二项式定理的另一证明

Jitender Singh

在 [1] 中利用 Laplace (拉普拉斯) 变换完成了二项式定理的证明，而我们又发现了另一个证明.

定理 令 n 是一个正整数，x,y 是两个非零实数. 则

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}x^ky^{n-k}=(x+y)^n.$$

证明 令 $t\neq -1$ 是任一非零实数. 对于每个 k, 利用求导商规则, 我们有 $\frac{d}{dt}\left(\frac{t^k}{(1+t)^n}\right)=\frac{kt^{k-1}-(n-k)t^k}{(1+t)^{n+1}}$. 等式两端乘以 $\frac{n!}{(n-k)!k!}$, 并对 $k=0,\ldots,n$ 求和，得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{t^k}{(1+t)^n}&=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!}\left(\frac{kt^{k-1}-(n-k)t^k}{(1+t)^{n+1}}\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{kn!}{(n-k)!k!}\frac{t^{k-1}}{(1+t)^{n+1}}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(n-k)n!}{(n-k)!k!}\frac{t^k}{(1+t)^{n+1}}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(n-k)!(k-1)!}\frac{t^{k-1}}{(1+t)^{n+1}}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n!}{(n-k-1)!k!}\frac{t^k}{(1+t)^{n+1}}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(n-k)!(k-1)!}\frac{t^{k-1}}{(1+t)^{n+1}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(n-k)!(k-1)!}\frac{t^{k-1}}{(1+t)^{n+1}}\\&=0\end{aligned}$$

因而，或者应用微积分基本定理，或者应用中值定理，对于某个固定的实数 c 我们有 $\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{t^k}{(1+t)^n}=c$, 对此式取极限 $t\to 0$, 得到 $c=1$. 因而, $\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{t^k}{(1+t)^n}=1$, 或者 $\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!}t^k=(1+t)^n$.

对后一方程取极限 $t\to -1$, 得到 $\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!}(-1)^k=(1-1)^n=0$. 这样，对所有非零实数 t 我们即有

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!}t^k=(1+t)^n. \tag{1}$$

为了完成证明，我们在 (1) 中令 $t=x/y$. ■

参考文献

[1] K. K. Kataria, An alternative proof of the binomial theorem, Amer. Math. Monthly 123 (2016) 940.

(陆柱家 译　　童欣 校)

译自：The Amer. Math. Monthly, Vol. 124 (2017), No. 7, p. 658, Another Proof of the Binomial Theorem, Jitender Singh.