# Riemann-Lebesgue 引理的一些推广

Ovidiu Costin　Neil Falkner　Jeffery D. McNeal

**摘要** 我们提出 Riemann-Lebesgue (黎曼 - 勒贝格) 引理的几个推广. 我们的方法展现了 Riemann-Lebesgue 引理中消去的作用.

Riemann-Lebesgue 引理有很多证明 [5, p. 253–255; 3, p. 60], 其中一个模式说, 对于每个 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 有

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\xi\cdot x} f(x)\, dx = 0.$$

为了减少记号, 我们集中于 $d = 1$ 的情形. 也许 Riemann-Lebesgue 引理最初等的证明是在 [4, p. 30, (ii)] 中 (也见 [6, p. 97, 问题 46]) 所提出的证明. 这里是那个证明的概要. 令 $(\xi_n)$ 是非零实数的一个序列, 使得当 $n \to \infty$ 时 $|\xi_n| \to \infty$. 对于每个 $n$, 由 $g_n(x) = e^{i\xi_n x}$ 定义 $g_n: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. 我们希望证明, 对于每个 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 当 $n \to \infty$ 时有 $\int g_n f\, dm \to 0$, 其中 $m$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度. 由于序列 $(g_n)$ 在 $L^\infty(\mathbb{R})$ 中是有界的, 并且具有有界支集阶梯函数的集合在 $L^1(\mathbb{R})$ 中是稠密的, 因此只需证明对每个有界非空区间 $I \subset \mathbb{R}$, 当 $n \to \infty$ 时有 $\int_I g_n\, dm \to 0$. 令 $I$ 是这样一个区间, 其左右端点分别为 $a$ 和 $b$. 则

$$\int_I g_n\, dm = \int_a^b e^{i\xi_n x}\, dx = \frac{e^{i\xi_n b} - e^{i\xi_n a}}{i\xi_n} \to 0, \quad 当 n \to \infty 时,$$

这就完成了证明. 然而, 在这里最后一步中借助于一个常规的明确计算掩盖了消去的作用, 而这是 Riemann 本人证明的基础. 对于这一步, 这里有一种方法, 它代替了对消去作用的强调. 考虑任一 $n$. 函数 $g_n$ 有周期 $\lambda_n = \frac{2\pi}{|\xi_n|}$. 更明确地, 对每个 $x \in \mathbb{R}$, 有

$$g_n\left(x + \frac{1}{2}\lambda_n\right) = -g_n(x),$$

因而 $g_n$ 在每个长度为 $\lambda_n$ 的区间上的积分为零. 现在, 区间 $I$ 可以被写为有限个长度为 $\lambda_n$ 的区间与一个长度严格小于 $\lambda_n$ 的区间 $J_n$ 的不相交并集. 因而

$$\left|\int_I g_n\, dm\right| = \left|\int_{J_n} g_n\, dm\right| \le \int_{J_n} |g_n|\, dm = m(J_n) < \lambda_n = \frac{2\pi}{|\xi_n|}.$$

这样, 当 $n \to \infty$ 时即有 $\int_I g_n\, dm \to 0$, 这就重新完成了证明. 证明最后一步的这个另外的方法导致 Riemann-Lebesgue 引理的下述推广.

**定理 1** 令 $(g_n)$ 是 $L^\infty(\mathbb{R})$ 中的一个有界序列, 并令 $(\Pi_n)$ 是由有界的 Lebesgue 可测集组成的 $\mathbb{R}$ 的一个可数划分的序列. 假设当 $n \to \infty$ 时 $\sup\{\mathrm{diam}(E): E \in \Pi_n\} \to 0$ (diam $E$ 表示 $E$ 的直径 —— 译注). 还假设对每个 $n \in \mathbb{N}$, 对每个 $E \in \Pi_n$, 有 $\int_E g_n\, dm = 0$. 则对每个 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 当 $n \to \infty$ 时 $\int g_n f\, dm \to 0$.

---

译自: The Amer. Math. Monthly, Vol. 123 (2016), No. 4, p. 387–391, Some Generalizations of the Riemann-Lebesgue Lemma, Ovidiu Costin, Neil Falkner, and Jeffery D. McNeal. 

从定理 1 之前的讨论，如何证明定理 1 应该是清楚的．在任何情形，定理 1 都是下面的定理 2 的特殊情形，我们将给定理 2 以详细的证明．在转到定理 2 之前，这里有一个应用定理 1 的例子．

**例 1** 令 $(h_n)$ 是 Borel (博雷尔) 可测的奇函数 $h_n\colon[-1,1]\to\mathbb{R}$ 的一个一致有界序列．则对每个 $f\in L^1(\mathbb{R})$, 当 $n\to\infty$ 时有 $\int_{\mathbb{R}} f(x)h_n(\sin nx)\,dx\to 0$.

**证明** 对每个 $n\in\mathbb{N}$, 由 $g_n(x)=h_n(\sin nx)$ 在 $\mathbb{R}$ 上定义 $g_n$, 并令 $\Pi_n=\{((k-1)a_n,ka_n)\colon k\in\mathbb{Z}\}$, 其中 $a_n=\frac{2\pi}{n}$. 则 $(g_n)$ 在 $L^\infty(\mathbb{R})$ 中是有界的，当 $n\to\infty$ 时 $\sup\{\operatorname{diam}(E)\colon E\in\Pi_n\}=a_n\to 0$, 并且对每个 $n\in\mathbb{N}$, 对每个 $E\in\Pi_n$, 由对称性有 $\int_E g_n\,dm=0$. 因而从定理 1 直接得到所希望的结论． ■

这里有可以推广定理 1 的一些路径．当 $n\to\infty$ 时集合 $E\in\Pi_n$ 的直径一致地趋于零不是必须的．在某种适当意义下这些直径局部一致地趋于零就足够了．对每个 $E\in\Pi_n$, 积分 $\int_E g_n\,dm$ 精确地为零也不是必要的．并且，代替 $L^1$ 和 $L^\infty$, 我们不妨考虑 $L^p$ 和 $L^q$, 这里 $p$ 和 $q$ 是共轭指数，并且 $p<\infty$. 这些考虑导致下述结果．

**定理 2** 令 $p\in[1,\infty)$ 和 $q\in(1,\infty]$ 满足 $p^{-1}+q^{-1}=1$. 令 $(g_n)$ 是 $L^q(\mathbb{R})$ 中的一个有界序列，并令 $(\Pi_n)$ 是由有界 Lebesgue 可测集组成的 $\mathbb{R}$ 的一个可数划分的序列．对每个有界非空区间 $I\subset\mathbb{R}$ 以及每个 $n\in\mathbb{N}$, 令

$$\delta_n(I)=\sup\{\operatorname{diam}(E)\colon E\in\Pi_n, \text{且}\, m(E\cap I)\neq 0\}.$$

假设对每个这样的 $I$, 当 $n\to\infty$ 时有

$$\delta_n(I)\to 0. \tag{1}$$

则对于下面的条件，我们有 (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (a).

(a) 对每个 $f\in L^p(\mathbb{R})$, 当 $n\to\infty$ 时有 $\int g_nf\,dm\to 0$.

(b) 对每个 $n\in\mathbb{N}$ 以及每个 $E\in\Pi_n$, 有 $\int_E g_n\,dm=0$.

(c) 对每个非空有界区间 $I\subset\mathbb{R}$, 当 $n\to\infty$ 时有 $B_n(I)\to 0$, 其中

$$B_n(I)=\sup\{|A(g_n,E)|\colon E\in\Pi_n, \text{且}\, m(E\cap I)\neq 0\},$$

而 $A(g_n,E)=\frac{1}{m(E)}\int_E g_n\,dm$ 是 $g_n$ 在 $E$ 上的平均．

(d) 对 $\mathbb{R}$ 中的每个非空有界区间 $I$, 存在 $\mathbb{R}$ 的一个 Lebesgue 可测子集序列 $(F_n)$, 使得当 $n\to\infty$ 时 $m(F_n\triangle I)\to 0$ 和 $\int_{F_n} g_n\,dm\to 0$.

$(F_n\triangle I=(F_n\backslash I)\cup(I\backslash F_n)$ —— 译注)

**证明** (b) 蕴涵 (c) 是显然的．现在假设 (c) 成立，我们来推导 (d). 令 $I$ 是一个 $\mathbb{R}$ 中的非空有界区间，其左右端点分别为 $a$ 和 $b$. 对每个 $n\in\mathbb{N}$, 令 $\mathcal{E}_n=\{E\in\Pi_n\colon m(E\cap I)\neq 0\}$, 并令 $F_n$ 是属于 $\mathcal{E}_n$ 的集合之并集．则对每个 $n\in\mathbb{N}$ 有 $F_n\subset[a-\delta_n(I),b+\delta_n(I)]$ 和 $m(I\backslash F_n)=0$, 因而当 $n\to\infty$ 时 $m(F_n\triangle I)=m(F_n\backslash I)\le 2\delta_n(I)\to 0$. 由 (1), 存在 $N$, 使得对每个 $n\ge N$ 有 $\delta_n(I)\le 1$. 此时对 $n\ge N$ 有 $m(F_n)\le m(I)+2$, 因而 $\int_{F_n}|g_n|\,dm\le\|1_{F_n}\|_p\|g_n\|_q\le(m(I)+2)^{1/p}\|g_n\|_q<\infty$, 因而，由控制收敛定理，我们有

$\int_{F_n} g_n\,dm = \sum_{E\in\mathcal{E}_n}\int_E g_n\,dm$, 并且还有

$$\begin{aligned}\left|\int_{F_n} g_n\,dm\right| &\le \sum_{E\in\mathcal{E}_n}\left|\int_E g_n\,dm\right| = \sum_{E\in\mathcal{E}_n} m(E)|A(g_n,E)| \\ &\le \sum_{E\in\mathcal{E}_n} m(E)B_n(I) = m(F_n)B_n(I) \le (m(I)+2)B_n(I).\end{aligned}$$

因而当 $n\to\infty$ 时 $\int_{F_n} g_n\,dm \to 0$. 这样，(c) 蕴涵了 (d).

最后，假设 (d) 成立，我们来推导 (a). 令 $Z$ 是 $L^p(\mathbb{R})$ 中使得 $n\to\infty$ 时 $\int_{\mathbb{R}} g_n f\,dm \to 0$ 的所有 $f$ 的集合，这里 $m$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个 Lebesgue 测度. 我们希望证明 $Z = L^p(\mathbb{R})$. 显然，$Z$ 是 $L^p(\mathbb{R})$ 的一个线性子空间. 由于序列 $(g_n)$ 在 $L^q(\mathbb{R})$ 中是有界的，则由 Hölder (霍尔德) 不等式，$Z$ 在 $L^p(\mathbb{R})$ 中是闭的. 由于 $p<\infty$, 有有界支集的阶梯函数的集合在 $L^p(\mathbb{R})$ 中是稠密的 [6, p. 151, 命题 10]. 因而，由于 $Z$ 是 $L^p(\mathbb{R})$ 的一个闭线性子空间，为了证明 $Z = L^p(\mathbb{R})$, 只需证明对每个非空有界区间 $I\subset\mathbb{R}$, 指示函数 $1_I$ 属于 $Z$ 即可. 令 $I$ 是这样一个区间，并令 $(F_n)$ 如 (d) 的陈述中所给出的序列. 令 $K = 1+\sup_n\|g_n\|_q$. 则有 $0<K<\infty$. 令 $\epsilon>0$. 则存在 $N$, 使得对每个 $n\ge N$ 有 $m(F_n\triangle I)\le\left(\frac{\epsilon}{2K}\right)^p$ 和 $\left|\int_{F_n} g_n\,dm\right|\le\frac{\epsilon}{2}$, 因而

$$\begin{aligned}\left|\int g_n 1_I\,dm\right| &= \left|\int g_n(1_I-1_{F_n})\,dm + \int g_n 1_{F_n}\,dm\right| \\ &\le \left|\int g_n(1_I-1_{F_n})\,dm\right| + \left|\int_{F_n} g_n\,dm\right| \\ &\le \|g_n\|_q\|1_I-1_{F_n}\|_p + \frac{\epsilon}{2} \\ &\le Km(I\triangle F_n)^{1/p} + \frac{\epsilon}{2} \\ &\le K\frac{\epsilon}{2K} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.\end{aligned}$$

这样，正如所希望的，当 $n\to\infty$ 时有 $\int g_n 1_I\,dm \to 0$. ■

在定理 1 和定理 2 中，不同的函数 $g_n$ 不必通过伸缩与单个函数 $g$ 有关. 但是接下来，通过专门研究这个情形，我们提出 Riemann-Lebesgue 引理的另一种推广，它比定理 2 容易证明，也可较为方便地应用于某些简单的例子.

**定理 3** 令 $g\in L^\infty(0,\infty)$. 固定 $c\in(0,\infty)$. 则下述一些论断是等价的.

(a) 当 $\xi\to\infty$ 时 $\frac{1}{\xi}\int_0^\xi g(x)\,dx \to 0$.

(b) 对每个 $f\in L^1(0,\infty)$, 当 $\xi\to\infty$ 时 $\int_0^\infty g(\xi x)f(x)\,dx\to 0$.

(c) 当 $\xi\to\infty$ 时 $\int_0^c g(\xi x)\,dx \to 0$.

**证明** 通过对 $f = 1_{[o,c]}$ 的考查，我们知道 (b) 蕴涵 (c). 注意到对每个 $\xi\in(0,\infty)$ 有 $\int_0^c g(\xi x)\,dx = \int_0^{\xi c} g(y)\frac{1}{\xi}\,dy = c\frac{1}{\xi c}\int_0^{\xi c} g(y)\,dy$, 即知 (a) 和 (c) 是等价的. 只剩下要证明 (a) 隐含 (b). 假设 (a) 成立. 对每个 $\xi\in(0,\infty)$, 由 $g_\xi(x) = g(\xi x)$ 在 $(0,\infty)$ 上定义 $g_\xi$. 注意，对每个 $\xi$, 有 $\|g_\xi\|_\infty = \|g\|_\infty$. 特别地，有 $\sup_\xi\|g_\xi\|_\infty < \infty$. 因而，正如前述，只需证明对所有满足 $a<b$ 的 $a,b\in(0,\infty)$, 当 $\xi\to\infty$ 时有 $\int_a^b g_\xi\,dm\to 0$. 但是由于无论 $c$ 是什么值，(a) 都蕴涵 (c), 因而对所有这样的 $a$ 和 $b$, 当 $\xi\to\infty$ 时我们有

$\int_a^b g_\xi\, dm = \int_0^b g_\xi\, dm - \int_0^a g_\xi\, dm \to 0$. ■

**注** 不妨把定理 3 中 (c) 蕴涵 (b) 这一事实视作为一个象征，它揭示了由伸缩把所有不同的函数 $g_\xi$ 与单个函数 $g$ 关联起来是多么地特别.

以定理 2 的实质，下面的定理是定理 3 蕴涵关系 (a)⇒(b) 的深化.

**定理 4** *令 $g \in L^\infty(0,\infty)$, 并令 $(\xi_j)$ 是 $(0,\infty)$ 中的一个严格增序列，使得当 $j \to \infty$ 时 $\xi_j \to \infty$. 对每个 $j \in \mathbb{N}$, 令 $I_j$ 是区间 $(\xi_{j-1}, \xi_j]$, 其中 $\xi_0 = 0$. 还假设当 $j \to \infty$ 时*

$$\frac{\xi_j - \xi_{j-1}}{\xi_j} \to 0. \tag{2}$$

*则对于以下一些条件，我们有 $(b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a)$.*

(a) *对每个 $f \in L^1(0,\infty)$, 当 $\xi \to \infty$ 时 $\int_0^\infty g(\xi x) f(x)\, dx \to 0$.*

(b) *对每个 $j \in \mathbb{N}$, 有 $\int_{I_j} g\, dm = 0$.*

(c) *当 $k \to \infty$ 时 $A(g, I_k) \to 0$, 其中 $A(g, I_k) = \frac{1}{m(I_k)} \int_{I_k} g\, dm$ 是 $g$ 在 $I_k$ 上的平均.*

(d) *当 $j \to \infty$ 时 $\frac{1}{\xi_j} \int_0^{\xi_j} g\, dm \to 0$.*

**证明** (b) 蕴涵 (c) 是平凡的. 假设 (c) 成立，我们来推导 (d). 对每个 $k$, 令 $b_k = A(g, I_k)$. 注意，对每个 $j$, 我们有 $\frac{1}{\xi_j} \int_0^{\xi_j} g\, dm = \sum_{k=1}^j a_{jk} b_k$, 其中 $a_{jk} = m(I_k)/\xi_j > 0\,(k = 1, \ldots, j)$, 并且 $\sum_{k=1}^j a_{jk} = 1$, 因而 $\frac{1}{\xi_j} \int_0^{\xi_j} g\, dm$ 是 $b_1, \ldots, b_j$ 的一个加权平均. 对每个 $k$, 当 $j \to \infty$ 时，因为 $\xi_j \to \infty$, 我们即有 $a_{jk} \to 0$. 由 (c), 当 $k \to \infty$ 时 $b_k \to 0$. 因而，由关于加权平均的 Toeplitz (特普利茨) 引理 [2, p. 74–75], 当 $j \to \infty$ 时 $\sum_{k=1}^j a_{jk} b_k \to 0$. 这样即有 (c) 蕴涵 (d). 现在假设 (d) 成立，我们来推导 (a). 顺便说一下，只是在这一步我们才用到 (2). 令 $j \in \mathbb{N}$, 并令 $\xi_j < \xi \le \xi_{j+1}$. 则有

$$\frac{1}{\xi} \int_0^\xi g\, dm = \frac{\xi_j}{\xi} \left( \frac{1}{\xi_j} \int_0^{\xi_j} g\, dm + \frac{1}{\xi_j} \int_{\xi_j}^\xi g\, dm \right), \tag{3}$$

和

$$\left| \frac{1}{\xi_j} \int_{\xi_j}^\xi g\, dm \right| \le \frac{1}{\xi_j} \int_{\xi_j}^\xi |g|\, dm \le \frac{\xi_{j+1} - \xi_j}{\xi_{j+1}} \|g\|_\infty. \tag{4}$$

显然，从 (2), (3), (4) 和定理 3 即得 (a). ■

**例 2** *令 $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, 使得对每个 $j \in \mathbb{N}$ 有 $\int_{(j-1)^3}^{j^3} g(x)\, dx = 0$. 则对每个 $f \in L^1(0,\infty)$, 当 $\xi \to \infty$ 时有 $\int_0^\infty g(\xi x) f(x)\, dx \to 0$.*

**证明** 对每个 $j \in \mathbb{N}$, 令 $\xi_j = j^3$ 和 $I_j = (\xi_{j-1}, \xi_j]$, 其中我们取 $\xi_0 = 0$. 则当 $j \to \infty$ 时我们有 $\xi_j \to \infty$ 和 $\frac{\xi_j - \xi_{j-1}}{\xi_j} = \frac{3j^2 - 3j + 1}{j^3} \to 0$. 对每个 $j \in \mathbb{N}$ 还有 $\int_{I_j} g\, dm = 0$. 这样，从定理 4 的蕴涵关系 (b)⇒(a) 即得所希望的结论. ■

**致谢** (略)

## 参考文献

[1] F. R. Keogh, Some generalizations of the Riemann-Lebesgue theorem, J. London Math. Soc. 35 (1960), 283–293.

[2] K. Knopp, Theory and Application of Infinite Series. Second English edition. Translated from the second German edition and revised in accordance with the fourth by R. C. H. Young. Hafner, New York, 1951. (下转 80 页)

• 该奖由挪威科学与文学院颁发.

• 阿贝尔奖获得者的甄选以阿贝尔委员会的推荐为基础，该委员会由五名国际公认的数学家组成.

• 了解更多信息，请访问 www.abelprize.no.

**附录** **历届 Abel 奖得主**

| 年份 | 得主及其获奖时所在单位 |
|---|---|
| 2019 年 | Karen Uhlenbeck (美国奥斯汀德克萨斯大学) |
| 2018 年 | Robert P. Langlands (美国普林斯顿高等研究院) |
| 2017 年 | Yves Meyer (法国巴黎萨克雷高等师范学校) |
| 2016 年 | Sir Andrew J. Wiles (英国牛津大学) |
| 2015 年 | John F. Nash, Jr. (美国普林斯顿大学) |
| | 和 Louis Nirenberg (美国纽约大学库朗数学科学研究所) |
| 2014 年 | Yakov G. Sinai (美国普林斯顿大学及俄罗斯科学院 Landau 理论物理研究所) |
| 2013 年 | Pierre Deligne (美国普林斯顿高等研究院) |
| 2012 年 | Endre Szemerédi (匈牙利科学院数学所及美国新泽西州立罗特格斯大学) |
| 2011 年 | John Milnor (美国纽约石溪大学) |
| 2010 年 | John Torrence Tate (美国得克萨斯大学) |
| 2009 年 | Mikhail Leonidovich Gromov (法国高等科学研究院) |
| 2008 年 | John Griggs Thompson (美国佛罗里达大学) |
| | 和 Jacques Tits (法国法兰西学院) |
| 2007 年 | Srinivasa S. R. Varadhan (美国纽约大学库朗数学科学研究所) |
| 2006 年 | Lennart Carleson (瑞典皇家技术学院) |
| 2005 年 | Peter D. Lax (美国纽约大学库朗数学科学研究所) |
| 2004 年 | Sir Michael Francis Atiyah (英国爱丁堡大学) |
| | 和 Isadore M. Singer (美国麻省理工学院) |
| 2003 年 | Jean-Pierre Serre (法国法兰西学院) |

(陆柱家 整理 童欣 校)

*************************************************************************

(上接 96 页)

[3] H. Lebesgue, Leçons sur les Séries Trigonometriques. Gauthier-Villars, Paris, 1906.

[4] J. E. Littlewood, Lectures on the Theory of Functions. Oxford Univ. Press, London, 1944.

[5] B. Riemann, Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe,[1)] Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass. Leipzig, 1892, 227–271.

[6] H. L. Royden, P. M. Fitzpatrick, Real Analysis. Fourth edition. Prentice-Hall, Boston, 2010.

(陆柱家 译 陆昱 校)

1) 这个工作是 1854 年 Riemann 在哥廷根大学提出的，作为其教师资格申请的一部分，直到他在 39 岁去世两年后于 1868 年才发表.—— 原注