物理学，Kac-Moody 代数，Kac-Moody 对称

② 物理学的航标：Kac-Moody 对称

283-289

Louise Dolan

Dolan, L 袁文俊 O411.1

Kac-Moody 代数除了在物理学中有广泛应用外，与数论和模形式也有密切联系.

虽然早在 2000 年前古希腊人已经认识到发展一种超越实际应用的数学的重要性，但即使在今天这依然是鼓舞人心的：即人们仅出于对抽象的兴趣而创造出来的数学思想，使得他们能对自然界加以明确的描述. 从历史上看，古希腊人发现的五种具有惊人的对称性正多面体就孕育了对称性这一科学思想. 在十九世纪，对称性质在数学上首先由 Galois 将之概括为“群”这一数学概念，然后是 Sophus Lie 的连续群.

1967 年，当时在 Moscow 工作的 Victor Kac (MIT)[26] 和 Bob Moody(Alberta)[38] 各自独立地扩充了经典 Lie 代数的范围，结果导致了新的无穷维代数的出现. 现在这一类代数即仿射 Kac-Moody 代数的表示理论已经趋于成熟.

到了本世纪八十年代，那些在基本粒子理论，引力和两维相变领域中工作的物理学家以这些代数为基本框架来考虑诸如规范场论中的非微扰解，弦论中在紧化空间上的顶点放射算子和二维量子场论的可积性以及共形场论等问题. 最近 Kac-Moody 代数被视为将所有超弦归结为同一理论的非微扰弦的对偶对称性，人们已将无限维 Lie 代数与群作为超弦理论的对称统一的候选理论.

除了在物理学中的广泛应用外，Kac-Moody 代数也与数论和模形式有关. Kac-Moody 代数也出现在零散的单魔群和诸如密码、格与共形场等理论的关系中 [22, 6]. 类似于一些有限群是规则多面体的对称群，魔群和仿射 Lie 代数被视为是共形场论的自同构群 [14, 9]. Kac 将 Weyl 特征公式推广到仿射代数，从而加深了人们对于 Macdonald 组合恒等式的理解. 这些恒等式将无穷乘积与和联系了起来. 人们也对与仿射代数相应的群的拓扑性质 [17, 42] 和与 Kac-Moody 代数奇异性理论相关的簇加以分析. 有一些介绍这些代数的物理应用的文章 [8, 19, 25].

大家所熟知的对称性

在物理学中，一个理论的对称性为求系统通解提供了重要的信息. 例如 Laplace

原题：The Beacon of Kac-Moody Symmetry for Physics. 译自：Notices of The AMS, Vol. 42, No. 12, 1995, pp. 1489–1495.

方程 $\nabla^2U(x,y,z)=0$. 它的通解可以由这个问题的对称性给出的坐标系下的特解叠加得到. 对于一个球形导体, 在 U 是 r,θ 的函数 $U(r,\theta)$ 情形下, 解可以用 r 的某些函数和 Legendre 多项式 $P_n(\theta)$ 表示出来. 在量子场论中, 对称性的几个有用之处包括附加于近似方案正规化上的不变性, 不同的特解之间的对称变换及标识这些解的 Noether 运动常数. 正如 Weyl[53], van der Waerden[51] 及 Wigner[55] 的工作所表明的那样, 在本世纪三十年代理解原子谱和量子力学理论形式的过程中, 有限群和其后的连续 Lie 群及其相应的代数起着关键作用 [54].

我们通常所熟悉的对称性不仅反映了例如 Poincaré 群或引力的一般线性群等时空不变性, 同时也反映了内在规范不变性. 譬如, 由群 $U(1)$ 给出的规范不变性导致了 Maxwell 方程中电荷的守恒. 现代微分几何中联络和曲率的概念描述了引力, 电磁力和物理学中基本相互作用的 Yang-Mills 规范场理论. 早在本世纪二十代 Kaluza 和 Klein[30] 就曾建议将经典引力和电磁理论统一起来, 因为他们观察到可将 Maxwell 场 (后来被视为 $U(1)$ 主丛上的联络) 理解为定义在五维时空上的引力的额外分量, 其中第五个维度被紧化. 这就将四维的引力和电磁力的对称性联系了起来, 从而成为爱因斯坦研究统一的场论的范例之一. 最终我们可看到 Kaluza-Klein 机制甚至适合于高维模型, 例如弦论.

本世纪七十年代, 高能物理学家一直将 Lie 代数理论作为表征所有规范相互作用的有益工具. 对于强力相互作用 (它描述了夸克之间的相互作用, 而夸克是例如质子强子的组成部分), 现在公认用 $SU(3)$ 来描述. 而对于夸克和轻子 (如电子) 的弱相互作用及电磁相互作用则应是 $SU(2)\times U(1)$. 这种描述是粒子物理学标准模型的一个重要特征 [57, 52, 43, 18]. *大统一理论* 就是努力将这些对称性综合而成为一个统一群. (例如 $SU(5)$) 的子群. *超弦统一理论* 则是统一这些对称性的另一个机制.

现在人们普遍采用 E. Noether 定理来理解群论对基本力定律的解释. E. Noether 的定理将 Lie 代数的元素与相互作用中守恒载荷等同起来 [40]. 对称性用来标识物理状态: Cartan 子代数的本征值是基本粒子的量子数. 取决于所考虑的群相应的量子数称为载荷, 自旋, 超载荷, 同位旋等等. 这依赖于所考虑的是哪个群. 当代高能物理学家卓有成效地将强力, 弱力和电磁力的基本粒子视为 Poincare 群和 $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ 的直积之不可约表示.

由载荷的守恒导出的选择定规限制量子数可容许的改变. 然而我们只知道四维量子场论跃迁振幅之显式解的一个微扰展开式, 就是说我们不十分精确地了解它们. 这种弱耦合微扰近似理论在弱电 (electro-weak) 理论中十分有用, 但为什么夸克被禁闭在强子内部的强耦合问题, 却依然令人难以捉摸.

在二维时空中, 情形有所不同. 离散系统 (如对于 Ising 模型) 和连续理论 (如对于 sine-Gordon 方程和主手征模型) 都可以精确地求解, 即由于有无数个守恒律所以它们可积. 本质上来讲每个理论都有同其自由度相同数量的运动常数. 例如人们曾经用仿射代数来构造 Korteweg-de Vries 方程的一般类型的解, 也用它来对周期 Toda 格进行线性化. 在有限个参数的代数情形中, Lie 群轨道的思想导致对可积 Toda 链

的量子化 [31]. 数学物理中这些极为漂亮的结果告诉我们：无穷维代数连同有限参数的对称代数对物理理论来讲可能是很重要的.

Kac-Moody 对称和共形场理论

大约一百年前 E. Cartan 和 Killing 创建了有限维半单 Lie 代数的理论. 他们赋予每一个代数一正定的有限整数矩阵. 通过放松正定这一条件来推广 Cartan 矩阵，我们就可得到 Kac-Moody 代数. 它的一个子类是传统的 Lie 代数，另一子类称之为 *仿射* 代数，是用半正定的条件替代正定条件而得的，相应的结构和表示论与半单有限维代数的结构和表示论十分相似. 仿射代数的交换关系是：

$$[T_n^a, T_m^b] = i f_{abc} T_{n+m}^c + k n \delta_{n,-m} \delta_{ab},$$

其中 $n, m \in \mathbb{Z}, T_0^a \in g, g$ 是其结构常数为 f_{abc} 的任一半单 Lie 代数. 所以 $1 < a, b, c < \dim g$. 中心扩张 k 与单位元成比例，且与仿射代数的水平 (level) 相关. 既然生成元是 (电) 流的矩，即密度 $T^a(z) = \sum_n T_n^a z^{-n-1}$, 那么它们的换位子 (commutator) 在 $|z| > |\zeta|$ 时可以等价地用算子乘积的展开来表示：

$$T^a(z) T^b(\zeta) = (z-\zeta)^{-1} i f_{abc} T^c(\zeta) + (z-\zeta)^{-2} k \delta_{ab} + \text{正则项}.$$

这个展开使人想起局部粒子对称的 Gell-Mann 的流代数方法. 这就强调不仅载荷算子 Q^a 形成一个代数，例如用八重 (eightfold) 法对基本粒子进行分类时的 $SU(3)$, 并且局部电流 $J^a(x)$ 也满足代数交换关系 [1, 49].

非仿射的无穷维 Kac-Moody 代数称为是 *双曲的*. 最近它们与超弦理论的联系使我们能够更好地理解它们的表示 [16].

对于一个 Kac-Moody 代数， Cartan 矩阵及 Cartan 子代数依然是有限维的. 每一个仿射代数 $\hat{g}$ 都有一有限维的半单 Lie 子代数 g, g 的秩 (即单根的个数) 等于整个仿射代数的秩减去 1. 这样那些具有较强的对称性的理论有一个叫做水平 (level) 的附加量子数，我们也可以将仿射代数加以扩充使之包含一个叫做导算子的元素 —— L_0, 其中 $[L_0, T_n^a] = -n T_n^a$. 我们可以将 L_0 的本征值想像成仿射载荷. 它衡量物理理论的质量水平. 导算子是另一个无穷维代数， Virasoro 代数，的一组生成元 $\{L_n\}$ 中 $n=0$ 所对应的元素. 这些生成元可由 Sugawara 构造导出，且对仿射生成元是双线性的 ($(L(z) \equiv 1/(2k + c_\psi) \sum_{ax}^{x} T^a(z) T^a(z)_x^x$), 这样

$$[L_n, L_m] = (n-m) L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{n,-m},$$

$$[L_n, T_m^a] = -m T_{n+m}^a,$$

其中中心载荷 c 与仿射代数的水平有关，并且 $f_{abc} f_{abe} = c_\psi \delta_{ce}$.Virasoro 代数对应于二维共形场论的无穷维共形对称. 这些场论不仅与处于相变的二维自旋系统有关，而

且也与在时间中运动的一根弦生成的二维世界叶有关 [4]. 在统计模型中，共形对称的表示将最高权与临界指数等同起来 [15]. 那些物理理论之所以取得进展是因为物理学家们开始探讨关于无穷维代数表示的具体问题.

与仿射载荷相关的量子数是共形权. 仿射代数 $\hat{g}$ 的一个具有非零水平的不可约表示是由水平和最高权所标识，且由 g 的不可约表示的无穷塔所构成. 这个塔分成一些不同的层 (grade), 各个层是由它的共形权区分开来的. 在图 1 中给出了与 $su(2)$ 表示有关的模式的前几层. 对一个给定的表示来说，它所含的 g 的表示成份是由重数公式所表达的 [29], 例如，$\hat{s}u(2)$ 的水平为一的最高权 singlet 表示的重数 $\phi_k(x)$ 是:

$$\phi_k(x)=\sum_{s=0}^{\infty} n_k(s)x^s = x^{k^2}(1-x^{2k+1})\Pi_{L=1}^{\infty}(1-x^l)^{-1};\quad k=0,1,2,\dots,$$

其中 $n_k(s)$ 等于第 s 层中具有最高权 k 的 $su(2)$ 多重态的个数. 这些代数及其表示可以应用于具有无穷多态的物理理论，例如弦论或规范场理论的有界态 (强耦合极限). 见图 1 .

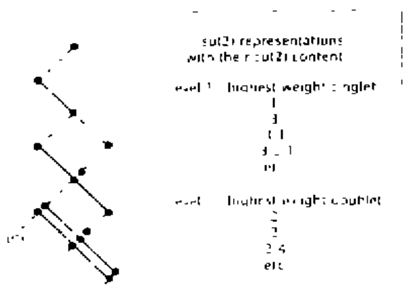

图 1　$su(2)$ 水平 1 表示的图示. 沿着实线是最高权 singlet 塔，沿虚线是偶极表示.

在物理理论中由 Lie 群转向 Kac-Moody 代数的额外好处是更大的对称群给出关于解的更多信息. 例如在共形不变系统情形中，存在满足如下方程的初级场:

$$[L_n,\phi(z)] = z^{n+1}\frac{d\phi(z)}{dz}+h(n+1)z^n\phi(z)$$

我们可以很精确地计算其振幅如下. 既然真空态 $|0\rangle$ 适合 $L_n|0\rangle=0, n\geq -1$, 那么 $L_0\phi(0)|0\rangle = h\phi(0)|0\rangle, L_n\phi(0)|0\rangle=0, n>0$, 在最多差一个常数因子情形下两点函数可如下确定:

$$\langle 0|\phi(z_1)\phi(z)|0\rangle = r^{-n}e^{-i\theta h}\langle 0|\phi(1)\phi(0)|0\rangle,$$

其中 $z_1-z_2=re^{i\theta}$.

可积系统与规范场理论

强相互作用规范场理论可能包含潜在的对称性，这一暗示来自 Polyakov[41] 的观察: 非交换理论的泛函描述与二维可积手征模型的局部方程相似. 在这儿，依赖于路径的场

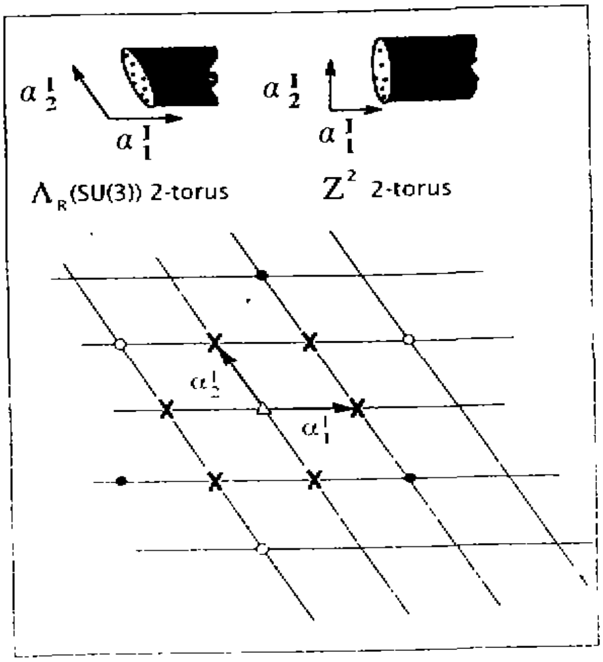

图 2 紧化维

$$\psi[\xi]=P\exp(\oint Ad\xi)=P\exp\{\oint ds\dot{\xi}_\mu(x)A_\mu(\xi(s))\},$$

它是和乐群的一个元素，即规范群的一个依赖于路径的元素，取代了规范场 $A_\mu^a(x)$ 所起的基本作用. 此处 $A_\mu\equiv A_\mu^a T^a$, 其中 T^a 是 $su(N)$ 的生成元. A_μ 满足 Yang-Mills 运动方程 $D_\mu F_{\mu\nu}=0$ 时，我们可以推导出关于 $\psi[\xi]$ 的一个泛函微分方程:

$$\frac{\delta}{\delta\xi_\mu(s)}(\psi^{-1}\frac{\delta\psi}{\delta\xi_\mu(s)})=0.$$

这些圈方程看起来象手征模型方程:

$$\partial_\alpha(g^{-1}\partial_\alpha g)=0,$$

它具有无穷多个对称性 [34], 一类这些对称性所构成的代数可由仿射 Kac-Moody 代数的正波模之代数给出 [8].

很自然地我们可以猜想相同的对称代数完全支配了两个理论中的那些变换，并且 Kac-Moody 之表示会给出关于规范场理论的约束态谱的信息，而此约束态是由胶子的禁闭集合组成. 这同如下信念相一致：胶子的约束态处于线性轨道上，同时必然要求那些质量与态的自旋有线性关系的胶子个数无穷. 态的自旋是弦论的一个遍有特性. 当然，弦论的完全对称群这一信息也很重要.

二维和四维自对偶 Yang-Mills 方程的瞬子的性质也同样展示了各个模型的对称性之间的类似 [2]. 在描述被扩充了的超引力模型时 —— 它的标量场被一对称空间 G/H 所参数化，其中 G 为一非紧整体对称群，H 为其极大紧子群 —— 仿射对称也被认为是有潜在用途的 [12].

最近，在超对称规范理论中人们用离散对偶对称的方法导出了用来描述夸克 —— 胶子禁闭机制的解析控制 [46]. 这些理论，如果看作是弦论的低能极限，可能引导人们发现更大的弦对偶及弦的基本对称群.

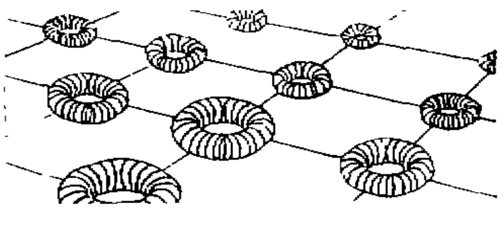

图 3 在一个寻找统一自然界各种力的理论中提出的宇宙的非显现的维数，可被视为是 3 维时空中对应每个点的一个小的紧的结构，如 6- 环面.

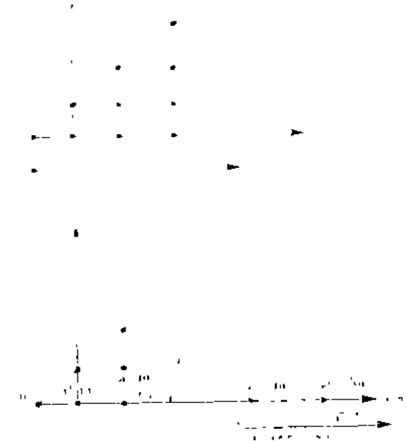

图 4 玻色弦仿射表示

弦论

1968 年，大约在 Ka 和 Moody 确切地对他们的代数表述之时，Veneziano[50] 给出了具有特定解析性质的粒子散射振幅. 这些振幅是粒子的动量的函数，并且可以作为一无质量的相对论性弦而得到. 此弦是一个一维对象，其长度由耦合的特性所决定. 对于具有引力及夸克和轻子的闭弦，标度是 Planck 长度，10^{-33} 厘米；不同的振动波模描述了不同的粒子. 这很象是在一根提琴琴弦上，不同的波模可产生不同的调子. 相互作用的弦图 (string picture) 建立了量子弦论的普遍一致性. 在人们发展了这种弦图后 [36]、数学家构造了仿射代数的不可约表示. 他们用的是弦论顶点算子，其动量被限制为只取离散值，例如 g 的根格上的点. 动量的离散化意味着在共轭位置空间上有一被紧化了的、闭的周期性条件. 见图 2. 被紧化维的个数与 g 的秩相等.

在本世纪八十年代初，物理学家们是这样理解的：既然超弦只在 10 维可量子化. 那么为得到与四维时空的物理学相容的弦论. 可应用 Kaluza-Klein 的回答：将离散动量看成是其中六个维度的卷缩. 见图 3.

水平一的表示是从 Veneziano 的开玻色子弦论中 Fork 空间上的振子构作而来，其中紧化尺度 R 固定为弦的量纲 α'[13, 45], 见图 4. 早先，人们利用对应于具有不同

边界条件的弦．即弦的一端固定 [33] 的 Corrigan-Fairlie[7] 振子发现了扭曲的仿射代数的表示．更高级水平的夸克模型表示是用费米振子给出的 [3]．

这些实现被归并入实实在在的弦论模型中，这些模型很有可能描述了标准模型物理．杂弦 [23] 利用水平一的仿射表示，而 Green Schwartz 超弦 [20] 之紧化却运用水平等于 g 的对偶 Coxeter 数的表示 [5]．在这两个模型中．那些是 g 的元素的零波模生成元对应于粒子谱的 Yang-Mills 规范对称．

1985 年，当弦论再度引起人们的兴趣之时 [21]．物理学家们一直在孜孜不倦地研究四维时空非交换规范场理论的夸克禁闭问题．人们相信低能极限是规范场理论的弦论中的附加结构，可能足以用来构造非微扰解．去年前后、关于对偶性的研究取得进展，这就将上述计划又向前推进了一步．

规范场论和弦论中将强耦合与弱耦合二者对应起来的对偶对称已经经受了考验 [47]．最简单的这种对称最初出现在可积模型的研究中，而在此研究中可解性和强－弱对应随处可见．其实自旋模型，例如 Ising 模型和 X-Z 模型的 Kramers-Wannier 自对偶 [32]、可以用来构造守恒载荷的一个无穷交换子代数 [10]，Montone 和 Olive[37]）曾用一类 Kramers-Wannier 对偶来解决有关规范场理论中一个电磁对偶的猜想．这是因为单极子的 Dirac 量子化条件决定了电磁耦合成反比．这个对偶，它自然而然地出现在超对称的规范场理论中，已经被扩充到弦论的强和弱耦合极限．人们可以应用对偶变换将不同的超弦模型联系起来 [11, 24, 56]．这样实际上描述基本粒子的量子基态唯一的结构只有一个．

现在看起来弦论中对偶对称的无穷离散集可能与 E_9 及双曲 Kac-Moody Lie 代数 E_{10} 都有关系，其中 E_9 是仿射 E_8 代数 [44, 16]．在粒子物理理论中运用 Kac-Moody 对称来得到非挠动信息这一想法依然是切实可行的．

物理学和数学

Kac-Moody 代数的许多性质在物理学中被重新发现．而这些性质告诉我们确切的 Fock 空间态和场算子．而这二者是计算结构常数，构造表示及其实现的一个实用的途径．物理学中出现的这些对称性质对于数学理论的发展大有好处．不仅如此，已发展起来的精细的数学结构成为给物理学家指路的航标．它暗示我们所研究的理论可能有更深刻的性质，而这些性质并非那么明显，但它们对于我们理解自然的内在和谐性可能是富有启发性的．

参考文献：略．

（袁文俊 译　郑驻军 校）