# 外代数与数学中的重要概念

Gunnar Fløystad

献给 Stein Arild Strømme (1951–2014)

*忽视外代数是 20 世纪数学的不幸.*

—— Gian-Carlo Rota, 《浑然一体的思想 (Indiscrete Thoughts) 》 (1997)

本文概述外代数 (exterior algebra) 和它的形变 (deformations) 或商 (quotients) 如何引出数学中 5 个领域的本质:

- 组合数学
- 拓扑学
- Lie (李) 理论
- 数学物理
- 代数几何

外代数首先出现在 1844 年 Hermann Grassmann (格拉斯曼) (1809—1877) 的书《线性扩张理论 (Ausdehnungslehre)》, 以及 1862 年认真细致的修订版中, 这个修订版在 2000 年有了英译本 [20]. Grassmann 在当时属于德国的斯德丁 (Stettin, 现为波兰西北部的一个城市 —— 译注) 的预科学校当教授. 部分因为 Grassmann 是一个有独创性的思想家, 也许部分是因为他所受的教育没有太多关注数学, 他的书的第 1 版具有的哲学形式重于数学形式, 因而在数学界几乎没有什么影响. 第 2 版 (1862) 在数学意义上是严格的. 然而, 它还是没什么影响, 可能是由于它转向另一边时走得太远, 而且显得缺乏动机. 它用超过 400 页的篇幅发展了外代数的外积和内积, 以及较少有人懂的回归积 (regressive product), 后者从直观上对应于线性空间的交. 这就把它与几何联系起来, 还说明分析可以怎样扩展到适用于大量的函数. 仅在 19 世纪的最后 20 年里, 受 Grassmann 工作的启示而发表的著作达到了很大的数量. 也许有点遗憾的是, Grassmann 在他第 2 版的书中有一个独有的数学形式, 因为他在前言中说 “[扩张理论 (extension theory)] 不单单是数学分支中的一个, 如同代数、组合理论或者函数论那样, 而是超越了它们. 在这个分支下, 所有的基本元素得到了统一, 因而它成为了数学整体结构的基石.”

本文指出, 他离这里所说的并非太远. 我们对 Grassmann 原先的表述不再作进一步的描述, 而是在完全现代的环境中展示外代数. 关于 Grassmann 更多的历史背景, 可参见杰出的向量分析史的著作 [7], 以及关于 Grassmann 多方面遗产的会议论文集 [41] 和 [38]. 最近 15 年来, 出现了一系列的书, 提倡外代数及其派生物 Clifford 代数在物理学、工程学和计算机科学极为有效的应用. 我们将在最后一节简要地报告这方面的内容.

---

译自: Notices of the AMS, Vol. 62 (2015), No. 4, p. 364–371, The Exterior Algebra and Central Notions in Mathematics, Gunnar Fløystad, figure number 1. 

Gunnar Fløystad 是挪威卑尔根大学的数学教授. 他的邮箱地址是 gunnar@mi.uib.no.

## 1. 外代数

### a. 具体的定义

给出 $n$ 个元素的集合 $\{e_1,\ldots,e_n\}$, 考虑 $2^n$ 个表达式 $e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}$ (此处 $\wedge$ 仅是位置的分隔符), 其中 $i_1,i_2,\ldots,i_r$ 是 $1,2,\ldots,n$ 的严格递增的子序列. 由此, 我们构成了域 $\Bbbk$ 上以这些表达式为基元素的向量空间 $E(n)$.

**例 1** 当 $n=3$ 时, 以下 8 个表达式构成域 $\Bbbk$ 上 $E(3)$ 的基:

$$1,\quad e_1,\quad e_2,\quad e_3,\quad e_1\wedge e_2,\quad e_1\wedge e_3,\quad e_2\wedge e_3,\quad e_1\wedge e_2\wedge e_3.$$

视元素 $e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}$ 的阶为 $r$, 于是我们得到一个分次的 (graded) 向量空间 $E(n)$. 现在对这个向量空间赋予一个乘法, 仍记为 $\wedge$. 这个乘法的基本法则是

$$\text{i) } e_i\wedge e_i=0,\qquad \text{ii) } e_i\wedge e_j=-e_j\wedge e_i.$$

这些法则, 连同对 $\wedge$ 是结合的要求, 即

$$\text{iii) } (a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$$

对 $E(n)$ 中所有 $a,b,c$ 成立, 以及对 $\wedge$ 是线性的要求, 即

$$\text{iv) } a\wedge(\beta b+\gamma c)=\beta a\wedge b+\gamma a\wedge c$$

对域 $\Bbbk$ 中所有 $\beta,\gamma$ 和 $E(n)$ 中所有 $a,b,c$ 成立, 确定了 $E(n)$ 上的代数结构. 例如,

$$\begin{aligned} e_5\wedge(e_1\wedge e_3) &= e_5\wedge e_1\wedge e_3 \\ &= -e_1\wedge e_5\wedge e_3 \qquad (\text{调换 } e_5 \text{与 } e_1) \\ &= e_1\wedge e_3\wedge e_5 \qquad (\text{调换 } e_5 \text{与 } e_3). \end{aligned}$$

### b. 抽象的定义

这里我们利用代数的标准体制来定义外代数. 令 $V$ 是 $\Bbbk$ 上的向量空间, 记 $V^{\otimes p}$ 为 $p$- 重张量积 $V\otimes_{\Bbbk}V\otimes_{\Bbbk}\cdots\otimes_{\Bbbk}V$. $V$ 上的自由结合代数是张量代数 $T(V)=\bigoplus_{p\geq 0}V^{\otimes p}$, 它来自于自然的毗连乘积

$$(v_1\otimes\cdots\otimes v_r)\cdot(w_1\otimes\cdots\otimes w_s)=v_1\otimes\cdots\otimes v_r\otimes w_1\otimes\cdots\otimes w_s.$$

令 $R$ 是 $V\otimes_{\Bbbk}V$ 的由所有元素 $v\otimes v$ 生成的向量子空间, 其中 $v\in V$. 外代数是 $T(V)$ 由关系 $R$ 决定的商代数. 更正式地, 令 $\langle R\rangle$ 为 $T(V)$ 中由 $R$ 生成的双边理想. 外代数 $E(V)$ 是商代数 $T(V)/\langle R\rangle$. 这个商代数中的乘积通常记为 $\wedge$. 令 $e_1,\ldots,e_n$ 是 $V$ 的一个基. 然后我们有 $e_i\wedge e_i=0$, 因为 $e_i\otimes e_i$ 是 $R$ 中的一个关系. 类似地, $(e_i+e_j)\wedge(e_i+e_j)$ 等于零. 把它展开

$$0=e_i\wedge e_i+e_i\wedge e_j+e_j\wedge e_i+e_j\wedge e_j,$$

我们知道 $e_i\wedge e_j=-e_j\wedge e_i$. 事实上, 我们得到 $v\wedge w+w\wedge v=0$ 对 $V$ 中任何 $v,w$ 成立. 因此当 $\Bbbk$ 的特征不是 2 时, 外代数可以定义为 $T(V)/\langle S_2V\rangle$, 其中

$$S_2V=\{v\otimes w+w\otimes v\mid v,w\in V\}$$

是 $V\otimes V$ 中所有的对称 2- 张量. $E(V)$ 第 $p$ 个分次部分, 它是 $V^{\otimes p}$ 的像, 记为 $\wedge^pV$.

我们将在下面指出:

- 数学各种不同领域中的重要概念怎样从外代数的自然结构中发生.
- 外代数或它的变种怎么成为这些领域中自然的工具.

## 2. 组合数学 I: 单纯复形与面环

为简单起见，记集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ 为 $[n]$. 集合 $[n]$ 的每个子集 $\{i_1,\ldots,i_r\}$ 对应于外代数 $E(n)$ 中一个单项式 $e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}$. 例如， $\{2,5\}\subseteq[6]$ 给出单项式 $e_2\wedge e_5$. 它也给出指示向量 $(0,1,0,0,1,0)\in\mathbb{Z}_2^6$ (其中 $\mathbb{Z}_2=\{0,1\}$), 在位置 2 和 5 处取值 1. 然后我们可以考虑 $e_2\wedge e_5$ 具有这个多重次数. 集合 $[n]$ 的子集和 $E(n)$ 中单项式之间的这个一一对应提示我们，它可用来对一个有限集的子集系进行编码. 因 $E(n)$ 是一个代数，由它引起的集合系就是 *组合单纯复形*. 它们是 $[n]$ 的子集的族 $\Delta$, 使得如果 $X$ 在 $\Delta$ 中，则 $X$ 的任何子集 $Y$ 也在 $\Delta$ 中.

**例 2** 令 $n=6$. 集合

$$\{1,2\},\quad\{3,4\},\quad\{3,5\},\quad\{4,5,6\},$$

连同这 4 个集合中每一个的所有子集，构成一个组合单纯复形.

把这些与代数 $E(n)$ 相联系的要点在于 $[n]$ 上的组合单纯复形与 $E(n)$ 中 $\mathbb{Z}_2^n$- 分次理想 $I$, 或等价地，与 $E(n)$ 的 $\mathbb{Z}_2^n$- 分次商环 $E(n)/I$, 是一一对应的：对一个单纯复形 $\Delta$, 有一个由

$$\{e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}\mid\{i_1,\ldots,i_r\}\notin\Delta\}$$

生成的单项式理想 $I_\Delta$ 与之相对应. 注意使 $\{i_1,\ldots,i_p\}\in\Delta$ 的这些单项式 $e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}$ 构成商代数 $E(\Delta)=E(V)/I_\Delta$ 的一个 (向量空间的) 基. 我们把这个代数称为 $\Delta$ 的 *外面环* (exterior face ring).

对于上述例子中的单纯复形， $E(\Delta)$ 有基：

- 次数 0: $1$,
- 次数 1: $e_1$, $e_2$, $e_3$, $e_4$, $e_5$, $e_6$,
- 次数 2: $e_1\wedge e_2$, $e_3\wedge e_4$, $e_3\wedge e_5$, $e_4\wedge e_5$, $e_4\wedge e_6$, $e_5\wedge e_6$,
- 次数 3: $e_4\wedge e_5\wedge e_6$.

虽然 $[n]$ 的子集 $\{i_1,\ldots,i_r\}$ 最自然地对应于 $E(n)$ 中的单项式，我们还可以考虑多项式环 $\Bbbk[x_1,\ldots,x_n]$ 中的单项式 $x_{i_1}\cdots x_{i_r}$. (但注意这个环中的单项式自然地对应于多重集合，而不是集合.) 如果指定 $\Delta$ 对应于这个多项式环中类似的单项式理想，则商环 $\Bbbk[\Delta]$ 是 *Stanley (斯坦利)-Reisner 环*, 或简称为 $\Delta$ 的 *面环*.

这打开了研究 $\Delta$ 的代数资源库. 对 $E(\Delta)$ 和 $\Bbbk[\Delta]$ 的研究特别集中围绕着它们的极小自由分解以及由此发生的所有不变量. 关于 $\Bbbk[\Delta]$ 的研究是 1975 年左右 Hochster 一篇开创性的论文 [29] 以及 Stanley 对单纯球面的上界猜想 (Upper Bound Conjecture) 的证明 [44] 开始的. 虽然可以说 $E(\Delta)$ 是与 $\Delta$ 相关联更自然的对象， $\Bbbk[\Delta]$ 却有两个理由更受关注： (i) $\Bbbk[x_1,\ldots,x_n]$ 上的极小自由分解是有限的，这与外代数 $E(n)$ 上的情形不同，(ii) $\Bbbk[\Delta]$ 是交换的，而交换环的架构已发展得相当完善.

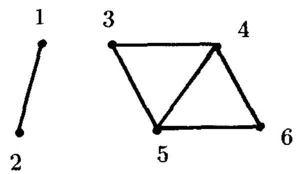
自从 1975 年以来，这已成为非常活跃的研究领域，出版了许多教科书：[44], [6], [34], 及 [22]. 关于外面环，见 [16].

## 3. 拓扑学

令 $u_i = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中第 $i$ 个单位坐标向量. 对 $[n]$ 的一个子集 $\{i_1,\ldots,i_r\}$, 我们可以联系到一个 $(r-1)$ 维单形，它是点 $u_{i_1},\ldots,u_{i_r}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的凸包. 例如，$\{2,3,5\}\subseteq[6]$ 给出 $\mathbb{R}^6$ 中由所有点 $(0,\lambda_2,\lambda_3,0,\lambda_5,0)$ 构成的单形，其中 $\lambda_i\geq 0$ 且 $\lambda_2+\lambda_3+\lambda_5=1$.

一个组合单纯复形 $\Delta$ 有一个自然的拓扑实现 $X=|\Delta|$. 它是与 $\Delta$ 中所有集合 $\{i_1,\ldots,i_r\}$ 相关联的 $\mathbb{R}^n$ 中所有单形的并.

**例 3** 在例 2 中给出的单纯复形有一个拓扑实现，它可以用图描述为：




这是一条线段和带一个柄的圆环的不交并.

然后我们说 $\Delta$ 给出了空间 $X$ 的一个三角剖分. 现在能利用与 $u=e_1+e_2+\cdots+e_n$ 相乘的方法，赋予 $E(n)$ 一个次数 1 的微分 $d$. 则 $d(a)=u\wedge a$, 且这是一个微分，因为 $d^2(a)=u\wedge u\wedge a=0$. 次数 $r$ 的单项式 $e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}$ 被映到次数 $(r+1)$ 的和：

$$\sum_{i\notin\{i_1,\ldots,i_r\}} e_i\wedge e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}.$$

面环 $E(\Delta)$ 是 $E(n)$ 的一个商，于是我们还得到 $E(\Delta)$ 上的一个微分. 令 $E(\Delta)^r$ 为次数 $r$ 的部分，这给出一个复形

$$E(\Delta)^0\xrightarrow{d^0}E(\Delta)^1\xrightarrow{d^1}E(\Delta)^2\xrightarrow{d^2}\cdots.$$

我们由这个复形及其对偶，来计算拓扑中的本原不变量，即拓扑空间 $X$ 的上同调和同调. 上同调是

$$H^{i+1}(E(\Delta),d)=\tilde{H}^i(X,\Bbbk)\quad 对\ i\geq 0,$$

其中 $\tilde{H}^i(X,\Bbbk)$ 是 $X$ 的约化上同调. (对 $i>0$, 它就是上同调 $H^i(X,\Bbbk)$; 而对 $i=0$, 它是 $H^0(pt,\Bbbk)\to H^0(X,\Bbbk)$ 的余核.) 将上述复形对偶化，我们得到作为 $E(n)^*$ 子复形的 $E(\Delta)^*$:

$$\cdots\xrightarrow{\partial_2}(E(\Delta)^*)_2\xrightarrow{\partial_1}(E(\Delta)^*)_1\xrightarrow{\partial_0}(E(\Delta)^*)_0.$$

此处 $(E(\Delta)^*)_{r+1}$ 有一个基，它由单项式

$$e_{i_0}^*\wedge\cdots\wedge e_{i_r}^* \tag{1}$$

组成，其中 $\{i_0,\ldots,i_r\}$ 是单纯复形 $\Delta$ 的所有 $r$ 维面. 微分 $\partial$ 是关于元素 $u$ 的收缩

$$a\stackrel{\partial}{\longmapsto}u\neg a,$$

后者把单项式 (1) 映到它的边界

$$\sum_{j=0}^{d}(-1)^j e_{i_0}^*\wedge\cdots\wedge\widehat{e_{i_j}^*}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}^*.$$

(原文将和式中的 $e_{i_0}^*$ 误写为 $e_{e_{i_0}}^*$ —— 译注) (这里 $\widehat{e_{i_j}^*}$ 意为删除此项. ) 同调 $H_i(E(\Delta)^*,\partial)$ 用来计算空间 $X$ 的约化单纯同调 (但在同调指数 $i$ 中提升 1). 在例 3 中, 我们得到 $H_1(E(\Delta)^*,\partial)=\Bbbk$ 是一维的, 比 $\Delta$ 的分支数小 1, 且 $H_2(E(\Delta)^*,\partial)=\Bbbk$ 是一维的, 因为有一个不可缩一维闭链通过点 3, 4, 5.

有一本从单纯复形出发介绍代数拓扑很好的书 [35].

## 4. Lie 理论

微分分次代数 (differential graded algebras, DGA) 自然地发生在许多领域. 它们提供了关于分次代数的 "全部故事", 通常是 DGA 的上同调, 就像拓扑空间的上链复形相对于它的上同调环一样.

DGA 是带有微分 $d$ 的分次代数 $A=\bigoplus_{p\geq 0}A_p$, 即 $d^2=0$, 它是一个导子, 即对于 $A$ 中的齐次元素 $a,b$, 它满足

$$d(a\cdot b)=d(a)\cdot b+(-1)^{\deg(a)}a\cdot d(b). \tag{2}$$

微分 $d$ 具有次数 1 或 $-1$, 根据它把次数提升 1 或减少 1 而定.

在 $E(V)$ 上给出一个次数 1 的 $\Bbbk$- 线性微分 $d$, 使得 $(E(V),d)$ 成为一个 DGA, 这是什么意思? 在次数 1 和 2 之间, 我们有一个映射

$$V\xrightarrow{d}\wedge^2 V.$$

根据上述导子 (2) 的定义, 容易明白, 这些向量空间之间的任何线性映射能够唯一地扩展为 $E(V)$ 上的一个导子 $d$. 记 $\mathfrak{g}$ 为对偶向量空间 $V^*=\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V,\Bbbk)$. 把上述映射对偶化, 我们得到映射

$$\begin{array}{ccc}\bigwedge^2\mathfrak{g} & \xrightarrow{d^*} & \mathfrak{g},\\ x\wedge y & \longmapsto & [x,y].\end{array}$$

结果是 $d$ 给出一个微分, 即 $d^2=0$, 当且仅当映射 $d^*$ 满足 Jacobi (雅可比) 恒等式

$$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0.$$

因此, 给予 $E(V)$ 一个带有次数 1 的微分的 DGA 结构, 恰好等价于对 $\mathfrak{g}=V^*$ 给出一个 Lie 代数结构.

复形 $(E(V),d)$ 的上同调可以计算 $\mathfrak{g}$ 的 *Lie 代数上同调*. 如果 $\mathfrak{g}$ 是 ($\Bbbk=\mathbb{R}$ 上) 一个连通紧 Lie 群 $G$ 的 Lie 代数, 那么根据 Cartan (嘉当) 的一个定理 [1, Cor.12.4], 上同调环 $H^*(E(V),d)$ 同构于上同调环 $H^*(G,\mathbb{R})$. 有一本很好且综合性的 Lie 代数导引的书 [31]. 书 [18] 很大程度上被用作半单 Lie 群和 Lie 代数的表示的参考书. 但这方面有很多的书, 上述几本书提及较多是因为我就是从这些书学习的.

现在把对偶 $V^*$ 记为 $W$, 用 $S(W)=\mathrm{Sym}(W)$ 记对称代数, 即变量是 $W$ 的任何一个基的多项式环. $(E(V),S(W))$ 是代数的 *Koszul* (*科斯居尔*) *对偶* 对的基本例子; 关于 Koszul

对偶的一般框架，见 [39], [3]. 进而，当赋予 $E(V)$ 一个微分 $d$ 时，这对 $(E(V), d)$ 可被视为 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的包络代数 $U(\mathfrak{g})$ 的 Koszul 对偶；关于微分分次背景下的 Koszul 对偶，见 [40], [17]. Koszul 对偶给出这些代数的模范畴之间的函子，这些函子在适当的商上给出了范畴的等价.

## 5. 组合数学 II: 超平面的排列与 Orlik-Solomon 代数

单纯复形是基本的组合结构，我们在组合数学 I 那一节已经看到，它们怎样由外面环 $E(\Delta)$ 所引起. 组合数学中最成功的统一抽象概念之一是 *拟阵* (*matroid*) (给出更多关联的一个术语可以是 *独立结构*), 它是一种特殊类型的单纯复形. 对于拟阵，相关联的是外代数的商代数，与超平面的排列有重要的联系.

拟阵最原始的来源是线性代数. 考虑向量空间 $\mathbb{k}^m$, 并令 $x_1, \ldots, x_m$ 为这个空间上的坐标函数. 一个线性型 $v = \sum \lambda_j x_j$ 给出 $\mathbb{k}^m$ 中的一个超平面：使 $\sum_j \lambda_j a_j = 0$ 的所有点 $(a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{k}^m$ 的集合. 一组线性型 $v_1, \ldots, v_n$ 决定了超平面 $H_1, H_2, \ldots, H_n$. 我们称之为 *超平面的排列*. 结果是，超平面排列的一些基本性质由线性型 $v_1, \ldots, v_n$ 之间的线性相关性所确定. 我们得到 $[n]$ 上一个组合单纯复形 $M$, 它由 $[n]$ 中使 $v_{i_1}, \ldots, v_{i_r}$ 是线性无关向量的所有子集 $\{i_1, \ldots, i_r\}$ 构成. 但在这个 $M$ 上，还有更多的结构，使它成为一个拟阵. $[n]$ 上一个单纯复形 $M$ 是一个 *拟阵*, 如果以下附加的条件成立：

*如果 $X$ 和 $Y$ 是 $M$ 的独立集合，且 $Y$ 的基数大于 $X$ 的基数，则有 $y \in Y \backslash X$ 使得 $X \cup \{y\}$ 是独立的.*

拟阵 $M$ 的元素称为该拟阵的 *独立集合*, 而 $[n]$ 的不在 $M$ 中的子集称为 *相关的*. 拟阵抽象概念所引起的多样性由下面一些例子说明，我们在其中给出拟阵的独立集合：

- 一组向量 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ 的线性无关子集.
- 图的不含圈的边集合.
- 一族集合 $A_1, A_2, \ldots, A_N$ 的部分截面.

**例 4** 考虑 $\mathbb{C}^2$ 中由两个坐标函数 $v_1 = x_1$ 和 $v_2 = x_2$ 给出的超平面的排列. 补集 $\mathbb{C}^2 \setminus H_1 \cup H_2$ 由非零坐标对 $(a, b)$ 组成，即 $(\mathbb{C}^*)^2$, 其中 $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$. 因 $\mathbb{C}^*$ 同伦等价于圆周 $S^1$, 补集 $\mathbb{C}^2 \setminus H_1 \cup H_2$ 即同伦等价于环面 $S^1 \times S^1$. 此环面的上同调环是外代数 $E(2)$.

这个例子推广了到对 $\mathbb{C}^m$ 中任何超平面排列的补集的上同调环的刻画. 超平面排列的拟阵 $M$, 它是一个单纯复形，根据组合数学 I 那一节，它给出了 $E(n)$ 中一个单项式理想 $I_M$. 对偶元素 $u = e_1^* + \cdots + e_n^*$ 给出一个收缩 $a \xrightarrow{\partial} u \neg a$, 把 $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}$ 映到

$$\sum_j (-1)^j e_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{e_{i_j}} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}$$

(这里 $\widehat{e_{i_j}}$ 意为删除此项). 现在 $I_M + \partial(I_M)$ 也成了 $E(n)$ 中一个理想. 商

$$A(M) = E(n)/(I_M + \partial(I_M))$$

称为与超平面排列相关联的 *Orlik-Solomon* 代数. Peter Orlik 和 Louis Solomon 在 1980 年证明了以下令人惊异的结果 [36].

**定理 5** *令 $T = \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{i=1}^n H_i$ 为一个复超平面排列的补集. 则代数 $A(M)$ 是上同调*

环 $H^*(T,\mathbb{C})$.

**例 6** 在 $\mathbb{C}^3$ 上考虑 $u_1=x_1-x_2$, $u_2=x_2-x_3$ 和 $u_3=x_3-x_1$. 在 $u_1,u_2$ 和 $u_3$ 之间，只有一个相关性. 于是，Orlik-Solomon 代数是 $E(3)$ 除以由关系

$$\partial(e_1\wedge e_2\wedge e_3)=e_1\wedge e_2-e_1\wedge e_3+e_2\wedge e_3$$

生成的理想. 商代数在次数 0, 1, 2 分别有维数 1, 3, 2. 因此，对于补 $T=\mathbb{C}^3\setminus H_1\cup H_2\cup H_3$, 我们有

$$H^0(T,\mathbb{C})=\mathbb{C},\quad H^1(T,\mathbb{C})=\mathbb{C}^3,\quad H^2(T,\mathbb{C})=\mathbb{C}^2.$$

对超平面的排列，或更一般地，对拟阵，它们的 Orlik-Solomon 代数最近被研究得很多，见 [47], [15]. Orlik-Solomon 代数的代数性质给出了超平面排列一些自然的不变量.

## 6. 数学物理

Clifford (克利福德) 代数可以被看作外代数的一个形变. 外代数 $E(V)$ 被定义为商代数 $T(V)/\langle S_2V\rangle$. 固定一个对称双线性型 $b:S_2V\to\Bbbk$. 令 $R=\{r-b(r)\mid r\in S_2V\}$. 则 Clifford 代数是张量代数除以关系 $R$ 的商:

$$Cl_b=T(V)/\langle R\rangle.$$

像外代数 $E(V)=E(n)$ 一样，它有一个基，由所有乘积 $e_{i_1}\cdots e_{i_r}$ 组成，其中 $\{i_1<\cdots<i_r\}$ 是 $\{1,\ldots,n\}$ 的子集; 因此作为 $\Bbbk$ 上的向量空间，它的维数是 $2^n$. 注意，当双线性型 $b=0$ 时，我们得到外代数.

Clifford 代数主要应用于 $\Bbbk$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 的情形. 令 $V=\langle i\rangle$ 为由向量 $i$ 生成的一维向量空间，并令二次型由 $i^2\overset{b}{\longmapsto}-1$ 给出. 则相应的 Clifford 代数是复数域. 当 $V=\langle i,j\rangle$ 是二维空间，且满足

$$i\otimes i\overset{b}{\longmapsto}-1,\quad i\otimes j+j\otimes i\overset{b}{\longmapsto}0,\quad j\otimes j\overset{b}{\longmapsto}-1$$

时，我们得到四元数 (体). 一般地，对一个实对称型 $b$, 我们能找到 $V$ 的一个基，如果 $x_1,\ldots,x_n$ 是坐标函数，则该型为 (其中 $n=p+q$)

$$\sum_{i=1}^{p}x_i^2-\sum_{i=p+1}^{p+q}x_i^2.$$

这样的 Clifford 代数记为 $Cl_{p,q}$.

所以，$Cl_{0,1}$ 是复数域，而 $Cl_{0,2}$ 是四元数 (体). Clifford 代数具有有趣的周期行为: $Cl_{p+1,q+1}$ 同构于 $2\times 2$ 矩阵 $M_2(Cl_{p,q})$, 而 $Cl_{p+8,q}$ 和 $Cl_{p,q+8}$ 都同构于 $16\times 16$ 矩阵 $M_{16}(Cl_{p,q})$. 因此，实数域上的 Clifford 代数基本上被 $Cl_{p,0}$ 和 $Cl_{0,q}$ $(p,q\le 7)$ 所分类. 有一本介绍 Clifford 代数很好的书 [19].

当 $Cl_{p,q}$ 是单代数且 $Cl_{p,q}\to\mathrm{End}(W)$ 是 $Cl_{p,q}$ 的一个不可约表示时，$W$ 被称为一个旋量 (spinor) 空间. 这些表示在数学物理中大量地发生. 例如，$Cl_{1,3}$ 同构于 $M_4(\mathbb{R})$, 而这个在 $\mathbb{R}^4$ 上的表示是带有 1 个时间维数和 3 个空间维数的 Minkowski (闵科夫斯基) 空间. Clifford 代数在数学物理中应用的先驱者是 David Hestenes [23], [24], [25], 他在这些著作中预见了 Clifford 代数在经典力学中的全部应用. 他称之为几何代数. 书 [8] 对几何

代数在物理学中的应用提供了深思熟虑的介绍. Basil Hiley 是用代数方法接近量子力学的另一个倡导者 [28]:

"...量子现象本质上可以利用实数上的 Clifford 代数来完全描述，而不需要求助于用 Hilbert (希尔伯特) 空间中波函数的特殊表示. 这去除了利用 Hilbert 空间和需要波函数才能进行的所有物理想象的必要性."

## 7. 代数几何

外代数上的有限生成分次模似乎离几何还很遥远. 然而，我们将要看到，它们可能隐含了代数几何最重要的不变量，即射影空间上的层 (sheaves) 的挠曲 (twists) 的上同调维数.

**例 7** 令 $n=2$ 和 $E=E(2)$. 考虑自由 $E$- 模的映射:

$$E \xrightarrow{d=\left[\begin{smallmatrix} e_2 \\ e_1 \end{smallmatrix}\right]} E^2.$$

写 $E^2 = Eu_1 \oplus Eu_2$, 其中 $u_1$ 和 $u_2$ 是这个模的生成元，这个映射的余核是模 $M = Eu_1 \oplus Eu_2/\langle e_2u_1 + e_1u_2\rangle$. 我们很快就会解释，这样一个映射可以成为自由 $E$- 模的一个复形 (我们令 $d^0 = d$):

$$\begin{aligned} \cdots \to E^2 \xrightarrow{d^{-2}=[e_1\ \ e_2]} E \xrightarrow{d^{-1}=[e_1\wedge e_2]} E \xrightarrow{d^0=\left[\begin{smallmatrix} e_2 \\ e_1 \end{smallmatrix}\right]} \\ E^2 \xrightarrow{d^1=\left[\begin{smallmatrix} e_2 & 0 \\ e_1 & e_2 \\ 0 & e_1 \end{smallmatrix}\right]} E^3 \to E^4 \to \cdots. \end{aligned} \tag{3}$$

它是一个复形，因为很容易验证 $d^p \circ d^{p-1} = 0$. 这个序列在每个位置都是正合的 (exact), 即对每个 $p$, $d^p$ 的核等于 $d^{p-1}$ 的像. 于是它是一个*零调的* (*acyclic*) *复形*.

$E = E(V)$ 上每个有限生成分次模 $M$, 或等价地，映射 $d$, 给出这样一个零调复形. 在上例中，自由模的秩遵循简单的模式，$1,2,3,4,\ldots$, 但一般地，这些秩是什么？能否给出一个有意义的解释？事实上，2003 年的一个发现 [13] 告诉我们这确实是有意义的.

作为其自身上的模 $E(V)$, 它既是投射模又是内射模. 给出 $E(V)$ 上一个有限生成分次模 $M$, 我们可以构作一个极小自由 (因而是投射) 分解

$$P^\bullet \longrightarrow M, \quad 其中\ P^p = \bigoplus_{q\in\mathbb{Z}} W_q^p \otimes_{\Bbbk} E$$

(这些 $W_q^p$ 是域 $\Bbbk$ 上的向量空间，其元素具有次数 $q$), 以及一个极小内射分解

$$M \longrightarrow I^\bullet, \quad 其中\ I^p = \bigoplus_{q\in\mathbb{Z}} W_q^p \otimes_{\Bbbk} E,$$

结合起来成为一个零调复形 (如同例 7 中),

$$T:\ \cdots \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow I^2 \longrightarrow \cdots, \tag{4}$$

称为 $M$ 的 *Tate 分解*. 所以我们得到一个对应:

$$E(V)\,上的分次模 \rightsquigarrow E(V)\,上的\ \text{Tate}\,分解. \tag{5}$$

现在我们从外代数 $E(V)$ 上有限生成分次模 $M=\bigoplus_{i=a}^{b} M_i$ 出发，过渡到另一种构造. 令 $W$ 为对偶向量空间 $V^*$. 乘法 $V\otimes_{\Bbbk} M_i \to M_{i+1}$ 给出一个映射

$$M_i \longrightarrow W\otimes_{\Bbbk} M_{i+1}. \tag{6}$$

令 $S=\mathrm{Sym}(W)$ 为对称代数 (一个多项式环). 映射 (6) 引出映射

$$\cdots\longrightarrow S\otimes_{\Bbbk} M_p \xrightarrow{d^p} S\otimes_{\Bbbk} M_{p+1} \xrightarrow{d^{p+1}} \cdots \xrightarrow{d^{q-1}} S\otimes_{\Bbbk} M_q \longrightarrow\cdots. \tag{7}$$

这些映射给出 $S$- 模的一个有界 (bounded) 复形，即 $d^{i+1}\circ d^i=0$ (这是在 "Lie 理论" 一节中提到的 Koszul 对偶框架中的对应). 任何有限生成分次的 $S=\mathrm{Sym}(W)$- 模可以被 *分层* (*sheafified*) 为射影空间 $\mathbb{P}(W)$ 上的一个 *凝聚层*. 特别，我们可以把上述复形分层而得到凝聚层的一个复形：

$$E(V)\text{ 上的分次模 } \rightsquigarrow \mathbb{P}(W)\text{ 上凝聚层的有界复形}. \tag{8}$$

这个对应来自于 1978 年的 [4], 是著名的 Bernstein-Gelfand-Gelfand (伯恩斯坦 - 盖尔范德 - 盖尔范德) (BGG) 对应. 它在某种程度上更为精细，可以被描述为 (8) 中对象的适当范畴之间的一种范畴等价.

令人惊异的是, 如果 $M$ 通过 BGG 对应 (8) 给出 $\mathbb{P}(W)$ 上的一个凝聚层 $\mathcal{F}$ (这意味着复形 (7) 的分层化 (sheafification) 仅有一个非零的上同调层 $\mathcal{F}$), 则我们能从通过对应 (5) 得到的 Tate (泰特) 分解 $T$, 了解到 $\mathcal{F}$ 所有挠曲的全部 *层上同调* 群.

**定理 8** [13, Thm. 4.1] *如果 $M$ 通过 BGG 对应 (8) 给出射影空间 $\mathbb{P}(W)$ 上一个凝聚层 $\mathcal{F}$, 且 $M$ 的 Tate 分解是 (4), 则层上同调*

$$H^p(\mathbb{P}(W),\mathcal{F}(q))=W_q^{p+q}.$$

回到本节开始的例 7, 对应于这个模 $M$ 的层是射影直线 $\mathbb{P}^1=\mathbb{P}(W)$ 上的结构层 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$. 于是，Tate 分解 (3) 告诉我们，对 $d\geq 0$, 层上同调

$$H^0(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)) = \begin{cases}\Bbbk^{d+1}, & d\geq 0,\\ 0, & d<0,\end{cases}$$

$$H^1(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-d)) = \begin{cases}\Bbbk^{d-1}, & -d<0,\\ 0, & -d\geq 0.\end{cases}$$

Tate 分解 $T$ 一个重要特征是它由任意微分 $T^i \xrightarrow{d^i} T^{i+1}$ 所完全确定. 这是因为 $T^{\leq i}$ 是 $\mathrm{im}\, d^i$ 的极小投射分解，而 $T^{>i}$ 是 $\mathrm{im}\, d^i$ 的极小内射分解. 这就给了我们在构造中惊人的自由度. 外形式的任意齐次矩阵 $A$ 给出映射

$$\bigoplus_q W_q^0\otimes_{\Bbbk} E \xrightarrow{d_A} \bigoplus_q W_q^1\otimes_{\Bbbk} E. \tag{9}$$

然后由 (8), 外代数上的模 $M=\mathrm{im}\, d_A$ 给出 $\mathbb{P}(W)$ 上凝聚层 $\mathcal{F}^\bullet$ 的一个复形，且 $\mathbb{P}(W)$ 上所有这样的有界复形 (在适当意义下) 都来自外形式的这样一个齐次矩阵 $A$. 于是射影空间上凝聚层的有界复形可以通过给出外形式的一个齐次矩阵 $A$ 来指定，且任何矩阵 $A$ 将给出某个这样的有界复形. 与 $M$ 和 $\mathcal{F}^\bullet$ 相关联的 Tate 分解是我们在 (9) 中取 $\ker d_A$ 的

一个极小投射分解和 $\operatorname{coker} d_A$ 的一个极小内射分解所得到的复形，而这个分解告诉我们凝聚层复形的上同调.

**例 9** 令 $V$ 为由 $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ 生成的五维向量空间. 矩阵

$$A = \begin{bmatrix} e_1 \wedge e_2 & e_2 \wedge e_3 & e_3 \wedge e_4 & e_4 \wedge e_5 & e_5 \wedge e_1 \\ e_3 \wedge e_5 & e_4 \wedge e_1 & e_5 \wedge e_2 & e_1 \wedge e_3 & e_2 \wedge e_4 \end{bmatrix}$$

给出一个映射 $E^5 \to E^2$. 它通过 BGG 对应 (8) 给出了 40 多年前发现的 $\mathbb{P}^4$ 上著名的 Horrocks-Mumford (芒福德) 丛 (bundle) [30], 另见 [13, §8]. 在特征零的情形，这基本上是我们所知道仅有的维数大于等于 4 的射影空间上的不可分解的秩 2 丛. 一个有趣问题是利用上面的方法去尝试构造射影空间 $\mathbb{P}^n$ 上秩 $\leq n-2$ 的新的丛，但就我们所知，还没有人是成功的.

书 [14] 和 [12] 讨论了 Tate 分解和代数几何. 软件程序 [21] 包含了用 Tate 分解做计算的软件包 BGG.

## 8. 建模与计算

最近 15 年出现了一大批给出外代数和 Clifford 代数应用的书和专著, 通常是以 “几何代数” 的名义. 剑桥大学和阿姆斯特丹大学的团队在促进和倡导几何代数方面特别活跃. C. Doran 和 A. Lasenby 的《 Geometric Algebra for Physicists 》 [8] 是一本写得很好，可读性强的介绍外代数， Clifford 代数及其在物理学的所有领域应用的书，该书遵循了 D. Hestenes 所概述的思想. 更高深的处理是 [2]. 由 L. Dorst, D. Fontijne 和 S. Mann 所写的书《 Geometric Algebra for Computer Scientists: An Object Oriented Approach 》 [10] 说明了几何代数作为一个有效的工具描述一大类几何模型，包括线性空间、圆周、球面、旋转和反射. 特别，它考虑了 [32] 所发展的共形几何模型. C. Perwass 的书《 Geometric Algebra for Engineers 》 [37] 类似地把几何代数应用到出现在工程学中的模型：照相定位、运动跟踪以及统计学. 它还考虑了实施过程中的数值问题. 其他关于几何代数及其在计算机建模和工程学中应用的书有 [26], [27], [43], [9], [45] 和 [46]. 书 [11] 给出了大范围的作者所进行的应用的一个概述.

综合性的书《 Grassmann Algebra 》 [5] 考虑了用软件 Mathematica 来计算外代数的所有方面. 它讨论了外积、内积和回归积及其几何解释. 它的第 2 卷处理广义 Grassmann 积 (它构成了外积和内积之间的积的中间链), 以及对超复数和对力学的应用. 关注更加纯数学的其他专著有 [42] 和 [33].

## 参考文献

[1] G. Bredon, Topology and Geometry, Graduate Texts in Mathematics, 139, Springer-Verlag, New York, 1993.

[2] William E. Baylis, Clifford (Geometric) Algebras: With Applications in Physics, Mathematics, and Engineering, Springer, 1996.

[3] Alexander Beilinson, Victor Ginzburg, and Wolfgang Soergel, Koszul duality patterns in representation theory, J. Amer. Math. Soc., 9 (1996), no. 2, 473–527.

[4] Alexander A. Beilinson, Coherent sheaves on $\mathbb{P}^n$ and problems of linear algebra, Funct.

Anal. Appl., 12 (1978), no. 3, 214–216.

[ 5 ] John Browne, Grassmann Algebra, vol. 1, Create Space Independent Publishing Platform, 2012.

[ 6 ] Winfried Bruns and Jürgen Herzog, Cohen-Macaulay Rings, Cambridge University Press, 1998.

[ 7 ] Michael J. Crowe, A History of Vector Analysis: The Evolution of the Idea of a Vectorial System, Courier Dover Publications, 1967.

[ 8 ] Christian Doran and Anthony Lasenby, Geometric Algebra for Physicists, Cambridge University Press, 2007.

[ 9 ] Leo Dorst, Chris Doran, and Joan Lasenby, Applications of Geometric Algebra in Computer Science and Engineering, Springer, 2002.

[10] Leo Dorst, Daniel Fontijne, and Stephen Mann, Geometric Algebra for Computer Science (Revised Edition): An Object-Oriented Approach to Geometry, Morgan Kaufmann, 2009.

[11] Leo Dorst and Joan Lasenby, Guide to Geometric Algebra in Practice, Springer, 2011.

[12] D. Eisenbud et al., Computations in Algebraic Geometry with Macaulay 2, vol. 8, Springer, 2002.

[13] D. Eisenbud, G. Fløystad, and F. O. Schreyer, Sheaf cohomology and free resolutions over exterior algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 355 (2003), no. 11, 4397–4426.

[14] David Eisenbud, The Geometry of Syzygies: A Second Course in Algebraic Geometry and Commutative Algebra, vol. 229, Springer, 2005.

[15] Michael Falk, Combinatorial and algebraic structure in Orlik-Solomon algebras, European Journal of Combinatorics 22 (2001), no. 5, 687–698.

[16] G. Fløystad and J. E. Vatne, (Bi-)Cohen-Macaulay simplicial complexes and their associated coherent sheaves, Comm. Algebra 33 (2005), no. 9, 3121–3136.

[17] Gunnar Fløystad, Koszul duality and equivalences of categories, Trans. Amer. Math. Soc. 358 (2006), no. 6, 2373–2398.

[18] W. Fulton and J. Harris, Representation Theory: A First Course, GTM 129, Springer, 1991.

[19] D. J. H. Garling, Clifford Algebras: An Introduction, vol. 78, Cambridge University Press, 2011.

[20] Hermann Grassmann and Lloyd C. Kannenberg, Extension Theory, American Mathematical Society, 2000.

[21] Daniel R. Grayson and Michael E. Stillman, Macaulay2, a software system for research in algebraic geometry, available at `http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/`.

[22] Jürgen Herzog and Takayuki Hibi, Monomial Ideals, Springer, 2011.

[23] David Hestenes, Space-Time Algebra, Gordon and Breach, 1966.

[24] David Hestenes, Clifford Algebra to Geometric Algebra: A Unified Language for Mathematics and Physics, D. Reidel Publishing Company, 1984.

[25] David Hestenes, New Foundations for Classical Mechanics, Springer, 1999.

[26] David Hestenes, Old wine in new bottles: A new algebraic framework for computational geometry, Geometric Algebra with Applications in Science and Engineering, Springer, 2001, p. 3–17.

[27] Dietmar Hildenbrand, Foundations of Geometric Algebra Computing, vol. 8, Springer, 2012.

[28] B. J. Hiley and R. E. Callaghan, Clifford algebras and the Dirac-Bohm quantum Hamilton-Jacobi equation, Foundations of Physics 42 (2012), no. 1, 192–208.

[29] Melvin Hochster, Cohen-Macaulay rings, combinatorics, and simplicial complexes, Ring Theory, II (Proc. Second Conf., Univ. Oklahoma, Norman, Okla., 1975), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., Vol. 26, Dekker, New York, 1977, p. 171–223.

[30] G. Horrocks and D. Mumford, A rank two vector bundle on P4 with 15,000 symmetries, Topology, 12 (1973), no. 1, 63–81.

[31] James E. Humphreys, Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, vol. 1980, Springer, New York, 1972.

[32] Hongbo Li, David Hestenes, and Alyn Rockwood, Spherical conformal geometry with geometric algebra, Geometric Computing with Clifford Algebras, Springer, 2001, p. 61–75.

[33] Douglas Lundholm and Lars Svensson, Clifford Algebra, Geometric Algebra, and Applications, 2009.

[34] Ezra Miller and Bernd Sturmfels, Combinatorial Commutative Algebra, vol. 227, Springer, 2004.

[35] James R. Munkres, Elements of Algebraic Topology, vol. 2, Addison-Wesley, Reading, 1984.

[36] Peter Orlik and Louis Solomon, Combinatorics and topology of complements of hyperplanes, Invent. Math. 56 (1980), no. 2, 167–189.

[37] Christian Perwass, Geometric Algebra with Applications in Engineering, vol. 4, Springer, 2008.

[38] Hans-Joachim Petsche, Albert C. Lewis, Jörg Liesen, and Steve Russ (eds.), From Past to Future: Graßmann's Work in Context: Graßmann Bicentennial Conference, September 2009, Springer, 2010.

[39] Alexander Polishchuk and Leonid Positselski, Quadratic Algebras, University Lecture Series, vol. 37, American Mathematical Society, 2005.

[40] Leonid Efimovich Positsel'skii, Nonhomogeneous quadratic duality and curvature, Funct. Anal. Appl. 27 (1993), no. 3, 197–204.

[41] Gert Schubring (ed.), Hermann Günther Graßmann (1809–1877): Visionary Mathematician, Scientist and Neohumanist Scholar, Kluwer Academic Publishers, 1997.

[42] William C. Schulz, Theory and application of Grassmann algebra, available at `http://www.cefns.nau.edu/~schulz/grassmann.pdf`, 2011, preprint.

[43] Gerald Sommer, Geometric Computing with Clifford Algebras: Theoretical Foundations and Applications in Computer Vision and Robotics, Springer, 2001.

[44] Richard P. Stanley, Combinatorics and Commutative Algebra, Birkhäuser Boston, 2004.

[45] John A. Vince, Geometric Algebra for Computer Graphics, vol. 1, Springer, 2008.

[46] John A. Vince, Geometric Algebra: An Algebraic System for Computer Games and Animation, Springer, 2009.

[47] S. A. Yuzvinsky, Orlik-Solomon algebras in algebra and topology, Russian Mathematical Surveys 56 (2007), no. 2, 293.


(李福安 译　袁向东 校)