

## 综合报告

# 探索未知: Louis Nirenberg 在 偏微分方程方面的工作

Tristan Rivière

**原编者按** 这是 Tristan Rivière 于 2015 年 5 月 20 日所做 Abel (阿贝尔) 专题研讨会的讲座的一个压缩版本. 其详细版及参考文献请参阅 [arxiv.org/abs/1505.04930](https://arxiv.org/abs/1505.04930) 的原始文本.

偏微分方程是自然科学和社会科学数学模型中的核心对象: 例如声传播, 热扩散, 热力学, 电磁学, 弹性力学, 流体动力学, 量子力学, 人口增长和金融. 它的理论在 20 世纪下半叶进入黄金时期.

从 1950 年代早期开始, Louis Nirenberg (尼伦伯格) 的数学工作对人类知识的这个基础领域做出了巨大的贡献. Nirenberg 的名字与偏微分方程研究中许多奠基性结果相联. 授予 Nirenberg Abel 奖, 标志着一个特别的机遇, 使我们可以回顾偏微分方程领域的发展, 以及在其发展过程中主角之一的工作.

Nirenberg 喜欢将偏微分方程领域描述为“凌乱的 (messy)”, 并且经常承认他对这种“凌乱”的特殊品味. 最初将偏微分方程看作一个整体的尝试, 主要发生在 19 世纪. 我们将首先谈谈这些最初的尝试, 以及这种方法的局限和不足之处.

### 1. 一个一般的存在性结果: Cauchy-Kowalevski (柯西-柯瓦列夫斯卡娅) 定理

也许关于偏微分方程的第一个一般的系统性研究要追溯到 Augustin-Louis Cauchy 和他关于带有实解析数据的拟线性一阶偏微分方程组解的存在性和唯一性定理. 1874 年, Sofia Kowalevski 在她的博士论文中证明了该结果的一个一般的非线性版本, 显然她并不知晓 Cauchy 的工作.

#### Cauchy-Kowalevski 理论的不足

Cauchy-Kowalevski 定理要求一个解析的框架. 历史上该定理的证明基于幂级数收敛性的论证. 是否存在其他非解析版本的定理引发了许多研究, 而且虽然唯一性定理对某些类型的线性偏微分方程成立, 但也有不成立的反例. 一般性的问题仍待解决.



1874 年 Sofia Kowalevski 证明了关于实解析偏微分方程解的存在性和唯一性的 Cauchy-Kowalevski 定理的一般非线性形式

译自: Notices of the AMS, Vol. 63 (2016), No. 2, p. 120–125, Exploring the Unknown: The Work of Louis Nirenberg on Partial Differential Equations, Tristan Rivière, figure number 4. Copyright ©2016 the American Mathematical Society. Reprinted with permission. All rights reserved. 美国数学会与作者授予译文出版许可.

作者是苏黎世联邦理工学院的数学教授, 他的邮箱地址是 [tristan.riviere@math.ethz.ch](mailto:tristan.riviere@math.ethz.ch).