当代数学问题* (III)

F.E.Browder

XIX. **几何拓扑与微分拓扑** (C.T.C.Wall). 几何拓扑的主要问题涉及4维流形，而几何拓扑的技巧又几乎全不奏效。Kirby在法国Nice会议的讲演中对这些问题的主体给了一个很好的说明。这些问题是：3维与4维的Poincaré猜测，4维环带问题，横截性对4维拓扑流形是否成立的问题以及是否存在一个闭拓扑流形，它的Stiefel-Whitney示性类为0而符号差为8。

拓扑学上的一些问题往往化为群的有限表示中的字问题。两个表示叫做**严格等价的**，如果一个表示可以由另一个表示通过下列类型的运算及其逆运算而得：

（1）连接一个生成元 x 与一个关系元 xw（w 是其他生成元组成的任意一个字）。

（2）一个关系元乘以另一个关系元。

（3）把一个关系元换成它自己的任何共轭元。

问题在于研究表示之间的严格等价关系：例如，平凡群的任意两个表示是否严格等价？

一个很有趣的结果是Mather定理：C°稳定映射是稠密的。但是它的证明只对C°稳定映射给出一个很不完全的理解。而我们想要的却是C°稳定性的一些更有效的判别准则和某个分类方法。例如，局部代数相同的C°稳定映射芽是否C°等价？如果等价，不同的代数何时能产生C°等价的芽？

许多人，特别是Haefliger与Thurston，他们近期工作给出了叶状结构的广泛信息。而且把一些问题化成分类空间（通常记作$B\Gamma_n$）中的计算。问题在于求得对这些空间的同伦性质的有效算法。

近十五年中一个有意思的发展是由于拓扑学推动而产生的代数K理论：先是有K_0与K_1，然后（慢慢地）有了K_2，现在有了Quillen那一套宏伟的高维K群理论。利用hermite型，还发展了另外一些理论，我称之为KU理论及L理论；它们自然是密切相关的。要使不同的处理方法完全协调一致，似乎只有在Karoubi的一个猜测成立时才有可能。(见Lecture Notes (Springer) 卷343的一些文章：Karoubi提出他的猜测以及我对这个猜测的说明)。这就可能整理出一般理论；余下的是需要计算，特别是外科阻碍群$L_*(\mathbf{Z}\pi)$的计算，这里π是一个群。如果π是一个Poincaré对偶群，于是有一个由有限复形决定的分类空间$B\pi$，我们可以利用Quinn的同调论L(用G/Top表示)。我猜想，有一自然同构$L_*(\mathbf{Z}\pi)\cong L_*(B\pi)$。这对于多重无限循环群是已知的事实，而且是进一步工作的主要动力源泉。

与此有关的问题是离散群π对$\mathbf{R}^n$的自由一致作用的分类。这方面进一步的问题是：这

* 原题：Problems of Present Day Mathematics，译自 *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 28 (1976), 35—79.

样的作用是否总是可光滑化的？如果ρ包含π作为有限指数子群，π的作用是否必然扩张为ρ的作用？如果M紧致而它的万有覆盖$\widetilde{M}$是可缩为一点的，$\widetilde{M}$是否必然同胚于欧氏空间$\mathbf{R}^m$？（若$m>4$，只须$\widetilde{M}$在无穷处单连通即可。）

如果G为有限生成，且有无限多个端点，则根据Stallings的结果，G分解为一个混合自由积（或HNN构造），这里所说的子群是有限的。这一分解过程是否必然终结？一个密切相关的问题是：$H^1(G; \mathbf{Z}_2G)$作为mod 2群环$\mathbf{Z}_2G$上的模是否是有限生成的？

许多3维流形的问题都依赖于Poincaré猜测，但是有许多更一般的问题却涉及，比如说，亏格的表示。也许最有趣的是：如果M^3为紧致，具有无限基本群，M是否一定有一个有限覆盖空间，含有一个不可压缩的闭曲面T，即T有无限基本群，而映射$\pi_1(T)\to\pi_1(M)$是一一映射。

ＸＸ．**辛微分同胚的不动点**（B.Арнолд）．问题来源于Poincaré的“最后几何定理”。最简单的情形是下面的问题：**2维环面的一个辛微分同胚，如果同调于恒同映射，是否有不动点？**

辛微分同胚是一个微分同胚，使某个非退化的闭2维形式（2维情形为面积）保持不变。辛微分同胚同调于恒同映射$\Longleftrightarrow$它属于与恒同映射同伦的辛微分同胚组成的群的换位子群。用坐标表示，这样的微分同胚由$x\to x+f(x)$给出，其中x是该平面一点而f是周期映射。这个映射是辛映射$\Longleftrightarrow$Jacobi行列式$(D(x+f(x))/Dx)$恒等于1；它同调于恒同映射$\Longleftrightarrow f$的平均值为0。

Poincaré的“最后几何定理”（由G.D.Birkhoff证明）研究一个循环环。2维球面的辛微分同胚有两个几何上不同的不动点，这个事实也被证明了(A.Shnirelman, N.Nikishin)。对一般情形，我们可以猜测，不动点的个数以某个函数的临界点个数为下界（不论是代数个数还是几何个数）。

（问题ＸＩＸ—ＸＸ：**张国滨译　江嘉禾校**）

ＸⅪ　**偏微分方程。**

(A) 椭圆型方程组的正则性问题（E. Bombieri）．近年来的一个新结果表明，变分学中正则解析问题的解不必是解析函数。除去维数估计外，关于奇点集合的结构人们知道得非常少。奇点集合是否半解析？如果不是，解的怎样的一类奇点才是适当的、可以接受的？特别重要的情形有：一阶一致椭圆型非线性方程组，以及具有任意维数与余维数的极小簇的奇点问题。

(B) Laplace算子的谱在多大程度上能够确定原来的紧致流形？（E.Bombieri）近年来这个问题已经取得很大进展，进一步的研究很可能获得有意义的发展。

(C) 复的Monge-Ampère方程（F.Browder, L.Nirenberg）由于近几年Погорелов的工作和最近以来Calabi-Nirenberg的工作，有关实的Monge-Ampère方程及其推广$\mathrm{Det}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_h}\right)=f(x,u,Du)$的研究已经取得了决定性的进展。把这些结果推广到复的情形，对研究C^n的强性拟凸区域G上的全纯与双全纯映射会有重大意义，在复的情形，就是要解Dirichlet问题，找出在上述区域上定义的“亚”调和函数（Plurisubharmonic function）u，满足下述偏微分方程：

$$\mathrm{Det}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}\right)=f\geqslant 0。$$

这方面的研究是Kerzman，Kohn和Nirenberg开创的，但得到的结果有很大的局限性。

(D) **线性偏微分算子**（F.Browder）。近几年来，由于发展了拟微分算子理论，创建了Fourier积分算子方法，对于具有诸如局部可解性和亚椭圆性的主范型线性偏微分算子而言，在描述其特性方面有了重要的进展。把这些结果推广到更一般的（不再是主范型的）线性偏微分算子时，有很多困难的陈述问题和技巧问题。这些问题刚刚开始研究。这些问题同n元Cauchy-Riemann算子限制于拟凸区域的边界这种“退化”问题有关，所以其重要性大为增加。

(E) **与物理学上“湍流”等价的数学提法是什么？**（B.Арнолд）一个众所周知（至少，自1962年以来）的猜想是：在初始条件构成的无限维相空间中，可以藉助于有限维吸引子来定义粘性不可压缩流体的湍流，使得这些吸引子的动力系统本身是指数不稳定的（“双曲的”）。只要雷诺数是有限数，吸引子的维数也就是有限数，并且随雷诺数的增长而增长。然而，还有另外一些观点，譬如，认为湍流的数学表示就是Navier-Stokes方程的解不存在或不唯一；认为这些方程并不是物理运动的适当的模型。我希望后一种观点不对；**对于三维Navier-Stokes方程寻求适当的存在唯一性定理**，这只是问题的一个方面（这个问题也可以就二维情况来考虑，此时存在、唯一性已经知道）。

(F) Korteweg-de Vries **方程**（Ю.И.Манин）。近来，某些很具体的非线性波动方程的理论有了意想不到的突破。由于Gardner-Green-Kruskal-Muira的开创性工作，人们首先注意Korteweg-de Vries方程$u_t-6uu_x+u_{xxx}=0$。发现了无限多个守恒律，证明了孤立波的“拟线性”合成律。后来，В.Захаров和Л.Фаддеев证明了一个令人兴奋的结果：Korteweg-de Vries方程描述一个完全可积的无穷维Hamilton方程组。现在，提出了一些具有类似性质而且有物理意义的方程。所以В.Захаров可以这样来解释关于Fermi-Pasta-Ulam现象的某些令人惊奇的数值结果：在非线性振荡子系统中没有随机性。我相信这将成为一个非常重要的新研究领域。有了Boltymann，Gibbs，Bohr的工作，我们对宇宙的那些基本上是统计的性质有了更好的了解，然而仍存在大量的机理。“解”处处可见，凝聚至少与耗散一样重要。如果充分多的数学物理方程，经过适当线性化之后，都表现出与Korteweg-deVries方程一样的模式，这也许有助于统一我们的理论体系。

（肖　玲译　江嘉禾校）

XXII．**非线性泛函分析**（F.Browder）。在过去的十年间，对Banach空间中各种类型的非线性算子（特别是那些应用于偏微分方程、积分方程、最优化理论、控制理论以及其它领域的非线性算子）的研究有了长足的发展，从而形成了一系列重大的问题。这些问题与一定类型的非线性算子有关，而且是有很大的技术困难。

(A) Schauder**定理的推广**。设X为Banach空间，f是把X映入自身的连续映像。假定存在X中的一个紧子集A，满足：对X的每个紧子集K以及A的每一个邻域U，存在一个整数$n(K, U)$，使得$n\geqslant n(K, U)$时，$f^n(K)\subset U$。那么，f在A中是否有不动点？

至今还不知道有无反例。但是对于各种各样的特殊情形已经得到了结果。[20]中宣布：如果存在$k<1$，使得X中所有的x都满足$\mathrm{dist}\,(f(x), A)\leqslant k\,\mathrm{dist}\,(x, A)$，那么$f$有不动

点。这个结果也对Hilbert 空间[10]以及一般的 Banach 空间[28]建立起来了，两者都有下述稍强的形式：假设序列$\{\varepsilon_i\}$和$\{\delta_i\}$趋于零，对于所有的 i 满足$\varepsilon_i<\delta_i$，使得 f 把A的δ_i邻域映入A的ε_i邻域，那么 f 在A中有不动点。当 f 是局部紧时，[10]和[11]中给出了不动点的存在定理；当 f 是局部凝聚（locally condensing）时，[27]中也给出了不动点的存在定理。对于 C^1 类的 f，如果某个迭代 f^m 在A的一个邻域上是凝聚的，[28]中证明了存在不动点。

(B) 非扩张映像. 设X为Banach 空间，C为X中的闭凸子集，f 是把C映入X的非扩张映像，即对于C中所有的 x 和 u，有

$$\|f(x)-f(u)\|\leqslant\|x-u\|.$$

可以提出如下两个问题：

（1）假设C为弱紧，f 把C映入C，f 是否有不动点？

（2）假设X自反，C为弱紧且满足正规结构条件（即对于C的任意一个非平凡的闭凸子集C_1，存在C_1的一点y，满足：对某个$d<\mathrm{diam}(C_1)$，C_1含于以 y 为心的 d 球内），那么，$(I-f)(C)$是否是X的闭集？

如果X是一致凸的，或者更一般地，如果X是自反的，而且C有正规结构，[12]、[21]和[24]对问题（1）给出了肯定的回答。类似地，如果X是一致凸的，则问题（2）也有肯定的回答。对于仿射映像，按照著名的Ryll-Nardzewski定理，问题（1）得到肯定的回答，对X不需作什么假设。

(C) 自反Banach空间中的极大单调映像. 设X为Banach 空间，T 是把X映入2^{X^*}的映像，其中X^*是X的共轭空间。T 称为是单调的，如果对$T(u)$中的每个ω以及$T(x)$中的每个 y，有$\langle\omega-y,\ u-x\rangle\geqslant0$，这里$\langle\omega,\ u\rangle$表示$X^*$与$X$之间的对偶。单调映像$T$ 称为是极大单调的，如果在把X映入 2^{X^*} 的所有单调映像中，映像T 按照图的包含关系是极大的。如果X是自反的，则要证明：极大单调映像T 是满映像的充要条件是：T^{-1} 是局部有界的（[15]，[30]）。为了用这个结论来证明非线性抛物型和双曲型微分算子的变分不等式的存在定理，重要的是给出一般的准则，以判定两个极大单调映像之和$T+T_1$本身就是极大单调算子。现在已经得到了一些充分条件，涉及 T_1 的准有界性或下述形式的局部不等式

$$\|T_1(u)\|\leqslant k\|T(u)\|+k_1,$$

其中$k<1$。为了使抽象理论能够处理现在是用种种特定方法来处理的全部情况，必须有更强的结果。

一个有关的问题是伪单调性概念的扩充。设T 是从X到 2^{X^*}的极大单调映像，T_0 是从X到X^*的有界且有穷连续的映像。假定T_0是T 伪单调的，即是：如果$\{u_i\}$为X中的任何序列，弱收敛于X中的点 u；$\{y_i\}$是有界序列，$y_i\in T(u_i)$，使得 $\overline{\lim}(T_0(u_i),\ u_i-u)\leqslant0$，那么，$T_0(u_i)$弱收敛于$T_0(u)$，而且$(T_0(u_i),\ u_i-u)\to0$。

再假设$(T+T_0)$还是强制的(coercive)，那么$(T+T_0)$是否是满映像？

当T 线性时，Brezis[4]给出了肯定的结果。一般的情况仍然未解决。

(D) 非自反Banach空间中的极大单调映像. 设X为一般的Banach 空间（不必自反），T 为从X^*到2^X的极大单调映像。假定T^{-1}局部有界，那么，T 是否为满映像？

在T 为强制映像这个稍强的假定下（即对每一个常数 c，集合

$$\{u\mid 存在\omega\in T(u),\ 满足\ \langle\omega,\ u\rangle\ \leqslant c\|u\|\}$$

有界），[8]中证明了T 是满映像。如果T 还是从X^*到 $2^{X^{**}}$ 的极大单调映像，[6]中证明了

所猜测的结论成立。所猜测的结论（例如，刚才我们提到过的那些结果，以及就两个配对的Banach空间X与Y之间的映像而言，这些结果的若干推广），可能对于强非线性 Hammerstein 积分方程理论会有某些有趣的应用（见[22]，[23]）。

在[7]中，对自反Banach空间证明了如下的定理：设 L_0 和 L_1 是从X到X^*的单调线性映像，满足 $L_0\subseteq(L_1)^*$，那么存在一个极大单调线性映像 L，适合 $L_0\subseteq L\subseteq(L_1)^*$。现在可以提出这样的问题：是否存在对所有Banach空间X都成立的这种类型的结论？肯定的回答将会对奇异 Harmmerstein 积分方程的研究有重要的应用。

(E) 非线性映像的遍历理论. 设X为一致凸Banach 空间，U是把X中的单位球B映入自身的非扩张映像。作

$$S_n(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}U^j(x).$$

那么，$S_n(x)$是否弱收敛于U的不动点？

当X为Hilbert空间时，这结果是Baillon[1]给出的；对于Hilbert空间中非扩张映像的单参数半群$U(t)$，也有相应的结果([2])。在这些证明中充分利用了Hilbert空间的结构（也见Bruck[17]关于最速下降法的结果）。

(F) φ 生长映像 (φ-accretive mappings)。与研究从 Banach 空间X到其共轭空间X^*的单调映像的同时，也研究了从Banach空间到其自身的生长映像。把X映入X的连续映像f称为生长的，如果对所有的 $\lambda>0$ 以及所有的 x和 u，有

$$\|(u-x)+\lambda(f(x)-f(u))\|\geqslant\|x-u\|.$$

Banach空间中的非线性半群理论（它推广了线性情况下相应的Hille-Yosida 理论）证实：生长映像及其多值推广就是非扩张映像连续单参数半群的无穷小母元的负值。生长映像的概念也可由不等式

$$\langle f(x)-f(u),\ J(x-u)\rangle\geqslant 0$$

来定义，这样就与单调映像惯用的定义比较类似了。这里J是把X映入 X^* 的对偶映像，由下列条件给出：

$$\|J(x)\|=\|x\|;$$
$$\langle J(x),\ x\rangle=\|x\|^2.$$

（至少当X^*严格凸时，J唯一确定，而在更一般的情况下，J是多值的。）

设X和Y是Banach空间，假设给了一个把X映入Y^*的映像φ，使得φ是满映像，在有界集上一致连续；$\|\varphi(x)\|=\|x\|$；以及对$\lambda>0$有 $\varphi(\lambda x)=\lambda\varphi(x)$。

把X映入Y的连续映像f称为是（强）φ生长的，如果对X中所有的x和u，有

$$\langle f(x)-f(u),\ \varphi(x-u)\rangle\geqslant c\|x-u\|^2,$$

其中c是固定的正常数。是否每一个强φ生长映像f都是满映像？

在一些特殊的情况下，例如当f是局部Lipschitz 映像，或者当f满足 1/2阶的Lipschitz条件而且Y在原点的补集上有C^2范数时，[10]和[14]中已给出肯定的回答。这些结果中，有一些依赖于正规可解映像的理论。一般情况下的问题仍然没有解决，而且特别有意思。因为这个问题给出单调映像和生长映像这两种特殊情况之间的潜在联系，而这两者的研究则是基

于实质上完全不同的讨论方式。

(G) 构造可解性 (constructive solvability) . 设X是自反 Banach 空间， f 是把X映入X^*的连续单调映像，有界而且强制。已经知道，方程$f(u_0)=0$存在一个解 u_0。假设f^{-1}是单值的，而且具有某种程度的连续性。那么，是否有一种构造性的方法来证明这个存在定理，即找出一个序列$\{x_n\}$，满足$\|x_m-x_n\|\leqslant\varepsilon_{m,n}$，其中$\varepsilon_{m,n}$①具体给定，使得$x_n$[1]收敛于$u_0$? 特别，当$X$可分，而且$f$按某种意义是强单调的，那么用Galerkin 近似法是否能得到方程的解?

如果X是 Hilbert 空间H，[10] 和[16]中已有这方面的结果，此外，采用半群方法对于生长映像的情形也有相应的推广。但是，如果X不是 Hilbert 空间，这方法不能推广到单调映像的情形。

(H) 非凸函数和非凸集合。寻找某种统一的、系统的理论，使它能够同时囊括和阐明从Banach空间的凸函数和凸集过渡到非凸函数和闭集时形形色色的不同结果。例如，正规可解定理[13, 14]；求出一个微分方程在闭的非凸集中的轨线的条件[26]；非凸函数的一般极值的存在定理[3, 19]；以及其它结果([18]，[9]，[25]，[29])。希望能够找到具有更加普遍意义的原则，而不仅仅是一些个别结果之间那些特殊的相互关系；也不仅仅满足于所有的结果都可以运用Banach空间中有序集合上的论证推出。

(倪皋群译　江嘉禾校)

参考文献

[1] J.B.Baillon, *Un théoréme de type ergodique pour les contractions non-linéaires dans un espace de Hilbert*, C.R.Acad.Sci.Paris (1975).

[2] J. B. Baillon and H. Brezis, *Une remarque sur les comportement asymptotique des semigroupes non-linéaires*, C.R.Acad. Sci.Paris (1975).

[3] J.Baranger, *Existence des solutions pour les problémes d'optimization nonconvexe*, J.Math.Pures.Appl. 52 (1973), 377-405.

[4] H.Brezis, *Perturbations non linéaires d'opérateurs maximaux monotones*, C.R.Acad. Sci. Paris. Sér. A-B 269 (1969), A566-A569. MR 40 *3351.

[5] ——, *Opérateurs maximaux monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland Math. Studies, no.5, Notas de Matematica (50), North-Holland, Amsterdam; American Elsevier, New York, 1973. MR 50 *1060.

[6] H.Brezis and F.E.Browder, *Nonlinear integral equations and systems of Hammerstein type*, Advances in Math.18 (1975), 115-147.

[7] ——, *Singular Hammerstein equations and maximal monotone operators*, Bull. Amer. Math. Soc. (to appear).

[8] ——, *Maximal monotone operators in nonreflexive Banach spaces and nonlinear integral equations of Hammerstein type*, Bull.Amer.Math.Soc.80 (1974), 82-88.

[9] A.Brondsted, *On a lemma of Bishop and Phelps*, Pacific J.Math.55 (1974), 335-341.

[10] F. E. Browder, *Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution in Banach spaces*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 18, part 2, Amer.Math.Soc., Providence, R.I., 1976.

① 原文是$x_{m,n}$.——译注。

[11] ——, *Asymptotic fixed point theorems*, Math.Ann.185 (1970) , 38-60. MR 43 #1165.

[12] ——, *NOnexpansive nonlinear operators in a Banach space*, Proc.Nat.Acad.Sci.U. S.A 54 (1965) , 1041-1044.MR 32 #4574.

[13] ——, *Normal solvability for nonlinear mappings into Banach space*, Bull.Amer.Math.Soc.77 (1971), 73-77. MR 42 #5114.

[14] ——, *Normal solvability and φ-accretive mappings of Banach spaces*, Bull.Amer.Math.Soc.78 (1972), 186-192. MR 46 #6113.

[15] ——, *Nonlinear monotone and accretive operators in Banach spaces*, Proc.Nat. Acad. Sci. U.S.A.61 61 (1968) , 388-393. MR 44#7389.

[16] F.E.Browder,*On the constructive solvability of nonlinear equations*,J.Functional Analysis(toappear).

[17] R.H.Bruck, *Asymptotic convergence of nonlinear contraction semigroups in Hilbert space*,J.Functional Analysis 18 (1975) , 15-26.

[18] I.Ekeland,*Sur les problémes variationnels*, C.R.Acad.Sci.Paris Sér. A-B 275(1972), A1057-A1059. MR 46 #9768.

[19] I.Ekeland and G. Lebourg, *Generic Fréchet-differentiability and perturbed optimization problems in Banach spaces* (to appear) .

[20] R.L.Frum-Ketkov, *Mappings into a Banach sphere*, Dokl.Akad.Nauk SSSR 175(1967), 1229-1231= Soviet Math.Dokl.8(1967), 1004-1006. MR 36 #3181.

[21] D.Göhde, *Zum prinzip der kontraktiven Abbildung*, Math.Nachr.30 (1965) .251-258. MR 32 #8129.

[22] J.P.Gossez, *Opérateurs monotones non linéaires dans les espaces de Banach non reflexifs*, J. Math. Anal. Appl.34 (1971) , 371-395. MR 47 #2442.

[23] ——, *On the range of a coercive maximal monotone operator in a nonreflexive Banach space*, Proc. Amer. Math. Soc.35 (1972) , 88-92. MR 45 #7544.

[24] W.A.Kirk, *A fixed point theorem for mappings which do not increase distances*,Amer.Math.Monthly 72 (1965) , 1004-1006. MR 32 #6436.

[25] W.A.Kirk and J.Caristi, *Mapping theorems in metric and Banach spaces* (to appear) .

[26] R.H.Martin,*Differential equations on closed subsets of a Banach space*,Trans.Amer.Math. Soc. 179 (1973),399-414. MR 47 #7537.

[27] R.D.Nussbaum, *Asymptotic fixed point theorems for local condensing mappings*, Math.Ann.191(1971), 181-195. MR 45 #7554.

[28] ——, *Some asymptotic fixed point theorems*, Trans.Amer. Math. Soc. 171 (1972) , 349-375. MR 46 #9817.

[29] R.R.Phelps, *Support cones in Banach spaces and their applications*, Advances in Math. 13 (1974) , 1-19. MR 49 #3505.

[30] R.T.Rockafellar, *Local boundedness for nonlinear, monotone operators*, Michigan Math.J. 16(1969), 397-407. MR 40 #6229.

XXⅢ. **奇异积分算子（A.P.Calderon, Y.Meyer）**. 令$a(y)$为直线上具有紧支集的Lipschitz函数；对非负整数n，考虑定义为

$$T_n(f)(x)=\int\left\{\frac{a(x)-a(y)}{x-y}\right\}^n\frac{f(y)}{x-y}dy$$

的奇异积分算子$T_n(f)$，其中函数$f\in L_2$。当$n=0$时，这恰好是Hilbert变换，它是L_2上的有界线性映射。当$n=1$时，相应的结果是Calderón在1965年用复方法做出的，前不久，Coiffman和Meyer对$n=2$做出了这个结果。在这些情况中所用的方法不能推广于更大的n，为此必须应用新的思想和技巧。

XXⅣ. **Fourier分析（C.Fefferman）**.

问题。提出相当于Lebesgue测度的理论，用来建立R^n上的Fourier分析。

一维Lebesgue测度是建立经典Fourier分析某些基本结果（对积分求微分的Lebesgue定理，Hilbert变换的L^p有界性，Littlewood-Paley不等式，等等）的关键概念。特别是，Hilbert变换与Lebesgue测度有密切的联系，所以可以说，任何函数及其Hilbest变换在Lebesgue测度很小的某个集合之外，差不多有相同的性态。

可是，Lebesgue测度似乎远不适用于n维Fourier分析。在R^2中，业已不能对积分求强形式的积分了；事实上，即使$f\in L^\infty$，$\lim_{R\to(x)}(1/|R|)\int_R f(y)dy$也可能几乎处处不存在，这里$R$表示有任意离心率及方向的小矩形。这个很糟糕的事实来自Kakeya现象，即存在某些面积任意小的集合$E\subseteq R^2$，含有各个方向上的单位线段；这就直接影响到Hilbert变换在R^n中的自然相似物的L^p有界性的前途。因此，Fourier级数的深刻知识大部分至今必须限于一维。

另一方面，Fourier变换在R^n中有某些好的性质，是在R^1中并未表现出来的。例如，函数$f\in L^{4/3-\epsilon}(R^2)$的Fourier变换可缩减于单位圆$S^1\subseteq R^2$上，且甚至属于$L^{4/3}(S^1)$。如果我们将单位圆换成直线段，则类似的“缩减定理”不真。这就暗示下述基本问题根本沒有一个明确的答案：“R^n上的L^p函数的Fourier变换有多大？”

为了了解R^n，有一种可能的方法，就是对于长薄矩形构成的有效覆盖所定义的R^n中的集合与函数，建立它们的大小概念。用这种大小来衡量，Kakeya集E可能是相当大的；这也许能从Kakeya现象中去掉一点詩论的味道，而且或许能推出在适当的函数空间上n维Hilbert变换的有界性。按照以薄矩形来覆盖的观点，圆显然比线段大，从而“缩减”现象也可能得到解释。

当然，任何“大小”的概念要有用，就必须在正常情况下是可以计算的。

XXⅤ. **Banach空间（P.Enflo）**.

（A）在一般空间的理论中，最有趣的问题之一，是判定每个无穷维Banach空间中是否存在无穷维子空间，具有某些正则性质。Dvoretsky定理说，在无穷维Banach空间中，对每个n都存在子空间几乎等距同构于n维欧氏空间。这个定理是Banach空间理论中最深刻和最有用的结果之一。所以，为了更好地理解一般的Banach空间，要紧的是把这个结果适当地推广到无穷维子空间。最显而易见的推广就是，每个无穷维Banach空间都包含某一子空间，

同构于 l_p 或 c_0；这是不对的，Tzirelson 已经证明了。很可能，某种较弱的推广是对的；下列诸问题看来是可以解决的。

（1）每个无穷维 Banach 空间是否都包含一个子空间，具有无条件基？（一个空间的无条件基是指它的一个序列 $\{e_n\}$，对于每个元素 x 有 $x=\sum a_n e_n$，不管按什么次序求和都成立。）

（2）每个无穷维 Banach 空间是否都包含一个子空间，同构于 l_1 或 c_0 或某个自反 Banach 空间？

Rosenthal 最近对包含 l_1 的空间有一种刻划，把这两个问题都化简了，并表明它们与硬经典分析中的一些问题有密切联系。

(B) 在经典Banach空间理论中，很难说哪些特殊问题对这种理论的发展是重要的。这种理论的最新发展表明，它与调和分析、概率论、拓扑动力学、积分几何等等都有密切联系；对于 Banach 空间的问题以及较为经典的分析中的问题，继续研究它们之间更强的相互作用，看来是一个很能出成果的方向。例如，可以提出两个问题，这是随意选出的，还可以选出许多别的问题。

（1）H_1 是否有无条件基？

（2）若 $X\subset L_1(0,1)$，且存在一个把 $L_1(0,1)$ 映成 X 的连续线性投影，X 是否同构于 l_1 或 $L_1(0,1)$？

(C) Banach 空间上的每个算子是否都有非平凡的不变子空间，这个熟知的问题显然是算子理论中的一个重要问题。还存在与此问题有关的 Banach 空间的特性。Banach 空间的正则性在多大程度上影响到问题的答案。有几个正面的部分结果在所有 Banach 空间中都对。具有肯定答案的某几类算子并不是在所有 Banach 空间中都完全有定义；也有些迹象表明，象 Banach 空间的自反性这样的条件，对这个问题是起作用的。还应该提一下，Banach 空间理论还有许多别的重要方向。

（问题ＸＸⅢ—ＸＸⅤ：成　征译　江嘉禾校）

ＸＸⅥ．**概率**（P. Cartier）。迄今为止，人们只对两类随机过程有充分了解，即马氏过程和高斯过程。研究得最透彻的是同属于这两类过程的布朗运动。这里有几个可能的方向有待今后探索。

（1）**多维时间参数的马氏过程**。Nelson 过程（自由马氏场）的新发现以及早些时候 P. Levy 和 Mackean 对多参数布朗运动的探讨都显示出有必要用欧氏空间的点为参数来研究马氏过程。可能应从高斯过程入手。

主要的难点在于定义和发现一些好的马氏性质以及寻求像鞅与随机积分那样强有力的方法。各类随机分布应详加研究。

（2）**非线性微分和积分方程**。已有迹象表明（例如 Ueno，Nagasawa 等人的工作），有些非线性泛函方程可以用概率方法得到有效的解决。Boltzmam 方程就属于这类方程，该方程和统计力学中的“主方程”(master equation) 的联系是大家熟悉的。此外，对形如 $\partial\psi/\partial t=\Delta\psi$ 的方程，在 ψ 为正的区域（自由边界）内，H. Rost 用他的“methode de remplissage”① 得到方程的解。

① 法语，填充法。——译注。

（3）**非高斯过程的正则性质**。Fernique，Dudley 等人最近的工作使我们对高斯过程的局部性质有了充分的了解。相比之下，对于非高斯过程我们却相当无知。这一领域应该是 L. Schwartz 的新方法（radonification problem）的试金石。我把各种随机分布包括在这些过程中。

（4）**随机测度，点过程**。我们知道的不过就是几个基本事实和零星结果。例如，最近 Lenard 的工作指出，甚至其基础理论仍需重新检验。人们需要做的是把在大量应用（生物、统计、统计力学）中有使用潜力和容易处理的那些好的过程类找出来。可望得到与（2）中诸问题的联系。

（陈兆国译　江嘉禾校）

XXⅧ. **数学物理**（A. Wightman）.

下述这些问题在选择上多少有些任意，但却有一个共同点，即是对数学和物理二者来说，这些问题很可能都具有一定的意义。

经典统计力学问题。对微观粒子所构成的系统的性态作宏观描述时，统计力学认为成功的原因有三个：（a）当粒子数为任意大时，统计理论的预测对热力学极限情形是有效的；（b）人们只注意系统中可以直接观测到的宏观现象，不易察觉到微观上的杂乱无章；（c）决定粒子运动的定律仅有几个运动积分，否则粒子的性态就具有各态经历的特点。这三个因素对于饶有兴趣的 Hamilton 系统的相对重要性，至今仍未弄清楚。我们知道，许多 Hamilton 系统中都有额外的运动积分，这些运动积分的存在性是 Колмогоров，Арнолд [1] 与 Moser [2] 建立的。这样我们就有如下问题：

（1）对热力学极限情形，Колмогоров-Арнолд-Moser 的额外运动积分起着怎样的作用？尤其是，在什么情况下统计力学的预测会由于这种额外运动积分的存在而失效？

经典统计力学的代表性模型是（可逆的！）Hamilton 系统。有许多种宏观的迁移理论，用少量参数描述不可逆性态。然而，只用启发式的论证，总是从前者导出后者，几乎没有什么例外。因此可提如下问题：

（2）微观、可逆的粒子理论与宏观、不可逆、决定性的迁移理论有什么关系，如果迁移理论中的状态可以用少量参数来表示？

对某些经典 Hamilton 系统的平衡态已证实了存在热力学极限，而且据信对更广泛的情形也存在 [3]。也相当广泛地建立了高温平衡态的唯一性［3，第4章］，而且对一些情形还证明了存在着变为二相区域的相变。然而，一般说来，我们几乎是无知的。于是有如下问题：

（3）经典 Hamilton 系统的平衡相集有什么定性特征？例如，它通常是分片光滑流形吗？

n 体量子力学问题。联系到相对性量子场论曾经提到渐近完备性问题。在Schrödinger n 体问题中，已对排斥力以及与排斥力仅差一充分小摄动的力建立了渐近完备性。然而，对一般的力，子系统束缚态的谱相当复杂，渐近完备性问题仍未解决。

（1）对于通常的力，证明 n 体问题中的渐近完备性。

量子统计力学的一些问题。量子统计力学包括适用于通常物质的多体问题，这些物质呈现出丰富多采的性质，有的简单，有的复杂。当前形势的特点是，这些性质中很少是用数学

上令人满意的方式直接从基本原理推出来的。我举出两个这种典型的问题：

（1）假定在有限多个原子类中存在某些适当的力，例如 Coulomb 力，试从一些基本原理推出晶体的存在性。

（2）从一些基本原理导出固态和液态的典型性质，例如，金属的传导性，超导性以及超流性。

相对性量子理论中的一些问题。 在构造性量子场论的现阶段，人们似乎普遍地意识到，为了最终完成各种超可重整化模型所必须的观念，或者已经掌握，或者即将形成。然而，这一规划迄今为止原来并不像多年前看起来那样容易付诸实现①，即使易于实现（而且将这一规划进行到底，从而看出在强耦合极限情形下模型的定性性质，即使这是十分有教育意义的），也可能仍未触及四维时空中可重整化理论的主要问题。这些问题需要什么样的观念，这远不是一目了然的。下面我举出的第一个问题，是一种典型的四维时空理论。从符合实验的观点看来，这是我们所知道的最好的量子场论。

（1）证明在四维时空中自旋为$\frac{1}{2}$的重粒子的量子电动力学解的存在性。

在一般性地讨论局部量子理论和上述相对性量子场论的关系时，有人指出，根本不存在把这两种理论联系起来的一般性理论。

（2）建立局部量子理论与相对性量子场论之间的关系。

Dyson[4] 曾提出过一个局部量子理论的问题。由于这个问题引起人们极大的兴趣，而且蕴藏着提出一种引力量子理论的可能，所以我们复述如下：

（3）寻求同广义相对论相容的某种形式的局部量子理论。

重整化是相对性量子场论中的关键的技术难点。动力学上的不稳定性以及联袂而来的对称性的破坏，都是相对性量子场论的特征，正是这些特征使这一理论最有希望成为对自然界的一种可能的描述。Lagrange 场论中 Schwinger函数的欧氏泛函积分则是就种种量子理论而言最直接的表示。这使人联想到以下问题：

（4）寻求某种形式的重整化理论，以及动力学不稳定性理论，使得后者可由Lagrange场论中 Schwinger 函数的欧氏泛函积分直接表出．

以 Green 函数和推迟函数开始的公理化的量子场论，其登峰造极的成就之一就是所谓结构分析[5, 6]。这种理论分两步进行。第一，应当分析 Lagrange 场论中 Green 函数的微扰级数的基值。这些基值可用所谓 Feynman 图标出，然后，这些图又可由其连通度进行分类（一个连通图的连通度，就是要使此图不连通所必须剔除的棱的条数）。粗略地说，具有第 n 阶连通度的那些基值的部分和称之为 n 粒子既约 Green 函数（我们忽略了可以区分各种不同棱的精细步骤）。第二步，结构分析给出 n 粒子既约 Green 函数的非线性泛函方程组。这些非线性泛函方程具有下述性质：它们的迭代解正好给出结构分析的第一步中出现的微扰级数的基值的部分和。因此，这些非线性泛函方程乃是 Green 函数结构的非微扰分析的候补者。某些特殊的 Lagrange 场论可能具有下述特征：在一定阶数以外所有既约 Green 函数均为零。这就提出了最后一个问题：

（5）利用结构分析导出 Lagrange 场论。

（刘书麟译　江嘉禾校）

① 这句话的原文是：However, this Program has so far out turned out to be as easy to carry out as it appeared several years ago.其中第一个 out 疑是 not 之误。——译注。

参 考 文 献

[1] V.I.Arnol'd and A.Avez, *Problémes ergodiques de la méchanique classique*, Monographies Internat. Math. Modernes, no.9, Gauthier-Villars, Paris, 1967; English transl., Benjamin, New York, 1968. MR 35 *334; 38 *1233.

[2] J. Moser, *Stable and random motions in dynamical systems*, Ann. of Math. Studies, no. 77, Princeton Univ.Press, Princeton, N.J., 1973.

[3] D.Ruelle, *Statistical mechanics, rigorous results*, Chapter 7, Benjamin, New York, 1969. MR 44 *6279.

[4] F. J. Dyson, *Missed opportunities*, Bull. Amer. Math. Soc. 78 (1972), 635—652.

[5] K. Symanzik, *On the many-particle structure of Green's functions in quantum field theory*, J, Mathematical Phys. 1 (1960), 249—273.MR 26 *3406.

[6] ——, *Grundlagen und gegenwärtiger Stand der feldgleichungsfreien Feldtheorie*, in Werner Heisenberg und die Physik unserer Zeit, Vieweg, Braunschweig, 1961, pp.275—298.

(全文完)

学生不应错过任何一次训练自己数值计算能力的机会，尤其不应忽视对数表。他在应用数学解决实际问题时的本领跟他计算的敏捷程度成正比。

——A. De Morgen

书 评

评华罗庚、王元著

《Applications of Number Theory to Numerical Analysis》*

E. Grosswald

数论有什么用处呢？谁也不怀疑，许多数学分枝之所以存在，应该归功于“现实世界”提出的问题，例如物理学、工程技术等提出的问题。熟知的例子有微积分，还有天体力学中需要的微分方程理论，以及流体力学中必不可少的偏微分方程，等等。但是，数论怎样呢？数论专家们为了应付我们第一个问题（通常是非数学家提出来的），往往感到必须使提问人相信数论也可以是有用的。有时提出数论在结晶学问题上的应用，近来还提到在密码学上的应用。为什么一定要指出数论在常识意义下的某种“用处”呢？这个问题也是本评论员百思不得其解的。有一点看来是确凿无疑的，就是 Diophantus，Fermat 和 Gauss 都是出自数论内在的趣味及其特有的美而研究人类知识的这一领域的：他们确实毫不在乎他们那些优美的定理是否会有什么“有用的”应用。

尽管如此，象“最纯粹的”数学家发展起来的许多别的数学分枝一样，原来数论也有自身以外的应用。除了密码学以及物理学中有关格子点的若干问题（结晶学问题就是其中之一，理想气体的研究是又一问题，见[2]）外，还可以举出数论的许多应用，例如计算机理论（见[9，第2卷]），随机数的产生（见[15]或[4]），等等。

Zaremba 编辑的著作[23]以及华罗庚、王元所著本书，这两种较近的出版物使人们注意到数论应用又一个广阔的天地，即是数值分析。

现在，数论专家如果感到有必要以数论的“用处”向世人说明应该喜爱这一领域，他就可以理直气壮地提出的确需要[23]和华罗庚、王元著作中的那种精深奥妙的数论，还可以举出 Knuth 的《计算机程序编制技巧》[9] 以及 Dieter 的若干文章（例如见[23.287—317页]和[5]），等等。

Zaremba 编辑的文集在相当广泛的意义下讨论了数论对数值分析的应用，而华罗庚、王元的著作却全力以赴地只讨论一个主要问题，即是多重积分的数值计算，实际上，本书十章中前八章是专讲这个问题的，只是最后两章才讨论别的问题（插值法、积分方程和微分方程）。数值积分几乎和积分一样源远流长。某些经典的多项式插值公式应该归功于牛顿；事

---

* 原题：Applications of Number Theory to Numerical Analysis, by Loo-keng Hua and Yuan Wang, Springer-Verlag, Berlin, Science Press, Beijing, 1981, 241pp. $39.00. 译自：*Bull. Amer. Math. Soc.* (New Series), 8:3(1983), 489—496.