数论与拓扑：一段“挠曲”的关系

Nicolas Bergeron

我们对于自然数，或者更一般地说对有理数是熟悉的，然而它们不足以求解所有多项式方程．因此，长期以来我们习惯于将“数”的概念扩及代数数．我们将探讨其中最简单的一类，即二次无理数．对后者的了解已相当深入，但是全体代数数的世界仍十分神秘，而 Kronecker (克罗内克) 的梦想是透过一些自然的解析函数予以显式的描述，这一梦想迄今只实现了一小部分．最近这一梦想大拓疆域：某些“双曲”空间的拓扑开始起作用．特别是，现在知道一些*挠* (*torsion*) 同调类可用于描述某一型代数数．而且数论与几何的某些类比表明这样的挠类相当之多！

1．二次无理数

著名的公式

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

将二次多项式方程

$$aX^2+bX+c=0 \quad (a,b,c \in \mathbb{Q}) \tag{1}$$

的解表达成*判别式* (*discriminant*) $D=b^2-4ac$ 的平方根 $\sqrt{D}$ 的有理函数．Plato (柏拉图) 在对话录《泰阿泰德篇 (Theaetetus)》中将以下发现归于年轻的 Theaetetus (泰阿泰德): 若 D 为自然数，则除非 D 是整数的平方，否则 $\sqrt{D}$ 必为无理数．于是判别式的平方根起初被视为求方程 (1) 有理解的一个障碍．然而一如后来发生在复数上的情形，平方根 $\sqrt{D}$ 很快就从一个单纯的障碍被拔擢到*数* (*nombre*) 的地位．这是代数数论的滥觞．

二次无理数 (*irrationnel quadratique*), 或者二次代数整数，不外是二次多项式 (1) 当 $a=1$ 而 b,c 为整数时的根．如果 d 是整数，或正或负，无平方因子，对之可赋予一个特别的二次无理数 τ_d: 若 d 模 4 余 1, 则 $\tau_d=\frac{1}{2}(1+\sqrt{d})$, 否则 $\tau_d=\sqrt{d}$. 这是代数整数：第 1 种情形下 τ_d 是多项式 $X^2-X+\frac{1}{4}(1-d)$ 的根，而在第 2 种情形下 τ_d 是 X^2-d 的根．人们挑出这些代数整数是因为所有二次代数整数都可以表成 1 和某个 τ_d 的整系数线性组合．

一如 $\mathbb{Z}$, 由 1 和 τ_d 的整系数线性组合所成之集合

$$\mathbb{Z}[\tau_d]=\{a+b\tau_d : a,b \in \mathbb{Z}\}$$

译自：SMF-Gazette des Mathématiciens n°151, Janvier 2017, Théorie des nombres et topologie: une relation《tordue》, Nicolas Bergeron, figure number 3.

作者是法国第六大学教授，是算术流形的专家，尤其擅长拓扑和谱．他的邮箱地址是 nicolas.bergeron@imj-prg.fr.

对加，减，乘保持稳定；这叫做一个环，记为 $\mathcal{O}_d$. 所以每个二次无理数都属于某个 $\mathcal{O}_d$.

例 1 对应于 $d=-1$ 的环一般称为 *Gauss* (高斯) *整数* (*entiers*) 环. 它由实部虚部都是整数的复数所构成. 因此它们是由单位正方形组成的平面铺砌的顶点. 每个方形的面积都等于 $1=\frac{1}{2}\sqrt{|4d|}$.

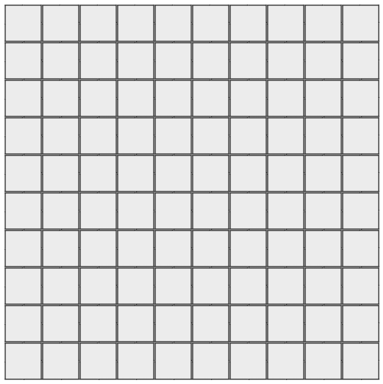

图 1

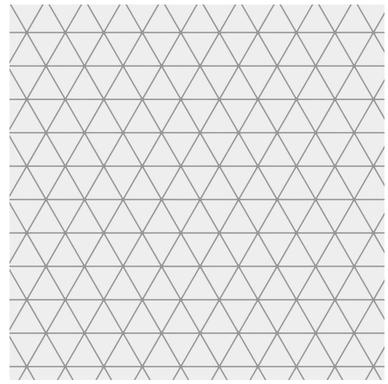

图 2

例 2 当 $d=-3$, 在 $\mathcal{O}_{-3}$ 中的复数是由正三角形组成的平面铺砌的顶点. 每个三角形的面积都等于 $\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{|d|}$.

我们称 $\mathcal{O}_d$ 的 *判别式* 为整数

$$D=\begin{cases} d & \text{若 } d\equiv 1 \pmod 4 \\ 4d, & \text{其它情形.} \end{cases}$$

这也是以 τ_d 为根的二次首一多项式的判别式；平方根 $\sqrt{|D|}$ 等于由 $\mathcal{O}_d$ 给出的平面铺砌其基本铺片面积的两倍.

我们既然有了一些新的环 (由复数组成), 就可以探究它们的结构. 我们特别感兴趣的是 $\mathcal{O}_d$ 的 *单位* (*unités*). 一般说来，一个由复数构成的环 A 中的单位意指一个 A 中的数 u, 使得逆元 $1/u$ 也属于 A. 在相对整数环 $\mathbb{Z}$ 中，单位是 ±1. 不难验证 $\mathcal{O}_{-1}$ 的单位是 ±1 和 $\pm i$ 这 4 个元素. 每个单位给出的乘法都诱导方形铺砌的一个 *对称* (*symétrie*). 同理, $\mathcal{O}_{-3}$ 有 6 个单位，它们也诱导三角铺砌的对称.

花絮 1 不可约元和类数

在一个由复数构成的环 A 中，如果一个元素既不是单位元，又不能写成 A 中两个非单位元之积，则称之为 *不可约* (*irréductible*) 的.

在相对整数环 $\mathbb{Z}$ 中，不可约元是 $\pm p$, 其中 p 是素数，而算术基本定理说每个严格大于 1 的自然数都能唯一地分解为素数之积. 我们也说 $\mathbb{Z}$ 是 *唯一分解环*.

取定无平方因子的整数 d, 判断 $\mathcal{O}_d$ 是不是唯一分解环是一个根本问题，并导向了 *理想* (*idéal*) 的概念. 例如在 $\mathcal{O}_{-5}$ 中有两种写法 $9=3\times3=(2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5})$ 将其分解为不可约元之积. 然而 9 生成的理想本身则能唯一地分解为素理想之积. 这导因于 3 生成的理想又能分解为理想 $(3,1+\sqrt{-5})$ 和 $(3,1-\sqrt{-5})$ 的积，两者皆是素理想却非 *主* (*principaux*) *理想*, 换言之无法由 $\mathcal{O}_{-5}$ 中单一的

元素来生成．在一个复数构成的环中，非主理想的存在性正是唯一分解性的障碍．一如既往，原先被视为阻碍的理想变成了数．这些数也可以相乘，并且包含"寻常的数"，即 $\mathcal{O}_d$ 的元素 1)，后者等同于它们生成的主理想．所有理想所成集合与主理想集的差异由一个有限群来估量，称作 **理想类群** (*le groupe des classes d'idéaux*)，其基数记为 h_d．因此整数 h_d 等于 1 当且仅当 $\mathcal{O}_d$ 是唯一分解环．

2．单位群

在 $\mathcal{O}_d$ 中的单位集 $\mathcal{O}_d^\times$ 对乘法和取逆保持稳定，我们说它构成 $\mathbb{C}^\times$ 的子群．每个交换群 H 都分解为同构于 $\mathbb{Z}^r$ 的自由交换群和一个有限群之积 2)

$$H = H_{\text{自由}} \times H_{\text{挠}},$$

后者称为它的 **挠部分** (*partie torsion*)．

群 $\mathcal{O}_d^\times$ 根据 d 的正负而有很大不同．如果 d 严格正，则群 $\mathcal{O}_d^\times$ 无穷，它的自由部分同构于 $\mathbb{Z}$，而挠部分同构于 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，等于 ± 1．相反地，如果 d 严格负，群 $\mathcal{O}_d^\times = (\mathcal{O}_d^\times)_{\text{挠}}$ 是由 $\mathcal{O}_d^\times$ 中所有单位根组成的有限 (循环) 群；它的基数当 $d=-1$ 时等于 4，当 $d=-3$ 时等于 6，在其它情形等于 2．

当 d 严格正时，群 $\mathcal{O}_d^\times$ 因而等于

$$\{\pm\varepsilon_d^n : n \in \mathbb{Z}\},$$

其中 $\varepsilon_d \in \mathcal{O}_d^\times$ 是严格大于 1 的极小单位；称作 **基本单位** (*unité fondamentale*)．确定 ε_d 本质上相当于解 Pell-Fermat (佩尔 – 费马) 方程；见花絮 2．然而 ε_d 相对于 d 的性状仍是相当神秘的．其大小，或确切地说是 $\ln\varepsilon_d$，称为 $\mathcal{O}_d$ 的 **调整子** (*régulateur*)．

花絮 2　Pell-Fermat 方程

这是以 $(X,Y)\in\mathbb{Z}^2$ 为未知量的方程

$$X^2 - dY^2 = \pm 1.$$

解此方程基本上相当于确定 ε_d．例如 $\varepsilon_2 = 1+\sqrt{2}$ 对应于方程 $X^2-2Y^2=\pm 1$ 的最小解 $(X,Y)=(1,1)$．

归于 Archimedes (阿基米德) 的 **群牛问题** (*problème des boeufs*) 暗示着 Pell-Fermat 方程的研究古已有之．但无论如何 Pell 都与此无关．即便 Fermat 对此确有研究 —— 他曾就特例 $d=61$ 向英国数学家提出挑战 —— 首个确定 "Pell-Fermat 方程" 解集合的一般方法应当归于 12 世纪的印度数学家 Bhaskara (婆什迦罗)．此外，Bhaskara 选择特例 $d=61$ 来演示其方法．这不只是巧合：尽管这点并不明显，从方程 (2) 可以推得除了判别式 D，影响 ε_d 大小最重要的因素是 h_d^{-1}，而 $h_{61}=1$ 正好极小．因此 "摸索" 方程 $X^2-61Y^2=\pm 1$ 的最小解是格外冗长的 (相对于 d 的大小)．显然 Fermat 并不打算便宜他的英国 "朋友" 们．

1) 精确到乘以单位.—— 译注
2) 一般要求 H 是有限生成交换群．可以证明 $\mathcal{O}_d^\times$ 总是有限生成的.—— 译注

当 $d=2$ 时 $\ln\varepsilon_2$ 有一个漂亮的解析表达式，读者可以用计算器来作实验 “检验” 之：

$$\frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\cdots+\pm\frac{1}{n}+\cdots,$$

其中 n 跑遍奇数，而 $\frac{1}{n}$ 前面的符号当 $n\equiv 1$ 或 $7 \pmod 8$ 时为正，当 $n\equiv 3$ 或 $5 \pmod 8$ 时为负. 对一般的 ε_d 也有类似表达式，但它涉及类数 h_d (见花絮 1), 这是 Dirichlet (狄利克雷) 的 类数公式 (*formule du nombre de classes*).

- 当 d 严格正时，我们有

$$h_d\cdot\frac{\ln\varepsilon_d}{\sqrt{D}}=\sum_{n>0}\pm\frac{1}{n},\tag{2}$$

  其中 n 跑遍与判别式 D 互素的整数集，而符号 $\pm$ 只和 n 模 D 的余数相关.

- 当 d 严格负时不再有调整子，但这时 $(\mathcal{O}_d^\times)_{\text{挠}}$ 可能更大. 我们得到：

$$\frac{h_d}{\left|(\mathcal{O}_d^\times)_{\text{挠}}\right|\cdot\sqrt{D}}=\sum_{n>0}\pm\frac{1}{n}.\tag{3}$$

借助公式 (3), 可以证明当 d 趋近 $-\infty$ 时 h_d 趋近于无穷. 特别地，仅存在有限多个严格负的 d 使得 $\mathcal{O}_d$ 是唯一分解环. 相反地，我们仍不知是否有无穷多个 $d>0$ 使得 $h_d=1$. 事实上，当 d 趋近 $+\infty$ 时，很难在 (2) 中分离 h_d 与调整子 $\ln\varepsilon_d$ 的贡献.

3. 矩阵推广

单位群 $\mathcal{O}_d^\times$ 与 $\mathrm{GL}_1(\mathcal{O}_d)$ 相同. 推而广之，透过考察矩阵群 $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_d)$ 可以继续探索 $\mathcal{O}_d$ 的结构. 给定群 Γ, 可定义一个交换群如下，称为它的交换化，是商

$$\Gamma^{\mathrm{ab}}=\Gamma/\left\langle xyx^{-1}y^{-1}\,\middle|\,x,y\in\Gamma\right\rangle.$$

对群 $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_d)^{\mathrm{ab}}$ 的考察导向了 $K-$ 理论中与环 $\mathcal{O}_d$ 相系的群，其中第一个群本质上捕捉了 Gauss 消元法在何种程度上能施于 $\mathcal{O}_d$ 上矩阵. 简单起见在此只讨论 2×2 矩阵，然而另加同余条件. 换言之，我们不只针对群 $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_d)$, 还更广泛地对考虑以下子群的交换化

$$\Gamma_0(N)=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_d)\,\middle|\,N\mid c\right\},\quad (N\in\mathcal{O}_d).$$

和先前一样，群 $\Gamma_0(N)^{\mathrm{ab}}$ 的结构将随着 d 的正负而大有不同.

当 d 严格正

此时每个群 $\Gamma_0(N)^{\mathrm{ab}}$ 都有限而且是 “小” 的. 这点可以联系于当 d 严格正时环 $\mathcal{O}_d$ 有无穷多个单位这一事实：若 $u\in\mathcal{O}_d^\times$ 是单位，实际上可考虑矩阵

$$x=\begin{pmatrix}u & 0\\ 0 & u^{-1}\end{pmatrix}\text{ 和 }y=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

两者都属于群 $\Gamma_0(N)$. 它们的交换子 $[x,y]$ 等于

$$xyx^{-1}y^{-1}=\begin{pmatrix}1 & u^2-1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

所有这些交换子生成的群因之是 “大” 的，而商

$$\Gamma_0(N)^{\mathrm{ab}}=\Gamma_0(N)/\left\langle xyx^{-1}y^{-1}\,\middle|\,x,y\in\Gamma_0(N)\right\rangle$$

则“小”.

当 d 严格负

那么单位群 $\mathcal{O}_d^\times$ 有限，而 35 年前 Elstrodt, Grunewald 和 Mennicke 就注意到 (借助实验) 当 N 大时 (就范数而言), 群 $\Gamma_0(N)^{\mathrm{ab}}$ 显得具有低秩的自由部分和大的挠部分. 以下是最近 Şengün 在 $d=-1$ 情形获得的资料：

- 若 $N=9+4i$, 我们有 $\Gamma_0(N)^{\mathrm{ab}} \simeq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$;
- 若 $N=41+56i$, 我们有 $\Gamma_0(N)^{\mathrm{ab}} \simeq \mathbb{Z}/4078793513671\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/292306033\mathbb{Z} \oplus \cdots$;
- 若 $N=118+175i$, 我们有 $\Gamma_0(N)^{\mathrm{ab}} \simeq \mathbb{Z} \oplus T$, 其中 T 有限，其基数 $> 10^{310}$.

当 N 大时，$\Gamma_0(N)^{\mathrm{ab}}_{\text{挠}}$ 的基数的素因子有趋于庞大的倾向，其分布似乎是随机的.

这一现象还远未被理解. 除了眼见巨大素数涌现而生的单纯喜悦，我们还有理由来试着进一步了解这一观察. 实际上，由 Scholze 最近的力作可以推出对 $\Gamma_0(N)^{\mathrm{ab}}$ 中所有同构于 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 的因子，可以赋予一个新的代数数环 ($\mathcal{O}_d$ 的一个扩张), 使其算术性质由 $\Gamma_0(N)^{\mathrm{ab}}$ 的 p– 挠类确定. 举例来说：这个新的代数数环其判别式的素因子都是 Np 的素因子.

现在，为了进一步了解 $\Gamma_0(N)^{\mathrm{ab}}$ 中何以有充裕的挠元，我们自然地被引向考虑某些“双曲空间”. 且来解释这一联系.

4. 同余双曲流形

当 $d<0$ 时，群 $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_d)$ 被称为 *Bianchi* (*比安基*) *群*. 这是群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 的一些离散子群，于是它们自然地 (正常地) 作用在三维空间

$$\mathbb{H}^3 = \{(z,y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : y > 0\}$$

上, 相应的变换保持*双曲度量* (*métrique hyperbolique*) $\frac{1}{y}\sqrt{|dz|^2+dy^2}$. 所以每个群 $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_d)$ 都如此给出 $\mathbb{H}^3$ 的一个相应铺砌，如图 3.

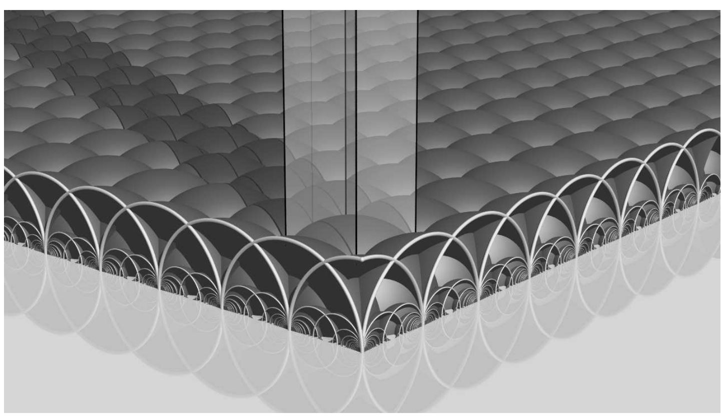

图 3　对应于 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])$ 的铺砌的一个基本铺片　©图片来自 J. Leys

这些铺片对双曲度量的体积有限 (相同). 称 $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_d)$ 为 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 中的*格* (*réseau*). 这样一个格的复杂度由铺片体积所测量. 群 $\Gamma_0(N)$ 仅是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 中的*同余* (*congruences*) 格的一些特例. 事实上，空间 $\mathbb{H}^3$ 在大部分其它同余格的作用下都有紧的商空间.

紧商为直觉构筑了一个好的指引. 然而，许多模型提示了对于一个随机的紧商 $\Gamma\backslash\mathbb{H}^3$,

群 Γ^{ab} 挠部的基数是 Γ 的复杂度的指数函数．源于算术的商往往倾向于尽可能按随机方式行事．与 Akshay Venkatesh 一起，我们提出了以下更精确的猜想．

猜想 1 *令 $(\Gamma_N)_{N\in\mathbb{N}}$ 为 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 中的一列同余格，使得复杂度 $V_N := \mathrm{vol}(\Gamma_N\backslash\mathbb{H}^3)$ 随着 N 趋于无穷．那么我们有*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\ln|(\Gamma_N^{\mathrm{ab}})_{\text{挠}}|}{V_N}=\frac{1}{6\pi}.$$

施于列 $(\Gamma_0(N))$，这个猜想蕴涵当 N 不可约并趋向无穷时，$\Gamma_0(N)^{\mathrm{ab}}_{\text{挠}}$ 的基数是 $|N|^2$ 的指数函数．Şengün 的资料倾向于肯定这一猜想，并给出断言的常数 $1/6\pi$．

5．迈向证明？

公式 (2) 和 (3) 的右式是 $\mathbb{C}$ 上亚纯函数 $s\mapsto\zeta_d(s)$ 在 $s=1$ 处的值，该函数在绝对收敛范围 $\mathrm{Re}(s)>1$ 内等于 $\sum_{n>0}\pm\frac{1}{n^s}$．和 Riemann zeta 函数一样，函数 $\zeta_d(s)$ 可由 Euler (欧拉) 乘积 $\zeta_d(s)=\prod_{\mathfrak{p}}\left(1-\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{p})^s}\right)$ 定义，其中乘积取遍 $\mathcal{O}_d$ 的素理想，而 $\mathrm{N}(\mathfrak{p})$ 表示理想 $\mathfrak{p}$ 的范数．此函数还满足一个函数方程，由之导出 $\zeta_d(s)$ 在 $s=0$ 处的消没次数等于单位群 $\mathcal{O}_d^{\times}$ 的秩 m.[1] 而且公式 (2), (3) 可以改述如下

$$\frac{1}{m!}\zeta_d^{(m)}(0)=-\frac{h_dR_d}{\left|(\mathcal{O}_d^{\times})_{\text{挠}}\right|},\tag{4}$$

其中当 d 负时 $R_d=1$，而当 d 正时 $R_d=\ln\varepsilon_d$．

对所有紧双曲商 $M=\Gamma\backslash\mathbb{H}^3$ 也有类似公式．它含有一个自然的 zeta 函数，这是由以下 Euler 乘积定义的 *Ruelle*(吕埃尔) *zeta 函数*

$$R(s)=\prod_{\gamma}\left(1-e^{-s\ell(\gamma)}\right),$$

其中 γ 跑遍 M 的*素闭测地线* (*primières*) 集，也就是排除掉多次环绕的闭测地线，而 $\ell(\gamma)$ 表示 γ 的长度．函数 $R(s)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上有亚纯延拓，在 0 处的消没次数是一个仅依赖于 M 的拓扑的整数 m (它等于 $4-2b_1(M)$，其中 $b_1(M)$ 是 M 的第一个 Betti 数)，而根据 Ray-Singer (雷 – 辛格), Cheeger, Müller (马勒) 和 Fried 的深刻工作，

$$\frac{1}{m!}R^{(m)}(0)=\frac{R_1(M)^4\mathrm{vol}(M)^2}{\left|(\Gamma^{\mathrm{ab}})_{\text{挠}}\right|^2},\tag{5}$$

其中 $R_1(M)$—— 同样称为调整子 —— 通过双曲度量测定了 Γ^{ab} 自由部分的复杂度．

我们感兴趣的项是 $(\Gamma^{\mathrm{ab}})_{\text{挠}}$ 的基数，它扮演的角色和 (4) 中的类数 h_d 相似，而 $R_1(M)$ 与 $\mathrm{vol}(M)$ 则近于调整子 R_d．

当 M “接近” 于空间 $\mathbb{H}^3$—— 当 M 为大体积的同余流形时便是如此 —— 可以证明 $\frac{1}{m!}R^{(m)}(0)$ 等于 $e^{(-\frac{1}{3\pi}+o(1))\mathrm{vol}(M)}$．在许多具有数论兴趣的情形下调整子 $R_1(M)$ 是平凡的，而与 Venkatesh 一起，我们证明了与猜想 1 相近的一些结果．于是我们得到许多挠类，而根据前述的 Scholze 定理，它们截出一些代数数环．

1) 当 d 负时 $m=0$，当 d 正时 $m=1$.—— 原注

一般情形下调整子 $R_1(M)$ 非平凡，没理由说当 M 接近 $\mathbb{H}^3$ 时它在 (5) 中的贡献可以忽略. 尽管如此，与 Şengün 和 Venkatesh 一起，我们在种种具有代表性的情形下证明了在沿着一个 同余 列 (M_N) 时，$R_1(M_N)$ 的贡献基本可以忽略. 所以我们期待 (5) 的右式等于 $\left|\Gamma^{\mathrm{ab}}_{\text{挠}}\right|^{-2} e^{o(\mathrm{vol}(M))}$, 因而

$$\ln\left|\Gamma^{\mathrm{ab}}_{\text{挠}}\right| = \frac{1}{6\pi}\mathrm{vol}(M) + o(\mathrm{vol}(M)).$$

尚需一些新思想才能完整证明猜想 1, 然而这已然是一个 (稀有的) 情形：在一个 “类数公式” 形态的解析式中，我们得以分离 “挠” 项和 “调整子” 项的贡献.

此外还得进一步理解 $\left|\Gamma_0(N)^{\mathrm{ab}}_{\text{挠}}\right|$ 的素因子如何分布. 这是另一个故事，它或将我们领向 p– 进表示的理论. . .

延伸阅读

首先，下面是几本代数数论的基础书籍：

- Davenport, H. The Higher Arithmetic: An Introduction to the Theory of Numbers. Cambridge University Press.
- Hardy, G. H. and Wright, E. M. An Introduction to the Theory of Numbers. Oxford University Press.

想更上一层楼，可以参阅：

- Borevich, Z. I. and Shafarevich, I. R. Number Theory. Academic Press.
- Cassels, J. and Fröhlich, A. Algebraic Number Theory. Academic Press.
- Serre, J.-P. Cours d'arithmétique, PUF.

关于三维双曲几何及其与数论的联系，我们推荐：

- Elstrodt, J. Grunewald, F. and Mennicke, J. Groups Acting on Hyperbolic Space. Springer.
- Maclachlan, C. and Reid, A. The Arithmetic of Hyperbolic 3-Manifolds. Springer.

至于本文提到的近期工作，可以参考笔者在第七届欧洲数学大会论文集中的文章以及下述文献.

- Bergeron, N. and Venkatesh, A. The asymptotic growth of torsion homology for arithmetic groups. J. Inst. Math. Jussieu, 12(2): 391–447, 2013.
- Bergeron, N., Haluk Sengun, M. and Venkatesh, A. Torsion homology growth and cycle complexity of arithmetic manifolds. Duke Math. J. 165 (2016) n° 9, 1629–1693.
- Scholze, P. On torsion in the cohomology of locally symmetric varieties. Ann. of Math. (2), 182(3) : 945–1066, 2015.

(李文威 译　　姚景齐 校)