

从代数学基本定理到天体物理学： “和谐”之路

Dmitry Khavinson Genevra Neumann

代数基本定理 (FTA) 告诉我们, 任意 n 次复多项式都恰有 n 个复根. 最早于 17 世纪发表关于该猜想的证明 (包括 J. d'Alembert (达朗贝尔) 1746 年的证明以及 C. F. Gauss (高斯) 于 1799 年的证明) 都是有缺陷的, 虽然高斯的证明在当时被广泛地接受了. 随后高斯发表了 3 个关于 FTA 的正确证明 (其中两个于 1816 年, 最后一个于 1849 年). 以后, 人们利用分析学, 拓扑学以及代数学中的技术, 以多种不同的方法证明了 FTA; [Bur 07], [FR 07], [Re 91], [KP 02] 以及其引用的文献讨论了 FTA 的历史及其各种证明方法. 上世纪 90 年代, T. Sheil-Small 和 A. Wilmschurst 提出将 FTA 推广到更一般的多项式类, 也就是所谓的调和多项式. (复多项式 $h(x, y)$ 若满足 Laplace (拉普拉斯) 方程: $\Delta h = 0$, 则被称为调和多项式. 这里 $\Delta := \partial^2/dx^2 + \partial^2/dy^2$.)

简单的复线性变量变换 $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ 可以将两个变量的任意复值调和多项式表示成复的形式:

$$h(z) := p(z) - \overline{q(z)},$$

这里 p 和 q 是解析多项式. 虽然含 \bar{z} 的项的出现看似无害, 但是这些项与含 z 的项的组合却能带来巨大的影响. 事实上, 调和多项式 $h(z) = z^n - \bar{z}^n$ 有无穷多个零点, (零点集由 n 条穿过原点并且均匀分布的直线组成). 1992 年, T. Sheil-Small 猜想: 如果 $n := \deg p > m := \deg q$, 那么 h 至多有 n^2 个零点 ($\deg p$ 是多项式 p 的次数——校注). 1994 年, Wilmschurst 找到了关于 h 零点数量有限的更一般的充分条件, 并利用代数几何中的 Bézout 定理证明了该猜想, 尽管 Wilmschurst 关于零点数目所证明的界是准确的, 但是他也提出了当多项式 p 和 q 的次数相差超过 1 时, 关于零点数目更小上界的猜想.

2001 年, 本文的第一作者和 G. Świątek [KS 03] 证明了 Wilmschurst 猜想对于多项式 $f(z) = p(z) - \bar{z}$ 成立. 因为这个证明涉及复动力系统, 我们就很自然地考虑是否能把这套方法运用到考察有理调和函数 $f(z) = p(z)/q(z) - \bar{z}$ 零点数量的界的问题上. 本文作者在 2003 年探讨了这个问题. 在贴出了其预印稿之后, 我们得知这个界解决了 S. H. Rhie 对于引力透镜的一个猜想. 确切地说, 它给出了由于大质量物体阻挡而导致的光线偏差所呈现的光源 (如一颗恒星或一个星系) 虚象数量的最大可能值. 更为惊奇的是, Rhie 已经指出这个上界值是可以达到的.

译自: Notices of the AMS, Vol.55 (2008), No.6, p.666–675, From the Fundamental Theorem of Algebra to Astrophysics: A “Harmonious” Path, Dmitry Khavinson and Genevra Neumann, figure number 3. Copyright ©2008 the American Mathematical Society. Reprinted with permission. All rights reserved. 美国数学会与作者授予译文出版许可.

本文中我们简单地介绍了引力透镜. 我们还描述了有关调和多项式和 Wilmschurst 猜想的背景知识, 以及一些相关结果. 随后我们讨论了这些证明中运用的思想, 以及关于上界值的精确度问题. 最后, 我们给出这一类问题将来一些可能的研究方向.

1. 天体物理学: 微引力透镜

设想这样一个场景, 漆黑的夜晚你仰望星空, 找寻着某颗恒星 S (图 1).¹⁾ 恒星 S 向四面八方发出无数光线, 而你期望沿着你和 S 之间的最短路径“看到” S . 然而, 在你和 S 之间存在一个质量巨大的物体 L , 那么光线经过 L 时是弯曲的. 于是, 你看不到 S , 只“看”到 S 在 S_1 和 S_2 处的虚象, 这就是引力透镜的基本思想. 图 2 (略去——编注) 就是用 NASA²⁾ 的哈勃太空望远镜观察到的引力透镜的例子.

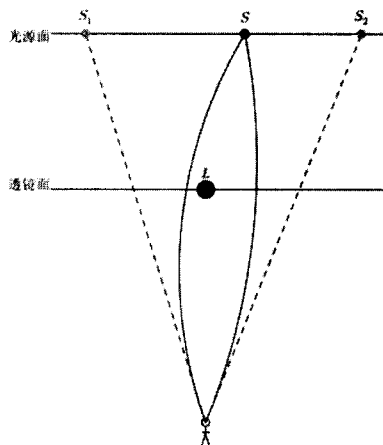


图 1 引力透镜基本原理 (引自 [Wa 98])

让我们回到图 1. 人们可以根据从 S 发出的原始光线与对虚象“观察到”的光线之间的角度来理解在 S_1 和 S_2 处的虚象, 并且可以计算这个角度. J. Soldner

在 1804 年首次计算了这个偏转角. 他的计算基于牛顿力学. A. Einstein (爱因斯坦) 在 1911 年给出了一个类似结果, 随后在 1915 年根据广义相对论重新考虑了他的假设. 广义相对论重新推断的偏转角是牛顿力学推断的两倍. 在 1919 年的一次日食中对偏转角的测量对广义相对论提供了早期的实验支持. 关于引力透镜的理论工作持续到 1930 年代末期. 而 1960 年代类星体的发现重新唤起了人们研究引力透镜的兴趣, 引力透镜的研究也在 1979 年引力透镜系统的发现之后进入了天体物理学的主流. 近年来, 引力透镜理论被用来发现宇宙中的遥远星体, 以及确定这些星体的质量. 引力透镜及其历史方面的一般参考文献包括 [SEF 92] (适合物理学家), [PLW 01] (适合数学家和物理学家), [Wa 98] (网上归纳总结性的文章) 以及这些文献中的许多参考文献.

所有这些与有理调和函数的零点个数到底有什么关系呢? 下面我们来具体探讨透镜系统中点质量, 光源以及虚象的位置是如何相互关联的.

1.1 透镜方程 设想存在 n 个点质量物体 (例如稠密星系, 黑洞等), 以及一个光源 S (例如恒星, 类星体等), S 与观察者之间的距离远大于与这些点质量物体之间的距离. 因为这些物体对 S 发出的光线产生偏转作用, 观测者可以观测到 S 的多个虚象, 设为 S_1, S_2, \dots , 这种现象被称为微引力透镜效应. 点质量物体形成了一个引力透镜 L . 我们将考察这样的情形, 即点质量物体足够接近, 以致可以认为这些物体是共面的 (即, L 中点质量物体之间的距离相对于观测者与点质量物体之间的距离以及光源与点质量物体的距离都要小得多). 这样我们可以构造穿过这些点质量物体的质量中心, 且与点质量中心和观测者连

1) 图 1 的作者为 Joachim Wambsganss 教授, 其原始出处为 <http://relativity.livingreviews.org/Articles/lrr-1998-12/>.——校注

2) NASA 是美国国家航空航天局的简称.——校注

线垂直的平面, 这称为透镜面或者偏转面. 然后我们构造与之平行且穿越 S 的平面 (光源面). 注意, 透镜面位于光源和观测者之间. 图 1 说明了 $n = 1$ 的情形.

既然我们在平面上处理问题, 每个物体的位置就可以用复数来表示. 这里我们可以选择两个平面的原点都在观测者与点质量物体的质量中心的连线所在的直线上. 将透镜系统中的每个点质量投影到透镜面上, 比方说, 我们的透镜 L 的第 j 个点质量物体投影到透镜面上位置 z_j 处. 对 L 的透镜方程

$$w = z - \sum_{j=1}^n \sigma_j / (\bar{z} - \bar{z}_j),$$

是一个从透镜面到光源面的映射. 这里 σ_j 是与我们的透镜中第 j 个点质量物体质量有关的非零实常数. [Wit 90] 与 [St 97] 中有关于这种形式的方程的详细论述.

对于给定的 w , 若 z 满足透镜方程, 则引力透镜会将 z 映射到光源面上的 w 点. 当我们令 w 是光源 S 的位置时, 每一个透镜方程的解都将分别对应于 S 某个虚象的位置. 注意, 该方程的右侧通常被称为透镜映射. 如需要引入远处物体 (比如很远的一个星系) 一个额外的引力作用, 则需要在透镜映射中加上一项 (关于 \bar{z} 的线性项). 本文中我们尽量考虑最简单的情形, 不讨论该额外项.

1.2 透镜方程导出的结论 利用上面的透镜方程, 关于虚象的数目我们能说些什么呢? 首先我们注意到虚象的数量取决于观测者, 透镜与光源之间相互的位置关系. 注意, 在图 1 中观察者, 透镜 L 和光源 S 不在一条直线上. 如果光源恰好被透镜阻挡 (从观测者的角度来说), 当 $n = 1$ 时会发生非常惊人的现象. 在透镜方程中令 $w = 0 = z_1$, 我们看到透镜方程变成了以透镜为圆心的一个圆的方程, 换言之, 我们将观测到以透镜 L 为圆心的圆, 而不是光源 S . O. Chwolson 在 1924 年预言了这一现象, 现在通常称它为爱因斯坦环. 图 3 (略去 —— 编注) 展示了用哈勃太空望远镜观测到的一些爱因斯坦环.

当 $n > 1$ 时情况是怎样的呢? H. Witt [Wit 90] 通过 (没有涉及 Bézout 定理的) 一种直接的计算方法证明了虚象数量的上界不超过 $n^2 + 1$. S. Mao, A. Petters 和 H. Witt [MPW 97] 证明了由 n -透镜系统产生的虚象个数的最大可能值不少于 $3n + 1$. S. H. Rhie [Rh 01] 猜测 n -透镜系统产生的虚象个数的上界为 $5n - 5$. 而在 [Rh 03] 中, 她证明了当 $n > 1$ 时猜想中的上界可以达到. 如果我们令

$$r(z) = \sum_{j=1}^n \sigma_j / (z - z_j) + \bar{w},$$

那么求透镜形成的虚象数量的问题也就等价于确定有理调和函数零点个数的问题.

2. 计算零点个数

现在让我们回到拓展 FTA 的问题上. 先来看看 Wilmschurst 关于调和多项式零点个数 Sheil-Small 猜想的研究方法 ([SS 02] 和 [Wit 98]). 记 $z = x + iy$, 那么求复值调和多项式 h 的零点也就等价于求实多项式方程组

$$\begin{cases} A(x, y) := \operatorname{Re} h(z) \\ B(x, y) := \operatorname{Im} h(z). \end{cases}$$

的零点. 由 Bézout 定理可知, 如果多项式 A 和 B 互素, 且它们的次数分别为 m 和 n : $\deg A = m$ 和 $\deg B = n$, 则至多有 mn 个解满足 $A = 0$ 且 $B = 0$. 此外, 如果 $\deg h = n$, 且 $h(z) = p(z) - \overline{q(z)}$ 有有限个零点 ($\deg h = \max\{\deg p, \deg q\}$ ——译注), 则 h 的零点个数至多为 n^2 . 另外, 若 $\deg p \neq \deg q$, 则我们有 $\lim_{z \rightarrow \infty} |h(z)| = \infty$. Wilmschurst 证明了, 若复调函数 $f(z)$ 有一列彼此不相同的零点收敛于 f 定义域内的某点, 则 f 在一段解析弧上为常数 (这里 f 不必为调和多项式). 假设 f 为整函数, 并在一个有界集内有无穷多个零点, 此时 Wilmschurst 证明了 f 在一个闭环路上必为常数, 因而根据最大值原理, f 在全平面为常数. 综合这些思想, Wilmschurst 证明了 Sheil-Small 猜想, 并且给出了一个例子说明 n^2 是精确的上界值.

定理 1 [Wil 98] 若 $h(z) = p(z) - \overline{q(z)}$ 是 n 次调和多项式, 且满足 $\lim_{z \rightarrow \infty} |h(z)| = \infty$, 则 h 至多有 n^2 个零点. 此外, 存在复多项式 p 和 q (其中 $\deg q = n - 1$), 使得 h 恰有 n^2 个零点.

当 p 和 q 次数不相同, $\lim_{z \rightarrow \infty} |h(z)| = \infty$. 所以, h 只可能有有限多个零点, 由此即得 Sheil-Small 猜想. 该猜想同时也被 R. Peretz 和 J. Schmid 独立证明 [PS 98], 而关于上界能被取到的证明也被 D. Bshouty, W. Hengartner 和 T. Suez 独立得到 [BHS 95].

我们现在来讨论 Wilmschurst 的一个精彩例子 [Wil 98], 该例蕴涵着上界精确性.

例 考虑 $h(z) := \operatorname{Im}(e^{-i\pi/4} z^n) + i \operatorname{Im}(e^{i\pi/4} (z-1)^n)$. 由简单计算可知 $\operatorname{Re} h(z)$ 的零点集为 n 条穿过原点且均匀分布的直线. 同时, 对这些直线进行旋转与平移变换可以得到 $\operatorname{Im} h(z)$ 的零点集合. 图 4 (仍用原文图的编号——编注) 对于 $n = 2$ 的情形展示了 $\operatorname{Re} h(z)$ 和 $\operatorname{Im} h(z)$ 的零点集合.

易知任意 $\operatorname{Re} h(z)$ 零点集中的每条直线与任意 $\operatorname{Im} h(z)$ 零点集中的每条直线有且仅有一个交点. 所以 $h(z)$ 的零点个数, 也就是这些直线交点的总个数, 恰为 $n \times n = n^2$. 令

$$k(z) := -2e^{i\pi/4} h(\bar{z}) = z^n + (z-1)^n + i\bar{z}^n - i(\bar{z}-1)^n.$$

$k(z)$ 与 $h(z)$ 有相同的零点个数. 把 $k(z)$ 写成 $p(z) - \overline{q(z)}$, 我们看到如定理 1 中那样, $\deg q = n - 1 = \deg p - 1$. ■

与这个例子 ($\deg q = n - 1$ 的情况) 相反, Wilmschurst 注意到当 $\deg q < n - 1$ 时, $p - \bar{q}$ 不相同的零点个数的上界要远小于 n^2 , 他给出了如下猜想:

猜想 1 [Wil 98] 若 $n := \deg p > m := \deg q$, 则 $\#\{z : p(z) - \overline{q(z)} = 0\} \leq m(m-1) + 3n - 2$.

它出现在 [Wil 98] 的注释 2 中, 并在 [SS 02, p.50—55] 中有详细讨论. 对于 $m = n - 1$, 上面的例子表明猜想 1 成立, 且上界可以达到. 而 $m = 1$ 是猜想 1 其他情况中最简单的

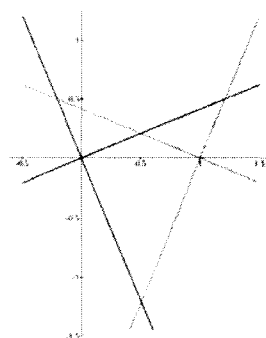


图 4 Wilmschurst 给出 $n = 2$ 时的例子 (穿过原点的两条直线代表 $\operatorname{Re} h(z) = 0$ 的零点而穿过 $(1, 0)$ 点的两条直线代表 $\operatorname{Im} h(z)$ 的零点)

一个. 让我们明确地对此情形叙述为

猜想 2 [Wil 98] $\#\{z : p(z) - \bar{z} = 0, n > 1\} \leq 3n - 2$.

1990 年代末, D. Sarason 和 B. Crofoot [Sa 99] 对于 $n = 2, 3$ 验证了猜想 2, 并且当 $n = 4$ 时猜想 2 对于某些例子也成立. 2001 年, G. Świątek 与本文的第一作者运用基本的复动力系统的知识和调和映射中的辐角原理证明了, 对所有 $n > 1$, 猜想 2 成立 [KS 03].

定理 2 [KS 03] $\#\{z : p(z) - \bar{z} = 0, n > 1\} \leq 3n - 2$.

D. Bshouty 与 A. Lyzzaik 在 2004 年的一篇论文 [BL 04] 中证明了, 对于 $n = 4, 5, 6, 8$, 猜想 2 中的界 $3n - 2$ 是精确上界. 更近些, Geyer 运用复动力系统证明了对于所有 n , $3n - 2$ 是精确上界 [Ge 08].

如果我们将调和多项式类拓展为有理调和函数类, 并运用 [KS 03] 中的方法, 会发生什么呢? 令 $r(z) := p(z)/q(z)$ 为有理函数, 这里 $p(z)$ 与 $q(z)$ 是 z 的互素多项式, 且

$$\deg r := \max\{\deg p, \deg q\}.$$

本文的作者研究了这个情形.

定理 3 [KN 06] 令 $r(z) = p(z)/q(z)$, $p(z)$ 与 $q(z)$ 是 z 的互素多项式. 并令 $n := \deg r$. 如果 $n > 1$, 则

$$\#\{z : r(z) - \bar{z} = 0\} \leq 5n - 5.$$

与多项式的情形不同, 一位天体物理学家 S. H. Rhie 在她关于引力透镜的论文 [Rh 03] 中给出了一个例子, 从而解决了有关有理函数零点个数的上界精确性的问题.

2.1 回到引力透镜 如果我们令 $r(z) = \sum_{j=1}^n \sigma_j/(z - z_j) + \bar{w}$, 那么给定光源求透镜形成的虚象数量的问题与定理 3 中描述的情形完全一样. 换言之, 定理 3 解决了 Rhie 的猜想, 并且 Rhie 的结论解决了定理 3 中上界的精确性问题.

令人惊讶的是, 当我们考虑光滑分布的质量而不是点质量组成的透镜系统时, W. Burke [Bu 81] 给出了如下 (天文学家所熟知的) 结论:

定理 4 [Bu 81] 如果质量分布光滑的透镜系统产生有限个虚象, 那么它总是奇数个.

Rhie [Rh 01] 将该结论拓展到点质量的情形,¹⁾ 并指出在考虑点质量时, 奇数个点质量物体对应的虚象数量为偶数, 而偶数个点质量物体对应奇数个象. 这一论断也可以从定理 3 ([KN 06, 推论 2]) 的证明给出. 关于零点个数的讨论, 总结起来讲我们有

推论 1 [Rh 01], [Rh 03], [KN 06]) 令 $n > 1$. 在没有外界影响的情况下, n -点质量透镜系统至多产生 $5n - 5$ 个虚象, 且该上界可以达到. 此外, 当 n 是奇数时虚象数量为偶数, 当 n 是偶数时虚象数量为奇数.

3. 证明的主要思路

我们将概述关于调和多项式的定理 2 的证明 [KS 03]. 关于有理调和函数的定理 3 证明是类似的, 只是有一些附加的复杂性, 就是必须把有限个极点的情形考虑在内.

1) 作者更正 (*Notices of Amer. Math. Soc.*, **55**(2008), no. 9, 1072.): 事实上, 该结论在 A. O. Petters 更早的论文 "Morse theory and gravitational microlensing", *J. Math. Phys.*, **33**(5), 1992, 1951-31 中以及 A. O. Petters, H. Levine 与 J. Wambsganss 的书 *Singularity Theory and Gravitational Lensing*, Birkhauser, Boston (2001) 中已有表述.——译注

回到定理 2 和多项式的情况, 令

$$h(z) := z - \overline{p(z)}, \quad n := \deg p > 1.$$

我们把多项式 h 看成 $\hat{\mathbb{C}}$ 上的映射, 并分别考察 $\hat{\mathbb{C}}$ 中使得 h 是保向和逆向的区域. 这两个区域被 h 的临界点集

$$L := \{z : \text{Jacobian}(h(z)) = 1 - |p'(z)|^2 = 0\}$$

所分离. 注意, L 为至多有 $n-1$ 个连通分支的双扭线. 易知每一连通分支内 h 为保向的 ($\text{Jacobian}(h) > 0$), 而 L 之外则为逆向的 ($\text{Jacobian}(h) < 0$).

令 n_+ 表示 h 的保向零点个数, 而 n_- 为逆向零点个数. 在 L 之外, h 都是逆向的. 又因为当 $|z| \rightarrow \infty$ 时 $|h| \rightarrow \infty$, 因此所有逆向零点是有限的. 此外, 我们不妨取足够大的 R , 使 $C(0, R)$, 即以原点为圆心半径为 R 的圆, 包含所有 h 的零点且与临界点集不相交. 现在我们考虑被 $C(0, R)$ (正向意义上) 和 L (逆向意义上) 包含的区域 Ω .

如果有限连通区域的边界充分好 (分段光滑, 不包含 h 的任何零点), 并且临界点集也不包含 h 的零点, 那么, 与应用到解析映射几乎完全一样的方式, 我们可以运用幅角原理来对调和映射的孤立零点计数, 唯一的区别在于在计算逆向零点时需要加上负号 (见 [Du 04] 以及 [SS 02]). 我们注意到, 在 ∞ 附近 h 的性状如 z^n 一样; 所以对足够大的 R , h 沿 $C(0, R)$ 的幅角增量为 $-n$ (模 2π).

现在我们来利用两个理想的假设: (1) h 的零点不包含在临界点集中, 以及 (2) h 在 L 的各连通分支中是单值的, 因而 $n_+ \leq n-1$, 并且在模 2π 后 L 上幅角的变化量为 $-n_+ \geq -(n-1)$. 对 Ω 应用幅角原理, 并且注意到 Ω 中只包含了 h 的逆向零点, 我们就得到

$$-n_- = \text{模 } 2\pi \text{ 后的幅角变化量} \geq -n - (n-1),$$

这给出了 $n_- \leq 2n-1$. h 的零点总数是 $n_+ + n_-$; 因而 h 至多有 $(n-1) + (2n-1) = 3n-2$ 个零点. 在理想的条件下我们做完成了论证.

下面的例子让我们相信上述论证是正确的:

例 设 $h(z) = z - \overline{(3z - z^3)/2}$. 这里 $n = 3$. 该函数有 $3n-2 = 3 \times 3 - 2 = 7$ 个零点: $0, \pm 1, (\pm\sqrt{7} \pm i)/2$, 有 $2n-1 = 2 \times 3 - 1 = 5$ 个逆向零点, 即 0 与 $(\pm\sqrt{7} \pm i)/2$, 和 $n-1 = 3-1 = 2$ 个正向零点, 即 ± 1 .

我们的假设要求 h 的零点不会出现在临界点集内, 而实际上满足该假设的调和多项式的集合是稠密的, 所以这条假设可以去掉 [KS 03]. 不幸的是, 有例子表明关于 h 必须在 L 的各个分支内单值的假设一般不成立 [Wil 94]. 因此上述论证不成立. 不过根据复动力系统有关多项式 (或有理函数) 迭代的一些基本结论, 可以补救该论证.

3.1 来自动力系统的帮助 首先, 需要少量的名词. 复动力系统研究的是迭代; 换言之, 是研究解析函数与自身的复合. 如果 F 是解析的, 且 z_0 是 F 的一个不动点 ($F(z_0) = z_0$), 又若 $|F'(z_0)| < 1$, 则 z_0 被称为 F 的一个吸引不动点.

由之前的讨论可知, 证明的关键是下述证明 $n_+ \leq n-1$ 的命题:

命题 1 今 $\deg p = n$, 则有

$$\#\{z: z - \overline{p(z)} = 0, |p'(z)| < 1\} \leq n - 1.$$

为什么事情是如此的? 首先我们注意到 $Q(z) := \overline{p(\overline{p(z)})}$ 是次数为 n^2 的解析多项式. 同时当 $|p'(z)| < 1$ 时 $\overline{p(z)}$ 的不动点也是 Q 的吸引不动点. 并且根据 Fatou 定理 ([CG 93, p.59, 定理 III.2.2]), 它至少“吸引”了 Q 的一个临界点 (z 是临界点, 如果 $Q'(z) = 0$). 换言之, 当 $|p'(z)| < 1$ 时, 经过 Q 的迭代, 至少一个 Q 的临界点“跑”到 $\overline{p(z)}$ 的不动点.

Khavinson 与 Świątek [KS 03] 给出了以下简单引理及其证明. 该引理的主要意思是说当迭代次数趋于无穷, Q 迭代之后与 $\overline{p(z)}$ 迭代之后在由至少 $n+1$ 个点组成的簇上表现一致, 这是自然的, 因为 $\overline{p(z)}$ 覆盖了 n 次 Riemann (黎曼) 球面而 Q 可以由两次迭代 $\overline{p(z)}$ 得到.

引理 1 $\overline{p(z)}$ 的每个满足 $|p'(z)| < 1$ 的不动点都吸引了至少 $n+1$ 个 Q 的临界点.

根据这条引理, 不难完成命题 1 的证明. Q 有 $n^2 - 1$ 个临界点. 将这些点分成至少 $n+1$ 个点的组, 我们可以得到至多 $\frac{n^2-1}{n+1} = n-1$ 个 $\overline{p(z)}$ 的不动点. 由此即得命题 1, 并完成了定理 2 证明的概述.

4. 关于零点个数上界精确性的一些结论

L. Geyer [Ge 08] 运用拓扑动力系统中相当深刻的结果给出了如下定理, 对它最初的猜想由 B. Crofoot 与 D. Sarason [Sa 99] 提出.

定理 5 [Ge 08] 对于每个 $n > 1$, 存在 n 次复解析多项式与 $n-1$ 个互不相同的点 z_1, \dots, z_{n-1} , 使得 $p'(z_j) = 0$ 且 $p(z_j) = \overline{z_j}$.

定理 5 蕴涵着, 对于每个 $n > 1$, 存在一个多项式 p , 使得它恰有 $n-1$ 个 \overline{p} 的吸引不动点; 所以命题 1 的结论对于任意的 n 都是精确的, 因而定理 2 中的上界 $3n-2$ 也是精确的.

对于有理函数的精确性结论由 S. H. Rhie [Rh 03] 解决:

定理 6 [Rh 03] 对于每个 $n > 1$, 存在有理调和函数恰有 $5n-5$ 个不同的零点.

Rhie 运用 n 个点质量组成的引力透镜模型建立了定理 6. 对于 $n \geq 3$ 的情况, 她用了—个非常巧妙的扰动方法找到了恰有 $5n-5$ 个不同零点的有理调和函数的例子, 并且建立了她以前在 [Rh 01] 中猜想过的上界. 她还提到对于 $n=2$ 的情况也可以由其他透镜模型的例子来得到上界; 我们还注意到, 对这个情形 [KN 06] 包含了非透镜的例子.

简单来讲, 对于 $n \geq 3$, Rhie 的构造如下: Mao, Petters 和 Witt [MPW 97] 研究了一种引力透镜系统, 该系统由 n 个位于正 n 边形顶点的相等点质量, 以及位于中心的光源组成. 该系统能产生 $3n+1$ 个不同的虚象. Rhie 分析了顶点质量为 $1/n$ 且 n 边形落在半径为 $a = (n-1)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}/\sqrt{n}$ 的圆上的情况 (其中一个顶点位于正 x -轴上). 这个模型能产生 $3n+1$ 个不同的虚象: 一个虚象在原点, 有点质量的、幅角为 π/n 偶数倍的射线上有一个虚象, 有点质量的、幅角为 π/n 奇数倍的射线上有两个虚象. 现在在原点添加一足够小的质量来扰动这个系统. 特别地, 假设一个质量 $\varepsilon (> 0)$ 加在原点, 且各顶点上的质量都减少 ε/n . 可以证明, 当 ε 足够小时这种扰动能带来另外 $2n-1$ 个虚象 (新系统不会产

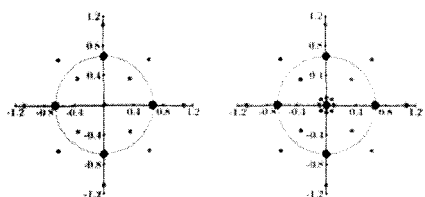


图 5 Rhie 构造的 $(n+1)$ 点引力透镜系统产生 $5(n+1)-5$ 个象的例子. 首先, 每点质量均为 $\frac{1}{n}$ 的 n 点透镜系统能产生 $3n+1$ 个虚象. 下一步我们从各个点质量上移走 $\frac{\epsilon}{n}$ 的质量, 并且将质量为 ϵ 的点放在原系统的圆心上. 如上图所示, 这里我们取 $n=4$ 且 $\epsilon=\frac{1}{100}$. 光源位于原点, 在图上没有表示出来. 透镜方程的解 (也就是光源的虚象) 位于图中较小的点处. 左边的图是扰动之前的状态, 较大的点表示点质量的位置. 右边的图是经过扰动的透镜系统, 新加入的微小点质量位于原点处

生位于原点的虚象, 而在每条幅角为 π/n 偶数倍的射线上有两个虚象, 而幅角为 π/n 奇数倍的射线上有 3 个虚象. 这个新系统有由 $n+1$ 个点质量组成的引力透镜系统, 并且产生 $(3n+1)+(2n-1)=5(n+1)-5$ 个不同的虚象. 图 5 是对于 $n=4$ 和 $\epsilon=\frac{1}{100}$ 情形的图示.

让我们总结一下关于精确性的结论:

推论 2 对于每个 $n > 1$, 存在一个 n 次复解析多项式 p , 使得 $\overline{p(z)} - z$ 恰有 $3n-2$ 个零点. 类似地, 存在有 (有限个) 极点 z_1, \dots, z_n 的有理函数 $r(z)$, 使得 $\overline{r(z)} - z$ 恰有 $5n-5$ 个零点.

5. 下一步的工作

5.1 进一步地推广 FTA 在证明定理 2 和定理 3 中我们用到的复动力系统的技巧似乎并不适用于更一般化的调和多项式或者是共轭部分次数大于 1 的有理函数. 尤其是当 $1 < m < n-1$ 时, Wilmshurst 的猜想 (猜想 1) 仍然有待解决. 下面的问题就是在进一步推广 FTA 时自然的下一步:

问题 令 $p(z)$ 是 n 次解析多项式. 整数 m, n 满足 $1 < m < n-1$. 调和多项式 $h(z) := \overline{z^m} - p(z)$ 的零点数目精确上界是多少?

例如, 对于 $m=2$ 的情况, Wilmshurst 猜想预测的零点数量上界为 $3n$; 这个上界要比 Bézout 定理得到的上界 n^2 要小 (当 $n > 3$ 时). 如果猜想成立, 这个上界是精确的吗?

最近, W. Li 和 A. Wei¹⁾ 在 [LW 08] (W. Li and A. Wei, On the expected number of zeros of random harmonic polynomials, Proc. Amer. Math. Soc., **137** (2009), p.195–204.) 中证明了一个概率意义上的 Wilmshurst 猜想变形. 他们假设多项式的系数都是独立的复高斯随机变量. 令 $h(z) = p(z) - \overline{q(z)}$, p, q 分别为 n 阶和 m 阶的多项式. 当 $m = n - a$ 且 $a > 0$ 时, 他们证明零点数量期望的阶为 $n^{3/2}$ (当 n 大时). 这个值落在可能达到的零点数量的最小值 n 与 Bézout 定理得到的上界 n^2 之间. 更令人惊讶的是, 当 $m/n < \alpha < 1$ 时, 对于任意 n , 零点数目的期望趋向于 n [LW 08].

5.2 连续分布质量组成的引力透镜系统 定理 3 能够应用到在透镜面中 n 个“球面对称”的质量分布的情形, 对于该系统, 我们最多能得到 $5n-5$ 个在质量区域以外的虚象 [KN 06]. 而在现实中其他更一般的质量分布应该是更为自然的.

问题 对任意的质量分布, 我们可以得到多少个虚象?

比如我们考虑质量在椭圆域内均匀分布的情形. C. Fassnacht, Ch. Keeton 与本文的第一作者 [FKK 07] 证明了以该质量分布为引力透镜的系统可以产生至多 4 个可视的虚象. 注意, 的确有 4 个透镜虚象的观测 (例如, 图 6 (略去——编注)). 此外, 对于在同焦

1) W. Li, A. Wei, 即本文两位译者李文博和魏昂.——校注

点的椭圆上质量均匀分布的情况可以得到相同的上界。

更实际的假设是用多项式分布来替代之前的均匀分布。这种情况下的精确上界估计现在还是未知的。天文学的大多数模型中，质量分布都被认为在与初始椭圆位似的诸椭圆上是常数。这种密度被称为等温密度，它是特别重要的。通过建立起一个与到原点距离平方成反比的三维质量分布，并将其投影到透镜平面，我们可以得到等温密度。（如果一个球状星团被质量按上述模型分布的气体充满，它内部的温度将保持恒定。）然而，此时透镜方程的右侧将变成一个超越函数；据我们所知，现在还没有任何证据可以表明该模型产生的虚象数量是有限的。人们对该模型进行了大量的包括或者不包括外界影响的研究，且找到了能产生多达 9 个虚象的情况 [KMW 00]，虽然在现实观测中我们并没有真正看到如此数量的虚象。

5.3 不共面的微透镜系统 之前我们都假设引力透镜系统中的大质量物体都是共面的。

问题 当 n 个点质量物体组成的透镜系统中的点质量不能被视作共面时，虚象数量的精确上界是多少？

在这种情形，估计虚象数量的问题将是异常困难的。Petters 运用 Morse 理论进行了一些初步的估计 [PLW 01]。更为精确的估计依然遥不可及。最后的这个问题与 Maxwell 提出的经典问题有些相象，也就是空间中有多少个点，在这些点上来自于 n 个带电体的电势的梯度为零。换言之，找到没有被静电力作用的平衡点。Maxwell 猜测这样的点不会多于 $(n-1)^2$ 个；[GNS 07] 及其引用的文献将会把大家带到另一个精彩的故事。

参考文献 (略)

(李文博 魏昂 译 陆柱家 校)

(上接 20 页) (和其他一些人) 为我们提供了一些非常有用的共形不变度量。(ii) 阿尔福斯指出施瓦茨引理可以理解为适当的共形度量的曲率 [22]。(iii) 函数论的许多现象由 Kähler 流形的几何可以自然地予以解释。当然其他作者会对此进行修改或补充。

所有这些结果有些是新想法产生的新结果，有些是老结果的新解释。甚至艰深的皮克定理也可以用度量几何给出相当直接和简洁的证明 (细节见 [22])。本文中给出的每一个应用实际上都可以用经典的方法来证明。但度量几何的证明是自然的、赋有启发性的和有意义的。

我们希望这次在复分析和复几何世界中的游览，可以引起读者足够的兴趣去继续探索，那将会是非常有益和值得的。

参考文献 (略)

校后注：在本文的第一部分 (2008 年第 4 期第 343 页倒数第 2-3 行) 中提到的“伯格曼度量总是大于卡拉泰奥多里度量”的结论最早蕴含在我国数学家陆启铿教授 1958 年的文章 “Schwarz lemma and analytic invariants, Acta Mathematica Sinica, 1977, 42:225” 中，比 K. T. Hahn 的结果早 20 年。

(王安 译 张利友 校)