# 无球流形综述 (I)

Wolfgang Lück

**摘要** 这是一篇关于无球闭流形 (closed aspherical manifold) (即万有复叠空间可缩的连通闭流形) 已知结果和尚未解决问题的综述. 无球流形的许多例子来自于某些非正曲率条件. 无球性条件, 虽然只是纯同伦论的条件, 却蕴含着流形本身和它万有复叠空间的几何, 分析, 以及基本群群环的环论, $K-$ 理论和 $L-$ 理论的许多引人注目的结果. Borel (博雷尔) 猜想预测无球闭流形具有拓扑刚性 (topological rigidity). 本文包含了关于无球闭流形乘积分解的一些新结果, 以及边界是维数大于等于 6 的球面的双曲群 (hyperbolic group) 的一个结果, 后者是与 Arthur Bartels 和 Shmuel Weinberger 的合作工作. 最后, 我们对闭流形构成的宇宙做一个简单的描述.

**Mathematical Subject Classification (2000).** 57N99, 19A99, 19B99,19D99, 19G24, 20C07, 20F25, 57P10.

**关键词**: 无球闭流形, 拓扑刚性, Borel 猜想, Novikov (诺维科夫) 猜想, Hopf (霍普夫) 猜想, Singer (辛格) 猜想, 非正曲率空间.

## 引言

如果空间 $X$ 是道路连通的并且所有高阶同伦群平凡, 即 $\pi_n(X)=0, n\geq 2$, 则称 $X$ 为 *无球的* (*asphrical*). 本文讨论无球闭流形. 有很多原因表明无球闭流形是非常有趣的研究对象. 有趣的几何构造或例子常常会给出无球流形. 研究哪些群能成为无球闭流形的基本群也是十分有意思的. 无球条件是纯粹同伦论的性质. 然而, 关于无球闭流形的曲率性质以及它万有复叠空间上 Laplace (拉普拉斯) 算子的谱却有一些有趣的问题和猜想. Borel 猜想预测无球闭流形具有拓扑刚性, 并且无球紧 Poincaré (庞加莱) 复形同伦等价于闭流形. 我们会讨论这些问题和猜想的研究进展. 双曲化技术可以产生出怪异无球闭流形, 我们会列举一些例子. 最后, 我们会描述全体闭流形构成的宇宙.

§6 中闭无球流形的分解定理是新的, §8 包含关于边界为维数 $\geq 6$ 的球面的双曲群的一些结果, 这是与 Arthur Bartels 和 Shmuel Weinberger 的合作工作.

作者想感谢波恩马克斯普朗克数学研究所, 本文的一部分完成于作者在 2007 年 10 月至 2007 年 12 月在此访问的期间. 这项工作得到了 Sonderforschungsbereich 478 (特殊研究领域研究奖 478) (数学中的几何结构), 以及作者获得的 Max-Planck (普朗克) 研究奖和

---

译自: European Congress of Mathematics, 53–82, EMS, Zürich, 2010, Survey on aspherical manifolds, Wolfgang Lück. 

作者的邮箱地址是 lueck@math.uni-muenster.de.

Leibniz (莱布尼兹) 奖的基金支持. 作者感谢审稿人提出的宝贵建议.

## 1. 无球流形的同伦理论

从同伦观点来看, 无球 $CW$ 复形完全由其基本群决定. 也就是:

**定理 1.1** (无球空间的同伦分类)

(i) *两个无球 $CW$ 复形是同伦等价的, 当且仅当它们基本群同构;*

(ii) *设 $X$ 和 $Y$ 是连通 $CW$ 复形. 假设 $Y$ 是无球的. 我们有双射*

$$[X,Y] \xrightarrow{\cong} [\Pi(X),\Pi(Y)], \quad [f] \longmapsto [\Pi(f)],$$

*其中 $[X,Y]$ 是从 $X$ 到 $Y$ 的映射同伦类集合, $\Pi(X),\Pi(Y)$ 是基本群胚, $[\Pi(X),\Pi(Y)]$ 是从 $\Pi(X)$ 到 $\Pi(Y)$ 的函子的自然等价类的集合, $\Pi(f):\Pi(X)\to\Pi(Y)$ 是由 $f\colon X\to Y$ 诱导的函子.*

**证明** (ii) 容易验证映射是良好定义的. 为了证明满射和单射, 可以对定义域复形的骨架归纳地构造所需的原像或者同伦. (i) 是 (ii) 的推论. ■

用基本群胚 (fundamental groupoid) 的语言来描述是优雅的, 并且不依赖于基点. 但是读者可能更喜欢用基本群, 这样更加具体. 下面我们从这个角度来看: 我们选取基点 $x\in X$ 和 $y\in Y$. 设 $\hom(\pi_1(\mathrm{X,x}),\pi_1(\mathrm{Y,y}))$ 表示从 $\pi_1(X,x)$ 到 $\pi_1(Y,y)$ 的群同态的集合. 群 $\pi_1(Y,y)$的内自同构群 $\mathrm{Inn}(\pi_1(\mathrm{Y,y}))$ 通过左复合作用在 $\hom(\pi_1(\mathrm{X,x}),\pi_1(\mathrm{Y,y}))$ 上. 读者可以自行检验下面的双射成立

$$\mathrm{Inn}(\pi_1(\mathrm{Y,y}))\backslash\hom(\pi_1(\mathrm{X,x}),\pi_1(\mathrm{Y,y})) \xrightarrow{\cong} [\Pi(\mathrm{X}),\Pi(\mathrm{Y})].$$

通过这个双射, 上述定理 (ii) 中的双射将 $[f]$ 送到 $\pi_1(f,x)$, 其中 $f$ 是任意满足 $f(x)=y$ 代表映射. 下文中我们将通常忽略基点, 特别是在处理基本群时.

**引理 1.2** *$CW$复形 $X$是无球的, 当且仅当它是连通的, 并且万有覆叠空间 $\widetilde{X}$可缩.*

**证明** 投影 $p\colon\widetilde{X}\to X$诱导同伦群 $\pi_n(n\ge 2)$上的同构, 而 $CW$ 复形可缩当且仅当其全部同伦群平凡 [99, 第 182 页定理 IV.7.17]. ■

基本群为 $\pi$的无球 $CW$ 复形 $X$ 与 $(\pi,1)$ 型的 *Eilenberg-Mac Lane* (艾伦伯格 – 麦克莱恩) 空间 $K(\pi,1)$ 以及 群 $\pi$ 的分类空间 $B\pi$ 是一回事的.

## 2. 无球流形的例子

本节中我们给出无球流形的一些例子和构造.

### 2.1 非正曲率

令 $M$ 为闭的光滑流形. 假设它具有截面曲率是非正 (即处处 $\le 0$) 的 Riemann (黎曼) 度量. 那么万有复叠空间 $\widetilde{M}$继承了一个完备的截面曲率是非正的 Riemann 度量. 因为 $\widetilde{M}$ 单连通且具有非正截面曲率, Hadamard-Cartan (阿达玛 – 嘉当) 定理 [45, 第 134 页 3.87] 告诉我们 $\widetilde{M}$ 与 $\mathbb{R}^n$ 微分同胚, 因此是可收缩的. 所以 $\widetilde{M}$ 与 $M$ 都是无球的.

### 2.2 低维数

连通闭一维流形与 $S^1$ 同胚, 所以是无球的.

设 $M$ 为连通闭二维流形. 那么 $M$ 要么是无球的, 要么与 $S^2$ 或 $\mathbb{RP}^2$ 同胚. 下列陈述等价: i) $M$ 是无球的. ii) $M$ 允许 *平坦的* (*flat*) (即截面曲率为常数 0) 或者 *双曲的* (*hyper-*

*bolic*) (即截面曲率为常数 $-1$) 的 Riemann 度量. iii) $M$ 的万有复叠空间与 $\mathbb{R}^2$ 同胚.

连通闭三维流形 $M$ 称为 *素的* (*prime*), 如果对于任何连通和分解 $M \cong M_0 \sharp M_1$, 必有 $M_0$ 或 $M_1$ 同胚于 $S^3$. $M$ 称为 *不可约的* (*irreducible*), 如果任何嵌入的球面 $S^2$ 界定球体 $D^3$. 每个不可约的闭三维流形是素的. 一个素三维流形要么是不可约的，要么是 $S^1$ 上的 $S^2$丛 [53, 第 28 页引理 3.13]. 可定向闭三维流形是无球的且仅当它是不可约的并且具有无穷的基本群. 闭三维流形是无球的当且仅当它是不可约的并且基本群无穷且没有二阶元. 这可以由球面定理 (Sphere Theorem) 推出 [53, 第 40 页定理 4.3].

Thurston (瑟斯顿) 几何化猜想可以推出一个闭三维流形是无球的当且仅当其万有复叠空间与 $\mathbb{R}^3$ 同胚. 这是因为 [53, 第 142 页定理 13.4] 以及具有紧商以及拓扑可缩的三维几何与 $\mathbb{R}^3$ 微分同胚 [89].

一个基于 Perelman (佩雷尔曼) 思想的 Thurston 几何化猜想的证明见 [74].

存在不具有非正截面曲率 Riemann 度量的三维可定向无球闭流形 [66].

关于三维流形的更多信息见 [53, 89].

### 2.3 几乎连通李群的无挠离散子群

设 $L$是具有有限多道路连通分支的李群，令 $K \subseteq L$为极大紧子群， $G \subseteq L$ 是离散 (discrete) 无挠 (torsion free) 子群. 那么 $M = G\backslash L/K$是具有基本群 $G$ 的闭无球流形，因为其万有复叠空间 $L/K$与 $\mathbb{R}^n$ 微分同胚 [52, 第六章定理 1], $n$ 为某个正整数.

### 2.4 双曲化

无球流形的一类非常重要的构造来自于 Gromov (格罗莫夫) 的 *双曲化技术* (*hyperbolization technique*) [49]. 它把胞腔复形转化为非正曲率 (因此无球) 的多面体. 粗略的想法是先对单形定义这个双曲化，使得它在包含映射下具有自然性，然后通过单纯复形的组合结构把各个单形对应的双曲化粘贴起来以定义单纯复形的双曲化. 目标是使最终双曲化的结果既能够保持原有单纯复形的结构，又能够产生具有非正曲率因而无球的多面体. 因为这个构造保持了局部结构，它可以将闭流形转化为闭流形.

我们简要说明一下 *可定向双曲化的过程* (*orientable hyperbolization procedure*). 关于这个构造更进一步论述可以在 [19, 22, 24, 25] 中找到. 我们从有限维单纯复形 $\Sigma$ 开始，赋予它一个方块胞腔复形 $h(\Sigma)$ 以及满足如下性质的自然映射 $c\colon h(\Sigma) \to \Sigma$:

(i) $h(\Sigma)$ 是非正曲率的，因而是无球的；

(ii) 自然映射 $c\colon h(\Sigma) \to \Sigma$ 诱导整系数同调群满射；

(iii) $\pi_1(c)\colon \pi_1(h(\Sigma)) \to \pi_1(\Sigma)$ 是满射；[1)]

(iv) 如果 $\Sigma$ 是可定向流形，则

(a) $h(\Sigma)$ 是流形；

(b) 自然映射 $c\colon h(\Sigma) \to \Sigma$ 具有映射度 1;

(c) 切丛 $Th(\Sigma)$ 与拉回 $c^*T\Sigma$ 稳定同构；

**注 2.1** (示性数与无球流形)　假设 $M$ 是一个无球闭流形. 那么 $M$ 的示性类在自

1) 原文把此式左端误为 $\pi_1(f)$.—— 译注

然映射 $c\colon h(M) \to M$ 下的拉回给出 $h(M)$ 的示性类. 并且 $h(M)$ 和 $M$ 具有相同的示性数. 这表明无球条件不会对流形的示性数施加任何限制.

**注 2.2** (配边与无球流形) 上面的条件说明 $c$ 是手术理论意义下的法映射. 可以证明 $c$ 与 $M$ 上的恒同映射是法配边的. 特别地, $M$ 和 $h(M)$ 定向配边.

考虑对分段线性 (PL) 或光滑流形的稳定切丛赋予一定条件而得到的配边理论 $\Omega_*$. 例如无定向配边 (unoriented bordism), 定向配边 (oriented bordism), 标架配边 (framed bordism). 则任何配边类都可以由无球流形表示. 如果两个闭无球流形代表相同的配边类, 那么可以找到他们之间的无球配边. 见 [22, 注 15.1] 和 [25, 定理 B].

### 2.5 怪异无球流形

以下结果取自 Davis-Januszkiewicz [ 25, 定理 5a.1].

**定理 2.3** *存在一个无球闭四维流形 $N$ 具有以下性质:*

(i) *$N$ 不同伦等价于任何一个 $PL$– 流形;*

(ii) *$N$ 不可三角剖分, 即不与任何单纯复形同胚;*

(iii) *万有复叠空间 $\widetilde{N}$ 不与 $\mathbb{R}^4$ 同胚;*

(iv) *$N$ 同伦等价于一个分段平坦, 非正曲率多面体.*

下一个结果来自于 Davis-Januszkiewicz [25, 定理 5a.4].

**定理 2.4** (非 PL例子) *对每个 $n \geq 4$, 存在不同伦等价于任何 $PL$–流形的无球闭流形.*

下列定理的证明可以在 [23], [25, 定理 5b.1] 中找到.

**定理 2.5** (怪异万有覆盖) *对于每个 $n \geq 4$, 存在一个无球闭流形, 其万有覆盖不同胚于 $\mathbb{R}^n$.*

根据 Hadamard-Cartan 定理 [45, 第 134 页 3.87], 上述定理中的无球流形不能同胚于带非正截面曲率 Riemann 度量的光滑流形.

下面的定理可以由 [25, 定理 5c.1 和第 386 页注释] 通过考虑理想边界来证明. 理想边界在负曲率情形下是拟等距同构不变量.

**定理 2.6** (具有双曲基本群的怪异例子) *对于每一个 $n \geq 5$, 存在无球闭光滑 $n$ 维流形 $N$, 它与严格负曲率多面体同胚, 因而具有双曲基本群并且万有复叠空间同胚于 $\mathbb{R}^n$, 但是 $N$ 不同胚于带负截面曲率 Riemann 度量的光滑流形.*

接下来的结果来自于 Belegradek [8, 推论 5.1], Mess [71] 和 Weinberger [22, §13].

**定理 2.7** (怪异基本群)

(i) *对于每个 $n \geq 4$, 存在 $n$ 维闭无球流形, 它的基本群包含无限可除的交换群;*

(ii) *对于每个 $n \geq 4$, 存在 $n$ 维无球闭流形, 它的基本群的字问题 (word problem) 不可解, 并且它的单纯体积 (simplicial volume) 非零.*

注意, 有限表出的具有不可解字问题的群不是 CAT(0)– 群, 不是双曲的, 不是自动的 (automatic), 不是异步自动的 (asynchronously automatic), 不是剩余有限的 (residually finite), 在任何交换环上不是线性的 [8, 注 5.2].

定理 2.7 的证明是基于 *反射群技巧* (*reflection group trick*), 它出现在 [22, §8, §10 和 §13]. 可以总结如下:

**定理 2.8** (反射群技巧)　*设 $G$ 是具有有限维分类空间 $BG$ 的群. 那么存在无球闭流形 $M$ 与映射 $i\colon BG \to M$ 和 $r\colon M \to BG$, 使得 $r \circ i = \mathrm{id}_{BG}$.*

**注 2.9** (反射群技巧和各种猜想)　反射群技巧的另一个有趣直接推论是 [22, §11] 许多众所周知的关于群的猜想对于具有有限分类空间的群成立，当且仅当这一猜想对于每个无球闭流形的基本群成立. 这适用于诸如 Kaplansky (卡普兰斯基) 猜想，单位元猜想 (Unit Conjecture), 零因子猜想 (Zero-divisor Conjecture), Baum-Connes (鲍姆 – 孔涅) 猜想，正则环 $R$ 上的代数 $K$ 理论的 Farrell-Jones (琼斯) 猜想，以及代数 $L$ 理论的 Farrell-Jones 猜想，$\widetilde{K}_0(\mathbb{Z}G)$ 和 $\mathrm{Wh}(G)$ 的消灭猜想. 这些猜想的更多信息和关联，见 [6], [68] 和 [70]. 反射群技巧的更多类似结果见 Belegradek [8].

## 3. 非无球闭流形

维数 $\geq 1$ 的具有有限基本群的闭流形不可能是无球的. 所以常见的非无球闭流形是球面，透镜空间，实射影空间和复射影空间等.

**引理 3.1**　*无球有限维 $CW$ 复形 $X$ 的基本群是无挠的.*

**证明**　令 $C \subseteq \pi_1(X)$ 是 $\pi_1(X)$ 的有限循环子群. 我们要证明 $C$ 是平凡的. 由于 $X$ 是无球的，商空间 $C\backslash\widetilde{X}$ 是分类空间 $BC$ 的一个有限维模型. 因此，对于充分大的 $k$, 同调群 $H_k(BC) = 0$, 这意味着 $C$ 是平凡的. ■

**引理 3.2**　*如果 $M$ 是不同伦等价于球面的维数 $n \geq 3$ 的流形 $M_1$ 和 $M_2$ 的连通和 $M_1 \sharp M_2$, 则 $M$ 不是无球的.*

**证明**　我们用反证法. 假设 $M$ 是无球的. 将 $S^{n-1}$ 坍缩到单点可以给出一个显然的映射 $f\colon M_1 \sharp M_2 \to M_1 \vee M_2$, 此映射是 $(n-1)$– 连通的，这里 $n$ 是 $M_1$ 和 $M_2$ 的维数. 令 $p\colon \widetilde{M_1 \vee M_2} \to M_1 \vee M_2$ 为万有覆盖. 根据 Seifert-van Kampen (赛弗特 – 范坎彭) 定理,1) $M_1 \vee M_2$ 的基本群是 $\pi_1(M_1) * \pi_1(M_2)$, 并且包含映射 $M_k \to M_1 \vee M_2$ 在基本群上诱导出单射，$k = 1, 2$. 由此可得 $p^{-1}(M_k) = \pi_1(M_1 \vee M_2) \times_{\pi_1(M_k)} \widetilde{M_k}$, $k = 1, 2$. 由于 $n \geq 3$, 所以映射 $f$ 诱导基本群间的同构并且映射 $\tilde{f}\colon \widetilde{M_1 \sharp M_2} \to \widetilde{M_1 \vee M_2}$ 是 $(n-1)$ 连通的. 因为 $\widetilde{M_1 \sharp M_2}$ 是可缩的, 同调群 $H_m(\widetilde{M_1 \vee M_2}) = 0$, $1 \leq m \leq n-1$. 由于 $p^{-1}(M_1) \cup p^{-1}(M_2) = \widetilde{M_1 \vee M_2}$ 且 $p^{-1}(M_1) \cap p^{-1}(M_2) = p^{-1}(\{\cdot\}) = \pi_1(M_1 \vee M_2)$, 我们利用 Mayer-Vietoris (迈尔 – 菲托里斯) 序列得出 $H_m(p^{-1}(M_k)) = 0$, $1 \leq m \leq n-1$. 这意味着 $H_m(\widetilde{M_k}) = 0, 1 \leq m \leq n-1$, 因为 $p^{-1}(M_k)$ 是若干个 $\widetilde{M_k}$ 的不交并.

假设 $\pi_1(M_k)$ 是有限的. 根据引理 3.1, $\pi_1(M_1 \sharp M_2)$ 是无挠的，那么 $\pi_1(M_k)$ 必须是平凡的并且 $M_k = \widetilde{M_k}$. 由于 $M_k$ 是单连通的，并且 $H_m(M_k) = 0$, $1 \leq m \leq n-1$, 所以 $M_k$ 与 $S^n$ 是同伦等价的. 由于我们已经假设 $M_k$ 不同伦等价于球面，所以 $\pi_1(M_k)$ 是无限的. 这意味着 $\widetilde{M_k}$ 是非紧的，因此 $H_n(\widetilde{M_k}) = 0$. 因为 $\widetilde{M_k}$ 是 $n$ 维的，对于任意的 $m \geq 1$ 我们得出 $H_m(\widetilde{M_k}) = 0$. 因为 $\widetilde{M_k}$ 单连通，由 Hurewicz (胡雷维奇) 定理 [99, 第 180 页推论 IV.7.8] 可知它的所有同伦群是零. 我们从引理 1.2 得出结论： $M_1$ 和 $M_2$ 是无球的. 使用上面的 Mayer-Vietoris 论证类似地证明 $M_1 \vee M_2$ 是无球的. 由于 $M$ 已经假设是无

1) 原文把下式中的 $M_1 \vee M_2$ 误为 $\pi_1(M_1 \vee M_2)$.—— 校注

球的，根据引理 1.1 (i), 有 $M_1\sharp M_2$ 和 $M_1\vee M_2$ 是同伦等价的．但是它们有不同的欧拉示性数，即 $\chi(M_1\sharp M_2)=\chi(M_1)+\chi(M_2)-(1+(-1)^n)$, $\chi(M_1\vee M_2)=\chi(M_1)+\chi(M_2)-1$, 我们得到一个矛盾． ■

## 4. Borel 猜想

在本节中我们讨论下述猜想：

**猜想 4.1** (群 $G$ 的 Borel 猜想) 如果 $M$ 和 $N$ 是维数 $\geq 5$ 的无球闭流形，并且 $\pi_1(M)\cong\pi_1(N)\cong G$, 那么 $M$ 与 $N$ 是同胚的并且任何同伦等价 $M\to N$ 同伦于同胚.

**定义 4.2** (拓扑刚性) 我们称一个闭流形 $N$ 是拓扑刚性的 (*topologically rigid*), 如果任何同伦等价 $M\to N$ ($M$ 为闭流形) 同伦于同胚.

如果 Borel 猜想对任意的有限表出 (finitely presented) 群成立，那么每一个无球闭流形都具有拓扑刚性.

研究 Borel 猜想的主要工具是手术理论 (surgery theory) 和 Farrell-Jones 猜想．我们考虑 Farrell-Jones 猜想的如下特殊情形.

**猜想 4.3** (正则环和无挠群的 Farrell-Jones 猜想) 设 $G$ 是无挠群， $R$ 是正则环 (例如主理想整环，域或者 $\mathbb{Z}$). 那么

(i) 对任意的 $n\leq -1$, $K_n(RG)=0$;

(ii) 由变系数诱导的同态 $K_0(R)\to K_0(RG)$ 是同构 (这蕴含着 $R=\mathbb{Z}$ 时，约化射影类群 $\widetilde{K}_0(\mathbb{Z}G)=0$);

(iii) 显然定义的映射 $K_1(R)\times G/[G,G]\to K_1(RG)$ 是满射 (这蕴含着 $R=\mathbb{Z}$ 时，Whitehead (怀特黑德) 群 $\mathrm{Wh}(G)=0$);

(iv) 对任意定向同态 $w\colon G\to\{\pm 1\}$, $w$ 扭转版本的 $L$ 理论汇集映射 (assembly map)

$$H_n(BG;{}^w\boldsymbol{L}^{\langle-\infty\rangle})\xrightarrow{\cong}L_n^{\langle-\infty\rangle}(RG,w)$$

是双射.

**引理 4.4** 假设无挠群 $G$ 对 $R=\mathbb{Z}$ 满足猜想 4.3 中 Farrell-Jones 猜想的版本．那么 Borel 猜想对基本群为 $G$的维数 $\geq 5$ 的无球闭流形成立．对 Freedman (弗里德曼) 意义下 “好” 的基本群 $G$ ([42], [43]), 同样结论对四维流形也成立.

**证明概要** 我们只考虑可定向情形．一个闭拓扑流形 $M$ 的拓扑结构集 (*topological structure set*) $\mathcal{S}^{\mathrm{top}}(M)$ 是由所有同伦等价 $M'\to M$ ($M'$ 为闭拓扑流形) 的等价类构成的集合，这里的等价关系如下定义：两个同伦等价 $f_0\colon M_0\to M$, $f_1\colon M_1\to M$ 是等价的，如果存在同胚 $g:M_0\to M_1$ 使得 $f_0$ 同伦于 $f_1\circ g$. 群 $G$ 的 Borel 猜想 4.1 等价于任何基本群为 $G$ 的无球闭流形 $M$的拓扑结构集 $\mathcal{S}^{\mathrm{top}}(M)$ 只有一个元素，即 $\mathrm{id}\colon M\to M$ 的类.

维数 $n\geq 5$ 的可定向闭拓扑流形 $M$ 的手术序列 (*surgery sequence*) 是以下正合序列

$$\cdots\longrightarrow\mathcal{N}_{n+1}\big(M\times[0,1],M\times\{0,1\}\big)\xrightarrow{\sigma}L^s_{n+1}\big(\mathbb{Z}\pi_1(M)\big)$$
$$\xrightarrow{\partial}\mathcal{S}^{\mathrm{top}}(M)\xrightarrow{\eta}\mathcal{N}_n(M)\xrightarrow{\sigma}L^s_n\big(\mathbb{Z}\pi_1(M)\big).$$

序列向左一直延伸．它是拓扑流形分类的基本工具. (同时也有一个光滑版本. ) 正合序列中的 $\sigma$ 把映射度为 1 的法映射送到它的手术障碍．当我们把 $\boldsymbol{L}^s(\mathbb{Z})$ 换为它的 1– 连通覆盖

$\boldsymbol{L}^s(\mathbb{Z})\langle 1\rangle$ 时, $\sigma$ 就是相应的 $L-$ 理论的汇集映射. 映射 $H_k(M;\boldsymbol{L}^s(\mathbb{Z})\langle 1\rangle)\to H_k(M;\boldsymbol{L}^s(\mathbb{Z}))$ 在 $k=n$ 时是单射, 在 $k>n$ 时是同构. 因为 $K$ 理论的假设, 我们可以将上标 $s$ 换为 $\langle -\infty\rangle$. 所以, Farrell-Jones 猜想可以推出 $\sigma\colon\mathcal{N}_n(M)\to L_n^s(\mathbb{Z}\pi_1(M))$ 是单射, $\mathcal{N}_{n+1}(M\times[0,1],M\times\{0,1\})\xrightarrow{\sigma}L_{n+1}^s(\mathbb{Z}\pi_1(M))$ 是双射. 根据上述正合序列, $\mathcal{S}^{\mathrm{top}}(M)$ 只有一个元素, 所以 Borel 猜想 4.1 对 $M$ 成立. 更多细节见 [39, 第 17, 18, 28 页], [87, 第 18 章]. ■

**注 4.5** (低维 Borel 猜想) 根据二维闭流形的分类, Borel 猜想在维数 $\leq 2$ 时成立. 如果 Thurston 几何化猜想是对的, 三维 Borel 猜想也成立. 这可以由 Waldhausen 的结果 (见 Hempel [53, 引理 10.1 与推论 13.7]) 以及 Turaev 的结果 [93] 得到, 具体见 [65, §5]. 根据 Perelman (佩雷尔曼) 的思想, Thurston 几何化猜想的证明已经在 [74] 中给出.

**注 4.6** (非无球流形的拓扑刚性) 拓扑刚性现象对一些非无球流形也成立. 比如, 根据 Poincaré 猜想, 球面 $S^n$ 具有拓扑刚性. Poincaré 猜想已经在所有维数被证明是对的. 这可以由高维 $h$- 配边定理, 四维 Freedman [42] 的工作, 三维 Perelman [62, 73] 的工作, 以及二维闭曲面的分类得到.

Kreck-Lück [65] 分析并得到了更多具有拓扑刚性的例子. 比如, 两个维数 $\geq 5$ 的具有拓扑刚性流形的连通和, 如果它的基本群不含有二阶元素, 则也是拓扑刚性的. 注意两个流形的连通和一般不是无球的 (见引理 3.2). 球面乘积 $S^k\times S^n$ 具有拓扑刚性当且仅当 $n,k$ 都是奇数. 维数 $n\geq 5$ 的整系数同调球具有拓扑刚性当且仅当含入映射 $\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}[\pi_1(M)]$ 诱导的单 (simple) $L$ 群同态 $L_{n+1}^s(\mathbb{Z})\to L_{n+1}^s(\mathbb{Z}[\pi_1(M)])$ 是同构.

**注 4.7** (Borel 猜想在光滑范畴不成立) Borel 猜想 4.1 在光滑范畴不成立, 即如果把拓扑流形换成光滑流形, 同胚换成微分同胚, 则 Borel 猜想是不对的. 环面 $T^n(n\geq 5)$ 就是一个反例 [97, 15A]. Farrell-Jones [31, 定理 0.1] 构造了负曲率流形的反例.

**注 4.8** (Borel 猜想与 Mostow (莫斯托) 刚性) Farrell-Jones [31, 定理 0.1] 中的例子实际上给出了更多信息. 即, 对任意给定的 $\epsilon>0$, 存在截面曲率取值于 [1)] $[-1-\varepsilon,-1+\varepsilon]$ 的闭 Riemann 流形 $M_0$, 以及闭双曲流形 $M_1$, 使得 $M_0$ 与 $M_1$ 同胚但不微分同胚. 构造的本质思想是取 $M_1$ 与怪球 (exotic sphere) 的连通和. 注意如果可以取 $\epsilon=0$, 根据定义 $M_0$ 会是双曲的. 所以这个例子在 *Mostow 刚性* (*Mostow rigidity*) 的观点下是十分引人注目的. Mostow 刚性指的是两个闭双曲流形 $N_0$, $N_1$ 等距微分同胚当且仅当它们的基本群同构, 并且任何同伦等价 $N_0\to N_1$ 同伦于一个等距微分同胚.

可以将 Borel 猜想看作 Mostow 刚性的拓扑版本. Borel 猜想的结论更弱, 只能得到同胚, 而不是等距微分同胚. 但是 Borel 猜想的假设也更一般, 因为无球闭拓扑流形比双曲闭流形多得多.

**注 4.9** (Farrell-Jones 的工作) Farrell-Jones 对 Borel 猜想的证明做出了深刻贡献. 他们证明在维数 $\geq 5$ 时如下情形的 Borel 猜想是对的: 非正曲率闭 Riemann 流形, 紧完备仿射平坦流形, 以及基本群同构于 A- 正则的非正曲率 Riemann 流形基本群的闭无球流形 [32, 33, 35, 36].

1) 原文把 $[-1-\varepsilon,-1+\varepsilon]$ 误为 $[1-\varepsilon,-1+\varepsilon]$.—— 译注

下述结果由 Bartels 和 Lück 证明 [4].

**定理 4.10** 设 $\mathscr{C}$ 为满足如下性质的群的极小类：

• $\mathscr{C}$ 包含所有双曲群；

• $\mathscr{C}$ 包含所有能够真 (proper) 等距且余紧地作用在完备正常 (proper)CAT(0) 空间上的群；

• 如果 $G_1, G_2$ 属于 $\mathscr{C}$, 那么 $G_1 * G_2$ 和 $G_1 \times G_2$ 属于 $\mathscr{C}$;

• 如果 $H$ 是 $G$ 的子群且 $G \in \mathscr{C}$, 那么 $H \in \mathscr{C}$;

• 设 $\{G_i \mid i \in I\}$ 是群的正向系 (其中的结构映射不一定是单射), 并且对每个 $i \in I$ 有 $G_i \in \mathscr{C}$. 则正向余极限 $\mathrm{colim}_{i\in I} G_i$ 属于 $\mathscr{C}$.

那么 $\mathscr{C}$ 中每个群 $G$ 满足 Farrell-Jones 猜想 4.3.

**注 4.11** (怪异无球闭流形) 定理 4.10 可以推出 §2.5 中的维数 $\geq 5$ 的怪异无球流形满足 Borel 猜想，因为他们的万有复叠空间是 CAT(0) 空间.

**注 4.12** (双曲群的正向极限) 文献中有一大类有趣的群, 例如 Olshanskii-Osin-Sapir [80] 的 *间隙群* (*lacunary groups*), 以及由 Arzhantseva-Delzant [2, 定理 7.11 和定理 7.12] 构造出来, 在 Higson-Lafforgue (拉福格)–Skandalis [54] 中作为 *带系数 Baum-Connes 猜想* 反例中 *带有扩张子的群* (*groups with expanders*), 因为这些群都是双曲群的正向极限，根据定理 4.10, 它们都满足 Farrell-Jones 猜想和维数 $\geq 5$ 时的 Borel 猜想.

Bartels-Echterhoff-Lück [3] 也证明了双曲群的正向极限满足 *Bost 猜想*.

(纤维化的)Farrell-Jones 猜想的起源是 Farrell-Jones 的文章 [34, 第 257 页 1.6, 第 262 页 1.7]. Farrell-Jones 猜想的 $C^*$ 代数对应是 Baum-Connes 猜想 [7, 第 254 页 Conjecture 3.15]. Baum-Connes 猜想和 Farrell-Jones 猜想的更多信息和文献，见综述文章 [70].

## 5. Poincaré 对偶群

下列定义由 Johnson-Wall [59] 提出.

**定义 5.1** (Poincaré 对偶群) 群 $G$ 称为 *$n$ 维 Poincaré 对偶群* (*Poincaré duality group of dimension $n$*), 如果下列条件成立：

(i) 群 $G$是 FP 型的, 即平凡 $\mathbb{Z}G$模 $\mathbb{Z}$具有由有限生成射影 $\mathbb{Z}G$模构成的有限维分解;

(ii) 有交换群同构

$$H^i(G;\mathbb{Z}G) \cong \begin{cases} \{0\} & \text{当 } i \neq n \text{ 时;} \\ \mathbb{Z} & \text{当 } i = n \text{ 时.} \end{cases}$$

下述定义来自于 Wall [96]. $CW$ 复形 $X$ 称为 *有限控制的* (*finitely dominated*), 如果存在有限 $CW$ 复形 $Y$ 以及映射 $i: X \to Y$, $r: Y \to X$ 满足 $r \circ i \simeq \mathrm{id}_X$.

**定义 5.2** (Poincaré 复形) 设 $X$ 为连通的，有限控制的 $CW$ 复形，基本群为 $\pi$.

$X$ 称为 *$n$ 维 Poincaré 复形* (*Poincaré complex of dimension $n$*), 如果存在定向同态 $w: \pi \to \{\pm 1\}$ 和万有复叠空间 $\widetilde{X}$ 的以 $\mathbb{Z}\pi$–模 ${}^w\mathbb{Z}$[1) ]为系数的 $n$ 维 $\pi$– 等变同调群的元素

$$[X] \in H_n^\pi(\widetilde{X}; {}^w\mathbb{Z}) = H_n(C_*(\widetilde{X}) \otimes_{\mathbb{Z}\pi} {}^w\mathbb{Z}),$$

1) 原文把 $\mathbb{Z}\pi$–模 ${}^w\mathbb{Z}$ 误为 $\mathbb{Z}G$–模 ${}^w\mathbb{Z}$. —— 译注

使得在相差 $\mathbb{Z}\pi$ 链同伦等价意义下唯一的 $\mathbb{Z}\pi$ 链映射

$$-\cap[X]: C^{n-*}(\widetilde{X}) = \hom_{\mathbb{Z}\pi}(C_{n-*}(\widetilde{X}), \mathbb{Z}\pi) \to C_*(\widetilde{X})$$

是 $\mathbb{Z}\pi$– 链同伦等价. 这里 ${}^w\mathbb{Z}$ 的基础交换群是 $\mathbb{Z}$, 并且是任意 $g \in \pi$ 通过 $w(g)$ 乘法作用在 $\mathbb{Z}$ 上得到的 $\mathbb{Z}\pi$ 模 [1).

如果 $X$ 还是有限 $CW$ 复形, 我们称 $X$ 为 $n$ 维有限 *Poincaré* 对偶复形 (*finite Poincaré duality complex of dimension n*).

一个拓扑空间 $X$ 称为 绝对邻域收缩 (*absolute neighborhood retract*) (简称 ANR), 若对任意的正则空间 $Z$, 子空间 $Y \subseteq Z$ 和连续映射 $f: Y \to X$, 都存在 $Y$ 在 $Z$ 中的邻域 $U$ 和 $f$ 在 $U$ 上的扩张 [2) $F: U \to X$. 一个 紧 $n$ 维同调 ANR 流形 (*compact n-dimensional homology* ANR-*manifold*) $X$ 是一个满足如下性质的紧绝对邻域收缩：它具有可数拓扑基和有限拓扑维数，并且对任意 $x \in X$ 同调群 $H_i(X, X-\{x\})$ 平凡当 $i \neq n$, 为无限循环群当 $i = n$. $n$ 维闭拓扑流形是紧 $n$ 维同调 ANR 流形的例子 [21, 第 191 页推论 1A, V. 26].

**定理 5.3** (同调 ANR 流形和有限 Poincaré 复形)　*设 $M$ 为 $n$ 维闭拓扑流形，或者更一般地，紧同调 ANR 流形. 那么 $M$ 同伦等价于一个有限 $n$ 维 Poincaré 复形.*

**证明**　闭拓扑流形，或者更一般地，紧同调 ANR 流形同伦等价于有限 $CW$ 复形 ([61, 定理 2.2], [98]). 闭流形满足 Poincaré 对偶的通常证明对同调流形也成立. ■

**定理 5.4** (Poincaré 对偶群)　*设 $G$ 为群， $n \geq 1$ 为整数. 那么,*

(i) *下述命题等价：*

(a) *$G$ 是有限表出的 $n$ 维 Poincaré 对偶群;*

(b) *存在 $n$ 维无球 Poincaré 复形，其基本群为 $G$.*

(ii) *假设 $\widetilde{K}_0(\mathbb{Z}G) = 0$. 则下述命题等价：*

(a) *$G$ 是有限表出的 $n$ 维 Poincaré 对偶群;*

(b) *存在有限 $n$ 维无球 Poincaré 复形，其基本群为 $G$.*

(iii) *群 $G$ 是一维 Poincaré 对偶群当且仅当 $G \cong \mathbb{Z}$.*

(iv) *群 $G$ 是二维 Poincaré 对偶群当且仅当 $G$ 同构于无球闭曲面的基本群.*

**证明**　(i) 每个有限控制的 $CW$ 复形具有有限表出的基本群，这是因为有限 $CW$ 复形的基本群是有限表出的，并且有限表出群的收缩也是有限表出的 [94, 引理 1.3]. 如果存在分类空间 $BG$ 的一个 $CW$ 复形模型其维数为 $n$, 那么 $G$ 的上同调维数 $\mathrm{cd}(G) \leq n$. 当 $n \geq 3$ 时，反之也成立 ([14, 第 205 页第 VIII.7 章定理 7.1], [29], [94], [95]). 这蕴含着当 $n \geq 1$ 时 (i)(b) $\Longrightarrow$ (i)(a) 以及当 $n \geq 3$ 时 (i)(a) $\Longrightarrow$(i)(b). 更多细节，见 [59, 定理 1]. 剩余情况 (当 $n = 1, 2$ 时 (i)(a) $\Longrightarrow$(i)b) 可以由 (iii) 和 (iv) 推出.

(ii) 当 $n \geq 3$ 时，可以由 (i) 以及 Wall 的结果 (有限控制的 $CW$ 复形能否同伦等价于有限复形的有限性障碍 (finiteness obstruction) 在 $\widetilde{K}_0(\mathbb{Z}G)$ 中 [3)) 推出 (ii) [37, 72, 94, 95]. (ii)(b)$\Longrightarrow$(ii)(a) 对任意 $n \geq 1$ 成立. 而 (ii)(a)$\Longrightarrow$(ii)(b) 可以由 (iii) 和 (iv) 推出.

---

1) 原文把 $\mathbb{Z}\pi$ 模误为 $\mathbb{Z}G$ 模.—— 译注

2) 原文把 $F: U \to X$ 误为 $F: U \to Z$.—— 译注

3) 原文把 $\widetilde{K}_0(\mathbb{Z}G)$ 误为 $\widetilde{K}_0(\mathbb{Z}\pi)$.—— 译注

(iii) 因为 $S^1 = B\mathbb{Z}$ 是一维闭流形，因此由定理 5.3, $\mathbb{Z}$ 是一维 Poincaré 有限对偶群. 我们从论断 (i) 中出现的 (简单的) 蕴涵关系 (i)(b)$\Longrightarrow$(i)(a) 推导得到 $\mathbb{Z}$ 是一维 Poincaré 对偶群. 假设 $G$ 是一维 Poincaré 对偶群. 因为 $G$ 的上同调维数是 1, 则它必定是自由群 [91, 92]. 因为 FP 型群的同调群是有限生成的，所以 $G$ 同构于一个秩为 $r$ 的有限生成自由群 $F_r$. 因为 $H^1(BF_r) \cong \mathbb{Z}^r$, 并且 $H_0(BF_r) \cong \mathbb{Z}$, Poincaré 对偶只能对 $r = 1$ 成立，即 $G$ 就是 $\mathbb{Z}$.

(iv) 由 [27, 定理 2] 证明. 亦见 [10, 11, 26, 28]. ■

**猜想 5.5** (无球 Poincaré 复形) *每个有限无球 Poincaré 复形同伦等价于闭流形.*

**猜想 5.6** (Poincaré 对偶群) *一个有限表出群 $G$ 是 $n$ 维 Poincaré 对偶群，当且仅当它是 $n$ 维无球闭拓扑流形的基本群.*

根据定理 5.3 和定理 5.4(i), 猜想 5.5 和猜想 5.6 等价.

*圆盘分离性质* (*disjoint disk property*) 指的是对任意 $\epsilon > 0$ 以及映射 $f, g\colon D^2 \to M$ 存在映射 $f', g'\colon D^2 \to M$, 使得 $f$ 与 $f'$, $g$ 与 $g'$ 之间的距离不大于 $\epsilon$, 并且 $f'(D^2) \cap g'(D^2) = \emptyset$.

**引理 5.7** *设无挠群 $G$ 以及环 $R = \mathbb{Z}$ 满足定理 4.3 中的 Farrell-Jones 猜想. 设 $X$ 为维数 $\geq 6$ 且 $\pi_1(X) \cong G$ 的 Poincaré 复形. 那么 $X$ 同伦等价于一个满足圆盘分离性质的紧同调 ANR 流形.*

**证明** 见 [87, 第 297 页注 25.13], [15, 第 439 页主定理与 §8], [16, 定理 A, 定理 B].■

**注 5.8** (紧同调 ANR 流形与闭拓扑流形) 下述讨论中流形维数 $\geq 6$. 人们可能期望引理 5.7 中的 “紧同调 ANR 流形” 能够换成 “闭拓扑流形”. 问题是在几何手术正合序列里，人们只能够使用 $L$ 理论谱 $\boldsymbol{L}$ 的 1- 连通覆盖 $\boldsymbol{L}\langle 1\rangle$, 然而在 Farrell-Jones 猜想框架下的汇集映射里出现的是谱 $\boldsymbol{L}$ 本身. $L$ 理论谱 $\boldsymbol{L}$ 是周期为 4 的，即对任意整数 $n$, $\pi_n(\boldsymbol{L}) \cong \pi_{n+4}(\boldsymbol{L})$. 有一个谱映射 $f\colon \boldsymbol{L}\langle 1\rangle \to \boldsymbol{L}$, 当 $n \geq 1$ 时， $\pi_n(f)$ 是同构；当 $n \leq 0$ 时，$\pi_n(\boldsymbol{L}\langle 1\rangle) = 0$. 因为 $\pi_0(\boldsymbol{L}) \cong \mathbb{Z}$, 如果只考虑周期 $L$ 理论谱，就会丢掉 Ranicki 定义的*全手术障碍* (*total surgery obstruction*) (即有限 Poincaré 复形同伦等价于闭拓扑流形的障碍) 中与 $L_0(\mathbb{Z})$ 相关的部分，而仅得到有限 Poincaré 复形同伦等价于紧同调 ANR 流形的障碍 (称为*周期 4 完全手术障碍* (*four-periodic total surgery obstruction*)). 这两个障碍的差别与 Quinn 的取值于 $L_0(\mathbb{Z})$ 的*消解障碍* (*resolution obstruction*) 相关. $L_0(\mathbb{Z})$ 中的任意元素可以实现为某个紧同调 ANR 流形的*消解障碍*. 存在紧同调 ANR 流形而不同伦等价于闭流形的例子. 然而，尚不知道是否存在不同伦等价于闭流形的无球紧同调 ANR 流形. 对无球紧同调 ANR 流形 $M$ 而言，完全手术障碍和消解障碍携带了相同的信息. 所以，引理 5.7 中的 “紧同调 ANR 流形” 能够换成 “闭拓扑流形”, 当且仅当任意满足圆盘分离性质的紧同调 ANR 流形可以消解.

关于这一主题的更多信息，见 [15, 38, 85, 86, 87].

**问题 5.9** (无球情形的消解障碍消失) 是否每个无球紧同调 ANR 流形同伦等价于闭流形？

*(未完待续)*

(叶圣奎 译　　苏阳 校)