图论，发展方向，随机图论
着色

④

O157.5

109-115

图论的未来

Bollo., B　周三明

Béla Bollobás

(剑桥大学纯粹数学与数理统计系)

A **摘要**: 在过去的几十年里，图论获得了迅速的发展. 本短文中我们试图预示在未来的若干年内图论将如何发展.

"我们当中有谁不想揭开未来的帷幕，看一看在今后的世纪里我们这门科学的前景和发展的奥秘呢？我们的后代的主要数学思潮将追求什么样的特殊目标？在广阔而丰富的数学思想领域，新世纪将会带来什么样的新方法和新成果？"

David. Hilbert 以这诗一般的语言开始他在 1900 年巴黎国际数学家大会上的重要演讲 (见 [1]、[2]). 过高评价 Hilbert 在他的演讲中所提问题的重要性是困难的，这些问题深刻地影响了本世纪的数学进程. "Quo Vadis, Graph Theory?" 会议 (Fairbanks, Alaska, 1990) 的组织者给自己规定了一个雄心勃勃的任务：预测图论的未来. 无疑这比试图预测整个数学未来的发展方向要容易得多. 即使如此，就我们这个学科未来作权威性的发言对我来讲仍然是冒昧的. 然而，由于我身临会场，我将试图就图论及其与其它领域的关系作些评价.

图论常受攻击，从事图论工作的人亦不例外. 我们常被指责为肤浅，不了解也不使用真正的数学，解决意义不大的问题，这些问题的求解即使不是平凡的也是容易的. 虽然这些批评通常来自漠视任何组合性事物的人们，这些指责却有 —— 或许不仅仅是 —— 少许的真实性. 在图论界我们的确写了过多的论文，有时也的确解决了一些过于容易的问题，并且我们确有一种醉心于自己思想和问题的圈子、无视其余数学的倾向. 但是，我确信这些多半是暂时的问题.

图论很年轻，的确非常年轻，它远未充分发展. 偶而我们自称这门学科开始于 Euler

原题: The Future of Graph Theory. 译自: *Quo Vadis, Graph Theory? A Source for Challenges and Directions (eds. J. Gimbel, J. W. Kennedy & L. V. Quintas, Annals of Disc. Math. 55)*. Elsevier Sci. Pub. 1993, pp. 5–11.

1736 年的哥尼斯堡七桥问题，并称自此 200 年后 Dénes König 的书[1] 确立了图论作为一门学科的地位，但实情是这门学科迟至五十年代才开始起飞，七十年代才获得它的大量追随者.

或许图论的最大优势是具有众多自然的、漂亮的问题有待解决. Hilbert 强调问题对一门数学分支的重要性无疑是正确的. “只要一门科学分支能提出大量的问题，它就充满着生命力；而问题的缺乏则预示着独立发展的衰亡或中止. 正如人类的每项事业都追求确定的目标一样，数学研究也需要自己的问题. 正是通过这些问题的解决，研究者锻炼其钢铁般的意志和力量，发现新方法和新观点，达到更为广阔和自由的境界.” 我们为图论具有大量使人激动、期待解决的问题而欣喜.

自相矛盾的是，关于图论的许多错误认识正是源于这种问题的丰富性. 发现未基于任何理论的新问题并用简单的方法解决头几种情形实在是太容易了. 不幸的是，在某些情况下问题似不能将我们引向任何有意义的地方，而我们不得不赞同 Dieudonné 的观点，即我们的确发表 “无结局问题”(Problems without issue) 的胚胎状的解答. 我们都知道此类令人尴尬的例子. 还不清楚我们是否正足够努力地使我们的杂志摆脱 “无结局论文” (Papers without issue).

图论中有许多漂亮的结果，其证明未使用复杂的概念和工具，而仅依赖于十足的技巧性. 值得着重强调的是，这种情形之所以发生是因为没有合适的工具可用，而不是图论学家应尽可能少地运用数学. 我们乐于使用适合于解决该领域提出的自然的问题的任何工具. 事实上，有迹象表明在图论中我们能越来越多地利用其它数学分支的结果: Brouwer 定理和 Borsuk 定理已有许多应用；有限域上曲线的 Riemann 假设已被多次使用； Ramanujan 猜想已被 Lubotzky, Phillips, Sarnak 和 Margulis 极成功地运用；最近上同调理论又成为 Chung 和 Graham 关于伪随机超图的工作的动力. 受这些迹象的鼓舞，我们应学习组合数学以外的更多数学，以便当机会来临时我们已准备好使用强有力的工具. 由于自然而困难的问题超乎寻常的多样性，图论中引入的大多数方法不大可能适用于一个广泛的问题集，我们不应因这一事实而气馁.

过去的二十年可以见到图论中若干杰出的成就： Appel 和 Haken 证明了四色定理 (见 [3][4]); Robertson 和 Seymour 证明了 Wagner 猜想 (见 [5]-[7]) 并发展了丰富而漂亮的图子式 (Graph minors) 理论. 另外与图论关系密切而值得一提的主要结论有： Szemerédi 关于等差数列的定理 [8] 及更近一些时候 Laczkovich[9](也可见 [10]) 关于 Squaring the circle 方面的结果. 然而，图论在近二十年引人注目的特色是概率论方法已发展成为有紧密联系的理论. 毫无疑问，随机方法的理论现已频繁地应用于图论的大多数分支. 这一理论由 Erdős 和 Rényi 在五十年代末、六十年代初奠基，并在二十多年的时间内在除矩、契比雪夫不等式和容斥原理外未使用更多概率论的情况下健康成长. 但是，当发现源于概率论的大量其它工具，例如随机游动、鞅、分枝过程、马尔可夫链等等有用的时候，随机图论[2] 才真正开始其盛花期. 这些方法的加入大大改变了概率组合学的性质,

[1] 指 König 1936 年出版的第一本图论著作《Theorie der endlichen und unendlichen graphen》 —— 译注.
[2] 原文 The theory, 实指随机图论. —— 译注.

使其具有更少的“纯组合”、更多的“组合概率论”甚至“纯概率论”．不必为这一变化痛惜而应为其喝彩，因为这不是图论丧失其地盘而是它因新工具的注入而正变得更加强壮．我强烈希望随机图论的这种成功为其它的图论分支所仿效，并希望通过获取其它更有建树的诸多数学分支中的有力工具而使它们变得更为壮实．

什么是我们这个领域中真正的大问题？明显称得上是这样的问题有两个，那就是 P 是否等于 NP 的问题及 Hadwiger 猜想．

第一个问题在整个数学中都是尽人皆知的，它被认为是数学中最重要的问题之一．后一问题在组合界之外鲜为人知，但为组合界内所有人所熟悉．该猜想为：每个 $k-$ 色图有一个 $k-$ 阶完全图“子收缩”[3]．我的观点是 Hadwiger 猜想比 $P-NP$ 问题难得多．事实上，与一般的信念相反，我的预感是 $P=NP$．

让我们转向一些更合适的问题，以说明我认为在未来将被研究的问题的类型．这些问题也不太可能很容易，但也许并非完全不可企及．我想强调的是这些问题强烈地反映出我个人在图论方面的爱好和品味．

近年来越来越多的注意力集中于离散等周不等式．特别，Imre Leader 和我已在各种图上研究过这样的不等式 ([10]-[12])．给定图 G 及其顶点的一个集 A，对 $t\ge 1$ 以 $A_{(t)}$ 表 A 的 $t-$ 邻域：与 A 距离不超过 t 的顶点的集合．如果对每个具有 a 个顶点的 $A\subset V(G)$ 有

$$|A_{(t)}|\ge f(a) \tag{1}$$

则称 (1) 为一个等周不等式．尤令人感兴趣的是最好可能的等周不等式．

离散等周不等式的经典例子是离散方体的 Harper 不等式：如果 A 是离散方体图的 $\sum_{k=0}^{r}\binom{n}{k}$ 个顶点，则

$$|A_{(t)}|\ge \sum_{k=0}^{r+t}\binom{n}{k}.$$

碰巧有极少数重要的图类，其最好的等周不等式为我们所知．对大多数图[4]我们还远不知答案．这其中最突出的也许是方体的断片 (Slice)．给定 $o\le r\le n$，设 $S(r,n)$ 是以 $[n]=\{1,2,\cdots,n\}$ 的所有 $r-$ 子集的集合 $[n]^{(r)}$ 为顶点集的图，其中两顶点 (集合) 有 $r-1$ 个公共元时连一条边．什么是断片 $S(r,n)$ 的最好等周不等式？

这一问题也许不如看起来那么简单，因为它的一种非常特殊的情形蕴涵 Erdös, Ko 和 Rado[14] 中最后一个未解决的问题 —— 该问题被 Erdös 悬赏 500 美元 (见 [15], p. 471)．

另一个 Erdös 悬赏 500 美元的有趣问题归于 Erdös, Faber 和 Lovász．按 Erdös ([15], p. 471) 的提法该问题是：设 $G_1,G_2,\cdots,G_n$ 为两两无公共边的 n 阶完全图，则 $\cup_{i=1}^{n}G_i$ 是否具有色数 n? Kahn 和 Seymour [16] 及 Kahn [17] 中的漂亮结果构成了通向该猜想证明的最新进展．

---

[3]每个 $k-$ 色图可“收缩”为一个包含 $k-$ 阶完全图的图． —— 译注．

[4]原文为 Natural graphs, 作者拟指一些常见图，如偶图，弦图等等． —— 译注．

总体来看，在图论中似有转向整体问题的趋势．一个好的例子是伪随机和拟随机图与超图的近期理论，该理论归于 (除其他人外)Thomason [18] [19], Chung, Graham 和 Wilson [20] [21], 及 Chung 和 Graham [22] [23]. 这一领域有许多令人激动的问题，此处我们仅举其一．

图序列 $(G_n)_1^\infty$(G_n 有 n 个顶点) 称为是拟随机的，如果存在某个函数 $\alpha(n)=0(n)$ 使对 $V(G_n)$ 的所有子集 W 有

$$\left|e(G_n[W])-\frac{1}{2}\binom{|W|}{2}\right|\le\alpha(n)|W|.$$

如通常一样，此处 $e(G_n[W])$ 表 G_n 的由 W 生成的子图的边数．

对图的一个簇 $\mathcal{F}$, 称 $(G_n)_1^\infty$ 为 $\mathcal{F}$- 序列如果对每个 $F\in\mathcal{F}$ 该序列的成员与以 $\frac{1}{2}$ 概率取边的随机图渐进地具有同样多的同构于 F 的导出子图．最后，称 $\mathcal{F}$ 是强制性的，如果每个 $\mathcal{F}$- 随机序列是拟随机的． Chung, Graham 和 Wilson [21] 证明了几个强制性图簇的存在性 (例如， $\mathcal{F}=\{K_2,C_{2t}\}$, 对任意固定 $t\ge 2$).Chung 和 Graham [22] 提出是否可以刻划强制性图簇的问题．又，对超图情形如何？

另有大量与导出子图数目有关的问题．以 $i(G)$ 记图 G 中两两不同构的导出子图的数目．为证明 András Hajnal 的一个猜想， Erdös 和 Hajnal [24] 及 Alon 和 Bollobás [25] 证明了：如果 G_n 是 n 阶图且 $i(G_n)=0(n^2)$, 则可删去 G_n 的 $0(n)$ 个顶点使得剩下的图或为完全图或为空图．

称一个导出子图为平凡的，如果它为完全图或空图．记 $t(G)$ 为 G 的平凡 (导出) 子图的最大阶数．则上述结果表明如果 $i(G_n)=0(n^2)$, 则 $t(G_n)=n-0(n)$. 如果我们仅仅使用图的某些不变量 (如阶，边数，最大度，等等) 来区别非同构的子图，情形会怎样呢？给定图的不变量集 $\prod$ 及 n 阶图 G_n, $t(G_n)=t$, 至少有多少能被 $\prod$ 中不变量区分的 G_n 导出子图的同构类？当 G_n 跑遍所有满足 $t(G_n)=t$ 的 n 阶图时，记其最小数目为 $f(n,t,\prod)$. 我们获得了一大类问题，其求解告诉我们关于图的结构的许多信息 (当然，条件 $t(G_n)=t$ 可用任意别的条件代替). 一种有趣而简单的情况是 $\prod$ 仅含阶和边数的情形．

Erdōs 和 Rényi 的一个老而引人入胜的问题可用 $t(G)$ 和 $i(G)$ 表述：给定 $c>0$, 是否存在常数 $d=d(c)>0$ 使得若 $t(G_n)\le c\log n$ 对 n 阶图 G_n 成立，则 $i(G_n)\ge e^{dn}$?

Erdōs 的一个新得多的与之相关的问题要求确定 $r(n)=\min_{G_n} r(G_n)$, 此处 $r(G_n)$ 是 G_n 的正则导出子图的最大阶． Ramsey 定理显示对某绝对常数 $c>0$ 有 $r(n)\ge c\log n$. 可以证明 $r(G_n)\le n^{\frac{1}{2}}$. 此处上、下两界相距甚远，但不清楚哪一个更接近 $r(n)$ 的实际值．

另一个源于将一大类条件加之于经典问题从而使之更具有意义的问题是清单着色 (List-coloring) 问题．给定图 G 及将 G 的边映到某个颜色集的有限子集的函数 Λ, G 的一个 $\Lambda-$ 着色是一个正常边着色 ϕ, 使对任一 $e\in E(G)$, $\phi(e)\in\Lambda(e)$. 如此， $\Lambda(e)$ 是分派给 e 的颜色清单，而在 $\Lambda-$ 着色中 e 的颜色从其中选择． G 的清单色数为

$$\chi_l'(G)=\min\{k:\text{若对每条边}e\text{成立}|\Lambda(e)|=k,\text{则}G\text{有}\Lambda-\text{着色}\}$$

即，为保证清单着色存在性所需清单的最小长度.

记 $\chi'(G)$ 为 G 的边色数，则显然有 $\chi'_l(G) \geq \chi'(G)$. Dinitz见 [26]) 猜想对任意图 G 实际上应有

$$\chi'_l(G) = \chi'(G). \tag{2}$$

于是，特别地，应有 $\chi'_l(G) \leq \Delta(G) + 1$, 此处 $\Delta(G)$ 为 G 的最大度.

Harris 和我 [27] 证明了如果 $c > 11/6$ 且 $\Delta = \Delta(G)$ 充分大则 $\chi'_l(G) \leq c\Delta$. 后来, Chetwynd 和 Häggkvist, Bollobás 和 Hind 得到了这一结果的各种改进. 但是，离证明 (2) 还相距甚远.

最后，让我提及一个我所钟爱的问题，即由 Catlin, Eldridge 和我提出的一个猜想. 为扩充 Corrádi 和 Hajnal [28] 的一个结果， Hajnal 和 Szemerédi [29] 证明了下列深刻结果. 设 G 为最大度 r, 阶 $n = s(r+1)$ 的图，则 G 存在 $(r+1)$- 着色使每个色类有相同的顶点数. 换言之， G 的补图含 $(r+1)K_s$、即 $(r+1)$ 个顶点不交 s 阶完全图的并. 注意到 $(r+1)K_s$ 最大度为 $s-1$. Bollobás–Catlin–Eldridge 猜想 (见 [30] p.426) 断言 $\overline{G}$ [5] 不仅含 $(r+1)K_s$, 且含子图同构于任一最大度 $s-1$ 、阶数 n 的图. 再一次地，单个图 $(r+1)K_s$ 被一个大的图簇 —— 所有最大度 $s-1$ 、阶数 $n = s(r+1)$ 的图的簇 —— 所代替.

事实上，一个稍一般的猜想是：如果 G_1、G_2 是阶数为 n 、最大度分别为 Δ_1、Δ_2 的图，且 $(\Delta_1+1)(\Delta_2+1) \leq n+1$, 则 G_1 的补图 $\overline{G_1}$ 含同构于 G_2 的子图. 由于 Hajnal–Szemerédi 定理是其极特殊的情形，该猜想看来不那么容易.

上述诸问题是我相信我们必须在图论的某些部分细心考虑的那类问题的相当随意(非正式) 选择的例子. 必须再次强调的是它们强烈反映了我个人在图论方面的趣味.

让我回到 "Quo Vadis, Graph Theory" 这一主题. 今后二十或五十年图论是否会存在？它将会变化吗？如果是，将以何种方式变化？我相信图论的未来是灿烂光明的，因为有太多美好的事情为它纷至沓来. 图论有一个极大的问题源供给漂亮、自然的问题，它还是与计算机科学非常密切的一个数学分支. 我们几乎没有开始发展解决我们的问题的工具，也几乎未利用我们与计算机科学的这种亲近关系. 当这二者均发生时，我们将真正腾飞. 但是我们务必永葆图论的极美丽的景观. 必须记住 G. H. Hardy 的话： "美是第一位的考验：世界上没有丑陋数学的永久地位."

最后，请注意：在下几个年代里图论将变得困难得多，我们将尝试困难得多的问题，为有机会解决它们，我们将不得不远比现在更好地准备. 学习大量组合学及一般的、主流的数学知识对每个希望在图论中取得成功的人来讲都是必不可少的.

我期待着在未来的岁月里图论蓬勃发展.

译后记： Hilbert 演讲中两段话的翻译参照袁向东、李文林《希尔伯特》一书中的译文，特此致谢！秦裕瑗教授对译文初稿提出了一些修改意见，在此一并致谢.

---

[5]原文为 G, 系笔误. —— 译注.

参考文献

[1] D. Hibert, Mathematical problems, *Bulletin of American Mathematical Society*, **8**, (1902), 437–479.

[2] F. E. Browder (editor), Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* **28** (Part 1), American Mathematical Society, Providence (1976).

[3] K. Appel and W. Haken, Every planar map is four colorable: Part I. Discharging, *Illinois Journal of Mathematics* **21**, (1977), 429–490.

[4] K. Appel, W. Haken and J. Koch, Every planar map is four colorable: Part II. Reducibility, *Illinois Journal of Mathematics* **21**, (1977), 491–567.

[5] N. Robertson and P. D. Seymour, Generalizing Kuratowski's theorem, in *Proceeding of the Fifteenth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Baton Rouge, 1984). Congressus Numerantium,* **45**, (1985), 129–138.

[6] N. Robertson and P. D. Seymour, Graph minors: XV. Wagner's conjecture—to appear.

[7] N. Robertson and P. D. Seymour, Graph minors - a survey, in *Surveys in Combinatorics 1985*, I. Anderson (editor), *London Mathematical Society Lecture Note Series,* **103**, Cambridge University Press, (1985), 153–171.

[8] E. Szemerédi, On a set containing no k elements in arithmetic progression, *Acta Arithmetica*, **27**, (1975), 199–245.

[9] M. Laczkovich, Equidecomposability and discrepancy: a solution of Tarski's circle squaring problem, *J. für die Reine und Angewandte Mathematik* **404**, (1990), 77–117.

[10] M. Laczkovich, Uniformly spread discrete sets in $\mathbb{R}^K$—to appear.

[11] B. Bollobás and I. Leader, Compressions and isoperimetric inequalities, *J. Combinatorial Theory (A)*, **56**, (1991), 47–62.

[12] B. Bollobás and I. Leader, Isoperimetric inequalities and fractional set systems, *J. Combinatorial Theory (A)*, **56**, (1991), 63–74.

[13] L. H. Harper, Optimal numberings and isoperimetric problems on graphs, *J. Combinatorial Theory*, **1**, (1966), 385–394.

[14] P. Erdős, C. Ko and R. Rado, Intersection theorems for systems of finite sets, *Quart. J. Math. Oxford* (2), **12**, (1961), 313–320.

[15] P. Erdős, Some of my favourite unsolved problems, in A *Tribute to Paul Erdős,* A. Baker, B. Bollobás and A. Hajnal (editors), Cambridge University Press, (1990), 467–478.

[16] J. Kahn and P. Seymour, A fractional version of the Erdős-Faber-Lovász conjecture — to appear.

[17] J. Kahn, Coloring nearly-disjoint hypergraphs with $n + 0(n)$ colors — to appear.

[18] A. Thomason, Random graphs, strongly regular graphs and pseudo-random graphs, in *Surveys in Combinatorics 1987,* C. Whitehead (editor), *London Math. Soc. Lecture Notes Series,* **123**, Cam-

bridge University Press, Cambridge, (1987), 173–196.

[19] A. Thomason, Pseudo-random graphs, in *Random Graphs'85* (M. Karoński and Z. Palka, eds.), *Annals of Discrete Mathematics*, **33**, North-Holland, (1987), 307–331.

[20] F. R. K. Chung, R. L. Graham and R. M. Wilson, Quasi-random graphs, *Proc. Nat. Acad. U. S. A*, **85**, (1988), 969–970.

[21] F. R. K. Chung, R. L. Graham and R. M. Wilson, Quasi-random graphs, *Combinatorica*, **9**, (1989), 345–362.

[22] F. R. K. Chung and R. L. Graham, Quasi-random hypergraphs, *Random Structures and Algorithms*, 1, (1990), 105–124.

[23] F. R. K. Chung and R. L. Graham, Quasi-random set systems, *Journal of the American Mathematical Society*, **4**, (1991), 151–196.

[24] P. Erdõs and A. Hajnal, On the number of distinct induced subgraphs of a graph, *Discrete Mathematics*, **75**, (1989), 145–154.

[25] N. Alon and B. Bollobás, Graphs with a small number of distinct induced subgraphs. *Discrete Mathematics*, **75**, (1989), 23–30.

[26] R. Häggkvist, Towards a solution of the Dinitz problem?, *Discrete Mathematics*, **75**, (1989), 247–251.

[27] B. Bollobás and A. J. Harris, List-colourings of graphs, *Graphs and Combinatorics*, **1**,(1985), 115-127.

[28] K. Corrádi and A. Hajnal, On the number of independent circuits in a graph, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **4**, (1963), 423–439.

[29] A. Hajnal and E. Szemerédi, Proof of a conjecture of Erdõs. in *Combinatorial Theory and Its Applications*, vol. II, P. Erdõs, A. Rényi and V. T. Sós (editors), *Colloq. Math. Soc. J Bolyai*, 4, North-Holland, Amsterdam, (1970), 601–623.

[30] B. Bollobás, *Extremal Graph Theory*, London Mathematical Society Monographs. No. 11, Academic Press, London, (1978).

(周三明译　田 丰校)