

素数和 Riemann 假设

Peter Sarnak

Barry Mazur and William Stein, Prime Numbers and the Riemann Hypothesis, Cambridge University Press, Cambridge, 2016, xi+142 pp., ISBN 978-1-107-49943-0; Honourable Mention, 2017 PROSE Award for Mathematics.

那些已经发现自己向外行观众解释 Riemann(黎曼)假设是什么以及为什么它是如此中心的数学问题的人, 会知道这不是一件容易的事. 我在一个致力于向科学作家展示数学的美国数学科学研究所 (MSRI) 研讨会上对我失败的努力记忆犹新. 正在被评介的这本书为将 Riemann 假设介绍给广大受众获得了巨大的成功.

Mazur(马祖尔) 和 Stein(斯坦) 认为读者已经接触过一些高中数学 (对于后面的一些章节, 也会假设一些微积分), 它们从头开始解释 Riemann 的著名论文 “Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse (关于给定大小下的素数数量)” 中的数学概念和想法, Riemann 在该论文中提出了他的假设.

这本简短易读的书分为 3 个部分. 第 1 个也是最长的部分几乎不需要数学背景. 从素数的定义开始, 作者们通过具体和生动的基本技术演示以及与素数相关的未解决问题的描述编织出自己的方式. 他们提供了许多富有洞察力的脚注, 具体的和有启发性的数字, 关于浏览 arXiv 哪些页面的建议以获取更多信息, 以及一系列丰富的尾注, 其中包含具有不同复杂程度的进一步描述和细节. 在 23 个短小节 (每节几页) 之后, 他们已经利用在一个给定尺度上对素数的计数而完成了 Riemann 假设的叙述. 在这一点上, 由于他们的精湛而引人入胜的表现, 假设似乎是完全自然的, 不可避免的.

接下来的两节需要稍多的数学, 特别是微积分. 他们引入了一些基本的 Fourier(傅里叶) 级数和分布理论, 他们需要这些理论来制定 Riemann 的显式公式, 该公式通过 Fourier 对偶性将素数与某些基本频率 (或频谱) 相联系. 这些都许多具体的图表来说明, 这些图表阐明了各个公式的含义和内容, 我相信, 甚至不知道微积分的读者也会对这些公式传达的内容有很好的了解. 简短的第 3 部分完成了对 Riemann 论文的处理. 具有一些复分析基本知识的读者将在此时被引导了解 Riemann 的论文, 并将欣赏 Riemann 假设按照 Riemann Zeta 函数零点的位置的叙述.

本书的叙述方式极具有 Riemann 风格, 非常具体, 并且具有开发近似计数素数的科学倾向 (对于 Riemann 及其之前的 Gauss(高斯), 纯粹数学和应用数学是一回事). 因此, 本书将具有非常广泛的吸引力. (下转 369 页)

译自: Bulletin (New Series) of the AMS, Vol. 55 (2018), No. 3, p. 399–400, Prime Numbers and the Riemann Hypothesis, Barry Mazur and William Stein, Reviewed by Peter Sarnak. Copyright ©2018 the American Mathematical Society. All rights reserved. Reprinted with permission. 美国数学会与作者授予译文出版许可.

Peter Sarnak 是美国普林斯顿高等研究院的数学教授. 他的邮箱地址是 sarnak@math.ias.edu.