规范理论、四维几何 电磁场

规范场

⑤

116-133

规范理论与4维几何的新展开

O413.3

O184

深谷贤治 陈治中

第一回

您知道所谓 Seiberg–Witten 方程 (式 (1)) 这个方程吗？

$$\begin{cases} F_A^+ = \tau(\varphi, \varphi) \\ D_A\varphi = 0 \end{cases} \tag{1}$$

不知道是自然的. 数学家中知道这个方程的也不过在大约半年以前才知道，即 1994 年 10 月数学家 Taubes 在哈佛大学作了题为 "Witten 的魔法方程" 的讲演后才开始的. 但那以后，这一方程始终是研究几何的数学家之间的热门话题. 本文的目的是想要说明，这一方程为什么会引起如此的轰动，以及哪儿是魔法的方程呢？

1. 电磁场与规范变换

Seiberg–Witten 方程的研究属于被称为规范理论的领域. 规范理论原先是研究所谓规范场的那种场的物理学领域，但数学中也有叫做规范理论的领域. 此处试图快一点对规范理论进行说明.

规范场的代表性例子当然是电磁场. 电磁场的基本法则大家都知道吧！ 这就是 Maxwell 方程. Maxwell 方程这里不写了，但这里只写出与之等价的波动方程 (真空中) 的形式.

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\Big)\boldsymbol{F} = 0 \tag{2}$$

只是在几何学中经常使用的是将 (2) 的符号稍作改变后的 (3) 的形式. 亦即作替换 $t = \sqrt{-1}x_0$, 则

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\Big)\boldsymbol{F} = 0 \tag{3}$$

(2) 也好 (3) 也好，都是把 $U(1)$ 这种群作为规范群的规范场方程 ($U(1)$ 是绝对值为 1 的复数 $e^{\sqrt{-1}\,t}$ 全体).

原题: ゲージ理论と 4 次元の几何学の新展开. 译自: 《数学セミナー》 1995 年第 7 期 54–58 页，第 8 期 68–72 页，第 9 期 70–74 页.

规范场方程是具有规范变换对称性的方程．这么说也只是换一种语言，没有什么内容．现在来说明一下什么是规范对称性．

研究物理方程强有力的工具是变分原理．它是把方程变换为某个量的最大最小问题(例如没有力作用的质点的场合，“在长度最短的线，即直线上运动”，即为如此论断)．

考虑与 (3) 对应的变分问题，规范对称性就看出来了．考虑最大最小问题时的量叫做拉格朗日泛函 (上例来说就是长度[1])．电磁场的拉格朗日泛函又是什么呢？

要写出答案就必须写出 (2) 、(3) 中的 $\boldsymbol{F}$ 是什么．设 $\boldsymbol{E}=(E_1, E_2, E_3)$ 为电场强度，$\boldsymbol{B}=(B_1, B_2, B_3)$ 为磁场强度，则 $\boldsymbol{F}$ 就可表为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} =& E_1 dx_0 \wedge dx_1 + E_2 dx_0 \wedge dx_2 + E_3 dx_0 \wedge dx_3 \\ &- B_1 dx_2 \wedge dx_3 - B_2 dx_3 \wedge dx_1 - B_3 dx_1 \wedge dx_2\end{aligned}$$

这不是突然冒出来的复杂的式子．把 $\boldsymbol{F}$ 想象为“具有把电场与磁场总括在一起的 6 个分量的量”，这就足够了[2]．为用变分原理处理 (2) 、(3)，考虑量

$$\boldsymbol{A} = A_0 dx_0 + A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3 \tag{4}$$

它与 $\boldsymbol{F}$ 有

$$d\boldsymbol{A} = \boldsymbol{F} \tag{5}$$

的关系[3]．还是个公式．简而言之，考虑微分后为 $\boldsymbol{F}$ 的量 $\boldsymbol{A}$．称 $\boldsymbol{A}$ 为向量位势 (或规范位势)．拉格朗日泛函是

$$E(\boldsymbol{A}) = \int ||dA||^2 dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 \tag{6}$$

变分原理表示为

当 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{A})$ 对 $\boldsymbol{A}$ 微分为 0 时，$d\boldsymbol{A}=\boldsymbol{F}$ 就满足方程 (3)

综上所述就为：

(A)　$\boldsymbol{F}$：物理上有意义的量．
　　$\boldsymbol{A}$：相应于考虑变分原理的量．
　　$\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的关系：$\boldsymbol{F}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的微分．

出现规范变换是因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 并不一一对应．也就是说按 $d\boldsymbol{A}=\boldsymbol{F}$ 给出相同 $\boldsymbol{F}$ 的 $\boldsymbol{A}$ 有一大堆之故．现说明该事实．

上面所作的归纳可以如下换个说法．

(B)　遵照物理规律变化的场是 $\boldsymbol{A}$，而我们实际能够观察到的则是

[1] 这么说有些不合适，请鉴别之．——原注．
[2] dx_i 只是记号，但満足 $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$．——原注．
[3] $dA = \sum_{0\le i<j\le 4}(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i}) dx_i \wedge dx_j$——原注．

$\boldsymbol{A}$ 的微分 $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{A}$ 观察不到.

观察不到 (就是说与实际现象没有关系) 的事怎么说都可以了. 因此, 即使用一个给出相同 $\boldsymbol{F}$ 的 $\boldsymbol{A}'$, 亦即 $d\boldsymbol{A}=d\boldsymbol{A}'$ 的 $\boldsymbol{A}'$ 来置换 $\boldsymbol{A}$, 如果所得的规律不一样那就麻烦了.

把 $\boldsymbol{A}$ 替换成满足 $d\boldsymbol{A}=d\boldsymbol{A}'$ 的 $\boldsymbol{A}'$ 的变换叫做规范变换. 拉格朗日泛函 (6) 和由此导出的方程 (3), 对于规范变换是对称的.

规范变换的考虑方法是数学家 Weyl 在 20 世纪 10 年代为把引力场与电磁场统一理论而引入的.

2. 非交换规范场与杨 -Mills 方程

前面电磁场的场合写出规范群是 $U(1)$. 这是怎么回事呢？这等价于 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的系数 A_i 等等都是实值函数. 因为 $U(1)$ 的元可表为 $e^{\sqrt{-1}t}$, 所以 $U(1)$ 的元由给定的实数 t 决定. 群 $U(1)$ 是交换群. 也就是规则 $e^{\sqrt{-1}t}e^{\sqrt{-1}s}=e^{\sqrt{-1}s}e^{\sqrt{-1}\ t}$ 成立. 浅言之, 就是

(C) *以交换群为规范群的规范场理论的方程是线性偏微分方程.*
以非交换群为规范群的规范场的方程是非线性偏微分方程.

说得稍微早了一点. 什么是以非交换群为规范群的规范场呢？那就是考虑 $\boldsymbol{A}$ 的系数 $\boldsymbol{A}_i$ 等是矩阵 (中取值的函数).

出现非交换规范场是记述例如称为弱相互作用的力的理论[4].

电磁场的位势 $\boldsymbol{A}$ 以数量 (实数) 为系数, 弱相互作用时的 $\boldsymbol{A}$ 以 2×2 矩阵为分量, 这与下面的事实有关系, 即作为电磁场的量子论的量子电磁学只处理电子这一类物质, 而与此相对, 弱相互作用则以 2 类 (例如电子与中微子) 为一组考虑[5].

现说明上面 (C) 中所叙述的. $\boldsymbol{A}$ 是矩阵系数的场合下拉格朗日泛函是否可以是 (6) 呢？

这是不可能的. 也就是说在非交换规范群的场合, (6) 在规范变换下不是不变的.

那么, 怎样才能得到在规范变换下不变的拉格朗日泛函呢？回答是可以的, 令[6]

$$\boldsymbol{F_A}=d\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{A} \tag{7}$$

而由拉格朗日泛函

$$\mathcal{Y}_m(\boldsymbol{A})=\int\|\boldsymbol{F_A}\|^2dx_0dx_1dx_2dx_3 \tag{8}$$

给出. (7) 式的意义在此可以不必特别准确地去了解, 但看作是 $\boldsymbol{A}$ 的微分与 $\boldsymbol{A}$ 的平方之和. 于是重要的就是 $\boldsymbol{A}$ 的平方关于 $\boldsymbol{A}$ 是非线性的 (例如将 $\boldsymbol{A}$ 2 倍, 则 $\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{A}$ 就成 4 倍了而不是 2 倍). 因此由 (8) 决定的方程式为非线性方程.

---

[4] 此外关于强相互作用的量子色动力学也是规范理论. —— 原注.

[5] 我认为可以这么说, 若有不妥请原谅. —— 原注.

[6] $A\wedge A=\Sigma_{0\le i<j\le 4}(A_iA_j-A_jA_i)dx_i\wedge dx_j$ —— 原注.

(7) 叫做曲率，(8) 叫做杨–Mills 泛函[7]，由 (8) 决定的方程式 (这里不写了) 称为杨–Mills 方程.

规范场理论的数学基础是纤维丛和联络理论，而这是在数学家 (几何学家) 与物理学家相互不知道的情况下独立发展起来的. 彼此注意到纤维丛理论与规范场理论实际上是一回事，则是从 1970 年代才开始的.

Weinberg 和 Salam 利用杨–Wills 场作出弱相互作用与电磁相互作用的统一理论，从而获得了诺贝尔奖.

3. 调和积分论 —— 交换规范理论与几何学 ——

杨–Mills 方程在 4 维流形方面的应用是 80 年代拓扑学的热门话题，但即使在杨-Mills 之前，场论与拓扑的关系也存在 (于数学的中心). 也就是交换规范场的理论.

现代几何学的主要对象是 (一般为曲的) 高维图形，称为流形.

2 维流形叫做曲面. 所谓拓扑学，例如就是考虑两个曲面中的一个是否可以连续变形到另一个的数学.

例如图 1 的曲面可以连续变形成图 2 的曲面，但不能变形成图 3 的曲面.

怎么做才能证明图 1 的曲面可以变形成图 2 的曲面呢？最好是用式子表示各个曲面，然后具体写出变动情况的公式. 当然做起来是相当麻烦的，不过如 2 维那样倒也不是不可能的.

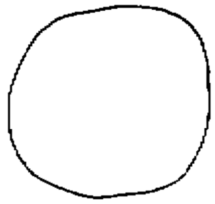

图 1

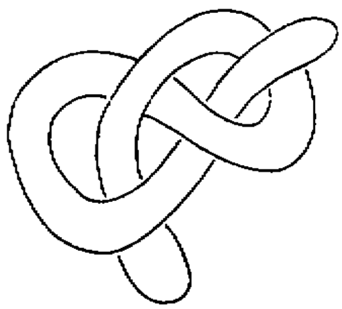

图 2

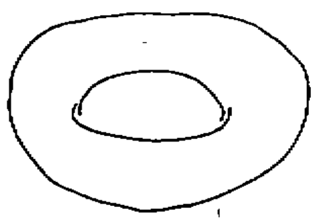

图 3

那么怎么才能证明图 1 的曲面不能变形成图 3 的曲面呢？

那看来大概倒是显然的！当然是那么回事. 但不能这样一说就完事，而这正是作为数学的数学. 因此，例如要想证明 4 维图形之间不能连续变形又该怎么办呢？恐怕不是一看就说得出来的吧！

这时所使用的是 "不变量" 的概念. 发现拓扑学最早也是最重要的不变量 "同调" 的是拓扑学的创始人 Poincaré. Poincaré 用组合的语言定义了同调，而后则由 de Pham、

[7]曲率的概念是数学家在此之前就已发现了的，但其积分作成规范不变的拉格朗日泛函的思想，则是来自杨 – Mills 和内山龙雄. —— 原注.

Hodge 等发现了与方程 (3) 的关系.

方程式 (3) 是平坦的 (不是弯曲的) 欧氏空间上的方程，但可以将其推广到弯曲的任意维流形上.

另外 (6) 的拉格朗日泛函也同样可以一般化.

当考虑给出 (6) 的拉格朗日泛函的变分问题的极值的 $\boldsymbol{A}$ 全体，并把按规范变换进行变换的都看作相同时，把那样的全体写作 H^1 [8].

因为微分方程 (3) 是线性的，所以 H^1 为向量空间. H^1 称为 1 次上同调群. 下面的定理是由 de Rham 和 Hodge 得到的.

H^1 是有限维向量空间，其维数不因流形的连续变形而变化.

H^1 的正确定义现在就是不清楚也没有关系. 总而言之重要的是计算 (6) 的变分问题解的维数，该数在空间的连续变形下是不变的.

图 1 的曲面 H^1 是 0 维的，图 3 的曲面是 2 维的. 因此图 1 的曲面不能变形成图 3 的曲面.

这一场合 H^1 的维数自然就是不变量. 方程式 (3) 叫做拉普拉斯方程. 考虑弯曲空间上的拉普拉斯方程，研究其解，研究空间的几何性质，这就是调和积分论.

调和积分论与复变函数论及代数几何都有深刻的联系. 建立调和积分论的是 Hodge，而将其深化并应用到代数几何上的则是小平邦彦.

4. 非交换杨 –Mills场与几何学

第 3 节中已经说到，考虑规范场就出现上同调. 但是作为由规范场所决定的不变量，能够直接理解的只是上同调群中一次的上同调. 其他次数的上同调也有，当然也是非常重要的，但因为说明这点已经离开了本文的目的，就此作罢.

一个流形何时可以经连续变形而变形成为一个流形呢？这一拓扑学的主要问题可以用上同调以及另一个 (这里不加说明) 不变量 — 同伦来研究.

这一研究是 50 年代到 60 年代战后数学黄金时代的一角，称为微分拓扑学. 由此得出的结论如下，虽然说法很不准确：

> (D) *一个流形何时可以经连续变形而变形成另一个流形呢？对于单连通的 5 维以上的流形，由在同调一同伦，以及在同调中取值的被称为示性类的量可 “大致” [9] 明白.* [10]

我想出现了一些不明其义的语言，先归纳为 “5 维以上的拓扑因与交换规范理论有

[8] 也就是说 H^1 是由给出 (8) 的极值的 A 的规范变换所决定的等价类全体. —— 原注.

[9] 除了有限的情形. —— 原注.

[10] 这个定理是由 Milnor 、 Kervaire 开始， Browder, Wall, Novikov, Sullivan 等微分拓扑几何学巨匠们的合作. —— 原注.

关，是可以理解的".11)

于是 4 维与 3 维这样与我们居住的空间最接近的部分就作为拓扑学的最大问题而残留了下来.

数学家能够经常听到杨 -Mills 方程这种话是从 70 年代后半开始的．而使其在数学家之间落脚下来，最有影响的是 Aliyah–Hitchin–Singer 的论文．在这篇论文中论述了在 4 维空间的场合下杨 -Mills 方程与自共轭方程的方程式有关系，并且计算了自共轭方程的解全体的规范等价类全体的空间维数.

更通俗地说，(1 次) 上同调是交换规范场方程 (3) 的解的规范等价类，与此相对，考虑了非交换规范场的杨 -Mills 场的规范等价类.

因为 (3) 是线性偏微分方程，所以其解空间是向量空间．但由于杨 -Mills 方程是非线性的，所以其解空间是弯曲的．该空间呈何种形状是非常有趣的问题.

从该项研究中 Donaldson 等相继发现了与 4 维流形的拓扑有关的深刻结果．这是 80 年代的事情.

Donaldson 等的许多想法也同样适用于 Seiberg–Witten 方程的场合，因而我们尝试说明其中之一.

复习上节中由 (3) 考虑上同调的做法.

1. 给出空间.
2. 考虑其上 (6) 的拉格朗日的泛函的极大极小问题.
3. 考虑给出其极值的 A 全体，把按规范变换变形的都看作一样，而定义上同调群 H^1.
4. 证明上同调群 H^1 的维数即使在空间连续变化下也不会改变.

这样一来当然就确定了上同调群的维数 (叫做 Betti 数) 的不变量.

在非交换规范场中我们同样这样做试试看．也就是

1. 给出空间.
2. 考虑其上 (8)(杨 -Mills 泛函) 的拉格朗日泛函的极大极小问题.
3. 考虑给出其极小值的 A 全体，把按规范变换变形的都看作一样，而构成空间 $\mathcal{M}$.
4. 从 $\mathcal{M}$ 中取出即使在空间连续变化下也不会改变的数.

不同的是 4. 因为杨 -Mills 方程是非线性的，所以 $\mathcal{M}$ 不是向量空间，因此不能简单地去看维数，而可以用别的方法从中取出数来.

这样所决定的不变量称为 Donaldson 不变量．这样也就知道了，在 4 维场合由交换规范场或者同调论无法区别的两个流形，可以按照由非交换规范场所决定的不变量亦即 Donaldson 不变量区别开来.

11) 这个归纳不太准确，不仅如此，另外文理上怕也不对． —— 原注.

也就是

(E) *存在这样两个 4 维流形 M_1, M_2, 按同调论等无法区别, 而按非交换规范理论首次证明了 M_1 不能连续变化成 M_2.*

与 (D) 比较看看. 4 维流形的拓扑按微分拓扑学以前的方法很难领会, 而杨 -Mills 方程只在 4 维的场合化成自共轭方程并由此产生新的不变量, 两者就完全结合起来了.

若简单地用标语式的话来说, 则为[12].

5 维以上的拓扑由交换规范理论所得到的信息就可充分理解,
而非交换规范理论在 4 维拓扑中则是不可缺少的.

噢! 应该是讲 Seiberg–Witten 方程的, 但眼看就要开始, 时间却已到了. 且先待下回继续.

第二回

回忆一下 Seiberg-Witten 方程的说法传播开来时的那些往事 (说来还不到一年).

从上回所谈及到的 Taubes 的讲演之后不久开始, 在数学家之间就飞传电子邮件, 似乎规范理论有了什么大的进步. 笔者之处也经各种途径而收到这方面的信息. 由电子邮件好不容易才明白, Donaldson 用杨 -Mills 方程证明了的事实使用 Seiberg–Witten 方程去证明要简单得多, 同时明白了 Seiberg–Witten 方程的公式形状. 大约是这一邮件入手后的第二周, 在福井的芦原温泉有一个低维[13] 拓扑的集中讨论班. 在到达那儿的当天, 我遇到了规范理论的专家古田千雄. 古田还没有听说 Seiberg–Witten 方程.

因此我转述了该方程的形式以及由此 Donaldson 的工作似乎可简单许多. 我们两人讨论了一下这个问题. 第二天, 古田在集中讨论班上报告了 Seiberg–Witten 方程以及如何用 Seiberg–Witten 方程去证明 Donaldson 最初的著名定理 (例如在 4 维欧氏空间中加进了与普通不一样的微分结构即为其结论). Witten 的论文进入京都大学基础物理研究所的数据库并下装 (down load) 则是大约 2 周以后. 该论文似乎是针对数学家而写的, 因此对笔者而言, 在 Witten 的论文中这算是容易阅读的论文. 恰好我应东大之邀在下下周进行集中讲义, 这就有可能解说 Seiberg–Witten 方程了.

我们日本信息传入比较迟, 但对美国的数学家结局也差不了太多.

据不太可靠的消息, Witten 使数学家了解 Seiberg–Witten 方程的是在一个讲演的最后部分, 据说当时 Witten 一写出方程式, 就说了我们相信这一方程与杨 -Mills 方程是等价的. 为什么是等价的呢? 这在物理上 (似乎) 已有了说明, 但这一说明对数学家却相当困难, 理解它的数学家几乎就没有[14]. 即使是利用 Seiberg–Witten 方程证明了各种各样数学新定理的人, 许多也是如此. 这一状况此后似乎变化了 (与其这样说, 倒不如

---

[12] 这一归纳也不太准确, 不仅如此, 另外文理上怕也不对. —— 原注.

[13] 在几何学家之间, 低维是指 4 维以下. —— 原注.

[14] 如斯笔者也不甚明白, 不管怎么, 这方面即使对专业的物理学家怕也决不是那么简单的. —— 原注.

说更应该改变进行的研究), 目前 Seiberg-Witten 方程对于数学家犹如天堂之声，犹如是听到

"研究这个方程吧！这样， 4 维几何学就前进了"

的神谕而进行研究的[15].

因此下面就分两部分来讲．第一卷是地之卷，是讲那些聆听到神谕的数学家正在做些什么？第二卷是天之卷，是神谕所指示的锦囊妙计．第二卷尚未完成因而也不准确．总之这是因为笔者自身也不甚明白了之故．

地之卷

1. 孤立子 (Soliton) 与 Bubble(吹泡)

恐怕很多人都听到过孤立子这个词．就是非线性的波像粒子一样动作．我们再稍加说明．考虑普通的波动方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi=0 \tag{1}$$

该方程是线性的．因此对于两个解 φ_1 、 φ_2. 其和 $\varphi_1+\varphi_2$ 还是解．这表明如果有图 1 那样独立的两个波，那么互不干扰迭加的波 (图 2) 还是解，称此为迭加原理．

当然这是量子力学的根本原理之一，与波粒二象性深刻相关．

图 1

图 2

若方程是非线性的，则迭加原理不成立．然而到本世纪后半就已经知道了，即使对非线性方程也存在粒子那样运动的波．

这最初是由计算机实验发现的，以后才附加理由的．发生这种现象的代表事例就是 KdV 方程，例如确认在该场合会产生孤立子现象就是通过具体寻找方程的解来实现的．这些具有孤立子现象的方程的研究作为无限维可积方程的研究现在兴盛至极．

但是与这里所说的有关系的孤立子则其类型略有不同．也就是说这些孤立子并非通过具体求出方程的解而发现的，而是通过略微不同的方法发现的孤立子．

[15] 作为数学家这是很困难的，没有理解便出结果之类的事总是很别扭的． —— 原注．

与杨 -Mills 方程等与微分几何中出现的许多非线性方程相反，发现孤立子现象是 70 年代的事，其功劳最大者大概要数 Uhlenbeck 了.

就杨 -Mills 方程的情形稍加说明. 在方程 (1) 的场合，所谓粒子一样运动的波就是呈图 3 状的波. 也就是存在某个长度为 1 的 3 维向量 (v_x, v_y, v_z)(粒子的速度向量), 使得仅仅满足 $t = xv_x + yv_y + zv_z$ 的点 (t, x, y, z) 的旋转才为非零的解就可以说是粒子一样运动的波.

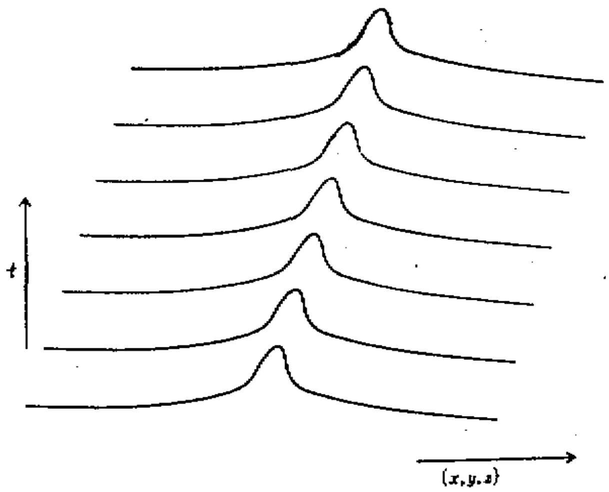

图 3

(1) 为双曲型方程是因为考虑 4 维时空中的 Minkowski 度量 $dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$, 而在数学上则考虑比 Minkowski 度量更加易懂的一般的度量 $dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$. 在这种场合下替代 (1) 的方程就是椭圆型的，为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi = 0 \tag{2}$$

(2) 的场合下的粒子解，并不是如 (1) 的情形那样以一定速度运动的解，而是指集中于一点的解，亦即仅仅某一点 (t, x, y, z) 的旋转才非 0, 而其余几乎均为 0 的解.

4 维杨 -Mills 方程的场合也一样，除了某一点的旋转外几乎都为 0 的解就认为是孤立子解. 在杨 -Mills 方程等的讨论中称这种现象为 Bubble(吹泡).

这种解是否存在呢？证明其存在决非易事 (因为对象是非线性方程). 而且，例如为了在拓扑学中应用，那就不是在特定的对称性很高的空间中找出解，而在某种程度上有必要针对一般空间去证明解的存在. 而在这种场合下具体求出解首先就不可能. 因此就有必要使用更为抽象的偏微分方程理论，特别是用到泛函分析. 这方面获得成功的是 Taubes.

泛函分析的偏微分方程理论对微分几何的应用于 70 年代在美国特别发达. 重大成果之一就是发现了吹泡.

那么吹泡与上回出现的用杨 -Mills 方程作出 4 维流形的不变量之间到底有什么关系呢？

一言以蔽之，回答就如下面的 (A).

上回已作了少许说明，为作 4 维流形的不变量，考虑给出杨 -Mills 泛函极小值的 $\boldsymbol{A}$ 全体，将规范变换变形的都看作一样而构成空间 $\mathcal{M}$. 称 $\mathcal{M}$ 为杨 -Mills 方程的解空间.

(A)　一旦吹泡出现，杨 -Mills 方程的解空间就变成无限大[16].

难以很好地说明这件事，请看下面的图 4. 在孤立波的解，也就是几乎只有一点 p 为非 0 的解的序列中，存在集中程度渐渐增加者；这一序列在解所成的空间中一直到无限远方. 因此杨 -Mills 方程的解空间就不是有限的.

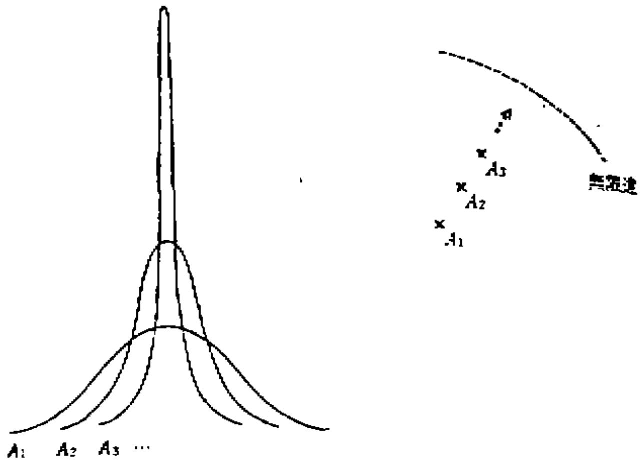

图 4

这有什么困难呢？是这么回事. 要从杨 -Mills 方程的解空间作 4 维流形的不变量，就必须在杨 -Mills 方程的解空间上进行积分等.

要是用不太确切的写法，像杨 -Mills 方程的解空间的体积那样的量就是不变量. 这样，一旦发生 (A) 那样的事情，"体积" 就变得无限大. 也就是说困难是因为要定义的东西为无限大.

杨 -Mills 方程应用于拓扑的论文以长篇为多，其长且 (困难的) 部分就相当于如何从杨 - Mills 方程的解空间大小为无限大这一事实中钻过去证明定理.

但是由于吹泡现象的发现，就有可能阐明为什么会产生状态不佳的无限大. 可以说是明白了无限大产生的功能，从而有可能第一次发展钻过去的技法.

将现在为止所说的归纳一下：

(B)　1. 5 维以上的拓扑用交换规范理论 (同调论) 研究已经足够.
　　在交换规范理论中出现线性偏微分方程.
　2. 非交换规范理论必需非线性偏微分方程.

---

16) 非紧致的. —— 原注.

3. 由非线性发现了吹泡的新现象.

4. 利用这一点可了解状况不佳的无限大所产生的功能，从而打开了用非交换规范理论研究 4 维拓扑学的道路.

这样一看，就可以很自然地确立规范理论在拓扑学 + 微分几何学的历史中的地位，70 年代非线性方程的几何研究在规范理论中的作用也清楚地确立了其位置. 笔者等研究规范理论的数学家就是这样想的.

因此下面的事实非常令人惊讶.

(C) 在 Seiberg–Witten 方程中不发生吹泡. 也就是说解空间总是有限的.[17].

因为要说明其原因便成了技术性问题，所以这里便无法进行了.[18].

前面已经写到，杨 -Mills 方程的论文很长是由于吹泡的分析非常麻烦. 因此，如果用 Seiberg–Witten 方程来做同样的工作，那证明就会变得容易得多. 在杨 -Mills 方程的吹泡分析能力中居头号种子的 Taubes 称 Seiberg–Witten 方程为魔法方程的理由就在于此. 在通常的研究中最最困难的地方，例如代换方程，也就烟消云散了.

2. 交换？非交换？

Seiberg–Witten 方程比杨 -Mills 方程更为容易还有一个理由. 那就是

(D) Seiberg–Witten 方程是交换规范理论的方程.

噢，那么 (B) 的归纳或者上回的解说又将变成什么样呢？也就是所说的

交换规范理论 = 线性方程 = 同调论
非交换规范理论 = 非线性方程
= 更强有力的不变量

我们重新写出 Seiberg–Witten 方程，

$$\begin{cases} F_A^+ = \tau(\varphi, \varphi) \\ D_A\varphi = 0 \end{cases} \tag{3}$$

式中的记号不加说明. 该方程的未知函数是 A 与 φ.A 是交换规范场的联络 (向量位势)、φ 是旋量. 再写一次. A 是交换规范场的联络. 因此如果把 (3) 看成只是关于 A 的方程，那就是线性的. 非线性性则是消掉第一项 (大抵是 φ 的平方) 与第二项后出现的 $A\varphi$ 这一项. 一言以蔽之，即

交换规范场若仅此而言就导出线性方程，但 (3) 式因为

---

[17] 紧的. —— 原注.

[18] 或者，是否还存在与 Seiberg–Witten 方程的物理意义有关的 "哲学的" 说明呢？ —— 原注.

加上了这多余的 φ, 该部分便成非线性.

画蛇添足也罢，杨-Mills 方程是一个一看就明白它是很自然的方程，但 Seiberg-Witten 方程为什么如此组合就变成一个意味深长的方程了呢？这点至少对于笔者而言，至今还是个谜.

那么 (D) 在数学上又意味着什么呢？对此加以说明.

上面已经讲到，Donaldson 理论是利用杨-Mills 理论确定不变量. 作不变量的目的之一就在于利用它证明一个空间不能连续变形成别的空间. 这样，当两个空间给定时，就必须计算其不变量，确定其值不相同. 为此该怎么做呢？实际上这是非常棘手的事. 为什么呢？因为在 Donaldson 理论中所使用的是杨-Mills 方程的解空间，但要具体地找出来，总而言之就是要在给定的空间完全求解杨-Mills 方程. 因为杨-Mills 方程是非线性方程，所以它并非简单的求解即可. 它还必须考虑在数学中求解要有意义，证明存在定理，但这还很不够[19].

计算 Donaldson 不变量成功的例子几乎都有赖于下面的事实 (小林-Hitchin 猜想，Donaldson 证明了).

> (E) *复流形[20] 上的杨-Mills 方程的解空间与秩为 2 的复向量丛的模空间一致.*

我想已经说了一大堆不明其义的语言，但不过只是写写而已，所以不必担心.

"秩为 2 的复向量丛的模空间" 这是代数几何的对象. 因为是代数几何，总之就是代数方程的解集.

怪不得说杨-Mills 方程这种微分方程的解只要解代数方程就知道了. 而代数方程则总是有办法的.

说是总有办法，但实际上 "秩 2 的复向量丛的模空间" 是很难的对象，该项研究现在正在进行之中.

困难之处就因为秩是 2, 这就意味着必须考虑 2×2 矩阵 (互不可换).

与此相比，秩 1 的复向量丛则是相当容易处理的对象 (因为 1×1 矩阵怎么做都可交换). 与其说秩 1 的复向量丛的研究实际上早就在代数几何中做了，倒不如说很久以来就已经是代数几何的研究中心了.

因此下面非常重要. 一言以蔽之就是:

> (F) *复流形[21] 上的 Seiberg-Witten 方程的解空间只要研究秩 1 的复向量丛就清楚了.*

当然，由于

---

[19] 类似证明存在定理这样的事也是必要的，它用于证明不变量在空间的连续变形下是不变的. 对于不变量的计算，当然还需要一个步骤. —— 原注.

[20] 正确地说是 Kähler 流形. —— 原注.

[21] 正确地说是 Kähler 流形. —— 原注.

杨-Mills 方程 ↔ 现在正在进行中的代数几何学

Seiberg–Witten 方程 ↔ 已经确立的代数几何学

所以假若想要利用杨-Mills 方程来证明些什么，常常就必须代数几何本身得有所进展才能给出回答；而在 Seiberg-Witten 方程的场合只要翻译成代数几何，就马上可以由已知的结果给出回答了.

至此我们对 Seiberg-Witten 方程为什么如此重要而说明了两个主要的理由. 还必须叙述利用它能知道些什么等等，这种事恐怕还不少. 但因为那就相当专门了，所以地之卷就此告终，下回转入天之卷.

第三回

天之卷

1. 拓扑场论

杨-Mills 场也好， Seiberg-Witten 方程也好，前面所说的对它们的研究，作为场论，到底是经典的呢还是量子论的呢？

杨-Mills 方程与 Seiberg-Witten 方程两者都是量子化前的场方程. 然而这些研究要说是经典的却又有些不太准确. 确切地说，它们是拓扑场论的一种.

我们来说明何谓拓扑场论.

假设在空间 X 中的二点 p, q 处分别存在几乎集中于一点的波或点粒子. 它们的波函数记作 φ_p 、 φ_q. 场论中称为相关函数并记作 $\langle\varphi_p, \varphi_q\rangle$ 等. 乃是这两个粒子间的作用力大小.

因为在量子场论中力与相互作用是相同的，所以也可以说是这两个粒子间相互作用的强弱.

因为决定粒子间作用力的大小自然是物理上非常有意义的问题，所以计算相关函数就是场论的基本问题.

因为 $\langle\varphi_p, \varphi_q\rangle$ 是由空间 X 与点 p、q 所决定的. 所以就将其记作 $Z(X;p,q)$. 同样还可以考虑增加点数后可记作 $Z(X;p_1、\cdots、p_n)$. 进而与后面有关系的不仅是考虑集中于一点的粒子，而且还考虑只有 X 中的曲面 Σ 处为非零的波. 考虑它们之间作用力的大小 $Z(X;p_1,\ldots,p_n;\sum_1、\cdots\sum_m)$.

拓扑场论没有严密的定义，但可以如下归纳：

(A) *拓扑场论是说粒子间的作用力不依赖于粒子间距离等的场.*

再稍稍准确些写，就是

$Z(X;p_1,\ldots,p_n;\sum_1、\ldots,\sum_m)$ **在** $X, p_i, \sum_j$ **等**

连续变动下不变时就叫拓扑场论.

当然照这样的话作为物理理论总有些奇怪，因为不依赖于距离的力在自然界中并不存在．但是研究这样的东西却有一些意义．笔者知道二条[22]，一是在数学上有应用，另一条是因为拓扑场较真的场论来得容易，所以当考虑如何构造困难的真正场论时，就可以首先从拓扑场论开始．

所谓在数学上有用是怎么回事呢？那就回忆一下第一回所说的拓扑不变量的情况．所谓拓扑不变量就是

对于空间 X，使之对应某个量 (是否也可写作 $I(X)$ 呢？)．
在空间 X 连续变动下，$I(X)$ 是不变的．

这一定义，与上面的拓扑场论在某些地方不是很相象吗？与其这么说，倒不如说是一样的．若下个断言，就是

拓扑场论就是拓扑不变量理论．

说到这里大概不太合适了．反正总而言之拓扑场论作成拓扑不变量．4 维流形的 Donaldsaon 不变量的名字已经出现好多次了，它就是关于杨 -Mills 场的拓扑场论的相关函数．按历史的顺序，拓扑场论的名字最初是 Witten 尝试依据场论解释 Donaldson 理论时在其论文的标题中使用的．该论文是 1988 年发表的，但当时只是解释而已，没有什么明确的应用．然而这正是走向 Seiberg-Witten 理论的第一步．

第 2 点是试着说明拓扑场论较真正的场论要容易．

场论的困难无论从哪个方面讲都来源于自由度无限大．也就是说在某个瞬间场能取的状态为无限维向量空间的元素．

若按相关函数而言，就是必须计算当 p 、q 变动时的所有数 $\langle\varphi_p,\varphi_q\rangle$．然而若是拓扑场论，事情就变得相当简单了．因为 $\langle\varphi_p,\varphi_q\rangle$，它不依赖于点的位置，所以充其量只要考虑 $p\neq q$ 与 $p=q$ 这两种情况就够了．这就是说：

拓扑场论在瞬间系统所取的状态可以用有限维向量空间来表示．

有限维向量空间与无限维向量空间虽然都是向量空间，却有很大差别．有限维向量空间中是解一次方程，简而言之是线性代数亦即矩阵的计算，在无限维向量空间中解一次方程的就相当于解微分方程．矩阵的计算只要花些功夫必定可能，但微分方程一般却无法解．

若用场论的语言，这就为

拓扑场论一般能解．也就是相关函数可以计算

一般场论的求解，有时甚至无法严密定义，是很难的非线性偏微分方程问题，与这无望的困难相比，拓扑场论至少“原则上”可以用有限的代数计算来解．

这种情况在以 Witten 为中心的最近的研究中已逐渐清楚了．其应用之一是纽结以及 3 维流形不变量．这就是 Witten 用场论对 Jones 的纽结不变量给出了解释，并进而将其推广成 3 维流形的不变量．可以想象这一研究大概是 Witten 在京都获得菲尔兹奖

[22] *或许有更好的理由．也就是说，也许真能成为现实物理世界的模型．这方面笔者还不清楚．——原注．*

的最大理由吧！

2. Mass Gap

天之卷写着写着，笔者却慢慢没有了自信，心中也没底了，若有错误敬请谅解，不过再稍微继续下去.

首先，是否知道下面的事实？

(B) 由具有质量的粒子所传递的力随着距离的增大而渐渐趋近于 0.

读一读介绍汤川秀树的文章，其中谈到汤川是如何考虑介子的. 在原子核中质子之间为什么不会因相互作用力而分离了事呢？对这一疑难问题的回答就是这样的.

在质子之间及质子与中子之间作用着比电磁力强得多的核力. 但是因为传递它的粒子是很重的 (介子), 所以力不能传到远处. 因此若考虑比原子核体积更大的现象，核力就不相干.

我们就承认 (B) 而向前进行吧！假如拓扑场论中的力是由有质量的粒子所传递的，那将变成什么样呢？结合 (A) 与 (B), 答案就出来了. 因为力不依赖距离，再有距离增大便趋近于 0、所以最终只要有一点距离就变成 0、也就是

(C) 遵循拓扑场论的力当由有质量的粒子传递时，力完全传不到相离之处.

是否可以把这种现象叫做 Mass Gap.

用相关函数的语言又将如何呢？例如考虑曲面 Σ_1、Σ_2, 考虑相关函数 $Z(X;\Sigma_1,\Sigma_2)$. 它是仅仅位于曲面 Σ_1 之处的波与仅仅位于 Σ_2 之处的波之间的作用力的大小. 因为力在相离之处完全不传递，所以也就是力所传递的只是两个曲面的相交之处 (图 1).

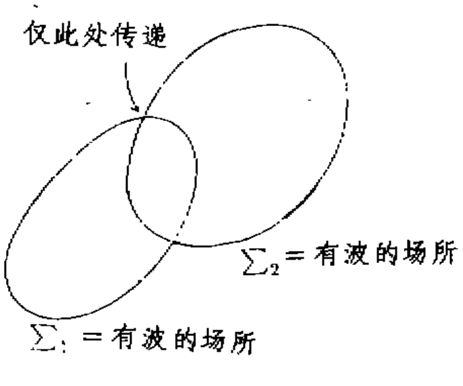

图 1

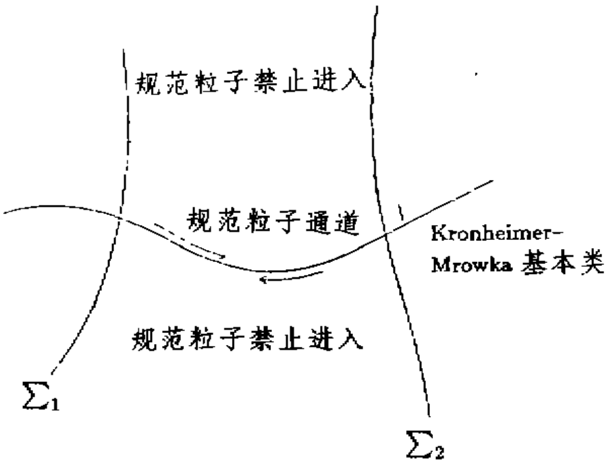

图 2

因此这种场合就变成相关函数只要计算曲面之间到底有几处相交. 称这种数为交点数.

因而假如在 Donaldson 理论中所使用的杨 -Mills 场是由有重量的粒子传递的场，那又将如何呢？结论是

(D) *假若杨 -Mills 场是由有重量的粒子所传递的场，则 Donaldson 不变量最终就为交点数.*

这在什么地方总有些奇怪. 为什么呢？理由是交点数是属于同调论的不变量，若仅此而言，那么由 Donaldson 不变量就不能知道 4 维流形的任何新东西.

到底怪在什么地方呢？实际上众所周知

(E) *在规范场中传递的粒子重量必定是 0.*

那倒不是说迄今的长篇大论就毫无意义了.

慢慢写着写着，笔者的理解也怪起来了，

众所周知使真空的对称破缺，是给出规范粒子以外表重量的 Higgs 机制.

要作说明最好是请教物理专家而不是笔者. 杨 -Mills 理论中群 $SU(2)$(一种 2×2 矩阵作成的群) 是表示规范对称性的群，而在 Seiberg-Witten 理论中成了交换群的 $U(1)$ (绝对值为 1 的复数)(我认为) 是与这里的真空对称破缺有关 (因为这规范群是非交换群，所以在地之卷的 2 中讲到它变成交换群的意义).

杨 -Mills 场的情形，空间若是复流形，则可以利用 Higgs 机制给规范粒子 (传递杨 -Mills 场的粒子) 以外表质量. 而实际上就是

(F) *这样的给定的外表质量随处不同.*

因此 4 维流形中就出现了规范粒子的质量为 0 之处. 也就是说只有通过这里，规范粒子才可能到达不同之处.

这一规范粒子的质量为 0 之处的全体的集合作成 4 维空间中的 2 维空间，即曲面，称它为 Kronheimer–Mrowka 基本类 (Basic class).

结合前面所写的，决定 Donaldson 不变量就等价于决定 Kronheimer–Mrowka 基本类.

由于杨 -MIlls 理论与 Seiberg–Witten 理论的等价， Kronheimer–Mrowka 基本类可以由 Seiberg–Witten 理论决定.

Kronheimer–Mrowka 是数学家，实际上他们按照与迄今的说明完全不同的做法，证明了 Donaldson 不变量是由他们所称的基本类所决定的[23]. 这里所叙述的是 Witten 对此所作的解释.

---

[23] 即使不是复流形，而是在被称为单纯型的 4 维流形中，这一般也成立. —— 原注.

Witten 关于这一说明的论文发表是在 Seiberg-Witten 方程出现大约一年以前. 其次在到达 Seiberg-Witten 方程的路上还有各种各样必须跨越的山峰. 其中最大的是电磁对偶性 (Electro magnetic duality). 不可思议的是, 一旦改变结合常数 (表示力的强度) 为 $c \to \frac{1}{c}$, 同时改变方程式, 则变成相同的理论. 这实际是谈话的核心, 根据这点从杨-Mills 方程就转移到了与其不同的 Seiberg-Witten 方程, 很遗憾, 笔者的理解的确难以对此进行说明. Seiberg-Witten 方程是磁单极 (magnetic monopole) 方程.

虽然还不够彻底、不过天之卷就此打住了. 对剩下部分感兴趣的读者请继续参加《数学セミナー》编辑部此后约请熟悉这方面情况的作者 (大概是物理学家) 所写的文章.

后记

1. 展望

编辑部要求, 可能的话作一展望. Seiberg-Witten 理论的物理展望笔者难以胜任, 只就数学方面谈谈.

现在不断进展的研究是, 4 维 (拓扑) 几何将因 Seiberg-Witten 方程而了解到哪一步呢? 因为较杨 -Mills 方程更容易了, 所以这方面有强在力的应用.

再一个绝对要做的是 Seiberg-Witten 方程与杨 -Mills 方程等价性的证明, 这并不仅仅是将物理上已经知道的东西进行严密化等等这种消极意义上的证明.

所谓证明, 与其说是为了确认其正确性. 倒不如说是为了理解[24). 希望证明这等价性的愿望就是希望能够确实了解天之卷中所写的以及由于笔者不知道而无法写出的那些情况的愿望. 在天之卷中写了各种名词等等. 例如 Higgs 机制、电磁对偶性等. Higgs 机制在物理上早已知道了, 但并没有怎么引起数学家的兴趣, 其数学意义还无法理解. 自然, 只要数学上有意义的情形出不来, 那么即使数学家进行研究, 恐怕也得出不来有意义的结果. 但是今天已经出现了数学上极有意义的巨大场面, 所以研究它应该成为可能了. 为了进行这一研究、与此相应的问题就是 Seiberg-Witten 方程与杨 -Mills 方程的等价性.

可以这样认为, 直到 Seiberg-Witten 方程出现为止, 关于 4 维流形上的杨 -Mills 方程, 毋宁说数学家的研究是领先的. 例如 Kronheimer-Mrowka 基本类的发现即为此. 由于 Seiberg- Witten 方程的发现、数学家投过来的球又被物理学家投了回来. 这回再一次把球投回去便是数学家的工作.

如果继续互相投掷这个球, 那么从 19 世纪到 20 世纪的向量分析、 Gauss-Bonnet 定理、 De Rham 定理、调和积分论, 接着直到 Atiyah-Singer 指标定理的这一几何学的发展, 与非线性化、非交换化或量子化就没有什么不同. 这是与电磁学、相对论、量子力学、量子场论等在彼岸平行进展的物理学的发展相互呼应的.

---

24) 虽然是画蛇添足, 但我认为这点似乎是数学以外的人在讨论数学中证明的含义时完全不能理解之点. ——原注.

由本文是否可以稍微体会到在规范理论中关系着多少数学与物理的本质部分呢？Seiberg–Witten 方程进一步加深了这一联系．特别是物理[25]的更深刻的部分与数学上意义深刻的场所有着关系．

在我们已经时时感受到数理科学这个名词变成流于标语口号式空话的危险的今天，数理科学的本色就在这里．

2. 后记之后记

这最前沿的数学与物理，有些部分笔者还没有理解便写在《数学セミナー》上了，我深深感谢对我这种"暴行"奉陪到底的读者．其次对容忍我这么做的《数学セミナー》编辑部也一并致谢，最后对于读过此文后对这一领域感兴趣的读者推荐少许文献．

规范理论的数学书中有：

小林昭七：《联络几何与规范理论》，裳华房

茂木勇－伊藤光弘《微分几何与规范理论》，共立出版

两者都是可读的好书．顺便允许我作点宣传，笔者所写的《规范群与拓扑》也即将由 Springer–Verlag 在东京出版．英语书中正宗的书有：

S. Donaldson, P. Kronheimer, *The Geometry of Four manifolds*, Oxford University Press.

D. Freed, K. Uhlenbeck, *Instantons and Four manifolds*. Springer–Verlag.

两者都是好书．但哪一本上也没有 Seiberg–Witten 理论．要学习 Seiberg–Witten 理论目前还只有论文．有：

E. Witten, Monopole and 4 manifolds, Math, Res. Letters 1 (1994) 769–796

P. Kronheimei & T. Mrowka, The genus of embedded surface in the projective plane, Math. Res. Letters 1 (1994) 797–801

另外听说 Taubes 讲演的录象带：

C. Taubes, The Seiberg Witten Invariants 由美国数学会出版了，但笔者尚未见到．

(陈治中 译　胡作玄 校)

[25]主要是基本粒子物理．——原注．