综合报告

2010 年第 26 届国际数学家大会一小时报告摘要 (II)

大　会　报　告

高度复合数 1)

2000 数学主题分类： 11Mxx, 97A30

R. Balasubramanian (印度钦奈 Taramani 数理科学研究所)

Ramanujan (拉马努金) 的传奇在一定程度上吸引了其后几代印度数学家从事解析数论的研究，本文主要阐述自拉马努金以来印度的数学家对高度复合数的诸多贡献.

(龚克　译　　王世坤　校)

非线性偏微分方程的可控性 2)

2000 数学主题分类： 93B05, 93C10, 93C20

Jean-Michel Coron (法国大学研究所，巴黎六大，Jacques-Louis Lions 实验室)

一个控制系统就是一个我们可以施加控制作用的动力系统. 控制系统一个经典的问题是系统的可控性问题：即如何通过适当的控制，使得系统的状态从一个给定的初始状态 (初态) 到达一个预先设定的状态 (终态)?

如果初态和终态都在平衡态附近，那么一个非线性系统的可控性可以通过研究这个非线性系统在这个平衡态附近的线性化控制系统的可控性来实现. 自然的，当这个线性化控制系统是可控时，我们就可以期望该非线性控制系统在这个平衡态附近是局部可控的，即当初态和终态都在平衡态附近时，控制可以实现初态到终态的转移. 这个事实的成立，事实上来源于有限维问题中标准的逆映像定理. 但由于无穷维问题某些 “正则性” 的损失，线性化方法对偏微分方程描述的控制系统比有限维控制系统困难得多. 然而，我们总还是可以用适当的不动点定理求得无穷维系统的局部可控性.

不幸的是对许多有意义的控制系统来说，相应的线性化的控制系统是不可控的，于是线性化方法不能告诉我们非线性系统可控性的任何信息. 然而对有限维问题，有一个非常有用的工具可以处理这类情况，此即所谓的 “迭代李括号”. 迭代李括号在无穷维问

---

1) 原题： Highly Composite.

2) 原题： On the Controllability of Nonlinear Partial Differential Equations.

题中也会产生有意义的结果. 然而对许多偏微分方程控制系统来讲, 迭代李括号并不好定义 (找不到一个适当的空间定义). 在这个报告中, 我们将综述处理这类问题的方法. 我们将阐明如何将这个方法用于流体力学的控制系统 (不可压缩流体的 Euler 方程和浅水波方程) 和量子力学系统. 我们也将阐述当线性化系统是可控时, 这个方法如何处理系统全局可控性的问题 (即当初态和终态不在平衡态附近时). 作为这个方法的一个应用, 我们说明 Navier-Stokes 方程的全局可控性问题.

非线性偏微分方程控制系统的可控性存在大量有待解决的问题. 本报告只给出一些具有挑战性的公开问题.

(姚鹏飞 译　　郭宝珠 校)

可用概率验证的证明和编码 [1)]

2000 数学主题分类: 68Q17

Irit Dinur (以色列 Weizmann 科学研究所应用数学与计算机科学部)

NP 是一个复杂性类, 对于该类问题很容易验证其解的正确性. 相反地, 寻找 NP 问题的解通常是很困难的. SAT(可满足问题) 就是一个经典的例子: 给定一个布尔公式, 构造一个满足公式的赋值是非常困难的, 而对给定的一个赋值却很容易代入公式来验证其正确性. 这样的一个赋值就称为布尔公式的可满足性的一个 "NP- 证明".

虽然验证很简单, 但是它不是局部的, 也就是说, 一个验证者必须读取几乎整个证明才能做出正确判定. 相反地, 具有里程碑意义的 PCP 定理 [2, 1] 表明存在可被概率验证的证明: 他们可以被一个只需读取定长字节的随机程序所验证.

此次演讲我们将以大众能够理解的方式描述任意 NP 证明是如何通过一个缝隙放大编码技术映射成一个新的可局部验证的证明, 即所谓的 PCP.

(刘克 译　　吴凌云 校)

遍历性结构和非通常遍历性定理 [2)]

2000 数学主题分类: 37Axx

Hillel Furstenberg (以色列希伯来大学数学研究所)

Szemeredi 的一个著名定理断言, 任何一个具有正的上密度的整数集都包含任意长的算术序列. 该结论等价于如下关于保测变换的多重常返定理: 如 $T\colon X \to X$ 是测度空间 (X, B, μ) 上的保测变换, $f \geq 0$ 是满足 $\int f\,d\mu > 0$ 的有界可测函数, 则对任意 k, 存在 n 使得 $\int f(x)f(T^nx)f(T^{2n}x)\cdots f(T^{kn}x)\,d\mu(x) > 0$. 记以上积分为 $A_n^{(k)}$, Szemeredi 定理的最早的基于遍历性理论的证明是通过建立以下事实 $\liminf \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} A_n^{(k)} > 0$ 来证明以上定理的. 现在, 人们知道这个极限存在, 并且有以下非寻常遍历性定理: 对任意有界可测函数 $f_1, f_2, \ldots, f_k$, 极限 $\lim \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_1(T^nx)f_2(T^{2n}x)\cdots f_k(T^{kn}x)$ 在 $L^2(X, B, \mu)$ 中存在.

1) 原题: Probabilistically Checkable Proofs and Codes.

2) 原题: Ergodic Structures and Non-Conventional Ergodic Theorems.