几何学_ 黎曼几何_ 广义相对论

综合报告
①
97,16(4)
1997\77951X\016\00K
265-274
O18-11

几何学的未来发展

丘成桐

校长、院长、各位同学，今天很荣幸能够在这边给个演讲，尤其今年是交通大学一百周年校庆纪念，能到一个比较注重工程方面的学校来讲数学、理科方面的学问，表示交通大学也开始注重理科方面的工作，这是很有意义的．因为基本课程对于工程科学有很重要的启发性．今天我讲的题目是林松山教授给我的．其实未来是很难猜测的，很多不同的作学问的人猜测未来往往是错误的．所以我不能够对未来作任何的猜测，我只能够根据以前的历史来猜想．

今天要讲的是以前的历史，不是未来．讲以前的历史主要是从主观的观念来看．我不是一个历史学家，我讲的往往是错误的．可是这不重要，因为我想讲的是从我的观念来看历史．希望能够晓得我自己的想法是怎么样的，因此可以猜测未来的看法、清华大学跟交通大学都给了杨振宁先生荣誉博士．我看过杨先生写的一篇文章，杨先生讲做物理好像画图画一样．我想做几何也跟画图画差不多；不过我们画的图更广泛一点，物理要画的图画基本上只有一张图画：就是自然界的现象．我们可以乱画，我们可以画广告画，也可以画印象画．广告画以后可以在工程上有很大的用处，过几年后可能是搜集的对象．可是我们大家晓得画印象派的画不同于画广告画，里面的技术一定要有很深的功力才能画得好．事实上出名的画家往往花很多的时间在里头、在磨练、在猜测、在将他的工具不停的推进，才能够画出好的印象派画．教数学的跟教几何也是同样的．表面上有一些工作可能是个很小的观察，但往往是花了数学家很大的精力去找到的．

现在我想从我的观念来看的数学的几何上的历史，来看看从前，再猜测未来．因为我没想到林松山教授给我这样长的时间，今天将时间拉长一点．从前我们念中学的时候，念国文、念文学批评的时候，一个时代有一个时代的感慨．数学上基本上也是一样，文学上有古文学、有诗经、有汉书、有唐诗、有宋词，每一个时代有每一个时代的感慨，以后你再学也很少能够学的得刚好一样．我们现在看从前诗经写得好得不得了，可是我们学不到诗经里面的真正意思．因为我们发觉时代不同，我们感慨不同，随着时代的变化，我们的数学也在变化．一方面是我们看到的环境不同，一方面也是因为时代不同的需要．我们可以很羡慕从前大数学家做的工作，可是我们也不一定要跟他一样．就好像我们现在学苏东坡的诗，我们大概不可能学得一样，可是一般来说我们可以从他里边得到想法，帮助我们现在的前进．所以我们要了解我们从前做的事究竟是怎样一回事，我们才能够向前走、首先我们从几何的观点，甚至从数学的观点来讲、我们要追随的、事实

上跟物理学一样：就是真跟美这两个观念．还有一个很重要的，就是实际上的需求对数学的推动．这三个看法是推动几何学发展的一个很重要的原动力．我们晓得美是不停的在改变．改变的方式跟我们当时晓得的自然界有很大的关联．一、二千年前我们晓得的自然界跟现在的自然界完全不同，所以数学或者几何学不停地受到这方面的影响．在几何来讲，美可分为两方面：静态的美和动态的美．静态的美我们很清楚，譬如一朵花或漂亮的山水，我们都晓得是怎样去描述它并想办法写下来．动态的美到现在为止对我们来讲是一个很困难的问题；例如水在流或天在下雪，很多不同的时间跟时空改变的时候，是一个相当美的图画．可是到目前为止对理论物理学家、数学家跟几何学家都是一个很大的困难．对时空的描述有好的了解的话，影响到很多几何里面不同的要求．尤其对物理上的了解，对微分方程的了解是一个很重要的几何现象．从古到今大家晓得除了很抽象的讲美以外，我们全然没有很客观的标准来判断什么叫做画得好或者画不好．可是最重要的观念就是一个很明了的、很简单的简明性 (simplicity), 它常常是我们要求的一个主要标准．在做几何、做数学、做物理时，我们都在描述一个很复杂的几何现象．假如我们没有办法将整个几何现象用很简单的语言写出来的话，一般来讲不算是好的定理或文章，我们都希望能够再进一步地去表示出来．举一个很简单的的图画或是个很复杂的图画，我们希望能够用一个很简单的方法来描述这幅图画，我们希望用很简单的语言来描述．欧几里得的时代就是公理 (axiom) 的意思．为什么当年欧几里得能够对几何做出很大的贡献？当时有很多的定理．定理多得不得了．在希腊或埃及早期他们发现了很多不同的平面几何的现象，但他们没有办法有系统地将它们放在一起．欧氏很重要的贡献，是能够将定理统一的规范起来，用来解释所有当时发现的定理．例如两点之间可以用直线连接起来，由此我们可以推出当时发现的很多定理．追求用简单的语言来解释复杂的定理，是数学家或几何学家一直在追求的．就算是物理学家也是一样，物理上有许多很复杂的现象，最后他们希望用统一场论来描述这些现象．数学也是一样，我们中国也发展了很多平面几何，可是始终没有办法发展成理论．这是中国始终没有办法跟西方比较的一个主要原因．因为公理化以后我们能够统一处理发现的平面几何的现象．我们很快晓得这里面有很大的限制，因为欧氏定理所能解释的只是很简单的理想化的几何现象．我们在自然界里发现的远比这要复杂得多，所以阿基米德和以后的牛顿用微积分的方法来描述变动的直线，曲线和曲面．引进了微积分以后，对于微分几何是个很大很大的推进，因为我们开始晓得不是直线或是圆的图形都可以解决．无论从物理或数学的观点来看，这都是一个很大的推进，从中也可以看出几何学受到物理上的影响有多大．牛顿或是阿基米德当时也是从物理上的观点来看质点怎么趋向于曲线，来描述它们，来研究微积分．几何学家发现用来描述几何上的很多图形非靠微积分不可，所以从希腊的几何到牛顿是一个很大的进步．古典力学无论在阿基米德或牛顿的时候对几何的影响力到现在还是很深远的．在古典力学里面引进了变分法的观念，对微分几何有极深远的影响．我们研究一个很简单的问题：两点之间最短的是直线．这是平面几何要求的．可是假如中间有障碍，这就不再是一条直线．假如中间不是一个平面，而是一个山坡，这是最简单的变分法的问题，两点间最短的线是什么？问题是怎么找这些曲线及它的分布情形，到

现在为止这还是微分几何里最重要的一个问题，即测地线 (geodesic) 的性状 (behavior). 我们晓得在圆球上所有的测地线都是大圆. 假设我们将圆球变形一下，变成凸曲面，这就变成一个很复杂的数学问题. 它的测地线分布情形我们不是懂得很多，到目前为止没有办法处理这个问题，只有对简单的椭球体可以解决. 可是古典力学和经典路径 (classic path) 的性状从牛顿力学以来，其实对微分几何影响很深. 从这方面我们发现很多不同的工具来解释测地线的性状，可是大概还没有完全解决，可以想象以后还会在这方面做很多不同的工作. 我们晓得古典力学和量子力学有一定的关系.

在物理上，所谓普朗克常数 (Planck constant) 趋向于零的时候，古典力学和量子力学中间的关系，在物理上几十年来有很多不同的贡献，有所谓 WKP 的近似. 在几何上有同样的问题要问. 这个问题到现在我们对它的了解还是相差很远. 同时 Laplace 算子是从量子场论来的一个算子，有谱的观念. 物理上经典路径的性状和光谱有关系. 这几十年来研究微分几何和微分方程的人在这方面做了一些工作. 可是这一工作跟真的我们要了解的方面还相差很远. 我们可以想象我们以后对于这方面还是需要很深的了解. 就是讲怎样将古典力学通过最短的途径，到量子力学，Laplace 算子谱的问题，这是一个很大的问题. 到现在为止还不了解，我想以后会有很大的进步. 我讲的是从最古典的古典力学一直到现在的量子力学. 我们最近有量子场物理 (quantum field physics)，量子场比量子物理更进一步. 里面有无穷多个质点，变成无穷维空间的几何学. 我们考虑有限维上的谱分析的问题，由于量子力学上的需要，我们要解释从谱跟经典路线的关系得到很多不同的几何观念. 等一下我会解释. 可是最近几年我们晓得物理学家进一步讨论场论的时候，遇到新的困难，得到的问题是关于无穷维流形上的谱分解的问题. 我们考虑谱是在所谓 L^2 流形上的算子问题. 可是在无穷维空间的时候，一般来讲粒子是所谓圈空间 (loop space)，就是将所有的封闭曲线放在起，然后在上面考虑谱分解问题. 这是一个很困难的问题. 因为量子场论本身离开严格的表达 (rigorous formulation) 差很远. 大家听过重组化 (renormalization)；很多不同的问题出现在很多无穷相约 (cancellation) 的问题上. 在物理上出现的问题在数学上当然是更困难的问题. 因为物理学家愿意接受 "差不多对就是对" 的观念，对数学来讲当然很难接受. 可是从量子力学，量子场里面出来的数学，我们发觉对于数学或几何学家本身引起很多不是从我们一般的概念能接受的观念：直觉 (intuition). 我们在有限维空间得到的直觉，可以走的很远很远. 基本上我们的直觉大概在对这方面的问题都有一定的好处. 可是在无穷维空间里面，我们发觉我们对一般的直觉差得很远. 没有办法从古典的有限维空间几何得到无穷维空间几何上所需要的数学. 这十五年来，自从弦理论产生以后，我们发觉从这边产生的几何问题很多得出来的结论基本上是正确的.

虽然量子场本身的基础不精确，甚至在物理上可能是不对的，得出来的结论虽然不能证明，可是我们发现基本上它们是对的. 我可以举一些例子，这是一个很微妙的问题，一个古典问题，一百多年来问的问题，有一个五次方程，很古典的问题，中学生都看得懂. 我们要解这个方程，我们问一个很简单的问题，假如要求解这个方程并允许解可以写成一个参数 t 的有理函数. 我们将这个方程写来，我们要找有理函数使它满足方

程式．问这个方程有多少个解．这是一个很古典的问题，跟从前 Femat 问题很像．我们的解可以分成不同的类别，我们可以算 t 的阶数．我们用阶数的观念解，一般来说是无穷个．可是我们可以问阶数等于一的时候有多少个，等于二有多少个．古典的几何学家算出来阶数等于一的时候有 2750 个，等于二的时候也可以算出来．等于三是近几年才找出来的，可是我们晓得有无穷多的解，阶数越大解的可能越多．数学家没有办法回答这个问题．这个问题到了五年前，其结果都可以用量子场论从猜测的一个公式出发对于所有的 t 给解出来．这个公式在五年前是我的一个博士后研究员建立的．从量子场论我们没有办法证明这个公式，可是从猜测的公式用古典方法去一个一个检查出来基本上是对的，当然这不是一个证明．所以量子场论得来的一些结果一般来说不能当作证明．今年年初这个公式全部可以用数学的方法证明了．可是得到这个公式本身可以说有很大的意义，因为在量子场论找到这个公式以前我们连怎样找这个公式都不知道．可是等到这个公式出来以后，我们从公式本身去猜，终于在今年年初可以得到这个证明．我为什么要讲这个问题呢？因为无穷维空间在物理上有许多直观的想法，在数学家来讲几乎是不可能接受的．因为公式是从路径积分里面加上再正规化的观念导出来的，在严格方面和直观上数学家都不能够接受．因为路径积分得出来的观念并不是很直观．我想我们到了这个年代，我们要学物理学家在量子场论方面他们的直观是怎样训练出来的，因为我们没有这方面的观念．近十年来我们有很多从量子场论得出的重要观念，解决了很多我们以前没有办法可以接受的问题．所以说从这方面可以看出古典力学，量子力学，量子场论对几何的影响是很深远的．同时这个观念会继续发展下去，到二十一世纪至少前几十年在无穷维空间上的几何，要不停地受到量子场论的影响，因为我们很容易地定义什么叫做无穷维空间上的几何，可是往往没有办法得出任何有意义的结论；这是因为我们没有办法可以把物理上的观念搞得很清楚，因为无穷维的几何往往不是直观可以得到的．所以往往非要接受从物理或其他自然科学方面供给的观念来使我们向前走．这是一个很重要的交汇，因为我们往往自以为是的发明，自以为很漂亮的工具，结果不能够解决任何问题．

我刚才强调了一下从物理上来的观念，可是我们晓得几何或数学本身有他生存的意义、也有生存的价值．我们可以生存而不受到外面的影响，所以微分几何学家可以推导很多很漂亮的工具．假如它很漂亮或很简单的可以解释很多几何上的观念的话，它一定有生存的意义，这是我们做数学的人相信的．举个例子来说，从牛顿以后，古典力学对微分几何有深远的影响．我们刚才已讲过到了十九世纪 Gauss 的时候，一个很重要的发现便是 Gauss 定理．这可以讲是从牛顿以后微分几何进入了一个新的纪元．主要的大定理就是讲所谓曲率的观念，曲率的观念在 Gauss 以前就有了，就是讲看二维空间的曲面．自微积分以后我们晓得怎样处理二维的曲面，自从牛顿以后有 Euler 等很多重要的数学家在这方面有很大的贡献．曲率的观念是二维空间在三维空里面它是怎样扭曲的．一般来说有两个不同的方向，一个方向叫 $k1$, 另一方向叫 $k2$,$k1*k2$ 叫做二维空间的曲率．Gauss 最重要的贡献是发现曲率跟曲面的内蕴度量 (intrinsic metric) 有关．就是说二维空间可以改变，里面的度量关系不变，它的曲率是不变的．例如圆形柱中间切一条线以

后，打开来变成一个长方形．中间切开以后并没有改变度量，所以曲率为零．Gauss 发现这个定理的时候自己认为是一个很重要的发现．这个发现跟物理或其他的科学没有任何的关系．是 Gauss 经过很复杂的微积分，将曲率简化，结果发现是一个很漂亮的公式，跟内蕴度量有关． Gauss 之所以能成为伟大的数学家的一个原因是他愿意去算很繁琐的微积分．现在一般的几何学家不做这个；他在很复杂的式子里找出这个公式．这个公式当时 Gauss 写出来的时候，其实是很难看的．因为用不同的座标写的时候，微分几何上的公式可以变得很复杂．这也是微分几何漂亮的地方，有时候选取座标可以得到很简单的公式． Gauss 当时写出来的时候是很复杂的公式，可是目前在课本上可以很容易写下来．这是因为我们慢慢将 Gauss 的想法吸收进来，再用不同的方式表示出来．公式给我们一个很简单的意义，就是只跟内蕴度量有关，这是很重要的．有了这个陈述以后才引起黎曼几何的发展． Riemann 根据 Gauss 的发现发觉我们可以推导微分几何．全部用一个内蕴的几何学 (intrinsic geometry); 就是一个流形上的度量．我们只要晓得两点之间的距离怎样度量，我们就可以引进曲率的观念．由距离可以决定曲率，这是黎曼几何一个重要的观念． Riemann 当时是要求欧氏空间在一点上是成立的，欧氏几何在一个很小的邻域上是成立的．加上这个陈述 "Euclidean Geometry True Infinitesimal" 我们推导了曲率的观念及一系列微分几何上主要的观念．

当时 Riemann 做这个事情基本上我想只是好奇．因为 Gauss 有这个定理以后他希望能够重新解释这个观念，同时推到高维空间去．这当然解释了几个重要的观念，就是讲欧氏几何里所谓平行公理不一致的问题．对超几何学 (hypergeometry) 也解释得比较清楚完全．可是最主要的是从 Riemann 到二十世纪初期，这整个微分几何的发展跟物理或其他学科基本上都无关．当年引进了很多不同的观念全部都是微分几何学家好奇心所致的看法．同时因为我们发现很多在欧氏空间上能够做的事情，我们都有办法在黎曼流形上面做，就好像微分或积分的观念全部可以推导到流形上去．所以数学家在三、四十年将微分几何推到比较完美的状态．当时的推导跟其他科学无关．就是从它的简单跟优美来推导，也就是所谓美的观念来推导的．一直到 Einstein 引进广义相对论，黎曼几何才得到一个很大的进步．

黎曼几何在 Einstein 的广义相对论得到应用．同时，当时 Einstein 对微分几何因为不大了解的缘故，推导出来的方程式是错的．一直到数学家跟他合作以后他才推导出正确的公式．这对黎曼几何来说当然是一个很大的鼓舞．就是讲一个比较抽象的想法，结果能够得到在物理上的一个应用．可是反过来说，自从广义相对论成功以后，对于黎曼几何的发展是一个很大的刺激，尤其是大范围的微分几何跟广义相对论有很密切的关系．当然在黎曼几何中，我们能够问的问题有它本身的意义跟本身的漂亮在里面，可是有一些观念我们几乎是不可能问的．要到了物理学家要追求一些其他的实际问题的时候，我们才了解它的重要性跟它可能可以解决的可能性．

举个例子来讲，十多年前我跟我的一个朋友做一个广义相对论上的题目．这个问题是好几十年前提出的老问题，当时几何学家不太懂这个问题，物理学家解释清楚以后我们才晓得基本上是一个几何问题．所谓几何问题就是指我们比较懂的几何问题，因此我

们对它有很大的兴趣，可是这个问题变成物理问题以后我们觉得它不可思议．因为原来物理上的问题我们以为是不对的，可是它的特殊例子我们以为是对的．我们将这个特殊例子用几何的方法解决以后，我们开始去处理一般的情形的时候，单从我们在几何方面的观念来讲，我们认为是不可能对的．事实上我们最后把一般的情形解决了以后，当时物理学很出名的几何学家他们一看认为这是不可能对的．可见我们在几何上的直觉是一个限制．可是物理学家也有他们的限制，就是刚才讲的这个问题，他们想了很久也没有办法解决．我们可以用几何的方法将它改进，因此我们将它解决了．所以这是一个互补的情形，尤其是有些命题在我们来讲几乎是不对的，可是物理学家坚持非对不可，否则的话有大的困难，所以我们花了很大的功夫去解决它．当时假设物理学家不是这么坚持的话，我们不可能花那么多时间去解决它．所以我们可以看出来物理和数学的关系是很密切的．从 Einstein 以后我们得到很多不同的好处，不是 Einstein 本人给出来的．物理学家和数学家的交往实在是很重要的．这是几何发展的一部分，沿着这条路线走下去的话，我想是无可置疑的．

二十世纪至少有半个世纪我想是要解决从广义相对论里面出现的几何问题．这十多年来物理学家大概没有办法去解决这方面的数学问题，所以不大做古典的广义相对论的问题；就是时空，根据广义相对论的时空上的几何．物理学家现在发展出量子化，这当然是一个很重要的问题．可是本来广义相对论的问题物理学家对它的研究比较少．很多物理学家为了解决问题和能得到结果起见，将这个方程改变或者将本身的要求放宽来得到结果．当然是因为这个问题比较困难，所以想要能够写一篇论文，作些改变当然有好处．可是 Einstein 方程本身是一个很漂亮的方程，我觉得是不能改的，至少在古典方面来讲，除非有一致的方法来改变它，否则的话不应当改变．假如不改变 Einstein 方程的话，我们遇到很多同样重要的有意义的问题．是时空上面的奇异点的问题．这几十年我们对奇异点的问题，在代数几何方面有长足的进步，有很多工具在里面，替我们解决很多不同的问题．一个很出名的定理是 Hironaka 的奇点分解定理，这是三十年前做的，可是这在代数几何里面是解能确切定义 (Well-defined) 的问题．因为流形是用不同的多项式来定义的．我们有一个多项式集 (set of polynomials)，它定义了一个流形，流形本身有奇异点．代数几何学家有一个很漂亮同时很有效的方法来了解奇异点的结构．在以后这十多年，Arnold 等好几个人考虑了所谓平滑奇异点 (smooth singularity) 的问题；流形不一定由多项式定义而是由平滑函数 (smooth function) 定义．他们引进了很多拓扑学的问题．基本的方法还是变成多项式的情形来解决．可是这是一个很实际的问题，对于物理上、微分方程上或几何上都如此．对这个问题，我们开始做研究，可是对于真正了解它还是差得很远．为什么呢？因为其实什么叫做奇异点在广义相对论中没有一个很好的定义．我们晓得奇异点是在时空上，跟我们现在所看到的 Minkowski 时空上是不同的．这是我们晓得的最简单的事实，就是讲局部性跟时空不一样的地方，可是我们没有结构．整个奇异点在广义相对论中我们不晓得它们的结构是怎么样的，就是想要问的问题我们都不太清楚，这是一个很重要的问题．对它在微分几何上或在广义相对论上的了解，要依靠我们对它在微分方程上的了解．为什么呢？因为广义相对论本身是由一个方程来定

义的，就是 Einstein 方程．假如我们脱离了 Einstein 方程，所有得出来的基本上讲只是一个猜测，不能够讲是真正的广义相对论所要求的．所以按照我的看法，一切都从原来的 Einstein 方程来指导我们要找的奇异点是什么．很不幸的是这个方程式是一个很复杂的非线性双曲型方程，不单是双曲还有椭圆两个混在一起的方程．这方程我们对它的了解几乎为零．我们晓得的很少，所以我们希望能够从 Einstein 方程得到时空的奇异点观念．就是讲 Cauchy 初值问题 (initial Cauchy problem) 是光滑的时候，当时间向前走的时候奇异点是怎样产生．奇异点产生以后我们才能了解奇异点的结构是怎样的．在广义相对论有不同的考虑：一个就是黑洞问题，一个就是所谓反奇异点 (negative singularity) 的问题．有两个可能性，这两种不同的奇异点在物理上我们不了解，我们只期望在数学上能够做到一些结果．

关于黑洞，一般而言我们用几个主要的解来解释它，就是 Schwarzschild 的解和 Kerr 的解．可是这两个解不见得是一般性的．物理学家都是用基本解来看．我们数学从微分方程或者几何的观点看，都希望能够将这个问题解决，给他一个结构．不单黑洞本身有它的重要意义，同时对所谓的重力幅射 (gravitation radiation) 的问题有很大的意义．现在差不多可以观察到重力幅射．可是这个问题和观察本身有多大的意义，其实很难讲得清楚．因为无论从理论上或数值计算上我们对 Einstein 方程都还没有将幅射公式作很透彻的了解．这个问题都跟奇异点的问题有关．奇异点是在时空上有限距离的奇异点，重力幅射跟无穷远的分裂 (split out) 的问题有关．这两个问题我想这几十年内希望能有很大的进展．当然你也可以讲你不在乎，你不在乎也跟这个有关，就是讲整个空间上面的奇异点是怎样的．例如我们所有看到的几何事件都有某种奇异点在里面．我们怎样去分类它？奇异点当然有很多不同的类型，一个是人为的，一个是自然的，这两种奇异点我们都要去研究．人为的在工程上的关系比较大，自然的从物理上的方程推导出来． Einstein 方程是最困难的问题，可是我们还有不同的奇异点要研究．不同的奇异点好像是从规范场论来的，尤其是从 Yang-Mills 场论．为什么花大部分时间讲 Einstein 方程呢？因为它不单是影响到微分方程本身，也影响时空本身，对微分几何学家来讲发生了困难．奇异点最后当然跟拓扑学有关系，我们做微分几何总要有一个背景在后面，拓扑学就是一个．

微分几何自从有拓扑学以来，微分几何学家对拓扑学都是很重视的．我们现在要讲最近拓扑学的走向，跟微分几何的关系．微分几何跟拓扑学的密切关系很早就有． Euler 公式及 Poincaré 跟天文物理有关的工作，开始了拓扑学的研究．可是我们从微分几何的看法，一开始有所谓 De Rham 理论和 Hodge 理论等方面的几个重要的定理．尤其是 Hodge 理论，一开始是从 Maxwell 方程来的．当时数学家想将 Maxwell 方程写在流形上，所以引进了 De Rham 理论跟 Hodge 理论．当年考虑不单跟 Maxwell 方程也和复分析有密切的关系，即规范 (Gauge) 问题．大家都晓得复分析在十九世纪有长足的进步．可是我们晓得很多很自然的复数方程不能够确切定义，即有所谓单值性 (monodromy) 的问题．我们在念单复变的时候，例如 log 函数它本身不能确切定义，它有分支切割 (branch cut) 的问题，所以复分析引进了单值化 (uniformization) 的观念，就是讲单值化．例如

$\sqrt{Z}$ 在平面上不能确切定义，可是在黎曼曲面上能确切定义．从这我们晓得单值性的问题其实就是规范问题．所以其实数学家考虑规范场论是很久以前的事．两者结合起来以后，得到了不同的拓扑学和复分析方面主要的影响深远的进步．一个是大范围拓扑学，像同调 (homology) 的问题跟高维空间复流形的问题．这世纪初要推广 Maxwell 方程，复分析以后当然还有大范围拓扑学的很多不同的观念进来了．我们只讲一个跟微分几何有最大的密切关系的．为了了解这些问题，微分几何学家引进了很多重要的观念，其中一个就是示性类 (characteristic class) 的观念． Pontryagin, 陈省身他们引进了陈类 (Chern class) 的观念．在球状拓扑学跟微分几何有很密切的关连．这几个观念影响整个二十世纪的整个数学的发展，不单是影响微分几何，尤其是陈类的观念． Whitney 将流形里面的向量丛 (vector bundle) 的观念抽象出来，基本上就是规范场的问题．他为了研究所谓浸没的问题，引进了向量丛的观念．向量丛在 Whitney 手上变成拓扑学里面一个最重要的工具．因为他以后引进了纤维束的观念，陈类就是向量丛上面重要的不变量．我们没有时间来细讲示性类在陈省身先生手上变成跟曲率连了起来，这对微分几何是一个划时代的贡献．

因为陈类是一个大范围的拓扑学观念，曲率是一个局部的观念，将它们连起来以后，我们就可以将局部的微分几何跟大范围的微分几何连起来．就是由于这种观念，我们得到局部几何怎么来影响整体几何的问题，这是微分几何从古到今最主要的目标．我们期望从很局部的结构来了解整个大范围的结构，这也就是物理学家常常要求的．物理学家写下 Einstein 方程是一个描述局部结构的方程，因此我们希望知道整个大的宇宙结构是怎么样的．物理学家跟几何学家有一个共同的想法，其中一个重要的工具就是陈类怎么用曲率来表示．因为决定了流形以后，我们有很多不同的规范场论在上面，因此在引进不同的向量丛的时候，得到不同的公式，不是一个公式，其实是很多公式．所有向量丛放在一起得到所谓 K- 理论的观念，是几何上很重要的不变量．因为将全部放在一起以后，我们看陈类本身的关系，得出一个很重要的映射，这映射发现所谓 Riemann-Roch 定理．这是为了解决代数流形上的问题引进的，不是为了解决物理问题，而是为了解决数学上很重要的问题．就是看怎么算代数问题的解的个数．刚才已经举个例子，从前 Riemann 跟 Roch 在一维情形有一个很简单的公式来算，到了四十年代几何学家想要推广到高维空间去．成功的推广到高维空间要用到陈类的概念，这可以讲是本世纪最伟大的定理．

有了 Riemann-Roch 定理的发明， Atiyah-Singer 将它普遍化成指标理论 (index theory)． Atiyah-Singer 发觉 Riemann-Roch 定理不单在代数流形上对，同时也可以推广到一般流形上．事实上是微分算子的问题；椭圆微分算子的指标问题．也就是如何看待一般椭圆算子的解的方法，可以变成拓扑学上的算法．所以这方面的发展对近代物理，即高能物理有很大的影响．以后杨振宁先生发展 Yang-Mills 理论的重要工具就是指标理论．我们当然晓得 Yang-Mills 理论在物理上很有意义，同样是基本的贡献．在拓扑学上也是一样的重要．事实上可以看得出来，其实数学家对规范场论的观念很早就有了．从 Whitney 到以后的发展就是向量丛的问题．你可以讲很奇怪为什么我们自己没有发展 Yang-Mills 理论．我想很大的原因是一直到六十、七十年代后期，我们微分几何学家对于解微分几何

方程的兴趣不大. Yang-Mills 理论很重要的是考虑规范场里的曲率，将它积分做变分方程得到 Yang-Mills 方程. 我们对这个方程的兴趣不大，古典几何学家一直认为只有工程问题才会去解方程. 所以对向量丛的了解不多. 直到七十年代我们开始将 Atiyah-Singer 的理论用到 Yang-Mills 理论上，也因此得到长足的进步. 最出名的当然是 Donaldson 的理论，可是在 Donaldson 的理论以前，有一阵子数学家和物理学家觉得很奇怪，为什么 Donaldson 以前对 Yang-Mills 理论有这么大的兴趣去发展普通的理论？在以前物理学家讨论在 S^4 上的规范场，问有多少个规范场的 Yang-Mills 方程的解，维数有多少或者怎么解出来. 可是很少有人问假如不是 S^4 的时候我们怎么去了解这个向量丛？ Taubs 将一般的向量丛的结构了解得很清楚，尤其是 Taubs 证明了一个很重要的存在性定理. 对 Yang-Mills 理论， Donaldson 用了 Taubs 的存在性定理加上 Atiyah-Singer 理论，将四维空间 Yang-Mills 理论搞清楚以后，发现模数空间 (modulus space) 本身是一个很重要的拓扑不变量，可以得出很多拓扑学上的不变量. 这是很重要的贡献，因为他将四维空间里很重要的拓扑学问题全部解决了. 所以可以看出来、数学家或几何学家的走法跟物理学家不一定要相同，因为物理学家当时只想解决 S^4 上面的问题. 可是我们基于好奇心发展了一套理论以后，大概七八年的时间 Donaldson 将它应用在拓扑学上解决了一个很重要的问题. 这种方法大概可以继续用二三十年的时间.

Donaldson 的工作以后继续发展，Kronheimer 做出了一个主要的贡献. 他将 Donaldson 的工作了解的很清楚，研究所谓的 Donaldson 不变量得到一个很一般的结构认知. 就是由于好奇心，我们就要搞清楚 Donaldson 的不变量究竟在数学上的意义是什么东西. 关于 Donaldson 的多项式结构，是 Kronheimer 和 Mrowka 在大概四年前将整个结构搞得很清楚，这引起了 Witten 的注意. 所以 Witten 企图要从量子场论来解释这个公式. 物理学家对 Donaldson 的不变量一直在注意，可是始终没有办法可以将它解释得很清楚. 到了 Kronheimer 和 Mrowka 将这个公式搞清楚了以后， Witten 才用路径积分的方法来开始了解 Donaldson 的不变量究竟在物理上是什么意义. 因此他应用 Seiberg 在超对称 (supersymmetric) 场里的工具，得出所谓 Seiberg-Witten 不变量. 这两年它是在代数拓扑、微分几何跟代数几何发展里面很流行、很重要的工具. 因为很多 Donaldson 理论里面没有办法解决的问题，结果可以用 Seiberg-Witten 的办法解决. 这个 Seiberg-Witten 不变量跟原来的规范场理论关系不大，这是很惊人的改变. 就是所谓规范场论的主要不变量跟 Seiberg-Witten 方程关系不大，因为 $U(1)$ 规范场与 $U(2)$ 规范场是相交的 ($U(1)$ guage intersect $U(2)$ guage), Seiberg-Witten 方程是一个非线性与 $U(1)$ 规范场耦合 ($U(1)$ guage coupled) 得来的. 从这边四维甚至三维空间的很多问题可以解决. 是不是所有的问题都可以解决呢？我想是差得很远. 我们在四维空间里面有很多拓扑学上想解决的问题，本身是期望 Donaldson 不变量来解决. 用 Donaldson 不变量大概也可以解决，可是到后来变成一个很复杂的问题，大概还可以算，可是很多人算了半天都没办法继续下去. 等到 Seiberg-Witten 东西出来以后，很多比较复杂的计算可以用比较简单的方式解决. 是不是表示 Donaldson 的理论没有用呢？我想并不知道. 可是我们晓得最近的潮流是做 Seiberg-Witten 方程，这并不表示 Seiberg-Witten 方程可以解决所有问题、可是我们希望

这样的路线可以继续下去同时发扬光大．因为四维空间的拓扑学是很复杂的问题，不是一朝一夕能够解决的，我们不能够期望这几个理论就能够解决所有的问题．三维的问题也是一个很大的问题，我想这几个问题里面有一个很重要的工具还没有完全掌握，所以这几个问题还没有办法解决，就是存在性的问题．这当然是我自己的看法，存在性的问题，在微分方程常常第一句问什么时候存在？可是事实上所有的发展里面，每一个主要的贡献都在问存在性的问题．我们在四维三维空里面存在性的问题还没有完全解决，我们希望微分方程能够帮忙：就是讲椭圆系统存在性能应用于这几个低维的拓扑学上．这些问题当然至少要几十年我们才能够全部搞清楚，所以我们可以看出来以后微分几何会是物理、方程跟拓扑结合在一起的领域．

（许正雄，林松山 整理）

编者注：这是 1997 年 8 月 12 日由杨乐教授转来的丘成桐教授投给《数学译林》的文章．是作者在台湾交通大学一百周年校庆时所作的报告．这里我们作了一些文字编辑加工．