关于 Stirling 公式

Reinhard Michel

1. 引言

利用对于 log 函数简单而巧妙的估计，对于 Stirling (斯特林) 公式，我们给出一个简单，直接，并且初等的证明，并且推导其两个渐近展式的界.

2. Stirling 公式

熟知的 Stirling 公式是 $n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$. 变换 $x = y\sqrt{n} + n$ 给出

$$n! = n^n\sqrt{n}e^{-n}\int_{-\infty}^{\infty} g_n(y)\,dy, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

其中 $g_n(y) = \left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}} 1_{(-\sqrt{n},\infty)}(y)$, $y \in \mathbb{R}$. 因为

$$\left|\log(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2\right| \le \sum_{k=3}^{\infty}\frac{|x|^k}{k} \le \frac{1}{3}\frac{|x|^3}{1-|x|}, \quad |x| < 1,$$

从 $|e^a - e^b| = e^b|e^{a-b} - 1| \le e^b|a-b|e^{|a-b|}$ 我们就得到

$$|g_n(y) - e^{-y^2/2}| \le e^{-y^2/2}\frac{2}{3}\frac{|y|^3}{\sqrt{n}}e^{y^2/3} \le \frac{|y|^3}{\sqrt{n}}e^{-y^2/6}, \qquad |y| \le \frac{1}{2}\sqrt{n}. \tag{2}$$

注意, (2) 导致 $\lim_{n\in\mathbb{N}} g_n(y) = e^{-y^2/2}$, $y \in \mathbb{R}$.

其次，考虑 $f(x) = x - \frac{5}{6}\frac{x^2}{2+x} - \log(1+x)$, $x > -1$. 因为 $f'(x) = x\frac{x^2-x+4}{6(1+x)(2+x)^2}$, 所以 f 在 $x = 0$ 处有一个绝对极小值. 因而，当 $y > -\sqrt{n}$ 时, $\log g_n(y) \le -\frac{5}{6}\frac{y^2}{2+y/\sqrt{n}}$, 它蕴含着

$$0 \le g_n(y) \le e^{-|y|/6}, \quad \text{当 } |y| > \frac{1}{2}\sqrt{n} \text{ 时}. \tag{3}$$

(注意，当 $y > -\sqrt{n}$, $|y| > \frac{1}{2}\sqrt{n}$ 时有 $\frac{5|y|}{2+y/\sqrt{n}} \ge \frac{5|y|}{2+|y|/\sqrt{n}} \ge \sqrt{n} \ge 1$.) 由 (2) 和 (3) 即得 [1)]

$$\lim_{n\in\mathbb{N}}\int_{-\infty}^{\infty} g_n(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\,dy = \sqrt{2\pi},$$

这就给出了 Stirling 公式，即 $\lim_{n\in\mathbb{N}}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}} = 1$ (见 (1)).

3. 两个渐近展式

我们首先证明

$$0 \le 1 + \frac{1}{12}\frac{x^2}{1+x} - \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)\log(1+x) \le \frac{x^4}{120}, \quad x > 0. \tag{4}$$

(下转324页)

译自：The Amer. Math. Monthly, Vol. 109 (2002), No. 4, p. 388–390, On Stirling's Formula, Reinhard Michel.

1) 简单计算这个积分的一个提示可以在 Tom M. Apostol 的书《数学分析 (Mathematical Analysis)》中找到 (问题 9–17, p. 246): 令 $H(t) = \left(\int_0^t e^{-x^2}\,dx\right)^2 + \int_0^1 \frac{e^{-t^2(x^2+1)}}{x^2+1}\,dx$, $t > 0$. 那么 $H'(t) = 0$, 并且 $\lim_{t\to 0} H(t) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$. 因而, $t \to \infty$ 导致 $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.—— 原注

(39): 223–251, 1977. MR0463176
[FW] Ferrero B, Washington L, The Iwasawa invariant μ_p vanishes for abelian number fields, Ann. of Math., (109): 377–395, 1979. MR528968
[Iw1] Iwasawa K, On Γ-extensions of algebraic number fields, Bull. Amer. Math. Soc., (65): 183–226, 1959. MR0124316
[Iw2] Iwasawa K, On p-adic L-functions, Ann. of Math., (89): 198–205, 1969. MR0269627
[Ka] Kato K, p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms, Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques, III, Astérisque, (295): 117–290, 2004. MR2104361
[MW] Mazur B, Wiles A, Class fields of abelian extensions of $\mathbb{Q}$, Invent. Math., (76): 179–330, 1984. MR742853
[Ri] Ribet K, A modular construction of unramified p-extensions of $\mathbb{Q}(\mu_p)$, Invent. Math., (34) 151–162, 1976. MR0419403
[Ru] Rubin K, The "main conjectures" of Iwasawa theory for imaginary quadratic fields, Invent. Math., (103): 25–68, 1991. MR1079839
[SU] Skinner C, Urban E, The Iwasawa main conjectures for GL_2, Invent. Math., (195): 1–227, 2014. MR3148103
[Wi] Wiles A, The Iwasawa conjecture for totally real fields, Ann. of Math., (131): 493–540, 1990. MR1053488

(燕敦验 译　万昕 校)

****

(上接 380 页)
为此，令 $g(x) = 2x + \frac{1}{6}\frac{x^3}{1+x} - (2+x)\log(1+x)$, $x > -1$. 那么 $g(0) = g'(0) = 0$, 并且 $g''(x) = \frac{1}{3}(\frac{x}{1+x})^3 > 0$, $x > 0$, 这就得到了左端的估计. 关于右端的估计，考虑 $h(x) = \frac{x^5}{60} - g(x)$, $x > -1$. 这里我们有 $h(0) = h'(0) = 0$, 并且 $h''(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}(\frac{x}{1+x})^3 \geq 0$, $x > -1$. 因而得 (4).

当 $a_n = \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}}$, $n \in \mathbb{N}$ 时，从 (4) 我们得到 $\log\frac{a_n}{a_{n+1}} = (n+\frac{1}{2})\log(1+\frac{1}{n}) - 1 \leq \frac{1}{12n(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}$. 因而

$$\log\frac{a_n}{a_{n+k}} = \sum_{i=n}^{n+k-1}\log\frac{a_i}{a_{i+1}} \leq \frac{1}{12}\sum_{i=n}^{n+k-1}\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}\right), \quad n, k \in \mathbb{N},$$

由于 $\lim_{k\in\mathbb{N}} a_{n+k} = 1$, 这就蕴含着 $a_n \leq e^{1/12n}$, $n \in \mathbb{N}$. 利用 (4), 由同样的论证得到

$$\log a_n \geq \frac{1}{12n} - \frac{1}{120}\sum_{i=n}^{\infty}\frac{1}{i^4} = \frac{1}{12n} - \frac{1}{120n^4} - \frac{1}{120}\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{i^4} \geq \frac{1}{12n} - \frac{1}{120n^4} - \frac{1}{360n^3},$$

因为 $\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{i^4} \leq \int_n^{\infty}\frac{dx}{x^4}$. 因而 $a_n \geq e^{r_n}$, $n \in \mathbb{N}$, 其中 $r_n = \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} - \frac{1}{120n^4}$. 现在有 $e^{r_n} \geq 1 + r_n$, $e^x \leq 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3e^x$, $x > 0$, 和 $\frac{1}{6}\frac{e^{1/24}}{12^3} \leq \frac{1}{9940}$, 因而有

$$\boxed{\left|\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}} - 1 - \frac{1}{12n}\right| \leq \frac{1}{288n^2} + \frac{1}{9940n^3}, \quad n \geq 2.}$$

此外，从 $e^{r_n} \geq 1 + r_n + \frac{1}{2}r_n^2$ 我们得到估计 (这说明第 1 个估计不能再改进了.)

$$\boxed{\left|\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}} - 1 - \frac{1}{12n} - \frac{1}{288n^2}\right| \leq \frac{1}{360n^3} + \frac{1}{108n^4}, \quad n \geq 3.}$$

(下转 379 页)

述，或一篇阐释性的研究论文；(3) 开创性研究贡献：表彰一篇论文，无论是否近期的，它已被证明在其领域中是基本的或有持久重要性的，或是重要研究的模型．开创性研究贡献奖以 6 年为周期颁发给一些主题领域．2019 年该奖项是开放的；2020 年该奖项将授予分析学 / 概率论；2021 年将授予代数学 / 数论；2022 年将授予应用数学；2023 年将授予几何学 / 拓扑学；2024 年将授予离散数学 / 逻辑学．

Leroy P. Steele 数学阐释奖和开创性研究贡献奖获得 5,000 美元现金奖励；终身成就奖获得 10,000 美元现金奖励．

Steele 奖由 AMS 理事会根据遴选委员会的建议颁发．2019 年 Steele 奖遴选委员会成员为：

- Robert L. Bryant,
- Tobias H. Colding,
- Eric M. Friedlander,
- Mark L. Green,
- B. H. Gross (主席),
- Carlos E. Kenig,
- Dusa McDuff,
- Victor Reiner,
- Thomas Warren Scanlon

以前的 Leroy P. Steele 奖获得者名单可以在 AMS 网站 `https://www.ams.org/profession/prizes-awards/ams-prizes/steele-prize` 上找到．

照片来源

每个获奖者提供了各自的照片．[1)]

(陆柱家 译　童欣 校)

****

(上接 324 页)

4. 结束语

因为 $\frac{e}{\sqrt{2\pi}} \geq \frac{13}{12}$ 以及 $\frac{1}{\sqrt{\pi}}(\frac{e}{2})^2 \geq \frac{25}{24}$, 上面的估计式还给出了

$$\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}} \geq 1 + \frac{1}{12n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

为了说明这个结果表示了一个比 $e^{1/(12n+1)}$ 更好的下界 —— 可在文献中找到 —— 我们考虑 $F(x) = \log(1+x) - \frac{2x}{2+x}$, $x > -1$. 那么 $F'(x) = \frac{x^2}{(1+x)(2+x)^2}$, 即 $F(x) > 0$, $x > 0$. 因而, $\log(1 + \frac{1}{12n}) > \frac{2}{24n+1} > \frac{1}{12n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

[在一个不同的情形中利用 $F(x) > 0$, $x > 0$, 我们直接得到 $a_{n+1} < a_n$, $n \in \mathbb{N}$, 这里诸 a_n 如前定义．这所证实的不是极限的存在性，而是 Stirling 公式中的问题．]

(陆柱家 译　童欣 校)

1) 确切地，这句话应改为 “每个获奖者或由其家属提供了各自的照片”．—— 译注