

代数曲面^{*)}

F. Hirzebruch

很高兴能到中国并在这里作报告。我想就代数曲面方面作几次演讲,从最基本的复流形定义讲起,一直到近年来的一些进展。这个报告也许可以看作是对不专门从事研究代数曲面的人们的一个介绍。许多地方,我仅仅叙述了定理的结果,证明可以在所引出的文献中找到。基本的参考文献是[GH], [H₁], [Z]。

1. 定义

复流形. X 是一个拓扑流形, 它有一个开覆盖 $\{u_i\}$ 及同胚 $\varphi_i: u_i \rightarrow v_i \subset \mathbb{C}^n$, 其中 \mathbb{C} 为复平面, v_i 开于 \mathbb{C}^n , 使得坐标变换 $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ 为全纯。

例如, **复射影空间** $P_n \mathbb{C}$ (即 \mathbb{C}^{n+1} 中所有经过原点的复直线的集合) 是一个复流形; 它的开覆盖 $u_i = \{[z] | z_i \neq 0\}$, 其中 $[z] = [z_0, \dots, z_n]$ 为 $P_n \mathbb{C}$ 的齐次坐标, u_i 通过非齐次坐标 $(z_0/z_i, \dots, \hat{z}_i/z_i, \dots, z_n/z_i)$ 与 \mathbb{C}^n 同胚。在复流形上可通过局部坐标, 定义在开子集上的全纯函数的概念, 这个定义与坐标选取无关。还可定义复流形 X, Y 之间的全纯映射 $\varphi: X \rightarrow Y$, 即对 Y 上任意局部定义的全纯函数 $f, f \circ \varphi$ 总为全纯。

紧复流形 X 称为**代数的** (更准确地说, 是射影代数的), 如果 X 能够全纯嵌入到某个 $P_n \mathbb{C}$ 中。由周纬良定理, $P_n \mathbb{C}$ 中的子流形 (更一般地, 解析子簇) 必为**代数集**, 即是 z_0, \dots, z_n 的一组齐次多项式的零点集合。复数维数等于 2 的代数流形叫 (光滑) 代数曲面。

复流形上也能定义**半纯函数**的概念。粗略地说, 就是可以局部表示为两个全纯函数的商的函数。在代数流形上, 半纯函数总是存在的, 它们构成一个域 $\mathcal{M}(X)$ 。例如当 $X = P_2 \mathbb{C}$ 时, $\mathcal{M}(X) = \mathbb{C}(z_1/z_0, z_2/z_0)$, 它对 \mathbb{C} 的超越度 $\text{tr. } d_{\mathbb{C}} \mathcal{M}(X) = 2$; 对一般复曲面 (二维复流形) 成立 $\text{tr. } d_{\mathbb{C}} (\mathcal{M}(X)) \leq 2$ 。它们之间关系由 Kodaira 的定理表明:

定理. 紧复曲面 X 为代数流形的充要条件为

$$\text{tr. } d_{\mathbb{C}} \mathcal{M}(X) = 2.$$

设 $f(z_0, \dots, z_n)$ 为一 d 次齐次多项式, 那么 $f=0$ 定义了 $P_n \mathbb{C}$ 中的一个 $n-1$ 维代数集

*) 这是 F. Hirzebruch 教授于 1981 年 9 月 21 日到 30 日在科学院数学所所作的一系列讲座的记录整理稿, 并经过作者本人的审阅。

$\{[z] | f(z)=0\}$. 如果在一个点有 $\frac{\partial f}{\partial z_0} = \dots = \frac{\partial f}{\partial z_n} = 0$, 称这个点为 $\{f=0\}$ 的奇点, 如果 $\{f=0\}$ 没有奇点, 就称它为光滑的, 它是一个代数流形. 例如, $z_0^d + z_1^d + z_2^d + z_3^d = 0$ 就是 P_3C 中的光滑代数曲面.

代数流形也可以内蕴地定义. 举两个例子来说明:

a) 超椭圆曲线 X , 是双值函数 $\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_n)}$ 的黎曼面, 其中 n 为偶数, a_i 互不相同. 它是 P_1C 的二重分歧复叠, 每个 a_i 对应于一个二次分歧点.

b) 分歧点集为曲线的 P_2C 的二重复叠

设 n 为偶数, $f(z_0, z_1, z_2)$ 为 n 次齐次多项式, 令 $C = \{f=0\}$ 为光滑曲线, 那么双值函数 $\sqrt{f/z_0^n}$ 定义了 P_2C 的一个二重复叠 X_f , 分歧点集为 C , X_f 是一个紧致和光滑的代数曲面, 而 $\pi: X_f \rightarrow P_2C$ 可以局部地表为 $w_1 = u^2, w_2 = v, C$ 为 $w_1 = 0$. 因为 $\mathcal{O}_m(X_f) = \mathcal{O}_m(P_2C)$, $(\sqrt{f/z_0^n})$ 的超越度为 2, 所以由 Kodaira 定理, X_f 是代数流形.

2. Euler 示性数和基数原理

黎曼面可以通过 Euler-Poincaré 示性数 e 进行完全的拓扑分类. 如果一个拓扑空间可剖分, 定义 $e(X) = c_0 - c_1 + c_2 - \dots$, 其中 c_i 表示剖分中 i 维单形的个数. 这是一个拓扑不变量.

在一定条件下, Euler 数满足:

$$e(X \times Y) = e(X) \cdot e(Y),$$

$$e(X \cup Y) = e(X) + e(Y) - e(X \cap Y).$$

和集合的基数间的关系相似, 故称为基数原理.

例1. 超椭圆曲线.

让 D_i 为中心在 a_i 的小圆盘, 且互不相交, 则有 $e(D_i) = 1, e(S^1) = 0, e(P_1) = 2$. 因此, $e(Y) = 2 - n$, 其中 $Y = P_1 - \bigcup_{i=1}^n D_i$. 另一方面, $X = \pi^{-1}(Y) \cup \bigcup \pi^{-1}(D_i)$, 因此 $e(X) = 2(2-n) + n = 4 - n$.

例2. P_2C 中的 d 次曲线 C (图 1).

对于曲线 C , 总存在平面上一个点 P (一般点), 以 P 为中心可将 C 投射到 P_1 上. 经过 P 点, 正好有 $d(d-1)$ 条直线与 C 相切, 每条这样的切线除切点外, 交 C 于 $d-2$ 个点, 因此 C 是 P_1C 的 d 重覆叠, 每个切点对应一个二重分歧点. 因而依基数原理, 有

$$e(C) = -d^2 + 3d.$$

例3. 平面的二重分歧覆叠 X_f .

这时, 曲线 $\{f=0\}$ 在 P_2C 中有一个管状邻域, 它的 Euler 数等于曲线的 Euler 数, 因此应用基数原理可得 $e(X_f) = 2 \times 3 - e(C) = 6 + n^2 - 3n$, 其中 $n = \deg f$ (这时我们用了管状邻域的边界为一个 s^1 -丛的事实; 自然它的 Euler 示性数为零).

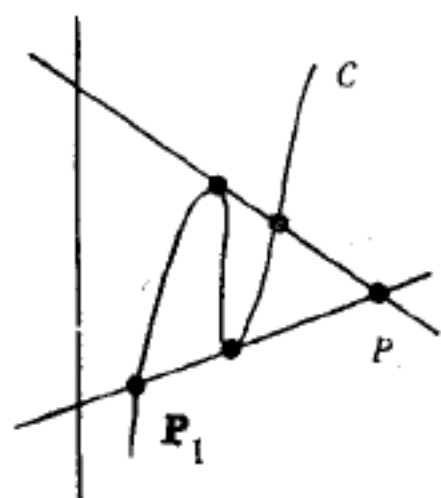


图 1

3. 几何亏格.

在代数曲面上, 我们可以定义全纯2-形式, 即局部可以表示为 $\omega = f(z_1, z_2) dz_1 \wedge dz_2$ 的微分形式, 其中 (z_1, z_2) 为局部坐标, f 为全纯函数; 这与黎曼面上的定义相仿. 如果有另外一个坐标 (w_1, w_2) , 那么 $\omega = f(z_1(w_1, w_2), z_2(w_1, w_2)) \frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(w_1, w_2)} dw_1 \wedge dw_2$.

可以证明所有的全纯2-形式构成一个 \mathbb{C} 上的有限维向量空间, 其维数称为曲面的几何亏格, 记为 p_g . 有一些代数曲面上没有任何全纯2-形式 (例如 $\mathbb{P}_2\mathbb{C}$), 即 $p_g = 0$, 然而半纯2-形式总存在, 因为任取两个独立的半纯函数 f_1, f_2 , 则 $\omega = df_1 \wedge df_2$ 就是一个半纯2-形式.

有时, 我们能从全纯 n -形式的一般表达式来计算 p_g , 其中 n 为流形的维数. 下面是两个例子.

例1. 超椭圆曲线 X .

设 $\omega = g z_0^2 / \sqrt{f} \cdot d(z_1/z_0)$, 其中 $f = (z_1 - a_1 z_0) \cdots (z_1 - a_n z_0)$, g 为一个 $\frac{1}{2}n - 2$ 次的齐次多项式. 显然 ω 是个半纯微分形式. 可以断言, 这样的 ω 必为全纯.

事实上, $\mathbb{P}_1\mathbb{C} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, 令 $z = z_1/z_0$ 为 \mathbb{C} 的非齐次坐标. 于是在 \mathbb{C} 中, $\omega = \tilde{g}(z) / \sqrt{f(z)} \cdot dz$. 如果 \tilde{g} 在 \mathbb{C} 上全纯, 那么 ω 除在分歧点 $\pi^{-1}(a_i)$ 外也全纯. 在 $\pi^{-1}(a_i)$ 和 a_i 附近分别引进局部坐标 w 和 u , 使得 $w=0$ 表示分歧点, 即 $w = \sqrt{f}$, $u = w^2$. 在这个坐标系下,

$$\omega = \tilde{g}(w^2) / w d(w^2) = 2\tilde{g}(w^2) dw,$$

故为全纯. 至于在 ∞ 点, 令 $\zeta = \frac{1}{z}$, 那么在 $\zeta=0$ 附近

$$\omega = \tilde{g}\left(\frac{1}{\zeta}\right) / \sqrt{f\left(\frac{1}{\zeta}\right)} \cdot \frac{-d\zeta}{\zeta^2}.$$

因为 $\sqrt{f\left(\frac{1}{\zeta}\right)}$ 在 $\zeta=0$ 是 $\frac{1}{2}n$ 次的极点, 所以 ω 为全纯的充要条件是 $n \geq 4$ 且 \tilde{g} 在 ∞ 至多只有 $\frac{1}{2}n - 2$ 次的极点.

因此, 我们证明了 ω 在 X 上为全纯的充要条件是 \tilde{g} 在 \mathbb{C} 为全纯而在 ∞ 最多是 $\frac{1}{2}n - 2$ 阶的极点, 这就是说 $\tilde{g}(z)$ 是一个次数 $\leq \frac{1}{2}n - 2$ 的多项式, 因而 $p_g = \frac{1}{2}n - 1$.

例2. 平面的分歧覆叠 X_f .

设 f 是一个 n 次非异齐次多项式, 其中 $n \geq 6$ 为偶数. 由隐函数定理, 可在分歧点附近引进坐标 (w, v) , 使得 $w = \sqrt[n]{\frac{f}{z_0^n}}$, $\pi(w, v) = (x^2, y)$, (x, y) 为 $\mathbb{P}_2\mathbb{C}$ 上的局部坐标.

令 $\omega = \frac{h}{\sqrt{f}} z_0^3 d(z_1/z_0) \wedge d(z_2/z_0)$, 其中 h 为 (z_0, z_1, z_2) 的齐次多项式, 次数为 $\frac{1}{2}n - 3$.

容易验证 ω 在 X_f 上全纯. 因此, $P_g \geq \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2} - 1\right)\left(\frac{n}{2} - 2\right)$, 右端正是 $\frac{1}{2}n - 3$ 次齐次多项式组成的线性空间的维数.

后面将证明上式是一个等式, 即所有 X_f 上的全纯2-形式必为这样的 ω .

4. 典则除子

设 C_i 为代数曲面 X 上的不可约曲线, 则有限形式和 $\sum m_i C_i$, $m_i \in \mathbb{Z}$, 称为 X 上的一个除子. 如果 f 是 X 上的一个半纯函数, 局部可表为 $f = \frac{g}{h}$, 则可定义一个除子 $(f) = (f)_0 - (f)_\infty$, 其中 $(f)_0, (f)_\infty$ 分别表示使 g 与 h 为 0 的那些不可约曲线的集合, 每条曲线都计算了重数. [见 [GH], 130 页]

X 上所有的除子集自然地构成一个 Abel 群, 记为 $\text{Div}(X)$.

对两个除子 D_1, D_2 , 如果存在一个半纯函数 f , 使得 $D_1 - D_2 = (f)$, 就称 D_1, D_2 线性等价, 这是除子间的一个等价关系 \sim , 并称 $\mathcal{D} = \text{Div}(X) / \sim$ 为除子类群.

设 ω 是 X 上的一个半纯2-形式, 我们可以定义除子 (ω) . 设 $\{U_i\}$ 为 X 的坐标覆盖, 在每个 U_i 中, $\omega = f_i dz_1 \wedge dz_2$, 那么 $\{f_i\}$ 便定义了 X 上的一个除子, 记为 (ω) . 因为任意两个半纯形式的商为一个半纯函数, 所以它们决定的除子线性等价. 这个等价类记为 K , 称为 X 的典则除子.

例1. $X = \mathbb{P}_2\mathbb{C}$.

设 C 为一条 n 次不可约曲线, 由 $f=0$ 定义, 则 f/z_0^n 是 $\mathbb{P}_2\mathbb{C}$ 上的半纯函数, 因此 $C \sim nL$, 其中 $L = \{z_0=0\}$. 因而 $\mathcal{D} \cong \mathbb{Z}$.

计算典则除子 K 如下: 在 $U_0 = \{z_0 \neq 0\}$ 中取半纯微分形式 $\omega = d(z_1/z_0) \wedge d(z_2/z_0)$, 令 $x = z_1/z_0, y = z_2/z_0$ 为仿射坐标. 在 $U_1 = \{z_1 \neq 0\}$ 中设仿射坐标是 (u, v) , 则 $u = \frac{1}{x}, v = \frac{y}{x}$, 于是

$$\omega = -\frac{1}{u^3} du \wedge dv \quad \text{在 } U_0 \cap U_1 \text{ 中成立, 即 } (\omega) = -3L.$$

我们还可由此推出 $P_g = 0$.

例2. $X = X_f$.

因为 $\pi: X_f \rightarrow \mathbb{P}_2\mathbb{C}$ 为全纯, 所以 $\mathbb{P}_2\mathbb{C}$ 上任一半纯二次形式可拉回到 X_f 上的半纯二次形式 $\pi^*\omega$, 应用前面提到的局部坐标 (ω, v) , 则有

$$(\pi^*\omega) = (\omega) + \frac{1}{2}C \sim -3L + \frac{n}{2}L = \left(\frac{n}{2} - 3\right)L.$$

因此 X_f 上的典则线丛便是 $(\pi^*H)^{\frac{n}{2}-3}$, 其中 H 是 $\mathbb{P}_2\mathbb{C}$ 上的超平面丛 [GH, 145 页], 而 $(H)^{\frac{n}{2}-3}$ 的全纯截影空间对应于次数为 $\frac{1}{2}n-3$ 的齐次多项式全体, 故 $P_g = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}n-1\right) \times \left(\frac{1}{2}n-2\right)$.

5. 除子的相交数 [GH, 第 0 章, § 4]

在代数曲面 X 上, 两条不同的不可约曲线 C_1 与 C_2 可能不相交, 但如果相交, 必交于有限个点. 对于每个交点, 我们能给出一个相应的正整数, 称为这个交点的重数. 用 $C_1 \cdot C_2$ 表示所有的交点按重数计算的个数, 称为 C_1 与 C_2 的相交数. 这是一个非负整数, 并且当 C_1, C_2 各在其除子类中变化时不变. 因此, 我们得到一个双线性形式:

$$9 \times 9 \rightarrow \mathbb{Z}.$$

这里,当 $C_1 = C_2$ 时,我们可以在 C_1 的等价类中选取一个 C' , 使 $C' \cdot C_1 = 1$, 而定义 $C_1 \cdot C_1 = C' \cdot C_1$.

例如,在 $\mathbb{P}_2\mathbb{C}$ 上, L 为一条直线, $L \cdot L = L \cdot L' = 1$, 其中 L' 为另一条不同于 L 的直线.

在 $\mathbb{P}_2\mathbb{C}$ 上, 设 d_i 表示 C_i 的次数, $i=1,2$, 则 $C_1 \cdot C_2 = d_1 \cdot d_2$, 这称为平面曲线的 Bezout 定理.

正则除子 K 的自交数 K^2 是 X 的一个重要不变数. 例如 $K^2(\mathbb{P}_2\mathbb{C}) = (-3L)^2 = 9L^2 = 9$, $K^2(X_f) = 2\left(\frac{n}{2} - 3\right)^2 L^2 = 2\left(\frac{n}{2} - 3\right)^2$. 其中因子 2 是由于 π 为二重复叠映射的缘故.

6. 符号差定理及 Noether 定理

我们知道, 一个光滑的代数曲面 X 是一个可定向的紧致四维流形, $b_i = \text{rank}_{\mathbb{Z}} H_i(X, \mathbb{Z})$ 称为第 i 个 Betti 数, 而它的 Euler 数 $e(X) = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4$.

由拓扑学中的 Poincaré 对偶定理, 有 $D: H^q(M, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H_{n-q}(M, \mathbb{Z})$, 其中 n 为定向流形的维数, 因此 $e(X) = 2 - 2b_1 + b_2$.

另外, 从上同调的 cup 积, 有双线性形式:

$$H^2(X, \mathbb{Z}) \times H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}.$$

它诱导出在 $V = H^2(X, \mathbb{Z}) / \text{Tor}$ 上的整值双线性形式, 从而给出了 $V \otimes \mathbb{R}$ 上的一个二次型. 设它的正负特征值的个数分别为 b^+, b^- , 则 $b_2 = b^+ + b^-$.

$b^+ - b^-$ 是一个重要的拓扑不变量, 称为 X 的符号差. 由 Poincaré 对偶定理, $H^2(X, \mathbb{Z}) \cong H_2(X, \mathbb{Z})$. 因此以上的结果可以表为 $H_2(X, \mathbb{Z}) \times H_2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$. 这样的双线性形式, 称为同调类的相交数.

X 上的不可约曲线 C 是一个紧子集, 并且去掉所有奇点 (有限个) 是一个连通流形, 所以它是一个 2 维闭链, 从而每个除子都是一个 2 维闭链. 并且可以证明, 线性等价的除子给出同调的二维闭链, 因此将 C 对应 C 所表示的同调类 $[C]$, 便得到 $\theta \rightarrow H_2(X, \mathbb{Z})$, 这个同态使得相交数不变: $C_1 \cdot C_2 = [C_1] \cdot [C_2]$, 也就是说, 几何相交数等于拓扑相交数.

由映射 $\theta \rightarrow H_2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(X, \mathbb{R}) \xrightarrow{D^{-1}} H^2(X, \mathbb{R})$ 及 De Rham 定理, 对每一个除子类 $r \in \theta$, 可以得到 $H^2(X, \mathbb{R})$ 中一个元, 它由 2-形式 η 表示, 满足

$$\int_r \omega = \int_X \omega \wedge \eta,$$

其中 ω 为 X 上任意的闭 2-形式.

对于复流形的符号差, 有公式:

$$b^+ - b^- = \frac{1}{3}(K^2 - 2e).$$

这就是所谓的符号差定理. 它是作者本人的一个定理的特殊情形. [H_1 , 86 页].

定义连通代数曲面的算术亏格 $\chi(X)$ 为 X 作为复流形的 Euler 示性数, 即 $\chi = 1 - \frac{1}{2}b_1 + p_g$.

那么, 我们有著名的 Max Noether 公式 (他便是 Emmy Noether 的父亲):

$$\chi = \frac{1}{12}(K^2 + e).$$

这是一个奇妙的定理。因为由它及符号差定理可以得到:

$$\chi = \frac{1}{4}(e + b^+ - b^-) \text{ 及 } 1 + 2P_g = b^+.$$

这表明, 虽然 P_g, K^2, χ 都是由复结构定义的, 但它们全是拓扑不变量。

对曲面 X_f , 我们来验证 Noether 公式。

已知 $\mathbf{P}_2\mathbf{C}$ 中的 n 次曲线的补空间的基本群为 \mathbf{Z}_n (参照[Z], 164页), 因而 X_f 中的分歧曲线的补空间必为单连通; 那么, 由 Seifert-Van Kampen 定理, X_f 也为单连通。所以 $\chi = 1 + p_g = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2} - 1\right)\left(\frac{n}{2} - 2\right)$, 同时 $e = n^2 - 3n + 6, K^2 = 2\left(\frac{n}{2} - 3\right)^2$ 。

于是 Noether 公式便成为:

$$\frac{1}{12}\left(n^2 - 3n + 6 + 2\left(\frac{n}{2} - 3\right)^2\right) = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2} - 1\right)\left(\frac{n}{2} - 2\right).$$

7. Picard 数

我们已经知道, 一个光滑代数曲面的不变量 K^2, P_g 及 χ 都是拓扑不变量, 即仅依赖于曲面的拓扑结构, 现在我们来介绍一个有名的新的不变量——Picard 数 ρ , 它对任一个光滑代数曲面都有定义并且本质地依赖于曲面的复结构。

正如在第 5 节中指出的, 曲面 X 上的一条代数曲线代表了一个整系数的 2 维闭链, 称它为代数闭链。让 A 表示 $H_2(X, \mathbf{Z})$ 中代数闭链生成的子群。它就是除子类群 \mathcal{D} 在 $H_2(X, \mathbf{Z})$ 中的像。称 A 的秩 ρ 为 X 的 Picard 数。

对于一个给定的代数曲面, 要计算出 ρ 是非常困难的。但是我们还是能给出一些估计。为此, 先叙述一些 Kähler 流形的性质 (参照[GH, 第116页])。

作为 Kähler 流形的光滑代数曲面, 它的复域上的上同调群有下面的 Hodge 分解:

$$H^2(X, \mathbf{C}) = H^{1,1}(X) \oplus H^{2,0}(X) \oplus H^{0,2}(X),$$

其中 $H^{2,0}(X)$ 表示 X 上全纯 2-形式所组成的空间, 因而它的维数为 P_g , 同时在 $H^2(X, \mathbf{C}) = H^2(X, \mathbf{R}) \otimes \mathbf{C}$ 中, $H^{2,0}(X)$ 与 $H^{0,2}(X)$ 互为 \mathbf{C} -共轭。从而

$$\dim_{\mathbf{R}} H^2(X, \mathbf{R}) \cap (H^{2,0}(X) \oplus H^{0,2}(X)) = 2P_g.$$

现在, 我们能够得到 ρ 的一个上界:

$$\rho \leq b^- + 1.$$

事实上, 一个实的 2-形式在 X 的 2 维闭链上的积分给出 $H_2(X, \mathbf{R})$ 与 $H^2(X, \mathbf{R})$ 的双线性函数, 由 de Rham 定理, 这个函数是非异的。但是 $H^{2,0}(X) \oplus H^{0,2}(X)$ 中的任一 2-形式在任意代数曲线上为 0, 因此 $A \otimes \mathbf{R}$ 在 $H^2(X, \mathbf{R})$ 中的化零空间包含了 $H^2(X, \mathbf{R}) \cap (H^{2,0}(X) \oplus H^{0,2}(X))$, 它在 \mathbf{R} 上的维数为 $2P_g$ 。因此, 由 $b_2 - 2P_g = b^- + 1$, 得到

$$\rho = \dim_{\mathbf{R}} A \otimes \mathbf{R} \leq b_2 - 2P_g = b^- + 1.$$

另外, 再考虑全纯嵌入: $X \hookrightarrow \mathbf{P}_N\mathbf{C}$ 。让 C 表示 X 的超平面截影, 那么 C 便是代表了一个闭链, 并且 $0 < C^2 = (X \text{ 在 } \mathbf{P}_N\mathbf{C} \text{ 中的次数})$ 。如果 X 是 $\mathbf{P}_N\mathbf{C}$ 中的一个一般 (generic) 曲面, 则 C 生成 $A \otimes \mathbf{R}$, 即 $\rho = 1$ 。自然, $\rho > 1$ 的情形使人更感兴趣。稍后, 将给出一些例子。

相应于 $H^2(X, \mathbf{C})$ 的 Hodge 分解, 我们有 $H^2(X, \mathbf{R})$ 的正交分解:

$$H^2(X, \mathbf{R}) = H^{1,1}(X, \mathbf{R}) \oplus H^2(X, \mathbf{R}) \cap (H^{2,0}(X) \oplus H^{0,2}(X))$$

再由第 6 节中给出的 Poincaré 对偶映射:

$$D^{-1}: H_2(X, \mathbb{R}) \rightarrow H^2(X, \mathbb{R}),$$

则因为对 $r \in A, \omega \in H^{2,0}(X)$, 我们有 $\int_r (\omega + \bar{\omega}) = 0$, 于是 $D^{-1}r \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$. 另外, 我们还有

$\int_X (\omega + \bar{\omega}) \wedge (\omega + \bar{\omega}) > 0$, 其中 $\omega \in H^{2,0}(X)$. 这是因为在局部坐标 (z_1, z_2) 下, 可写出 $(\omega + \bar{\omega}) \wedge$

$(\omega + \bar{\omega}) = f \cdot \bar{f} dz_1 \wedge dz_2 \wedge d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2$. 因此由上同调的内积 (cup 积) 定义的二次型在 $H^2(X, \mathbb{R}) \cap (H^{2,0}(X) \oplus H^{0,2}(X)) \oplus \{C\}$ 上为正定 (注意到 $C^2 > 0$). 又因为 $b^+ = 2P_g + 1$, 那么在 $\{C\}$ 在 $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ 中的正交补 $\{C\}^\perp$ 上, 这个二次型为负定. 这样, 便证明了 **Hodge 指数定理**:

$A \otimes \mathbb{R}$ 上由相交数定义的二次型为非退化, 并且它的符号具有 $(1, \rho-1)$ 型.

我们一般遇见的 **Hodge 指数定理** 有两个 (参看 $[H_1]$, 第125页), 事实上另一个指数定理可以看作是上面定理的推论:

如果在光滑曲面 X 上, 存在曲线 C_1, C_2, \dots, C_m , 它们之间的相交数为负, 则 $\rho \geq m+1$.

8. 奇点

X_f 仍然表示 $\mathbb{P}_2\mathbb{C}$ 的二重分歧复叠, 它的分歧点集为一条光滑的 n 次曲线. 在前面, 已经讨论过它的拓扑和代数性质, 现在我们让 f 变动, 那么 X_f 的复结构将随之变化. 可以证明, 只要 f 保持光滑地变动, 所有的 X_f 都相互微分同胚.

但是, 当 f 具有奇点时又会怎样呢?

显然, 对于 $f=0$ 的每个奇点, X_f 也会出现奇点. 假设在 $\mathbb{P}_2\mathbb{C}$ 的局部坐标下, 曲线由 $g(x, y)=0$ 定义, 并且 $(0,0)$ 是一个奇点. 这时从局部看, X_f 可以由 $z^2=g(x, y)$ 定义, 所以有奇点 $(0,0,0)$. 这时 X_f 再也不是一个复流形了, 它是一个射影代数集. 令 X_s 表示 X 的奇点集, 那么 $X-X_s$ 是一个 X 的开子集, 并且是一个非紧致的复曲面. 我们称复射影空间中的不可约代数集为 **代数曲面**. 代数曲面的奇点能够被分解, 准确地说, 代数曲面 X 的 **奇点分解** 是指存在一个光滑代数曲面 Y 及全纯映射 $\pi: Y \rightarrow X$, 使得

a) π 为逆紧.

b) $\pi: \pi^{-1}(X-X_s) \rightarrow X-X_s$ 为双全纯同胚.

基本定理是:

定理. 对任一个有奇点的代数面 X , 总存在一个分解 $\pi: Y \rightarrow X$, 使得 Y 是一个极小曲面, 它称为 X 的极小模型并且在双全纯同胚下唯一 (参看 $[S]$ 第71页).

一个表面上的有理曲线, 如果它的自交数为 -1 , 就称为 **例外曲线**; 没有例外曲线的曲面就称为一个 **极小曲面**. 如果 $p \in X$ 是奇点, 则 $\pi^{-1}(p)$ 为一些不可约曲线的并, 并为连通; 称它为 p 点的 **例外构形**.

X_f 的极小模型可能与拓扑流形 X_g 不同胚, 其中 g 是非异的 n 次多项式. 但是当 $f=0$ 的奇点为“简单”时, 由 Brieskorn 的理论 $[S]$, 可以证明 Y 与 X_g 在同一族中. 这里, 我们称两个紧复流形 X, X_0 属于同一族是指存在一个 3 维复流形 Z 及逆紧全纯淹没 (submersion) $Z \rightarrow D$, 其中 D 为单位圆盘, 使得对某两个点 $p, p_0 \in D$ 有 $X = \pi^{-1}(p)$, $X_0 = \pi^{-1}(p_0)$.

在同一族中的代数曲面相互微分同胚, 但一般并不是双全纯的.

定义. 射影平面上的一条曲线的奇点 p 称为 **简单的**, 如果在适当的局部坐标 (x, y) 下, $p=(0,0)$, 而曲线可局部地表示为下列方程式:

$$\begin{aligned}
A_k: (k \geq 1), & \quad x^2 + y^{k+1} = 0, \\
D_k: (k \geq 4), & \quad y(x^2 + y^{k-2}) = 0, \\
E_6: & \quad x^3 + y^4 = 0, \\
E_7: & \quad x(x^2 + y^3) = 0, \\
E_8: & \quad x^3 + y^5 = 0.
\end{aligned}$$

为什么用这些李代数中的符号? 我们很快便能明白。

设 $f=0$ 为一条偶次曲线, 它只具有简单奇点。 f 可能是可约的, 但这时要求它的不可约分枝只具有重数 1, 因此 X_f 只有有限个奇点, 而且在每个奇点附近, X_f 由方程 $z^2=g(x, y)$ 定义, 其中 g 就是上面列出的多项式中的一个, 我们称这类曲面奇点为**有理二重奇点**或称为**简单奇点**。

有理二重奇点的研究已有很长的历史了, 它们也有许多不同的方法来描述。例如, 它们 1-1 对应于 $SL(2, \mathbb{C})$ 的有限子群的共轭类。 $SL(2, \mathbb{C})$ 的一个有限子群全纯地作用在 \mathbb{C}^2 上, 它的轨道空间 \mathbb{C}^2/Γ 在 $(0, 0)$ 点是一个孤立奇点, 对应情形由下表给出 (F. Klein 就已经得到了):

$$\begin{aligned}
A_k: & \quad k+1 \text{ 阶循环群,} \\
D_k: & \quad 4(k-2) \text{ 阶的二重两面体群,} \\
E_6: & \quad 24 \text{ 阶的二重四面体群,} \\
E_7: & \quad 48 \text{ 阶的二重八面体群,} \\
E_8: & \quad 120 \text{ 阶的二重十二面体群.}
\end{aligned}$$

其他的描述可参看[S], 第71页。

定理。 $p \in X$ 是曲面 X 的简单奇点的充要条件是 p 的例外构形对应于李代数 A_k, D_k, E_6, E_7 或者 E_8 的 Dynkin 图。

换句话说, 每个指数为 k 的简单奇点对应于 k 条有理曲线组成的例外构形, 这些曲线用 Dynkin 图中的点表示, 任两条曲线相交的充要条件是代表它们的点可以用线段连起来。这时曲线间的相交数为 1 而自交数为 -2。

相应的 Dynkin 如图 2 所示:

李代数 A_k, D_k, E_6, E_7, E_8 是仅有的具有相等根长的单纯李代数。在任一个例外构形中曲线的相交数矩阵为负定, 这是 Du Val 在 1934 年已经证明了的。

E_8 型奇点与微分拓扑中的怪球紧密相关。

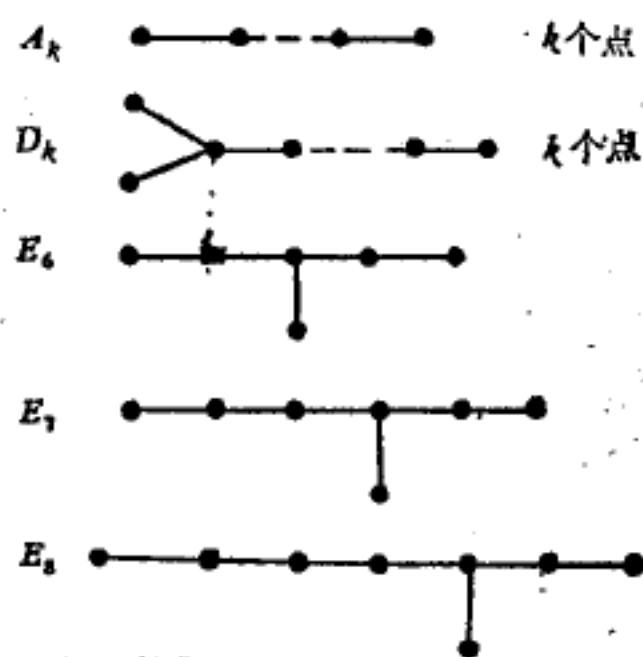


图 2

9. 极大化曲线

设 f 是个偶次 n 的多项式, 具有简单奇点, 则 X_f 是一个具简单奇点的曲面。我们将指数 k 的奇点算作 k 个奇点, 那么定义曲线或曲面的**奇点数为奇点的带权和**, 以 $\mu(f)$ 表示。

数 μ 有一个与 n 有关的上界。事实上, 在 X_f 的极小模型上, 例外构形含有 $\mu(f)$ 条有理曲线, 具有负相交数。因为 Y 与 X_g 为保定向的微分同胚, 所以 $\mu(f) \leq b^{-1} = \frac{3}{4}n^2 - \frac{3}{2}n + 1$ 。

使 $\mu(f) = \frac{3}{4}n^2 - \frac{3}{2}n + 1$ 的曲线称为极大化的。找出所有的极大化曲线是很有趣的。

对于 $n=2, 4$, Ulf Persson 给出了一个完全的表:

i) $n=2, b^-=1$.

这时极大化曲线为 2 条直线的并, 其交点是个 A_1 奇点, 如图 3.

ii) $n=4, b^-=7$.

(a) 三条直线交于一点, 第四条是条一般直线, 如图 4.

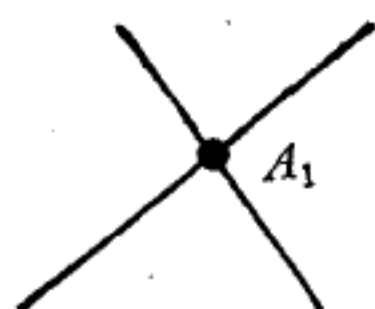


图 3

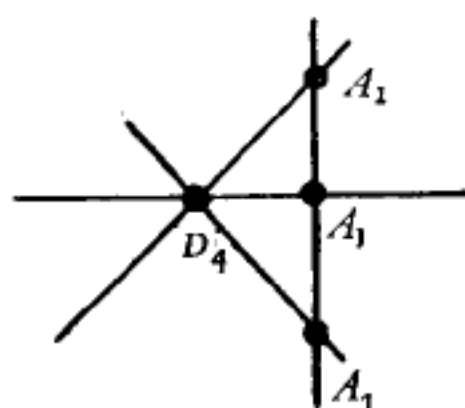


图 4

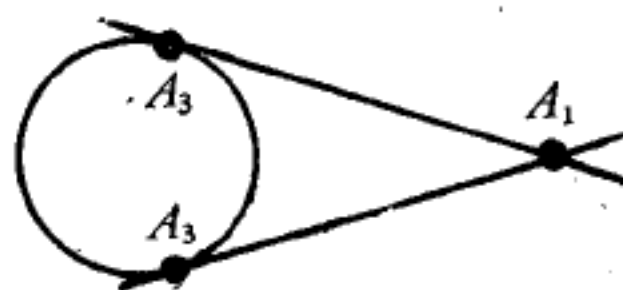


图 5

(b) 光滑二次曲线与两条切线(如图 5).

(c) 两条二次曲线相交于一个 4 重点, 即一个 A_7 奇点.

(d) 有一个尖点的三次曲线和这点的切线, 即一个 E_7 奇点(图 6):

对于 $n \geq 6$, 虽然没有一个完全的表示, 但可以给出一些例子.

iii) $n=6, b^-=19$.

(a) 完全四边形(如图 7).

(b) 两个圆和一个椭圆, 其中两个圆相切, 并且其中每一个都与椭圆交于一个 4 重点; 另外, 这两个圆还相交于无穷远于两个 A_1 奇点, 这没有在图上表示出来(如图 8).

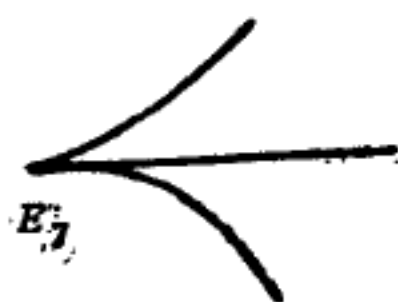


图 6

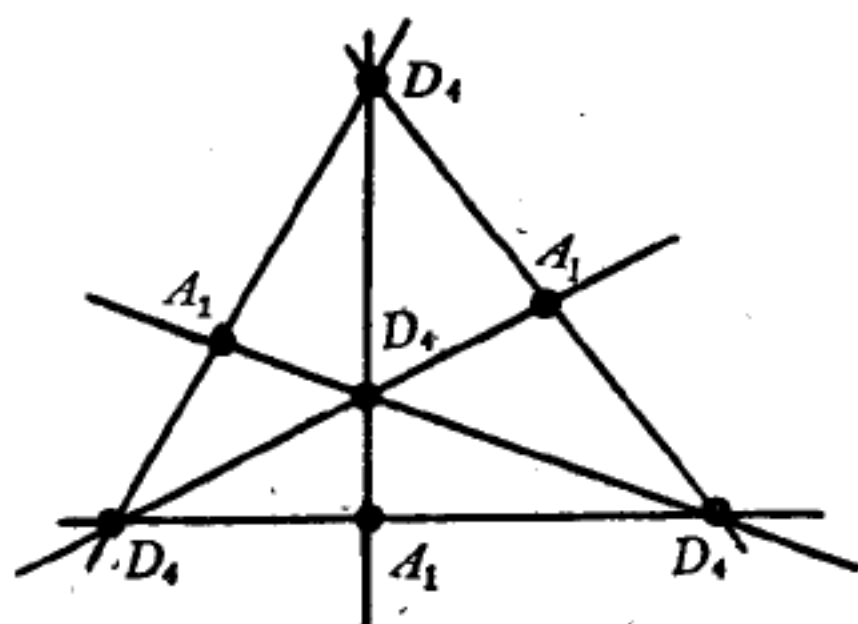


图 7

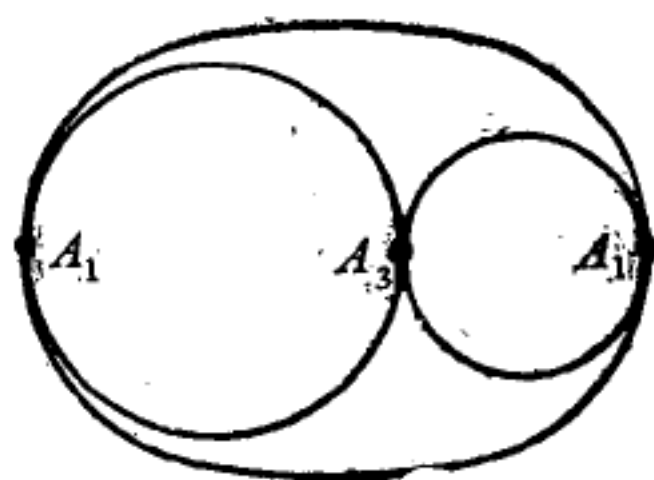


图 8

iv) $n=8, b^-=37$.

(a) 如图 9.

(b) 在 iii) (b) 中的极大化的六次曲线中, 加上两条直线: 一条是无穷远直线, 另一条穿过三个接触点. 在无穷远处有三个 A_1 及两个 D_4 奇点. 它们是直线与椭圆在无穷远处的交点及另一直线在无穷远与两个圆的交点(图 10).

(c) 在半径为 3 的圆圈上, 滚动一个半径为 1 的小圆, 在小圆上一个固定点的轨迹称为 Steiner 曲线, 它的次数为 4, 它的三个尖点切线交于一个点. 那么 Steiner 曲线、三条尖点切线和一条无穷远直线构成一条 8 次曲线. 在无穷远直线上有两个 A_2 奇点, 三个 A_1 奇

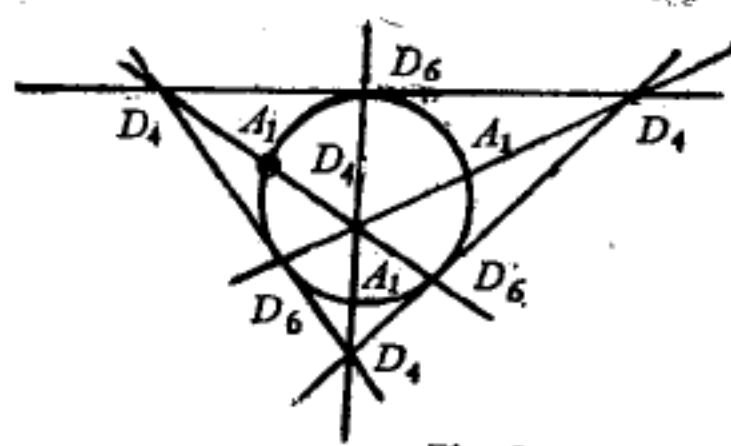


图 9

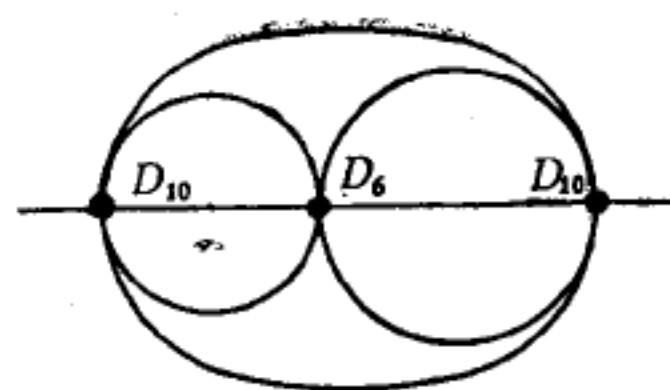


图 10

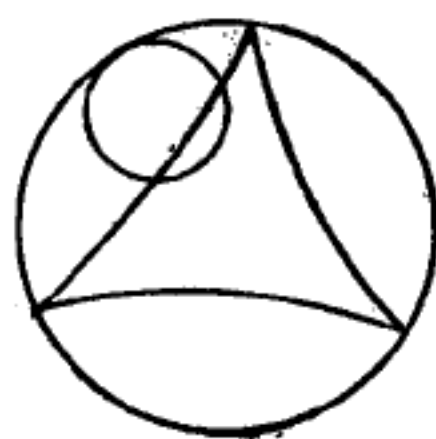


图11 Steiner 曲线

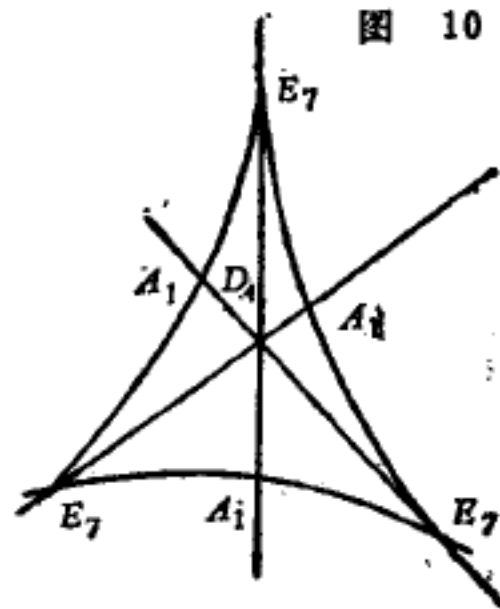


图 12

点 (即尖点切线与无穷远直线的交点, 其他奇点已在图11上标明)。

由上面最后两节的讨论, 立刻可以得到如下结论: 如果 $f=0$ 是一条极大化曲线, 则 X_f 的极小模型具有 Picard 数 $\rho=b^-+1$ 。

极大化曲线是很有趣的, 但是, 是否存在10次的极大曲线仍然不知道。

注¹⁾ Ulf Persson 最近在访问波恩时, 对每个偶数 n 都构造了一个 n 次极大化曲线。他是这样构造的: 设 (z_0, z_1, z_2) 与 (w_0, w_1, w_2) 为 P_2C 的齐次坐标, 考虑映射 $w_i = z_i^k$, 即

$$\rho_k: (z_0, z_1, z_2) \rightarrow (z_0^k, z_1^k, z_2^k)$$

ρ_k 为 P_2C 到自己的映射。这个映射的分歧点集合为坐标三角形 $z_0=0, z_1=0, z_2=0$, 映射度为 k^2 。让 E 表示与坐标三角形相切的二次曲线, 则 ρ_k^*E 为一条 $2k$ 次曲线, 具有 $3k$ 个 A_{k-1} 型奇点。例如当 $k=4$, ρ_k^*E 由 4 条有双切线的二次曲线组成。那么在坐标三角形 $w_0=0, w_1=0, w_2=0$ 上, 有12个接触点。

如果在 ρ_k^*E 上添加两条直线, 则得到一条 $n=2k+2$ 次曲线, 具有

$2k$ 个 D_{k+2} 型奇点,

k 个 A_{k-1} 型奇点,

1 个 A_1 型奇点。

对 $n=2k+2$, 我们有

$$2k(k+2) + k(k-1) + 1 = 3k^2 + 3k + 1 = \frac{3}{4}n^2 - \frac{3}{2}n + 1.$$

10次极大曲线的图形如下:

10. 果园问题

在射影平面上的最简单的 n 次曲线大概要算 n 条直线构成的曲线了。如果我们假设曲线只有简单奇点, 那么这种曲线的奇点只可能是 A_1 型 (两条直线的交点) 和 D_4 型 (三



图 13

1) 这是作者后来 (1981. 10) 从波恩寄来的材料。

条直线的交点), 因此, 没有 4 条直线交于一点。让 σ_2 与 σ_3 分别表示 A_1 型与 D_4 型的奇点个数, 那么, 显然有 $\sigma_3 \leq \left[\frac{1}{6}n(n-1) \right] \sigma_2 + 3\sigma_3 = \frac{1}{2}n(n-1)$ 。因此 $\mu(f) = \sigma_2 + 4\sigma_3 = \frac{1}{2}n(n-1) + \sigma_3$ 。

那么求极大化的 n 条直线的问题便归结为:

在 P_2C 上找出 n 条直线, 它们中无四条有公共交点并使尽可能多的三条直线有公共的交点。

这个问题的对偶形式是:

在 P_2C 上找出 n 个点, 其中无 4 个点共线, 并使通过三个点的直线个数 σ_3 为极大。

这是我在研究平面的二重复叠时发现的问题, 令人惊讶的, 它竟是一个古老的问题! 从文献至少可以追溯到 1821 年 (Jackson, J., Rational Amusement for Winter Evenings, Longman, Husrt, Rees, Orm and Brown, London 1821)。这个问题是:

在一个果园里, 要种 n 棵苹果树, 使得没有四棵树排成一行, 并使尽可能多的三棵树排成一行。

当然, 这个果园应该看作为实平面。如果我们在复平面上提这个问题, 答案与实的情形不同。

设 $t(n), s(n)$ 分别表示在实平面和复平面上三棵树排成一行最大数, 其中 n 表示果园中的树的棵数, 显然 $t(n) \leq s(n)$ 。

极大曲线 ii) (a) 及 iii) (a) 表明:

$$t(4) = s(4) = 1, \quad t(6) = s(6) = 4.$$

不等式 $\mu(f) \leq \frac{3}{4}n^2 - \frac{3}{2}n + 1$ 给出 $s(n)$ 另一个上界:

$$s(n) \leq \left(\frac{n}{2} - 1 \right)^2.$$

它比前面给出的上界 $\left[\frac{1}{6}n(n-1) \right]$ ($n > 6$ 时) 要差得多。因此, 如果 $n > 8$, 不可能有由 n 条直线的极大曲线。其实对 $n=8$ 时这个结论也对, 这一点从后面的表格中可以看出。对 $n=8, 10$ 时取得最大的 σ_3 的果园表示如图 14:

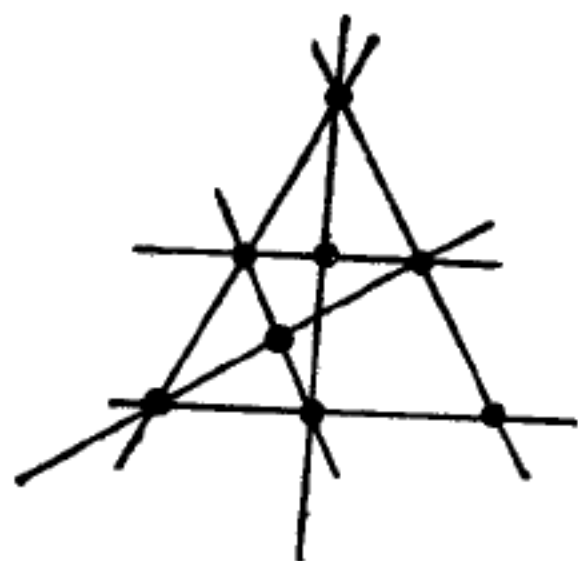


图 14 $n=8, t=7$

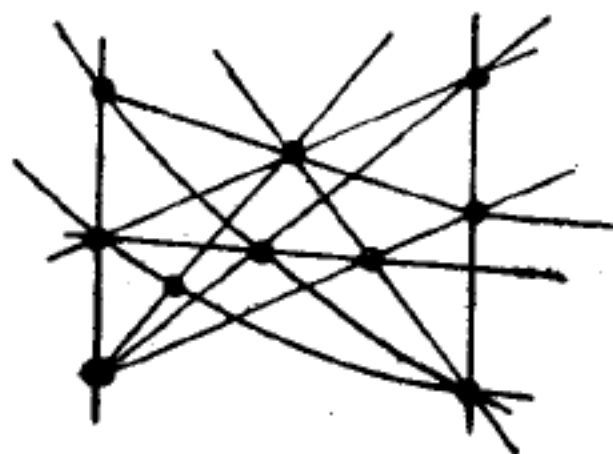


图 15 $n=10, t=12$

在 [BGS] 中, 利用椭圆曲线可以证明:

$$t(n) \leq 1 + [n(n-3)/6],$$

并猜想当 $n \neq 7, 11, 16, 19$ 时等号成立。

对 $t(n), s(n)$, 我们有下面的表格:

n	8	9	10
$t(n)$	7	10	12
$s(n)$	8	12	12

除此而外, 对 $s(n)$ 几乎一无所知。复的果园问题是值得研究的。

11. 曲面的分类

在最后一讲里, 简短地谈一谈曲面分类问题的结果。这里, 我们假定所有的曲面都是光滑的。

如果全纯映射 $\varphi: X \rightarrow Y$ 诱导出曲面 X, Y 的函数域间的同构: $m(Y) \xrightarrow{\varphi^*} m(X)$, 则称 φ 是一个双有理等价。具有同构的函数域的曲面, 称为双有理等价。

双有理等价于 $\mathbf{P}_2\mathbf{C}$ 的曲面称为有理曲面。

例如, \mathbf{P}_1 上的 \mathbf{C}^2 -丛 $H^0 \oplus H^n$ 的射影化丛 Σ_n 是个有理曲面。我们有

定理 (Castelnuovo). 设 E 为曲面 X 上的例外曲线 (参看第 8 节), 则存在一个曲面 Y 和一个点 $p \in Y$, 使得:

- a) 存在全纯映射 $\pi: X \rightarrow Y$, 满足 $\pi^{-1}(p) = E$,
- b) π 将 $X-E$ 双全纯地映到 $Y-p$ 上。

对定理中的情形, 我们称 Y 是 X 的缩合 (blow-down) 而 X 是 Y 在 P 的胀开 (blow-up)。

从拓扑的观点看, X 为 Y 与 $\mathbf{P}_2\mathbf{C}$ 的连通并。用 Mayer-Vietoris 序列, 得到:

$$e(X) = e(Y) + 1, \text{Sgn}(X) = \text{Sgn}(Y) - 1, b_1(X) = b_1(Y).$$

因此, $\chi(X) = \chi(Y), P_g(X) = P_g(Y)$ 。

显然, π 是个双有理等价, 而且我们可以证明两个双有理等价的曲面一定可以经过有限次缩合与胀开的复合, 把一个曲面变为另一个。那么可以说 π 是最简单的双有理等价。

我们立刻看出 χ 与 P_g 都是双有理不变量, 而且在一点的胀开使得 K^2 减少 1。

如果给定一个曲面 X , 它不是极小的, 我们就可以缩合得到 X_1 , 当 X_1 还不是极小时又可以继续缩合, 这样, 经过有限次缩合后便能得到一个双有理等价的极小曲面 X_{\min} , 这是因为每一次缩合都使 b_2 减少 1。

当 X 为有理曲面时, X_{\min} 有两种可能性, 即 $\mathbf{P}_2\mathbf{C}$ 或者 Σ_n 。如果 X 不是有理的, 并且不双有理同构于 $\mathbf{P}_1^1 \times C$ (其中 C 为曲线), 则在每个双有理等价类中有一个唯一的 X_{\min} 。让 \tilde{K} 表示 X_{\min} 的典则除子, 则 \tilde{K}^2 是 X 的双有理不变量。但 \tilde{K}^2 是很难计算的。

我们有如下的分类定理:

Enrique-Kodaira 分类定理. 任何一个正则 (即 $b_1=0$) 的极小曲面可分为下列几个类型:

I) $\mathbf{P}_2\mathbf{C}$ 或 Σ_k (有理曲面),

II) $K=0$ ($K3$ 曲面),

III) $K \neq 0$, 但 $K^2=0$ (椭圆曲线, 即以 P_1C 为底空间的, 以光滑椭圆曲线为一般纤维的曲面),

IV) $K>0$ (一般型).

一般型的极小曲面类是非常多的, 到现在为止也还没有弄清楚. 对这类曲面, 成立 Max Noether 不等式: $K^2 \geq 2P_g - 4$.

当 K^2 接近下界, 即 $K^2 \leq 2P_g - 2$ 时 Horikawa 得到一些漂亮的结果. 特别当 $K^2 = 2P_g - 4$ 时, 得到曲面的完全分类: 它们是 P_2C , Σ_m 或者是 Veronese 曲面上的分歧二重复叠. 例如, 当 $K^2=2$, $P_g=3$ 时, 这些曲面就是前面所说的 X_f , 其中 $\deg f=8$.

我们来看一看在这个分类中这些二重分歧复叠是怎样的, 令 $n=\deg f$.

当 $n=2$ 时, 如果 f 光滑, 则 X_f 为 $P_1 \times P_1$. 如果 f 是极大的 (此时是两条直线的并), 则 X_f 的光滑模型 Y_f 为 Σ_2 , 它微分同胚于 $P_1 \times P_1$, 但并不是一个双全纯同胚.

$n=4$. 如果 f 光滑, 则 X_f 是 P_2C 对 7 个点胀开得到的曲面 (Del Pezzo 曲面), 另一种情形下, Y_f 为有理.

$n=6$, 这时 $K=0$, 为 $K3$ 曲面.

$n \geq 8$, 这时 X_f, Y_f 都是一般类型. 当 $n=8$ 时它们即是 Horikawa 曲面在 $K^2 = 2P_g - 4$ 的情形.

最后, 我还想就 Hilbert 模曲面讲几句话.

让 K 为 Q 的二次扩张域, D 为判别式, \mathcal{O} 为它的整数环. 这时 Hilbert 模群 $SL(2, \mathcal{O}) / \{+1, -1\}$ 作用在 $H \times H$ 上, 且为有效、完全不连续, 其中 H 为上半平面. 而商空间 $H^2 / (SL(2, \mathcal{O}) / \{1, -1\})$ 是一个具有有限个商奇点的开曲面. 它可由加上有限个尖点而紧致化. 这个紧曲面的极小奇点分解 $Y(D)$ 便称为域 K 的 Hilbert 模曲面.

我不能在这里详细构造 $Y(D)$ 了. 我要说的是, Hilbert 模曲面给了我们大量的代数曲面的例子, 这些曲面无论从数论还是从代数几何的观点看都是很有意思的. 想进一步了解模曲面, 可以参考我的文章 $[H_2]$.

(王启明 胥鸣伟整理)

参 考 文 献

- [BGS] Stefan A. Burr, Branko Grünbaum, N.J.A. Sloane, The Orchard Problem, *Geometriae Dedicata* 2, 397—424 (1974).
- [GH] Phillip Griffiths and Joseph Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley and Sons, Inc. New York, 1978.
- [H₁] Friedrich Hirzebruch, *Topological Methods in Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1966, 1978.
- [H₂] Friedrich Hirzebruch, Hilbert Modular Surfaces, *L'Enseignement Math.* 19, 183—281 (1973).
- [S] Peter Slodowy, Simple Singularities and Simple Algebraic Groups, *Lecture Notes in Math.* Vol. 815, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1980.
- [Z] Oscar Zariski, *Algebraic Surfaces*, first edition, Springer-Verlag 1933.

从Riemann的观点看 Weierstrass整体复分析*

M. Heins

第 I 部分

1. 引言

这一部分的目的是用现代术语对纳入黎曼框架下的 Weierstrass 整体复分析概念作一回顾, 并指出, 每一个 Weyl-Radó 意义下的黎曼曲面, 对应 Weierstrass 理论中的一个共形等价类 (Riemann-Klein 定理及 Koebe 定理谈及这点且更多些)。结论是 Weierstrass 共形等价类通过包含关系映满黎曼共形等价类。

这一章预先假定熟悉参考文献 [3] 的第 XV 章, 所有以下的参考资料都是 [3], 为了讲清这一问题, 有些基本概念将在下面各节里扼要重述。

2. 解析开拓的经典理论

解析开拓的经典理论是从元素的概念出发的。元素是指有序对 (a, P) , 其中 $a \in \mathbb{C}$, P 是中心在 a 、半径为 $r (\leq +\infty)$ 的圆内的解析函数, 这里 r 在特定意义下是最大的, 即 P 不是中心在 a 、半径 $> r$ 的圆内的某一解析函数的限制。点 a 称为 (a, P) 的中心。元素 (b, Q) 称为 (a, P) 的直接开拓, 如果 b 在 P 的定义域内, 并且在 b 的某个邻域 $P(Z) = Q(Z)$ 。在 P 的定义域内给定点 b , 恰好存在唯一的中心在 b 的 (a, P) 的直接开拓。我们用 E 表示所有元素的集。给定一条路径 $\nu \subset \mathbb{C}$, ν 由连续映照 $t \mapsto \nu(t) (0 \leq t \leq 1)$ 定义。我们称 $[0, 1]$ 到 E 的映照 $t \mapsto e(t)$ 为沿 ν 的开拓, 如果 $\nu(t)$ 是 $e(t)$ 的中心, 并且对于每一个 $s \in [0, 1]$, 当 t 充分靠近 s 时, $e(t)$ 是 $e(s)$ 的直接开拓。假如沿给定路径的两个开拓不相同, 则对于每一个参数值, 它们取不同的元素。沿路径的开拓, 在 E 上定义一个等价关系。我们称元素 e_1 等价于 e_0 , 如果存在一个沿路径的开拓 $t \mapsto e(t)$ 使得 $e_0 = e(0)$ 且 $e_1 = e(1)$ 。这样得到的等价类称之为 Weierstrass 类。

给定一个元素 $e = (a, P) \in E$, 定义 α_e 为 P 的定义域内的点 Z 对应中心在 Z 的 P 的直接开拓的映照。映照 α_e 是单叶的。我们赋与 E 一个拓扑, 它是由所有的 $\alpha_e(\theta)$ 组成的族生成的, 这里 $e \in E$, O 为 P 的定义域内的开集。在这样的拓扑下, E 是一个 Hausdorff 空间, 每一个 α_e 是连续的, 并且 E 的分支就是 Weierstrass 类。我们将看到, 一个 Weierstrass 类连同其相应的 α_e 是 Weyl-Radó 意义下的黎曼曲面的一例。

* 原题 "Weierstrassian Global Complex Analysis from the Riemannian Point of view", 译自 "Aspect of Contemporary Complex Analysis",