⑦ 75-85, 9   G-B定理. 拓扑学. E-P数 法映射

数学史

漫谈 Gauss-Bonnet 定理的历史发展

Gott., DH
Daniel Henry Gottlieb
C139
虎斌

我所以产生写作这篇文章的想法是受了《美国数学月刊》上一场争论的影响．争论的一方是 Peter Hilton 及 Jean Pederson, 另一方是 Branko Grünbaum 及 G. C. Shephard(见 [HP],[GS])．争论的主题 (同时也是本文的主题) 是 Euler-Poincaré 数 (又称 Euler 示性数)．争论的焦点是在我们谈论 Euler-Poincaré 数的历史时，是否应该提及这个世纪来对于这一有趣不变量的深刻理解和戏剧性推广．

我的立场是不应该把拓扑学看成其定理和概念必须到研究生阶段才能接触的高深学科．相反地，由于拓扑学是关于连续的科学，因此应该强调最基本的几何结果．本文中，我将说明角度这一基本概念是怎样自然地导出拓扑学中映射度和 Euler-Poincaré 数的基本想法的．

本文的讨论涉及数学的整个历史．我们将谈论数学中最广为人知然而并不显然的一个定理以及它的惊人的推广．这些推广构成了 Euler-Poincaré 数的最新发展．事实上，本文将介绍 Euler-Poincaré 数的最早同时也是最重要的应用．与此同时，本文也想告诉人们数学史上的声誉是多么的捉摸不定；告诉人们那些离径叛道的想法实际上具有多么意想不到的威力；同时也将告诉人们数学家们是多么容易忽略那些漂亮并且重要的定理和简单然而富于启发性的观点．

依我看，Euler-Poincaré 数的历史就是 Gauss-Bonnet 定理的发展史．我本人并非数学史家，我仅仅是引用一些浏览过的第二手资料或第一手论文而并非想进行繁琐的考证．然而我还是写下了这段历史，因为就在最近我也做过这方面的工作．

在此我特别感谢 Hans Samelson 的帮助．他的卓识增加了本文的可信度．他不仅发现了 Satz VI, 还告诉我许多有关的史实，例如 Gauss 的工作，Descartes 的工作以及 Hopf 的工作．他本人就是 Hopf 的学生．而 Hopf 曾推广过 Gauss-Bonnet 定理．

法映射　数学中最为人所知然而却并不显然的定理是哪个？我认为是三角形的内角和等于 π 这一定理．一般人也许会轻松地承认自己记不清什么是 Pythagorean 定理了，但是如果他说自己不知道三角形内角和等于 180°, 那么人们就会认为他是个文盲．我把这一定理称为 180° 定理．

这一定理在 Thales 的时代已经有了证明．此后的几个世纪里这一定理被进一步

原题：All the Way with Gauss-Bonnet and the Sociology of Mathematics. 译自：*Amer. Math. Monthly.*, Vol. 103, No. 6. 1996, pp. 457–469.

推广，最后得到了我们这里讲的 Gauss-Bonnet 定理，180° 定理的第一个推广涉及外角的概念. 外角与内角包含着同样的数学信息，因为 (如图 1) 它们之间存在下述关系：$\alpha+\beta=\pi$. 其中 α 是内角，β 是相应的外角. 从而得到：多边形外角和等于 2π. 做为该定理的推论，利用内，外角关系可以得到 180° 定理.

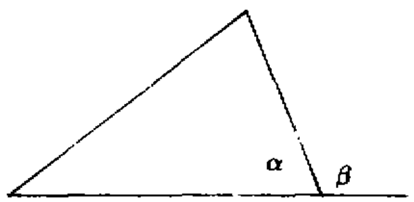

图 1

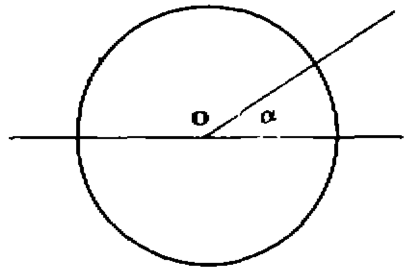

图 2

何为相交于 O 点的两直线的夹角？设 S^1 是以 O 为圆心的单位圆. 则 S^1 上由这两条直线截出的弧长 (如图 2) 就是两直线间的夹角. 我们将角度看成单位圆周的子集而不是一个数. 这一观点与希腊人最初的想法是一致的. 把角度看成数不过是近代的观点.

希腊人的观点有利于推广. 正如把角度看成 2 维空间里单位圆上曲线段的长或者 1 维体积一样，我们也可以将 3 维空间中单位球面 S^2 上区域的面积或者 2 维体积看作 3 维空间角度的表示. 一般地，n 维空间中角度被看作单位球 S^{n-1} 上区域的 $(n-1)$ 维体积.

考虑连结 A, B 两点的平面曲线 (如图 3), 将曲线在 A, B 两点处的单位切向量平移到单位圆上，使得切向量的起点与圆心重合，则 S' 上由两向量截出的弧长就表示曲线由 A 到 B 所转过的角度.

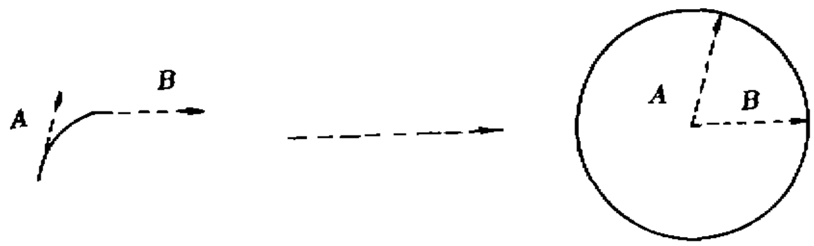

图 3

在研究中，拓扑学家得到了一条经验：将研究对象转化成函数或者映射. 本世纪五十年代后这种作法被推广到数学的各个分支. 例如目前的情形就是定义一个从曲线 σ 到单位圆 S' 的映射. 方法是：取曲线 σ 上任一点 P, 将 P 点处的单位切向量平移使其起点与单位圆心重合，则其另一端点落在 S^1 上，即为 P 的像点. 该映射称为切映射.

令 B 点沿 σ 趋于 A, 将 A, B 间的夹角[*] 除以曲线 σ 在 A, B 间的部分的长度得到一个数. 如果 σ 光滑, 则当 B 沿 σ 趋于 A 时, 这个数就趋于某个极限, 称为曲线 σ 在 A 处的曲率. 换句话说, 曲率是曲线上无穷小弧段长度与其切映射下像的长度的反比.

当使用光滑闭曲线逼近多边形时, 单位切向量的变化率 (或者说曲线的曲率) 可以逼近多边形的外角, 切向量的变化总量 (闭曲线的全曲率) 即为多边形的外角和. 而对于简单平面闭曲线来讲, 切向量绕不自交的闭曲线一周所转过的角度为 2π, 即全曲率为 2π. 从而由连续性知多边形外角和为 2π. 用光滑曲线逼近多边形的想法属于古希腊人. 因此简单闭曲线全曲率为 2π 是 $180°$ 定理的巨大推广.

我们也可以不考虑切向量而考虑 σ 的法向量. 法向量沿曲线的变化与切向量的变化完全一致, 因此我们也可用法向量来定义曲线 σ 的曲率, 用从 σ 到 S' 的法映射来代替切映射. 使用法向量的好处是便于将曲率推广到 3 维空间中的曲面. 因为此时法方向可以定义但切方向却不唯一.

我们引进 Gauss 映射 (也叫法映射) 的概念来描述这一想法: 对于 3 维空间中光滑曲面上任一点, 指定唯一的向外的单位法向量. 这一映射将曲面映到单位球面. 它将每一点映成它的单位法向量, 然后平移到单位球面, 使得向量的起点与球心重合, 然后再取其终点做为像点. (如图 4)

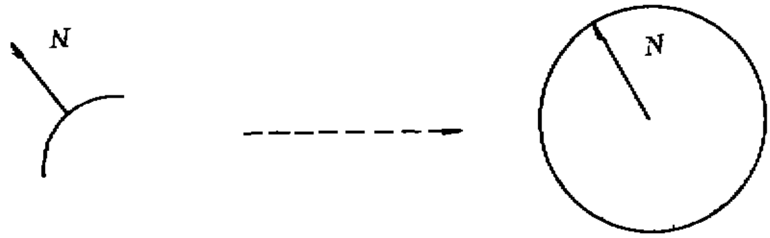

图 4

同样地可以定义从 2 维空间中闭曲线到单位圆, 从嵌入到 n 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 的光滑闭 $(n-1)$ 维流形 M 到 $\mathbb{R}^n$ 中单位球面 S^{n-1} 的法映射. 我们将它记为 $\gamma: M \to S^{n-1}$.

曲率 我们可以定义 $\mathbb{R}^n$ 中流形 M 上点 m 的法曲率. 设 R 为 M 上点 m 的一个小邻域. 记 $\gamma(R)$ 为它在 S^{n-1} 中的像, 则 m 点处的法曲率定义为 $\gamma(R)$ 的 $(n-1)$ 维体积与 R 的 $(n-1)$ 维体积之比在 R 趋于 m 时的极限记为 $K(m)$. 当 γ 保定向时, 法曲率为正; 当 γ 为反定向时, 法曲率为负. 在适当选取的坐标系下, $K(m)$ 就是 γ 在 m 点处的 Jacobian.

正如平面曲线上 x 点处的曲率定义为 x 处无穷小弧长与它在 γ 下像的反比, 曲面 x 点处的曲率定义为 x 点处无穷小邻域的面积与它在 γ 下像的面积的反比. 人们自然地会认为高维无穷小体积的比将导致相同的概念. 但由于历史原因, 这一切并没有发生. 在本文中, 作者将其称为 M 上 x 点法曲率.

---

[*] 译注: 看成单位圆上弧段的长度.

让我们先来探究一下做为角度自然推广的法曲率在 3 维以上不被称为曲率的原因. 在 2 维时, 法曲率不依赖于曲面的空间位置而只依赖于曲面的内蕴量, 即在计算曲率时可以只考虑曲面本身而不必考虑它所在的大空间. 这就是 Gauss 的 "绝好定理". 而在 3 维上, 曲率指的是 Riemann 曲率张量. 这是 2 维情形的推广但在高维时与法曲率是两个不同的概念. 而 Riemann 曲率张量在 1 维时甚至没有什么意义. 曲率张量的概念在微分几何及物理中扮演着重要的角色. 但是它取代法曲率与外角取代内角并不是一回事. 除了 2 维之外, 它们是完全不同的概念. 本文主要讨论的就是区分内蕴与非内蕴量的问题.

考虑 $\mathbb{R}^n$ 中 $(n-1)$ 维紧致流形 M. 假定 M 无边, 则 M 将 $\mathbb{R}^n$ 分成内、外两部分. 令 N 为 M 的内部, 则它是一个以 M 为边界的流形. 与外角求和相类似地, 将法曲率 K 在 M 上积分得到 $\int K dM$, 称为 M 的全曲率, 或者按旧的称呼, 称其为总曲率 (Curvatura Integra). 将 N 的 Euler-Poincaré 数记为 $\chi(N)$, 则 Gauss-Bonnet 定理可表为:

Gauss-Bonnet 定理 $\int K\,dM = \chi(N) \times (S^{n-1}$ 的体积$)$.

法映射度 1 维球的体积单位为 2π, 2 维球是 4π, $(n-1)$ 维单位球的体积单位随维数不同而不同. 我们定义 γ 的映射度为 M 的总曲率除以相应的单位球的体积, 并记为 $\deg(\gamma)$, 称为法映射度. 法映射度是个整数. 事实上, 它是映射度概念的特殊情形. 这一整数在拓扑学中充当主要角色. 利用法映射度的概念, 我们可将 Gauss-Bonnet 定理改写如下:

Gauss-Bonnet-Hopf 定理 $\deg(\gamma) = \chi(N)$.

Euler-Poincaré 数是代数拓扑中最早的不变量. 它是 Euler 关于凸多面体公式的一个大的推广. 有证据表明: 在 Euler 之前一个世纪 Descartes 已经知道这一公式 (见 [S2] 或 [St]).

映射度的概念由 Kronecker 最早提出. 大约在 1913 年左右, L. E. J. Brouwer 已经对这一概念有了很好的理解. 这里的 Gauss 映射的积分定义可以推广到同维定向闭流形间的映射的情形. 映射度以及 Euler-Poincaré 数的一般定义要用到同调论的知识. 但是早在同调论被很好理解之前, 人们已经发现了这两个概念, 并且人们不需要借助同调论就可以很有效地利用它们.

对于一个可以适当方式分割成三角形组合 (称为三角剖分) 的 2 维曲面来讲 (如图 5), Euler-Poincaré 数满足

$$\chi(N) = v - e + f$$

其中 v 是顶点数, e 是边数, f 是三角形个数.

由此易得, 若 N 以凸多边形为边界, 则 $\chi(N) = 1$. 从而由 Gauss-Bonnet-Hopf 各定理得 $\deg(\gamma) = 1$, $\int K\,dM = 2\pi$, 其中 K 为平面曲线的曲率. 正如我们说过的, 这就给出了 180° 定理.

从而得到角度和定理的一个巨大的推广使得它对任意维流形都适用并且由简单公式给出. 下面我们将继续讲述这一结果的光辉的历史.

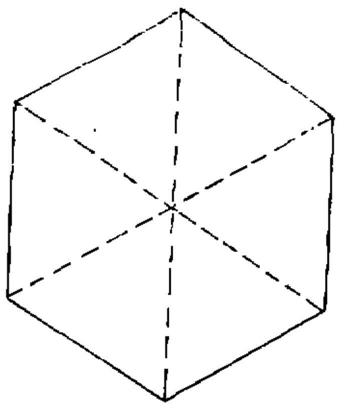

图 5

十九世纪 由于 Gauss-Bonnet 定理十分有趣，许多作者都在教科书中提到了它的历史的发展. 例如、 Spivak[Sp] 及 Stillwell[St] 就曾对这一定理的早期历史进行过描述.

我们考虑 3 维空间中曲面上的测地三角形 T. 它的三边都是测地线. 测地线是曲面上的直线，在曲面上走最短的路程. 设 α,β,γ 为该三角形的三个内角 (如图 6), 则将曲率 K 在 T 上积分就得到 Gauss-Bonnet 公式.

测地三角形 Gauss-Bonnet 公式 $\int K\,dT=\alpha+\beta+\gamma-\pi$

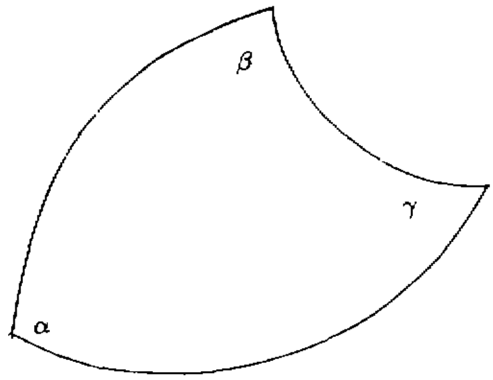

图 6

这一公式有一些有趣的推论：如果 T 为平面三角形，则测地线都是直线、 K 恒等于零，所以 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. 从而得到 180° 定理. 但与从 Gauss-Bonnet-Hopf 定理推出 180° 定理的方式并不相同.

将角度的剩余量 $\alpha+\beta+\gamma-\pi$ 除以 T 的面积就得到一个内蕴量. 当 T 缩向 m 点时，比值趋近于 m 点的曲率 $K(m)$, 因此 K 是曲面的内蕴量. 此即 Gauss 著名的 "绝好定理". 上述的证明并非 Gauss 公开发表的证明. 在他的一份未发表的更早的手稿中， Gauss 在他的绝好定理证明之后叙述了上面的证法.

将一个闭曲面 M 用测地三角形来剖分，对每个三角形都有一个 Gauss-Bonnet 公式，将这些方程左、右两端分别相加，左端就得到全曲率 (也叫总曲率)$\int K dT$. 右端

经适当组合再相加就得到 $4\pi \times \chi(M)/2$.

这就是所谓的 Gauss-Bonnet 定理. 因为对曲面来讲, $\chi(M) = 2 \times \chi(N)$, 其中 N 是闭曲面 M 的内部. 事实上, 等式 $\chi(M) = 2 \times \chi(N)$ 对于偶维流形 M 都成立. 而对于奇维闭流形 $M, \chi(M) = 0$. 这些基本的拓扑事实以及内蕴与非内蕴的讨论在本文中至关重要.

在 1825 年的一份未发表的手稿中, Gauss 写下了前面提到的"测地三角形 Gauss-Bonnet 公式". 1827 年, Gauss 在他出版的一本著作中又给出了另一个公式. Samelson 告诉我, 将这一公式积分就得到了 Bonnet 的推广公式.

1848 年, O. Bonnet 将 Gauss-Bonnet 公式由三角形推广到曲面上光滑闭曲线的情形. 其中角度和为测地曲率的积分所代替. 这一公式后来被人称作 Gauss-Bonnet 公式. 大概是 Blaschke 首先在 20 年代早期的教科书中使用这一名称的.

如果闭曲面拓扑同胚于球面, 则将它进行三角剖分并利用 Euler 公式 $v-e+f=2$ 可得第一个整体 Gauss-Bonnet 定理: $\int K\,dS = 4\pi$.

1960 年, 由 Leibniz 笔录的一份 Descartes 几年前遗失的手稿被人们发现并且发表在《 Comptes Rendus 》上. Bertrand 为该文作了后注, 指出它与整体定理的关系. Bertrand 认为 Descartes 似乎已经得到了凸多面体情形的整体 Gauss-Bonnet 定理. 他指出整体定理应归功于 Gauss. 有关这一手稿的一个有趣的描述, 见 [S_2]. 然而我们知道当时没有懂得 Euler-Poincaré 数, 而且所有的结论只是对微分同胚于球面的曲面才成立. 关于 Euler-Pincaré 数研究的困难性的一个详尽的陈述, 可见 [La]. 事实上, Hilton 等人的观点与 Lakatos 论文中的对白如出一人.

Walter Dyck 可能是第一个意识到 Gauss-Bonnet 定理对非球面的曲面也成立的数学家. 那是 1888 年的事. 根据 Hirsch[Hi] 的说法, Dyck 第一个将映射度与 Euler-Poincaré 数这两个概念联系在一起证明了被误称为 Gauss-Bonnet 定理的定理.

Dyck 的论文中有许多与五十年代后发展起来的 Morse 理论中标准图形类似的图形. Dyck 是个名符其实的先行者, 他和 Descartes 一样, 超越了他的时代. Samelson 告诉我他在 Gauss 的工作中找不到整体 Gauss-Bonnet 定理的陈述. 因此, 整体 Gauss-Bonnet 定理或许应该称为 Descartes-Dyck 定理.

事实上, 我要说的是定理以谁的名字命名并不一定意味着功劳就一定归属于谁. 给那些重要的定理命名不过是为了方便起见. 最主要的是当提到以某人命名的定理时, 人们应该知道定理的大概内容而不是弄清这是谁的功劳. 事实上即便是今天, Bonnet 仍旧大名鼎鼎, 而 Dyck 却还默默无闻.

从 Hopf 到 Chern Dyck 那个时代的人们对于映射度以及 Euler-Poincaré 数这两个基本概念理解得还不透彻. 到了 1925 年, 这些概念有了严格的定义并找到应用. 这在很大程度上应归功于 Heinz Hopf.

在 [H_1] 中 Hopf 大大推广了 Gauss-Bonnet 定理. 他本质上证明了 $\deg(\gamma) = \chi(M)/2$ 对于偶维闭超曲面成立. 因子 1/2 出现的原因是当 N 为以 M 为边界的奇维紧致流致时 $\chi(N) = \chi(M)/2$. 由于当 M 为奇维闭流形时 $\chi(M) = 0$, 所以 Hopf 的定理似乎不

能推广到奇维的情形. 特别地它无法推广 180° 定理. 而我们看到 Gauss-Bonnet 公式是 180° 定理的推广.

由于 2 维曲面的曲率是内蕴量，所以 Hopf 希望有人能给他的结果 [H_3] 以内蕴的证明并加以推广. 他本人一直在从事这项工作. 同时这件事也引起了一些数学家的兴趣. 有关这段历史，请见 [Gr].

使用 Hermann Weyl 的 "管" 理论 (theory of tubes), Allendeorfer[Al] 及 Fenchel[Fe] 在 1940 年各自独立地回答了 Hopf 的问题. 他们发现了嵌入到 $2r$ 维 Euclid 空间的闭 $2n$ 维流形的管状领域的边界的 $\deg(\gamma)$ 等于一个 $2n$ 形式的积分. 该形式由 Riemann 曲率张量的分量组合而成，称为 Pfaffian 形式. 因为细节太复杂，故不在此详述. 由于管状领域与嵌入流形有相同的 Euler-Poincaré 数，所以他们可将 Euler-Poincaré 数用偶维嵌入流形的曲率张量来表示. 这一公式对任意维 Riemann 流形都成立. 因为任何 Riemann 流形都能等距嵌入到某个 Euclid 空间中. 然而只到五十年代，上面这句话才被 Nash 所证明.

尽管 Allendeorfer-Fenchel 公式只对嵌入流形成立，但它显然与嵌入的方式无关，因此必然存在一个内蕴的证明. 1944 年，S. S. Chern 终于得到了这样一个证明. 这一证明很快就被广泛地接受了. 而 Allendoerfer-Fenched 公式也常被称为 Gauss-Bonnet-Chern 公式或者 Gauss-Bonnet-Chern 定理. 事实上， Gray 著作 [Gr] 的目的之一就是介绍有趣的 "管" 方法的证明使它不致于因 Chern 的强有力的方法而被人遗忘.

Satz VI 我们现在要讲述的是 Gauss-Bonnet 定理历史最精彩的片段. 1956 年，Hopf 在 Stanford 大学讲授整体微分几何，这些讲义 1983 年由 Springer-Verlag 出版社以 Lecture Notes In Mathematics 第 1000 卷出版 [H_4]. 在书的 117-118 页， Hopf 描述了他所得到的偶维 Gauss-Bonnet 定理. 他没有谈及奇维的情形. 由于上面的原因，再加上与其他人的一些讨论，我写下了如下三段文字:

很明显， Hopf 当时并不知道 Gauss-Bonnet 定理对任意维流形都成立从而的确是 180° 定理的推广. 或许他知道，但却羞于将它写下来. 许多年前他就当然地具备证明任意维数的 Gauss-Bonnet 定理的预备知识. 但是如果他知道这一定理对任意维流形都成立，他就不会提出寻找内蕴的证明，因为在奇维时没有内蕴证明，从而人们也不会对偶维和奇维采取不同的处理方法.

然而，在五十年代中期，一些拓扑学家，例如 Milnor 和 Lashof 已经知道 Gauss-Bonnet-Hopf 定理. 没人知道是谁先给出了定理的陈述. 当时对于 $\deg(\gamma)$ 的研究和推广已经十分深入，例如 [Ke], [Mi]. 最近， Bredon 在其教科书 [Br] 的定理 12.11(Lefschetz) 中给出了该定理的陈述和证明，并将它看作 Lefschetz 不动点定理的推论.

1960 年， Gauss-Bonnet-Hopf 定理以更一般的形式在 Samelson[S_1] 和 Haefliger[Ha] 中出现: 设 N 是具有边界 M 的 n 维紧致流形，令 $f: N \to \mathbb{R}^n$ 是一个浸入，则 Gauss 映射: $\gamma: M \to S^{n-1}$ 可以定义，且 $\deg(\gamma) = \chi(N)$.

写完这段话之后，我收到了 Haus Samelson 的一封来信. 我曾请教他谁首先发

现 Gauss-Bonnet-Hopf 定理. 因为他毕竟在 [S₁] 中推广了这一定理. 另外他也是 Gauss-Bonnet 定理方面的专家，而且他还是 Heinz Hopf 的学生！

Samelson 认为是 Morse 首先给出了定理的陈述. 他没找到什么证据. 但在翻阅 Hopf 1927 年的论文 [H_2] 时，他意外地发现了 248 页上的 Satz VI. 这正是任意维 Gauss-Bonnet 定理.

这充分显示了 Hopf 超人的智慧：虽然他已经知道任意维的 Satz VI, 但是在偶维情形下，定理不仅对嵌入 (这一概念当时并不十分理解) 成立，而且对浸入也成立. 这一事实导致他猜想偶维情形一定存在着内蕴的证明.

同维流形间的可微映射是一个浸入，如果映射的 Jacobian 处处非零. 一个浸入映射如果还是 1-1 映射，则为嵌入. 因此浸入在一点的小邻域内是 1-1 的，而嵌入是整体 1-1 的. 这种差异使得我们可将浸入与嵌入的概念推广到一般映射.

Satz VI, 即 Gauss-Bonnet-Hopf 定理只在嵌入情形下有证明. 而 Hopf 在 [H_1] 中证明，对于可余维为 1 地浸入到 Euclid 空间的偶维流形 M(即 Euclid 空间维数比 M 的维数高 1), $\deg(\gamma) = \chi(M)/2$. 顺便提一下，因为 M 是 Euclid 空间的局部嵌入，从而有确定的法方向，从而 Gauss 映射 γ 可以定义.

奇、偶维情形的差别是很容易理解的. 例如圆周可以任意法映射度浸入到平面中 (如图 7), 但 2 维球面只能以法映射度为 1 的方式浸入到 3 维空间中.

因此 Hopf 在 [H_1] 中的证明并不因他的 Satz VI 的证明而显得多余. 他注意到了两者之间内蕴性方面的差别. 因此在 [H_3] 中他建议几何学家找到一个偶维 Gauss-Bonnet 定理的内蕴证明. 另外他还建议人们考虑奇维流形 M 的浸入可能具有什么样的法映射度值. Milnor 的漂亮论文 [M_1], 以及后来的 [BK] 都受了 Hopf 的启发. 他们得到法映射度可以是任意奇数.

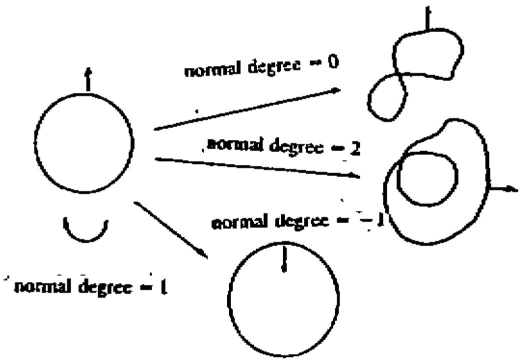

图 7

不言而喻 我们事后看到 Hopf 的问题等价于用曲率张量的一个公式来表达偶维闭 Riemann 流形的 $\chi(M)$. 更合理的问题是对任意维流形，找一个公式来表达 $\deg(\gamma)$. 我将它称为拓扑 Gauss-Bonnet 定理以区别 Gauss-Bonnet-Chern 定理.

拓扑 Gauss-Bonnet 定理能给出 Satz VI 的直接证明以及偶维浸入情形的证明

$[H_1]$. 证明这一定理所需要的知识在 1929 年就已具备. 证明完全是外在的. 倘若 Hopf 已发现了这一证明, 他就不可能在 $[H_1]$ 中还建议寻找内蕴的证明. 因此必定有非常重要的数学工具还没有这么快就发展起来. Allendoerfer-Fenchel 公式 (现在称为 Gauss-Bonnet-Chern 定理) 也不可能被偶然发现. 它太复杂了, 许多很杰出的数学家都公开承认在寻找它. 而拓扑 Gauss-Bonnet 定理却很简单, 有可能被偶然发现. 实际情况也的确如此.

拓扑 Gauss-Bonnet 定理 设映射 $f: N \to \mathbb{R}^n$ 的 Jacobian 在 n 维紧致流形 N 的定向边界 M 上非零. 如果 x 是 $\mathbb{R}^n$ 到 x 轴的投射, $\nabla(x \circ f)$ 是复合映射 $x \circ f$ 的梯度向量场, Ind 为其指标, 则 $\deg(\gamma) = \chi(N) - \mathrm{Ind}(\nabla(x \circ f))$.

f 的 Jacobian 在边界 M 非零意味着 f 限制在 M 上为浸入. 因为复合映射 $x \circ f$ 是从 N 到实轴 $\mathbb{R}$ 的映射, 所以梯度可按高等微积分的方法定义. 给定 N 上的一个向量场, 其指标是本文的一个新名词, 它是在代数拓扑产生之前就有的不变量. 在 2 维时, 19 世纪末由 Poincaré 定义. 而 Hopf 将其推广到任意维流形, 并且在他的 Gauss-Bonnet-Hopf 定理的证明 $[H_1]$, $[H_2]$ 中使用了这一概念.

向量场 V 的指标是个整数, 与映射度的概念有密切的关系. 但它在映射度概念产生之前就有了定义, 和映射度不同的是, 指标最好的定义未必要用同调论. 事实上, 定义它只需一个简单的等式.

1927 年, Marston Morse[Mo] 发现了具有边界 M 的紧致流形 N 上向量场 V 的指标应满足的一个漂亮的方程. 我把 Morse 的方程称为向量场法则 (The Law of Vector Fields).

向量场法则 设 V 是 N 上的向量场, 且在边界 M 上非零, 则 $\mathrm{Ind}\, V + \mathrm{Ind}\, \partial_- V = \chi(N)$, 其中 $\partial_- V$ 是 V 的诱导向量场, 定义在边界 M 的满足 V 指向内部的子集上.

考虑 V 的与边界 M 相切的分量就得到向量场 $\partial_- V$. 由于 $\partial_- V$ 定义在低一维空间, 即 M 的一部分上, 所以就促使人们使用归纳法计算指标. 事实上, 向量场法则本身就是个向量场指标的归纳定义, 见 [gS]. 这一切都不过是初等拓扑学, 当然还要加上一些技巧. 但是 $\mathrm{Ind}(V)$ 的整套理论正是以这一简单的 "A 加 B 等于 C" 的方程中产生出来的. 该方程在本文的后半部分起关键作用.

向量场法则可以推出指标的两个众所周知的性质, 它们和拓扑 Gauss-Bonnet 定理相结合可以得到已知的所有以 Gauss-Bonnet 命名的整体结果.

(1) 若 V 是非零向量场, 则 $\mathrm{Ind}\, V = 0$.

(2) 若 V 是奇维流形上的向量场, 则 $\mathrm{Ind}(-V) = -\mathrm{Ind}(V)$, 其中 $-V$ 是将 V 的每个向量反向而得到的向量场.

由性质 (1) 立即得到 Gauss-Bonnet-Hopf 定理. 因为当 f 为嵌入时, 向量场 $\nabla(x \circ f)$ 即为 ∇x, 即限制在 N 上的平行于 x 轴的常值向量场, 并且没有零点, 因此利用指标为零的拓扑 Gauss-Bonnet 定理就得到 Gauss-Bonnet-Hopf 定理. 事实上, 当 f 为浸入时, 向量场 $\nabla(x \circ f)$ 仍没有零点, (因为 $x \circ f$ 没有临界点), 从而就得到 Samelson 及 Haefliger 将 Gauss-Bonnet-Hopf 定理从嵌入到浸入的推广.

另一方面，由性质 (2) 可以得到 Hopf 这方面的第一个定理 [H_1]: 对于浸入 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的偶维流形 M，我们有 $\deg(\gamma)=\chi(M)/2$. 如果在拓扑 Gauss-Bonnet 定理中，将 x 轴方向反向，我们就得到反向的梯度流，而定理中另外两项与 x 轴的方向选择无关. 因此必有 $\mathrm{Ind}\,(\nabla(x\circ f))=0$, 从而 $\deg(\gamma)=\chi(N)=\chi(M)/2$. 最后一个等式是由于具有偶维边界的流形，其 Euler-Pincaré 数是边界 Euler-Poincaré 数的一半.

还有一个问题需要澄清. 即：是否每个可余维为 1 地浸入到 Euclid 空间的定向流形 M 都可看作某个流形 N 的边界，使得 M 的浸入可延拓成 N 的浸入？回答是肯定的. 但我承认，如果让我来证明它，我就会使用 Thom 配边理论中的著名的结论以及 Stiefel-Whitney 数的性质，而这一切只到本世纪五十年代才建立起来.

偶然的发现 向量场法则是 1929 年由 Morse 发现的，见 [M_0]. 和 Satz VI 的情形相类似，Morse 很少提到这一结果，也没有对它做进一步的研究. 也许是由于他那时正在创立 Morse 理论，所以象许多拓扑学家一样无意中认为所有向量场都是梯度向量场. 无论怎么说，这一结果没被利用过，事实上是被遗忘了. 我 1980 年重新将它发现时，我花了几乎一年时间来研究它. 后来才有人告诉我 [M_0].

十年前，我和多数人一样对数学创造存有误解. 我还不晓得吸取历史的教训. 同时我也惊讶地发现许多拓扑学家都没想到在两个拓扑概念 —— 指标和 Euler-Poincaré 数之间存在一个非常初等的关系. 因此我想向量场法则或许还有其它尚不为人知的有趣推论.

我有一个进一步研究向量场法则的简便方法. 选择有趣的向量场，将它代入方程. 这种做法很见效. 将我称之为"拉回向量场"的向量场 (梯度场的推广) 代入方程时，就得到一个有关法映射度和 Euler-Poincaré 数的方程 [G_1], [G_2]. 我并没有立刻意识到我推广了 Gauss-Bonnet 定理. 并且其简化形式可以给出上述拓扑 Gauss-Bonnet 定理. 所谓的简化是指我使用了梯度场这一个在高等微积分中就很熟悉的概念. 事实上，"拉回向量场"甚至比梯度场更容易处理.

结论 Mandelbrot 抱怨数学家们不给概念和定理命名，因而提出"分形"的概念. 他是对的. 从深层意义上讲，本文的讨论的确是围绕曲率及相应定理的正确命名展开的.

另外，本文也要指出一些存在于人们思想中的根深蒂固的错误观念：诸如伟大的人物不可能忽视细节；用老办法不可能得到十分漂亮的结果；你不可能发现好的东西除非你能提出合适的问题；数学的开展主要应归功于少数几个伟大数学家. 这种误解被科学史家称为"Matthew 效应". 但我认为与 Gauss-Bonnet 定理类似的情况经常发生，而所产生的想法是数学中最美妙的. 好象没人知道"Cartesian 坐标"是谁的发明，也没有人知道是谁首先考虑了高维空间. 在抵毁数学中行之有效且占据统治地位的想法时，人们总习惯于引伟大的数学家以自重. 这些想法从现在的角度来看似乎很平常，但那些最杰出的先辈们为了得到它们却费尽心机. 现在人们认为平凡的想法恰恰是数学中曾经最困难的工作. 例如无穷大，速度，加速度，任意性公理，抽象群及函数的概念.

最后我想告诉人们数学中的挑战在数学发展中起着重大的促进作用，即使这些挑战性的想法是错误的.

作为应用我来谈谈数学史上的挑战. 我们说一个定理推广了另一个，如果第二个定理证明短，而且在其证明中第一个定理起着主要作用. 对于每个定理，我赋予它"历史知名度值"(Historical Fame Score): HFS 是三个数 H,F 和 S 的乘积.

H 是数学史上某个有趣特殊情形从发现到得以推广所经年限在整个数学史中占的百分数. 数学史的起点定为公元前 300 年以纪念 Euclid, 再者也因为对更早的历史缺乏资料.

F 是知道这一有名的特殊情形的数学家人数所占的百分数.

S 是与这一特殊情形的推广相关的包括有新证明或新想法的定理数所占的百分数.

HFS 的最大值是一百万. 我估计拓扑 Gauss-Bonnet 定理会取到最大值. 找一个具有相当的 HFS 值的推广是一个挑战.

参考文献(略)

(成斌 译　邹建成 校)