数学研究问题

当代数学问题（Ⅱ）*)

F. E. Browder

XⅢ **实代数几何**（Hilbert 第十六问题）（В. Арнольд）

现在还不知道，**k维实投影空间中，n 次代数超曲面的补集可以有多少个连通分支，甚至$k=3$时也是如此。**

从 Herrmann 关于振动薄膜的结线的一个定理（Courant-Hilbert 的 Methoden der math. Physik（数学物理方法）第Ⅰ卷第 6 章 § 6 提及）知道，连通分支数不超过$1+\binom{n+k-2}{k}$平面曲线（n 条直线）以及某些光滑的 4 次曲面可达到这一最大值。但是关于薄膜的一般定理是不对的，所以上述估计只是对曲线的情形得到了证明。

另一个沒有解决的问题是：**假设n次平面曲线的卵形线个数为极大**（即$1+(n-1)(n-2)/2$），**试求其一切可能的卵形线构形。**

4 次曲线的 4 个卵形线只有一种构形（两两互补），6 次曲线的11个卵形线有三种构形（只有一个卵形线包围其他卵形线，而且只能包围 1 个，5 个或 9 个）。对于 8 次曲线的22个卵形线，则有145种构形满足所有已知的约束条件，但只有 9 种构形有相应的代数实现。

Hilbert 第十六问题的代数部分最近取得进展（Гудков，Рохлин，Харламов 等），对比之下，关于极限环的那一部分却无甚进展：现在仍然不知道，**两个二次多项式给出的平面向量场是否可以有三个以上的极限环**①。И. Г. Петровский 把实极限环与复投影平面相应的二维叶片结构（foliation）的拓扑连系起来的深邃思想还沒有人加以实现。

XⅣ **复几何**②（陈省身）.

1. **双全纯等价**。怎样判断两个复空间或复流形是否双全纯等价，这也许是复几何中最自然的问题。下面是几个简单的例子。

问题1. 设 M 是紧致 Kähler 流形，其截面曲率为正，M 是否与复投影空间双全纯等价？

Andreotti 与 Frankel 证明了：当M的维数是 2 时，答案是肯定的；其证明依赖于有理曲面的分类。“截面曲率为正”的条件可以换成“全纯双截面曲率为正”，这样，问题就完

* 原题 “Problems of Present Day Mathematics”，译自 *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 28（1976），35—79.

① 这一问题已被中国数学家解决：陈兰荪，王明淑（“数学学报”，22（1979），1051—1056）以后史松龄（“中国科学” 11（1979），1051—1056）同时得到了四个极限环的例子。——译注.

② 感谢 P. Griffiths, S. Kobayashi, R. Narasimhan 及伍鸿熙在准备这些问题过程中给予我的建议与协助。——原注

全变成复几何中的问题，参看[10]。这个问题也可以提成代数几何的问题：

问题1a.① **设M是紧致复流形，具有正切丛，它是否与复投影空间双全纯等价？**

问题2. **设** $z_j=x_j+iy_j(1\leqslant j\leqslant n)$ **为复数空间** C_n **中的坐标．由**

$$\sum_j (a_j x_j^2 + b_j y_j^2) < 1$$

（此处 a_j,b_j **是正实数）定义的区域是一个椭球体的内部，而且是强拟凸的．试对这样的区域进行双全纯等价的分类．**

I. Naruki 及 S. Webster[11] 曾证明：存在与球体（$a_j=b_j=1$）不双全纯等价的这样的域。最近 Charles Fefferman 证明：C_n 中具有光滑边界的两个强拟凸域的双全纯等价(映射)可以光滑地延拓到边界上[5]，后者即所谓 Cauchy-Riemann 流形，研究过其局部不变量的有：E. Cartan，N. Tanaka，最近还有陈省身与 J. K. Moser。这些结果应该为解决问题2提供一些工具。一般说来，研究拟凸（但不必强拟凸）域的不变量是一个非常重要的问题。

2.全纯映射与嵌入． 在 C_n 中令

$$B_n=\{z\,|\,|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2<1\},$$
$$\Delta_n=\{z\,|\,|z_1|<1,\cdots,|z_n|<1\}$$

分别表示球体与多圆柱。

问题3. **是否存在** B_2**到** Δ_2**的逆紧（Proper）全纯映射？**

从另一个方向看，众所周知，不存在 Δ_2到 B_2的逆紧全纯映射。与问题3有关的更一般的问题是：

问题3a. **是否每个有界全纯域都可以逆紧且全纯地映入某个** Δ_n**？** B_n **到自身的逆紧全纯映射是否一定是自同构？是否至少是由有理函数给出？**

继 Remmert，E. Bishop 和 R. Narasimhan 关于把 Stein 流形嵌入 C_k 的早期工作之后，O. Forster[6] 证明：任意 Stein 流形（维数 $n\geqslant 6$）可以嵌入 C_k 成为闭子流形，$k=2n+1-\left[\frac{n-2}{3}\right]$。这个结果能否改进是个有意思的问题。

问题4. **维数为** $n\geqslant 6$ **的 Stein 流形能否嵌入** C_k **成为闭子流形，**$k=2n+1-\left[\frac{n}{2}\right]$**？是否存在有关流形拓扑结构的条件（例如微分同胚于** R^{2n}**），以保证流形嵌入更低维的** C_k**？什么样的开黎曼面可以逆紧地嵌入** C_2**？**

3. Hermite 几何． 复函数几何理论中很多结果都可追溯到 Picard 的下列定理：**复投影直线** $\mathrm{P}_1(\mathrm{C})$**上三个相异点的补集以圆盘** Δ_1**为万有复叠，因此有完备的 Kähler 度量，其曲率为负常值．** 这个定理在高维有各种形式的推广[9]。下述问题似乎是这种理论的所有现成方法都不易处理的问题。

问题5. **设** $\mathrm{P}_n(\mathrm{C})$**是** n **维复投影空间，**$H_0,H_1,\cdots,H_{2n}$ **是** $\mathrm{P}_n(\mathrm{C})$ **中** $2n+1$**个处于一般位置的超平面．流形** $\mathrm{P}_n(\mathrm{C})-(H_0\cup H_1\cup\cdots\cup H_{2n})$**是否有 Kähler 度量，其全纯截面曲率** $\leqq -1$**？**

---

① 问题1（或1a）已经分别由日本年轻数学家 S. Mori 及旅美数学家丘成桐与肖荫堂独立地解决了．Mori 的结果适用于任意代数闭域上的非奇异投影簇，详见 S. Mori, Projective manifolds with ample tangent bundles, Annals of math, 110(1979), 593—606及 Y. T. Siu（肖荫堂）and S. T. Yau（丘成桐）, Compact Kahler manifolds of positive bisectional curvature, Invent. Math., 59 (1980), 189—204.——译注

我们在下面提出 Calabi 猜测[2]。这个猜测对了解 Ricci 曲率是至关重要的。设M是n维复流形，有 Kähler 度量

$$ds^2=\sum g_{\alpha\overline{\beta}}-dz^\alpha\overline{dz^\beta},\quad 1\leqslant\alpha,\ \beta\leqslant n,$$

使得 Kähler 形式

$$\omega=\frac{i}{2}\sum g_{\alpha\overline{\beta}}dz^\alpha\wedge\overline{dz}^\beta$$

是闭的。令 $g=\det(g_{\alpha\overline{\beta}})$ 且

$$R_{\alpha\overline{\beta}}=\partial^2\log g/\partial z^\alpha\partial\overline{z}^\beta$$

则 Ricci 形式

$$\sum=\frac{i}{2\pi}\sum R_{\alpha\overline{\beta}}dz^\alpha\wedge\overline{dz}^\beta$$

是双次数为(1,1)的实的闭形式，并且代表M的第一个陈示性类。

问题6① (Calabi 猜测)。**M是紧致 Kähler 流形，$\omega,\sum$分别是它的 Kähler 形式及 Ricci 形式。设$\sum'$是双次数为(1,1)的实的闭形式，而且上同调于$\sum$，则存在唯一的 Kähler 度量，以$\sum'$为其 Ricci 形式，且其 Kähler 形式ω'上同调于ω。**

Aubin[1] 证明：当M有非负曲率时，这个猜测是对的。

4. 非紧代数簇上的解析闭链。 Cornalba 及 Griffiths[4] 最近研究了非紧代数簇上的解析闭链，其成果之一是下列定理：**Stein 流形M上的偶数维同调群 $H_{ev}(M,Q)$ 中解析子簇生成、对于仿射簇而言，这些解析子簇不一定都是代数子簇**，这种用超越的东西来研究代数簇的做法具有很大的吸引力。超越程度则由[4]中定义的增长阶数来衡量。我们只提两个简单的问题。

问题7. (a) **光滑仿射簇上的偶数维同调类是否都可用有限阶的解析闭链表示？** (b) **设C是C_3中的非平面**(twisted)**三次曲线**，由 Forster-Ramspott 定理[7]，**C是两个解析曲面S_1，S_2的完全交。**S_1，S_2必须满足什么样的增长条件？

（问题ⅩⅢ—ⅩⅣ：**王启明**译　**江嘉禾**校）

参　考　文　献

[1] T.Aubin, *Metriques riemanniennes et courbure*, J.Differential Geometry 4(1970), 383—424. MR 43*5452.

[2] E.Calabi, *On Kahler manifolds with vanishing canonical class*, Algebraic Geometry and Topology (A Sympos. in Honor of S.Lefschetz), Princeton Univ.Press, Princeton, N.J., 1957, pp.78—89. MR 19, 62.

[3] S.Chern and J.K.Moser, *Real hypersurfaces in complex manifolds*, Acta Math.133(1974), 219—271.

[4] M.Cornalba and P.A.Griffiths, *Analytic cycles and vector bundles on noncompact algebraic varieties*, Invent.Math.28 (1975), 1—106.

[5] C.Fefferman, *The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudo-convex domains*. Invent. Math. 26 (1974), 1—65. MR 50*2562.

[6] O.Forster, *Plongements des varietes de Stein*, Comment Math.Helv.45 (1970), 170—184. MR 42*4773.

[7] O.Forster and K.J.Ramspost, *Uber die Darstellung analytischer Mengen*, Bayer Akad. Wiss. Math. Natur.Kl.S.B.1963, Abt.11, 89—99(1964). MR 29*4912.

[8] T.Frankel, *Manifolds with positive curvature*, Pacific J.Math.11 (1961), 165—174. MR 23*A600.

① Calabi 猜测已于1976年被旅美年轻数学家丘成桐彻底解决，详细证明见 Yau, S.T. (丘成桐), On the Ricci curvature of a compact Kahler manifold and the complex Monge-Ampére equations I., *Comm. Pure and Applied Math.*, 31 (1978), 339—411. ——译注。

[9] P. Kiernan and S. Kobayashi, *Holomorphic mappings into projective space with lacunary hyperplanes*, Nagoya Math. J. 50 (1973), 199—216. MR 48*4353.
[10] T. Ochiai, *On compact Kahler manifolds with positive holomorphic bisectional curvature*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 27, Part II, Amer Math. Soc., Providence, R.I., 1975, PP. 113—123.
[11] S. Webster, *Real hypersurfaces in complex spaces*, Ph.D. Thesis, Berkeley, Calif. 1975.

XV 微分几何① (J. Milnor).

1. **可自交的肥皂泡问题.** 1873年 Plateau② 认为："很可能球面是唯一具有常值平均曲率的闭曲面。" 这个断言在曲面是星形区域的边界面时早在1853年就由 Jellett 证明了。亏格为零的浸入曲面情形，是 Hopf 在1950年证明的，任意亏格的嵌入曲面情形则是 Александров 在1958年证明的。但是亏格较高的浸入曲面情形依旧悬而未决。陈省身指出，对于椭圆型W曲面也有类似的问题。所谓椭圆型W曲面，就是指曲面的主曲率 k_1, k_2 满足一个方程式 $W(k_1, k_2)=0$，并且由方程解出的 k_2是 k_1的单调减函数。

2. **对标量曲率 $R=\sum g^{ik}g^{jl}R_{ijkl}$ 的认识.** 1960年 Yamabe 宣布了下面的定理：给了任一光滑紧致黎曼流形，维数至少是 3，黎曼度量是 g_{ij}，必存在一个保角等价的度量 $e^{2\phi}g_{ij}$，使得相应的标量曲率是常数。Yamabe 的证明是有缺点的，并且他的定理在某些情形很可能是错的，但是他的文章引出了 Aubin, Trudinger, Eliasson, Fischer-Marsden, Kazdan-Warner 等人的重要工作。特别是 Eliasson 证明了：维数大于或等于 3 的任何流形都有一个度量，使得相应的标量曲率是负常数。现在还不知道什么样的流形可以有一个度量，使得相应的标量曲率为正（常值或非常值）或零。1963年 Lichnerowicz 证明：如果M是一个$4k$维旋结构流形，$\hat{A}[M]\neq 0$，则不可能存在一个度量，使得相应的标量曲率 $R\geqslant 0$，$R\not\equiv 0$，这是一个重要的贡献。进而，如果第一个 Betti 数非零，也不可能存在一个度量，使得 $R\equiv 0$（参阅 Kazden-Warner, "Prescribing Curvatures", § 5.4. 使得 $\hat{A}[M]\neq 0$ 的旋结构流形，详见 Atiyah 与 Hirzebruch 的文章)。Hitchin 证明了：一个怪球如果不是旋结构流形的边界，则不可能有产生正标量曲率的度量。

有一个密切相关的问题，是 R. Geroch 联系到广义相对论提出的：考察实坐标空间 $\boldsymbol{R}^n$ 上一个黎曼度量，在一个有界开集之外，这个度量与欧氏度量 δ_{ij} 一致；如果R处处非负，是否能推出这个度量是平坦的？此外，在那个开集上是否可以处处有$R>0$？（$R<0$的情形是可能的，见 Aubin 的工作）

3. **对 Ricci 曲率张量 $R_{ik}=\sum g^{jl}R_{ijkl}$ 的认识.** 如果一个紧致黎曼流形的 R_{ik} 恒为零，能否导出度量是平坦的？在这一点上，我们注意 Calabi 的猜想：任何 Kähler 流形，如果 $C_1=1$，则存在一个 Kähler 度量，使得 $R_{ik}=0$。

什么样的紧致流形具有一个度量，使得相应的 Ricci 曲率为正定（或负定）？一个关键的结果是 Meyer 的经典定理：Ricci 曲率为正蕴涵基本群有限。现在举一些例子，流形的 Ricci 曲率为负。Nagano 和 Smyth 讨论复维数 $n\geqslant 3$的 Abel 簇的非退化超平面截面，所得到流形的 Ricci张量几乎处处是负定的，因而据 Ehrlich 的一个定理，可以对度量加以形变，使得相应的 Ricci 曲率处处是负定的。但流形的基本群是$2n$阶的自由交换群，万有覆盖空间不可收缩为一点，所以这个流形不可能具有产生非正截面曲率的度量。丘成桐曾证明：两个常值

① 感谢陈省身，J. Nitsche, J. O'Sullivan, N. Wallach 和丘成桐提供了有益的建议和参考文献.——原注.
② 这个问题可能是在1843年由 Delaunay 第一次提出的.——原注.

非正曲率流形的连通和可以有一个度量，产生负的 Ricci 曲率。当维数≥3时，它的万有复盖空间仍然不可收缩为一点。现在不晓得球面 S^3 或环面 $S^1\times S^1\times S^1$ 上是否存在产生负 Ricci 曲率的度量。详情请看 Bochner-Yano, Fischer-Wolf, Kobayashi, Milnor, 丘成桐的文章.

4. **正截面曲率的流形。**对于截面曲率 $K=\sum R_{ijkl}u^iv^ju^kv^l$ 全为正的紧致黎曼流形，尽管 Synge, Ranch, Berger, Gromoll, Cheeger, Wallach 及其他人已做出重要的工作，依然留下许多没有解答的问题，这样的流形拓扑上能否分解为空间的直乘积？例如，乘积 $S^m\times S^n\,(m,n\geq 2)$ 是否有产生严格正截面曲率的度量？（当然，这个流形有一个产生正 Ricci 曲率的度量。）如果流形 M 和 N 都是奇维的，那么乘积空间 $M\times N$ 的欧拉数为零，并具有两个线性无关的向量场 u，v，这两个场是交换的：$[u,v]=0$。于是下列两个问题就和刚才提到的问题有关系。

任何一个具有正截面曲率的紧致流形能否具有两个线性无关的交换向量场？Lima 证明了 S^3 并没有这样的两个向量场，但是对 S^7，S^{11}，……，相应问题仍未解决。

是否每一具有正截面曲率的偶维紧致流形都有正的欧拉数？在 4 维情形，可以用广义的 Gauss-Bonnet 公式给予证明（参阅陈省身文章）。但是类似的论证在 6 维情形不成立，因为 Gauss-Bonnet 公式中的被积式在正截面曲率流形上某点处可能为负（见 Geroch 一篇未发表的文章）。

同样可以问，什么样的流形具有一个度量，使得相应的截面曲率小于零（或小于或等于零）（见 Eberlein 或 Wolf 的工作）。

（虞言林译　江嘉禾校）

参 考 文 献

A. D. Aleksandrov, *Uniqueness theorems for surfaces in the large*. V, Vestnik Leningrad. Univ. 13 (1958), no. 19, 5-8; English transl., Amer. Math. Soc. Transl. (2) 21 (1962), 412—416. MR 21*909, 27*698e.

S. Aloff and N. Wallach, *An infinite family of compact simply-connected positively curved 7-manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. 81 (1975), 93—97.

M. Atiyah and F. Hirzebruch, *Spin-manifolds and group actions*, Essays on Topology and Related Topics (Mém. Dédiés á Georges de Rham), Springer, New York, 1970, pp. 18—28. MR 43*4064.

T. Aubin, *Métriques riemanniennes et courbure*, J. Differential Geometry 4 (1970), 383—424. MR 43*5452

R. L. Bishop and R. J. Crittenden, *Geometry of manifolds*, Pure and Appl. Math, vol. 15, Academic Press, New York, 1964. MR 29 *6401.

K. Yano and S. Bochner, *Curvature and Betti numbers*, Ann. of Math. Studies, no. 32, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1953. MR 15, 989.

E. Calabi, *On Kahler manifolds with vanishing canonical class*, Algebraic Geometry and Topology (A Sympos. in Honor of S. Lefschetz), Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1957, PP. 78—89. MR 19, 62.

J. Cheeger, *Some examples of manifolds of nonnegative curvature*, J. Differential Geometry 8 (1973), 623—628. MR 49 *6085.

J. Cheeger and D. Gromoll, *On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature*, Ann. of Math. (2) 96 (1972), 413—443. MR 46 *8121.

S. Chern, *On curvature and characteristic classes of a Riemann manifold*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 20 (1955), 117—126. MR 17, 783.

C. Delaunay, *Mémoire sur le calcul des variations*, J. Ecole Polytech. 17 (1843), 37—120 (See P. 111).

P. Eberlein, *Some properties of the fundamental group of a Fuchsian manifold*, Invent. Math. 19 (1973), 5—13.

P. E. Ehrlich, *Local convex deformations of Ricci and sectional curvature on compact Riemannian manifolds*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 27, Part I, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1975,

PP. 69—71.
H.I.Eliasson, *On variations of metrics*, Math.Scand.29(1971),317—327.MR 47 *985.
A.E.Fischer and J.E.Marsden, *Manifolds of Riemannian metrics with prescribed scalar curvature*, Bull.Amer.Math.Soc.80(1974),479—484.MR 49 *11561.
A.E.Fischer and J.A.Wolf, *The Calabi construction for compact Ricci flat Riemannian manifolds*, Bull.Amer.Math.Soc.80(1974),92—97.
R.Geroch, *General relativity*, Proc. Sympos.Pure Math., vol.27, part II, Amer.Math.Soc., Providence, R.I., 1975, PP.401—441. (see Conjecture 3).
D.Gromoll, W.Klingenberg and W.Meyer, *Riemannsche Geometrie im Grossen*, Lecture Notes in Math., no.55, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1968.MR 37 *4751.
N.Hitchin, *The space of harmonic spinors*(to appear)(see Chap.4, Section 3).
H.Hopf, *Uber Flachen mit einer Relation zwischen den Hauptkrummungen*, Math.Nachr.4(1950),232—249.MR 12, 634.
M.Jellett, *Sur la surface dont la courbure moyenne est constante*, J.Liouville 18(1853),163—167.
J.L.Kazdan and F.W.Warner, *Scalar curvature and conformal deformation of Riemannian structure*, J.Differential Geometry(to appear).
J.L.Kazdan and F.W.Warner, *Prescribing curvatures*, Proc.Sympos.Pure Math., vol.27, Part II, Amer, Math.Soc., Providence, R.I., 1975, PP.309—320.
——, *Existence and conformal deformation of metrics with prescribed Gaussian and scalar curvatures*, Ann.of Math.(to appear).
S.Kobayashi, *On compact Koehler manifolds with positive definite Ricci tensor*, Ann.of Math. (2) 74 (1961),570—574.MR 24*A2922.
A.Lichnerowicz, *Spineurs harmoniques*, C.R.Acad. Sci. Paris 257(1963),7—9.MR 27*6218.
E.Lima, *Commuting vector fields on S^3*, Ann.of Math.(2)81(1965),70—81.MR 30*1517.
J.Milnor, *A note on curvature and fundamental group*, J.Differential Geometry 2(1968),1—7.MR 38 *636.
T.Nagano and B.Smyth, *Minimal varieties in tori*, Proc.Sympos.Pure Math, vol.27, Part I, Amer. Math.Soc., Providence, R.I., 1975, PP, 189—190.
J.Plateau, *Statique experimentale et thèorique des liquides*,Gauthier-Villara, Paris, 1873.(see Vol.1, P.438).
N.S.Trudinger, *Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Ann.Scuola Norm.Sup.Pisa(3)22(1968),265—274.MR 39*2093.
N.Wallach, *Compact homogeneous Riemannian manifolds with strictly positive curvature*, Ann.of Math. (2)96(1972),277—295.MR 46*6243.
J.A.Wolf, *Growth of finitely generated solvable groups and curvature of Riemannian manifolds*, J. Differential Geometry 2(1968),421—446.MR 40*1939.
H.Yamabe, *On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Osaka Math.J.12(1960), 21—37.MR 23*A2847.
S.T.Yau, *Compact flat Riemannian manifolds*, J.Differential Geometry 6(1971/72),395—402. MR 46 *4439.

XVI 奇点的研究.

(A) 解析集的分层结构 (R.Thom).

给定一个由理想J所确定的解析集A，确定微分算子Δ（生成并推广 Boardman 符号)的极小族，使得，如果从J出发，考虑把所有$\Delta(f_1,\cdots,f_r)$（这里$f_j\in J$）型函数加到J而得的扩张，就能得到一族子集 $A\Delta\subset A$，确定A的极小分层结构。

(B) 可微映射的奇点 (R.Thom).

（1）如果$f(x)$ ($x\in \boldsymbol{R}^n$)是原点$O\in \boldsymbol{R}^n$的某个邻域U中的实解析函数，则向量场$X=$ grad f的每一条趋于原点O的轨线在该点都有切向量。

（2）如果O是f的复化 (Complexification) 的孤立奇点，它的 Milnor 数为μ，则存在f的一个形变（加上坐标的线性形式?)，恰好有μ个实的非退化二次临界点。

（3）更一般的问题：当给定实解析函数 f 的孤立奇点的复型时，考虑 f 的形变，其中的函数皆为 Morse 函数，确定所有这种形变的临界点的型数（Signature）。

（4）**猜测**．考虑函数的孤立奇点，其万有展开（universal unfolding）的每一个层在实的情形是可收缩的，而在复的情形则是一个 $K(\pi,n)$。

（5）**猜测**．任何（复）解析集都局部同胚于一代数集。

（6）**问题**．用无穷维流形来实现 Eilenberg-MacLane 空间 $K(\pi,n)$，使得基本的上同调类 $c\in H^n(K,\pi)$ 是余维为有限数 n 的某个分层集的基本闭链的 Poincaré 对偶。

（C）Pfaff 系统（R. Thom）．

（1）令 G_p^n 是底空间为 R^n 的纤维丛：在一点处的纤维由过该点的所有 p 维平面组成；一个截面 σ：$R^n\to G_p^n$ 就是一个 p 维平面场．令 $j^r(\sigma)(x_0)$ 记 σ 在 x_0 处的 r 阶导束(jet)．考虑保持 x_0 不动的 R^n 的局部自同构，所有这种局部自同构的 r 阶导束构成一个群，记为 $L^r(n)$，截面 σ 的所有 r 阶导束构成的空间记为 $J^r(\sigma)$，群 $J^r(n)$ 代数地作用在空间 $J^r(\sigma)$ 上．试确定（并构造）上述作用在 $J^r(\sigma)$ 中所定义的分层结构 Σ。

（2）**猜测**．每一个 p 维的 Pfaff 系统都是由某个截面 σ 确定的．如果导束 $j^r(\sigma)$ 局部横截于 Σ，则（从该系统在给定维数的解的芽存在来看）该系统的局部性质由 σ 的 r 阶导束完全决定。

（D）热力学函数在临界状态下的解析性质（B. Арнольд）．热力学函数是藉助于某种极限过程由粒子的相互作用势确定．**假定粒子的相互作用势已知，求这些函数的奇点**．这是一个非常困难的分析问题．对于一般的势（generic potential），甚至三维 Ising 格子模型这样简单的模型，问题的解答均属未知。

（E）计算 l 个参数的函数族中最难处理的一般奇点（generic singularities）**的阶数**（B. Арнольд）．对每一个整数 $l>0$，存在一个有理数 β_l，描述 Airy 函数的 l 维推广的渐近性质，以及在 l 个参数的函数族中最难处理的一般奇点的单值性（monodromy）。

关于最难处理的奇点的阶数 β_l，其精确定义见 Remarks on the stationary phase method and Coxeter numbers, Russian Math Surveys, 1973, No. 3, 17—44．β_l 的前 10 个值是1/6，1/4，1/3，3/8，5/12，1/2，1/2，13/24，9/16，2/3．乐观一点，问题可提为：**求所有的 β_l**；悲观一点，则可提为：**求 β_{1000}**。

这个问题是"奇点分类"这个基本但又笼统的问题的一种精确提法。

（F）分岔子集的拓扑性质（B. Арнольд）

分岔子集是导束上的光滑函数或全纯函数空间中的子集．有两个分岔子集．一个函数属于第一个（或第二个）子集，如果它不是 Morse 函数（如果0是临界值）。

对于（函数以及一般的可微映射的）**分岔子集，研究其补集的拓扑性质**似乎是很有意思的．在具有 A_k，D_k，E_k 型单临界点的全纯函数附近，这两个分岔子集的补集，其局部伦型与 $K(\pi,1)$ 空间相同（Brieskorn, Deligne, Ляшко 等）．就 A_k 这个最简单的情形而言，补集的上同调就是三维球面的第二闭路空间的上同调（G. Segal, D. Fuks）．另一方面，对于实的情形，伪同痕（Pseudo-isotopy）的分岔子集的拓扑结构和代数 K 理论之间存在某些有趣的关系（Cerf, Wagoner, Володин 等）．参看 Thom 在流形会议（Manifold, Amsterdam, 1970, Lecture Notes No. 197, Springer 1971）上的演讲。

（李培信译　江嘉禾校）

XⅦ动力体系和微分方程。

（A）定性动力学（R.Thom）

猜想. 设M^n是紧致微分流形，$\boldsymbol{X}^r(M)$是M^n上向量场组成的Frechet空间，具有C^r拓扑。存在一个稠密开子集$U\subset\boldsymbol{X}^r(M)$，使得：如果$\xi$是$U$中的向量场，那末$\xi$的轨线中几乎每条都以一个吸引子（attractor）A作为ω极限集，并且这些吸引子中每一个（但不是它们构成的集合）在拓扑上都是结构稳定的。

（B）平稳点的稳定性问题是否是算法上可判定的？（B.Арнолд）著名的ляпунов定理对于特征值全都具有非零实部的情况解决了这个问题。对于更复杂的情形，稳定性依赖于Taylor级数的高次项，则不存在**代数**判别法。

设一个向量场是由某些多项式给出，次数固定，系数是有理数。那末，是否存在一种算法，可以判定平稳点是否稳定？

一个类似的问题：是否存在一种算法，可以判定一平面多项式向量场是否有极限环？

一个典型的问题：是否存在一种算法，可以判定一个给定的Abel积分的周期点是否为正？（曲线方程和被积函数都具有有理系数和固定的次数）最简单的典型问题是：在实直线上关于指数函数以及多项式函数的乘积之和的正性问题。这个问题存在一个算法，来自Hilbert关于超越数问题的解（Матиясевич）。

（C）证明非位能极小点的平衡状态的不稳定性（B.Арнолд）。运动方程是Newton方程$X''=-\partial U/\partial x$，其中解析位能$U$定义在$n$维实空间上。问题来源于Lagrange和Dirichlet，他们证明了极小点是稳定的。不稳定性似乎是显然的，但是，对于无限可微的位势，并不总是如此。

（D）动力体系和天体力学的问题（S.Smale）。

（1）紧致流形的任何扩张映射（expanding map）是否都是由幂零李群的自同构诱导出来的？

扩张映射f：$M\to M$的特性是：存在常数$c>0,\lambda>1$，使得对于M中每个x，对于所有正整数n，以及x处的所有切向量V，都有$\|Df^n(x)(V)\|\geqslant c\lambda^n\|V\|$。这里，$Df^n(x)$是$f$在$x$处的第$n$重导数。

例如，对于绝对值为1的复数Z定义的映射$Z\to Z^2$就是这种映射。更一般地，如果N是连通幂零李群，Γ是一个离散子群，使得N/Γ紧致，g：$N\to N$是自同构，使得$g\Gamma\subset\Gamma$并且$\|Dg(e)^{-1}\|<1$，其中e是单位元，那末，$\tilde{g}$：$N/\Gamma\to N/\Gamma$是扩张映射（对第一个例子取$N=R$，$\Gamma=Z$，g为乘以2的运算）。问题变成：是否每个这种类型的扩张映射都可以作为一个有限覆盖；或给定扩张映射f：$M\to M$，对于某个如下图表所示的可换自同构$\tilde{g}$：$N\to N$诱导出来的g

$$\begin{array}{ccc}
\widetilde{M} & \xrightarrow{h'} & N/\Gamma \\
\downarrow{\scriptstyle \widetilde{f}} & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{g}} \\
\widetilde{M} & \xrightarrow{h} & N/\Gamma
\end{array}$$

是否存在到具有同胚h的M的提升$\widetilde{f}$：$\widetilde{M}\to\widetilde{M}$。

上述问题的主要参考资料是 Shub 的[7]，进一步的背景材料和部分结果见[1]中 Frank，Hirsch 和 Shub 的文章。

这个问题在许多剖析公理A动力体系的非游荡集结构的问题中是居首位的问题。这一方向的另一问题是发现紧致流形的每个 Аносов 流形是否是 Jemter[1] 意义下的诱导李群。

（2）"封闭引理问题"（Closing Lemma）。周期点在非游荡集中稠密，这是否是紧致流形上离散动力体系的一般性质？

用微分同胚$M\to M$表示M上的离散动力体系，设 $\mathrm{Diff}(M)$ 是 C^∞ 微分同胚构成的空间，具有 C^∞拓扑. $f\in \mathrm{Diff}(M)$的**一般性质**，是指对于 $\mathrm{Diff}(M)$ 中的 Baire 集为真的性质。

点 $x\in M$ 在 $f\in \mathrm{Diff}(M)$ 的**非游荡集** $\Omega=\Omega(f)$ 中，是指对 x 的任意邻域U，存在某个正整数 n，使得 $f^n(U)\cap U\neq\phi$。

如果用 C^1代替 C^∞，Pugh 给出一个肯定的回答[6]。

（3）Ω 稳定性是否蕴涵公理A？这个问题如果有肯定的答案，就能解决寻求动力体系结构稳定或Ω稳定的充要条件问题。

我们说，$f\in \mathrm{Diff}(M)$ 是 Ω 稳定的，如果存在 f 在 $\mathrm{Diff}(M)$ 中的某个邻域 $N(f)$，使得：如果 $g\in N(f)$，则有同胚 h 使得

$$\begin{array}{ccc}\Omega(f) & \xrightarrow{h} & \Omega(g)\\ \downarrow f & & \downarrow g\\ \Omega(f) & \xrightarrow{h} & \Omega(g)\end{array}$$

换言之，f 是Ω稳定的，如果在非游荡集上挠动具有同样的动力结构。这个条件比结构稳定性要弱一些。

公理A要求：周期点在Ω中是稠密的，并且Ω有双曲结构。Ω上（关于 $f\in \mathrm{diff}(M)$）的一个**双曲**结构，是指把M在Ω上的切丛分解为子丛 E^s 和 E^u 之和的结构，具有下面性质：在 E^u 上 Df 是问题(1)中那样的扩张映射（即 $x\in\Omega$ 而 $V\in E^u$），并且 Df^{-1}在 E^s 上是扩张映射。当初，在作技术性试探时，双曲性是动力体系中统一思想的重要概念。关于这一问题的背景材料，见[1,2,5]。

（4）三维球 S^3是否具有（由 C^∞向量场定义的）光滑流的极小集结构？

S^3**是极小集**，如果流的每条轨线是稠密的。上述问题可以推广为：什么样的紧致流形可能是极小集？当然 Euler 示性数必须为 0。对于离散流及 C^0 流也可提出同样的问题，背景材料见 Gottschalk[3]。

（5）吸引周期轨道是否具有二维球 S^2的微分同胚的一般性质？（[8]）。

（6）天体力学的 n 体问题中的相对平衡状态问题。

假设在平面 n 体问题中给了正质量 $m_1,\cdots,m_n$。设 $x_1,\cdots,x_n$ 是平面上 n 个点，两两不相同，构形 $(x_1,\cdots,x_n)$ 称为相对平衡状态，如果这 n 个物体以某个常值角速度的旋转运动满足 Newton 方程。两个相对平衡状态如果相差一个旋转或一个正标量积，则看成是相同的。Wintner 提出的一个老问题是：对任何 n 个质量，至多存在有限个相对平衡状态？为了阐述进一步的问题，我们提出[9]中的一个命题：

命题．设 $m=(m_1,\cdots,m_n)$ **及** V_m: $S_k-\Delta\to R$ **是位能** $V_m(x_1,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i>j} i/\|x_i-x_j\|$**在残球**

$$S_k-\Delta=\left\{(x_1,\cdots,x_n)\in\frac{(E^2)^*}{\sum m_i\|x_i\|^2}=1,\ x_i\neq x_j,\ \sum m_i x_i=0\right\}$$

上的限制. 设$\widetilde{V}_m$: $(S_k-\Delta)/SO(2)\to R$ 是旋转群在商空间上诱导出来的函数，于是，相对平衡状态自然与$\widetilde{V}_m$的临界点成一一对应。

$(m_1,\cdots,m_n)$称为临界质量，如果$\widetilde{V}_m$有蜕化的临界点（即$\widetilde{V}_m$不能是Morse 函数）。

问题. $(R^+)^m$中临界质量组成的(闭)集$\sum_n$有什么性质？它的测度是否为零？它的Betti 数是否有限？Palmere 已证明$\Sigma_3=\phi$，$\Sigma_4\neq\varnothing$。

（曹 义译 江嘉禾校）

参 考 文 献

[1] S.S.Chern and S.Smale(Editors), *Global analysis*, Proc.Sympos.Pure Math., vol.14, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970.MR 41*7686.

[2] J.Franks, *Differentiability Ω-stable diffeomorphisms*, mimeographed, Northwestern University.

[3] W.Gottschalk, *Minimal Sets, An introduction to topological dynamics*, Bull. Amer. Math. Soc.64 (1958), 336—351.MR 20*6484.

[4] J.Palmore, Thesis, Univ.of.California, Berkeley, 1973.

[5] M.Peixoto(Editor), *Dynamical systems*(Proc.Sympos., Bahia, Salvador, Brazil, 1971), Academic Press, New York and London, 1973.MR 48*1255.

[6] C.Pugh, *An improved closing lemma and a general density theorem*, Amer.J.Math.89 (1967), 1010—1021.MR 37*2257.

[7] M.Shub, *Endomorphisms of compact differentiable manifolds*, Amer.J. Math.91 (1969), 175—199.MR 39*2169.

[8] S.Smale, *Dynamical systems and the topological conjugacy problem for diffeomorphisms*, Proc. Internat.Congress Math.(Stockholm, 1962), Inst.Mittag-Leffler, Djursholm, 1963, PP.490—496.MR 31 *759.

[9] ——, *Topology and mechanics*.I, II, Invent.Math.10(1970), 305—331; ibid.11 (1970), 45—64. MR 46 *8263; 47*9671.See also, *Problems on the nature of relative equilibria in celestial mechanics*, Manifolds-Amsterdam 1970(Proc.Nuffic Summer School), Lecture Notes in Math, vol.197, Springer-Verlag, Berlin, 1971, PP.194—198.MR 43*4429.

[10] A.Wintner, *The analytical foundations of celestial mechanics*, Princeton Math.Ser., vol.5, Princeton Univ.Press, Princeton, N.J., 1941.MR 3, 215.

XVⅢ几何拓扑（L.C.Siebenmann）。

（Ⅰ）Poincare 猜测. 每一个同伦等价于n维球面S^n的紧致n维流形必与S^n同胚。

评注. 这个猜测在$n\neq3$，4时已由Smale，Stallings 和 Newman 在1959—1965年证出。$n=3$这个经典情形，自30年代以来屡攻不克。$n=4$的情形，甚至对可微的C^∞流形依然未被触及。

参阅[6]，[8]。

（Ⅱ）Hilbert 方块猜测。

（1）Hilbert 方块 Q=$[0,1]^\infty$是唯一齐性可缩为一点的无穷维度量紧致统（齐性是指对于Q中任意两点x,y，必有把Q映成自身的一个同胚，将x变为y）。

（2）Hilbert 方块的每一收缩核都是这个方块的直因子。

评注. (i)第一个猜测是为了探索第二猜测而提出的，至今仍然不可捉摸，这种情况正如与之有关的Borsuk 猜测：每一齐性 ANR（绝对邻域收缩核）都是一个流形，模型可以有

下列三种：R^n（n 维欧氏空间），$Q=[0,1]^\infty$，l_2（Hilbert 空间）。

(ii) 从 J. West 和 T. Chapman 的结果可以得到猜测(2)的一个推论：每一紧致 ANR X 都具有有限同伦型（Borsuk 1954年的猜测）。事实上，存在一个有限单纯复合形 K，使得 $X\times Q$ 与 $K\times Q$ 同胚。最近 H. Torunczyk 证明：Hilbert 空间 l_2 的每一收缩核都是 l_2 的直因子。

参阅[1]，[3]，[9]。

（Ⅲ）**构造新的4维流形。** 本世纪的研究未能给出流形分类的概貌，问题就在时空维数，即 4 维的情形。

(a) 是否存在一个光滑（C^∞ 可微）的 4 维流形，同伦等价于 $S^3\times S^1$，但不微分同胚于 $S^3\times S^1$？

(b) 是否存在一个不是 C^∞ 可微的 4 维流形？特别，是否存在一个 4 维闭① 拓扑流形 M^4，它的示性类满足下列条件： $w_1=w_2=0$，$\frac{1}{3}p_1\equiv 8 \pmod{16}$？

关于(b)的评注。 В. А. Рохлин证明：对于任意 4 维光滑闭流形，如果 $w_1=w_2=0$，则有 $\frac{1}{3}p_1\equiv 0 \pmod{16}$。关于拓扑流形 M^4，曾经设想：或者 M^4 不可剖分为单纯复合形，或者经典的 Poincaré 猜测被剖分后的 M^4 中某顶点的环绕复形所否定。

(c) 4维闭光滑流形可以有什么样的上同调环？（可以假定流形是单连通的，即 $\pi_1=0$）。

参阅[4]，[5]，[7]。

（Ⅳ）**剖分猜测：每一（有限维可度量化的）拓扑流形都同胚于一个单纯复合形。**

评注。 把流形映成单纯复合形的同胚映像叫做一个剖分。1924年，T. Rado 证明：维数 $\leqq 2$ 时剖分猜测是对的；1951年 E. Moise 证明了 3 维情形，对于 n 维拓扑流形 M^n，$n\geqslant 5$（$n=5$ 时无边），Kirby 和 Siebenmann 在1968—1969年找到把 M 剖分成组合流形（分片线性齐性的单纯复合形）的唯一一个障碍，即 $H^4(M,Z_2)$ 中一元素。在考察这个障碍不为 0 的一些例子后，人们很快发现，如果剖分猜测成立，则存在一个光滑的同调 3 维球 M^3（光滑的紧致 3 维流形，与 S^3 有相同的整系数同调群），使得

(i) 双同纬 Σ^2M^3（M^3 与圆周 S^1 的统联）同胚于 S^5（对于除了 S^n 以外的任何光滑 n 维同调球 M^n，现在还不知道 Σ^2M^n 是否同胚于 S^{n+2}）。

(ii) Milnor 连通和 $M\#M$（保持定向）是一个光滑的 n 维同调圆盘的边界。

(iii) M 本身是一个紧致光滑 4 维流形的边界，这个流形的示性类满足下列条件：$W_1=W_2=0$，$\frac{1}{3}p_1\equiv 8 \pmod{16}$（现在还不知道是否存在同时满足($ii$)，($iii$)的光滑 3 维同调球。如果 G 是关于正十二面体的60个转动构成的群，则 $SO(3)/G$ 满足(iii)）。

找到一个满足(i)—(iii)的光滑 3 维同调球之后，再去证明剖分猜想，才是一个合理的任务。

见文献[7]。

（虞言林译　江嘉禾校）

（未完待续）

① 闭流形是指没有边界的紧致流形。——原注。

参 考 文 献

[1] R.D.Anderson and Nelly Kroonenberg, *Open problems in infinite dimensional topology*, mimeographed, Lousiana State U., Baton Rouge, 1973.

[2] S.Cappell and J.L.Shaneson, *On four-dimensional surgery and applications*, Comment. Math. Helv. 46 (1971), 500—528. MR 46*905.

[3] A.Fathi and Y.Visetti, *A reduction of the fundamental conjecture Pbout ANR's* proc. Amer. Math. Soc. (preprint Orsay 1973).

[4] J.Milnor and M.Kervaire, *Bernoulli numbers, homotopy groups and a theorem of Rohlin*, Proc. Internat. Congress Math. (Edinborough 1958), Cambridge Univ. Press, New York, 1960, PP. 454—458. MR 22*12531.

[5] J.Milnor, *On simply connected 4-manifolds*, Sympos. Internacional Topologiá Algebraica, Universidad Nacional Autónoma de México and UNESCO, Mexico City, 1958, PP. 122—128. MR 21*2240.

[6] ——, *Lectures on the h-cobordism theorem*, Math. Notes, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1965. MR 32*8352.

[7] L. Siebenmann, *Topological manifolds*, Proc. Internat. Congress Math. (Nice, 1970), vol. 2, Gauthier-Villars, Paris, 1971, PP. 133—163.

[8] J.Stallings, *Group theory and 3-dimensional manifolds*, Yale Math. Monographs, no. 4, Yale Univ. Press, New Haven, Conn., 1971.

[9] H.Torunczyk, *Compact absolute retracts as factors of the Hilbert space*, Fund. Math.

与纯粹思维的创造性力量发挥作用的同时，客观世界也在起作用。从实践中提出新的问题，开拓新的数学分枝；而当我们力求征服纯粹思维王国中这些新知识领域时，我们常常会找到老的未解决问题的答案以及同时而来的老理论成功的新进展。

——D. Hibert

数学争鸣

迎接二十一世纪：对数学的需求*

James Glimm

由于经济及国家安全的原因，科学和技术的发达对我国的强盛是必不可少的。数学是科学和技术的重要组成部分。至少对廿世纪余下的年代来讲，科学计算、统计分析和非线性方程的理论探索将是生气勃勃的科学题材。在数学前沿取得的进展是科学向前挺伸的一部分。这种进展通常是由于数学内在矛盾的驱使，而不是由于特定应用需要而引起。

这里我们将讨论数学和科学技术的关系、数学内部近期发展的实力以及当前形势对数学展现的机会及问题。

数学和非数学科学的联系有能预见和不能预见两种。能预见的联系包括计算、统计和建立数学模型，这是数学大量领域的主要活动场所。流体力学计算机代码最初是由 Von Neumann, Richtmyer, Ulam 及其他在国家实验室及大学中工作的数学家发展起来的，数学家多年提供的科学支持，使这些代码得以发展、改进并得到应用。

建立数学模型是应用数学的一个基本活动。当方程未知、不充分或不完全能理解时，建立数学模型就十分必需。湍流、多相易变流 (multi-phase fluid flow) 及化学反应动力学都是需要更好建模的领域。非线性现象的特殊情形及其一般理论都还研究得很差。

统计在范围很广的问题中是很重要的，诸如从核反应堆的安全研究直到癌症病人的治疗评估。

对不能预见的应用很难刻划，它们从数学的普遍性及生命力中涌现出来。最近的例子包括数论在编译码中的应用，代数和拓扑在非线性 Yang-Mills 场的自对偶解的分类中的应用以及同伦论对晶体疵瑕分类的应用。不能预见的应用有时可能是高度重要的，甚至可能展现部分科学前景的翻新，Wiener 的预报理论就是这样，它已成为现代石油地震学的基础。

展望未来，我国一定会遇到技术中的新要求。历史给我们的训诫是新的技术必然要求新的数学，这个训诫的推论是卓越的技术必然要求卓越的数学。

科学的每一个分枝都需要有自己的目标，没有一门学科只起服务作用就能繁荣。这就是说，数学既是科学的侍女又是它的皇后。数学主要是由它自己选择的目标所驱动的，由于各种机会，这些选择最终将导致不能预见的应用，同时也直接影响到数学作为整体的兴旺与活

* 原题 "Towards the 21st Century, The mathematical Challenge"，原载 *SIAM News*, January, 1983.