模的奇迹

John Stillwell

过去 20 年中，模函数已由于其在两大数学成就中所起的不可思议的奇妙作用而变得广为人知，这两大数学成就是指 Fermat (费马) 大定理的证明和妖魔单群的 "月光" 理论 (详见下文，译注). 在这两个例子中，模函数都出现在人们根本未预料到的地方，并且在表面上看起来完全无关的领域间架起了桥梁. 也许有理由说，在上述两个例子中，我们至今还没有完全理解模函数是怎样起到了它的神奇作用的.

然而，我们至少可以说，这些决不是模函数的第一个奇迹. 从发现模函数算起，在 19 世纪早期，模函数就一直是发现引人入胜的和不可预料的结果的动力. 现在，模函数在新的结果中又再一次表现出了它过去曾出现过的神奇作用，因此现在正是回顾模函数在 19 世纪中的某些奇迹的好时候. 这些结果可以帮助我们从某种角度去理解新近的结果并且促使我们相信关于模函数我们还有很多东西值得进一步学习.

模函数 j

模函数可以定义为在上半平面中具有如图 1 所示的那种模镶嵌的周期亚纯函数. 当把上半平面理解为双曲平面时，镶嵌中的黑色和白色部分就是某个顶点在无穷远处的全等三角形，并且整个镶嵌可由它们中的任何一个对边的反射产生.

由此得出，模函数可由它在任一条带上的值确定，其他的值可由此条带对边的反射而得到. 而条带上的值可由把此条带共形地映为上半平面而确定，而它们又由三个顶点的象完全确定.

这一想法被 Dedekind (戴德金)(1877) 所采用. 他通过唯一的共形映射

白色区域 $\longrightarrow$ 半平面

定义经典的模函数 j [3]，这个映射把 $i, e^{\pi/3}$ 和 ∞ 分别映为 $0, 1$ 和 ∞.

j 的周期性可通过下式代数地刻画：

$$j(\tau) = j\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right),$$

其中 a, b, c, d 是使得 $ad - bc = 1$ 的任意整数. 变换

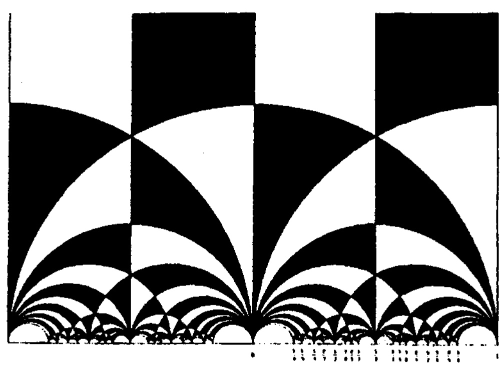

图 1 模镶嵌

$$\tau \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

把任一黑色部分变为白色部分，反过来也如此. 这些变换可以由两个简单变换 $\tau \mapsto \tau + 1$

译自：The Amer. Math. Monthly, Vol.108 (2001), No.1, p.70–76, Modular Miracles, John Stillwell, figure number 3. Copyright ©2001 the Mathematical Association of America. Reprinted with permission. All rights reserved. 美国数学协会授予版权.

和 $\tau \mapsto -1/\tau$ 生成，而这两个变换也定义了 j 的周期性.

由于 j 在变换 $\tau \mapsto \tau+1$ 下的周期性，因此 j 具有 Fourier (傅里叶) 级数，即关于 $q=e^{2i\pi\tau}$ 的幂的展开式. 这个展开式的具体形式如下：

$$j(\tau)=q^{-1}+744+196884q+21493760q^2+\cdots.$$

无论是用镶嵌还是用关于 q 的幂的展开式所作的定义都不太接近椭圆函数论中 j 的原始定义，（这一定义我们将在下文中加以说明）. 我们首先从几何定义开始是由于这种定义对于领会什么是模函数可能是最简单的，尽管这一定义隐藏了某些困难 (例如，它需要用到 Riemann (黎曼) 的映射理论，这一理论保证了从任意单连通区域到半平面的共形映射的 *存在性*). 把 j 定义为映射还产生了模函数对分析的最著名的应用 —— Picard (皮卡) 定理的证明，这一定理说任何整函数至多有一个复数值不能被取到. 由于在大多数复分析的教科书中都可以找到皮卡定理，因此我们不再进一步讨论这一定理；在 [1, p.307] 中可以找到皮卡自己的美妙证明.

关于 j 的深入讨论及它的历史, 包括本文所讨论的多数论题, 我们热忱地推荐 McKean 和 Moll 合著的书 [8].

在 5 次方程中的奇迹

一般的 5 次方程可以用 j 解出. 这一结果是由 Hermite (埃尔米特) 于 1858 年在 [5] 中证明的. 由于 Galois (伽罗瓦) 在 1832 年就已指出了 5 次方程和 j 的关系，而 Kronecker (克罗内克) 在大致同一时候也有了与埃尔米特类似的想法，因此这个结果并不完全令人感到意外. 尽管如此，它还是一个惊人的结果，即使指出它先前的进展也仍然如此.

埃尔米特将他用 j 得出 5 次方程的解与用余弦函数所满足的三倍角方程

$$4\cos^3\theta-3\cos\theta=\cos 3\theta$$

得出 3 次方程的解做了类比；我们可把一般的 3 次方程变换成如下的特殊形式

$$4x^3-3x=c,$$

然后再设 $x=\cos\theta$, 其中 $c=\cos 3\theta$.

有一个类似的被 j 满足的 *模方程*, 用此方程即可把一般的 5 次方程转变为 5 次模方程.

模方程从何而来？

j 不是仅有的具有模镶嵌周期性的函数，但是在要求它们必须是 j 的有理函数的意义下, j 是最简单的. 其中我们所遇到的第一个并且也是 "模" 这个名称的起源的函数是椭圆积分

$$\int\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

中的模 k^2. 关于这种积分的一个发人深思的结果是 1718 年 Fagnano 的双纽线弧长加倍公式

$$2\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}=\int_0^y\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}},\quad 其中\, y=\frac{2x\sqrt{1-x^4}}{1+x^4},$$

它给出 x,y 之间的一个多项式方程

$$y^2(1+x^4)^2 = 4x^2(1-x^4).$$

这类似于反正弦积分加倍公式

$$2\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \text{其中}\, y = 2x\sqrt{1-x^2},$$

它只不过是二倍角公式

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}$$

和 $y=\sin 2\theta$ 及 $x=\sin\theta$ 间的多项式关系

$$y^2 = 4x^2(1-x^2)$$

的重述而已.

与圆函数所作的类比导致了对椭圆积分的 n 倍 "角" (后来又导致了用复数去乘或 " '角' 的复数倍数") 公式以及相应的多项式方程的计算的巨大兴趣. 当积分的值被看成是模的函数时, 所得的方程就称为 *模方程*.

模方程是 19 世纪早期很多学术带头数学家, 如 Legendre (勒让德), Gauss (高斯), Abel (阿贝尔), Jacobi (雅可比), 伽罗瓦的一个流行的话题, 而伽罗瓦的结果则特别令人烦心. 伽罗瓦只在他临死前写给 Chevalier 的信中留下了一些用 5, 7 以及 11 相乘的方程 (这蕴含他们产生次数为 5, 7 以及 11 的方程) 的含义晦涩的注记. 在这些注记真正地被人们理解之前, 伽罗瓦的结果沉睡了几十年. 埃尔米特 1858 年的文章无论是在弄懂伽罗瓦的结果方面还是在把它向前推进方面都迈出了实际的一步.

在二次域中的奇迹

克罗内克 (1857) 发现 *对于虚二次整数 $\sqrt{-D}$, j 可以用来探求 $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ 的类数* [7]. 这一结果比模函数在解 5 次方程中所起的作用使我更感到吃惊, 因为类数是数学家们直到 19 世纪 30 年代都没有抓住其要领的一个深奥课题.

1832 年高斯研究了 *高斯整数* $a+ib$, 其中 $a,b\in\mathbb{Z}$ 而 $i=\sqrt{-1}$, 并且证明了它们有唯一素因子分解或者其 *类数为* 1. (这一术语可追朔到较古老的二次型语言, 在此情形, 一个等价的事实是所有使得 $b^2-4ac=-4$ 的二次形 $ax^2+bxy+cy^2$ 都和 x^2+y^2 在同一个 "类" 中). 其后不久, 数学家们就注意到诸如二次整数 $a+b\sqrt{-5}$ 这样的一些例子, 在这些例子中, 由于类数 >1, 所以素因子分解 *不* 是唯一的. (在此情况, 类数是 2, 并且两种类型由 x^2+5y^2 和 $2x^2+2xy+3y^2$ 代表). 1839 年 Dirichlet (狄利克雷) 引入了强有力的使用 Dirichlet 级数的解析方法确定二次域 $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ 的整数的类数, 但是当克罗内克表明 j 可以作完全相同的事情时, 人们还是大吃了一惊.

克罗内克证明, 对二次域 $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ 中的任何整数 τ, *$j(\tau)$是一个次数恰好等于 $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ 的类数的代数整数.*

例如, 高斯整数是域 $\mathbb{Q}(i)$ 中的整数, 其中 $D=1$, 而同时有 $j(i)=12^3$—— 这是一个通常的整数, 这正如我们所期待的那样, $\mathbb{Q}(i)$ 有类数 1. 第二个例子发在生 $D=163$, 它

是使得 $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ 具有类数 1 的最大整数. 高斯也发现了这个例子, 并且类数 1 与通常整数值

$$j((1+\sqrt{-163})/2)=(-640320)^3$$

相符合. 最后, 具有类数为 2 的一个例子是 $\mathbb{Q}(\sqrt{-15})$, 并且我们确实有

$$j((1+\sqrt{-15})/2)=(-191025+85995\sqrt{5})/2,$$

这是一个 2 次整数. (分母为 2 的 "整数" 的存在性是某些二次域的特有现象, 在此读者可以不加深究.)

在一篇短文中把克罗内克的结果解释清楚是困难的, 但是我们仍然可以给出下面的提示. 二次整数与椭圆函数的共同之处是平面 $\mathbb{C}$ 中的*基 格* L, 亦即用全等的平行四边形镶嵌平面时所有顶点的集合. 一个椭圆函数 f 有两个*周期* ω_1 和 ω_2, 它们在 $\mathbb{C}$ 中有不同方向因而生成*周期格* $\{m\omega_1+n\omega_2: m,n\in\mathbb{Z}\}$, 在它的每个点上 f 取相同的值. 在二次域 $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ 中, *整数*的集合 $\mathcal{O}$ 是一个格, 它或是

$$\{m+n\sqrt{-D}: m,n\in\mathbb{Z}\},\quad \text{或是}\quad \left\{\frac{m}{2}+\frac{n\sqrt{-D}}{2}: m,n\in\mathbb{Z}\ \text{且具有相同的奇偶性}\right\},$$

并且更一般地, $\mathcal{O}$ 的任何*理想*也是如此. $\mathcal{O}$ 的理想是正数组成的一个集合, 它在加法运算和与任意 $\alpha\in\mathcal{O}$ 相乘的乘法运算下封闭. 理想的代数意义在于当且仅当 $\mathcal{O}$ 的每个理想都是*主*理想 (即对于某个 $\alpha\in\mathcal{O}$, 它等于 $\alpha\mathcal{O}$) 时, $\mathcal{O}$ 具有唯一素因子分解. 主理想 $\alpha\mathcal{O}$ 的几何意义是它和 $\mathcal{O}$ 有*相同的形状* (通过把 $\mathcal{O}$ 放大 $|\alpha|$ 倍并且旋转一个角度 $\arg\alpha$ 后得到.)

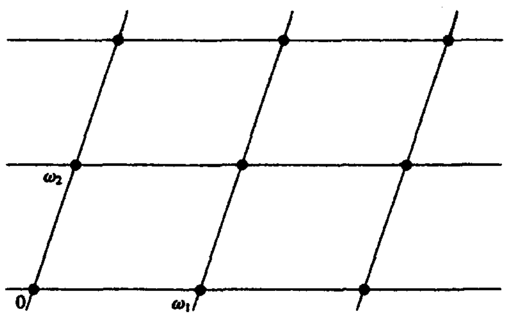

图 2 由 ω_1 和 ω_2 生成的平行四边形

模函数之所以与椭圆函数及二次整数都有关联是因为 *j 真正是一个格子形状的函数*. 格子形状的思想可以用周期格 $\{m\omega_1+n\omega_2: m,n\in\mathbb{Z}\}$ 来解释. 这个格的点位于图 2 中所示的平行四边形平面镶嵌的顶点.

平行四边形的 "形状" 可由数 $\omega=\omega_2/\omega_1$ 加以刻画, 这是因为 $|\omega|$ 是边长的比 $|\omega_2|/|\omega_1|$, 而 $\arg\omega=arg\omega_2-arg\omega_1$ 是两边之间的夹角. 然而, 这个平行四边形恰好是定义同一个格的无穷多个平行四边形中的一个. 图 3 显示了另一种情况.

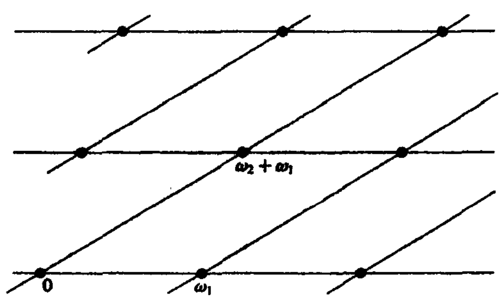

图 3 由 ω_1 和 $\omega_2+\omega_1$ 生成的平行四边形

在此情形, 基本平行四边形的形状是

$$\frac{\omega_2+\omega_1}{\omega_1}=\omega+1,$$

因此, 格子的形状可同样由 $\omega+1$ 加以表示. 由此得出, 对于每个表示格 L 的形状的 ω,

只要 $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$, 且 $ad-bc=1$, 数 $(a\omega+b)/(c\omega+d)$ 同样也表示 L 的形状. 因此 格的形状 是形如

$$\frac{a\omega+b}{c\omega+d} \quad \text{对某个}\ \omega$$

的整个一 类 数, 其中 $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$, 且 $ad-bc=1$.

这就是我们说 j 是格子形状的函数的理由, 就像我们在一开始就提到的那样, 对任意 $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$, 且 $ad-bc=1$, j 具有性质

$$j(\omega)=j\left(\frac{a\omega+b}{c\omega+d}\right).$$

于是, j 在格子形状中的每个数上取相同的值. 换句话说, 格子的形状 完全定义 了 j.

这样, 椭圆函数的性质主要由周期格控制, 而二次域 $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ 的性质被它的理想的形状控制. 特别由此得出 当且仅当 $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ 的所有理想具有同样的形状时, $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ 有唯一素因子分解. 这就是为什么 j 可以对二次域的惟一的素因子分解说些什么的原因 —— 它是 j 关于周期格的所谓 "复数乘法" 所述的事的一个回应 —— 虽然 j 说这些事的方式还是相当令人惊异的.

所满足的方程恰好是另外一个模方程, 它可分解为形如 $x=j(\sqrt{-D})$ 的因子, 而因子的个数就是 $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ 的整数集中不同形状的格子网的个数.

数值奇迹

埃尔米特 (1859) 在 [6] 中注意到克罗内克关于 $j(\tau)$ 的值的定理的一个怪异的数值推论: 精确到 12 位小数有

$$e^{\pi\sqrt{163}}=262537412640768744\ (\text{一个整数!}).$$

埃尔米特这个不太著名的发现被 Martin Gardner 主编的《科学的美国人》杂志的一个专栏改编为娱乐材料. 1975 年 4 月 1 日 (就是西方的愚人节, Gardner 在这一期杂志上发表这一 "发现", 显然具有为此节日凑点热闹, 开个小玩笑的含义. —— 译注) Gardner 宣布 —— 与其他几个 "还没有被公众注意到的但是令人激动的发现" 一起 ——

$$e^{\pi\sqrt{163}}=262537412640768744\ (\text{确切成立}). \tag{1}$$

他还给这一宣布编织了一个修饰性的外套, 即宣称据推测这是 Ramanujan (拉马努金) 在 1914 年所写的一篇文章中的一个猜想. 实际上, Gardner 所引用的文章确实讨论了形式 $e^{\pi\sqrt{n}}$ 所接近的整数, 但是并没有宣称这些数就是整数, 并且也没有提到 $e^{\pi\sqrt{163}}$ 这个数. 此外, 在 1975 袖珍计算器的时代也难以判定 $e^{\pi\sqrt{163}}$ 是否是一个整数.

正如埃尔米特和拉马努金所知道的, 它的真正的值是 (1) 中的整数减去一个非常小的数 ($<10^{-12}$).

事实上, 在 $q=e^{2i\pi\tau}$ 中令 $\tau=(1+\sqrt{-163})/2$ 就给出一个非常小的数

$$q=e^{i\pi-\pi\sqrt{163}}=-e^{-\pi\sqrt{163}},$$

把 q 代入

$$j(\tau)=q^{-1}+744+196884q+21493760q^2+\cdots$$

(下转 39 页)

我们的互相正交的对称数独解的构造还可推广为:

命题 5.2 设 q 是一个素数幂，考虑 $q^2 \times q^2$ 网格，它被分划为 $q \times q$ 子正方形，断行，断列，以及布局 (如前节中定义). 那么存在 $(q-1)^2$ 个对于这些分割的互相正交的多重公平设计；并且这是最好可能的.

证 我们采用与上面同样的方法在 GF (q) 中进行论证. PG $(3,q)$ 中定义行，列，子正方形，断行，断列及布局的直线落在具有 2 条公共直线的两个线列的并集中，这两个线列形成某个正则展形的一部分. 展形中其余 $(q-1)^2$ 条直线给出所要的设计. 于是与前面一样证明了上界. 3) ■

致谢、**参考文献** (略)

(朱尧辰 译 姚景齐 校)

****

(上接 44 页) 就得出

$$j((1+\sqrt{-163})/2 = -e^{\pi\sqrt{163}} + 744 - \text{一个非常小的数},$$

因而

$$e^{\pi\sqrt{163}} = \text{整数} - \text{一个非常小的数}.$$

月光的来源

"月光" 是一个把 j 与魔鬼单群 $\mathbb{M}$ 联系起来的理论，其起源是 McKay 于 1977 年所观察到的一个巧合: j 的傅里叶展开式中的系数 196884 恰巧等于 1 加上 $\mathbb{M}$ 的最小的非平凡表示的维数.

实际上，一些其它巧合大约在同一时期也被发现，[2] 中列出了这些巧合. 但是如果不知道 j 的傅里叶展开式的系数，月光理论恐怕就不是那么容易发现了，因此人们可能就很想知道是谁发现了这个系数 196884. 埃尔米特在 1859 年实际上已有了一个不正确的展开式

$$j(\tau) = q^{-1} + 744 + 196880q + \cdots,$$

尽管这一错误并不影响当精确到第 12 位小数时 $e^{\pi\sqrt{163}}$ 是一个整数的结果.

就我所知，关于系数 196884, 第一个正确的展开式是 Weber 在 1891 年 [9, p.248] 给出的. 这是第一次看见月光吗? 或者也可能是埃尔米特也知道是 196884, 但是把它写错了? 我倾向于后者，因为他 1859 的文章还包含了另一个级数

$$q^{-1} + 104 + 4372q + 96256q^2 + \cdots,$$

(它后来成了月光理论的一部分), 在这个级数中埃尔米特把所有数字全写对了.

参考文献 (略)

(冯贝叶 译 朱尧辰 校)

3) PG $(3,q)$ 中一个展形含 q^2+1 条直线，每个线列含 $q+1$ 条直线. 此处两个线列有两条公共直线，所以它们共含 $2(q+1)-2=2q$ 条直线，于是展形中含有 $q^2+1-2q=(q-1)^2$ 条直线.—— 译注