综合报告

几个世纪以来的拓扑学：低维流形 (I)

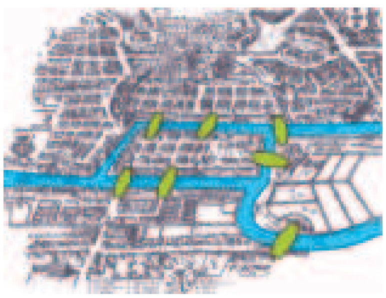
John Milnor

摘要 本文将追溯几世纪以来对二，三，四维流形的研究．在附录中读者可以找到更多技术性的讲解和细节．

1. 拓扑学的序幕

拓扑学 作为一个学科成型于 19 世纪，它于 20 世纪取得了长足的进步，在当今 21 世纪仍在蓬勃发展之中．其实在有任何拓扑概念出现之前，便已经有很多孤立的结果暗示着这一研究领域存在的意义．

1.1 Leonhard Euler (欧拉)，圣彼得堡，1736



18 世纪的柯尼斯堡

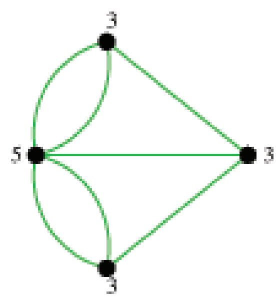
Euler

Euler 对 *柯尼斯堡七桥问题* 的解或许可以被视为数学文献中出现的第一个拓扑结论．在当时东普鲁士的柯尼斯堡有七座桥架设在河中心的两个小岛上，怎样的路线才能不重复地遍历每座桥？欧拉证明了满足条件的路线并不存在．

这个问题可由下图表示，每块陆地由一个顶点表示，每座桥则由一条边表示．

定理 *对于这样的一个图，其上存在一条遍历每个边而不重复的路径当且仅当至多有 2 个顶点是"奇"的 —— 一个顶点被称为是"奇"的如果有奇数条边在这个顶点汇合．*

在此图中，4 个顶点都是"奇"的，所以并不存在遍历每条边且不重复的路径．这一定理的证明尽管比较初级但又并非显而易见，所以对年轻的数学工作者来说是个很好的练习．



七桥问题的图

1.2 Leonhard Euler，柏林，1752

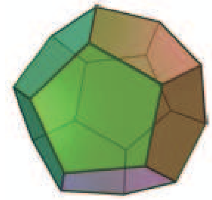
若干年后，Euler 描述了一个在拓扑学上具有奠基地位的等式．

译自：Bulletin (New Series) of the AMS, Vol. 52 (2015), No. 4, p. 545–584, Topology Through the Centuries: Low Dimensional Manifolds, John Milnor. 本文基于 2014 年韩国首尔国际数学家大会上的 Abel (阿贝尔) 讲座．文中有些图片未得到版权许可，因此只刊出获得许可的那些图片，敬请谅解．

作者是美国石溪大学数学科学研究所杰出教授，他的邮箱地址是 jack@math.sunysb.edu.

定理 对任意一个凸多面体，顶点，边和面的个数符合以下公式

$$V - E + F = 2.$$



例 一个十二面体有 20 个顶点，30 条棱和 12 个面，由公式可得

$$20 - 30 + 12 = 2.$$

Euler 远远领先于他的时代. 100 余年之后，一个有限胞腔复形 $\boldsymbol{K}$ 的 *Euler* 示性数 (*characteristic*) 被定义为以下整数

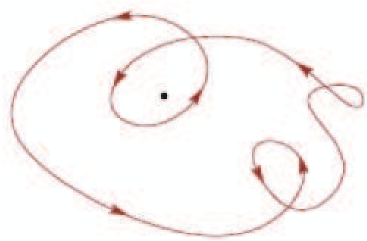
$$\chi(\boldsymbol{K}) = \#(\text{偶数维胞腔的个数}) - \#(\text{奇数维胞腔的个数}).$$

直到 20 世纪早期人们才证明了 Euler 示性数是一个拓扑不变量. 以下是两个易由定义得到的基本性质，在第一个等式中 $\boldsymbol{K}_j$ 可被视为其并集的子复形：

$$\chi(\boldsymbol{K}_1 \cup \boldsymbol{K}_2) = \chi(\boldsymbol{K}_1) + \chi(\boldsymbol{K}_2) - \chi(\boldsymbol{K}_1 \cap \boldsymbol{K}_2)$$
$$\chi(\boldsymbol{K}_1 \times \boldsymbol{K}_2) = \chi(\boldsymbol{K}_1)\chi(\boldsymbol{K}_2)$$

作为一个简单的练习，我们可以用定义和乘法性质来证明，任意一个 n 维立方体 $[0,1]^n$ 的 Euler 示性数是 $+1$, 而立方体的边界作为一个拓扑意义上的 $(n-1)$ 维球面，它的 Euler 示性数则为 $1 + (-1)^{n-1}$.

1.3 Augustin Cauchy (柯西), 巴黎高科 (École Polytechenique), 巴黎，1825



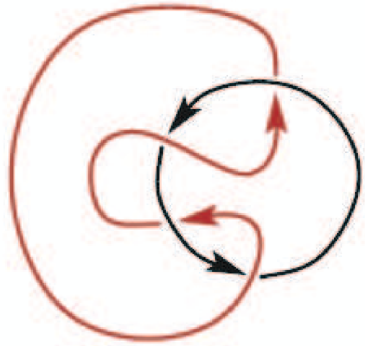
复平面上环绕一点 p 的一条曲线 C

Cauchy 是第一个对 *连续* 给出准确定义的人，这一概念无疑是拓扑上最具基础性意义的概念之一.

此外，对于围绕一个点 p 的闭曲线 C, Cauchy 描述了 *环绕数* (*winding number*) 这一拓扑不变量. 他还通过一个全纯微分形式在 C 上的积分来计算环绕数

$$W_C(p) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{dz}{z-p} \in \mathbb{Z}.$$

1.4 Carl Friedrich Gauss (高斯), 哥廷根 (Göttingen), 1833



Gauss 描述了一个更为复杂微妙的拓扑不变量: $\mathbb{R}^3$ 中两个不相交的定向闭曲线的链环数 (*linking number*) L. 他从对电磁学的研究中得到启发，通过二重积分计算链环数

$$L = \frac{1}{4\pi}\iint_{x,y} \frac{(x-y)\cdot(dx\times dy)}{\|x-y\|^3} \in \mathbb{Z}.$$

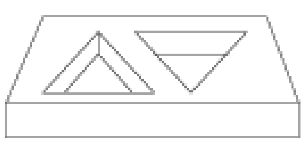
这里向量 x 和 y 分别取值于两条曲线.

2. 二维流形

直到 19 世纪人们才清楚地认识到，几何学除了对局部性质的研究，也应包括对全局性质的研究.

2.1 Simon L'Huilier (吕利耶), 日内瓦帝国学院 (Académie Impériale de Genève), 1812–1813

L'Huilier(拼写或为 Lhuilier) 也许是第一个在更广义的 (非凸) 多面体上考虑 Euler 示性数的人. 对一个三维 Euclid (欧几里得) 空间中被 "钻通" n 个开口的多面体的表面，他计算出 Euler 示性数为 $\chi = 2 - 2n$. 用现代数学语言来讲，这个多面体的边界是一个亏格为 n 的曲面.



2.2 Niels Henrik Abel (阿贝尔), 挪威, 1820

在 Abel 的工作之后，曲面上全局理论的必要性变得更显然. Abel 研究了代数函数

在 Gjerstad 的 Abel 纪念碑

的积分，例如如下的形式

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a_1)\cdots(x-a_n)}},$$

其中 a_j 是不同的实数或虚数. 今天我们将此描述为沿由

$$y^2 = f(x) = (x-a_1)\cdots(x-a_n)$$

定义的光滑仿射簇 $V \subset \mathbb{C}^2$ 上的一个路径的积分 $\int dx/y$. 被积函数在 $y=0$ 的情况下看似没有定义；但由于

$$2ydy = f'(x)dx,$$

我们也可以将这个被积函数表示成 $2dy/f'(x)$, 其在 $y=0$ 时是定义良好的. 现在我们将以下表达式

$$\alpha = \frac{dx}{y} = \frac{2dy}{f'(x)}$$

描述为簇 V 上的一个 *全纯 1– 形式* 或 *Abel 微分* (*Abelian differential*).

对于任意一个 V 上的交换微分 α 和闭曲线 L, 我们可以通过积分得到一个从基本群 $\pi_1(V)$ 到复数集的同态

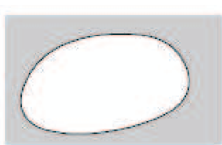
$$L \to \int_L \alpha.$$

可是在当时这些术语中很多都还不存在. Abel 英年早逝，后人则需要建立出一套能够恰当描述以上构造的语言.

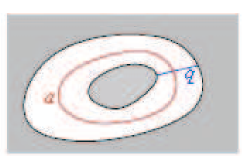
2.3 Bernhard Riemann (黎曼), 哥廷根，1857

第一个接受这一挑战的人是 Riemann. 在他 1851 年的博士毕业论文和 1857 年关于 Abel 函数的文章中，他发展出了我们现在称之为 *Riemann 面* (*surface*) 的概念.

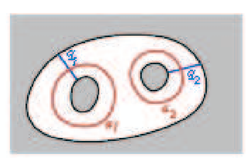
以下插图是 Riemann 当时绘制的复平面上的 3 个有界区域. 如果任意一个切口 (任一从一个边界点到另一个边界点的路径) 都可以将区域切断，Riemann 称这个区域是 *单连通* (*simply connected*) 的. 类似地如果需要两个切口才能将区域切断，这个区域则被称为是 *双连通* (*doubly connected*) 的. 依此类推.



单连通的



双连通的



三重连通的

在更普遍的情况下，他研究了在平面上的 “ Riemann 面”.

此外 Riemann 还考虑了闭曲面 $\mathcal{F}$ 上的情况. 他描述了如何沿若干仅相交于一点的

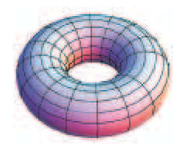
简单闭曲线将 $\mathcal{F}$ 切开而得到一个连通且单连通曲面的步骤.

满足这样条件的曲线的个数总是一个偶数 $2p$. 用现代术语来讲，这描述了一个有一个顶点，$2p$ 条边和一个二维胞腔的 CW– 胞腔复形 [1)] 的结构，其 Euler 示性数是 $\chi = 2-2p$. 这个 Riemann 整数 $p \geq 0$ 就是现在被称为 $\mathcal{F}$ 的 亏格 (*genus*) 的不变量，而整数 $2p$ 即是一维 *Betti* (贝蒂) 数 (*one-dimensional Betti number*).

2.4 August Ferdinand Möbius (默比乌斯)，莱比锡，1863

尽管 Riemann 先驱性的理念影响了整个领域的研究，他的文献却只给出了很少的细节且并不易阅读. 若干年后，Möbius 给出了一个在我看来更清晰的描述，他指出三维空间里的光滑闭曲面可以用一个被明确定义的整数不变量来进行分类.

将一个闭曲面 $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ 的 连通类 (*connectivity class*) 定义为能够沿不相交回路切断曲面 $\mathcal{F}$ 的最小回路条数 n. (也就是说，如果我们选择 $p = n-1$ 条 不能 切断曲面的简单闭曲线，那再添加任意一条不相交的闭曲线就能将曲面切断，这里 p 同上表示 Riemann 的不变量，也就是亏格.)



例 一个环面的亏格是 $p = 1$, 因为我们可沿一条环路将环面切开但不切断，但两条闭曲线必然会切断环面.

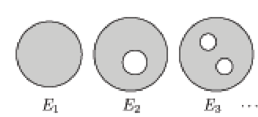
定理 *任意两个有相同连通类的闭曲面都是初等相关的* (*elementarily related*).

Möbius 这一 “初等相关” 的概念是比较难处理的. 用现代术语来讲，他真正想表达的概念其实是 C^1– 微分同胚 (C^1-*diffeomorphism*).

定义 两个几何形状被称为 “*初等相关*” 的，如果一个几何形状上任意维度的无穷小元都对应于另一个几何形状上的一个无穷小元，使得一个形状上的两个相邻元对应于另一个上的两个相邻元，….

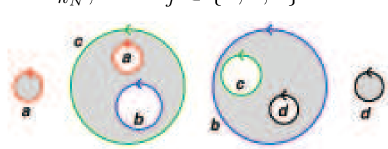
但 Möbius 的证明却惊人地具有现代性. 我们做如下概述：将曲面在 $\mathbb{R}^3$ 中置于一个一般位置，然后沿着仔细选取的水平面将其切开. 而后得到的每个连通部分有 1, 2, 或 3 个边界曲线：分别对应于一个 2– 胞腔 (*2-cell*), 一个 环形 (*annulus*), 或者一条 “裤子” (*pair of pants*).

更一般地，用 E_k 来表示二维球面中一个有 k 个边界曲线的区域，则 Möbius 的构造将曲面 $\mathcal{F}$ 分成了一个不相交并集



$$\boldsymbol{E} = E_{k_1} \sqcup E_{k_2} \sqcup \cdots \sqcup E_{k_N}, \qquad k_j \in \{1,2,3\}.$$

举例如下：



1) 请比较 Whitehead [1949b].—— 原注

要得到原始的曲面 $\mathcal{F}$, 我们必须将 $\boldsymbol{E}$ 的每个边界曲线与另一个边界曲线由一个指定的同胚对应起来.

引理 如果我们将 E_k 的一个边界曲线与 E_ℓ 的一个边界曲线等同起来对 $E_k \sqcup E_\ell$ 进行简化，则所得的空间是微分同胚于 $E_{k+\ell-2}$ 的.

这个引理的证明并不复杂. 由这个结论，我们可以对集合

$$\boldsymbol{E} = E_{k_1} \sqcup E_{k_2} \sqcup \cdots \sqcup E_{k_N}, \qquad k_j \in \{1, 2, 3\}$$

归纳地进行简化，每次将一对边界曲线等同起来. 在 $N-1$ 次这样的等同之后我们会得到一个连通的集合 E_{2p}. (这里 p 即是 Riemann 的不变量，也就是亏格.) 举例来讲，对于以上的图形，如果我们将标为 a, d, 和 b 的圆盘放到相对应的洞里，最后收缩以后得到的即是一个 E_2 类型的区域.

例：粘贴了 $p = 3$ 个环柄的球面

接下来对每组边界曲线进行等同其实就相当于在二维球面 $S^2 = E_0$ 上添加一个 “环柄”. 这就完成了 Möbius 的证明. ■

2.5 Walther Dyck (迪克), 慕尼黑, 1888

Dyck (后来被封爵为 von Dyck) 大概是第一个对拓扑学给出明确定义的人：

拓扑学 (*topology*) 是研究那些在有连续逆的连续函数下维持不变的性质.

他也可能是第一个将 Gauss-Bonnet (博内) 公式以一个全局性的定理叙述出来的人：

对任意一个二维光滑闭流形 M, 有

$$\chi(M) = \frac{1}{2\pi} \iint K dA.$$

如果 Gauss 曲率 K 的符号恒定，便可直接推论得知 Euler 示性数具有相同的符号：

如果一个二维光滑闭流形处处 $K > 0$, 或 $K = 0$, 或 $K < 0$, 则分别可知 $\chi > 0$, 或 $\chi = 0$, 或 $\chi < 0$. 这为接下来所有与曲率和拓扑学相关的研究提供了启示.

2.6 Henri Poincaré (庞加莱), 巴黎, 1881–1907

Poincaré 无疑地可被称为现代拓扑学的创立者. 他勾勒出了 *同调论* (*homology*) 和 *Betti 数* 的雏形，描述了 *Poincaré 对偶定理* (*duality theorem*). 此外他还引入了 *同伦* (*homotopy*) 的概念，定义了 *基本群* (*fundamental group*), 以及与之相关联的 *覆叠空间* (*covering space*) 的概念. 他对 Riemann 曲面 *单值化定理* (*uniformization theorem*) 的描述对曲面的研究尤为重要. 尽管还有不少细节有待完善，但 Poincaré 已经给出了这些理论的基本概要.

2.7 Paul Koebe (克贝), 柏林, 1907

Poincaré 和 Koebe 几乎在同一时间证明了单值化定理，叙述如下

定理 任何 Riemann 曲面 $\mathcal{F}$ 的万有覆叠空间 $\widetilde{\mathcal{F}}$ 都共形等价于以下 3 种情况之一

(1) Riemann 球面 $\mathbb{C}\cup\infty$,

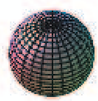
(2) 复平面 $\mathbb{C}$,

(3) 开单位圆盘 $\mathbb{D}\subset\mathbb{C}$.

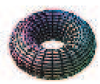
一个简单的推论是

推论 任何 Riemann 曲面都具备一个常曲率度量：

- 在情形 (1) 下，$K\equiv+1$,
- 在情形 (2) 下，$K\equiv 0$,
- 在情形 (3) 下，$K\equiv-1$.



$K\equiv+1$



$K\equiv 0$

$K\equiv-1$

2.8 Hermann Weyl (外尔), 哥廷根, 1913

Weyl 的书《Riemann 曲面的思想 (Die Idee der Riemannschen Fläche)》是一个重要的转折点．在本书出版之前，Riemann 曲面的定义一直比较模糊，先考虑一个局部上定义的全纯函数，再对其进行所有可能的解析延拓．Weyl 则给出了一个基于拓扑曲面与其上重叠坐标卡的明确的定义．这为接下来所有对复流形以及光滑流形的研究提供了一个范例．

2.9 Tibor Radó (拉多), 塞格德 (Szeged), 1925

Radó 完成了对紧定向拓扑曲面的分类，他证明了在每个这样的曲面上都可以给出一个如 Weyl 定义的 Riemann 曲面的结构，特别是还可以给出一个光滑流形的结构．

90 年之后，对 Riemann 曲面的研究及与其密切相关的对代数曲线的研究仍然是蓬勃发展的数学领域．我们可以注意到 2014 ICM 中 4 项 Fields (菲尔兹) 奖中的两项都被授予了这个领域的研究成果．

3．三维流形

可以说历史上第一次对非平凡的三维流形的描述发生在 14 世纪：但丁神曲中故事就发生在一个三维球面的世界里，天堂在上极点，地狱在下 (冥) 极点．但是对三维流形的数学研究仅开始于 19 世纪晚期．为了简便起见，我们假设讨论中的所有流形都是可定向的．

3.1 Poul Heegaard (赫戈), 哥本哈根, 1898

Heegaard 证明了任意定向的三维闭流形都可以被分解为两个具有相同亏格且仅沿边界相交的环柄体 1) 的并. 换句话说, 对于任意这样的流形, 我们都可以将两个相同的环柄体 H 沿边界由任意微分同胚粘合起来而得到一个它的模型.

Heegaard 的结果很难付诸应用, 因为映射类群 (*mapping class group*), 即一个给定曲面所有保定向微分同胚的同痕类, 具有非常丰富的结构. 尽管如此, Heegaard 的结果为研究一般的三维流形提供了一个重要工具. 他的定理也许还引发了对映射类群的研究, 而这又自成为了一个重要的课题.

3.2 Poincaré, 巴黎, 1904: Poincaré 猜想

这一根本性的问题在接下来的 100 年中一直困扰着拓扑学家:

问题 *一个基本群平凡的三维闭流形是否一定同胚于标准的三维球面 S^3?*

实际上, Poincaré 最早在 1900 年提出了以下猜想: 任意与球面有相同同调群的流形都同胚于一个标准球面. 但在 1904 年, 他用 Heegaard 的方法发现了一个反例, 一个具有 120 阶基本群的三维光滑流形. 这个反例可被简单描述为陪集空间 SO_3/I_{60}, 这里 I_{60} (最小的非交换单群) 是将正二十面体映射到自己的三维空间的旋转群.

3.3 James W. Alexander (亚历山大), 普林斯顿, 1920 年代

Alexander 对偶定理是说任意复形 $\boldsymbol{K} \subset S^n$ 的补空间的同调群可以由 $\boldsymbol{K}$ 的同调群来计算, 这个定理可被视为是 Jordan (若尔当) 曲线定理的一个深刻推广. 比如, 由 Alexander 对偶定理可推知任意嵌入 n 维球面的 $(n-1)$ 维闭流形都将球面分割为两个连通部分. 在分段线性 (PL)– 嵌入 S^3 的二维球面的情况下, 他证明了球面补空间每个连通分支的闭包都是一个三维闭球的 PL 副本. 类似地, 对于一个 PL– 嵌入 S^3 的环面, 补空间的两个连通分支中的至少一个一定是一个实心环面. 另一方面, Alexander 的带角球面的例子说明了以上这些结论并非对所有的拓扑嵌入都成立. Alexander 还定义了 Alexander 多项式这一纽结的基本不变量 2).

Alexander 和妻子 Natalie
(照片: Shelby White and
Leon Levy Archives Center)

3.4 Hellmuth Kneser (克内泽尔), 格赖夫斯瓦尔德 (Greifswald), 1929

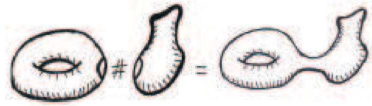
对任意两个连通且定向的分段线性三维流形, 我们都可以在同构意义下 3) 定义的连通和 (*connected sum*), 以球面为单位元:

$$M\#S^3 \cong M.$$

1) 一个亏格为 g 的环柄体 (*handlebody*) 定义为将 g 个不相交的 "环柄" 粘合在一个三维球体上而得到的三维 Euclid 空间中的紧区域, 每个环柄都同胚于 $D^2 \times [0,1]$, 且与三维球体仅相交于 $D^2 \times \{0,1\}$. 所以环柄体的边界是一个亏格为 g 的曲面.—— 原注

2) 见 Alexander [1922, 1924, 1928].—— 原注

3) 这里的 "同构" 是指保定向 PL (= 分段线性) 同胚.—— 原注



定义 如果 $M\#S^3 \cong M$ 是将一个流形 M 表示为连通和的唯一形式，那么这个流形 $M \ncong S^3$ 被称为是“素的 (*prime*)”.

定理 *任意紧三维流形 M 都同胚于一个由若干素三维流形构成的连通和*

$$M \cong P_1\#\cdots\#P_k.$$

(多年之后，我得以完备了这一结果，我证明了这一素流形分解在不考虑次序并且模掉同构类的情况下是唯一的．见 Milnor [1962].)

3.5 Herbert Seifert (塞弗特), 莱比锡，1933

Herbert Seifert

在已被了解的三维流形中，*Seifert 纤维空间* (*fiber spaces*) 构成了很重要的一类，它们是曲面上以圆为纤维空间的纤维化流形，其中允许有限个被特殊限定的奇异纤维存在.

3.6 Edwin Moise (莫伊斯), 密歇根大学，1952

Moise (用大量的篇幅) 证明了每个紧三维流形都可以被三角剖分，且这一三角剖分在 PL 同胚的意义下是唯一的.

3.7 Christos Papakyriakopoulos (帕帕基科亚科普洛斯), 普林斯顿，1957

对三维流形研究的第一个突破来自对“*Dehn 引理*”的证明，Max Dehn 于 1910 年提出了这一引理，但他并未能给出一个正确的证明.

定理 *f 是一个从闭单位正方形 I^2 到 $\mathbb{R}^3$ 的 PL– 函数，且 $f^{-1}\circ f$ 在边界附近是取单值的，那么存在一个 PL– 嵌入与 f 在边界上吻合.*

Papakyriakopoulos 的证明用到了一个巧妙的“塔”的构造，我们概述如下．f 的像 $f(I^2)$ 的正则邻域 N 是一个三维带边流形．如果边界的某个连通分支的亏格不为零，那么我们可以进而考虑 N 的复叠空间，这个奇异圆盘会被提升为一个此覆叠空间上的奇异圆盘．一个关键步骤是要去证明这个被提升的圆盘的奇点情况更为简单，在有限次重复进行这一构造之后，我们必然会得到亏格为零的情况．而后证明就很容易完成了.

以下是一个很重要的推论：

若 $\mathcal{K}\subset\mathbb{R}^3$ 是一个简单闭 PL– 曲线，则纽结 $\mathcal{K}$ 是平凡的，当且仅当 $\pi_1(\mathbb{R}^3\backslash\mathcal{K})\cong\mathbb{Z}$.

事实上如果纽结 $\mathcal{K}$ 是不平凡的，那么 $\pi_1(\mathbb{R}^3\backslash\mathcal{K})$ 包含子群 $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, 其来自于 $\mathcal{K}$ 的管状邻域的边界.

3.8 Wolfgang Haken (黑肯), 慕尼黑, 和 Friedhelm Waldhausen, 波恩, 1960 年代

Friedhelm Waldhausen

按照定义, 一个紧可定向的 PL 三维流形 M 里的 *不可压缩曲面* (*incompressible surface*) 是一个具有以下性质的紧可定向的 PL– 嵌入曲面:

- 基本群 $\pi_1(\mathcal{F})$ 非平凡, 且单射到 $\pi_1(M)$,
- 如果 $\mathcal{F}$ 是带边的, 那么 M 也一定是带边的, 且 $\partial\mathcal{F} \subset \partial\mathcal{M}$.

一个含有这样不可压缩曲面的不可约流形被称为是 "足够大的" (sufficiently large), 或被简称为 *Haken 流形*. (这里的 "*不可约* (*irresucible*)" 是指任意嵌入其中的二维球面都是一个三维球体的边界.) 如果给定一个不可压缩曲面并沿着它进行切割, Haken 于 1962 年证明了我们可以归纳地构造一个不可压缩曲面序列, 这些曲面将流形分解为单连通的部分. 但他从未将这篇论文的第 2 部分发表出来, 而其中应该含有很多论证的细节. 不过 Waldhaulsen 于 1968 年发表了一篇完整的证明, 其中还包括了一些进一步的重要结果. 其中他证明了任意的闭 Haken 流形在 PL 同胚的意义下都是被基本群唯一决定的. (在带边 Haken 流形的情况下, 则必须考虑到对应于边界部分的子群.) 而后 Gordon 和 Luecke (Gordon and Luecke [1989]) 将这一结果用于证明一个素纽结是被其补空间的基本群唯一决定的.

3.9 George D. Mostow (莫斯托), 耶鲁, 1968

历史上接下来的一个重要结果来自一个完全不同的数学领域.

刚性定理 *一个维数 ≥ 3, 曲率 $K \equiv -1$ 的闭 Riemann 流形在等距的意义下被它的基本群唯一决定.*

Margulis (马尔古利斯) 也对这一结果给出了证明, Prasad 还将其推广到了体积有限的完备流形的情况.

作为一个重要的推论:

这样的流形的体积是一个拓扑不变量.

这是一种全新的, 不同于此前任何已知类型的拓扑不变量. 如今已有很多其他的等距不变量被提升成为了同伦类不变量, 例如闭测地线的长度, 以及 Laplace (拉普拉斯) 算子的本征值. 然而, 体积是个尤其便于应用的不变量.

在 1970 年代, Robert Riley 作为一个英国南安普顿的博士生正在研究纽结群到双曲三维空间自同构群 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ 的表示理论, 他专注于研究那些将纽结的经线及平行于纽结的闭路映射到抛物群元素的群表示. 他设法找到了一些包括 8 字纽结在内的例子, 这些例子不仅将 $\pi_1(S^3\backslash\mathcal{K})$ 同构映射到子群 $\Pi \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, 而且可以被升级为从纽结补空间满射到商空间 H^3/Π 的同胚映射. 而 H^3/Π 本身是一个 *有限体积的双曲流形* (*hyperbolic manifold of finite volume*); 即是在一个常值负曲率的度量下完备的具有有限体积的流形.

所以 8 字纽结在 S^3 中的补空间可以被赋予一个具有有限体积的完备双曲结构.

同样是在 1970 年代，哥伦比亚大学的 Troels Jørgensen 找到一个子群的例子

$$\Pi \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}),$$

使得商空间 $H^3\backslash\Pi$ 是一个在圆周上纤维化的紧双曲流形.

3.10 William Thurston (瑟斯顿)，普林斯顿，1970 年代后期

Thurston 找到了更多的双曲纽结补空间.

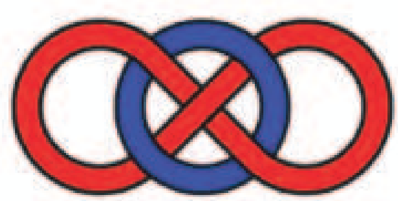
他利用将 8 字结的补空间 "三角剖分" 为两个理想的正则单纯形的方法计算了其体积. (与 Gieseking [1912] 比较.) 用到一些归功于 Lobachevsky (罗巴切夫斯基) 的方法，这一体积可以被计算为

$$V = -6\int_0^{\pi/3} \log|2\sin(u)|\,du = 2.02988\ldots.$$

他关于双曲体积的主要结果如下.

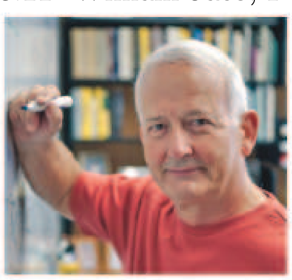
定理 由所有双曲三维流形的体积构成的集合是可排序的. 也就是说，任意非空的子集都有一个最小元素. 此外，只存在至多有限多个互不同胚的流形具有某一个给定的体积.

实际上，任何有 $k \geq 1$ 个端的流形体积都是一系列有 $k-1$ 个端的流形体积的递增极限. 这里的想法是将每个 M 的端等同于一个嵌入的 $S^1\times S^1\times[0,\infty]$, 而有无穷多种方式再将其切割并替换为一个实心环 $S^1\times\mathbb{D}$. 几乎对所有这些简化的流形都可以给一个双曲结构，且它们的体积递增趋近于原流形.



例如，S^3 中的 *Whitehead* (怀特黑德) 链环 (*link*) 有两个端，分别对应于链环的两个连通分支. 对于图中两个相连实心环中的某一个或两者，可以有无限多种方式将其挖空并填充入一个新的实心环. 在这一情况下，链环补空间的双曲体积是 $V = 3.66386\cdots$.

3.11 William Jaco, Peter Shalen, Klaus Johannson, 1970 年代后期



William Jaco

以此 3 人 [1)] 的姓氏首字母命名的 *JSJ* 分解 (*decomposition*), 是一种将三维流形沿嵌入的球面或环面切分为更简单的部分的方法. 以下为其结论之一：

定理 任一不可约的可定向闭三维流形中存在 (在同痕意义下) 唯一的一族极小的互不相交嵌入不可压缩环面，使得沿环面切割三维流形所得的每个部分都是无环面的或者是 *Seifert* 纤维化 (*fibered*) 的.

1) Jaco, Shalen, 和 Johannson 分别工作于俄克拉荷马州的 Stillwater; 芝加哥；和德国的 Bielefeld. —— 原注

这里 无环面的 (*atoroidal*) 是指不含不可压缩的嵌入环面.

3.12 Thurston (瑟斯顿), 1982, 几何化猜想 (Geometrization Conjecture)

这一大胆的猜想提出每个闭三维流形都可以由具有简单几何结构的部分构造起来. 更确切地说，它指出每个光滑的闭三维流形都可以沿着嵌入的球面和环面被分解为一系列流形 M_j, 而每个这样的流形都可以被赋予一个局部上齐性的结构，而使得其上的万有覆叠空间 $\widetilde{M_j}$ 是一个齐性空间.

此外，这样的空间 $\widetilde{M_j}$ 有且仅有 8 种可能性.

其中 3 种是经典的几何空间：

(1) 三维球面 S^3, 其曲率为 $K \equiv +1$.
以 S^3 为万有覆叠空间的 Riemann 流形已被 Heinz Hopf (霍普夫) 于 1925 年进行了分类.

(2) *Euclid* 空间 $\mathbb{R}^3$, 其曲率为 $K \equiv 0$.
与其对应的紧平坦流形已被 Bieberbach (比伯巴赫) 于 1911 年进行了分类.

(3) 双曲空间 $\mathbb{H}^3$, 其曲率为 $K \equiv -1$.
这是最有趣但也是最难的情况.

接下来的两种几何均较易理解.

(4) $\widetilde{M} \cong \mathbb{R} \times S^2$. 例：$M = S^1 \times S^2$.

(5) $\widetilde{M} \cong \mathbb{R} \times H^2$. 例：$M = S^1 \times$ (双曲曲面).

在最后的 3 种几何中，$\widetilde{M}$ 是一个有最大对称左不变度量的三维 Lie (李) 群.

(6) 幂零几何 (*Nilgeometry*), 对应于幂零群 $\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
例：一个环面上非平凡的圆纤维丛.

(7) 可解几何 (*Solvgeometry*), 对应于可解群 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & e^z & 0 \\ y & 0 & e^{-z} \end{pmatrix}$.
例：大多数圆上的环面纤维丛.

(8) $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$ 几何.
例：一个双曲曲面上的单位切丛.

我们可以注意到 Poincaré 猜想是被包含在几何化猜想里的一个特殊情况.

Thurston 证明了若干个几何化猜想中有趣而困难的情况，然而他没有能证明最一般的情况，尤其是 Poincaré 猜想.

3.13 Richard Hamilton, 康奈尔大学，1982

Hamilton 引入了一个研究流形拓扑的全新方法：*Ricci* (里奇) 流 (*flow*) 微分方程

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial t} = -2R_{jk}.$$

这里 g_{jk} 是一个闭 Riemann 流形的局部坐标卡上的度量张量，R_{jk} 是相应的 Ricci 曲率张

量. 在类似的 热导方程 (*heat equation*) 的情况下, 热量会由热的区域流向冷的区域, 从而趋向恒温. 类似地, 在 Ricci 流的情况下, 直观来讲曲率也应由正值曲率的区域流向负值曲率的区域, 从而趋近一个曲率的均匀分布.

首先考虑具有 严格正的 (*strictly positive*) Ricci 曲率的流形, Hamilton 设法证明了以上的情况确实成立. 在这种情况下, 度量会流向一个有恒定正曲率的度量, 从而证明了这个流形是微分同胚于一个标准的三维球面的. 但对于更一般的初始条件, 度量会生成复杂的奇点, 对此 Hamilton 没能取得进一步的进展.

3.14 Grigori Pereleman (佩雷尔曼), 圣彼得堡, 2003

通过对 Ricci 流生成的奇点进行精巧的分析, Pereleman 设法解决了所有 Hamilton 遇到的难题.

有些奇点是较易处理且可以被去掉的, 另有一些对应于将嵌入的球面收缩成一点, 从而得到一个直和分解, 还有一些奇点则对应于一个环面分解. 最终, 在没有了奇点的情况下, 这个流必然会指向一个齐性极限, 这样 Pereleman 便设法完成了几何化猜想的完整证明, *Poincaré* 猜想作为一个特殊情况也被包含在内.

(未完待续)

(苏之栩 译　　苏阳 校)

****

(上接 189 页)

所得到的对于 0 和 1 之间所有实数 x 成立的结果可以拓广到所有的实数. 我们还可以如我们以前所做的那样, 用连续函数来替代局部阶梯函数. ■

定理 1 回答了由 Aris Danilidis 提出的一个问题.

参考文献

[1] A. Ya. Khinchin, Continued Fractions, Dover, Mineola, NY, 1997; reprint of (trans. Scripta Technica, Inc.) University of Chicago Press, Chicago, 1961; reprint of 3rd Russian ed., State Publishing House of Physical-Mathematical Literature, Moscow, 1961.

(陆柱家 译　　童欣 校)