综合报告

什么是几何学？

Shing-Shen Chern (陈省身)

《数学译林》编者注 2004 年 12 月 3 日是伟大的数学家陈省身先生逝世之日. 本刊特发表陈省身先生所著文 “什么是几何学？”, 以示对陈先生的深切怀念.

原编者注 陈省身,1911 年 10 月 26 日出生在中国浙江省嘉兴. 陈博士在南开大学, 清华大学和德国汉堡大学接受教育, 并于 1936 年在汉堡大学获得博士学位. 1960 年起, 他是伯克利加州大学教授, 并于 1979 年退休, 目前是位于伯克利的数学科学研究所 (MSRI) 的荣休所长和中国天津南开数学研究所[1]的所长. 他是美国国家科学院院士和一些其他 —— 美国的和外国的 —— 科学院的院士. 他曾获得美国国家科学奖和其他许多别的优秀的和荣誉的奖项.

为了避免误解，我将不给出 —— 如在某个专题的通常的数学处理中那样 —— 几何学的定义. 我将只尝试讨论其历史的发展.

1. 几何学作为一个逻辑系统；Euclid

Euclid (欧几里得) 的《 Elements of Geometry (几何原本) 》 (约公元前 300 年) 是人类智慧最伟大的成就之一. 它把几何学做成一门演绎科学，并把几何现象当作一组公理和公设的逻辑结论. 这本书的内容并不限于我们现今理解的几何学. 主要的几何结果是：

a) Pythagoras (毕达哥拉斯) 定理 (图 1). b) 三角形的三角之和 (图 2).

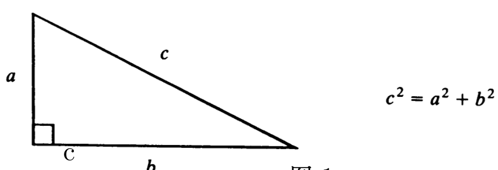

图 1

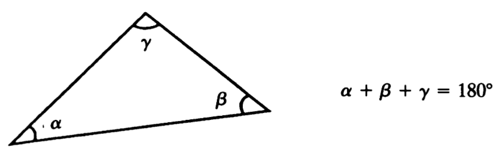

图 2

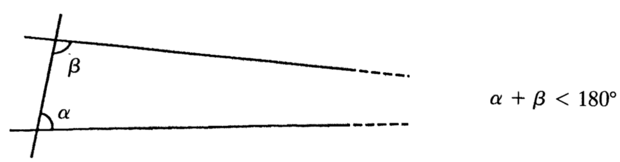

图 3

结论 b) 是用了第五公设，或最后一个公设推导而得的，第五公设叙述如下：“(在同一平面内) 一条直线与另外两条直线相交，若在该直线同侧的两个内角之和小于两个直角，则这两

译自：The Amer. Math. Monthly, Vol. 97 (1990), No. 8, p. 679–686, What Is Geometry? Shing-Shen Chern, figure number 4.

1) 陈省身先生是于 1985 年创办的南开数学研究所的创始所长，1992 年起为名誉所长. 自陈省身先生于 2004 年 12 月 3 日逝世后，为纪念陈省身先生，在 2005 年 12 月 3 日纪念陈省身先生逝世一周年的纪念大会上，该研究所正式更名为陈省身数学研究所.—— 译注

条直线无限延长后在该侧相交."

Euclid 意识到，这个平行公设不如他的其它公理和公设那么显而易见. 数学家们付出了极大的努力来证明这个公设是一个推论，这些努力的失败导致 19 世纪早期由 C. F. Gauss (高斯), John Bolyai (波尔约) 和 N. I. Lobachevski (罗巴切夫斯基) 发现了非欧几何学.

《几何原本》处理直线图形和圆. 它的 13 卷书的最后 3 卷致力于立体几何学.

2. 空间的坐标化；Descartes

Descartes (笛卡儿) (1596—1650) 引进坐标是几何学中的一个革命. 在平面上它可由右图描述，其中两个坐标的作用不是对称的. Descartes 的工作于 1637 年发表，是作为其著名的哲学著作 [6] 的附录，题为 "几何学 (La géométrie)". 几乎同时，Fermat (费马，1601—1665) 也发现了坐标的概念，并利用此概念用代数方法成功地处理了几何问题. 但是 Fermat 的工作只是在其去世后才发表 [7].

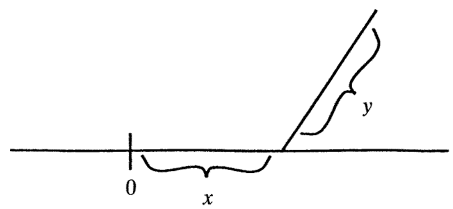

图 4

一个直接的结果是对用任意方程

$$F(x,y)=0 \tag{1}$$

定义的曲线的研究，这样就扩大了曲线的范围.

Fermat 继续引进微积分的一些基本概念，如切线以及极大值和极小值.

从二维到 n 维，继而到无穷多个维数. 在这些空间中，数学家们研究由任意的方程组所定义的轨迹. 这样就打开了一个壮丽的景观，几何学和代数学也变得不可分离了.

一件神秘的事是微分法的作用. 当所涉及的函数是光滑的时候，分析方法是最有效的. 因此，我想引用由 Clifford Taubes [15] 所提出的一个哲学问题：人们真的要取导数吗？导数能说出差别吗？

坐标几何学为对于物理学的应用铺平了道路. Newton 由其引力定律推导诸 Kepler (开普勒) 定律即为一例. Kepler 第一定律说，诸行星的轨道是椭圆，太阳位于它们的公共焦点处. 其证明只有在建立了圆锥曲线解析理论之后才是可能的.

3. 基于群概念的空间；Klein 的 Erlanger 纲领

关于几何学的工作导致射影几何学的发展，后者的奠基者有：J. V. Poncelet (庞斯莱，1788—1867), A. F. Möbius (默比乌斯，1790—1868), M. Chasles (沙勒，1793—1880) 和 J. Steiner (施泰纳，1796—1863). 射影几何学研究从一个空间的线性子空间以及由投射 (projections) 和截面 (sections) 所生成的变换中产生的几何性质. 此外也产生了一些其他的几何学，其中最著名的是仿射 (affine) 几何学和共形 (conformal) 几何学.

1872 年，Felix Klein (克莱因) 叙述了他的 Erlanger (埃尔兰根) 纲领 [1], [11], 该纲领把几何学定义为空间在一个变换群下不变性质的研究. 这样，相应于作用在一个空间上的每个变换群，就有一种几何学. 基本概念是 "群", 并且空间的概念现在极大地扩展了.

在某种意义下，射影直射变换 (projective collineations) 群是涉及最广泛的群，并且射影几何学占据了主导地位.

Erlanger 纲领最重要的应用是通过所谓的 Cayley (凯莱)–Klein 射影度量 [12] 来处理非 Euclid 几何. 双曲空间可以被等同于一个超球的内点集，而非 Euclid 等距运动群等同于保持超球不变的射影直射变换群. 同一个群可以作为不同空间的变换群出现. 因而，相同的代数论证可以给出完全不同的几何定理. 例如，众所周知，一个三角形的 3 条中线相交于一点. 利用 Study (施图迪) 的对偶数，这个定理可以被翻译成 J. Petersen (彼得森) 和 F. Morley (莫利) 的下述定理：令 $ABCDEF$ 是一个斜六边形，其相邻边互相垂直. 则 3 组对边 $AB, DE; BC, EF; CD, FA$ 的 3 条公共垂线有一条公共垂线. 见 [13].

Sophus Lie (李) 建立了变换群的一般理论，它成为所有几何学的一个基本工具.

4. 几何学的局部化；Gauss 和 Riemann

在 Gauss (1777—1855) 于 1827 年发表的关于曲面理论的专著 [8] 中，他发展了基于曲面基本形式的曲面几何学. 这被 B. Riemann (黎曼，1826—1866) 于 1854 年在其特许任教资格论文 (Habilitationschrift) [14] 中推广到 n 维空间. Riemann 几何学是基于坐标 $u^1, \ldots, u^n$ 空间中的二次微分形式

$$ds^2 = \sum g_{ik}(u) du^i du^k, \quad g_{ik} = g_{ki}, \quad 1 \leq i, k \leq n \tag{2}$$

的几何，其中二次微分形式是正定的，或者至少是非退化的. 给定 ds^2, 我们可以定义一条曲线的长度，两条相交曲线之间的角度，一个区域的体积，以及其它一些几何概念.

这种几何学的主要特征是，它是局部的：它在 u 空间中的一个邻域中是成立的. 由于这个特点，它非常适合用于物理学中的场论. Einstein (爱因斯坦) 的广义相对论把物理宇宙看作为满足场方程

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = 8\pi\kappa T_{ik} \tag{3}$$

的一个四维 Lorentz (洛伦兹) 空间，其 ds^2 具有符号 $+++-$, (3) 中 R_{ik} 是 Ricci (里奇) 曲率张量，R 是标量曲率，κ 是一个常数，T_{ik} 是能 – 应力 (energy-stress) 张量.

很快就注意到，Riemann 几何学的大多数性质是从其 Levi-Civita (列维 – 齐维塔) 平移 (parallelism) 推导而得的，该平移是切空间的一个无穷小移动. 换言之，Riemann 几何学用 Levi-Civita 联络研究 Riemann 空间的切丛.

5. 整体化；拓扑

Riemann 几何学及其在微分几何中的推广本质上是局部的. 我们的确需要把邻域结合在一起形成整个空间，这对我而言似乎是不可思议的. 这由拓扑学做到了. 微分流形的概念是数学中最复杂巧妙的概念之一. 这个想法对 Riemann 是很清楚的. 拓扑流形的首次数学描述由 Hilbert (希尔伯特) 在 1902 年所做 [10], [17]. Hermann Weyl (外尔) 把 Riemann 曲面等同于一维复流形，并在其划时代的书《Riemann 曲面的概念 (Die Idee der Riemannschen Fläche)》[16] 中作为中心主题. 在拓扑学方面，“邻域” 成为 Hausdorff (豪斯多夫) 拓扑学中的基本概念.

Hassler Whitney (惠特尼) 看到了在微分流形上建立嵌入定理的好处 (1936), 这就开始了对微分拓扑学的认真研究. 求导在拓扑学中起着重要作用这一事实随着 J. Milnor (米尔诺) 在七维球面上发现怪异微分结构 (1956) 而给人们带来很大的震动. 通过在四维流形上研究 Yang-Mills (杨振宁 – 米尔斯) 方程, S. Donaldson (唐纳森) 在 1983 年发现了一个关于相交形式引人注目的定理，它在 $\mathbb{R}^4$ 上导致无穷多个微分结构的存在性.

在微分流形的基础上，现在可以定义多种几何结构，诸如 Riemann 结构，复结构，共形结构，基于道路系统的射影结构，等等. 针对这些结构的处理，发展了诸多工具，其中最重要的是外微分演算和张量分析.

一个基本的概念是 “曲率”, 它可以有不同的表现形式. 曲率最简单的显示是在平面 Euclid 几何学中的圆. 它也可以是物理系统的力，或者引力场或电磁场的强度. 用数学术语说，它度量共变微分法的非交换性.

曲率的适当代数组合给出一些拓扑不变量，这是引人注目的. 为了解释这个现象，我们要来叙述 Gauss-Bonnet (博内) 定理. 令 D 是一个二维 Riemann 流形上的区域，有分段光滑的边界. 那么 Gauss-Bonnet 定理是公式

$$\sum(\pi-\alpha)+\int_{\partial D} k_g\,ds+\iint_D K\,dA=2\pi\chi(D), \tag{4}$$

其中第 1 项是在边界上角点处的外角之和，第 2 项是沿着边界测地曲率的积分，第 3 项是 Gauss 曲率在 D 上的积分, 以及 $\chi(D)$ 是 D 的 Euler 示性数. 对于 Euclid 平面中的直线三角形, 这就是在 §1 中叙述的三角之和的定理. 为了简单起见, 对于高维情形, 我们只对 $2n$ 维无边的紧定向 Riemann 流形 M 给出这个定理. 令 R_{ijkl} 是 Riemann-Christoffel (克里斯托尔) 张量，并令

$$\Omega_{ij}=\sum R_{ijkl}du^k\wedge du^l \tag{5}$$

是 “曲率形式”. 令

$$Pf=\sum \epsilon_{i_1\cdots i_{2n}}\Omega_{i_1i_2}\wedge\cdots\wedge\Omega_{i_{2n-1}i_{2n}} \tag{6}$$

是 Pfaff (普法夫) 形式，其中 $\epsilon_{i_1\cdots i_{2n}}$ 根据其指标形式是 $1,2,\ldots,2n$ 的偶置换或奇置换而为 $+1$ 或 -1, 否则为零. 并且和式展布于从 1 至 $2n$ 的所有指标上. 此时 Gauss-Bonnet 定理为

$$(-1)^n\frac{1}{2^{2n}\pi^n n!}\int_M Pf=\chi(M), \tag{7}$$

其中 $\chi(M)$ 是 M 的 Euler-Poincaré (庞加莱) 示性数.

6. 纤维丛中的联络；Elie Cartan

包含 Klein 齐性空间和 Riemann 局部几何两者的一个概念是 Cartan (嘉当) 的广义空间 (espaces généralisés). 用现代的术语，它被称为 “纤维丛上的联络”. 它是 Levi-Civita 平移的直接推广, 后者是 Riemann 流形切丛中的一个联络. 一般地, 我们有一个纤维丛: $\pi\colon E\to M$, 其诸纤维 $\pi^{-1}(x)\,(x\in M)$ 是由一个 Lie 群 G 作用的一些齐性空间. 一个联络是纤维间与群 G 作用相容的一个无穷小移动.

我想在复向量丛的情形 —— 纤维是 q 维的复向量空间 C_q, 并且 $G = GL(q;\mathbb{C})$ [4] —— 把这个解释得更明确些. 在几何学中复数的重要性对我而言是神秘的. 它具有良好的结构, 并且完备. 这方面的一个展示是群 $GL(q;\mathbb{C})$ 的简单行为: 该群的极大紧子群 $U(q)$ 没有挠元, 并且以 q 个字母的置换群作为 Weyl 群.

我们把线性无关向量的有序集合 $e_1,\ldots,e_q \in \pi^{-1}(x)\,(x\in M)$ 称为一个标架. 在一个定义了标架场 $e_1(x),\ldots,e_q(x)$ 的邻域 U 中, 一个联络由无穷小位移

$$De_\alpha = \sum \omega_\alpha^\beta e_\beta, \qquad 1\le \alpha,\beta\le q \tag{8}$$

给出, 其中诸 ω_α^β 是 U 中的线性微分形式. 我们把 ω_α^β 称为联络形式, 把矩阵

$$\omega = (\omega_\alpha^\beta) \tag{9}$$

称为联络矩阵. 在标架场的下述变换下

$$e'_\alpha = \sum a_\alpha^\beta e_\beta, \quad A = (a_\alpha^\beta), \tag{10}$$

联络矩阵变化如下:

$$\omega' A = dA + A\omega. \tag{11}$$

我们引进曲率矩阵

$$\Omega = d\omega - \omega\wedge\omega, \tag{12}$$

它是外 2 形式的一个矩阵. 对 (11) 求外微分, 我们得到

$$\Omega' = A\Omega A^{-1}. \tag{13}$$

由此即得外多项式

$$\det\left(I + \frac{i}{2\pi}\Omega\right) = 1 + c_1(\Omega) + \cdots + c_q(\Omega) \tag{14}$$

与标架场的选取无关, 并且因而在 M 上是全局定义的, (14) 中 $c_\alpha(\Omega)$ 是 2α 形式. 此外, 每个 c_α 是闭的, 即

$$dc_\alpha = 0. \tag{15}$$

形式 $c_\alpha(\Omega)$ 已被称为联络的第 α 个 Chern (陈省身) 形式, 并且其在 de Rham (德拉姆) 上同调意义下的上同调类 $\{c_\alpha(\Omega)\}$ 是上同调群 $H^{2\alpha}(M;\mathbb{Z})$ 的一个元素, 被称为丛 E 的第 α 个 Chern 类. 这些示性类是复向量丛的最简单和最基本的全局不变量. 它们具有用曲率进行局部表示的好处.

正如在 Gauss-Bonnet 公式中所示, 这样一种表示具有极大的重要性, 因为形式 $c_\alpha(\Omega)$ 本身就有几何意义. 此外, 令 $\pi'\colon P\to M$ 是复向量丛的标架丛. 那么拉回 $\pi'^* c_\alpha$ 就变成一个导出形式, 即

$$\pi'^* c_\alpha = dTc_\alpha, \tag{16}$$

其中 Tc_α 由某些性质所唯一确定, 它是 P 中一个 $2\alpha-1$ 阶的形式. 这个运算被称为超渡 (transgression), Tc_α 已经被称为 Chern-Simons (西蒙斯) 形式 [5]. 这些形式在三维拓扑学和 E. Witten (威顿) 关于量子场论的近期工作 [20] 中起了某种作用.

对于任何纤维丛可以发展这个理论 [3]. 上述为物理学中的规范场论提供了几何基础. 令 M 是一个四维 Lorentz 流形, 因而定义了 Hodge (霍奇) $*$ 算子, 我们再定义余微分

$$\delta = * d * . \tag{17}$$

正如给出在下表中显示的那样, (在数学和物理学中) 术语和记号有所不同:

数学	物理学
联络 ω	规范势 A
曲率 Ω	强度 F

Maxwell (麦克斯韦) 理论基于 M 上的一个 $U(1)$ 丛，他的场方程可被写为

$$dA = F, \quad \delta F = J, \tag{18}$$

其中 J 是电流向量. 实际上，Maxwell 把第一个方程写为

$$dF = 0, \tag{19}$$

它只是一个推论. 对于大多数应用而言, (19) 是足够的. 但是对于由 Boehm 和 Aharanov 提出并由 Chambers 实施的一个实验的决定性研究表明，(18) 是正确的方程 [21]. (18) 对于 M 上一个 $SU(2)$ 丛的推广给出了 Yang-Mills 方程

$$DA = F, \quad \delta F = J. \tag{20}$$

事实上，几何学的发展始终与物理学的发展是平行的，这很有意思.

7. 对生物学的一个应用

到目前为止, 几何学最深远的应用是对物理学, 它与物理学确实是不可分离的. 我想提及对生物学的一个应用，即，对 DNA 分子结构的应用. 已经知道它是一个 “双螺旋”, 在几何上这意味着一对闭曲线. 很清楚，它们的几何不变量将具有生物学上的重要性. 下述 3 个不变量是最重要的：1) 由 Gauss 引进的环绕数 (linking number); 2) 全扭曲 (total twist), 它本质上是挠率的积分；3) 翻滚数 (writhing number).

James White 证明了 [18], 在这 3 个不变量之间有关系式

$$Lk = Tw + Wr. \tag{21}$$

这个公式在分子生物学中具有基本重要性.

8. 结论

因此，当代几何学与 Euclid 时代的相去甚远. 在几何学的发展历史中，我喜欢把下述一些节点视为重要的发展来做总结：

1) 公理 (Euclid);

2) 坐标 (Descartes, Fermat);

3) 微积分 (Newton, Leibniz);

4) 群 (Klein, Lie);

5) 流形 (Riemann);

6) 纤维丛 (Elie Cartan, Whitney).

一个性质是几何的，如果它不直接处理数，或者如果它发生在流形上，那里坐标本身没有意义. 在多变量的情形，代数学和分析学有一种涉及几何学的倾向.

由于我的局限性，这个故事显然是片面的和不完全的，只代表我个人的观点. 很清楚，故事不会在此结束. 理论物理学近期的一些发展，诸如几何量子场论，弦论等等，正在推动几何学的一个更一般的定义 [19].

我们很高兴注意到，到目前为止，在几何学中引进的几乎所有复杂的概念都已经被发现是有用的.

最后，我想提醒大家注意我的一篇早期论文 [2], 可以把它看做本文的同伴.

詩一首

陳省身

一九八〇年九月訪問科學院理論物理研究所，歸而賦此：

物理幾何是一家　共同携手到天涯
黑洞單極窮奧秘　纖維連絡織錦霞
進化方程孤立異　對偶曲率瞬息空
疇算竟有天人用　拈花一笑欲無言

参考文献

[1] G. Birkhoff and M. K. Bennett, Felix Klein and His "Erlanger Programm", History and Philosophy of Modern Mathematics (W. Aspray and P. Kitcher, editors), Univ. of Minn. Press, 1988, 145–176.
[2] S. Chern, From triangles to manifolds, this Monthly, 86 (1979) 339–349.
[3] S. Chern, Complex Manifolds without Potential Theory, 2nd edition, Springer 1979.
[4] S. Chern, Vector bundles with a connection, Studies in Global Differential Geometry, Math. Asso. Amer. Studies no. 27, (1989) 1–26.
[5] S. Chern and J. Simons, Some cohomology classes in principal fiber bundles and their application to Riemannian geometry, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 68 (1971), 791–794; or, characteristic forms and geometrical invariants, Annals of Math, 99 (1974) 48–69.
[6] René Descartes, Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences, 1637.
[7] Pierre de Fermat, Oeuvres, edited by Paul Tannery and Charles Henry, Gauthier-Villars, Paris, 1891–1912.
[8] C. F. Gauss, Disquisitiones generales circa superficies curvas, 1827; Ges. Werke, 4.
[9] F. Hausdorff, Grundziüge der Mengenlehre, Leipzig 1914; dritte Auflage, Dover, N. Y. 1944; English translation, Chelsea, N. Y. 1957.
[10] D. Hilbert, Uber die Grundlagen der Geometrie, Göttinger Nachrichten, 1902, 233–241.
[11] F. Klein, Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Math. Annalen 43 (1893), 63–100 or Ges. Abh 1 (1921), 460–497.
[12] ——, Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie, Springer, 1928.

[13] ———, Höherve Geometrie, Springer, 1926, p. 314.
[14] B. Riemann, Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen, Habilitationschrift 1854; Gött Abh 13, 1868; Ges. Werke 1892.
[15] Clifford H. Taubes, Morse theory and monopoles; topology in longe range forces, Progress in Gauge Field Theory, Cargese 1983, 563–587, NATO Adv. Sci. Inst, Ser B, physics 115, Plenum New York-London, 1984.
[16] H. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche, Leipzig, 1913; 3 te Auflage, verändert, Leipzig, 1955.
[17] ———, Riemanns geometrische Ideen, ihre Auswirkung und ihre Verkniipfung mit der Gruppentheorie, Springer, 1988.
[18] James H. White, Self-linking and the Gauss integral in higher dimensions, Amer. J. Math., 91 (1969) 693–728.
[19] E. Witten, Physics and geometry, Proc. Int. Cong. of Math. Berkeley 1986, Amer. Math. Soc., 1987, Vol. 1, 267–303.
[20] ———, Quantum field theory and the Jones polynomial, Braid Group, Knot Group, and Statistical Mechanics, (C. N. Yang and M. L. Ke editors), World Scientific, 1989, 239–329.
[21] C. N. Yang, Magnetic monopoles, fiber bundles, and gauge fields, Annals of New York Academy of Sciences, 294 (1977), 86–97.

(陆柱家 译　苏阳 校)

****

(上接 350 页)

CSDE. Mathematics Framework for California Public Schools, Kindergarten through Grade Twelve [M]. California State Department of Education, Sacramento, 1985.
CSDE. Mathematics Framework for California Public Schools, Kindergarten through Grade Twelve [M]. California State Department of Education, Sacramento, 1992.
CSDE. Mathematics Framework for California Public Schools, Kindergarten through Grade Twelve [M]. California State Department of Education, Sacramento, 1999.
CSDE. Mathematics Framework for California Public Schools, Kindergarten through Grade Twelve [M]. California State Department of Education, Sacramento, 2006.
[11] 美国 NCTM 课程标准和《数学教育重点》
NCTM. Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics [M]. National Council of Teachers and Mathematics, Reston, 1989.
NCTM. Principles and Standards for School Mathematics [M]. National Council of Teachers and Mathematics, Reston, 2000.
NCTM. Curriculum Focal Points for Prekindergarten through Grade 8 Mathematics [M]. National Council of Teachers and Mathematics, Reston, 2006.
[12] 中国课程标准
《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》 [M]. 北京：北京师范大学出版社，2001.
《全日制义务教育数学课程标准》 [M]. 北京：北京师范大学出版社，2011.