 5]）．

在比较对称与拓扑时，我已经说过对偶性将圆周群的环绕数和其特征标联系在一起．这显示出存在两种彼此对偶的原因可导致物理量的量子化 (以整数的形式)．整数可以产生于圆周的表示论 (有如角动量)，也可以产生于圆周的拓扑 (有如 Dirac 对电荷的推导)．

若干年前，Montonen 和 Olive(见 [6]) 指出在四维时空中，可以通过对偶将电、磁互换，这一思想被 Seiberg 及 Witten 以恰当的方式所发展 (见 [3])，其物理学结果具有重大

维普资讯 http://www.cqvip.com

意义．因为这种对偶性可将强、弱耦合互换，且对处理带约束的情形有所启发．在数学上，他们得到一个新的经典方程，它取代了 Donaldson 使用的自对偶 Yang–Mills 方程．这组 Seiberg–Witten 方程的分析性质更为简单，而其几何应用也更为直接和有力．事实上，它开辟了四维流形几何研究的新途径．

直到现在，我只谈到规范理论，而没有提及引力理论．众所周知，将引力理论与量子结合起来会产生许多重要的概念性困难，而且虽然目前有好几种方法，但最终的统一还很遥远．

处理引力理论的传统泛函积分法涉及到关于所有度量的积分，而最终得到的量子理论则不依赖于度量的选取．拓扑量子场论的存在也许提供了另一条途径来获得不依赖度量的场论，这类研究一直在引起人们的兴趣．二维时 (其中时、空各为一维), 拓扑量子场论似乎可以得到通过对所有度量积分而得到的同一理论 (至少在离散组合方法的限度内)．

Feynman 路径积分在量子场论中的运用卓见成效．然而在处理引力时却面临许多困难，只得另觅途径．或许可以说使用别的方法来构造量子引力是在所难免的，而拓扑量子场论提供了探索这些方法的一个新的开端．

物理学家与几何学家都清楚从二维到三维到四维的跳跃都十分巨大，无论是哪种情形，都会有截然不同的性质出现．因此，在把某些想法或结果从二维到三维，或者从三维到四维做推广时需要倍加小心谨慎．

二形式的对偶仍是二形式．这是四维空间独有的性质．它导致了 Donaldson 瞬子以及 Seiberg–Witten 方程．因此，理解四维引力的一个自然的方法可能是深入挖掘这一独特对偶性的丰富内涵． Penrose 的扭曲 (twistor) 理论即为一个尝试，该理论给出了引力瞬子的一个漂亮的构造．

由于所希望的唯一性似乎不能成立，对于弦理论研究的热情有所衰减．但几何学的许多结果却从正面肯定了弦理论的作用．特别要指出的是，弦理论和上文提到的对偶性是相容的．我们要寻找一种包含引力在内的基本理论．弦理论似乎仍有希望充当这一角色，虽然它目前不那么引人注目．

预卜量子引力理论的未来是轻率的．最审慎的说法莫过于：我们无法预测未来，许多惊人的事情正等着我们．未来好比狂飙卷起的稻草，在风中摇曳不定．量子理论以及几何学的最新进展预示着在风和日丽之前，还会有好几场急风骤雨．

参 考 文 献

[1] E. Witten, *Topological quantum field theory,* Commun. Math Phys. **117** (1988), 353–386.

[2] M. F. Atiyah, *Topological quantum field theories,* Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. **68** (1989), 175–186.

(下转第 221 页)

维普资讯 http://www.cqvip.com

216–234.

[11] W. L. Miranker and W. Liniger, *Parallel methods for the numerical integration of ordinary defferential equations*, Math. Comp., **21** (1967), 303–320.

[12] S. Vandewalle and R. Piessens, *Numerical experiments with nonlinear multigrid waveform relaxation on a parallel processor*, App. Num. Math., **8** (1991), 149–161.

[13] J. White, A. Sangiovanni-Vincentelli, F. Odeh, and A. Ruchli, *Waveform relaxation: Theory and practice*, Trans. of Soc. for Computer Simulation, **2** (1985), 95–133.

[14] Z. Zlatev, *Treatment of some mathematical models describing long-range transport of air pollutants on vector processors*, Parallel Computing, **6** (1988), 87–98.

(顾丽珍 译　王 铎 校)

～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～

(上接 211 页)

[3] N. Seiberg and E. Witten, *Electric-magnetic duality, monopole condensation, and confinement in $N=2$ supersymmetric Yang-Mills theory*, Institute for Advanced Study, Princeton, preprint (1994).

[4] E. Witten, *Monopoles and four-manifolds*, Institute for Advanced Study, Princeton, preprint (Nov 1994).

[5] P. Kronheimer and T. Morwka, *The genus embedded surfaces in the projective plane*, (to apper, 1995).

[6] C. Montonen and D. Olive, Phys. Lett. B **72** (1977), 117.

(成 斌 译　余建明 校)