

广义相对论一百周年

Malcolm A. H. MacCallum

1. 理论的起源

1900 年, 物理学处于困惑之中, 经过实验检验的 Newton (牛顿) 理论与电磁学的 Maxwell (麦克斯韦) 理论并不相容. Maxwell 理论中隐含着光波具有一个固定的速度——光速 c , 而在 Newton 运动学中, 观测者所测量到的速度则是相对于观测者的. 基于对其他波的认识, 一个自然的假设就是光波在一种物理介质“以太”中传播. 以太相对于 Newton 的绝对空间是静止的, 而光速 c 仅在以太参考系下适用.

Bradley (布雷德利) 在 18 世纪 20 年代发现了恒星光行差 (Stellar aberration), 这表明地球表面相对于以太是运动的. 在 19 世纪 80 年代, Michelson-Morley (莫利) 的试验得出了与之矛盾的否定结论, 这导致了前文提到的困惑. 一个不太令人满意的解决方法是, 假设运动中的测量装置 (尺和时钟) 将会按 Lorentz (洛伦兹) 变换所给出的特定方式改变它们的大小或时钟速率, 从而使光总是具有恒定的光速 c .

Einstein (爱因斯坦) 的狭义相对论 (SR) 中删除了上述尺和时钟的运动效应的假定, 狭义相对论与其导出的著名公式 $E = mc^2$ 成为了 1905 年 Einstein 奇迹年的一部分, 此外还有关于光电效应和 Brown (布朗) 运动的关键的论文. 狭义相对论保留了 Lorentz 变换, 但是废除了以太, 取而代之的是 Minkowski (闵科夫斯基) 时空 (见原刊同期 p. 229—233, Chris Linton 文章中公式 (3)). 在新的理论框架中, Newton 力学定律被修改, 出现在其中的是物体的固有时 (沿其世界线的时间), 而非某种一般的绝对时间.

不幸的是, 狭义相对论的成功又带来了一个新的问题. Newton 引力是瞬时传播的, 但在狭义相对论中没有绝对的同时性概念. 正如 Linton 所说, Einstein 在 1907 年希望找到一个引力理论, 它可以兼容狭义相对论和 Newton 力学理论, 包含等效原理、引力红移、光线偏折, 并且能给出水星进动的物理解释. “作为老朋友”, Max Planck (普朗克) 曾劝 Einstein 放弃这种追求, “首先, 你是不会成功的; 其次即使你成功了, 没有人会相信你.”

接下来, 怎么实现目标, Linton 的文章中有相关步骤, 更多细节可以在很多地方找到, 如 [1]. Linton 还给出了该理论关键部分的简要说明, 即 Einstein 场方程 (EFE) (Linton 文的 (7) 式) 和测地线方程 (Linton 文 (4) 式).

要理解为什么需要 Riemann (黎曼) 曲率, 可以考虑从同一高度下落但在相对静止的两个物体, 如同 Galileo (伽利略) 的斜塔实验那样. 在狭义相对论中这些物体的轨迹都是

译自: Mathematics Today, October, 2015, p. 215–222, A Century of General Relativity, Malcolm A. H. MacCallum, figure number 8. Copyright ©2015 Institute of Mathematics and Its Applications. Reprinted with permission. All rights reserved. 英国数学及其应用研究所与作者授予译文出版许可. 作者是英国伦敦大学玛丽女王学院应用数学荣休教授, 他的邮箱地址是 m.a.h.maccallum@qmul.ac.uk.

由于未获得本文封面图及最后的图的刊登许可, 故译文未刊出此二图.

时空中的平行线. 但由于两者都将落向地球的中心, 他们将彼此靠拢, 如果不考虑地面阻挡, 两者将最终运动到一起.

初始平行的线最终汇聚到一起, 这一现象我们在地球上是很熟悉的. 考虑从赤道上两个不同的点出发向北行驶, 这样的轨迹将汇聚于地球的北极. 从三维空间来理解, 我们会说这是由于地球表面是弯曲的, 并不是平的. 为了不牵扯五维或更高的维数来说明时空中同样的现象, 我们需要曲率的内禀定义, 一个不依赖从外部“看”的对“弯曲时空”的定义.

这可以通过考虑沿一条闭曲线平移向量一周来实现. 如图 1 所示, 在地球表面这样做, 我们会发现当向量回到出发点后, 与出发时的方向存在夹角, 角度正比于闭合曲线所包围的面积.¹⁾

在 Linton 的文章中提到: 在一般流形上进行上述操作给出 Riemann 曲率的公式, 其中平行由所谓“联络”来定义 (这个名称来源于它给出不同点间向量的平移).

在半径远小于曲率分量的平方根的邻域内, 广义相对论 (GR) 与狭义相对论一致.²⁾ 因此不可能有引力能的局部定义, 因为在狭义相对论中不出现这样的量. 但对于孤立系统仍然可以定义整体的能量积分.

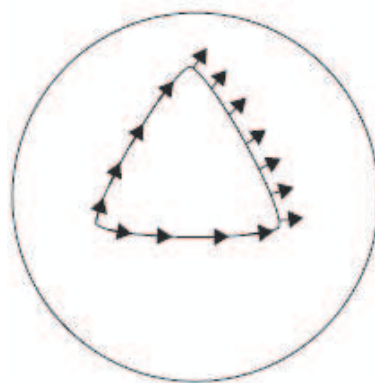


图 1 沿球面上一个直角三角形平移向量, 从左下顶点出发, 矢量回到出发点时, 与初始方向有 90° 的夹角

广义相对论在弱场极限下与 Newton 引力理论一致. 这里“弱”是指与引力源相同质量的黑洞的尺度远小于引力源本身的尺度. 这样的比例适用于宇宙中多数物体, 这就是为什么通常情况下 Newton 引力理论可以适用. 比如, 对于太阳该比例约为 1: 500,000.

广义相对论最初是在第一次世界大战的背景下发展起来的. 这场 100 年前的战争虽然不是什么值得庆祝的事情, 但对于目前依然存在影响. 战争影响了广义相对论的传播. Eddington (埃丁顿) 向英语国家介绍广义相对论的报告是基于从当时中立国荷兰的天文学家 de Sitter 处得到的信息. 不可避免的是, 广义相对论的研究者们被卷入了战争, 最著名的例子是 Karl Schwarzschild (施瓦茨席尔德), 与其同名的 Einstein 方程解的发现者 (Linton 文章中的 (8) 式), 该解描述了一个球对称“黑洞” (“黑洞”这个术语来源于记者 Ann Ewing 于 1964 年的文章). Schwarzschild 于 1916 年在他所服役的俄国前线去世.

广义相对论解决狭义相对论和引力理论的不相容问题, 并且如 Linton 的文章中所说, 解释了困惑人们很久水星轨道进动异常的问题. 1919 年确认光弯曲后, Einstein 被视为科学天才的化身 (也许从他 1905 年的论文的重要性来看, 这一荣誉似乎来得有点迟了). 引力红移则直到 20 世纪 20 年代才首次被观测到.

在过去的 25 个世纪, 时空被认为是物质运动的舞台, 在广义相对论中, 这个舞台忽然成为了演员中的一员. 几十年过去了, 这个革命性理论依然不断推陈出新, 在理论和

1) 这个结论似乎是作者疏忽. 直观想象, 球面半径越来越大时, 当向量回到出发点后, 与出发时的方向的夹角会越来越小.——校注

2) 似乎作者笔误, 应该是曲率分量平方根的倒数, 否则平空间不存在上述邻域, 这显然荒谬.——校注

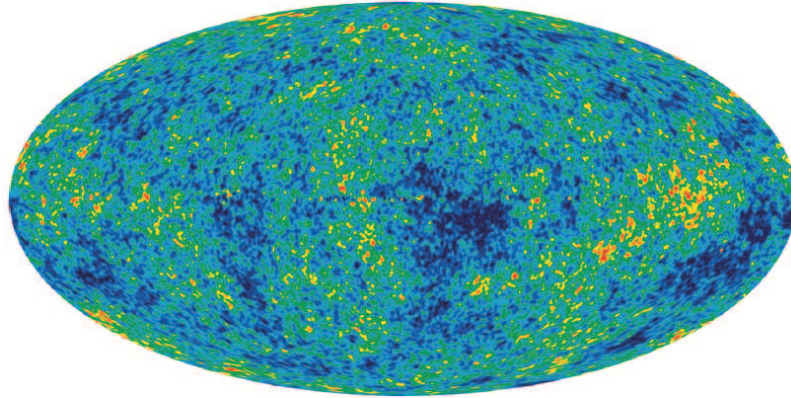


图 2 全天空微波背景 9 年的数据 (见 §4). 用 9 年 WMAP 数据描绘了早期宇宙详细的全天空图像. 该图像揭示了 130—140 亿年前的温度涨落 (用颜色差异标出), 这些涨落成为后来成长为星系的种子. 来自银河的信号用的是多频率数据削去. 此图显示的温度误差范围是 ± 200 微开. 图片来源: NASA/WMAP 科学小组

应用方面有太多有趣的进展, 以至于本文很难尽数罗列. 这理论是目前被广泛接受的物理理论中非线性最强的, 同时也促进着解析分析和数值技术的发展.

1990 年 Fields (菲尔兹) 奖得主 Ed Witten (威顿) 获奖的部分原因是“于 1981 年证明广义相对论中的正能量定理”, 还有一系列 Nobel (诺贝尔) 物理学奖都跟广义相对论及其应用有关; 如 1974 年, Ryle 和 Hewish 因发现脉冲星获奖, 1978 年 Penzias 和 Wilson 以及 2006 年 Mather 和 Smoot 关于宇宙微波背景的研究 (CMB——见图 2), 1993 年 Hulse 和 Taylor 对脉冲双星的观察, 和 2011 年 Perlmutter, Riess 和 Schmidt 基于对超新星的观测证明宇宙正在加速膨胀.

2. 广义相对论在过去 100 年间的发展

广义相对论现已应用于太阳系的运动, 强引力场下致密天体的天体物理学和宇宙学. 理论的早期发展比较缓慢, 但是多数关键的问题都已被注意到. 水星轨道, 光线弯曲, 引力红移和 Schwarzschild 解在早期都已被解决和发现. 引力波最早在 20 世纪 20 年代就已从理论上得到, 但是引力波究竟真实存在还是仅仅是某种坐标效应当时还并不清楚.

在宇宙学中, 最重要的模型是空间均匀和各向同性的宇宙 (也称 Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker 模型). 在所谓“几何单位制”下, 即光速 $c = 1$, 度规可以表达为:

$$ds^2 = a^2(t) [dr^2 + \Sigma^2(r, K)(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)] - dt^2, \quad (1)$$

其中 $\Sigma(r, K)$ 的函数形式取决于恒定曲率 K . Einstein 和 de Sitter 很早就找到了静态宇宙解. 在 1927 年 Friedmann 和 Lemaître 找到了第一个膨胀宇宙解, 这个解目前被作为宇宙的标准模型. 在该模型中, 函数 $a(t)$ 和 $\mu(t)$ 满足如下方程:

$$3\dot{a}^2 = \kappa\mu a^2 + \Lambda a^2 - 3K, \quad (2)$$

$$\dot{\mu} + 3(\mu + p)\dot{a}/a = 0, \quad (3)$$

其中, 字母上方的点表示相对于时间的导数, μ 和 p 表示宇宙中物质的能量密度和压强, Λ 是宇宙常数, 该常数由 Einstein 在 1917 年引入, 目的是为了获得方程 (2) 的静态解.

定义密度参数 $\Omega_m := \kappa\mu/3H^2$, 其中 $H = \dot{a}/a$. 当 $\Lambda = 0$ 时, 可以证明 $\Omega_m = 1$ 是膨胀宇宙 ($K \leq 0$) 和收缩宇宙 ($K > 0$) 的分界点.

在 1929 年 Hubble (哈勃) 发现了星系的距离与星系退行速度间的线性关系后, 起始于 $t = 0$ 处 “大爆炸” 的 FLRW 膨胀宇宙模型被广泛接受. 美中不足的是当时 Hubble 使用了错误的距离标准, 使得他所得到的 H 的具体数值是有问题的, 这一点后面还要谈到.

广义相对论性的动力学和流体力学, 电动力学和热力学是从 1915 年开始研究的, 它们的建立都受到了二战影响. Oppenheimer (奥本海默) 和 Snyder 在 1939 年给出了关于引力坍缩的第一个简单的模型, FLRW 宇宙模型扰动研究始于 1946 年 Lifshitz (李夫希茨) 的文章, Gödel (哥德尔) 在 1949 年找到了以他的名字命名的精确解. 此外, 还有许多 Einstein 方程的精确解以及与 Einstein 方程相关的定理在 1950 年之前被发现.

大约从 1950 年开始, 直到现在, 广义相对论开始蓬勃发展. 在 20 世纪 30 年代和 40 年代沉寂的原因包括德国和苏联的政治局势, 量子力学对年轻物理学家的巨大吸引力以及广义相对论本身的深奥性. 尤其是膨胀宇宙的奇点起源和黑洞奇点, 看似只是个抽象的数学概念. 在 1949 年所发现的 Gödel 解中, 时间方向的旋转变化以及包含闭合类时线等复杂行为, 又强化了这一成见. 连 Einstein 本人的研究兴趣都转移到了建立统一场论方向, 虽然这一努力并不成功.

数学技巧的发展, 对理论的进一步理解以及新的技术发明使得广义相对论重新引起了研究者的兴趣. 改进的光学望远镜和其他电磁波频率 (微波, 红外线, X 射线和 γ 射线) 的观测手段, 使得我们获得了宇宙学和天体物理学非常多的观测证据, 从而发现了大量必须应用广义相对论来解释的天体现象和物理过程. 宇宙飞船、从 1947 年晶体管的发明开始的电子学的迅猛发展 (如电脑、图像传感器和激光等) 以及原子钟等, 这些技术进步都促进了今天广义相对论成为被广泛接受的重要物理理论.

作为广义相对论的应用之一, 通过现代设备对于轨道进动的精细测量已经完全成功. 但这并非是广义相对论理论影响应用技术特别是计量技术的唯一方式. 名为 “引力探测器 B” (Gravity Probe B, 简写 GPB) 卫星试验是另一个例子, 该试验目的是测量由于地球转动所导致的广义相对论效应对卫星轨道的影响. 此外, 如果没有考虑相对论修正, 使用 GPS 系统精确导航以及卫星轨道的精确规划都是不可能实现的. 接下来, 我将首先介绍广义相对论在数学方面的一些发展, 然后简单介绍一下从宇宙学开始的各种应用. 希望了解更多内容的读者, 非技术性介绍可以参考 [2], 较为技术性的内容可以参考 [3].

3. 数学的发展

20 世纪 50 年代广义相对论第一批数学创新包括 Taub (陶布) 对于 Killing (基灵) 矢量场所生成的对称群的应用, Choquet-Bruhat (肖凯-布吕阿) 对 Einstein 方程 Cauchy (柯西) (初值) 问题适定性的证明以及 Petrov (彼得罗夫) 关于 Weyl (外尔) 张量的代数分类 (Weyl 张量并不明显出现在 Einstein 方程中). 所有这 3 个结果直到今天依然是非常重要的.

Einstein 方程早期的精确解都包含有对称性, 例如 Schwarzschild 度规和 FLRW 度规, 但 Taub 关于利用对称性求解 Einstein 方程的方法可以找到大量的包含对称性的精

确解. 这对于帮助我们理解 Einstein 场方程的解空间以及某些解可能出现的病态行为有重要作用, 例如之后著名的 Taub-NUT 解, 该解由于性质特殊, 后来被 Charles Misner 称为“几乎所有断言的反例”.

Choquet-Bruhat 的工作表明, 与其他经典物理理论一样, 广义相对论中的初始位形和初始速度完全决定了时空未来的演化, 这一工作也为数值相对论奠定了基础. 该工作将求解 Einstein 场方程分成了两部分, 即在 Cauchy 面上求解椭圆约束方程从而得到初始数据的问题, 以及利用剩余的双曲方程获得时空几何向过去和未来演化的问题.

Petrov 分类提供了对称性分析之外的另一种求解方法 [4], 既考虑所谓“代数特殊”时空, 并导致了 1960 年代对于时空中类光曲线汇的研究, 这一技巧对于理解引力波辐射以及时空的整体结构起到了关键性作用.

广义相对论对于引力波辐射的预言实际上直到上世纪 50 年代晚期才真正搞清楚, 这有赖于 Bondi 和他的同事们所得到的一系列 Einstein 方程的精确解和近似解, 这些工作表明能量可以被引力波运输和传播.

20 世纪 60 年代和 70 年代初期还有其他一些重要的进展, 包括 Roy Kerr (克尔) 得到了旋转黑洞的解, Hawking (霍金) 和 Penrose (彭罗斯) 的奇性定理以及对于时空整体结构的研究, 所有这些都与黑洞的数学和物理性质密切相关.

黑洞是包括光线在内的所有已知物质都无法从中逃逸的区域. 恒星结构的计算显示恒星质量小于 1.44 个太阳质量 (M_{\odot}) 的, 其演化的终点是白矮星; 质量在 5 个太阳质量到 1.44 个太阳质量之间的, 其演化终点是中子星; 5 个太阳质量之上的则终结于黑洞. 宇宙中很多恒星的质量都在 5 个太阳质量之上, 因此黑洞存在的预测是很自然的. 黑洞的表面形成一个“视界”, 它是外部观察者所有可见的事件的边界. 在 Schwarzschild 时空中 (Linton 文章中的 (8) 式) 视界位于 $r = \alpha$ 处, 也曾被称为 Schwarzschild 奇异性, 原因是 (8) 式中的坐标在该处奇异.

Finkelstein 在 1958 年发表的文章中, 利用穿过视界的自由下落粒子的坐标, 揭示了视界的真实性质. 而彻底澄清还有赖于 1960 年代 Kruskal (克鲁斯卡尔) 和 Szekeres 所发表的关于 Schwarzschild 解的最大解析延拓的工作. 描述 Schwarzschild 解以及其他解的整体性质的典型工具是基于共形变换的所谓“Penrose 图”. 在该图中, 时空中的无穷远点被映照为有限远点, 且所有光线均为 45° 直线. 图 3 给出 Kruskal 时空 (Schwarzschild 时空的最大解析扩展——译注) 的 Penrose 图: 区域 I ($r > \alpha$) 是黑洞外部; 区域 II 是黑洞内部; 区域 III 是白洞区, 这个区域中任何物质都可以逸出但是不能进入; 区域 IV 则是另外一个黑洞外部区域; 锯齿线代表的奇点. 一般认为, 区域 III 和 IV 并不会在自然界中真实存在, 因为物质经引力坍缩形成黑洞的过程会从 I 区底部开始并最终落入 II 区, 从而取代图中 III, IV 两区. 图 3 只体现了 4 维时空中的两维, 图中的每一个点事实

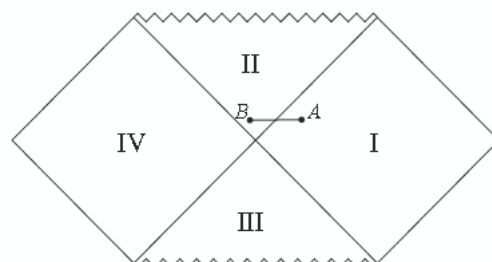


图 3 Schwarzschild 时空最大解析扩展的 Penrose 图

上代表着一个两维球面. 在图 3 中连接 A, B 两点的直线上每一个点所对应的球面上画一个圆, 则得到本文标题页上给出的图.

黑洞解的唯一性定理导致了所谓“黑洞无毛猜想”(即黑洞由其质量, 电荷, 自旋完全刻画, 与形成黑洞的物质种类等细节无关). 坍缩恒星一定会通过引力辐射丢掉自身具有的较高次矩. 这导致了“宇宙监督猜想”, 即广义相对论中引力坍缩所形成的奇点总是被事件视界所包裹: 在极特殊情况下该猜想存在反例, 一般条件下该猜想尚未得到证明.

“黑洞力学定律”与热力学定律有相同的形式. 考虑到物体落入黑洞所导致的信息丢失, Bekenstein 认为应该将黑洞的表面积认同为熵, 将黑洞质量的倒数认同为温度(上述认同需要配合适当的常数因子). 1974 年, Hawking 发现, 如果同时考虑广义相对论和量子理论, 则上述认同并非仅仅是形式上的, 当黑洞比周围环境的温度高时确实会放出辐射. 遗憾的是, 我们很难观察到这种现象. 观察到这一现象所需的黑洞大小大约是两倍月球的质量, 而这样质量的黑洞只可能在宇宙的极早期阶段才能形成.

黑洞的数学工作也催生了“黑洞物理学”, 即研究黑洞附近的物质在强引力场中的物理效应. 根据定义, 我们不可能获得来自黑洞内部的辐射, 但我们可以(而且几乎肯定可以做到)看到来自与黑洞相邻的恒星和气体的效应. 特别是, 我们看到了由于黑洞周围物质吸积, 导致吸积盘内部区域被加热, 从而产生强烈辐射的现象.

黑洞的研究与奇点的研究相关. Roger Penrose 证明, 如果广义相对论在物质密度很高的情况下依然成立, 那么从被所谓“俘获面”所包围的区域内发出的光将无法逃逸(即形成一个黑洞), 而该区域内一定包含一个奇点, 这意味着奇点必须被认真对待. Hawking 采用 Penrose 的想法应用于证明宇宙奇点的存在性. Hawking 和 Ellis 指出, 定理所要求的条件在我们的现实宇宙中是满足的. 这一结果纠正了基于 Lifshitz 和 Khalatnikov 工作的推论, 即只有虚构的(坐标)奇点会在宇宙中出现.(然而他们工作本身以及和 Belinskii 一起做的修正, 在宇宙学中仍然是有价值的.)

关于黑洞和奇点的工作, 以及孤立系统的渐近结构, 正如 [5] 中所总结的, 是我们目前对于时空的整体结构认识的基础.

4. 宇宙学中的广义相对论

20 世纪 60 年代 FLRW 模型解释了如何通过热大爆炸形成某些化学元素, 这些元素无法在恒星内部形成. 该模型还给出了关于中微子种类的限制, 并且预言了宇宙微波背景辐射 (CMB). 基于 Alpher 和 Herman 于 1949 年的工作, 该辐射的温度大约是绝对温度 5 度左右. 但是 Hubble 使用了错误的距离标准, 导致对于宇宙的尺度、年龄和膨胀率大约 7 倍左右的低估, 从而导致膨胀的 FLRW 宇宙模型所计算出的宇宙年龄甚至小于从地质学所得到的地球年龄, 并且得出我们所生活的银河系是全宇宙中最大的星系. 这一严重的矛盾迫使当时的人们开始考虑其他替代模型. Hubble 的错误在 1952 年被纠正, Baade 使用 1950 年服役的 Palomar 天文台 200 英寸望远镜完成了这一观测, 1958 年 Sandage 给出了现代宇宙学所采用的距离标准和膨胀率的数值.

CMB 预言在 1960 年代中期被 Doreshkevich 和 Novikov (诺维科夫) 以及 Peebles 和

合作者两个研究组独立重新发现, 使用新设备对于 CMB 的第一次观测也是如此. 这一证据和对于射电源 (特别是类星体) 的计数, 颠覆了稳恒态宇宙理论, 该理论认为虽然宇宙在膨胀, 但宇宙中每个点的状态并不随时间和空间变化, 由于宇宙膨胀所带来的物质密度的减少会由于宇宙空间连续不断的新物质的产生而得到补偿. 到 1968 年, 射电源计数的结果清楚地显示, 射电源的数量随时间增加. 这一结果与宇宙由热大爆炸形成并随后逐步损失能量的结论一致, 而与稳恒态宇宙理论矛盾.

CMB 的偶极矩产生的原因是我们相对于宇宙的运动, 偶极矩的实际测量于 1969 年完成, 但直至 1992 年才第一次进行了对于 CMB 小尺度涨落的测量 (由 COBE 卫星完成). 随后的卫星和地面测量以极高的精度给出了在最后散射面时 CMB 温度涨落的振幅、极化和角分布. 所谓最后散射面是指宇宙大爆炸后, 随着辐射温度下降, 光子与其他气体退耦的时刻 (图 2).

1970 年代的宇宙学模型与绝大多数观测到的宇宙性质相符合, 但是不能明显给出宇宙中团块化结构的形成. 1980 年, Starobinsky 和 Guth 分别独立提出暴涨理论, 解决了这一问题. 该理论中包含某些称为 “inflaton” 的场, 在宇宙早期引发指数膨胀, 并且为形成目前观测到的宇宙大尺度结构留下了足够多的 “种子”.

基于 1980 年代开始的对于星系和星系团运动的观察, 我们知道宇宙除了包含发光的星体、星系以及辐射气体云之外, 还必须包含不发光的所谓 “暗物质”. 观测给出 $\Omega_m \sim 0.3$, 其中 80% 部分是不发光的冷物质 (“冷” 指粒子运动速度远小于光速). 此外, 暴涨宇宙学家认为, 假设暴涨场的能量会在暴涨期结束后转变成其他普通物质的能量, 则 $\Omega_m \approx 1$, 这与 CMB 的测量一致.

FLRW 模型的线性微扰理论仍需改进, 特别是要解决所谓 “规范依赖” 问题以及真实的粗粒化宇宙与其平滑化模型之间的不一致问题. 这一努力从 1980 年开始, 人们试图通过非线性过程, 将从 CMB 观测谱所得到的暴涨的涨落与目前观察到的宇宙大尺度结构相联系. 在被称为 “重子声学振荡” (BAO) 的实验中, FLRW 背景的演化成功地将 CMB 谱中的峰与时间上稍后的星系分离中的峰对应起来. 但是关于结构的详细计算必须假设 $\Omega \approx 1$ 中的 70%—80% 的贡献均来自于宇宙常数项 Λ (或其他满足类似物态方程的物质). 这样的成分被称为 “暗能量”.

当 1998 年首次发表的超新星的速度 - 距离关系的测量意外地表明宇宙膨胀是加速的, 这对于该理论来说是一个好消息. 这一结果 (结合 CMB 和 BAO 的测量, 可以从方程 (2) 导出) 给出 $\Omega_m \approx 0.3$, $K \approx 0$, $\Omega_\Lambda := \Lambda/3H^2 \approx 0.7$. 两种暗组分的区别在于它们满足不同的物态方程. 广义相对论模型为这两种暗组分的存在提供了信心, 这是为什么解释它们的一种方式是采用不同的引力理论. 包括这两种暗组分的扰动现在是 “精确宇宙学” 的目标, 即, 将几个来源的数据结合起来, 为 FLRW 模型的参数设置严格的范围.

还有两个现代宇宙学的方面植根于早年的广义相对论. 首先是引力透镜. 1979 年首先观测到星系的引力导致的光线弯曲. 星系和恒星的引力透镜目前已经是天文学的常规工具, 例如用来推断透镜星系内的质量分布, 根据遥远星系的引力透镜效应来推断暗物质的分布 (图 4), 以及观察星系由引力透镜所产生的多个分立像. 理论预言引力透镜会影

响 CMB 极化和角分布的谱, 实际测量与理论结果十分吻合. 在小尺度上, 目前许多太阳系外的行星也靠引力透镜效应发现.

第 2 个是目前人们认为类星体和活动星系核含有黑洞. 这基于 Lynden-Bell 在 1969 年的设想, 即极大质量黑洞周围的吸积盘会产生喷射, 从而成为目前观测到的射电源. 天体物理学家们现在相信, 目前可见的所有的星系, 或者至少其中的绝大部分, 例如我们所在的星系, 其中心一定包含超大质量黑洞, 其质量超过百万太阳质量.

最引人注目的例子是我们所在的银河系. 近年来 Reinhard Genzel 和 Andrea Ghez 领导的两个研究组, 采用自适应光学的现代技术, 跟踪银河系中心附近恒星的轨迹. 观测是在红外频段进行, 图 5 为所观察到的轨道. 其中被命名为“SO2”的星, 轨道围绕银河系中心, 周期为 15 年, 最近发现的另一个命名为“SO-102”的星, 其轨道周期为 11.5 年. 这些星体的运动速度高达 1400 km/s (光速的 0.5%), 并且从它们的轨道可以推论出在小于 0.01 pc (一光年的 1/30) 范围之内分布着大于 260 万倍太阳的质量.

基于这些观测资料, 关于黑洞质量更详细的研究给出一个令人惊讶的结果, 一个星系的总亮度和它的中心黑洞的质量之间存在线性关系. 这一规律首先由 Magorrian 发现, 中心黑洞质量与星系核球中恒星速度分布也存在类似关系, 这种关系的精确度也足以帮助我们判断中心黑洞的大小. 因此, 似乎黑洞对一个星系的成长和演化有很大的影响, 尽管它仅包含全星系大约 0.5% 的总质量, 在空间尺度上所占有的比例则更小 (但按 Newton 理论估算, 它具有引力结合能等于其所在星系的其余部分的总和). 产生影响的具体机制以及星系的合并和碰撞的影响, 仍需要进一步的研究.

现代宇宙学清楚地展现了广义相对论是如何发展成为一个多面和精确的建模工具. 它不仅提供了背景的 FLRW 度规, 其线性扰动与 CMB 和 BAO 的涨落高度吻合, 而且它所提供的引力透镜效应和黑洞还更有用.

5. 天体物理学中的广义相对论

新型致密天体, 如类星体和脉冲星从 20 世纪 60 年代起逐步被发现, 特别是通过射

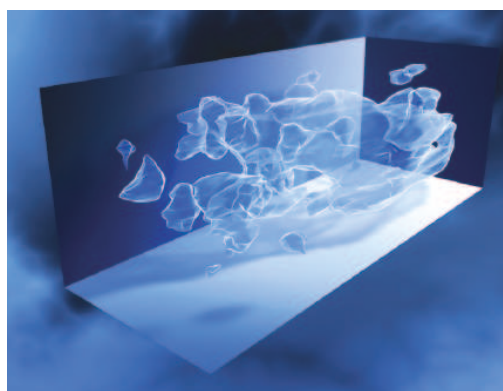


图 4 暗物质和重子物质的分布, 图像依据 COSMOS 弱引力透镜的数据得到. 图片来源: NASA, ESA 和 R. Massey (加州理工学院)

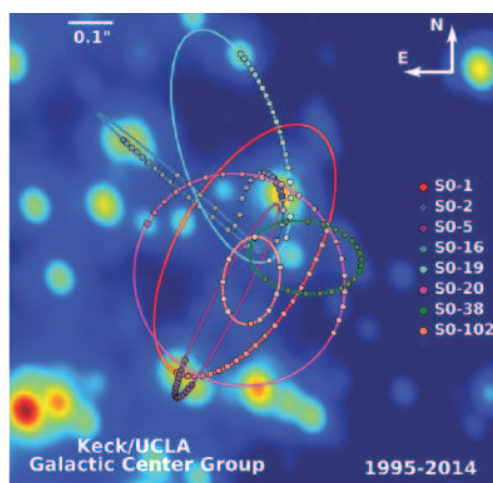


图 5 银河系中心附近恒星的轨道. 这张照片由 Andrea Ghez 教授和她的研究小组在洛杉矶加州大学创建, 并用 W. M. Keck 望远镜获得数据. 近期对 49 个邻近星系的研究证实这一点.

电天文学方法。它们的致密性是从它们具有的高能量和快速变化推论出的。虽然相对论性星体，特别是引力坍缩的模型，很早以前就开始被研究了，但是强引力场模型则更有价值。我们现在讨论作为 γ 爆源 (GRB) 的中子星、黑洞以及由它们构成的双星系统的形成和结构。中子产生于超新星爆发的残留物。

脉冲星是旋转的中子星。脉冲双星的性质，如在 2003 年发现的 J0737-3039A/B，能在强场条件下以极高精度检验广义相对论。该结果支持引力波的存在，理论预测的辐射输出能精确地与观察到的周期变化相符合。

目前一般认为辐射 X 射线的双星是由黑洞和一颗伴星构成，伴星的物质因潮汐力的作用被黑洞掠夺。图 6 是一个艺术家的想象。X 射线来自吸积盘。双星的轨道数据显示黑洞质量在 6—20 个太阳质量之间，而且其自旋接近于 Kerr 黑洞所允许的上限。这一事实支持了质量大于 5 个太阳质量的恒星（这样的星体很常见）最终将形成黑洞的理论预言。

短 γ 射线暴的优越候选模型是双中子星或黑洞 / 中子星合并。长 γ 射线暴，发现于大质量恒星正在形成的星系中，被认为是由于恒星核的坍缩导致：其中一些与异常明亮的超新星相关的，它们在红移超过 8 或 9 的距离上被观测到。有一些喷流与活动星系核有关。其他一些 γ 射线暴可能是由于星系中心的黑洞吞噬恒星引起的。

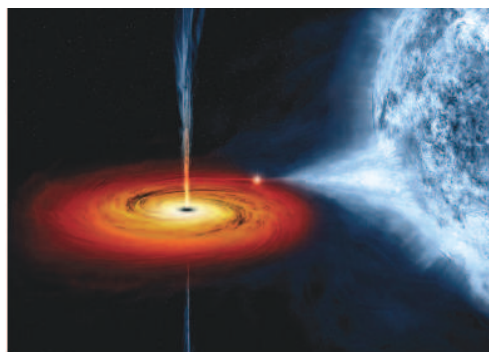


图 6 艺术家所画的名为天鹅座 X-1 的黑洞。它由一个大质量恒星坍缩形成。这个黑洞从它旁边蓝色星吸收物质。图片来源：NASA/CXC/M. Weiss

6. 太阳系中的广义相对论

在 1957 年人造卫星发射后，广义相对论成为一个实用的理论：在精确预测和设定飞船轨道时必须考虑相对论效应。人造卫星使得 GPS 导航（卫星导航）成为可能：数以百万计的设备，如智能手机，都包含了结合狭义和广义相对论效应的计算。

除去脉冲双星对于广义相对论的检验外，对于广义相对论的检验通常是在太阳系内使用航天器进行的，有些甚至是纯粹在地面进行的。检验由太阳引起的光线弯曲现在使用无线电源和甚长基线干涉设备来测量。引力红移已经非常精确地在高塔中利用 Mossbauer 效应来测量，还可以利用火箭上的时钟来测量。轨道效应的检验体现在考虑了广义相对论影响的宇宙飞船轨迹设计运行良好。除了这些所谓经典检验的现代版本外，还对于其他效应进行了观测，例如太阳系内信号的时间延迟，超导重力测量仪读数的日周期变化以及地球的旋转效应等。引力的自相互作用通过对于月球位置的高精度测量来检验，该测量是借助宇航员放置于月球表面的反射镜完成的激光测距来实现的。GPB 试验是由卫星上两个相互垂直的陀螺仪的进动来检验广义相对论的理论预言，这一试验关于测地线进动的结果在 0.3% 的精度上验证了广义相对论的理论预言，而对于坐标拖曳效应的验证精度目前只有 10%—20%。

大量狭义和广义相对论的效应被 GPS 系统所考虑，同时也接受 GPS 系统运行的考

验. GPS 系统使用在 6 个轨道平面 24 颗卫星 (加上备件). 它们所携带的时钟的误差每天不超过 4 ns (纳秒). 以光速折算, 一个 1 ns 误差导致的空间距离约是 30 cm. 如果光速变化, 它会在这个量级上扰乱 GPS 的测量, 所以 GPS 依赖于狭义相对论的第一个方面即为光速的不变性. (对于 GPS 的其他细节见 [6].)

从卫星到地面的引力红移大约是卫星上时钟误差的 10^4 次方倍, 所以引力红移效应的影响在 km 量级. 实际计算包括四极矩和向心力项, 时钟在卫星发射前也进行了调整, 以补偿这一效应 (1977 年检验广义相对论的试验没有考虑这一点, 该试验的精度是 1%).

由于卫星运动所导致的时间变慢 (在旋转参照系中被称为 Sagnac 效应) 也被考虑进来, 作为 207.4 ns 修正的一部分. 在测试中, 它曾经积累到 350 ns. 因此, 不考虑狭义相对论的这一效应将导致周围 60 m 误差, 这足以在汽车卫星导航中产生问题.

剩余其他效应的影响较小. 第一个问题是卫星轨道是椭圆形而不是纯粹的圆形. 偏心率 $e = 0.01$ 的轨道广义相对论预言的误差约为 23 ns (即 7m), 使用 Linton 文中的方程 (9) 计算. 对某个具体卫星的测量 (SV#13), 其轨道的偏心率 $e = 0.01486$, 显示出误差可达 10 m. (对这种效应的检测在 1996 年进行, 其目的是证明 GPS 下一代卫星的设计中不考虑这个效应是一种误导. 测试所包含的对于卫星位置的计算和测量精确到 1 mm 之内.)

2012 年, 我在一个农场参观时发现, 一台 £150K 的联合播种机可以在 GPS 的引导下在 4 英寸内工作, 我认为这是广义相对论最意想不到的显著成果之一.



图 7 驾驶室内装备有 GPS 的联合播种机
照片来源: Nicola Crawley

7. 关于广义相对论最新的理论研究

广义相对论中数学的发展已影响了物理以及数学的其他领域. 我们现在对可能的整体技术有深刻理解. 联络和曲率已成为现代规范理论的基础. 与数学的其他领域相结合, 如与可积系统方法的联系 [7] 已得到了发展. 还有其他许多令人振奋的结果, 其中的技术部分在这里只能遗憾地简要提一下: 常见术语的一小部分包括粘接构造技术, 正规共形场方程, hoop 猜测和 Penrose 不等式, 孤立视界和动力学视界, 临界外俘获面等.

数值相对论一直被认为需要现代超级计算机的全部功能. 其中一个偶然的副产品是以 Larry Smarr 为首的超级计算机中心制作了世界上第一个带图形界面的网页浏览器 Mosaic. 早期广义相对论的计算程序总会在实现预期的模拟前就崩溃. 直到 2005 年人们才意识到, 这是由于当时计算所使用的方程仅仅是弱双曲的, 因而数值上是不稳定的. 目前, 通过坐标的重新选择以及方程的重组使得我们可以避开这个问题, 从而最终能够模拟场强引力效应. 也许最急迫且重要的用途是, 对于一个致密双星系统并合期间所可能产生的引力波的波形进行详细的预测. 这样提供的模板可以在高精度的引力波探测实验中用于从噪音中挖掘信号.

数值模拟的两个意外的结果值得一提. 一个是 Choptuik 发现的引力坍缩的临界现

象. 考虑一个单参数的初始数据族. 在该族初始数据中, 存在一个边界, 区分初始数据可否通过演化形成黑洞. 从边界处数据出发演化所得的解具有一些特殊性质, 例如具有某种连续或分立的时间对称性, 存在标度律等. 这些临界行为对于许多单参数初始数据族普遍存在 (即有某种“普适性”), 并且对于耦合各种物质场的 Einstein 方程也同样存在.

另一种是对于 Belinskii 等提出的各向异性宇宙学模型的改良, 这与大爆炸宇宙的原初奇点有关. 在奇点附近, 他们的模型的优点是存在一些时期, 这些时期中演化方程内空间导数项的贡献是被时间导数项所压倒的, 而这样的时期会被某种“反弹”所打断, 进而从这样一个时期过渡到另一个这样的时期. 20 世纪 90 年代一些数值工作者的结果支持了这种现象的存在, 但是他们发现还会有额外的“尖峰”出现, 尖峰处的参数在空间方向不再是缓慢变化的. 包含“尖峰”的精确解已经知道了, 而最近也有文章讨论了关于尖峰发生的统计.

8. 未来

在 1915 年, 很难预测相对论与种地有关联, 但预测 2115 年的引力理论可能更难. 但广义相对论的许多方面和应用已有专门研究, 因为它们与实际遇到的问题相关.

一些即将开始以及计划中的试验将会给出广义相对论应用于宇宙学和天体物理的更多信息, 至于这些试验所获得的资金支持也体现了对于广义相对论所取得的成功敬意. 我在这里并不试图给出一个完整的记录, 而仅仅是罗列其中几项. 一些试验针对于描述暗物质、暗能量和其他不可见的组份: 例如测量中微子以期弄清楚大爆炸之后的中微子背景; 利用地面探测器探测各种可能的暗物质成分, 或者通过对于 CMB、星系分布以及引力透镜的精细观测研究暗能量的物态方程. CMB 的进一步数据将会判定目前对于 B-模式极化的测量结果是否正确 (该结果由 2014 年的 BICEP2 试验得到, 但是观测到的效应也可能由宇宙尘埃产生): 如果结论是肯定的, 这将证明存在由暴涨所产生的引力波.

一个最重要的试验可能是大型激光干涉引力波探测. 早期引力波的探测是使用大型圆柱杆和压电探测器, 后来又将设备冷却到接近绝对零度以降低热噪音. 近期的干涉仪实验 (美国的 LIGO, 印度也将很快建一台, 法国和意大利在比萨附近联合建设的 VIRGO, 英国和德国联合建设的 GEO600 以及日本的 TAMA), 其工作原理更类似经典的 Michelson-Morley 干涉仪: 实验是要寻找由于引力波影响干涉仪臂长所导致的激光干涉条纹.

这些试验已经达到了它们原初的设计精度. 目前还没有得到正面的结果. 没有观测到引力波可能与潜在的波源有关. LIGO 将在完成升级后以更高的精度很快恢复工作, 如果我们对于广义相对论以及对于致密双星的知识是正确的, 我们可以期待 LIGO 会给出肯定的结果. 如果我们确实没有观测到什么, 这也许会是一个更有趣的结果, 因为这证明我们关于物理学或天体物理学的知识是错的.

本文始于重新审视狭义相对论如何解决 Newton 运动学和电磁之间的矛盾, 以及广义相对论如何解决狭义相对论和引力之间的矛盾. 目前的矛盾 (自从上世纪 20 年代就认识到) 存在于广义相对论和量子理论之间. 后者对于预测微观尺度下各种效应是一个惊人准确的工具, 我们似乎有一个比较好的理论“标准模型”涵盖了所有粒子物理实验, 最新

试验证据是大型强子对撞机 (LHC) 发现了 Higgs (希格斯) 粒子. 然而, 广义相对论无法通过类似的方法进行处理: 它是不可重整化的. 我们至今还没有一致的量子引力理论.

尽管如此, 广义相对论和量子物理学的组合已经被应用于一系列的问题, 用于模拟白矮星和中子星, 预测黑洞的 Hawking 辐射以及暴涨中引力波的量子行为所产生的 CMB 张量扰动等. 这样做的合理性类似于计算网球的飞行轨迹只需应用 Newton 理论而不是广义相对论: 修正项在所处理的问题中是如此之小以至于可以忽略不计.

尝试解决广义相对论与量子理论之间的矛盾的方法多种多样. 到目前为止, 最流行的是 (超) 弦理论, 在这个理论中标准模型所设想的点粒子被高维空间中弦的激发态所替代. 在弦理论的低能状态下可以自然得到一个无质量的自旋数为 2 的场, 这个场被认同为引力场. 第 2 个活跃的方向是圈量子引力, 它建立于旋量的框架之上. 我自己的感觉是倾向两种理论中哪个形式和方法较为常规一些, 或许, 我们需要一个把这些概念的基础处理至更加平衡的理论. 也许到了 2115 年, 我们就知道了.

参考文献

- [1] Pais, A. (1982) *Subtle is the Lord*, Oxford University Press, Oxford.
- [2] Ferreira, P. G. (2014) *The Perfect theory: A century of geniuses and the battle over general relativity*, Little, Brown London.
- [3] Ashtekar, A., Berger, B. K., Isenberg, J. and MacCallum, M. A. H. (2014) *General Relativity and Gravitation: A Centennial Perspective*, arXiv:1409.5823.
- [4] Stephani, H., Kramer, D., MacCallum, M. A. H., Hoenselaers, C. A. and Herlt, E. (2003) *Exact solutions of Einstein's field equations*, 2nd edition, Cambridge University Press, Cambridge.
- [5] Hawking, S. W. and Ellis, G. F. R. (1973) *The large scale structure of space-time*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [6] Ashby, N. (2003) *Relativity in the Global Positioning System*, *Living Reviews in Relativity*, vol. 6, no. 1, <http://relativity.livingreviews.org/Articles/lrr-2003-1/>.
- [7] Mason, L. J. and Woodhouse, N. M. J. (1996) *Integrability, Self-duality and twistor theory*, vol. 15 of *London Mathematical Society Mono-graphs*, Oxford Science Publications, Oxford.

(谢方泉 译 吴小宁 王世坤 校)

(上接 53 页)

当 TPSE Math 开始其实施阶段时, 全国各地的数学系根据其他系的需求制定课程, 并做出变革以缩小工作场所遇到的数学和课堂上教的数学之间的差距. 在这个时候, SIAM 会员特别适合支持 (理论) 数学教师和研究生, 充当广泛应用的资源, 并与学校其他系和工业中的同事建立更富有成效的联系.

致谢 (略)

进一步阅读材料

- [1] Holm, T. (2016). *Transforming Post-Secondary Education in Mathematics*. arXiv, Cornell University Library.
- [2] Levy, R., Maki, K., & Fowler, K. (2015, April). How Can the SIAM Community Help Embed Math Modeling in K-16 Curricula? *SIAM News*, 48 (3), April 2015.

(叶其孝 译 吴庆宝 校)