Finsler几何, 黎曼几何 二次型

进展简介

④

33-39

Finsler 几何就是没有二次型限制的 Riemann 几何

O186.12

陈省身 林毅

1854 年, Riemann 在其教师资格论文中对广义空间引入了基于如下弧长元素

$$ds^2 = F(x^1, \ldots, x_j^n, dx_j^1, \ldots, dx^n) \tag{1}$$

的度量结构. 这里, $F(x.y)$ 是一个定义在切丛 TM 上的关于 y 的正一次齐性函数 (当 $y \neq 0$ 时), 一个重要的特别情形是

$$F^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j. \tag{2}$$

历史的进程赋于此特别情形以 Riemann 几何的名称, 而一般的没有二次型限制 (2) 的 Riemann 几何, 则以 Finsler 几何为人所知.

"Finsler" 几何的名称来源于 Finsler 1918 年的博士论文. 它实际上是一个简单积分的几何, 并且和变分学同样古老. Hilbert 对这个领域曾给予充分重视, 并且在其著名的 1900 年 Paris 演讲中用几乎整个第 23 个问题来专门讨论 $\int ds$ 的变分及其几何意义. 后面我们会讨论此被积形式 ——Hilbert 形式 —— 的一个变种 (利用关于齐性函数的 Euler 定理).

Finsler 几何不是 Riemann 几何的推广. 它更恰当地应该说是没有二项型限制 (2) 的 Riemann 几何. 一个有意思的特别情形可见 [11]. 文中研究了 $\mathbb{C}^2$ 中椭球所界区域上的 Kobayashi 度量. 其计算表明: 这种区域上的 Kobayashi 度量保留了 Riemann 度量的许多好的性质, 尽管很明显它不是二次型的.

近年来, Finsler 几何中已出现了值得关注的进展. 现在已经清楚, 现代微分几何的概念和工具能使我们有效地以直接, 优美的公式来处理这种没有二次型条件限制的 Riemann 几何, 并且把所有结果 —— 局部的或整体的 —— 都包含在内. 这不仅提供了对其几何的更好的了解, 而且展示了一个可以和代数几何中从二次曲面过渡到一般代数簇的进程相比拟的前景.

本报告将分成如下几节:

原题: Finsler Geometry Is Just Riemannian Geometry without the Quadratic Restriction.
译自: *Notices of the Amer. Math. Soc.* September, 1996, pp. 959–963

1. 联络和等价性问题

2. 弧长的第二变分和比较定理

3. 调和理论

4. 复 Finsler 几何

5 Gauss-Bonnet 公式

这些材料并没有包容全部近期Finsler几何的重要进展，也没有对局部理论的核心作用给于特别关注. 关于这一领域的更为详细的综述，请参见会议录 [8] (特别是其前言部分) 及其参考文献.

联络和等价性问题

Finsler 几何中的一个基本问题是等价性问题：寻找一个完备不变量系统或判定何时两个 Finsler 度量仅仅相差一个坐标变换. 在 Riemann 情形，此即所谓形式问题，由 E. B. Christoffel 和 R. Lipschitz 于 1870 年解决. Christoffel 在其解答中引入了必要的协变微分，后经 Ricci 发展成他自己的张量分析，从而成为经典微分几何的基本工具.

Finsler 几何中的关键想法是考虑流形 M 的投影化切丛 PTM(所谓线素的丛). 这样做的主要原因是，尽管 F 自身不是关于 y 零次齐次的，所有从 F 出发构造出来的几何量关于 y 都是零次齐次的，从而都可自然地定义在 PTM 上.

为了具体描述这样一个量，令 $x^i, 1 \leq i \leq n$ 是 M 上的局部坐标. 将切向量表成 $y = y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. 这样 (x^i, y^i) 就可以看成是切丛 TM 上的局部坐标. 若再将 y^i 作为齐次坐标，则 (x^i, y^i) 又可看成是 PTM 上的局部坐标. (1) 中的函数 F 提升成一个关于 y^i 线性齐次的函数 $F(x^1, \ldots, x^n; y^1, \ldots, y^n)$. 基本张量 g_{ij} 定义为 $y-\mathrm{Hessian}(\frac{1}{2}F^2)_{y^i y^j}$. 每一个 g_{ij} 关于 y 是零次齐次的，从而可定义在 PTM 上. 在 F^2 是二次型的时候，这些 g_{ij} 直接成为 (2) 式中的可定义在 M 上的 $g_{ij}(x)$.

流形上的切丛 TM 和余切丛 T^*M 在被拉回到 PTM 上时具有特别的性质. $g_{ij} dx^i \otimes dy^j$ 在这两个拉回丛的每一个纤维上都定义了一个内积. 对应于此内积，拉回 TM 上有一个整体定义的单位长截面 $l = \frac{y^i}{F} \frac{\partial}{\partial x^i}$. 它的自然对偶经重写就是变分学中的 Hilbert 不变积分的被积函数，即 1- 形式：

$$w = \frac{\partial F}{\partial y^i} dx^i, \tag{3}$$

称为 Hilbert 形式. 它是拉回 T^*M 上的一个单位长整体截面. 它也可以看成是在 PTM 上整体定义的线性微分形式. 由 Euler 定理，我们可以把 M 上的长度积分 $\int_a^b ds$ 改写为 $\int_a^b w$.

Hilbert 形式极其重要. Hilbert 第 23 个问题中的几乎所有讨论都是围绕它展开的. 举例来说，关于 F 的一个典型的非退化假设 (参见 [13], [14]), 若用 w 来表达就可写为

$$w \wedge (dw)^{n-1} \neq 0.$$

也就是说，w 定义了 PTM 上的一个接触 (contact) 结构.

作为第二个例子，考虑由 Hilbert 形式生成的微分理想 $\{w, dw\}, \{w\wedge dw, (dw)^2\}, \ldots,$ $\{w\wedge(dw)^{n-1}\}$. 现在把 PTM 看成是带有由 g_{ij} 自然诱导的度量的 Riemann 流形. 文章 [10] 证明了：对于 PTM 上的 Laplace-Beltrami 算子，上面的第一对形式有特征值 $(n-1)$, 第二对形式有特征值 $2(n-2)$, 依此类推. 特别的，其最后一项，即接触形式本身，是调和形式.

事实表明，仅仅通过对 w 作外微分，就可以在以 PTM 为底空间的拉回丛上定义联络. 此联络具有无挠的特性，并且当典型截面 ℓ 作平行移动时，其数量积保持不变. 在 Riemann 情形，此构造即化为 Christoffel- Levi- Civita 联络. 一个用活动标架法的详细处理，可参见 [14]. 另外此联络在自然坐标下的明显表达式可以在 [18] 或 [10] 中找到.

上面的联络给出了相关主丛上的联络形式，从而可以用标准方式导出等价性问题的一个解.

对联络形式作外微分，可给出作为二次微分形式的曲率的概念. 其分量由两个曲率张量 R^i_{jkl} 和 P^i_{jkl} 组成. 为得到数值不变量，可以考虑以 $x\in M$ 为基点的旗 (flag): 它以 $y\neq 0\in TM$ 为旗根 (flagpole), 并具有垂直于旗根的单位长横截边缘 V. 这里 V 的长度以及与 y 的正交性是通过 $g_{ij}dx^i\otimes dx^j$ 来刻划的. 相应的旗曲率为 $k(x,y,V):=V^i(\ell^j R_{jikl}\ell^l)V^k$. 它是 Riemann 几何中截面曲率的替代物，并且是不依赖于标准联络 (有好几种) 的选取的. 它甚至还可以从动力系统的观点得到 (参见 Foulon [15]).

让我们以如下的 Akbar-Zadeh 定理 [3] 来结束本节：一个紧致无边的 Finsler 流形是局部 Minkovski 的充要条件是它有零旗曲率.

弧长的第二变分与比较定理

整体 Riemann 几何的系统研究始于 Heinz Hopf. 他在 1932 年德国数学会年刊中的报告是一座里程碑. Hopf 和 Rinow 引入了完备性概念，并且 Hopf 在其博士论文中给出了全体 Clifford-klein 空间形式，即有常截面曲率的 Riemann 流形的一个描述.

此领域的一个自然的问题，是曲率与拓扑间的关系. 特别有意思的情形是对截面曲率保持定号的 Riemann 流形的研究. 此类研究的基本工具是弧长的第二变分公式. 令人瞩目的是同样的公式在把 Riemann 几何中的截面曲率换成一般 Finsler 几何中的旗曲率时，仍旧成立. 作为其结果，所有的经典定理，如关于非正曲率流形的 Hadamard-Cartan 定理， Bonnet-Myers 定理， Synge 定理， Rauch 第一比较定理以及 Bishop-Gromov 体积比较定理等，都可以推广到 Finsler 框架中去. 详情可见 [5, 6, 13, 17].

关于具正曲率之 Riemann 流形的研究早已有很大发展. 对具正旗曲率的 Finsler

流形也须有一套相应的理论. 作为开端，具常正旗曲率的 Finsler 流形已渐为人所了解，参见沈忠民 [18].

鉴于 PTM 在 Finsler 几何中的中心地位，最重要的不变量应该是 Ricci 纯量 Ric. 它是 PTM 上的定义为 $g^{jk}(\ell^i R_{jikl}\ell^l)$ 的纯量函数. 相应的 Ricci 张量是 $Ric_{jk} := (\frac{1}{2}F^2 Ric)_{y^j y^k}$.

一个自然的问题是：是否每个流形都可以赋予一个具常值，或不依赖于 y 的，Ricci 纯量的 Finsler 度量？熟知在维数 ≥ 3 时，这样的一个 Riemann 度量并不总是存在的. 关于 Finsler 情形的一些有趣的 (尽管还很初步) 的思考，参见 Akbar-Zadeh 的文章 [4].

关于 Finsler 结构的形变理论也同样值得研究，应该开展起来.

调和理论

整体 Riemann 几何中的一个基本性工作是关于调和形式的 Hodge 理论. 它大致是讲紧致无边流形上的每一个上同调类有一个唯一的调和代表元. 主要的原因是可定义 Laplace 算子 (在 M 上而非 PTM 上), 因为一个形式是调和的是指它在 Laplace 算子作用下为零.

D. Bao 和 B. Lackey 成功地给出了 Finsler 流形上 Laplace 算子的定义，并使之在 Riemann 流形上就退化为标准的形状. 他们的工作用到了流形 M 上关于 p- 形式的一个与众不同的内积. 如果用 d^* 来表示外微分算子关于这个内积的伴随，那么 Laplace 算子可用通常公式定义成：

$$\Delta = d \circ d^* + d^* \circ d,$$

其中 d 为通常的外微分算子. 他们关于内积的定义来自对 PTM 上的 Hodge 星型算子的仔细研究，并且涉及到在 PTM 的纤维上的积分. 详情可见 [9].

由此显然是椭圆算子的 Laplace 算子，我们就有如下的 Hodge 定理：

定理 在紧致定向无边的 Finsler 流形上，每个上同调类都有唯一的一个调和代表元. 所有的 p 次调和形式所构成的空间的维数是流形的第 p 个 Betti 数.

Laplace 算子的引入给我们打开了大量研究课题之门，如 Bochner 型消灭定理以及特征值的估计等.

复 Finsler 几何

很可能 Finsler 几何在复区域上最为有用，因为在每一个复流形上，不管它是带边的还是不带边的，都有一个 Caratheodory 度量和一个 Kobayashi 度量. 在适当的 (尽管有些强制的) 条件下，它们是 C^2 度量. 更为重要的是，它们是自然的 Finsler 度量. 这样流形上的分析立刻就和几何联系了起来. 关于 Kobayashi 度量的一个清晰的例子，参见 [11].

复 Finsler 几何极为优美. 线素丛再次起重要作用. 在 TM 的拉回丛上的内积,给出了它的复化丛上的 Hermite 结构. 这里复结构与几何性质很好地溶汇在一起:联络形式是 (1, 0) 型的, 而曲率形式是 (1, 1) 型的. 还可以引进作为 PTM 上的函数的实值全纯曲率.

从这一观点看, Kobayashi 度量有常全纯曲率的复流形就构成复流形中重要的一类. 负常值和零全纯曲率情形已经由 Abate 和 Patrizio 研究, 参见 [2]. 正常全纯曲率的情形也值得考虑.

Gauss-Bonnet 公式

Gauss-Bonnet 公式揭示了曲率与拓扑之间的一个重要联系. Hopf 在其 1925 年发表的论文中对 Euclid 空间中偶数维定向超曲面证明了这一公式, 并把 Euler 数表成一个曲率函数的积分. 应用管状领域, C. B. Allendoerfer 和以 Fenchel(1940) 把它扩充到 Euclid 空间的任何子流形上. 1943 年 Allendoerfer 和 Weil 更将其推广到 Riemann 多面体上; 它们对边界上立体角的处理是卓越的.

事实证明, 最本质的思想是考虑 M 上的单位长切向量丛 SM. 这是陈省身在其用超渡给出的 Gauss-Bonnet 公式

$$\int_M -\Omega = \chi(M)$$

的证明中揭示的. 文章 [7] 考虑了 Gauss-Bonnet 公式在 Finsler 几何中的推广, 其中引入并研究了相关的曲率形式. 好几个因素出现在这个推广里. 最显著的是 M 的每一点 x 上的 S_xM 的全体积. 只要这个体积函数在 M 上是常值的 (不一定要和 Riemann 几何中的值相等), 我们就可以得到一个 Gauss-Bonnet 公式. 因此 Finsler 几何自有其独特之处, 使这个问题的研究显得饶有兴味.

其他的示性类特别是 Pontryagin 示性类和曲率间的关系尚待研究.

结论

我相信我已经阐明, Riemann 几何中的绝大多数结果都可以推广到 Finsler 框架中去. 引人瞩目的是, 为此我们仅仅需要一些概念上的调整, 而不一定非要有本质上的新思想. 这不仅导致了更为广泛的结果, 也提供了更好的几何理解.

这里或可引用 Riemann 自已的话:

"如果我们用直角坐标来表示空间中点的位置, 则有 $ds = \sqrt{\sum(dx^i)^2}$. 由此, 空间就包含在这个最简单情形中. 下一个最简单情形可能包括这样的流形: 它的线元素可以用 4 次微分式的 4 次根来表达. 对此更广情形的研究事实上并不需要什么本质不同的原则, 但这种工作会耗时颇长 (德文原文用的是 Zeitraubend), 并且不会带给我们多少对空间的新认识, 特别是当这些结果不能被几何地表达出来时."

众所周知，M 上的张量分析使我们能够以一种优美而有效的方式来处理 Riemann 几何. 在 Finsler 几何中使用张量分析的困难源于这样的事实：后者所需要的并不止一个空间. 例如除了 M 外还要有 PTM, 而在 PTM 上张量分析并不奏效. 然而这个问题可以通过在 TM 上运作并使得所有构造在 y 被乘上一个纯量时仍保持不变而得到补救.

Riemann 对 Riemann 几何的强调也许是基于度量的 Pythagoras 性质. 他对于一般 Finsler 几何所作的提示，则显示了惊人的洞察力. 近一个多世纪的数学发展验证了他的远见卓识.

除了为回答那些显然要问的问题所需要的进一步的工作外，我倾向于认为未来的发展将有赖于更深入的推广. 度量空间的几何一直是一个迷人的课题. A. D. Alexandrov[1], H. Busemann [12] 以及 M. Gromov[16] 在此强有力的观点下研究了 Finsler 几何. 几何与分析方法的相互结合依然是一个充满挑战的空白领域.

我们的概述性报告阐明了 Finsler 度量之存在的合理性. 例如：

a. 在多复变函数论中，Kobayashi 度量和 Caratheodory 度量自然地成为 Finsler 度量，并且易于使用，它们给出了全纯映射的距离缩小性质.

b. 除开 Toponogov 以外的比较定理，只需将截面曲率换成旗曲率就可以确保它们在 Finsler 几何中的正确性. 值得指出的是，尽管有 Akbar-Zadeh 的重要结果 [3], 空间形式的概念会比 Riemann 几何中的更为复杂. 但是这个领域中均工作者们看上去是把它作为一项新挑战来接受的.

c. 晚近关于 Hodge 理论的工作提出了一些自然的然而又不寻常的椭圆算子，因而也提供了一些判断几何量之重要性的依据.

Finsler 构造在应用中也显示了重要性，最显著的是表现在控制论，数学生物 / 生态学以及光学中. 当然，尽管我们已经论证了 Finsler 几何历史悠久并且和其他分枝联系密切，Riemann 几何将仍是 Finsler 几何中最重要的一章.

最后我感谢 Steve Krantz 和 Hugo Rossi 的建议.

Finsler 几何的文献非常丰富，这里我们只列出那些在本文中提到的作为参考.

参考文献

[1] A. D. Alexandrov, A theorem on triangles in a metric space and some applications. *Trudy Math. Inst. steklov.* 38(1951), 5–23 (俄文).

[2] M. Abate 和 G. Patrizio, Finsler Metrics– A Global Approach. Lecture Notes in Math. vol. 1591, Springer-Verlag, 1994.

[3] H. Akbar-Zadeh, Sur les espaces de Finsler à courbures sectionelles constantes, *Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci.* (5) 74 (1988), 281–322.

[4] —, Generalized Einstein manifolds, *J. Geom. Phys.* 17(1995), 342–380.

[5] L. Auslander, On curvature in Finsler geometry, *Trans. Amer. Math. Soc.* 79(1955), 378–388.

[6] D. Bao 和陈省身. On a notable connection in Finsler geometry. *Houston J. Math.* 19(1) (1993), 135–180.

[7] ―, A note on the Gauss-Bonnet theorem for Finsler spaces. *Ann. Math.* 143(1996), 233–252.

[8] D. Bao, 陈省身和沈忠民编辑, Finsler Geometry (Proceedings of the Joint Research conference on Finsler Geometry, July 16–20, 1995, Seattle, Washington), Cont. Math. Vol. 196, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

[9] D. Bao 和 B. Lackey, A Hodge decomposition theorem for Finsler spaces. C. R. Acad. Sci. Paris, to appear.

[10] ―, Special eigenforms on the sphere bundle of a finsler manifold. Cont. Math. vol. 196, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, pp. 67–78.

[11] B. Blank, D. Fan, D. Klein, S. Krantz, D. Ma 和 M.-Y. Pang, The kobayashi metric of a complex ellipsoid in $\mathbb{C}^2$. *Experimental Math.* 1(1992), 47–55.

[12] H. Busemann, On geodesic curvature in two dimensional Finsler spaces. *Ann. Mat. Pura Appl.* 31(1950), 281–295.

[13] 陈省身, On Finsler geometry. *C. R. Acad. Sci. Paris.* 314(1992), 757–761.

[14] ―, Riemannian geometry as a special case of Finsler geometry. Cont. Math. vol. 196, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996. 51–58.

[15] P. Foulon, Géométrie des équations différentielles du second ordre. *Ann. Inst. Henri Poincaré.* 45(1) (1986), 1–28.

[16] M. Gromov, Sign and geometric meaning of curvature. *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano* 61(1991), 9–123(1994).

[17] 沈忠民 (Z. Shen), Volume comparison and its applications in Riemann-Finsler geometry. Adv. Math., to appear.

[18] ―, Finsler manifolds of constant positive curvature. Cont. Math., vol. 196, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, pp. 83–93.

(林毅 译　张伟平 校)