维普资讯 http://www.cqvip.com

拓扑，抽象代数，理想，环.

数学争鸣

④
46-57

拓扑和抽象代数：理解数学的两种途径

O189
O153

Weyl, H
Hermann Weyl 冯绪宁

译者注：赫尔曼·魏尔 (Hermann Weyl) 是本世纪最伟大的数学家之一．他对如何理解数学也发表过不少精彩的见解．《数学译林》曾刊出他的两篇著述："数学的思维方式"(见《数学译林》1982 年第 2 期) 和"数学中公理方法与构造方法之我见"(见《数学译林》1988 年第 4 期)．现刊出的这篇文章，是 1931 年 10 月他在瑞士大学预科教师协会举办的夏季学习班上的讲演，根据 A. Shenitzer 的英译本译出．

当我们通过一系列复杂的形式化的结论和计算，被动地接受数学真理时，并不感到十分惬意；这犹如盲人费力地、一步步地靠触觉摸索和感知自己所走的路．因此，我们首先想从总体上看看我们的目标和道路；我们想要理解证明的思想，即更深层的内涵．现代的数学证明跟现代的试验装置十分相象：朴素的基本原则被大量的技术细节所掩盖，以至几乎无从察觉．F. 克莱因 (Klein) 在关于 19 世纪数学史的讲演中谈到黎曼 (Riemann) 时说：

> 无疑，每一种数学理论的拱顶石是有关它的所有的论断的令人信服的证明．无疑，数学中的罪过是超前了可信的证明．但是，数学长盛不衰的秘密在于有新的问题，在于预料到新的定理，使我们得到种种有价值的结论和联系．没有创新的观点，没有新的目标，数学可能很快在其逻辑证明的严格性下枯竭；一旦实质性的东西消失，数学便开始停滞．在某种意义上，数学一直是由那样一些人推动前进的，他们与众不同的特点是善于直觉而不是严格证明．

克莱因本人的方法的要点就是直觉地洞察散布于各种原理中的内在的联络与关系．在某种程度上，他不善于高度集中的具体的逻辑推演．闵可夫斯基 (Minkowski) 在纪念狄

原题：Topology and Abstract Algebra as Two Roads of Mathematical Comprehension. 译自：*The Amer. Math. Monthly*, Vol.102, No. 5, 1995, pp. 453–460.

维普资讯 http://www.cqvip.com

利克雷 (Dirichlet) 的演说中，比较了被德国人冠以狄利克雷名字的极小原理 (实际上，W. 汤姆森 (Thomson) 对该原理用得最多) 和真正的狄利克雷原理：用最少的盲目计算和最多的深刻思想来征服难题. 闵可夫斯基说，正是狄利克雷在数学历史上开创了新的时期.

要达到对数学事物的这种理解，有何秘诀，办法何在？近来，科学哲学的研究一直在试图比较什么是科学的解释 (scientific explanation) 和什么是理解 (understanding)、后者指一门作为文、史、哲学基础的阐释的艺术. 这种哲学引入了直觉 (intuition) 和理解这两个词，它们带有某种神秘色彩，又具有深刻内涵和直接性 (immediacy). 在数学中，我们当然喜欢更清醒和理智地看待各种事物. 我无力在此讨论这些问题，精确地分析有关的智力活动对于我来说是太困难了. 但是，至少我能从描述理解过程的许多特征中选出有明显的重要性的一种. 人们往往用一种自然的方式将数学研究中的问题分解成各个不同的方面，使得每一个方面都能通过它本身的相对狭窄和易于审视的一组假设来探讨，然后，再对各种具有适当的特殊性的局部结果进行综合，从而返回到整个复杂的问题. 最后的这步综合完全是机械的；第一步的分析，即进行适当的区分及一般化，才是伟大的艺术. 最近几十年的数学十分钟情于一般化和形式化. 不过，如果以为数学就是为了一般化而追求一般化，那是不符合真理的误解；数学中那种很自然的一般化，是通过减少假设的数目而进行简化，从而使我们能理解紊乱的整体中的某些方面. 当然，朝不同方向的一般化有可能使我们理解一个特殊的具体问题的不同方面. 于是、谈论一个问题的真实的基础、真正的源头时，就带有主观和武断的任意性. 判断一种区分和相关的一般化是否是自然的唯一标准，也许就是看其成果是否丰硕. 当一位熟练的和 "有敏锐感知力" 的研究者，针对某个研究主题，按照他的经验进行所有类比，将区分和一般化的过程系统化，我们便到达了某个公理体系；今天，公理化已不是一种澄清和深化基础的方法，而是从事具体数学研究的工具.

可以估计，近年来数学家埋头于一般化、形式化已到达这种程度，我们可以找到许多为一般化而一般化的即廉价又容易的工作. Pólya 称这种工作为稀释，它并不增加实质性的数学财富、而非常像往汤里加水来延长饭局. 这是退化而非进步. 老年时的 Klein 说："在我看来，数学像座在和平时期出售武器的商店. 厨窗里摆满了精巧的、富于艺术性又极具杀伤力的奢侈品，使那些内行的鉴赏家兴奋不已、这些东西的起源和用途——射击，打败敌人——已隐匿到幕后，差一点被人遗忘了." 他的这份诉状也许不乏真理，但从整体上看，我们这一代人认为他对我们的工作的这种评价并不公正、

在我们这个时代，有两种理解的模式业已被证明是特别深刻和富于成果的、它们是拓扑和抽象代数. 很大一部分数学带有这两种思维模式的印记. 究其原因，不妨先来考查实数这一处于中心地位的概念. 实数系就像罗马神话中的门神的头，它有朝向相反方向的两付面孔. 一面是具有运算 + 和 × 及逆的域，另一面是个连续的流形，它的这两付面孔又是连在一起的，并无间断. 一侧是数的代数面孔，另一侧则是数的拓扑面孔、由于现代公理体系头脑简单，(跟现代政治不同) 不喜欢这种战争与和平的模棱两可的混合物，于是在两者之间制造了明显的裂痕. 由关系 > 和 < 所表示的数的大小的概念，

维普资讯 http://www.cqvip.com

则成为居于代数和拓扑之间的一类关系.

对于连续统一体的研究，如果只限于探讨在任意连续形变或连续映射下保持不变的性质和差异，则属于纯拓扑的范围. 此处的映射只需要能保证那些独特的性质不会丧失. 于是，像球面那样的封闭性或像普通平面那样的开放性就成为曲面的拓扑性质. 平面上的一个区域如果像圆的内部那样可被任何一次横切分割成几部分，则我们称它是单连通的. 另一方面，一个环形带域就是双连通的，因为存在一种横切不能把它分割成部分，但是继而再任意作一次横切必将其分成部分. 球面上任意一条闭曲线皆可经过连续变形收缩为一个点；而环形曲面上的闭曲线的情形就不然. 空间中的两条闭曲线可以互相盘绕，也可以互不盘绕. 这些都是属于具有拓扑性质或拓扑气质的例子. 它们涉及跟几何图形的所有更精细的性质有基本差异的性质. 是奠基于连续性这种单一的观念之上的. 像度量性质这一连续流形的特殊性质与此风马牛不相及. 其它有关拓扑性质的概念有：极限，点的序列收敛到一个点，邻域以及连续线等.

在极粗略地勾划了拓扑之后，我想简要地告诉大家抽象代数发展的动机. 然后，我要用一个简单的例子说明，如何从拓扑的观点和抽象代数的观点来看待同一个研究课题.

纯代数学家对于数学所能做的一切在于用数作加、减、乘和除四种运算. 如果一个数系是个域，即它在这些运算下封闭，那么代数学家就不能越出其领地了. 最简单的域是有理数域. 另一个例子是由形如 $a+b\sqrt{2}$ 这样的数所构成的域，其中 a 和 b 是有理数. 众所周知的多项式不约性的概念是与多项式的系数所属的域有关并且依赖于后者的. 一个系数在域 K 中的多项式 $f(x)$ 被称为在域 K 上不可约，如果它不能写成两个系数皆在 K 上的非常数的多项式的乘积 $f_1(x)\cdot f_2(x)$. 求解线性方程组和借助欧几里得算法定出两个多项式的最大公因子等，可分别在方程组的系数或多项式的系数所属的域中实施. 代数的经典问题是求代数方程 $f(x)=0$ 的解，其中 f 的系数属于域 K, 比如说它是有理数域. 若已知 θ 是该方程的根，则用 θ 和 K 中的数作四种代数运算后得到的数就都是可知的了. 这些数构成一个域 $K(\theta)$、它包含了 K. 在 $K(\theta)$ 中，θ 成为起决定作用的数，即 $K(\theta)$ 中所有其它的数都可由 θ 经有理运算导出. 但 $K(\theta)$ 中有许多数，实际上是所有的数都可起到与 θ 相同的作用. 因此，如果我们以研究域 $K(\theta)$ 来代替对方程 $f(x)=0$ 的研究将是一个突破. 这样做我们可以略去一切无谓的细节，同时可以考虑对 $f(x)=0$ 使用 Tschirnhausen 变换而得到的所有方程. 数域的代数理论，首先是其算术理论，乃是数学中的卓越创造. 从结果的丰富以及深度来看，那是最完美的创造.

代数中有一些域的元素不是数. 单变量的或者说未定元 x 的多项式 (系数在某个域中)、在加、减和乘法下是封闭的，但在除法下则不然. 这样的量构成的系统称作整环. 考虑 x 是一个连续取值的变元这种想法不属于代数的范围；它仅仅是个未定元，一个空泛的符号，与多项式的系数结合成一个统一的表达式，使人们易于记住加法与乘法的规则、 0 也是一个多项式，它的所有系数都是 0(它不是指对于变元 x 的所有取值皆为 0 的多项式). 我们可以证明两个非零多项式的乘积 $\neq 0$. 代数的观点不排斥把 x 用我们所考虑的域中的元素 a 代换的作法. 当然，我们也可以用具有一个或多个未定元 $y, z, \cdots$ 的多项式来代换 x. 这种代换是一种形式过程，它实现了从 x 的多项式整环 $K[x]$ 到 K

维普资讯 http://www.cqvip.com

或到整环 $K[y, z, \cdots]$ 之上的忠实的投影. 这里的“忠实”意味着应保持由加法和乘法所建立的各种关系. 这是多项式的形式演算，是我们要教给中学里学代数的学生的. 当我们作多项式的商，便得到了有理函数域，此时必须用同样的形式方法来讨论. 注意，这个域中的元素不再是数而是函数. 类似地，系数在 K 中并具有两个变元 x、y 或三个变元 x, y、z 的多项式和有理函数分别构成整环或域.

比较下列三个整环：整数环，系数为有理数的 x 的多项式环，系数为有理数的 x 和 y 的多项式环. 欧几里得算法对前面两个环成立，因此我们有如下定理：如 a, b 是两个互素的元素，则在相应的环里有元素 p, q, 使得

$$1 = p \cdot a + q \cdot b. \tag{*}$$

这意味着我们所论及的这两个环是唯一分解整环. 定理 (*) 对两变元的多项式不成立. 例如， $x - y$ 和 $x + y$ 是两个互素的多项式，对任意选取的多项式 $p(x, y)$ 和 $q(x, y)$, 多项式 $p(x, y)(x - y) + q(x, y)(x + y)$ 的常数项都是 0 而不是 1. 然而系数在某域中的两变元的多项式却同样构成唯一分解整环. 这个例子道出了两者之间有趣的相似之处以及差别所在.

代数中还有另一种构作域的办法. 它既不涉及数也不涉及函数，而是考虑同余 (类). 设 p 是一整素数. 如果两个数的差能被 p 整除，则我们将这两个数视为同一，或称它们是 mod p(模 p) 同余 (为了能“看见”同余的含义，不妨将一根线绕在周长为 p 的圆形物上试试), 这样便得到了有 p 个元素的域. 这种表示法在整个数论中是极为有用的. 例如考虑下述有大量应用的 Gauss 定理：如 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是两个整系数的多项式，使得乘积 $f(x) \cdot g(x)$ 的所有系数都能被素数 p 整除，则 $f(x)$ 的全部系数或 $g(x)$ 的全部系数必被 p 整除. 这恰是一个平凡的定理 —— 两个多项乘积为 0 仅当两因子之一为 0 时成立 —— 对于刚描述过的系数域的应用. 这个整环含有这种多项式，它本身不是 0, 却在变量的所有取值处为 0; $x^p - x$ 就是这种多项式，事实上由 Fermat 定理知

$$a^p - a \equiv 0 (\bmod p).$$

Cauchy 利用类似的方法构造复数. 他将虚单位 i 作为一个未定元，讨论实系数 i 的多项式模 $i^2 + 1$ 的情形. 如果两个多项式的差能被 $i^2 + 1$ 所整除，他即认为它们相等. 用这个方法，实际上不可解的方程 $i^2 + 1 = 0$ 就多少成为可解的了. 注意多项式 $i^2 + 1$ 在实数上是素的. Kronecker 推广了 Cauchy 的作法. 他设 K 是一个域， $p(x)$ 是 K 上的素多项式. 系数在 K 中的多项式 $f(x)$ 经 mod $p(x)$ 后就构成了域 (不仅仅是整环). 从代数观点看，这种作法完全等价于我们前面所描述的内容，并可以认为它就是通过在 K 上添加方程 $p(x)$ 的根 θ 而将 K 扩充为 $K(\theta)$. 但这种作法确有优越性，即它涉及的是纯代数领域的事，并且避开了去解一个实际上在 K 上不可解的方程的要求.

很自然，这些发展会促进代数的纯公理化的过程. 域是一个被称为数的对象的系统，它在被称为加法和乘法的两种运算下封闭，且满足通常的公理：两种运算都满足结合律和交换律，乘法对于加法满足分配律，两种运算都是唯一可逆的，分别导出减法和除法.

维普资讯 http://www.cqvip.com

如果将乘法可逆性公理去掉，则所产生的系统称为环．现在，“域”不再像以前只标示实数或复数连续统中的某个部分，而是一个独立自足的宇宙了．我们只能对同一域中的元素而不能对不同域中的元素作运算．在运算过程中，我们无需使用根据大小关系抽象得来的符号 $<$ 和 $>$. 这类关系与代数毫不相干，抽象“数域”中的“数”是不受这种关系支配的．此时，分析中具同一性状的数的连续统，将被无限多样的结构不同的域所代替．前面我们所描述的添加一个未定元，以及将那些相对于某个固定的素元素同余的元素视为等同的作法，可被看作从给定的环或域导出另外的环或域的两种构作模式．

在几何基本公理的基础上，我们也可以导出这种抽象数概念．让我们看平面射影几何的情形．单单由关联公理就可导出一个“数域”，它跟这种几何联系得十分自然．它的元素“数”是一种纯粹的几何要素——伸缩 (dialation)．点和直线是该域中的“数”构成的三元组的比，分别为 $x_1:x_2:x_3$ 和 $u_1:u_2:u_3$，使得点 $x_1:x_2:x_3$ 位于直线 $u_1:u_2:u_3$ 上的关联性由下列方程表示：

$$x_1u_1+x_2u_2+x_3u_3=0.$$

反之，若利用这种代数表达式去定义几何术语，则每个抽象域导出与之对应的射影平面都满足关联公理．由此可见，对与射影平面相联系的数域要加的限制，不能从关联公理方面引出．此时，代数与几何之间的先天的和谐以最令人难忘的方式显现出来了．对于跟普通的实数连续统对应的几何数系，我们必须引入序公理及连续性公理，它们跟关联公理属于完全不同的类型．这样，我们便到达了对若干世纪以来支配数学发展的观念的逆转，这种逆转似乎最早起源于印度，并由阿拉伯学者传到西方：今日，我们已将数的概念作为几何的逻辑前提，因此我们进入了所有的量的王国，其中都耸立着普遍的、系统发展了的、独立于各种应用的数的概念．不过现在让我们回到希腊人的观念上来：每个学科都有一个与之相结合的内在的数的王国，它必须由该学科的内部导出．我们不仅在几何中，而且在量子物理中同样经历了这种逆转．根据量子物理学，对于跟特殊的物理结构相联系的物理量 (不是依赖于不同状态可能取的数值)、容许有加法和非交换的乘法，这样便得到一个内在的代数量的系统，它不能被看作是实数系的一部分．

现在我要实现自己的许诺，举一个简单的例子，以说明分析学的拓扑模式与抽象代数模式间的相互关系．我考虑单变元 x 的代数函数理论．设 $K(x)$ 是 x 的有理函数域，其系数是任意的复数．设 $f(z)$，或更确切地设 $f(z;x)$ 是 z 的 n 次多项式，其系数在 $K(x)$ 中．前面已说明这样的多项式在 $K(x)$ 上不可约．这是纯代数的概念．现构造一个由方程 $f(z;x)=0$ 决定的 n 值代数函数的 Riemann 曲面．它的 n 个叶展布在 $x-$ 平面上．为了能方便地将 $x-$ 平面通过球极平面射影映入 $x-$ 球面，我们在 $x-$ 平面上加上无穷远点．如球面一样，我们的 Riemann 曲面现在是闭的．多项式 f 的不可约性可由 $z(x)$ 的 Riemann 曲面的很简单的拓扑性质表现出来，即它的连通性：如果我们晃摇这个 Riemann 曲面的纸做的模型，它不会破裂分为几片．在这里你看到了纯代数与纯拓扑概念的吻合．两者实现了沿不同方向的一般化．不可约性这一代数概念仅仅依赖于这样的事实：多项式的系数在一个域中．特别地，$K(x)$ 可以换为 x 的有理函数域，其系数属于事先指定的域

维普资讯 http://www.cqvip.com

K, 后者用以代替所有复数构成的连续统. 另一方面，从拓扑角度看，所论及的曲面是否 Riemann 曲面，是否被赋予了一个共形结构，是否由有限多个展布在 $x-$ 平面上的叶组成等都无关紧要. 两个对手中的每一位都可以指责对方只注意枝节而忽略了本质特征. 谁对呢？像这样的一些问题，它们其实并不涉及事实本身，而只涉及看待事实的方式，而当它们激起人们的情绪时可能会导致敌意甚至流血事件. 当然在数学中，后果不会如此严重. 然而， Riemann 的代数函数论的拓扑理论与 Weierstrass 的更代数化的学派之间的对立，导致数学家分了派系，并几乎持续了一代人的时间.

Weierstrass 本人在给他的忠实弟子 H. A. Schwarz 的信中写道：“对于我一直在研究的函数论的原理，我考虑得越多就越加强了我如下的信心，该理论必须建立在代数真理的基础之上. 因此当情形反过来，（简单地说是）用‘超越物’[1] 来建立简单的和基本的代数定理 —— 用 Riemann 获得的许多发现来考虑代数函数的最重要的性质，那么不管初看起来多么有吸引力，其实并非是正确的方法.” 这就把我们变成了单面人；拓扑的或代数的理解方式，没有哪一种能使我们承认它无条件地比另一种优越. 我们不能对 Weierstrass 表示宽容，因为他半途而废了. 确实，他清晰地把函数构作成一种代数的模式，但却也使用了并没有在代数上加以分析、且在某种程度上是代数学家难以理解的复数连续统作为系数. 沿着 Weierstrass 所遵循的方向所发展起来的占据统治地位的一般性理论，仍是一种抽象的数域及由代数方程所决定的扩张的理论. 于是，这种代数函数理论的研究纳入了跟代数数理论具有共同的公理基础的研究方向. 事实上， Hilbert 心目中的数域理论是（跟后者相联系的）一种类比，它所呈现的形态跟在 Riemann 用他的拓扑方法发现的代数函数王国中的事物一样（当然，当要作出证明时，这种类比就毫无用处了）.

我们的“不可约 -- 连通”的例子，从另一方面看也十分典型. 跟代数的准则相比，拓扑的准则是何等的直观、简明和易懂（摇晃纸模型，观察有无纸片落下！）. 连续统所具备的基本的直观特性（我想在直观方面它比 1 和自然数更具优越性），使得拓扑方法特别适用于数学中的发现及概要性研究，但遇到需要严格的证明时，也会遇到困难. 它跟直观联系紧密，而在驾驭逻辑时就会碰到麻烦. Weierstrass, M. Noether 及其他一些人宁可使用麻烦的但感觉更可靠的直接的代数构造方法，而不喜欢 Riemann 的超越的拓扑论证，其理由就在于此. 现在，抽象代数正一步步地整理着那些笨拙的计算. 一般性的假设及公理化迫使人们抛弃盲目的计算，并将复杂的事物分为简单的部分，每部分都可以用简明的推理来处理. 于是，代数就成为公理体系的富庶之乡.

我必须对拓扑方法再说几句话，以免给人一种笼统含混的印象. 当一个连续统（比如二维闭流形、曲面等）成为数学研究的对象，那么我们必须将它再剖分为有限多个“基本片”来讨论，每一个片的拓扑性质跟圆盘一样. 这些片又可以按照一种固定的模式重复地进行再剖分. 因此，连续统的一个特别之处是总能被在无限剖分过程中出现的无穷多套碎片进行更精细的截割. 在一维情形，对基本线段重复进行的“正规剖分”是一分为二. 对二维情形，首先将每一条边都分为两半，于是曲面上的每一片都可通过曲面中

[1] ‘超越物’(=transcendental)：指超出一般经验的事物. 此处是指 Riemann 的拓扑理论. —— 校注.

维普资讯 http://www.cqvip.com

从任意中心引向 (新或老的) 顶点的线分成若干三角形. 要证明一个片是基本的, 只要证明它可通过这种重复剖分过程中分为任意小的片. 最开始进行的剖分为基本片的模式 (下面简称为 "骨架") 通过给面、边和顶点标以符号来表示最为恰当. 这样就规定了这些要素相互间的界限关系. 随着连续进行的剖分, 流形可以看作是由密度不断增大的坐标网张成的, 这种坐标网可以通过无限的符号序列来确定各个点, 该符号序列起到了跟数相类似的作用. 这里的实数以并向量分数 (dyadic fraction) 的特殊形式出现, 用于刻划开的一维连续统的剖分. 此外, 我们可以说每个连续统都有它自己的算术模式; 通过参照开的一维连续统的特殊剖分模式而引入的数值坐标违背了事物的自然属性, 它的唯一好处是当数的连续统具有了四种运算后, 在实际计算时十分方便. 对于现实的连续统, 对其剖分的了解没有精确的数量概念; 当剖分过程一步步地进行时, 人们必须想象前一次的剖分所确定的边界应是被清晰地确定了的. 同样, 对于现实的连续统, 本应是无限的剖分过程实际上只能终止于某一确定的阶段. 但从具体的认识角度考虑, 现实的连续统的局部化、组合模式、算术零形式 (the arithmetical nullform) 都是事先就确定为无限的过程; 数学单独研究这种组合模式. 由于对最初的拓扑骨架连续地剖分是按照固定模式进行的, 所以必定有可能获悉从最初的骨架导出的新生的流形的全部拓扑性质. 原则上, 这意味着必定有可能去研究作为有限组合的拓扑学. 对拓扑学而言, 终极的元素, 这些原子, 在某种意义上是骨架中的基本部分而不是相关的连续流形中的点. 特别地, 给定两个这样的骨架, 我们必定能决定它们是否导出共点流形. 换句话说, 我们必定能够决定是否可以将它们视为同一个流形的剖分.

从代数方程 $f(z,x)=0$ 到 Riemann 曲面的这种转换, 在代数中的相似物是从该方程到由函数 $z(x)$ 确定的域的转换. 之所以如此, 是由于该 Riemann 曲面不仅很好地被函数 $z(x)$, 而且也被这个域中所有的代数函数所占有. 最能反映 Riemann 的函数理论的特征的是逆问题: 给定一个 Riemann 曲面, 构作出它的代数函数域. 这问题恰好总有一个解. 因为 Riemann 曲面上的每一个点 $\mathcal{P}$, 都位于 $x-$ 平面的一个确定点的上方, 所以目前所作成的 Riemann 曲面是嵌在 $x-$ 平面上的. 下一步是对这种 $\mathcal{P}\to x$ 的嵌入关系进行抽象. 结果, Riemann 曲面变成了可以说是自由浮动的曲面, 它具有一种共形结构和一种角测度 (anangle measure). 注意, 在通常的曲面论中, 我们必须学会区分下列两种情形: 一是将曲面看成由特殊类型的元素, 即它的点构成的连续的结构; 另一是将曲面以一种连续的方式嵌入 3 维空间, 曲面上每个点 $\mathcal{P}$ 与空间中的点 P(即 $\mathcal{P}$ 所占据的位置) 相对应. 在 Riemann 曲面的情形, 仅有的差别是 Riemann 曲面与嵌入的平面有相同的维数. 对于嵌入进行抽象, 从代数的角度看是在任意双有理变换下的不变性. 进入拓扑王国, 我们则必须忽略自由浮动的 Riemann 曲面上的共形结构. 继续比较下去, 我们可以说 Riemann 曲面的共形结构等价于通常曲面的距离结构. 通常的曲面指由第一基本形式决定的, 或是仿射和射影微分几何中分别具有仿射和射影结构的曲面. 在实数连续统中, 代数的运算 $+$ 和 $\cdot$ 反映了它的结构的面貌; 在连续群中, 将元素的有序对与它们的乘积相对应的规律起着类似的作用. 以上评论可能会提高我们对不同方法之间的关系的鉴赏力. 这涉及到一个排座次的问题, 看把哪方面的问题作为最基本的问题. 在拓

维普资讯 http://www.cqvip.com

扑中，我们从连续的连通概念开始，然后在更专门的课程中渐渐加上相关结构的特征等内容．在代数中，这个次序在某种意义上被颠倒来了．代数将运算看作所有数学思维的发端，在专门化的最后阶段也容许涉及连续性，或者说涉及连续性在代数中的某个代用品．这两种方法遵循的方向是相对的，没人会对它们不能融洽相处感到奇怪．一方认为是最容易接触到的东西，对另一方常常是隐藏在最深处的．最近几年里，在连续群表示论中使用了线性变换．我对于同时要为两个主人服务有多么困难是感触颇深的．像代数函数这种经典理论能够作到适合于用这两种观点来观察，但从这两种观点出发看到的是完全不同的景象．

在作了一般性的评注后，我想用两个简单的例子说明在代数和拓扑中所建立的不同类型的概念．拓扑方法极富成果的经典例子是 Riemann 的代数函数及其积分的理论．作为一种拓扑曲面， Riemann 曲面只用一个量来刻划，即它的连通数或亏格 p．球面的 $p=0$，环面的 $p=1$．从描述拓扑性质的数 p 在 Riemann 曲面的函数论中所起的决定作用可知，将拓扑置于函数论之前是多么的明智与合理．我选列几个显眼的定理：曲面上处处正则的微分的线性无关数是 p．曲面上微分的全阶数 (即零点数与极点数之差) 是 $2p-2$．若我们在曲面上选定多于 p 个的任意点，则恰存在一个曲面上的单值函数，在选定的点处可能有单阶极点，而在其他处全是正则的．若选定的极点数恰是 p，那么如果这些点在一般位置上，则上述结论不再正确．这个问题的确切答案由 Riemann—Roch 定理给出，该定理中的 Riemann 曲面由数 p 决定．如果我们考虑曲面上除去在一个点 P 处有极点外处处正则的函数，那么极点的阶可能是所有的数 1, 2, 3, $\cdots$，只要除去 p 的某些幂次 (Weierstrass 间隙定理 [gap theorem])．不难看出很多这样的例子．亏格 p 在整个 Riemann 曲面的函数理论中无处不在．每走一步都要遇见它，其作用是直接的，无需复杂的计算，它的拓扑意义也是易于理解的 (假定我们一劳永逸地将 Thomson—Dirichlet 原理当作函数论的基本原理)．

Cauchy 积分定理首次提供了让拓扑进入函数论的机会．一个解析函数在一闭路径上积分为 0，仅当含有此闭路径且是该解析函数的定义域的区域是单连通时成立．让我们用这个例子来说明如何将函数论中的事物“拓扑化”．若 $f(z)$ 是解析的，则积分 $\int_\gamma f(z)dz$ 对于每一条曲线 γ 对应一个数 $F(\gamma)$，它满足

$$F(\gamma_1+\gamma_2)=F(\gamma_1)+F(\gamma_2) \tag{†}$$

$\gamma_1+\gamma_2$ 表示一条曲线，使得 γ_2 的起点与 γ_1 的终点重合．函数方程 (†) 标志着 $F(\gamma)$ 是加性路径函数．而且，每点有一个邻域，使对该邻域中的每个闭路径 γ 有 $F(\gamma)=0$．我将把具有这些性质的路径函数称为拓扑积分，或简称积分．事实上，所有这些概念都要有一个假定，即要给定一个连续流形以便能在上面画曲线；这就是积分的解析概念的拓扑精髓．积分可以相加或用数来乘． Cauchy 积分定理的拓扑方面是说，在单连通流形上的积分同调于 0(不仅在小范围，而且也在大范围成立)，即在流形的每个闭曲线 γ 上 $F(\gamma)=0$．由此，我们可以看明白“单连通”的定义． (Cauchy 积分定理的) 函数论方面说，一个解析函数的积分按照我们的术语是所谓的拓扑积分．连通性的阶的定义 (即我

维普资讯 http://www.cqvip.com

们正打算要解释的东西) 由此引入是十分合适的．在一闭曲面上的积分 F_1, F_2, $\cdots$, F_n 称为线性无关的，如果它们不能使如下同调关系成立：

$$c_1F_1 + c_2F_2 + \cdots + c_nF_n \sim 0,$$

其中常系数 c_i 不是平凡的，即不全为 0. 曲面的连通性的阶即是最大的线性无关积分的数目．对于闭双侧曲面，连通性的阶 h 永远等于偶数 $2p$, p 是其亏格．从积分间的同调我们可达到闭路径之间的同调概念．下述的路径同调

$$n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2 + \cdots + n_r\gamma_r \sim 0$$

是说：对每个积分 F, 我们都有等式

$$n_1F(\gamma_1) + n_2F(\gamma_2) + \cdots + n_rF(\gamma_r) = 0.$$

当我们再回过头来看拓扑骨架 —— 它将曲面剖分为基本片并用基本片构成的离散链代替路径上的连续的点链，则我们可得到连通性的阶 h 用数 s, k, e 表示的式子，其中 s 为基本片数，k 为边数，e 为顶点数．我们所论及的表达式是著名的 Euler 多面体公式 $h = k - (e + s) + 2$. 反之，如果我们以拓扑骨架作为出发点，则我们的推理就导出这样的结果：以片数，边数，顶点数的组合式表达的 h 是一个拓扑不变量，即对于 "等价" 的骨架，它们具有相同的 h 值，两个骨架等价意指它们只是同一流形的不同的剖分．

当考虑在函数论中的应用时，使用 Thomson-Dirichlet 原理就可能将拓扑积分 "领会" 成一个在 Riemann 曲面上处处正则 — 解析的微分的具体积分．人们会说，所有构造性的工作都由拓扑方面去作了；而拓扑结果借助于万有变换原理 (即 Dirichlet 原理) 又可以用函数论方式加以领会．在某种意义下，这与解析几何很相似．在解析几何中，所有的构造性的工作都在数的王国中进行，然后，借助寄居于坐标概念中的变换法则，从几何角度 "领会" 所得的结果．

这一切在单值化理论上表现得更完美，该理论在整个函数论中起了中心作用．但是在这里，我倾向于指出另一个大概跟你们中许多人更接近的应用．我所想的是枚举几何，它研究的内容是确定一个代数关系构造中的交点、奇点等的数目． Schubert 和 Zeuthen 把它搞成一种很一般的但极少有可靠论证的系统．在 Lefschetz 和 v. d. Waerden 的努力下，拓扑在引入无例外成立的重数定义及同样是无例外成立的各种法则方面，取得了决定性的成功．对于一个双侧面上的两条曲线，在交点处一条曲线可以从左向右或从右向左地穿过另一条．这些交点必须用加上权 +1 或 −1 来标识每一次穿越，于是，相交的权的总和 (可能是正数也可能是负数) 在曲线的任意连续形变下是个不变量；事实上，当曲线用与其同调的曲线代替时，它仍保持不变．因此，有可能通过拓扑的有限组合手段把握这个数，并得到明晰的一般公式．实际上，两条代数曲线是通过解析映射嵌入在实四维空间中的两个闭 Riemann 曲面．但是在代数几何中，交点是按正的重数计算的，而在拓扑中人们是在穿越的意义下考虑的．所以，用拓扑方法可以重新解代数方程是令人吃惊的．我们可以这样来解释，对于解析流形的情形，穿越永远在同样的含义下

维普资讯 http://www.cqvip.com

发生．如果在 x_1, x_2- 平面的两条曲线在它们的交点附近由函数 $x_1 = x_1(s), x_2 = x_2(s)$ 和 $x_1 = x_1^*(t), x_2 = x_2^*(t)$ 表示，那么表示第一条曲线交了第二条的权 ± 1 的符号取法由下列 Jacobi 式 (在交点处计算出的值) 的符号决定：

$$\begin{vmatrix} \dfrac{dx_1}{ds} & \dfrac{dx_2}{ds} \\ \dfrac{dx_1^*}{dt} & \dfrac{dx_2^*}{dt} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(x, t)}.$$

在复代数“曲线”的情形，这个判别法永远给出 $+1$. 确实，设 z_1, z_2 是平面的复坐标，s, t 分别是两“曲线”的复坐标．z_1 和 z_2 的实部与虚部起了平面上实坐标的作用．我们可取 $z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2$ 代替它们．这时，决定穿越的性质的判别式为

$$\frac{\partial(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)}{\partial(s, \bar{s}, t, \bar{t})} = \frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(s, t)} \cdot \frac{\partial(\bar{z}_1, \bar{z}_2)}{\partial(\bar{s}, \bar{t})} = \left|\frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(s, t)}\right|^2,$$

故它恒为正．注意，关于代数曲线之间的对应的 Hurwitz 理论能同样地导出其纯拓扑的内核．

在抽象代数方面，我将只强调一个基本概念，即理想的概念．如果我们使用代数方法，那么代数流形是在一个以 x, y 和 z 为复笛卡儿坐标的三维空间中，由下述几个联立方程给出：

$$f_1(x, y, z) = 0, \cdots, f_n(x, y, z) = 0,$$

f_i 是多项式．对于曲线的情形，只要两个方程就足够了．流形上的点不仅使 f_i 为 0，而且也使形如

$$f = A_1 f_1 + \cdots + A_n f_n \ (A_i\text{是多项式}) \tag{**}$$

的多项式为 0. 这样的多项式 f 在多项式环中构成“理想”．Dedekind 定义一个给定环中的理想是一个数系，由环中那些在加、减法和环元素的乘法下封闭的元素组成的系．就我们的目的而言，这一概念的范围并不太广．理由是：根据 Hilbert 基底定理，多项式环的每个理想具有有限基；在理想中存在有限个多项式 $f_1, \cdots, f_n$，使得理想中每一个多项式都可以用形式 (**) 表出．于是，研究代数流形归结为研究理想．在代数曲面上，存在点和代数曲线．后者由若干理想所表示，这些理想乃是所考虑的理想的除子．M. Noether 的基本定理所讨论的问题是关于这样一些理想的，其零点流形只由有限多个点构成；该定理并依据在这些点处的性质来刻划这种理想中的多项式．此定理很容易利用将理想分解为素理想的方法导出． E. Noether 的研究表明，由 Dedekind 在代数数域理论中首次引入的理想这一概念，如 Ariadne[1)] 的线球一样，将代数及算术的全部内容联在一起． v.d.Waerden 能用理想论的代数手段来论证枚举演算的合理性．

如果在任一抽象数域而非复数连续统中考虑问题，那么此时代数基本定理就不一定成立．该定理断言，每个单复变量多项式可 [唯一] 分解为线性因子．因此，在代数研究中

[1)] Ariadne(阿里亚特纳)：希腊神话中的人物，克里特国王米诺斯的女儿．曾教她所爱的人用一线球，将一端拴在迷宫入口处，然后放线深入迷宫，杀死怪物又安全走出迷宫． —— 译注．

维普资讯 http://www.cqvip.com

有一种习惯：看看一个证明是否用了代数基本定理．在每一种代数理论中，有一些属于更基本的部分，它与基本定理无关，因此在所有的域中都成立；而对一些高深的部分，基本定理则是不可或缺的．后者就需要有域的代数闭包．在大多数情形下，基本定理标志着一种起决定作用的分界线；只要有可能就应该避免使用它．为建立在任意域中都成立的定理，将一个域嵌入到一个较大的域中的做法常常是有用的．特别地，有可能将任一域嵌入到一个代数闭域中．有个众所周知的例子是证明一个实多项式在实数范围可分解为线性或二次因子．为了证明它，我们添加一个 i 到实数中，这样便嵌入到复数的代数域中了．这种方法在拓扑中有一个类比，用于对流形的研究与特性刻划；在曲面情形，这种类比在于应用覆盖曲面．

在当代，我们的兴趣的中心是非交换代数，在其中人们不再假定乘法是可交换的．它是因数学的具体需要而兴起的．算子的合成就是一类非交换的运算．有一个独特的例子，我们将考虑多变元函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的对称性质．我们可以用任一置换 s 作用于 f, 对称性则用一个或几个如下形式的方程表示：

$$\sum_s a(s) \cdot sf = 0,$$

这里， $a(s)$ 代表跟置换有关的数值系数．这些系数属于一个给定的域 K. $\sum_s a(s) \cdot s$ 是"对称算子"．这些算子可以用数来乘，可以作加和乘，"乘"即相继地作用，它的运算的结果依赖于"因子"的次序．因为对称算子的加法和乘法满足所有形式的运算规则，所以构成一个"非交换环"(超复数系)．理想概念在非交换的领域中仍然起主导作用．近年来，对群及其用线性变换表示方面的研究几乎完全被交换环论所同化．我们的例子说明， $n!$ 个置换 s 的乘法群怎样被扩充为由量 $\sum_s a(s) \cdot s$ 组成的结合环，其中除了乘法外，容许有加法和数乘．量子物理已经给非交换代数以强有力的推动．

可惜，我不能在这里给出建立一种抽象的代数理论的艺术的例子．这种艺术总是要建立正确的一般的概念，诸如域、理想等等；要将一个断言分解为几步来证明 (比如断言"A 蕴含着 B"或记作 $A \to B$, 可分解为 $A \to C$, $C \to D$, $D \to B$ 等几步); 还要将这些局部的断言用一般性的概念加以适当的一般化．一旦主要的断言被分为几个部分，非本质的因素被抛在一边，那么每一部分的证明就不会太难，这已是一条规则了．

迄今为止，只要出现了适用的拓扑方法，它会比代数方法更有效．抽象代数还没有产生过能跟 Riemann 用拓扑方法得到的成就相媲美的成果．也没有人顺着代数路径达到像 Klein, Poincaré 和 Koebe 用拓扑的方法所达到的单值化研究的巅峰[1]．有些争论问题要到将来才能回答．但我不想对你们隐瞒数学家们日益增长的一种感觉，即抽象方法的富有成效的成果已接近枯竭．事实上，漂亮的一般性的概念不可能从天而降．实际情形是：开始时总是一些确定的具体问题，它们具有整体的复杂性，研究者必定是靠蛮力来征服它们的．这时，主张公理化的人来了，他们说要进这扇大门本不必打破它还碰伤了双手，而只要造一把如此这般的魔钥匙，就能轻轻地启开这扇门，就好像它是自动地

[1]请注意此演说的年代是 1931 年．此后的发展情况未必如此． —— 译注．

维普资讯 http://www.cqvip.com

打开一样．然而，他们之所以能造出这把钥匙，完全是因为那次成功的破门而入使他们能前前后后、里里外外地研究这把锁．在我们能够进行一般化、形式化和公理化之前，必须首先存在数学的实质性内容．我认为过去几十年中，我们赖以进行形式化的数学实质内容已经用得差不多了，几近枯竭！我预言下一代人在数学方面将面临一个严峻的时代．

[这篇演讲的唯一目的是想让听众感受一下现代数学的本质部分所处的知识环境．对于想作更深入了解的人，我建议你读几本书．抽象的公理化代数的真正开创者是 Dedekind 和 Kronecker．在我们这个时代，在推动该方向的研究中起决定作用的是 Steinitz、E. Noether 及其学派，以及 E. Artin．拓扑学第一次重大的进步出现在 19 世纪中页，那是 Riemann 的函数论．更近期的进展主要跟 Poincaré 的位置分析 (analysis situs) 研究 (1895–1904) 有关．我要提出的书是：

参 考 文 献

[1] *On algebra:* Steinitz, *Algebraic Theory of Fields,* appeared first in *Crelles Journal* in 1910. It was issued as a paperback by R. Baer and H. Hasse and published by Verlag W. de Gruyter, 1930.

H. Hasse, *Higher algebra I, II.* Sammlung Göschen 1926/ 27.

B. v.d.Waerden, *Modern algebra I, II.* Springer 1930/ 31.

[2] *On topology:* H. Weyl, *The Idea of a Riemann Surface,* second ed. Teubner 1923.

O. Veblen, *Analysis Situs,* second ed., and S. Lefschetz, Topology. Both of these books are in the series Colloquium Publications of the American Mathematical Society, New York 1931 and 1930 respectiely.

[3] Volume I of F. Klein, *History of Mathematics in the 19th Century,* Springer 1926.

(本文译、校过程中，何育赞教授、戴新生教授对译文提出了有益的建议，特此致谢．)

(冯绪宁 译　袁向东 校)