特征值, Selberg猜想,
L-B算子

进展简介

④

310-315

Selberg 特征值猜想

——(值此 Robert Osserman 退休之际)

O175.9

Sarnak, P
Peter Sarnak[1]
杨嘉

70 年代末，当我是 Stanford 大学的学生时，我参加了由 Bob Osserman 主持的关于特征值问题，更明确些——特征值的界的讨论班. 这个讨论班对我和我的同学们是有启发的；它唤起了我对谱几何的强烈兴趣. 在这个讨论班上报告的结果之一是属于 Osserman 的；我愿意回顾它，以此作为这次演讲的出发点.

设 W 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个光滑的单连通区域. 我们对 W 上具有 Dirichlet 边界条件的 Laplace 算子 $\triangle$ 的最小正特征值 $\lambda_{DIR}(W)$ 感兴趣. 换言之，鼓 W 的低音音调：

$$\lambda_{DIR}(W)=\inf_{f|\partial W=0}\frac{\int_W|\nabla f|^2dV}{\int_W|f|^2dV}. \tag{1}$$

在什么条件下 $\lambda_{DIR}(W)$ 变得任意小？原来是并非 W 的面积，而是内半径 $r(W)$(最大内切球的半径) 与之相关. 1965 年，Makai[22] 解决了一个长期停滞的问题，证明了低音音调可以任意小，仅当区域包含一个任意大的圆鼓：即，如果内半径趋向于无穷. 1978 年，Hayman [12] 重新发现了 Makai 的结果，Osserman[25] 给出关于这些量的精确界，而且 (这对我们是重要的) 他将这些结果推广到弯曲空间. Osserman 澄清了等周不等式的用法. 特别是，在这种情况下的 Bonneson 型不等式. 他的结果对于双曲平面 $\mathbb{H}$ (即，带有线元 $ds=\frac{|dz|}{y}$ 的上半平面) 中的单连通区域 W 叙述如下：

$$\lambda_{DIR}(W)\geq\frac{1}{4(tanh\,r(W))^2}. \tag{2}$$

这个 1/4 是个有魔力的数，这个 1/4 的问题是这次演讲的内容. 因此，由 (2)，$\lambda_{DIR}(W)$ 降至 1/4 仅当 $r(W)$ 趋向于无穷. (实际上，这也是充分的).

让我们穿过如下的图，它引导我们到 Selberg 的基本猜想. 令 X 为一曲面 (无边)，被 $\mathbb{H}$ 所覆盖，即，X 是一双曲曲面 $\Gamma\backslash\mathbb{H}$, 其中 Γ 是 $SL_2(\mathbb{R})$ 的离散子群. 我们重新考虑 Laplace-Beltrami 算子的最小特征值 $\lambda_1(X)$, 但是现在 Dirichlet 边界条件换成：$\int_X fdV=0$.

$$\lambda_1(X)=\inf\frac{\int_X|\nabla f|^2dV}{\int_X|f|^2dV}, \tag{3}$$

原题：Selberg's Eigenvalue Conjecture–On the occasion of Robert Osserman's retirement.
译自：*Notices of the AMS*. Vol. 42, No 11, 1995, pp. 1272–1277.

[1] Peter Sarnak 是 Princeton 大学的数学教授. 他的 e-mail 地址是 Sarnak@math Princeton.edu. 此报告基于 1995 年 5 月 6 日在 Stanford 的大学讲演记录，在 Stephen Miller 的帮助下完成的. —— 原注.

其中下确界取遍满足 $\int_X f dV = 0$ 的 X 中具有紧支集的所有函数 f. 这里 dV, ∇ 等，均由从 $\mathbb{H}$ 继承下来的双曲度量来定义.

从不同的角度易见 $\lambda_1(X)$ 可以变得任意小，甚至对于固定亏格的 X. 例如，考虑亏格为 2 的这些曲面的退化族 (图 1, 分离测地线 γ 捏成一点).

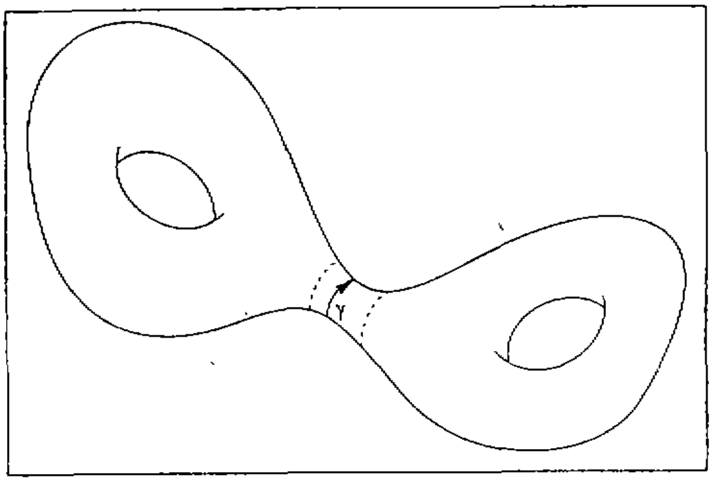

图1.

当 γ 的长度趋于 0 时， $\lambda_1(X) \to 0$, 因为我们可以在 (3) 中取试验函数 f, 满足 f 仅在细颈处非常值，这样 $\int |\nabla f|^2 dV$ 与 γ 的长度成比例. 因此当曲面变得越来越细时，内圆的长度趋于 0 且 $\lambda_1 \to 0$. 细节和进一步的例子，见 [26,31].

在 Osserman 的定理中起决定作用的数， 1/4 看起来并不扮演重要角色. 但是，当我们考虑通过数论构造产生的这类特殊曲面时，有趣的问题就产生了. 为了更好地表述想法，我们将注意力限于下类曲面： $X = \Gamma\backslash\mathbb{H}$, 其中 Γ 是下述群之一：

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a,b,c,d \in Z,\ ad-bc=1,\ a \equiv d \equiv 1,\ b \equiv c \equiv 0 \mod N \right\}. \qquad (4)$$

记 $\Gamma(N)\backslash\mathbb{H}$ 为 $X(N)$. 这些是 (主) 同余曲面 (或模曲线), 从各种角度看，它们都处于中心地位，例如， Shimura-Taniyama 猜想的阐述和 Andrew Wiles 最近的工作. 因为 $\Gamma(N)$ 是模群 $\Gamma(1)$ 的指数有限的子群， $X(N)$ 是 $X(1)$ 的有限叶覆盖. $X(N)$ 非紧但面积有限. 我们定义 $\lambda_1(X(N))$ 为 (3) 中的 Rayleigh 商： $X(N)$ 上 Laplace 的最小特征值. 现在， Laplace 的连续谱已经被很好地理解了 [13], [16]: 它由区间 $[1/4, \infty)$ 组成. 因此，问题实际上是离散谱之一. 记 $\lambda_1^{disc}(X(1))$ 为 $X(N)$ 上 Δ 的最小正离散特征值. 已经知道 (Selberg, Roelcke) $\lambda_1^{disc}(X(1)) > \frac{1}{4}$. 事实上，通过对结点线的仔细分析， Huxley[10], [11] 证明了当 $1 \le N \le 17$ 时， $\lambda_1^{disc}(X(N)) > \frac{1}{4}$.

通过几何方法考虑当 $N \to \infty$ 时估计 $\lambda_1(X(N))$ 的问题. $X(N)$ 的面积 $|X(N)|$ 易于估计. 事实上，覆盖 $X(N) \to X(1)$ 是 Galois 的，覆盖群是 $PSL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$. 覆盖的纤维的基数是 N 个元素的环上的 2×2 矩阵的个数，矩阵中每项有 N 种选法，且满足关系： $ad-bc=1$, 因此有 N^3 种. 这样， $|X(N)| = N^3|X(1)|$. 所以， $X(N)$ 的面积随着

N 一起趋于无穷，而且人们猜想 $\lambda_1 \to 0$. 事实上，Buser [5], 通过与三次图的组合的联系，得出一个表面上自然的猜想：当 $g \to \infty$ 时 $\lambda_1(X_g) \to 0$, 其中 X_g 是亏格为 g 的双曲曲面.

但是，我们有如下的：

猜想 1 (Selberg [30], 1965), 对于 $N \geq 1$, $\lambda_1(X(N)) \geq 1/4$.

我想这是模形式中基本的未解决的分析问题. 它对于经典数论有许多应用 (见 [16, 30]). 如果正确，它是精确的. 首先，$X(N)$ 的连续谱从 1/4 开始 (因此 $\lambda_1(X(N)) \leq \frac{1}{4}$); 其次，对于某个 N, $X(N)$ 在 $\lambda = \frac{1}{4}$ 有离散特征值 (见 Maass[21]). 如我们今天所理解的，猜想 1 是广义 "Ramanujan" 猜想的一部分. 从现代表示论的观点看，这个猜想是由 Deligne 所解决的著名的 Ramanujan 猜想的一个自然推广 [27]. 经典 Ramanujan 猜想是容易处理的，因为 Deligne 能够利用它的代数几何解释. 这条路 (至今) 不适合于 Selberg 猜想. Selberg 支持猜想 1, 通过证明著名的

定理 2 (Selberg [30], 1965) $\lambda_1(X(N)) \geq 3/16 = 0.1875$.

1978 年，Gelbart 和 Jacquet [7], 利用非常不同于 Selberg 的方法，证明了可以去掉上式中的等号变成不等式；但是除此以外，直到最近没有任何改进，我将在演讲快结束时描述它.

Selberg 的方法是将此问题与关于某种指数和 —— 称作 Kloosterman 和的纯算术问题相联系. 这允许他援引算术几何的结果. 给出估计的关键部分是归功于 Andre Weil 的关于 Kloosterman 和的一个 (精确) 界. 这个界是他早些时候证明的曲线的 zeta 函数的 Riemann 假设的一个推论 [34]. 另一方面，要利用这种方法改进定理 2, 需要检验这些 Kloosterman 和的求和式中的相消部分，但是算术几何在些方向上没有提供任何结果. 这就是 Kloosterman 和的方法在 3/16 存在自然障碍的原因. 有趣的是 Iwaniec [15] 给出定理 2 的一个证明，他仍沿袭 Kloosterman 和的方法，但避免引用 Weil 的界.

我想解释为什么猜想 1 是困难的. 让我们看 $X(N)$ 的基本域. 假设没有尖点，因而我们有具有许多边的大多边形和一个大的体. 这个多边形的内径本质上是 $X(N)$ 的周长即 $X(N)$ 上最短闭测地线的长度的一半，这可以从群 $\Gamma(N)$ 的定义容易地估计出来：矩阵 $\gamma \in \Gamma(N)$ 的迹决定 $X(N)$ 上闭测地线的长度. 由简单的同余分析，发现周长为 $4/3 \log |X(N)|$, 即 $X(N)$ 的面积. 我们将看到数 4/3 是临界值.

粗略地，这就是 $X(N)$ 的几何图象. 对应于 $\lambda_1(X(N))$ 的下界是什么呢？通过粘合多边形的边得到 $X(N)$, 它由 mod N 的分式线性变换的算术所支配. 关键的特征是这个算术将边 "随机地" 粘合. 如果你取一个随机的对称 $N \times N$ 矩阵，每列每行有三个 1, 其余项为 0, 则它的最大特征值是 3, 但是下一个最大特征值被与 3 至少相差一个与 N 无关的固定量. 这是非常出人意料的，也许这就是 Buser 误入歧途的原因. 后一个结果由组合论证得到，例如，见 [28]. 正是这个特征决定了原始形式中的猜想. 而且 "随机" 粘合避免人们找到使得 Rayleigh 商小的试验函数. 在这些解释的基础上，利用 Ramanujan 猜想构造明晰图，以模拟随机图的许多合乎需要的性质也许并不令人惊奇 [2, 19].

多年以前， Joseph Bernstein 和 David Kazhdan 告诉我证明 $\lambda_1(X(N))$ 的下界的有趣的几何方法及其相关曲面．但是单独用几何想法完成这件事看来是困难的，我将向你们表明，加上一些初等算术，这件事可以做到．考虑 $X(p)$,p 是一个大素数 (你也可以处理一般的 N, 但 N 是素数时更简单)．覆盖 $X(p)\to X(1)$ 的覆盖群是 $PSL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$．现在设存在一个坏特征值 λ, 即 $0<\lambda<1/4$. 首先，我们证明 λ 有高重数．令 V_λ 为对应的特征空间． $X(p)$ 上的 Laplace 算子与覆盖变换可交换，因而 $PSL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ 作用在 V_λ 上．如果作用是平凡的，则 $X(p)$ 上对应的特征函数位于 $X(1)$, 但是我们看到对于 $X(1)$ 不存在这样的特征函数．因此 V_λ 一定包含 $PSL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ 的一个非平凡的不可约表示．Frobenius 的一个结果断言 $PSL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ 的任何非平凡不可约表示的维数至少是 $\frac{p-1}{2}$. 我们得出结论 $\dim V_\lambda\ge\frac{p-1}{2}$. 以下的想法是证明对于小的 λ, 不能提供具有这样大的重数的特征值．

为了完成论证，我们需要关于这些重数 $m(\lambda,X(p))$ 的合适的界． Xue 和我证明了如下的界 (它对于更一般的情形也有效)[29].

任给 $\varepsilon>0$、存在 C_ε 使得

$$m(\lambda,X(p))\le C_\varepsilon|X(p)|^{1-2\nu+\varepsilon} \tag{5}$$

其中 $\lambda=1/4-\nu^2(0\le\lambda\le1/4)$.

(5) 的证明是初等的：将谱上的正和用 $\Gamma(p)$ 中的矩阵表示，发现不等式 (5) 归结为估计满足 (4) 且在某个区域中的整数 a,b,c,d 的个数．这些整数的个数的估计是直接的．回想 $|X(p)|$ 具有阶 p^3. 将 (5) 与关于重数的下界 $(p-1)/2$ 相结合，我们得到

$$p-1\le Kp^{3(1-2\nu+\varepsilon)}.$$

对于大的 p, 仅当 $(1-2\nu+\varepsilon)\ge1$ 时这是可能的，由此，我们有结论：

$$\lambda_1(X(p))\ge\frac{5}{36}-\varepsilon. \tag{6}$$

这没有 Selberg 的定理漂亮，但这几乎是一个几何的证明 (通过相关的论证， Huxley[11] 得到了一个类似的下界).

顺便说一句， Kazhdan 希望 $X(N)$ 的内径的增长性加上关于重数的下界就足以给出 $\lambda_1(X(N))$ 的下界．但是， Brooks [4] 所证明的周长 $4/3\log|X(N)|$ 刚好太小而不能达到此目的．也就是说，如果周长是 $\log|X(N)|$ 的任何一个比 4/3 大的分数倍数，就可以给出一个纯几何的 (加上对称性分析) 证明： $\lambda_1(X(N))\ge\delta>0$.

现在我要讲述最近的结果．我从 Luo, Rudnick 与我的合作工作讲起，这项工作涉及到克服 3/16 的障碍．我要说明当我着手研究这一问题自身时，我一无所获．而是当我们试图做一个很不同的问题时，偶然发现对于这个问题的一个完全不同的方法，实际上，这是一个很一般的方法．

定理 3 (Luo, Rudnick 和 Sarnak [20], 1994). $\lambda_1(X(N))\ge\frac{171}{784}=0.2181\ldots,$

它使我们到达了 Selberg 定理与 Selberg 猜想之间的半途．这也许是一个对解析数论中的某些结果发表评论的好的场合．这个学科有坏名声 —— 人们非常努力地工作去

改进某些指数，最终却极少有人注意．在某种意义上这是对的，但是主要的兴趣并不在于将指数改进多少，而在于引入新的方法和技巧．而且，存在这种问题 —— 我愿意称它们为孕育着的问题 —— 那里存在着现有的技巧所造所的自然的障碍，而克服这一障碍导致一个非常著名的问题的完全解决．至今存在着大量的这种问题，甚至一些问题沿着这条路线得到完全解决． Iwaniec[14] 和 Duke[6] 的定理就是一个好的范例．关于定理 3 我们可以用它，通过颠倒 Selberg 定理 2 的推理，给出关于级数的 Kloosterman 和中的相消性的第一批结果．但我不想在此谈及它们．

证明定理 3 的方法适用于更一般的对称空间 $H^n = SL_n(\mathbb{R})/SO_n(\mathbb{R})$. H^n, $n \geq 2$ 是行列式为 1 的正定 (对称) 矩阵的空间．群 $SL_n(\mathbb{R})$ 通过 $Y \mapsto {}^tgYg$ 作用在 H^n 上． H^n 的线元是 $ds^2 = Tr(Y^{-1}dYY^{-1}dY)$, 推广了上半平面 $(n=2)$ 的情形．关于 $SL_n(\mathbb{Z})\backslash H^n$ 和 $\Gamma\backslash H^n$(其中 Γ 是 $SL_n(\mathbb{Z})$ 的同余子群) 上的 Laplace-Beltrami 算子 Δ 的谱，人们可以提出类似的问题．实际上，在这种情形，存在除 Δ 以外的其他不变微分算子，对于每个这样的不变算子，都有所谓的 "Ramanujan" 猜想．在 [20] 中，对于这些 Ramanujan 猜想已建立起了定理 3 的类似物；当 $n \geq 3$ 时，这是该方向的首批结果．

处理这些广义 Ramanujan 猜想的方法是利用 $L-$ 函数．附加到如上的一个特征函数的是标准的 $L-$ 函数 (Hecke, Godement-Jacquet[7]) 和 Rankin-Selberg $L-$ 函数 [30,17]. 基本地，有人证明某些 $L-$ 函数不存在．与此相关，让我提及 Princeton 大学二年级学生 Steve Miller 近来的一个结果．他的方法是基于对与这些特征函数相联系的 $L-$ 函数的分析，此方法来自 Stark 和 Odlyzko[24], 他们给出数域的判别式的界．

定理 4(A) (Miller [23], 1995). 对于 $n \geq 2$, $\lambda_1^{cusp}(SL_n(\mathbb{Z}\backslash H^n) > \lambda_1(H^n)$.

这里 λ_1^{cusp} 是 $L^2(SL_n(\mathbb{Z})\backslash H^n)$ 的 "尖点" 子空间上的 Laplace 算子的最小特征值．尖点子空间 L^2_{cusp} 是由 $SL_n(\mathbb{Z})\backslash H^n$ 上在所有尖点具有零周期的所有函数组成的不变子空间 (见 [9]). 这听起来 (实际上) 是技术性的；只需说这个子空间是理解 $L^2(SL_n(\mathbb{Z})\backslash H^n)$ 上 Δ 的谱的基本建筑块． $\lambda_1(H^n)$ 是 H^n 上 Δ 的 L^2- 谱的基础．它可以明确地算出：对 $n=2, \lambda_1(H^2)=1/4$(可以容易地从 Osserman 定理看出), 因此定理 4(A) 是 $\lambda_1^{disc}(X(1)) > 1/4$ 的一个推广．实际上，广义 Ramanujan 猜想断言 $L^2_{cusp}(\Gamma\backslash H^n)$ (Γ 是 $SL_n(\mathbb{Z})$ 的同余子群) 上不变微分算子的谱包含于它在 $L^2(H^n)$ 上的谱中．因此，定理 4(A) 对于 Δ 和 $\Gamma = SL_n(\mathbb{Z})$ 证明了上述猜想．

现在你看到了定理 4(A), 你会说， "等一下，也许我也能证明不存在尖点调和形式或者也许甚至计算 $SL_n(\mathbb{Z})$ 的上同调！"

定理 4(B) (Miller [23] 1995)[2] $H^p_{cusp}(SL_n(\mathbb{Z}), \mathbb{R}) = 0$, $2 \leq n \leq 22, p \geq 0$

$H^p_{cusp}(\Gamma, \mathbb{R})$ 表示 $\Gamma\backslash H^n$ 上沿所有尖点具有零周期的 L^2- 调和 $p-$ 形式的空间；确切的定义见 Borel, [3]. 简而言之，这是并非来自边界的 $\Gamma\backslash H^n$ 的上同调．

对于 $n=2$, 上述定理是一个熟知的事实： $SL_2(\mathbb{Z})$ 没有权为 2 的全纯尖形式 (或

[2]当这篇文章付印时，我从 J.P.Serre 那里了解到 S.Fermigier 在 1994 年的一个预印本中已经得到类似的结果． —— 原注．

等价地, $SL_2(\mathbb{Z})\backslash H$ 的亏格是 0). 对于 $n=3$, 上述定理来自 Soulé[33], 实际上他计算了 $SL_3(\mathbb{Z})$ 的全部整上同调[3]. 对于 $n=4$, 这属于 Ash[1], 他告诉我他的方法不适合于 $n\geq 5$ 的情形 (如果国家安全依赖于它, 也许他能处理 $n=5$ 的情形!). 当然他的方法成功之处在于给出更多的信息, 包括确定某些同余子群上非常有趣的尖点上同调. Miller 的证明悲惨地不适用于 $n>23$, 我不清楚这是否是一个好的原因 (即, 此结果对 n 不成立, 比如说, $n=24$) 还是定理 4(B) 对于所有 n 成立.

最后, 我简略地解释定理 3 的证明的想法. 我将用一个模型问题来给予解释, 它使我能阐明要点. 回想 Riemann *zeta* 函数 $\zeta(s)$ 及其相关的 Dirichlet $L-$ 函数 $L(s,\chi)$.

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}=\prod_{p}(1-p^{-s})^{-1}$$

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)n^{-s}=\prod_{p}(1-\chi(p)p^{-s})^{-1}$$

其中 χ 是本原周期为 q $(\chi(m+nq)=\chi(m))$ 的乘性函数 $(\chi(mn)=\chi(m)\chi(n))$.

如果 $\chi(-1)=1$, $\xi(s,\chi)=(\pi/q)^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})L(s,\chi)$ 是整函数 $(\chi\neq 1)$ 且满足函数方程

$$\xi(1-s,\bar{\chi})=\varepsilon_\chi\xi(s,\chi),\ 其中\ |\varepsilon_\chi|=1.$$

涉及这些函数 $\xi(s,x)$ 的大猜想 Riemann 假设断言它们的零点在 $Re(s)=1/2$ 上. 我们对 $\Gamma\backslash H^n$ 上特征函数 ϕ 如此感兴趣的一个原因是它们给出 $L-$ 函数 $L(s,\phi)$. 实际上所有 $L-$ 函数都期望是这种形式 (Langlands[18]).

$L(s,\phi)$ 的形式类似于 $L(s,\chi)$, 除了对每个素数 p 有 $n-$ 局部因子以及 $\xi(s,\phi)$ 的定义中的 $n-$"Gamma" 因子. 而且 $\xi(s,\phi)$ 是整函数且满足函数方程. 如果我们有 $\Gamma\backslash H$ 上特征值为 $\lambda=1/4-r^2$ 的特征函数 ϕ, 则与 $L(s,\phi)$ 相联的 $\Gamma-$ 因子是 $\Gamma(\frac{s-r}{2})\Gamma(\frac{s+r}{2})$. 因为 $\xi(s,\phi)$ 是整函数, 我们看到这个 $\Gamma-$ 函数的极点迫使 $L(r,\phi)=0$. 所以, 如果 $0<\lambda<1/4$, 则 $L(s,\phi)$ 在 $0<r<1/2$ 有零点; 这意味着, $L(s,\phi)$ 违反 Riemann 假设. 依靠 Riemann 假设的缓慢进展, 这不像一个有前途的方法. 但是, 一个关键的观察表明 $L(s,\phi)$ 的这样的零点非常稳定. 这就是说, 如果 $L(s,\phi)$ 用级数表示

$$L(s,\phi)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n n^{-s}$$

且 χ 是上述满足 $\chi(-1)=1$ 的特征, 则可构成

$$L(s,\phi\otimes\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\chi(n)n^{-s}$$

进一步这个新的 $L-$ 函数具有完全相同的性质 (整函数, 满足函数方程) 而且最重要的是它的 Γ 因子仍是 $\Gamma(\frac{s-r}{2})\Gamma(\frac{s+r}{2})$. 由此得出对于所有这样的 χ, 都有: $L(r,\phi\otimes\chi)=0$! 因此我们有一大类可怕的零点, 而且我们有机会证明至少有一个 χ 满足 $L(r,\phi\otimes\chi)\neq 0$. 通过考虑 χ 上 $L(r,\phi\odot\chi)$ 的平均, 至少对于某个 r 这是可以做到的. 定理 3 就是通过将这种想法应用于与 ϕ 相联系的 $L-$ 函数上而证明的.

参考文献 (略)　　　　(杨 磊 译　彭立中 校)

[3] 也可见 R.Schwarzenberger [32].—— 原注.