欧拉示性数，Poly猜想，
多面体 同调群

数学教育

⑥

Euler 示性数和 Pólya 的假想

Hilton, P

Peter Hilton 和 Jean Pedersen

邹建成 √

64-74

O189.2

—— 献给 George Pólya 和 Stella Pólya.

1 引言

作者为能成为长寿的杰出的数学家，教育家 George Pólya 及他的同样杰出的妻子 Stella Pólya 的晚年时的朋友而感到十分自豪. Pólya 经常对过去时代的伟大数学家们的富有创造性的工作冥思苦想，探索其思想火花. 他们深刻思想产生的源泉是什么？

有一次， Pólya 思索着 Euler 的惊人的发现 (看 [2]), 即如果考虑最简单的几何组合意义下的凸多面体，计算其顶点数 V, 边数 E(edge) 及面数 F, 则有

$$V - E + F = 2. \tag{1.1}$$

公式 (1.1) 的特性说明了 Euler 认为多面体是 2 维的. 实际上，用现代的术语，即是与 (2- 维) 球面 S^2 同胚.

Pólya 推测 Euler 可能由 1- 维情形受到启发，换句话说，闭的多边形同胚于圆 S^1, 他假想 Euler 对他自己说：我们认为两个多边形等价，是指一个多边形的顶点可以与另一个多边形的顶点一一对应，一个多边形的所有边与另一个的所有边一一对应，而且顶点 v 属于边 e 的从属关系保持不变. 那么两个多边形等价当且仅当它们有同样多的顶点数. 现在很容易推广等价的概念 —— 认为两个多面体是等价的，是指一个多面体的顶点，边及面能够与另一个的顶点，边及面分别对应，而且保持从属关系顶点 v 属于边 e, 边 e 是面 f 的一边. 那么怎样对多面体分类呢？ Pólya 假想 Euler 曾尝试去发现与多边形的等价关系相似的判别法则. 然而在他的研究中，他发现了与他想找的完全相反的事实 —— 没有得出一个多面体如何有别于另一个多面体，却发现了所有的多面体有一个共性，即 (1.1). 用现代的术语来说，就是所有这种多面体的 Euler 示性数为 2.

原题： The Euler Characteristic and Pólya's Dream. 译自： *Amer. Math. Monthly*, Vol. 103 , No. 2, 1996, pp. 121–131.

在第 2 节中，我们阐述 Pólya 的假想，也简单地说说 Euler 示性数与笛卡尔 "全角亏量"(total anguler defect) 的关系. 在第 3 节中，我们说明 Pólya 关于 Euler 的愿望的假想在某种意义上是正确的，准确地说，如果把多面体的概念扩充为包括所有的闭曲面， Euler 示性数就确实做到了我们想要它做的，却区别拓扑上不同的两个曲面[1).

当然，仅仅为了使假想成真，数学中是不会有推广的. 多面体的概念当然没有穷尽 2 维图形，所以在第 4 节，我们给出了多面体的概念怎样经现代拓扑学家之手而成熟起来，以及 Euler 示性数怎样适应更广的概念. 这里必须提一下杰出的法国数学家 Henri Poincaré (1854-1912), 他是现代拓扑学的开创者，是他弄明白了一个多面体的 Betti 数的作用，而且与微分方程组的解及其拓扑不变性联系了起来. 适用于任何维数的多面体的更精细的 Euler 示性数称作 Euler-Poincaré 示性数，以纪念 Poincaré 的巨大贡献.

2 Pólya 的假想

首先让我们引用 Pólya 的话. Pólya 为了说明 Euler 本来已经发现了公式 (1.1), 在他的著作 [7] 中说 "断定它，就象他相信它已经发生了似的." 我们准备不离其精神实质，但考虑的细节稍有差异，因为我们相信更少的多面体的例子也会达到同样的目的[2). 最后，我们描述一个凸多面体的笛卡尔全角亏量 Δ. 笛卡尔用球面三角学证明了，对任何多面体， $\Delta = 4\pi$、对此及 (1.1) 我们不给出证明. 但我们对 Pólya 的对多面体的 Euler 公式等价于笛卡尔定理的证明给出另一个形式. 这个美妙的证明可在 [9] 中见到，但事实上，我们是以讲稿的形式见到的，这是我们的朋友 Dave Logothetti 于 1974 年 3 月在斯坦福听 Pólya 的讲座时新记录的. 所以从某种意义上来讲，推测笛卡尔已经知道 Euler 公式是合理的.

Pólya 对自己说到， (见 [7]):

在 (呈给俄罗斯科学院的)"短文"("Commentatio") 中， Euler 关于多面体的 (顶点数，边数，面数) 定理第一次问世，但他没有给出证明. 他提供了一个归纳法的论证：他对许多特殊情形验证了这个关系. 毫无疑问，就象他的许多其它结果一样，他发现了这个定理. 然而他没有给出直接的说明，他的定理是怎样来的，他是如何猜测到的. 而对其它的有些结果，却给出了归纳推理的动机和方法的某些线索.

Euler 是如何得出其关于多面体的定理的呢？我认为这尽管是一个没有效果的推测，不能期望得到一个完满的答案，但我们可以想象 Euler 定理发现 (现发现) 的各种途径. 我们以前给出过两个途径[3)(见 [8])、这里我给出第 3 个. 我宁愿认为这就是 Euler 本人的方法.

[1) 人们可能 (吐吐舌头) 作出评论；我们在这里给出了马克思主义辨证法的一个精彩的例子. 我们想区分多面体， Euler 示性数却否定之、我们推广多面体的概念去否定这个否定.

[2) Pólya 用六个多面体，我们用五个、有读者能用少于五个的多面体而找到合适的序列吗？

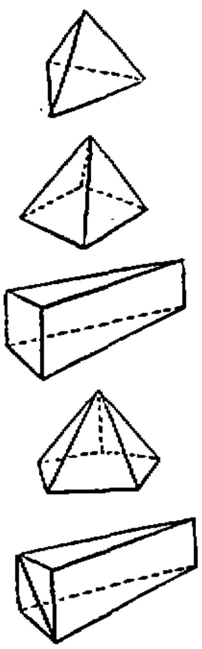
[3) 见 [8], V0l. 1. pp. 35-43 及 [9] Vol. 2, pp. 149-156, 以及合并的问题及解答. 而且在 [6] 中也有一个

类比产生问题. 对一个初学者来说，平面几何与立体几何有许多类比看起来是合理的. 平面中的圆与空间的球面；曲线所围成的面积与曲面所围成的体积，平面中直线所围成的多边形与空间中平面所围成的多面体.

然而也有差别. 如果观察细些，则平面几何显得较简单和容易，而立体几何则较复杂和困难. 根据多边形的边数，可以对多边形给出一个简单的分类 ⋯⋯.

所以，Pólya 想象，Euler 可能想对多面体进行分类. 于是，他可能得先计算多面体的面数.

下面的图 1 与 Pólya 的有些差别，前面的四个多面体与他的一样，但我们的第五个是 Pólya 的第三个，即三棱柱. 它的一个顶点所对着的面分成两个三角面. 应该认为 Euler 最先没有考虑图 1 中各图的顶点和边，而只考虑面，所以图 1 中没有标出 V, E 和 F 的值. [4]



	V	E	F
(a)	4_2	6_3	4_1
(b)	5_2	8_3	5_1
(c)	6_2	9_3	5_1
(d)	6_2	10_3	6_2
(e)	6_2	10_3	6_2

图 1

现在，让我们看看面的数目能否对多面体进行分类. 所以对上表，从上至下取 F 的值，直到获得不满意的结果为止. (这些值为下标为 1 的那些，因为它们最先考虑). 事实上，我们很快就发现，多面体 (b) 和 (c) 有同样的面数，但它们却不等价.[5]

对 Euler 公式的精彩讨论及其证明.

[4] 我们更愿意证明我们的表，带有 0 维的顶点 (V), 1- 维的边 (E) 及 2 维的面 (F). 按自左到右，从上到下的顺序. Euler 和 Pólya 都没有这样做. 我们认为我们的做法更容易把 Euler 公式推广到高维情形，而且使我们建立起 Euler 公式，得出什么是真正不变的量.

[7] 中有这样一段：

这里出现一个问题：让我们类似于用多边形的边数对多边形分类一样设计一个多面体的分类方法．然而对多面体，就象图 1 所示的那样，仅仅考虑面数是不够的……．

怎么回答这个问题呢？观察尽可能多的不同形式的多面体，计算其面数和顶点数？

让我们回到图 1 中表的最顶部，考虑 V 的值．首先填充下标为 2 的那些 F 和 V 的值．直到出现不满意的结果为止．对多面体 (d) 和 (e) 尽管 $(V,F)=(6,6)$，但它们不等价．

除开面和顶点以外，还有什么呢？当然是边[6]．我们再回到图 1 的表的最上端，考虑 E，对下标为 3 的那些 E 取值．同样地，这也不行！ Pólya 说：它们的边数一样．就象它们具有相同的面数和顶点数一样，观察更多的例子，同样会得出：如果两个多面体有相同的 F 和 V，则有相同的 E．如果考虑了 V 和 F，再考虑 E，则 E 对多面体的分类就不起作用．这是多么令人失望啊！

然而有点别的什么东西．如果 E 的数目由 F 和 V 的数目来决定，那么 E 是 F 和 V 的函数，什么函数呢？它是增函数吗？ …，F 增加，E 增加吗？ V 增加 E 必定增加吗？ … 带着这些问题考察更多的例子，导致猜测

$$E=F+V-2.$$

出乎预料，如此简单的一个关系，这是一个多么巨大的胜利啊！

Pólya 在这里假想 Euler 是如何发现他的那个漂亮公式以及他如何最先建立起来的，所以不是 (1.1) 的形式是不令人奇怪的．

现在让我们转向多面体表面不同的方面，先考虑一个同胚于 S^2 的凸多面体 P. Euclid 证明了 P 的任何顶点，面角的和小于 2π；这个和与 2π 的差称为那个顶点的"角亏量"．如果把 P 的所有角亏量相加，就得到 P 的全角亏量 Δ，笛卡尔证明了对每个凸多面体 P，$\Delta=4\pi$．例如对立方体的 8 个顶点，每个的角亏量为 $\frac{\pi}{2}$，所以全角亏量 Δ 为 4π．

现在跟随 Pólya 的思路去证明 $V-E+F=2$ 和 $\Delta=4\pi$ 是等价命题．在证明过程中，我们获得一个更一般的结果，即对任何"闭的平直曲面"，(closed rectilinear surface).

$$\Delta=2\pi(V-E+F), \tag{2.1}$$

[5] Pólya 说它们是形态上不同的，又说"我打算避免 Euler 时代并不存在的标准术语'新数学'中最丑陋的事情之一是不成熟技术名词的引进"．

[6] 据 Pólya，"Euler 是引进'多面体的边'的概念和取名 (acies) 的第一个人，或许 Euler 引进边是希望作出更好的分类，我们在这里用他的例子．"

于是由此可立即得到对同胚于 S^2 的凸多面体，$V-E+F=2$ 等价于 $\Delta=4\pi$. 令 S 为曲面的所有面的所有边 (side) 数[7]. 那么对曲面的每个边[*], 恰是两个面的边 (side), 于是

$$S=2E. \tag{2.2}$$

设多面体 P 同胚于 S^2, 把 S^2 划分为 V 个顶点，E 条边，F 个面，使得每个边恰与两个面关联，把所有顶点标号 $1,2,\ldots,V$. 令第 n 个顶点的平面角之和为 σ_n. 则第 n 个顶点的角亏量为

$$\delta_n=2\pi-\sigma_n. \tag{2.3}$$

对凸多面体 P, $\delta_n>0$, 但一般地，δ_n 可为负，也可为零. 令

$$\Delta=\sum_{n=1}^{V}\delta_n. \tag{2.4}$$

现在来证明 (2.1). 所要做的是以两种办法来计算 "所有面角之和"(称为 A), 先用顶点数来计算，则

$$A=\sum_{n=1}^{V}\sigma_n=\sum_{n=1}^{V}(2\pi-\delta_n)=2\pi V-\Delta\cdots. \tag{2.5}$$

其次用面数来计算，假设一个面有 m 边 (side), 则这个面的内角和为 $(m-2)\pi$. 这样，如果多面体有 F_m 个边 (side) 数为 m 的面，则其面角和为 $(m-2)F_m\pi$, 所以得到关键的公式：

$$A=\sum_m(m-2)F_m\pi=(\sum_m mF_m-2\sum_m F_m)\pi. \tag{2.6}$$

而

$$F=\sum_m F_m, \tag{2.7}$$

故多面体的

$$S=\sum_m mF_m. \tag{2.8}$$

由 (2.6)、(2.7), (2.8) 得到

$$A=(S-2F)\pi, \tag{2.9}$$

比较 (2.9) 与 (2.5) 有，$2\pi V-\Delta=(S-2F)\pi$, 或者

$$\Delta=\pi(2V-S+2F) \tag{2.10}$$

但是 $S=2E$, 所以 (2.1) 成立.

---

[7] 区别 "side" 和 "edge" 对于理解这个证明是很重要的，不幸的是，通常并没有这样做. 常常还把 "side" 与 "face" 混淆起来.

[*] 译注. 译文中的 "边" 一般是指 edge. 如指 side 则在 "边" 后写明 side.

注记: (i) Pólya 得到公式 (2.1), 但没有引进 S 和 A. 然而引进这两个术语后，我们得到了更一般的式子 (2.10). 所以 Pólya 的讨论不仅推广到了任意的闭曲面，(这个闭曲面不必是可定向的，详细见 [4]), 而且推广到了更一般意义上的任意 2 维多面体.

(ii). Grünbaum 和 Shephard 在 [3] 中给出了关于多面体的笛卡尔定理的漂亮的对偶思想. S 以及其对偶 R(射线的数目) 的引进，还有 (2.10) 导致了对偶的相当一般的形式 (见 [5]), 实际上，$\Delta = 2\pi\chi$ 只对闭曲面才成立，$\Delta' = 2\pi\chi(\Delta' = \pi(2F - R + 2V))$ 却对任何 2 维多面体都成立.

(iii) 笛卡尔 (1596–1650) 和 Euler(1707–1783) 对这些问题的研究是互相独立的，然而，就象我们已看到的那样，George Pólya(1887–1985) 已经证明了，从初等的角度来看，他们的对同胚于 S^2 的凸多面体的表面上不同的深刻的公式却是完全等价的. 笛卡尔显然不知道 Euler 的工作，Euler 不知道笛卡尔的工作却不那么明显 —!— 因为笛卡尔对这些问题的研究结果是在 Euler 死后一个多世纪才被公诸于众的.

(iv) Pólya 相信 Euler 着手准备解决的问题至今仍未解决！然而 …….

3 假想成真

所以 Euler 不能用 Pólya 假想的简单方法对多面体进行分类，相反地，他发现我们曾提到的性质

$$V - E + F = 2 \tag{3.1}$$

对所有同胚于 S^2 的多面体都适合. 至此，故事结束了吗？当然没有！因为拓扑学家们已发现推广多面体的概念是十分有用的，实际上，是必须的，继而推广数量 $V - E + F$, 我们称之为 "Euler 示性数", 它确实能区分不同类型的多面体.

我们采用的第一个推广，你可能想象得到，是 "闭定向曲面". 这样，我们现在考虑拓扑空间[8] S, 使得 S 的每个点 P 都有一个同胚于开圆盘的邻域. 可定向的条件等价于 S 可以嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 中. 我们总可以用平直的 (rectilinear) 模型来实现 S, 所以 S 由顶点，边，及面所组成. 可定向的条件假定每个面可以定向，使得两个面的共同边有相反的定向. 闭的定向曲面的一个重要的典型例子是环面. 它的平直的模型及其面的一致的定向如图 2 所示.

利用同调理论，可以证明 Euler 示性数 χ 是拓扑不变量，即如果每个曲面 S_1 和 S_2 是同胚的，则 $\chi(S_1) = \chi(S_2)$. 这是非常惊人的结果，因为 $\chi(S)$ 是组合定义的，通过把 S 划分成面，边及顶点，然而 $\chi(S)$ 仅依赖于 S 的拓扑，而不依赖于强加给 S 的组合结构.

这个结果解释了为什么 (3.1) 对所有同胚于 S^2 的多面体都成立，因为这类空间本来就具有同样的 Euler 示性数. 由 χ 拓扑不变性的证明中就得出 $\chi = 2$. 一个基本定理是

$$\chi = p_0 - p_1 + p_2, \tag{3.2}$$

[8] S 不再代表边 (side) 的数目.

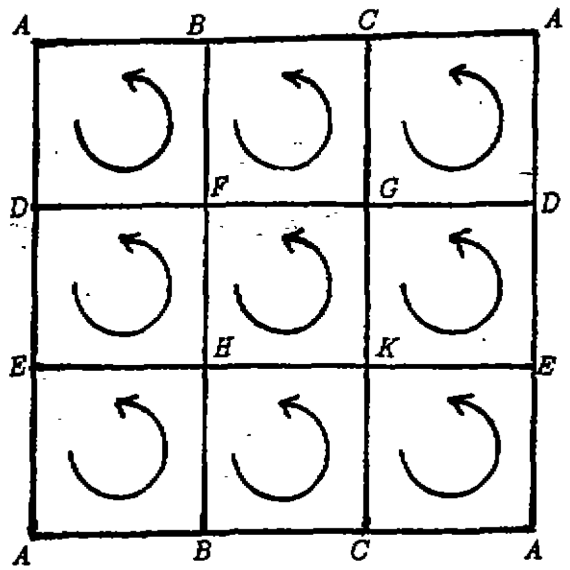


图 2

其中 p_i 是空间的第 i 个 Betti 数. 让我们来说明一下这是什么意思. 对任何拓扑空间 K—!— 但让我们简单地认为它是 (有限) 平直的复形 —!— 我们可以相配一定的阿贝尔群 $H_rK, r=0,1,2,\ldots$, 这些群叫做 K 的同调群, 粗约地说, 它们计算了 K 的 r- 维 "洞". 如果空间是 n 维的, 则仅有直到维数为 n 的同调群. p_r 是 H_rK 的秩. 现在对亏格为 g 的闭的可定向曲面 S_g, 即 g 个洞或 g 个环柄 (见图 3),Betti 数由 $p_0=1, p_1=2g, p_2=1$ 所给出, 所以

$$\chi(S_g)=2-2g. \tag{3.3}$$

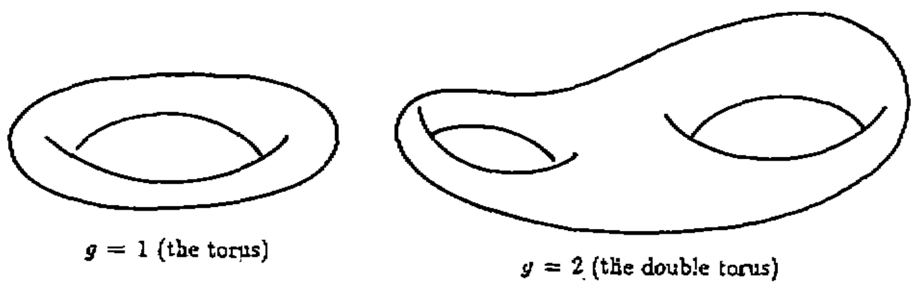


图 3

当然球面 S^2 没有洞, $g=0$, 所以 $\chi(S^2)=2$, 这解释了第二节的结果. 从 (3.3) 可看到 $\chi(S)$ 可以取任何不大于 2 的偶数, 这样 Euler 的思想实现了, 假想成了真. $\chi(S)$ 确实区分了各种闭的可定向曲面, 它在非同胚的曲面上取不同的值. 实际上, 由公式 (3.3), 它完全由 S 的亏格所决定.

我们能够作进一步的推广吗? 好的, 我们扔掉可定向的要求. 那么得到一族闭曲面, 它是由插入到球面中的交叉帽 (Möbius 带) 的个数 k 所刻划. $k=1$ 的情形是熟知的, 我们得到实射影平面 $\mathbb{R}P^2$(见图 4).

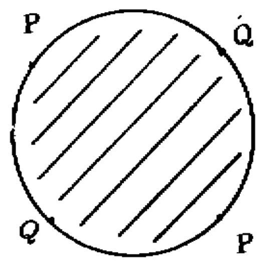


图 4 $\mathbb{R}P^2$ 看作是把对径点叠在一起的单位圆盘.

公式 (3.2) 对更广意义上的紧 2- 维多面体都成立. 对具有 k 个交叉帽的不可定向的曲面 $S^{(k)}$, 有 $p_0 = 1, p_1 = k - 1, p_2 = 0$, 使得

$$\chi(S^{(k)}) = 2 - k, \tag{3.4}$$

特别地,

$$\chi(\mathbb{R}P^2) = 1. \tag{3.5}$$

由 (3.4) 可知, 如果允许不可定向的曲面, 则可把任何不大于 2 的整数, 偶的或奇的, 作为闭曲面的 Euler 示性数. 然而此时 χ 不能区别拓扑型, 因为亏格为 g 的可定向的曲面与具有 $2g$ 个交叉帽的不可定向的曲面有着同样的 Euler 示性数.

我们能把任何整数作为 2 维多面体的 Euler 示性数吗？如果把多面体的概念扩充的话, 答案是肯定的, 即把多面体看作是一个 (有限) 平直复形 K, 即一个分解成顶点, 边及面的空间, 其中 (闭的) 面就是一个多边形区域, 那么对任何整数 $n \geq 2$, 能够作一个 2 维多面体 K, 使得 $\chi(K) = n$, 取 K 为一束 $(n-1)$ 个气球 (见图 5), 则 $p_0 = 1$, $p_1 = 0$, $p_2 = n - 1$.

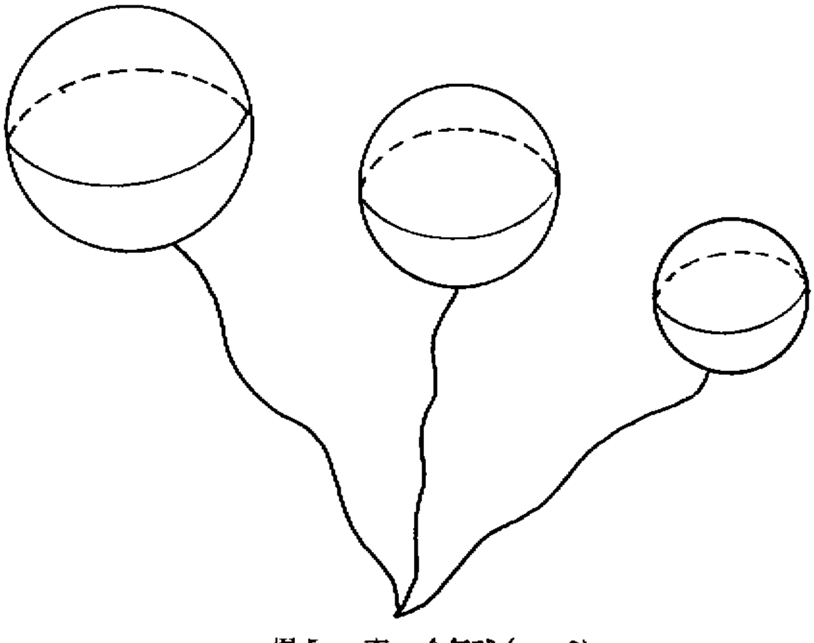


图 5. 一束 n 个气球 $(n = 3)$

4 进一步的推广

闭的可定向曲面的一个明显的推广是去掉空间为 2 维这样一个限制. 这样就有了 n 维 "闭定向流形" 的概念. 正如 S^2 是研究闭的可定向曲面的第一个例子, 很自然地, 对闭定向 n 维流形, 首先研究 S^n. 实际上, Schläfli[10] 推广 (3.1) 证明

$$\chi(S^n)=\begin{cases}2, & n\text{为偶数.}\\ 0, & n\text{为奇数,}\end{cases} \tag{4.1}$$

这里把 χ 看成交错和

$$\xi=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\alpha_r, \tag{4.2}$$

其中 α_r 是流形的某个胞腔剖分的 r- 维胞腔数目. 这样 (4.1) 推广了 (3.1), 证明了 χ 的拓扑不变性的 (3.2) 的相应推广为

$$\chi=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r p_r, \tag{4.3}$$

象前面一样, p_r 仍是第 r 个 Betti 数. 习惯上称推广了的 χ 为 Euler-Poincaré 示性数, 因为 Poincaré 证明了 Betti 数的拓扑不变性, (似乎我们应该感激 Emmy Noether, 她观察到应该研究阿贝尔群, 即同调群, 而不是作为同调群秩的这些数, 同调群是真正的拓扑不变量). (4.2) 和 (4.3) 的等价性证明是线性代数的一个很好的练习题.

当然, (4.1) 可立即从 (4.3) 得出, 因为对球面 S^n,

$$\begin{aligned}&p_0=p_n=1;\\&p_r=0,\quad r\neq 0,n,\end{aligned} \tag{4.4}$$

然而, Schläfli 却利用的是基本的组合技巧 [10].

我们注意到 (4.2) 和 (4.3) 的等价性对最广义的 n- 维多面体也是成立的. 如果愿意, 只限制为具有 n 维单纯复形 K 的空间, 这样的复形 K 是维数为 $0,1,\ldots,n$ 的单形的并集, 其中一个 r 维单形是一组 $(r+1)$ 个互相独立的点的凸包. 这样,

0 单形是顶点,

1 单形是边,

2 单形是三角形,

3 单形是四面体,

而且, 不同的单形如果相交, 则交为共同的面. 因为 Euler-Poincaré 示性数是拓扑不变量, 当然对任何同胚于有限单纯复形的空间也可以定义, 特别是对地地道道的几何的 n- 维球面. 如果把一个 (紧) 多面体定义为一个上述同胚象 ("homeomorph"), 则我们达到了这篇文章所希望的更深刻的推广.

让我们指出推广 Euler 示性数的一个明显的好处．给两个空间 X,Y，有拓扑积 $X\times Y$，如果 X,Y 是紧的多面体，则可以证明 $X\times Y$ 也是紧的多面体，很自然地要问 $\chi(X),\chi(Y)$，与 $\chi(X\times Y)$ 之间有什么联系．答案非常简单！

定理 4.1 $\chi(X\times Y)=\chi(X)\times\chi(Y)$.

证明是令人欢喜的．根据 X 和 Y 的同调群去计算称 $X\times Y$ 的同调群．如果限制在有理系数 (或任何系数 "域" 上) 的同调群情形，则有非常简单的公式，即

$$H_r(X\times Y,Q)=\oplus_{s+t=r}H_s(X;Q)\otimes H_t(Y,Q), \tag{4.5}$$

(这些同调群实际上是 $\mathbb{Q}$ 上的向量空间). 由 (4.5) 立即可得

$$p_r(X\times Y)=\sum_{s+t=r}p_s(X)p_t(Y). \tag{4.6}$$

这是非常好的表达式．考虑形式多项式 $\sum_{r\geq 0}p_r(X)x^r$，称为 X 的 Poincaré 多项式，记为 $P_X(x)$，则 (4.6) 表示

$$P_{X\times Y}(x)=P_X(x)P_Y(x). \tag{4.7}$$

这几乎完成了定理 4.1 的证明 —!— 实际上解释了它为什么是正确的．简单地

$$\chi(X)=P_X(-1), \tag{4.8}$$

如果不对 Euler 示性数进行推广，则得不出定理 4.1，而且它给了我们巨大的信心，我们选取了 "正确" 的推广．最后，象任何好的证明一样，我们的证明引导我们走向更深入的问题，可惜我们在这里不能阐述．

我们并不企图在这篇文章中把故事延拓到当今 —!— 人们对流形的研究及 Euler-Poincaré 示性数的进一步改进．从某种意义上来看，进步是不可避免的 —!— 一个富于假想的 George Pólya 总是存在的！

参考文献

[1] Descartes, René, *Oeuvres*, vol.X, pp. 265–269.

[2] Euler, Leonhard, Opera Omnia, series i, vol. 26, Orell Füssli Verlag, 1953.

[3] Grünbaum, Branko, and Geoffrey Shephard, A dual for Descartes theorem on polyhedra, *Math. Gaz.* 71(1987), 214–216.

[4] Hilton, Peter, and Jean Pedersen, Descartes, Euler, Poincaré, Pólya-and polyhedra, *L'Enseignement Mathématique*, T. XXVII, No. 3–4(1981), 327–343.

[5] Hilton, Peter, and Jean Pedersen, Duality and Descartes' angular deficiency, *Computers Math. Appl.* 17, No. 1–3, (1989), 73–88.

[6] Lakatos, Imre, Proof and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery. Cambridge University Press, 1976.

[7] Pólya, George, Guessing and Proving, *Two-Year College Mathematics Journal* 9, No. 1 (1978), 1-9.
[8] Pólya, George, Mathematicas and Plausible Reasoning. Princeton University Press, 1954.
[9] Pólya, George, Mathematical Discovery, Combined Edition, John Wiley and Sons, Inc., 1981.
[10] Schläfli, Ludwig, Theorie der vielfachen Kontinuität, *Denkschriften der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft*. 38(1901), 1–237.

(邹建成，铁小匀 译　李培信 校)