群表示，调和分析，欧拉

有限群 Langlands

进展简介

群表示和调和分析
—— 从 Euler 到 Langlands(下)

Anthony W. Knapp 那吉生

Knapp, AW

调和分析的实质是将复杂的表达式分解为一些分项，它们反映群作用的结构，如果这样的群存在的话；目的是使某些艰难的分析变得易于处理.

在 17 世纪和 18 世纪，出现的与此相关的群有圆 $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, 直线 $\mathbb{R}$ 和有限交换群等. 反映在应用中的是函数按 乘法特征 分解，乘法特征是群到非零复数的连续同态. 对于圆的情形，这一分解正是 $(-\pi, \pi)$ 上的函数展开为 Fourier 级数

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
f(x) &\sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx} \\
C_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx.
\end{aligned}
$$

对直线的情形，分解由 Fourier 变换和 Fourier 反演公式给出，对于性质足够好的函数，它们可写为

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
\hat{f}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ixy}\,dx, \\
f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)e^{2\pi ixy}\,dy.
\end{aligned}
$$

对于有限交换群 G 的情形，展开式就是

$$
(3)\qquad f(x) = \frac{1}{|G|}\sum_{\omega}\left[\sum_{y\in G} f(y)\overline{\omega(y)}\right]\omega(x),
$$

求和是对群上所有乘法的特征而言的.

乘法特征在处理非交换对称群的时候不再那么有用了，因为乘法特征必须将每个换位子 $xyx^{-1}y^{-1}$ 都映为 1. 为了能够做非交换群的调和分析，人们需要引进乘法特征的多维推广，即群表示.

原题： Group Representation and Harmonic Analysis from Euler to Langlands, Part II. 译自： *Notices of the AMS*, Vol. 43(1996), No. 5, pp. 537-549.

群 G 在复向量空间 V 上的表示是 G 在 V 上的由线性变换给出的群作用，即 G 到 V 上可逆线性变换群中的一个同态．通常群 G 和向量空间 V 都是有拓扑的，因而群作用也要求是连续的．乘法特征 ω 给出在复数构成的 1 维空间 $\mathbb{C}$ 上的表示，元素 $g\in G$ 的作用是乘以数 $\omega(g)$.

19 世纪末是 Lie 和 Klein 为领导潮流的数学家的时期，那时群作用被广泛研究，包括线性分式变换给出的群作用．在这种气氛下，自然期望人们也会注意到线性变换给出的群作用，从而发现群表示．但这丝毫不说明群表示是如何引进的．

有限群

Dedekind 在他关于代数数论的工作中注意到有关有限 abel 群的一个奇妙的事实．设 $G=\{g_1=1,g_2,\ldots,g_n\}$ 为 h 阶有限群，$x_{g_1},\ldots,x_{g_h}$ 为由 G 的元素参数化的彼此交换的独立变数．Dedekind 研究矩阵 $(x_{g_ig_j^{-1}})$ 的行列式 $\theta(x_{g_1},\ldots,x_{g_h})$, 在交换群的情形下，他证明 θ 有如下分解：

$$\theta(x_{g_1},\ldots,x_{g_h})=\prod_{\chi}(\sum_{j=1}^{h}\chi(x_{g_j})x_{g_j}),$$

其中乘积取遍 G 的全部乘法特征．

Dedekind 致信 Frobenius 说，他不知道如何将这一结果推广到非交换的情形．于是 Frobenius([4], vol. III) 在 1896 年开始了他的表示论方面的工作，引入任意有限群的 (不可约的) 特征，从而解决了 Dedekind 的问题．在今天，特征就是表示的迹，但 Frobenius 那时并没有直接导出表示，而是做了在今天看来令人奇怪的数学，他开始直接去研究特征，只是在后来的文章中才引入有限维表示．

Burnside 从 1904 年开始，年青的 I. Schur([13], vol. I) 从 1905 年开始，他们分别重新研究这一理论，各人研究的主要对象都有矩阵表示 (到某一阶的可逆矩阵群中的同态．依照 E. Artin([1], p. 528) 的说法，"正是 Emmy Noether 迈出了决定性的一步，这就是用另一概念，即向量空间的线性变换的概念来取代矩阵的概念，矩阵在新概念中处于首要的地位．" Noether 的定义实质上就是上面给出的现代的表示的一般定义． Burnside 和 Schur 用的表示空间是列向量的空间 $V=\mathbb{C}^n$, 线性变换被看成为矩阵．后来，当表示论被扩展到 Lie 群，量子力学迫使人们研究无穷维表示时，若没有 Noether 的这一观点，要开展研究会是相当棘手的．

G 的两个有限维表示： V 上的 π, V' 上的 π' 称为 等价的, 是指存在一个可逆线性映射 $E:V\to V'$. 使得对一切 $g\in G$, 有 $\pi'(g)E=E\pi(g)$. π 的 不变子空间U 是一个向量子空间，使得对一切 $g\in G$, 有 $\pi(g)U\subseteq U$. 有限维表示 π 称为 不可约的, 是指 V 没有非零的真不变子空间.

Burnside 和 Schur 的研究结果，虽然一部分用线性变换的术语改写过，乃是建立有限群原理的一种抽象理论，在其它背景下人们可能还会回过头来寻找这些原则：

(P1) (酉性和完全可约性). 每一个有限维表示都等价于酉矩阵表示. 所以，不变子空间的正交补也是不变的，由此得出：每一个有限维表示都是不可约表示的直和. (这些结论在他们之前就已经知道了， Burnside 的贡献在于看出完全可约性是酉性的推论).

(P2) (Schur 引理). 如果 π 和 π' 分别是 V 和 V' 上的不可约表示， $E: V \to V'$ 是线性映射使得对一切 $g \in G$, 有 $\pi'(g)E = E\pi(g)$, 则 $E = 0$. 或 E 是可逆的. 如 $V = V'$, 则 E 是纯量的 (scalar). (第一个结论属于 Burnside, 第二个属于 Schur).

(P3) (Schur 正交性). 如果 π 和 π' 是不等价的不可约酉表示，则

$$\sum_{g\in G} \pi_{ij}(g)\overline{\pi'_{kl}(g)} = 0.$$

以及

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \pi_{ij}(g)\overline{\pi_{kl}(g)} = \begin{cases} 1/\dim \pi, & \text{当}(i,j) = (k,l) \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(P4) (Fourier 反演). 设 π 跑遍 G 的全体不等价不可约酉表示. 设 f 是 G 上的复值函数，定义 $\pi(f) = \sum_{x\in G} f(x)\pi(x)$. 则

$$f(1) = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi} (\dim \pi)\mathrm{Trace}(\pi(f)).$$

(P5) (完备性). 设 π 跑遍 G 的全体不等价不可约酉表示. 设 f 为 G 上的复值函数，定义 $\pi(f) = \sum_{x\in G} f(x)\pi(x)$. 则

$$\sum_{x\in G} |f(x)|^2 = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi} (\dim \pi)\|\pi(f)\|^2,$$

其中 $\|\cdot\|$ 为 Hilbert-Schmid 范数 (矩阵元素绝对值平方和的平方根).

做一个特别的有限群的调和分析只是比交换群的情形稍复杂一些. 我们以 3 个字母的对称群为例说明上面 5 个原则中的某几个. 对于这个群 G, 有 3 个不等价不可约表示，维数分别为 1, 1 和 2. 它们是：平凡表示 1, 符号表示，以及平面上的表示 π, π 是通过取中心在原点的等边三角形并考虑其置换顶点效果所得到的表示. 对于 2 维表示 π, 假定在极坐标下顶点为： $(1, 0°)$, $(1, 120°)$, $(1, 240°)$, 分别以数 1,2,3 记之. 我们利用标准基将每个线性表示 $\pi(g)$ 转换为矩阵，得到：

$$\pi((1,2)) = \begin{pmatrix} \cos 120° & \cos 30° \\ \sin 120° & \sin 30° \end{pmatrix}, \quad \pi((2,3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

π 在其他的置换上由对应矩阵的积给定. 可以把矩阵的元素看作 G 上的函数如下：

g \ 元素	$\pi_{11}(g)$	$\pi_{12}(g)$	$\pi_{21}(g)$	$\pi_{22}(g)$
(1)	1	0	0	1
(123)	$-1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$
(132)	$-1/2$	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$
(12)	$-1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
(23)	1	0	0	-1
(13)	$-1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$	$1/2$

对于符号表示，对应的元素作为 g 的函数是： $1, 1, 1, -1, -1, -1$. 对于平凡表示，它们都是 1. 直接计算表明，6 个列是互相正交的. 上面展示的列有范数平方等于 3, 而符号表示和平凡表示的列则有范数平方等于 6. 这就是 (P3). 由于正交性，6 列函数构成 G 上复值函数的 6 维空间的基，(P5) 可从线性代数得到. 在下述意义上，(P4) 和 (P5) 是等价的：定义 G 上的卷积 (convolution) 为 $f * h(x) = \sum_{y\in G} f(xy^{-1})h(y)$. 则应用于函数 $f * f^*$ 时 (此处 $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}$),(P5) 就等于 (P4). 于是 (P5) 是 (P4) 的特例 [1]. 但是，函数 $f * f^*$ 张成整个函数的空间，故而特例 (P5) 又蕴含一般情形 (P4). 这个例子的细节已在 Gross[5] 中给出.

抽象理论的另一部分是诱导表示的思想，属于 Frobenius. 诱导是从子群 H 的表示构造 G 的表示的一种方法. 设 φ 为 H 在空间 V^φ 上的表示. 那么，诱导表示 $\pi = \mathrm{ind}_H^G \varphi$ 在向量空间

$$\{f : G \to V^\varphi \mid f(xh) = \varphi(h)^{-1}(f(x)), h \in H\}$$

上的作用为： $(\pi(g)f)(x) = f(g^{-1}x)$. 如果 φ 为 H 的平凡表示，则 π 是 G 在 G/H 的函数空间上的左正则 (left regular) 表示，即由 $(l(g)f)(x) = f(g^{-1}x)$ 给出的表示 l. 有限群的诱导表示在 Artin L- 函数中起了作用，对此我们将作简短的说明.

应用于特定有限群的调和分析需要知道该群的不可约表示，或者至少是它的特征. 对于对称群和交错群，它们被 Frobenius 和 Young 独立作出已有相当一段时间了. “Young 图”至今仍是构造这种表示的标准工具.

有限群的表示论对于表示论以外领域最重要的应用之一是 Frobenius 的以下定理 (1901 年): 作用于 n 个符号上的可迁置换群, 若每个非单位元或是移动所有符号，或是移动除掉一个外的所有符号，则此群必包含一个 n 阶正规子群. 另一个早期的应用是 Burnside 定理 (1904 年): 若 p, q 为素数，则任何 $p^a q^b$ 阶的群都是可解的. 在这些早期结果之后，表示论在有限单群分类工作的各个阶段继续起关键作用.

有限群表示的另一个应用是与 Artin L- 函数有关的，后者是 Artin 在 20 世纪 20 年代引入的. 有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的 Artin L- 函数把 $\mathbb{Z}$ 上首项系数为 1 的不可约多项式在模每个素数约化时如何分解因式的信息隐含于其生成函数中. 对于多项式 x^2+1, L 函数是

$$L(s, \mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q}, \mathrm{sgn}) = \prod_{p\ \text{奇素数}} \frac{1}{1 - \left(\frac{-1}{p}\right) p^{-s}}, \tag{4}$$

其中 $(\frac{-1}{p})$ 是 Legendre 符号，即当 -1 是模 p 平方剩余时它取值 1, 不然取值为 -1. 这个 L- 函数与 Euler 先前引入的 L 函数只有微小的差别，在 Euler 情形里，$(\frac{-1}{p})$ 是用表达式 $\chi^-(p)$ 代替，其中 $\chi^-(p) = 1$ 或 -1, 依 $p \equiv 1$ 或 $3 \bmod 4$ 而定. 而 $(\frac{-1}{p}) = \chi^-(p)$

[1] 将 $f * f^*$ 代入 (P4) 左方，得 $f * f^*(1) = \sum_{y\in G} f(y^{-1})\overline{f(y^{-1})} = \sum_{y\in G} |f(y)|^2$, 即为 (P5) 的左方，再注意 Trace $\pi(f * f^*) = \|\pi f(x)\|^2$, 因此 (P5) 成为 (P4) 的特殊情形. — 译注.

是众所周知的二次互反律的初等情形. 这样一来, Euler 的 L 函数和 (4) 式是相等的. 互反律的这一角色允许有众多的推广, 其中表示论占有统治地位, 稍后我们还要回到这个问题上来. 让我们先看看表示论是从什么地方进入 Artin L- 函数的定义中的. 更一般的 Artin L- 函数里隐含着关于数域 ($\mathbb{Q}$ 的有限扩张) 的整数环中素理想的某些信息. L- 函数依赖于一个复参数 s, 数域的一个有限 Galois 扩张 K/k, 和 K 在 k 上的 (有限)Galois 群的表示. 我们这里不关心推广 (4) 的函数的确切定义. 但是, 当 $k=K$ 且表示为平凡表示时, L- 函数便化为所谓的 K 的 ζ 函数. 诱导表示在理解 L- 函数时起重要作用. 当 k 用较小的域 k_0 替代, 表示换为从 $\mathrm{Gal}(K/k)$ 到 $\mathrm{Gal}(K/k_0)$ 的诱导表示时, L- 函数不改变. 取 $k=K$, 可知 K 的 ζ 函数等于相应于 K/k_0 和在 $\mathrm{Gal}\,(K/k_0)$ 上的函数上的 $\mathrm{Gal}\,(K/k_0)$ 的左正则表示的 Artin L- 函数. 这一表示分解为不可约加项的事实反映在 K 的 ζ 函数分解为 L 函数的积之中. 这样, Artin L- 函数是数域的 ζ 函数的典范因子, 应用 Galois 群的表示论, 它们便自然出现了.

Lebesgue 积分, Fourier 级数和 Fourier 变换

几乎在有限群表示论发展的同时, Fourier 级数和 Fourier 变换的理论开始迅速发展. 推动力是 Lebesgue 在 1902 年的论文和 1904 年的书中引入的 Lebesgue 积分. 那时已经知道 (P4) 的一种形式: 如果 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|<\infty$, 且 $f(x)$ 为连续, 则 $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$; 同样, 也知道了 (P5) 的一种表达式的重要性, 即完备指数函数系统的 Parseval 等式: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$. Lebesgue 积分为 Riesz-Fischer 定理 (1907) 铺平了道路, 该定理说: 任何平方可和序列 $\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 是 $(-\pi,\pi)$ 上的某一个 L^2 函数的 Fourier 系数的序列. 因而可透彻地理解 Fourier 系数映射 $f\to\{c_n\}$ 乃是一个 L^2 空间到另一个 L^2 空间上 (onto) 的保距线性映射.

1910 年, Plancherel 对 Fourier 变换证明了 (P5), 这一性质后来的所有推广都被称为 Plancherel 公式. 用 (2) 中的记号, 他的结果是: 在 $L^1\cap L^2$ 上的 Fourier 变换映射 $f\to\hat{f}$ 满足 $\|\hat{f}\|_2^2=\|f\|_2^2$, 所以 Fourier 变换可扩展为 L^2 到 L^2 中的保距映射. 因为 (2) 中的反演公式和变换本身具有同一类型, 故 Fourier 变换是自动地作用到 L^2 上 (onto) 的, 调和分析需要的形式体系也完全是适当的.

历史上, 成功地采用 Lebesgue 积分且通过 Fourier 级数写成如下形式

$$T\left(\sum c_ne^{inx}\right)=\sum b_nc_ne^{inx} \tag{5}$$

的第一个算子似乎是 Hilbert 变换, 这里 $b_n=-i\,\mathrm{sgn}\,n$. 这个算子的来源是将 f 看成为单位圆上的函数, 使用 Poisson 积分公式得到单位圆盘上的调和函数, 再通过正规化过渡到在原点取值为 0 的共轭调和函数, 最后取边界值. 这一研究由 Privalov(1918 年) 和 Plessner(1923 年) 各自独立进行, Fourier 变换和半平面的论述可作类似处理. 1927 年, M. Riesz 证明了 Fourier 级数形式的 Hilbert 变换在 L^p 上是有界的, 其中 $1<p<\infty$, 容易推出: L^p 函数的 Fourier 级数的部分和在 L^p 中收敛到原来函数, $1<p<\infty$. 类似的有界性结果对于适合于 Fourier 变换的 Hilbert 变换的形式和半平

面也成立. 与平移交换的更复杂的算子的研究开始于 20 世纪 30 年代，而且论题扩展到多变数. 例如，对于 $\mathbb{R}^n$ 中的 Fourier 变换，其反演公式与 (2) 中的一样，只是积分取在 $\mathbb{R}^n$ 上，且 xy 代之以点积 $x\cdot y$. Zygmund[18] 和 Stein[14] 的书阐述了这些理论. 因其后来改写的方式而值得特别注意的一个结果是关于正定函数的 Bochner 定理 (1932 年)、群 G 上的正定函数 (positive definite function) f 是这样的函数，使得矩阵 $\{f(x_ix_j^{-1})\}$ 总是半正定 Hermite 矩阵. 这个定理是关于在 $\mathbb{R}^n$ 上连续函数中间找正定函数，它们恰好就是有限测度的 Fourier 变换给出的函数.

Gårding 在 1953 年的工作中将 $\mathbb{R}^n$ 上的 Fourier 变换和早先些时候的发现——"冻结原理"(freezing principle) 结合起来，将 Fourier 变换的范围扩展到没有给出群下的对称性的情形. "Gårding 不等式" 给出内积 (Lu,u) 的下界，此处 L 为 m 阶线性实椭圆微分算子、u 有紧支集. 用 Plancherel 公式处理常系数且每项都是 m 阶的情形. 一般算子在一点附近的性状可由那些系数恒等于首项系数在该点数值 (即为 "冻结原理") 的特殊算子的性状来逼近，再把这种估计用单位分解 (partition of unity) 拼接起来. 在 Bers, John 和 Schechter 的书 [3] 中叙述了有关细节. 在这一发展中，冻结原理的思想是拟微分算子及其推广的现代理论的一个推动力. 当我们以后考虑幂零 Lie 群时，冻结原理还将再度出现.

紧群 (Compact Groups)

二十世纪早期，要把表示论的各个部分从有限群推广到紧群，唯一需要的工具就是不变积分，而对于旋转群和酉群这已经是现成的东西，就写在 A. Hurwitz1897 年的文章中. 抽象的理论和对不可约表示的识别并肩而来. Schur 在 1924 年注意到 (P1)、(P2), (P3) 当一旦有了不变积分立即可推广，G 上的和用积分代替，$|G|$ 用总的体积代替. 他还作出旋转群和酉群的不可约表示.

1913 年，É. Cartan 用代数工具已经证明了最高权定理，该定理将复半单 Lie 代数的不可约表示作了分类. 但我们不清楚他当时是否看到了这一结果与紧连通 Lie 群 (至少是单连通时) 不可约表示的分类如何接近，或者他是否赋予这个问题特殊的意义. 部分地是受到 Schur1924 年文章的激励，Weyl 在 1924–1926 年间从分析方面发展了紧连通 Lie 群的理论. 他运用微分形式表示的不变积分，证明了群的每个元素都共轭于极大环面的一个元素，用共轭类上的的积分给出一个积分公式，并用特征和积分公式把最高权定理的一种形式化为极大环面上的 Fourier 级数的理论. 建立起 (P5) 的著名的 Peter-Weyl 定理是在 1927 年得到的，而对于光滑函数的 (P4) 只是个推论. 与有限群的情形不同，Peter-Weyl 定理必须用到一些分析，紧自伴算子的谱定理始终是一个工具. Cartan 在 1929 年的文章中，通过证明复半单 Lie 代数和紧 Lie 群的实 Lie 代数之间的充分的联系，把代数的理论和分析的理论紧密结合在一起. 在 20 世纪 30 年代早期，Haar 和 von Neumann 证明了 Haar 测度的存在性和唯一性，使得抽象理论由 P(1) 到 (P5) 都能够按常规推广到所有紧拓扑群上来.

紧群的调和分析的第一个数学应用是 Cartan 在 1929 年用紧 Riemann 对称空间

的语言对特殊函数的部分理论所作的重新解释．在最简单情形里，他的工作阐明球面调和函数与 Legendre 多项式如何从旋转群 $SO(3)$ 对球面 S^2 的作用而得到． Gross[5] 就这个例子说明了 Cartan 理论．

紧群的调和分析有一些应用是和 (5) 中出现的情形类似的，即群自身上的函数的 Fourier 系数被乘以某种因子，并考察所得出的算子 这种应用的一种情形是在紧群上定义且在共轭类上不变的函数的 Fourier 展开部分和的 L^p 收敛性． Herz 和 R. Stanton 对半单紧群情形考虑了这个问题，在 p 的某个范围里，即 $1+\epsilon<p<1+\frac{1}{\epsilon}$，得到 L^p 的收敛性．与经典的 Fourier 级数的情形不同，对给定的半单紧群，最好的 ϵ 是严格正的．

在紧群的调和分析的大多数应用里，紧群 G 非可递地作用在测度空间 X 上，人们去分析 $L^2(X)$ 上与 G 的作用交换的算子．恰当的例子是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的 Fourier 变换，它与空间的旋转交换．人们期望旋转群 $SO(n)$ 的调和分析能产生某些信息．实际上， Bochner 在 1951 年就进行了这种研究，他利用了球面调和与 (1 维)Hankel 变换． Stein 和 Weiss 的书 [15] 重作了这一研究，但更着重于群论方面．

紧群对物理学的应用也属于这一类．对特殊值 n 的特殊酉群 $SU(n)$ 的表示论在基本粒子理论中原子核相互作用的研究里起重要作用．在量子力学里，人们从实验中观测到的东西是 Hilbert 空间上某些自伴算子的特征值 (或者谱的组成部分，如果没有离散特征值的话)．守恒律对应于自伴算子 A，这里酉算子 e^{itA} 的单参数群与系统的 Hamilton 量交换．因此，守恒律系导出一个对称性群，即与 Hamilton 量交换的酉算子群．该对称性群的一部分，随着理论的进展，是某个特别的群 $SU(n)$．同时可观测量对应于交换单参数群，从而对应于 Lie 代数的交换子空间．对于 $SU(n)$，Lie 代数的交换子空间的维数 $\leq n-1$(也可取为对角线型的)，从而 $SU(n)$ 理论至多能区分 $n-1$ 个同时可观测的物理量．基本粒子对应于不可约表示空间中的某些向量，譬如说，对角子群的同时 (公共) 特征向量，(当它们只相差一个数量因子时，认为恒同)．夸克对应于标准表示下的标准基向量．理论的能力来自于理解粒子相互作用的方式：你取表示的张量积，按照 (P1) 将其分解，看会出现什么样的粒子组合．

局部紧交换群

在 1934–1935 年， Pontrjagin 和 van Kampen 证明了局部紧交换群的对偶定理 (duality theorem)，后来 Weil[16] 把调和分析的理论建立在对偶定理的基础上．对于非紧局部交换群，例如 $\mathbb{R}$，不是所有的乘法特征都令人感兴趣．对于 $\mathbb{R}$，函数 $x\to e^{-2\pi ixy}$ 是乘法特征，其中 y 是复数，然而只有 y 为实数的那些特征才是人们感兴趣的．乘法特征称为 *酉的*(unitary)，如果它的绝对值处处都等于 1. (更一般地， Hilbert 空间中的表示 π 是 *酉的*，是指每个算子 $\pi(x)$ 是酉的)．如果 G 是局部紧交换群，则酉乘法特征在逐点乘法下构成群 $\hat{G}$，且当我们赋予它紧集上一致收敛拓扑后 $\hat{G}$ 是局部紧交换群 (对偶群)．当 G 是环面 $\mathbb{T}^n$ 或群 $\mathbb{R}^n$ 时， $\hat{G}$ 确由我们一直在使用的酉乘法特征组成，且拓扑为通常的拓扑．于是在这两种情形下， $\hat{G}$ 同构于 $\mathbb{Z}^n$ 或 $\mathbb{R}^n$．在完全一

般的形式下，群 $\hat{G}$ 是局部紧交换群且有对偶 $\hat{\hat{G}}$, 存在 G 到 $\hat{\hat{G}}$ 中的典范连续同态：若 g 在 G 中，则 $\hat{\hat{G}}$ 的对应元在特征 $\omega \in \hat{G}$ 处，取值为 $\omega(g)$. 对偶定理说，这个同态 $G \to \hat{\hat{G}}$ 是拓扑同构 (onto). Pontrjagin 和 van Kampen 证明对偶定理是他们研究的一种结构理论的一个推论. Weil 接着定义 Fourier 变换 $f \to \hat{f}$, 将 G 上的函数变为 $\hat{G}$ 上的函数：

$$\hat{f}(\omega) = \int_G f(x)\overline{\omega(x)}dx,$$

这里 dx 是 G 上的 Haar 测度. Weil 的反演公式 (当 f 是连续可积，其 Fourier 变换也可积时成立) 是说：存在 $\hat{G}$ 上正规的 Haar 测度 $d\omega$, 使得

$$f(x) = \int_G \hat{f}(\omega)\omega(x)d\omega.$$

Plancherel 公式 $\|\hat{f}\|_2^2 = \|f\|_2^2$ 是一个推论，这样 (P4) 和 (P5) 对 G 成立. Rudin[12] 说明对偶定理和调和分析如何能绕过该结构理论而一起发展.

阿代尔和伊代尔

局部紧交换群上的调和分析在代数数论中有一个重要应用，这是属于 Tate 的. 为阐述这一应用，需要再次看一下 20 世纪 20 年代出现的 L- 函数. 在 Artin 引入他的 L- 函数之前，Hecke 就在引进别的类型的 L- 函数. Hecke 研究的有一类是 Euler 的 L- 函数和其他的 Dirichlet L- 函数的推广，这就是和称为量特征标 (德文 Grössencharakter) 的概念关联的 L- 函数，我们要稍微讨论一下. Hecke 用一种复杂的方法证明，这些在右半平面收敛的 L- 函数能亚纯地延拓到整个复平面，并满足将其在 s 和 $1-s$ 的值联系起来的函数方程，而且除了 ζ 函数本身这一情形外，它是整函数. 由于高木贞治 (Takagi) 的一项工作，Artin 意识到：当 Galois 群是交换群时，他的 L- 函数应该永远等于量特征标的 Hecke L- 函数. 这一期望引导 Artin 叙述并证明了 Artin 互反律，它是对二次互反性的影响深远的推广，也是交换类域论 (abelian class-field theory) 的基石. Artin 互反律本身又让 Artin 能够证明人们所期待的 L- 函数的等式. 所以，Artin L- 函数在交换 Galois 群的情形满足函数方程；而对于这种 Galois 群的非平凡乘法特征，它们是整函数.

在他们原来的表述中，量特征标与 Dedekind 的理想类群 (ideal class group) 是有联系的，但是 Chevalley 在 1936 年找到了另一种叙述方式. 数域 k 的位(place)ν 是 k 到非离散局部紧域 k_ν 的稠子域上 (onto) 的域映射的同构类. 当 $k=\mathbb{Q}$ 时，位是 $\mathbb{Q}$ 到 $\mathbb{R}$ 和到对每个素数 p 的 p-adic 数域 $\mathbb{Q}_p$ 中的嵌入. 每个局部紧域都有绝对值映射，$\mathbb{Q}_p$ 的绝对值为 1 的元素是分子和分母都跟 p 互素的那种有理数的闭包. Chevalley 引入 k 的*伊代尔群* (group of ideles) 定义为乘法群 $k_\nu^\times$ 的积 (无穷直积) 中除了有限个 ν 以外绝对值都等于 1 的所有元素作成的乘法子群，他通过适当地定义拓扑将这个交换群作成局部紧交换群. 于是有乘法群 $k^\times$ 到伊代尔群的对角线的嵌入 (diagonal embedding). 用这种术语，量特征标就是伊代尔群在被对角地嵌入的 $k^{\times}$ 上是平凡的乘法特征.

Tate 在他 1950 年的论文中，将局部紧交换群的调和分析应用于这种情形. k 的阿代尔(adele) 是 $\prod k_\nu$ 中分量绝对值除了有限个 ν 以外都 ≤ 1 的所有元素作成的加法子群. 在依坐标的乘法和适当的拓扑之下，它们构成一个局部紧交换环. 应用阿代尔上的调和分析并揭示阿代尔和伊代尔间的相互关系，Tate 重新解释 Hecke 的 L- 函数，证明了这种解析延拓和函数方程是在这种提法下的 Poisson 求和公式的推论. 很快，我们将回来讨论这一结果在非交换情形下的类似物.

局部紧群

随着量子力学在 1927 年前后的发展，表示论也扩展到包括既非紧又非交换的局部紧群的情形. 1940 年前研究的两个具体情形是现在通称的 n 个复变数的 Heisenberg 群和非齐次 Lorentz 群. 用现代的语言表述，Heisenberg 群的表示论是在群 $\mathbb{C}^n$ 的投影表示 (projective representation) 的形式下进行研究的，其中函数 π 满足 $\pi(x+y) = c(x,y)\pi(x)\pi(y), c(x,y)$ 是非零纯量. 但我们将不离开群表示.

n 个复变数的 Heisenberg 群 H^n 是所有 (z,t) 构成的群，其中 $z \in \mathbb{C}^n, t \in \mathbb{R}$, 乘法规则为

$$(w,t)(z,t') = (w+z,\ t+t'+\operatorname{Im} w^* z),$$

w^* 为 w 的共轭转置. 这个群同构于由以下分块形式给出的矩阵群

$$\begin{pmatrix} 1 & z^* & \frac{1}{2}|z|^2 + it \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

且有 $(z,t)^{-1} = (-z,-t)$. 中心 Z 是所有元素 $(0,t)$ 的集合，且 $H^n/Z \cong \mathbb{C}^n$.H^n 的早期表示论出现在 Heisenberg, Weyl, Stone 和 von Neumann 等人的工作中.

群 H^n 有如下性质：每个有限维酉表示在 Z 上是平凡的，这样，可分解直到商 $\mathbb{C}^n$ 的表示. 因此，这种表示完全不区分群中的点. 事实上，(P1) 可应用于这种表示 φ, 我们可假设 φ 是维数为 $\dim\varphi$ 的有限维不可约酉表示. 性质 (P2) 成立，于是 $\varphi(0,t)$ 是纯量，从而有 $e^{2\pi i t x}$ 乘以单位 (矩阵) 的形式. 同时，通过少量计算即可证明

$$(w,t)(z,t')(w,t)^{-1}(z,t')^{-1} = (0, \operatorname{Im}(w^*z - z^*w)).$$

左边取 φ 后的行列式等于每个因子取 φ 后的行列式之积，因而等于 1. 所以对所有 w 和 z 有 $1 = \exp(2\pi i \operatorname{Im}(w^*z - z^*w)x\dim\varphi)$, 从而 $x = 0$.

为了使所作的调和分析有意义，我们要考虑无限维的酉表示. 这一调整需要我们对定义作某些精巧的修正. 总空间现在是 Hilbert 空间，感兴趣的子空间是那些闭的子空间；称一个表示是 *不可约的*, 是指它没有非零闭的不变真子空间. 使用这种

语言，Stone-von Neumann 定理是说：H^n 的无限维不可约酉表示，在不计等价时，可以用非零的 $\lambda \in \mathbb{R}$ 来参数化．带有参数 λ 的表示 π_λ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的作用为

$$(6) \qquad \pi_\lambda(x+iy,t)f(x') = e^{2i\lambda y \cdot x'} e^{i\lambda(t+y\cdot x)} f(x'+x).$$

我们这里并不关心 π_λ 的无穷小形式以及它与量子力学的联系，这方面的详细讨论可见 Mackey[11].

1940 年前研究的另一个非紧非交换局部紧群是 10 维非齐次 Lorentz 群．研究的动力又是来自于量子力学．E. Wigner 关于这个群的表示论的著名工作出现在 1938 年，在 Wightman[17] 中有讨论．

1936 年，在 Wigner 研究这第二个非紧非交换群之前，Murray 与 Neumann 研究了算子环，这一研究隐含着群表示的抽象理论．若 π 为 G 在可分 Hilbert 空间上的酉表示，设 $R(\pi)$ 为包含所有 $\pi(g)$(对一切 $g \in G$) 的有界线性算子的最小弱闭代数．我们称 π 为*准素的*(primary), 是指 $R(\pi)$ 的中心仅仅由纯量算子组成．同一个不可约表示的有限或可数多个拷贝的正交和总是准素表示．如果准素表示 π 具有这种特殊形式，我们则称 π 是 *I*型 的．群 G 是 I 型的，是指它的所有的准素表示都是 I 型的．Murray 和 von Neumann 的发现之一是：存在不是 I 型的局部紧群；已经知道，两个生成元的 (离散) 自由群是 I 型群．从 Mackey 和 Glimm 的工作可知，可分群 G 是 I 型的，当且仅当该不可约酉表示的等价类的空间是标准的 Borel 空间；于是，不是 I 型的群对我们现在的目的来说是病态的，我们可以不讨论它．

Gelfand 和 Raikov 在 1943 年对这一抽象理论作出了第二个贡献．设 π 为局部紧群 G 的酉表示，ν 为向量，则函数 $g \to (\pi(g)\nu, \nu)$ 是连续正定的．他们注意到了逆命题 (即存在适当的 π 和 ν, 使每个连续正定函数都是这种形式的) 然后证明：π 不可约，当且仅当 $\pi(G)\nu$ 生成整个 Hilbert 空间，而 $(\pi(g)\nu, \nu)$ 位于所有连续正定函数锥的极束 (extremeray) 上．适当地应用 Krein-Milman 定理，他们得出结论：G 不可约酉表示分离开空间的点．这样一来，原则上应该有足够的不可约酉表示来作调和分析．

1946 年，Mackey 在 Weil[16] 的激励下，开始系统地研究局部紧群的表示论．经过一迂回曲折的路线 (如 [8] 中 892–3 页上所叙述的), Mackey 终于认识到 Frobenius 对有限群引进的诱导表示对可分局部紧群是有意义的，而且是重要的．唯一的限制是将要出现诱导作用的子群必须是闭的．其实，H^n 的表示 (6) 是从 1 维表示诱导来的．Wigner 的非齐次 Lorentz 群的表示也是诱导表示，其它许多情形亦然．Mackey 继续在以下方向上发展一种理论，即对群的半直积的不可约表示进行分类，条件是每个因子的表示为已知且作用是足够驯顺的 (tame).

该抽象理论的最后一部分是 Plancherel(公式．Mautner 和 Segal 在 1950 年各自独立地证明了以下结果：任何 I 型 *幺模群* (幺模 unimodular 意指左右 Haar 测度相等) 在不可约酉表示等价类的空间上有唯一测度 $d\mu$, 使得对一切 $f \in L^2(G), \|f\|^2 = \int \|\pi(f)\|_{\mathrm{HS}}^2 d\mu(\pi)$, 该抽象理论的更进一步的阐述可在 Mackey[10] 中找到．

这样，在非紧非交换群的表示论早期发展中，出现 3 个有关特殊群的关键性问题：G 是 I 型群吗？如果是，那么 G 的不可约酉表示是什么？如果找到了，并且 G 是幺模群，那么 Plancherel 测度具体写出来是什么？这些问题对于一般局部紧群要比对紧群或交换群的情形困难多了.

在各类局部紧群中，已经被研究过的有幂零 Lie 群，可解 I 型 Lie 群，有有限中心的半单 Lie 群，一般连通 I 型 Lie 群，和某些 p-adic 群. 我们只讨论其中的一些.

幂零和可解 Lie 群

幂零 Lie 群有同胚于 $\mathbb{R}^n$ 的单连通复盖群，它的原型是对角线元素为 1 的上三角复矩阵群的任意连通闭子群. Heisenberg 群 H^n 就是一个例子. 幂零 Lie 群总是 I 型的幺模群. Kirillov 证明，不可约酉表示总是从闭子群的 1 维表示诱导的，他把这些表示分类，并求出明显的 Plancherel 测度. 在他的工作中，对不可约表示提出了一种"轨道图"(orbit picture), 该图先前已由 Harish-Chandra 在紧的情形下引进. 轨道图把表示与群在与 Lie 代数对偶的向量空间上作用的轨道的数据联系起来. 在 Howe[6] 中对此有详细的描述.

Folland 在 1973 年应用 Heisenberg 群的调和分析给出欧氏空间中次椭圆微分算子的新估计，该算子就等于与 $\mathbb{C}^n$ 中单位球的边界关联的算子 $\Box_b = \bar{\partial}_b\bar{\partial}_b^* + \bar{\partial}_b^*\bar{\partial}_b$. 于是这个算子可视为 H^{n-1} 上的常系数微分算子，用 H^{n-1} 的分析给出的估计比用传统的欧氏空间的方法更加精确. 1974 年，Folland 与 Stein 把关于 H^{n-1} 的这个思想和冻结原理结合起来，研究严格拟凸域上的算子 $\Box_b$. 1976 年，Rothschild 与 Stein 将其他幂零 Lie 群的表示论与冻结原理结合起来分析流形上的次椭圆算子 $\sum X_i^2$, 这里 X_i 是一些向量场，它们和它们固定次序的换位子在流形的每一点生成整个切空间. 数学上还不知道可以通过将冻结原理与某个非幂零群的表示论结合来处理的破缺对称 (broken symmetry) 的例子.

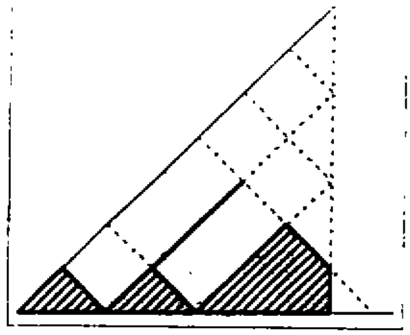

图1.在 A 上为实特征的 $S_p(6,2)$ 的非球形主系统列中的酉点

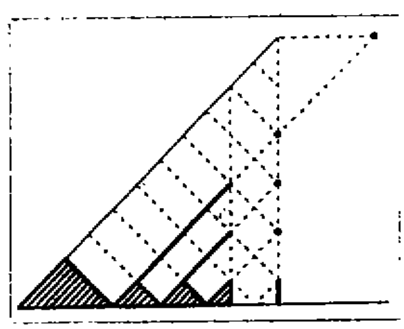

图2.在 A 上为实特征的 $S_p(6,2)$ 的球形主系统列中的酉点

可解 Lie 群有同胚于 $\mathbb{R}^n$ 的单连通复盖群，其原型是上三角复矩阵的任意连通闭子群. 这种群可以不是幺模的，也可以不是 I 型的. 1969年，L. Auslander 和 Kostant

将 Kirillov 的轨道图用来对 I 型可解 Lie 群的不可约酉表示进行分类. Pukanszky 给出 Plancherel 公式的一种形式，并不要求群是幺模的，或者甚至不要求群是 I 型的.

半单 Lie 群

最大的研究领域是半单 Lie 群，它们总是幺模的，并且也是 I 型的，后者已在 Harish-Chandra 1953 年的文章中证明. 我们集中考虑可以表现为实或复矩阵群的半单 Lie 群. 不计同构，矩阵半单 Lie 群恰好是复矩阵的那种连通闭子群，它们在共轭转置下是闭的，且有离散中心 (于是必定有限). 特殊线性群，辛群，二次型的各种等度群 (isometry groups) 都是半单 Lie 群的例子. 关于这一理论详细的阐述，可见书 [7]. 第一个被考虑的这种群是行列式为 1 的实 2×2 矩阵群 $SL(2,\mathbb{R})$. 大概是在想要补充 Wigner 1938 年的文章的激励下， Bargmann 在他 1947 年的著名文章里对这个群 (更准确地说，是它的共轭) 的不可约酉表示作了分类. 他甚至通过超前使用 Plancherel 公式的思想的方式，给出了这个群的 L^2 分解的信息. 不可约酉表示出现在系列中. 其中的一个，现在称为球面 *主系列*(principal series), 这包含表示 $P^{+,i\nu}$(对每个实数 ν). 这个表示作用在 $L^2(\mathbb{R})$ 中为：

$$P^{+,i\nu}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} f(x) = |bx+d|^{-1-i\nu} f((ax+c)(bx+d)^{-1}), \tag{7a}$$

而且只有 $\nu>0$ 的表示在分类中是需要的. 非球面主系列的表示 $P^{-,i\nu}$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中的作用当 ν 为实数时是：

$$P^{-,i\nu}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} f(x) = \mathrm{sgn}(bx+d)P^{+,i\nu}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} f(x) \tag{7b}$$

只有 $\nu>0$ 的表示在分类中是需要的. Bargmann 还找到两组表示，现在称为 *离散系列*(discrete series). 其中一个包含表示 $D^{+,n}$(对每个整数 $n\geq 2$). 表示作用在上半平面上关于 $y^{n-2}dxdy$ 平方可积的解析函数空间中. 此作用为：

$$D^{+,n}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} f(z) = (bz+d)^{-n} f((az+c)(bz+d)^{-1}). \tag{8}$$

在复共轭的空间中有相应的表示 $D^{-,n}$. 另一个系列，称为 *补系列*(complementary series), 其作用依照 (7a) 但 $i\nu$ 要代以 0 与 1 之间的实参数 u, 还要使用一个不是明显正定的复杂的内积. 此外，还有平凡的 1 维表示和两个现在称为 *离散系列的极限*(limits of discrete series) 的表示 $D^{+,1}$ 和 $D^{-,1}$. 这些就是全部了. 最令人惊奇的是，Bargmann 看出只有主系列和离散系列对群在 $L^2(G)$ 上的左正则表示 $l(g)F(x)=F(g^{-1}x)$ 有贡献. 补系列则不起作用. 再有，离散系列以离散的方式作贡献，这是一个新的现象，以前在非紧群的情形中没有见到过.

也是在 1947 年， Gelfand 和 Naimark 还研究了 $SL(2,\mathbb{C})$. 他们找到了主系列和补系列，但发现了没有离散系列. 1950 年他们出版了一本著作，给出关于复典型半单

Lie 群的表示论的大量信息，但没有出现离散系列． 1950 年的书也给出了如何用积分几何对 $G=SL(n,\mathbb{C})$ 得到明晰的 Plancherel 公式 (分解 $L^2(G)$).

Mackey 似乎是第一个意识到表示 (7) 是从上三角子群的 1 维表示诱导出来的诱导表示． 1952 年， Harish-Chandra 得到 $SL(2,\mathbb{R})$ 的 Plancherel 公式， 1953 年 Gelfand 和 Graev 将此论证推广到 $SL(n,\mathbb{R})$. 从这些结果得到 $L^2(G)$ 的一个图，由有限多片连接而成，每一片都与某类极大交换子群 (称为 *Cartan子群*) 的调和分析相联系．对于 $SL(n,\mathbb{C})$、不区分共轭 (对角子群). 则只有一个这种群，并且 Plancherel 公式化为对角子群的 Fourier 分析．对于 $SL(2,\mathbb{R})$, 有两个不共轭的 Cartan 子群 (对角子群和旋转子群). 导出 Plancherel 公式的分析是很巧妙的，但核心是两个 Cartan 子群上的 Fourier 分析．对于 $SL(n,\mathbb{R})$, 存在 $[\frac{n}{2}]+1$ 个互不共轭的 Cartan 子群.

Harish-Chandra 意识到，重要的是找出对应于紧 Cartan 子群的表示，而且它们应当是离散系列，即那些离散地出现在 Plancherel 公式中的表示．他首先将 (8) 式作了推广，其中群 G 是作用在有界对称域上．但他知道这还不够，因为这种群不能穷尽所有有紧 Cartan 子群的群．在一系列深刻的文章以后，他终于在 1966 年的发表在 Acta Mathematica 上史诗般的文章中达到了顶峰，完成了离散系列的分类．以后，他证明了在 Plancherel 公式中出现的表示是从形如 MAN 的抛物子群 (paraboilic subgroup) 诱导而来的，其中每个 MAN 是从 Cartan 子群的不同共轭类作出的，包含了 M 上离散系列组成的诱导表示，欧几里得群 A 上的酉乘法特征，和单连通幂零 Lie 群 N 上的平凡表示． Harish-Chandra 在 1976 年公布了 Plancherel 公式证明的最后几步.

与 $SL(2,\mathbb{R})$ 中的情形一样，存在着定义 Plancherel 测度时并不需要的不可约酉表示．它们的分类更加难以把握，至今仍未解决． Langlands 在 1973 年取得了巨大进展，他把所有 “允许的”(admissible) 不可约表示作了分类，这些表示包括所有的不可约酉表示．在这一分类的最终形式里，不可约允许表示是子群 MAN 诱导出的表示的商 (此处的子群 MAN 和上面的一样，除了对于给定的 MA 可能需要用多个 N 的情形). 在 M 上是离散系列或离散系列的极限，在 A 上是乘法特征，它的模在某个锥里有对数．还有在 N 上是用平凡表示．所以，表示的酉性问题化为决定哪些所谓的 Langlands 商能通过引进新内积而变为酉的．对于 $SL(2,\mathbb{R})$, 补系列是这样得到的，但是一般情况下的答案是什么？进展是缓慢的，它基于找到解决各类 Langlands 商的酉性的方法．这些方法现在看来是充分有效的， Vogan 已经完全解决了 $SL(n,\mathbb{C})$ 的情形，并基本上解决了 $SL(n,\mathbb{R})$, Barbasch 解决了复正交群和辛群的情形．但存在这样的可能：对于所有 G 的答案会太复杂，以至难以合理地叙述．图 1 和图 2 取自 [2]、说明了群 $Sp(6,2)$ 的两种情形；在每种情形里 M 的表示已经确定，这些图表明在适当的锥中 A 的实乘法特征的对数的 2 维图象．粗线标出的区域，线，点指出对应于酉表示的参数．在图 1 情形下，图是完全的；在图 2 情形下，人们相信它也是完全的．对于一般的 G, 你可以证明：酉表示的参数形成这类多角形的复形，但是在这些例子中酉表示的参数的描述已经这样复杂了，以至这一领域中大多数研究者是在寻找 “重要的” 不可约酉表示，而不是所有的不可约酉表示.

我们要提及半单群调和分析的两个应用. 一个是半单对称空间 G/H 上的函数空间的分解，这里 H 是 G 的对合 (involution) 的固定群、这个理论现在已是相当完全了，它可以看作以下三个理论合在一起的令人注目的推广： Cartan 1929 关于紧情形的理论， Harish-Chandra 在 1958 年开始， Helgason 在 20 世纪 60 年代和 70 年代加以推广的关于 Riemann 对称空间的理论，以及 Harish-Chandra 1976 年关于群 $(G\times G)/\mathrm{diag}(G)$ 的理论.

Langlands 纲领

另一个应用则是针对数论和算术几何中的 Langlands 纲领的， Langlands 因这项工作荣获 1996 年的 Wolf 奖 (见 Notices, February 1996, p. 221). Langlands 纲领有几个方面，我们这里只提及一个，那就是寻找 Artin 互反律到数域 k 的非交换 Galois 扩张的推广. 目标是希望把所有 Artin L- 函数与其他类有解析延拓和函数方程的 L- 函数恒同起来. 某些有良好分析性态的 L- 函数的来源是 Hecke 引进的，用尖点形式 (cusp form) 给出的更深刻的一类 L- 函数. 在 Langlands 理论中，这些函数加入到推广 Tate 论文的行列中. Tate 论文的结论上面已经讨论过. 在 Langlands 理论中，它被看成为是处理 1×1 矩阵的，这是因为伊代尔可视为 $GL_1(\mathbb{A})$、其中 $\mathbb{A}$ 是 k 的阿代尔环. Hecke L- 函数则出现在 Langlands 理论的 2×2 情形. 稍微特殊一些，量特征标是伊代尔的特征，在被对角线地嵌入的数域 k 上是平凡的. Langlands 将 L- 函数与 $GL_n(\mathbb{A})$ 的每个不可约 "允许" 表示联系起来，后者离散地出现在 $GL_n(\mathbb{A})/GL_n(k)Z$ 的 L^2 中 (k 被对角线嵌入， Z 等于中心), 并满足推广的经典模形式在尖点零化 (vanishing) 的条件、从王河恒夫 (Tamagawa)、Godement 到 Jacquet-Langlands, 然后是 Godement-Jacquet, 最后是 Jacquet, 他们的工作为这些函数建立起优良的分析性态.

Artin 互反律总结成这样的定理：任何 1 维 Galois 群表示的 Artin L- 函数都是从 $GL_1(\mathbb{A})$ 以这种方式得到的 L- 函数. *Langlands互反律* (Langlands reciprocity) 则是个猜想：任何 n 维 Galois 群表示的 Artin L- 函数都是从 $GL_n(\mathbb{A})$ 以这种方式得到的 L- 函数. 当数域为 $\mathbb{Q}$ 时， Langlands 互反律是关于任意不可约，首项系数为 1, 系数为整数的单变元多项式经过用素数约化后它的分解方式的断言. 在他获得 1982 年 Cole 奖的工作中， Langlands 对于不能用先前的方法处理的一类 2 维 Galois 群表示证明了这个猜想. Tunnel 又将 Langlands 定理推广，处理了所有这样的 2 维 Galois 群表示，其中的 Galois 群在 $PGL_2(\mathbb{C})$ 中的象是 4 个文字的对称群的子群.

Langlands 和 Tunnel 的这个深刻的定理，尽管是用群表示、 L 函数和阿代尔叙述的，最终确是个关于素数的定理. 它是 Wiles 关于 Fermat 大定理的工作的表示论基石.

正如 Langlands 1990 年在 [9] 中关于他的整个纲领说的， "... 我们正在讨论一整套猜想，对它们是不能从正面进攻的. 一方面它们是具体的事实和问题提出的直接的召唤，另一方面是它们作为表达和揭示为数不多的宇宙规律的工具的功能，这些规律就是自然界的存在方式，是另一类型的实体，这两者之间美学上的不协调可能

在物理学中是普遍认可的．在物理界长期以来接受这样一个事实：为理解可感知的真实事物所需要的概念可以与事物很少相似．在数学界就不一样，说来也怪，特别在数论学家中间，概念的新颖性常常受到反对，因为时而不愿面对具体的事物，时而又恰恰相反．近半个世纪的发展已经使我们变得成熟了，对 Faltings 关于 Mordell 猜想的证明的审查已说明了这一点，但是前面还有一个舞台在等着我们．"

参考文献

[1] E. Artin, Collected papers, Springer - Verlag, New Yor. 1965.

[2] M. W. Baldoni-Silva and A. W. Knapp, A construction of unitary representations in parabolic rank two, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **16**(1989), 579–601.

[3] L. Bers, F. John, and M. Schechter, Partial Differential Equations, Interscience, New York, 1964.

[4] F. G. Frobenius, Gesammelte Abhandungen, 3 vol., Springer - verlag, Berlin, 1968.

[5] K. I. Gross, On the evolution of noncommutative harmonic analysis, *Amer. Math. Monthly*, **85**(1978), 525 –548.

[6] R. Howe, A century of Lie theory, Mathematics into the Twenty-First Century, *Proc. AMS Centennial Symposium (August 1988)*, vol. Ⅱ, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, 101–320.

[7] A. W. Knapp, Representation theory of semisimple groups: An overview based on examples, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1986.

[8] A.W.Knapp and D. A. Vogan, Cohomological Induction and Unitary Representations, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1995.

[9] R. P. Langlands, Representation theory: Its rise and its role in number theory, *Proc. Gibbs Sympos. (New Haven, CT, 1989)*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990, 181–210.

[10] G. W. Mackey, Infinite dmensional group representations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **69**(1963), 628–686.

[11] G. W. Mackey, Harmonic analysis as the exploitation of symmetry — a historical survey, *Rice Univ. Stud.*, **64**(1978), no. 2 & 3, 73–228.

[12] W. Rudin, Fourier Analysis on Groups, Interscience, New York, 1962.

[13] I. Schur, Gesammelte Abhandungen, 3 vol., Springer–Verlag, Berlin, 1973.

[14] E. M. Stein, Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1970.

[15] E. M. Stein and G. Weiss, Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971.

[16] A. Weil, L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Hermann, Paris, 1940.

[17] A. S. Wightman, Eugene Paul Wigner, 1902–1995, *Notices*, **42**(1995), 769–771.

[18] A. Zygmund, Trigonometric Series, 2 vol., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1959.

(那吉生，冯绪宁 译　王世坤，卞伟 校)