高散 / 力系 Devaney. 传递作 译论

数学争鸣

0 334-337

Devaney 的混沌定义中传递性的作用

C177.1

Annalisa Crannell

王兰宇 Crann. A

编者按：本刊曾于 1993 年第 1 期 (p.77–78) 及 1995 年第 3 期 (p. 246–248) 刊登过 [1] 和 [8] 的译文，可参阅．

1 引言

Devaney 关于离散动力系统引进的混沌定义是一个常用的、广为人知的概念．他的定义如下：

设 M 是 $\mathbf{R}^n$ 的子集．映射 $f: M \to M$ 称作是混沌的，如果

(1) f 是传递的：对任意的非空开集偶 $U, V \subset M$，存在 $k > 0$，使 $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$；

(2) f 的周期点在 M 中稠密；

(3) f 满足一个重要条件 —— 对初始条件的敏感依赖性：存在仅依赖于 M 和 f 的 $\delta > 0$，使得对 M 中的任意非空开子集 W，都存在一对点 $x, y \in W$ 和 $n \geq 0$，满足 $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$．这里 f^n 是 f 自身 n 次迭代的复合，例如，$f^3(x) = f(f(f(x)))$．

在上述定义中具有讽刺意味的是，人们越是透彻地理解每个假设条件，越会发现其中的一个条件对于另外两个条件来说是多余的．

例如，敏感依赖性很容易为数学家和非数学家所理解．在一些普及读物中甚至称它为“蝴蝶效应”(如 [3],[7])；“蝴蝶效应”这一短语可以追溯到 Ray Bradbury [2] 的故事“雷声”(“A Sound of Thunder”)，在这个故事中，一个时空旅行者当他踏着一只太古时代的蝴蝶时，就可以改变时间的进程．敏感依赖性体现混沌的本质 —— 简单系统的绝对的不可预测性 —— 这也是人们普遍乐于在混沌定义中接受这个条件的一个原因．

然而，Banks, Brooks, Gairns, David 和 Stacey 的一篇简短而精彩的文章 [1] 证明，传递性和周期点的稠密性可以导出敏感依赖性．也就是说，尽管敏感依赖性外

原题：The Role of Transitivity in Devaney's Definition of Chaos．译自：*Amer. Math. Monthly*, Vol. 102, No. 11, 1995, pp. 788–793.

表是吸引人的，但从数学上来讲却是多余的 —— 事实上，混沌本身仅依赖于空间的拓扑性质而不是度量性质.

周期点的稠密性比敏感依赖性更缺乏直观性，但它却吸引了那些想在看似随机的系统中寻找到某种规律的人. 数学家们天性就希望寻找到某种对称性，而在一个混沌系统中出现大量的周期点是一种奇妙的数学现象，它甚至允许我们有点儿不可思议地来解释：“混沌是有序的”. 于是，研究周期点的稠密性是可以理解的.

另一方面，最近 Vellekoop 和 Berglund 在 [8] 给出一个已知定理的简化证明. 他们证明：对 $\boldsymbol{R}$ 中的任何有限或无限区间，传递性蕴含周期点的稠密性. 进一步，他们给出例子说明只有周期点的稠密性或者只有敏感依赖性都不足以独立地导出混沌定义中的其它条件. 因此，对于一维动力系统来讲，敏感依赖性和周期点的稠密性在混沌的定义中都是多余的.

无论是从历史的原因还是从条件的强弱上看，我们只需要研究传递性. 但是，传递性本身缺乏直观性 —— 很难用非数学的语言来解释它，即使解释了，看起来 (从直觉上，尽管不是从数学上) 还象是敏感依赖性，因为这两个假设都是说，从任何的初始值出发，最终都可以得到任意的结果. 本文的目的就是要问：“为什么一定要用传递性刻划混沌？ —— 为什么不能是其它假设？” 我们将给出一些新的假设条件，它们都起着与传递性一样的作用，但却更直观.

2 传递性的一种可能的替代

下述从理性上更使人满意的定义或许可以用来代替传递性.

定义. 称映射 $f: M \to M$ 是弱混同的 (weakly blending)，如果对任意的非空开集偶 $U, V \subset M$，存在 $k > 0$，使得 $f^k(U) \cap f^k(V) \neq \emptyset$. 称 f 是强混同的 (Strongly blending)，如果对任意的非空开集偶 $U, V \subset M$，存在 $k > 0$，使 $f^k(U) \cap f^k(V)$ 包含非空开子集.

作者最初是通过联想敏感依赖性的反面而考虑上述定义的：对初始条件的敏感依赖性是将两个靠近的点分开，而混同将两个分开的点拉到一起 (都是在 f 的同一次迭代作用下).

混同与传递性相比较具有明显的缺陷. 首先，任何混同的映射都不能是同胚，这自然而然地排除了许多有趣的高维混沌系统的研究 —— 例如“马蹄”映射 [4]. 而且，即使是低维系统，混同的映射也不一定是传递的，反之亦然. 考察下面两个例子：

例 1. 定义圆周映射 $f: S^1 \to S^1$ 如下：$f(\theta) = \theta + k$，其中 k/π 是无理数. 这一映射是无理旋转，它是传递的但不是混同的 (强混同或弱混同).

例 2. 设 f 是 [-1,1] 到自身的连续分段线性映射. f 还满足：

- $|f'(x)| > 2$，其中 $x \in [-1, 1]$ 是 f 的可微点；
- 映射 f 的图象中的每个顶点都交错地在直线 $y = x/2$ 和 $y = -x/2$ 上 (如下图).

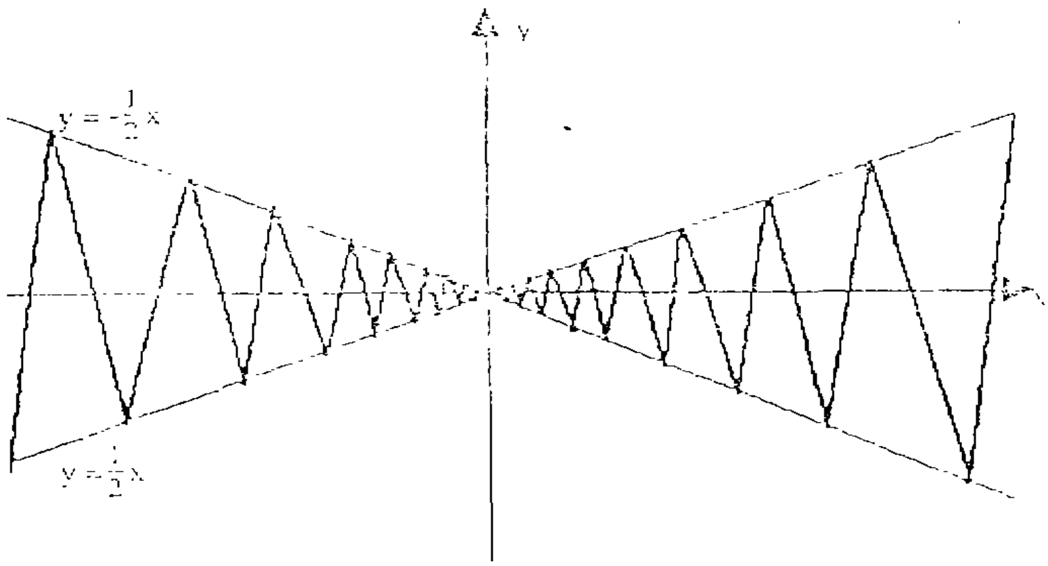

图1. 例 2 的图

f 显然不是传递的；事实上，每个点在 f 的作用下都趋向于原点. 另一方面，f 的足够大的斜率保证如果区间 I 和 $f(I)$ 都不包含 $\{0\}$, 那么 $f(I)$ 的长度大于 I 的长度. 于是每个区间经过有限次迭代，一定会包含原点 (唯一的不动点) 的一个邻域. 因此 f 是强混同的.

但是，上述两个例子共同的特征是映射都不满足周期点的稠密性 —— 事实上，例 1 中 f 没有周期点，例 2 中 f 只有一个不动点. 如果我们假定周期点的稠密性，那么传递性和混同在一维动力系统中，特别是研究混沌时，有紧密的联系. 本文的主要结果，定理 1 和定理 2 证明，若系统具有一个强排斥不动点且周期点是稠密的，则有强混同 $\Longrightarrow$ 传递性 $\Longrightarrow$ 弱混同.

3 主要定理

虽然一维动力系统已经得到深入的研究并建立了完善的理论，但下述定理可以利用简单的工具得到证明：我们只需要利用开集与连续映射的关系，紧性条件以及归纳法. 证明之所以简单是因为传递性和混同都是拓扑概念，证明的基本思想不越出点集拓扑和实分析.

这两个定理中易于证明的是：

定理 1. 设 M 是 R^n 的子集，连续映射 $f: M \to M$ 的周期点在 M 中稠密，若 f 是强混同的，则 f 是传递的.

证明：设 f 是强混同的，且周期点在 M 中稠密．任取两个非空开集 $U, V \subset M$．利用强混同的定义，存在 $k > 0$ 和非空开集 $N \subset M$，使得 $N \subset f^k(U) \cap f^k(V)$

为了方便起见，令 $\tilde{V} = f^{-k}(N) \cap V$：$\tilde{V}$ 是 V 中与 U 发生混同的点集．

由 f 的连续性，$\tilde{V}$ 是开的，因此由假设可以选取周期点 $x \in \tilde{V}$；不妨设 x 是周期为 p 的周期点，$p > k$（p 可以是 x 的最小正周期的倍数）．

由 $x \in \tilde{V}$ 的取法知 $f^k(x) \in N$，于是存在 $y \in U$ 满足 $f^k(y) = f^k(x)$．因此，简单的计算

$$f^p(y) = f^{p-k}(f^k(y)) = f^{(p-k)}(f^k(x)) = f^p(x) = x$$

保证了 $x \in f^p(U) \cap V \neq \emptyset$． ■

注记．要求 N 是开集是必要的．没有这个条件定理不成立．考察如下反例，映射

$$T(x) = \begin{cases} -2x - 2, & -1 \leq x \leq -\dfrac{1}{2} \\ 2x, & |x| < \dfrac{1}{2} \\ 2 - 2x, & \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

定义在区间 [-1, 1] 上．$T(x)$ 是帐篷映射的奇扩张 —— 限制在区间 [0, 1] 上是传递的（例如见 [5]）．因此 T 具有稠密的周期点，事实上，定义域中的每个开区间都最终映到包含原点的一个区间上去，于是 T 是弱混同的．但是，T 在整个区间 [-1,1] 上不是传递的：区间 (0,1) 永远也映不到 (-1, 0) 中任何子区间上去．

相反的论断是否正确呢？混沌映射一定是强混同的吗？答案是否定的，从下面例子可以看出．

例 3．将上面的映射倒转，得到 $F(x) = -T(x), x \in [-1, 1]$．这是一个混沌映射的有趣的例子，它具有所有偶数周期的周期点．但没有奇数周期的周期点．（事实上，若 x_0 是 T 的以 n 为周期的周期点，则 x_0 是 F 的以 $2n$ 为周期的周期点，从而 F 的周期点稠密）．读者自己作少数几次迭代，便知 F 是传递的．另一方面，设 U 是原点左侧的区间，V 是原点右侧的区间，对任意 $k > 0$，都有 $F^k(U) \cap F^k(V) = \emptyset$ 或 $\{0\}$．因此，F 只是弱混同的．

然而可以得到下面较弱的逆定理：

定理 2．设 I 为 $\boldsymbol{R}$ 的紧子集，$f: I \to I$ 是传递的连续映射，且 f 具有一个排斥不动点 x_0，则 f 是弱混同的．

为证明定理 2，需要下面两个引理：

引理 1．设 f 与 x_0 同上定义，则 x_0 在 I 中有无穷多个各次迭代原象点．

引理 2．设 f 与 x_0 同上定义，则 x_0 的各次迭代原象点在 I 中稠密．

事实上，三十年前 [6] 中就已给出了上述引理的更强形式的证明．设 f 是分段

单调映射，则对任意 $x \in I$，集合

$$\{y \in I \mid f^k(y) = x, k > 0\}$$

在 I 中稠密. 本文仅需要较弱的引理 (用弱的假设)，所以我们将适当地限制我们的证明.

定理 2 的证明. 我们要证明对 I 中的任意两个开集 U 和 V，存在 $n > 0$，使得 $f^n(U) \cap f^n(V) \neq \emptyset$. 引理 2 告诉我们 x_0 的各次迭代原象点是稠密的，故存在 $u \in U, v \in V$ 和 $j, k > 0$，满足 $f^j(u) = x_0 = f^k(v)$. 不失一般性，设 $k > j$；由于 x_0 是不动点，我们有 $f^k(u) = x_0 = f^k(v)$. 因此，$x_0 \in f^k(U) \cap f^k(V) \neq \emptyset$，定理证毕. ■

引理 1 的证明. 以下将用归纳法给出证明.

设 x_0 是给定的排斥不动点，给定一个有限集合 $X_x = \{x_{-n}, \ldots, x_{-1}, x_0\}$，其中 $f(x_k) = x_{k+1}$，$k = -n, \ldots, -1$. 如果 $n = 0$，则有 $X_0 = \{x_0\}$.

选取开集 $U \subset I$，使 $X_n \subset U$ 满足

(1) 若 $y \in U$，则 $f(y) \neq x_{-n}$(除非 $n = 0$ 和 $y = x_0$)；

(2) $f(U \backslash B_\epsilon) \cap B_\epsilon = \emptyset$.

(这里 B_ϵ 是以 x_{-n} 为心，ϵ 为半径的球形邻域.) 当 $n = 0$ 时，利用 x_0 是排斥不动点可以找到满足上述条件的 U.

以下将用传递性来证明 f 一定将 U 的补集中的点映射到任意地接近 x_{-n}：即对任意 $\epsilon > 0, f(U^c) \cap B_\epsilon \neq \emptyset$.

首先选取 U 充分小，使得 U^c 包含一个开集. 利用 f 的传递性，存在 $k \geq 0$，使 $f^{k+1}(U^c) \cap B_\epsilon \neq \emptyset$. 我们将证明 $k = 0$.

令 Y 是 U^c 中的点集，并且在 f 的 $k+1$ 次迭代下首次映入 B_ϵ. 即，

$$Y = \{y \in U^c | f^{k+1}(y) \in B_\epsilon : f^j(y) \notin B_\epsilon, \forall\, 1 \leq j \leq k\}.$$

显然有 $f^k(Y) \cap B_\epsilon = \emptyset$. 我们进一步断言，如果 $y \in Y$，则 $f^k(y) \in U^c$. 若不然，由假设 (2)，存在 $y \in Y$，使得

$$f^{k+1}(y) = f(f^k(y)) \in f(U \backslash B_\epsilon) \subset (B_\epsilon)^c.$$

这与 Y 的定义矛盾. 故 $f^k(Y) \subset U^c$，且 $f(f^k(Y)) \cap B_\epsilon \neq \emptyset$ —— 因此，由 $f^k(Y)$ 是 U^c 的子集，从而证明 $f(U^c) \cap B_\epsilon \neq \emptyset$.

最后，以上结论不依赖于 ϵ 的选取，因而，利用 U^c 的紧性，存在 $y \in U^c$，使 $f(y) = x_{-n}$.

通过上述讨论得到无穷序列 $\{x_{-k}\}_{k=0}^{\infty}$，适合 $f^k(x_{-k}) = x_0$. 这完成了引理的证明. ■

引理 2 的证明. 令 $X = \{y \in I | f^k(y) = x_0, k \geq 0\}$. 我们要证明 X 在 I 中稠密. 因为 f 是传递的，这就得到，X 在任一点的稠密性蕴含 X 处处稠密. 我们假设相反：X 是完全不连通的.

此时 X^c 是开集，$X^c = \cup_{k=1}^{\infty} I_k$, 其中 I_k 是 I 中的不交的开区间. 引理 1 说明 X 是无限的，因此存在无穷多个 I_k.

进一步，至少存在一个区间以 x_0 为端点，称这个区间为 I_1. 因为 x_0 是不动点，我们有 $f^2(I_1) \cap I_1 \neq \emptyset$—— 事实上，由 I_k 的构造知 $f^2(I_1) \subseteq I_1$.

另一方面，传递性要求 I_1 在 f 的迭代作用下与其它所有的 I_k 相交非空 —— 矛盾. 这一矛盾是由于假设 X 在 I 中不稠密引起的，于是证明了引理 2.

参 考 文 献

[1] J. Banks, J.Brooks, G.Gairns, G.David, and R. Stacey, *On Devaney's definition of chaos*, American Mathematical Monthly **99** (1992),332–334.

[2] Ray Bradbury, *A Sound of Thunder*, Golden Apples of the Sun, Doubleday & Company, Inc., 1953.

[3] Michael Crichton, *Jurassic Park: a novel*, Knopf, New York, 1990.

[4] Bob Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, second edition, Addisson-Wesley, 1989.

[5] Steven N. MacEachern and L.Mark Berliner, *Aperiodic chaotic orbits*, American Mathematical Monthly **100** (1993), 237–241.

[6] William Parry, *Symbolic dynamics and transformations of the unit interval*, Transactions of the American Mathematical Society **122** (1966), 368–378.

[7] Ivars Peterson, *The mathematical tourist: snapshots of modern mathematics*, Freeman, New York, 1988.

[8] M. Vellekoop and R. Berglund, *On Intervals, Transitivity = Chaos*, American Mathematical Monthly **101** (1994), 353–355.

(王兰宇 译　井竹君 校)