Israel Moiseevich Gelfand (I–2)

Vladimir Retakh 协调编辑

Bertram Kostant

I. M. Gelfand

我第一次听说 I. M. Gelfand 是 20 世纪 50 年代初我在芝加哥读研究生时期. 在那个时候, Gelfand 的论文 “赋范环” 在当时很受学生欢迎的现代调和分析领域中发挥了重要作用. 我的论文导师 Irving Segal 安排我 1953 年 —1955 年在普林斯顿高等研究院继续学习. 我在芝加哥时就已经知道 Chern (陈省身) 和 Weil (韦伊), 在普林斯顿我与 Lefschetz (莱夫谢茨), Hermann Weyl (外尔), von Neumann (冯 · 诺伊曼) 和 Einstein (爱因斯坦) 逐渐熟悉起来. 当然, 我认为 Gelfand 和这些 20 世纪数学和物理学的杰出人物一样, 我很期待和他见面.

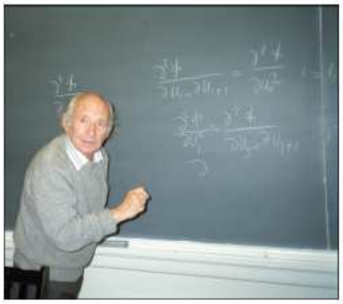
当我被邀请参加 1971 年布达佩斯的暑期学校时我的这次见面机会来到了. Gelfand 本人组织了学校的各项活动, 而我相信这是他第一次获准出席在苏联之外的会议. 他的许多学生和同事也和他一起来了. 成为他著名的数小时讨论班之一的参与者对我而言是一次难忘的经历. Gelfand 是许多论文的合作者. 毫无疑问, 这些论文中许多是讨论班的产物. 他似乎有一个非常鲜明的风格, 通过提出探索性的问题来鼓励潜在的合作者进行研究, 并能坚持到获得有某种形式的解答. 我带着最近写的一篇关于球面主列 (the spherical principal series) 的论文来到布达佩斯. Gelfand 要求我将论文投到《布达佩斯会议录 (Lie (李) 群及其表示) 》. 尽管该论文后来 (1990 年) 赢得 Steele 奖, 但我认为在《布达佩斯会议录》发表它可能是一个错误. 最初的出版商, Halsted 出版社歇业使得该书直到 1974 年才面世. 而当它最终出现时, 许多人告诉我它很难找到.

1972 年 6 月, 由于 Gelfand 邀请, 我和我的妻子 Ann 一起去莫斯科待了 3 个星期. 我不得不说, 我被深深地感动着, Gelfand 的温暖, 友谊和尊重使我很高兴. 他在 1970 年的 ICM (国际数学家大会 —— 校注) 报告中, 他将我包含在对表示论做出突出贡献的一个非常小的 (5 人) 群体之内. 在莫斯科, Gelfand 安排我在莫斯科数学会的一个会议上作演讲, 那天我和主持会议的 Shafarevich (沙法列维奇) 愉快地共进午餐. Gelfand 也安排我定期与他的一些学生 Kazhdan, Bernstein (伯恩斯坦), Kirillov (基里洛夫), Gindikin 以及他的儿子 Sergei 讨论. 我也被介绍给他的同事 Manin (马宁), Novikov (诺维科夫) 和 Graev, 并且和 Berezin 花了一个下午在高尔基公园谈论 (从我的几何角度来看) 量子化.

译自: Notices of the AMS, Vol.60 (2013), No.1, p.24–49, Israel Moiseevich Gelfand, Part I, Vladimir Retakh, Coordinating Editor, figure number 20 (5 幅未获得版权, 故未在译文中给出).

Vladimir Retakh 是 Rutgers 大学的数学教授. 他的邮箱地址是 vretakh@math.rutgers.edu. 他对 Mark Saul 帮助他准备这份回忆录表示感谢.

Bertram Kostant 是麻省理工学院的荣誉退休教授. 他的邮箱地址是 kostant@math.mit.edu.



1990 年在 MIT 的讲座

我和 Gelfand 谈话的数学题目之一是关于 BGG 众多论文 [BGG–71] 的第一篇中的结果. 之前, 我就已经解决了 Bott (博特) 关于如何确定 Cartan (嘉当) 子代数对偶上多项式函数的问题, 它通过 Borel (博雷尔) 超渡 (transgression) 被映到一般旗流形的 Schubert (舒伯特) 类的对偶基. [BGG–71] 承认我优先解决了这个问题, 并且通过引入著名的 BGG 算子得到了这一问题的深入进展.

我在逗留期间发现 Gelfand 在那里似乎已经创建了一个这样的环境: 他融入周围人的个人以及职业生活之中. Gelfand 的公寓像大中央车站一样, 人们在这里进进出出. 他似乎在同时与许多人对话. 我不能代表他周围的人说话, 但作为一个局外人我被迷住了. 做数学对我来说许多时候是孤独的, 但在这个激动人心的环境, 我感觉到数学研究也可以 (像物理学一样) 以一种公共的, 社会性的令人满意的方式进行.

我访问莫斯科期间发生了许多令人难忘的事件. 以下是一件令我很尴尬的事 (但也有滑稽). 一天 Gelfand 邀请 Ann 和我去苏联科学院餐厅喝罗宋汤. 除了我们对面的桌子, 房间里的所有桌子旁都坐满了人. 这张桌子边只有一名男子. Gelfand 突然在我耳边低语, 但我不明白他在说什么. 然后, 他开始大声重复. 最后, 当我听到他在说什么, 我愚蠢地大声脱口而出一个名字: Lysenko (李森科).[1] 房间变得寂静起来, 这时我意识到我做了什么. "哦, 天哪," 我想. "我使得 Gelfand 陷入了对当局的困境." 他被拖到古拉格 (Gulag)[2] 的景象浮现在我的脑海里. 但是一切安好. 1970 年代初 Lysenko 显然已经被遗忘了.

很久以后, 当他被邀请到美国马萨诸塞州的剑桥接受哈佛的名誉学位时, Ann 和我与 Gelfand 经常见面. 那次访问中的一些场景仍然会被我记起. 其中一次是在我家的一个聚会上, 我看到他和一群年轻的孩子坐在地板上, 通过告诉他们一些数学精品使他们对数学兴趣盎然. 另一次是 Gelfand 在我们的房子里度过了一夜之后在早餐桌上的场景. Gelfand 抱怨在美国没有好的面包, 并且很难找到健康食品. 我指着我早餐碗里的瑞士牛奶什锦早餐反驳他. 他表现出很好的 (没有双关语意) 幽默感, 他接着吃我碗里的水果和葡萄干, 却同时告诫我不要把它当作早餐, 因为它对我不好.

有一次在他访问纽约期间, 我遇到了他, 并把他介绍给我从事电影制作的儿子 Steven. Gelfand 向 Steven 及其朋友长篇大论地讲了很多有关 Stanislavski (斯坦尼斯拉夫斯基)[3] 的事. 显然方法演技是 Gelfand 许多艺术兴趣之一. 我还带他去看 Jean Renoir 的著名电

1) 全名 Trofim Denisovich Lysenko, 1898—1976, 苏联生物学家, 农学家. 他得到斯大林的支持, 以政治迫害的手段打击学术上的反对者, 使其学说成为苏联生物遗传学的主流. 直到 1964 年 10 月赫鲁晓夫下台后, 苏联生物界才得以清除李森科的学说. 由于苏联的影响, 我国生物界也一度以其学说作为遗传学的正确理论.—— 校注

2) 古拉格的俄文对应是苏联内务部的分支部门 "苏联劳动改造营总管理局" 的简称, 它意味着所有形式的苏联迫害.—— 校注

3) 全名 Constantin Sergeyevich Stanislavski, 1863—1938, 俄国著名戏剧和表演理论家. 原姓 Alexeyev, Stanislavski 是其从 1884 年开始用的艺名, 为了对其父母隐瞒其从事演艺活动. 他提倡 "方法演技 (method acting)", 是指务求写实地演绎角色.—— 校注

影《大错觉 (Le Grande Illusion)》, 其主旋律是在第一次世界大战之后欧洲贵族阶级的瓦解. 我非常惊讶于他对影片的反应. 由于它拍于 1930 年代后期, 他认为在希特勒计划向欧洲推进期间制作关于这样一个话题的著名电影是不合情理的.

另一个一直留在我脑海里的场景是, 在我开车带 Gelfand 去机场的路上 (他要回俄罗斯), 他开始背诵 Ossip Mandelstam, Anna Akhmatova 等人的诗. 我记得在磁带上录了音, 但遗憾的是我将磁带放错地方了.

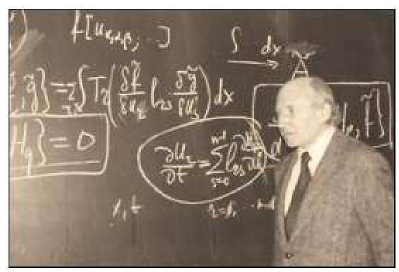
几年后, 我的数学兴趣与 Gelfand 的完全可积系统有所交叉. 1979 年, 我写了一篇文章, 证明了开 Toda 格的完全可积性来自于对 Borel 子群的某个余伴随轨道的考虑. Gelfand 精辟地将这个结果用到无限维, 并将它应用到伪微分算子理论. 我相信 Mark Adler 也得到了类似的结果.

我想在这里以 Gelfand 的一个值得关注的数学哲学表述结束. 它还打开了一个了解 Gelfand 工作方式的小窗口. 我早期的一篇论文给出了有限维 (Cartan-Weyl) 表示论权的重数的公式. 公式的一个关键之处在于引进根格正部的一个分拆函数. 该分拆函数很容易组合地定义, 但给出一个它在特定格点的值的表达式则是一件完全不同的事情. Gelfand 对该分拆函数很感兴趣, 并在很多场合提到它. 他终于说服了自己, 不存在处处给出其值的代数公式. 他以如下方式处理这个事实. 有一天他对我说, 在任何好的数学理论中, 应该至少有一个 "超越" 元素, 而这超越元素应该能解释该理论的许多微妙之处. 他说在 Cartan-Weyl 理论里, 我的分拆函数就是这个超越元素.

Simon Gindikin

Gelfand 的积分几何的 50 年

在我开始写本文时, Gelfand 一生中关于积分几何的整整 50 年浮现在我眼前. 幸运的是在其中一些关键时刻我与他有合作. 我会在此讨论一下我认为在这个精彩努力中最重要的部分.



1978 年在 Collège de France 的讲座

1. 首次介绍

我清楚地记得大概是在 1959 年的春天, 在 Dynkin (邓肯) Lie 群讨论班上的碰面. 该讨论班起初只有本科学生, 这次却既有本科生 (Kirillov, Vinberg 和我), 也有著名的数学家 (Karpelevich, Berezin, Piatetski-Shapiro). 突然, Gelfand 出现了 (像往常一样, 他迟到了, 并由 Graev 陪伴着), 并且他带着极大的热情开始谈论他们的新工作 [1]. 这是他们积分几何的工作第一次被介绍.

很奇怪, Gelfand 没有在自己的讨论班上介绍该工作 (事实上, 他几乎从未在他自己的讨论班上提出他的新成果), 却选择在大多是学生的讨论班上介绍. 毫无疑问, 这不是个意外, 因为 Gelfand 总能非常精确地选择讲话的场所, 这也很好地符合莫斯科的传统数学生活. 我记不得任何具体的介绍, 却记得在听众眼里十分明显的 Gelfand 的兴奋, 以

Simon Gindikin 是 Rutgers 大学的理事会教授. 他的邮箱地址是 gindikin@math.rutgers.edu.

及他对几何分析一个重要新方向的肯定，他建议将之称为“积分几何”，因为它与微分几何有相同的重要性．他评论说，Blaschke (布拉施克) 用这个术语指与几何测度计算有关的一类问题，但这狭窄的领域不值得如此一个雄心勃勃的称号，这使得 Gelfand 觉得将它挪用到这一个新的领域是合适的．这一位置的有争议性是显而易见的．这样的事情只是使 Gelfand 有些担心，而我对此不敢冒昧发表意见．我认为这对理解 Gelfand 的情绪状态是重要的．他提醒我们他经常提到的话：“表示论是数学的一切．”(我听说过很多次，Manin 也曾回忆说，他也从 Gelfand 那里听到过，“所有数学都是表示论”，他指出了这些警句之间的微妙差异．) 从现在起，Gelfand 说，他认为“积分几何是数学的一切．”

现在用一句话来描述 Gelfand 的数学动机．他认为，表示论的主要问题是将某些可约表示 (最重要的是，齐性空间的正则表示) 分解成为一些不可约表示的 (也许是连续的) 直和 (Plancherel (普朗谢雷尔) 公式)．在谈话中群及齐性空间的类没有被指定．仅有复半单 Lie 群连同其极大紧子群齐性空间和 Cartan 各向同性子群齐性空间被明确在这个类中．前两个空间是对称的，但第 3 个不是．这是非常重要的 —— 非对称空间也被考虑了．从一开始，分解为不可约表示就被解释为 Fourier (傅里叶) 积分的非交换类似：在连续单谱的条件下，我们可以讨论一个齐性空间上的函数到不可约表示上的“投影”．$\mathbb{R}^n$ 上通常的 Fourier 变换有一个 Radon (拉东) 变换的几何对应：超平面上的积分．它们通过一维 Fourier 变换彼此相关联．Gelfand-Graev 奇妙的发现是，在半单 Lie 群的情形，有一个类似的几何对应：在齐次空间上我们考虑极限球面 (horosphere)—— 所有极大幂零子群轨道构成的集合 —— 与极限球面变换 (极限球面上的积分算子)．广义 Fourier 变换和在极限球面变换通过 (交换) Mellin (梅林) 变换联系起来，等价地，与交换的 Fourier 变换联系起来．由于这个原因，关于 Plancherel 公式和齐性空间上极限球面反变换的问题平凡地彼此转化．通过其创造者，双曲几何中的极限球面已广为人知 (也引起了高度重视)：它们是中心在无穷远的半径无限大的球面，并且与双曲超平面不同．对于其他齐性空间 (包括对称空间)，在 Gelfand-Graev 的工作之前它们一直没有引起重视．

现在回想起来，极限球面变换的想法看上去几乎是显然的．设 G 是一个复半单 Lie 群，而 $B = MAN$ 是 Borel 子群；这里 N 是幂零根，MA 是 Levi (莱维) 子群 (在此情形它是可交换的)，而 M 和 A 分别是它的紧子群和向量子群．那么极限球面的流形是 $\Xi = G/N$．Gelfand 和 Graev 称之为“主仿射空间”．在这个空间上有两个交换作用：对群 G 的左位移和对群 MA 的右位移；由于 MA 正规化 N，第 2 个作用是良定义的．

Ξ 上相对于 MA 的作用的正规表示分解恰好给出了群 G 在旗流形 $F = G/B$ (Gelfand-Graev 所谓的“主射影空间”) 上的线丛截面构成的空间中所实现的不可约表示．这是主列表示常规实现的改写．因此，如果极限球面变换 (这是一个交结 (intertwining) 算子) 是单射的话，正则表示的分解将简化为相对于 MA 在极限球面空间及上述沿 Abel (阿贝尔) 子群 A 的 Mellin 变换上作用的分解．

2．史前时期

不用说，刚刚只是概述了这些发现，而真正的发现过程是完全不同的．我很幸运地

从 Gelfand 那里听到这些，并想在这里分享一下. 1947 年由 Bargmann (巴格曼), Gelfand-Naimark (奈马克) 和 Harish-Chandra (哈里希－钱德拉) 在 3 篇文章里发现了 Lorentz (洛伦兹) 群的酉表示. 我相信，我曾经听说过 Gelfand 的观察：数学中重要的事情在 3 个地方同时独立出现向前跳跃发展 (数学史上确实出现过显著的例子，以非欧几何为最先). Lorentz 群局部同构于 $SL(2;\mathbb{C})$. 一点也不奇怪，这个问题最早由物理学家进行研究，而他们将物理应用作为目标. (Bargmann 解决了 Pauli (泡利) 的问题，并与 Wigner (威格纳) 和 von Neumann 讨论它；Dirac (狄拉克) 将这个问题告诉 Harish-Chandra; 而 Gelfand-Naimark 首篇文章发表在物理学杂志上.) 由于旋转群的表示在非相对论量子力学中发挥了关键的作用，很自然地，期望 Lorentz 群的表示在相对论的情形中发挥类似的作用. 困难在于, 尽管旋转群是紧的, 并且其所有的不可约酉表示是有限维的, 但 Lorentz 群是非紧的，并且它的唯一有限维酉表示是平凡的一维表示. (这恰恰说明酉表示有一个物理解释.)

在 20 世纪 30 年代 Dirac 和 Wigner 考虑了 Lorentz 群的某些无穷维酉表示. 从另一个方向，在 20 世纪 40 年代初 Gelfand-Raikov 构造了一个类似于 Peter-Weyl 的使用无限维酉表示一般局部紧群的理论. 很可能有这样的共识：对 Lorentz 群的所有酉表示不能用一个显式来描述，并且必须将关于 von Neumann 因子的困难的考虑包括进来. 毫无疑问，对作者最大的惊喜是如何明确和简单地描述 Lorentz 群的所有不可约酉表示.

另外 Bargmann 还考虑了 “实的”Lorentz 群 $SL(2;\mathbb{R})$ 的表示，并且发现圆盘上全纯函数所实现的离散系列的表示. 核心的结果是所构造的酉表示的完备性, 尽管 Bargmann 和 Harish-Chandra 只对一个无限小版本的完备性给出了证明. Bargmann 也证明了矩阵系数完备性的某种表述.

同时, Gelfand 和 Naimark [2] 走得更远, 他们基本上建立了酉表示理论所有的主要概念. 他们将不可约酉表示的特征描述为分布, 说明特征在等价意义下定义了表示，并且明确计算了正则元的特征值, 从而获得经典 Weyl 特征公式的一个精确的类似. 该文包含了他们所列的不可约酉表示是完备的这一事实复杂的解析证明; 但工作的焦点是 Plancherel 公式的一个类似. 这提供了在相对于不变测度的群的 L^2 空间上 (连续) 分解成不可约的双侧正则表示.

在这个分解里只出现了一些酉表示；他们被称为 *主列* 的表示 (其余酉表示构成了 *补列*). 值得注意的是，Plancherel 测度 —— 它通过其在不可约部分投影的范数而出现在群上函数范数表达式里 —— 可以被明确计算. 然而，这个显著的公式让人想起了有限维表示的经典 Weyl 公式，而它是由近 10 页的看不到任何有关概念结构的密集计算得到的. 后来，这由 Mautner 在审 Harish-Chandra 更概念性的证明时指出. 这符合 Gelfand 的风格，相对于证明的简化，他从一开始就更关注最终结果的漂亮和清楚.

然而，这是典型的 Gelfand, 在多年之后他仍不断尝试去澄清有关情况. 在 [2] 发表的时候就出现了一些声称推广了群 $SL(n;\mathbb{C})$ 的短文. 在 1950 年 Gelfand 和 Naimark 的一个大部头著作面世，它致力于经典群的酉表示 (Gelfand 喜欢称这本书为 “蓝书”, 这是因为书封面是蓝色的，并且将关于 $n=2$ 的那篇文章称为 “红文”). 这本书是令人难以置信

的大量工作的结果，这对我来说简直是英雄．其风格是明确的：通过激烈的分析克服许多障碍，推导出显式公式．特别地，该理论的高峰，一个类似于 Plancherel 公式的证明脱颖而出．作者不能从关于 Lorentz 群的论文去推广已经很复杂的证明；书里的证明异常艰难，并包含了许多卓越的发明．Gelfand 特别重视某类推广的椭圆坐标下的计算．

1950 年前后，Gelfand 的数学生活发生了显著的变化．首先，他结束了与 Naimark 格外富有成果的合作．更重要的是，他果断改变了他的工作的结构．如果之前，他在每一个时刻集中于某一方向的话 (Banach 空间，Banach 代数和表示论), 那么现在他与几个合作者同时进行不同领域的工作. 他没有放弃表示论, 并且 Graev 成为其多年的主要合作者. 不久 Harish-Chandra 给出了所有复半单 Lie 群和 $SL(2;\mathbb{R})$ 的 Plancherel 公式的一个概念性证明．然而，有些东西仍然不能使 Gelfand 满意，因而他不时地继续返回 Plancherel 公式．1953 年，他和 Graev 通过应用 M. Riesz (里斯) 二次形式幂的正则化结果以一种非常漂亮的方式将它推导出来．

Gelfand 不停地回到他关于 Lorentz 群的 Plancherel 公式的证明, 这尚未被推广到其他群, 并且他觉得有些重要的东西还没理解清楚. 1958 年, 他突然看到在这个证明里隐藏了近 10 年的东西, 即证明的大部分都集中于解决下面这个几何分析里看起来很初等的问题: 考虑一个 3 个复变量的函数 $f(\alpha,\beta,\delta)$. 对于复数 λ, 在所有与双曲线 $\alpha=\lambda$, $\delta=\lambda^{-1}$, $\beta=0$ 相交的复直线上积分该函数 (实意义上的). 然后通过所有的这些积分重新构造 f. 这些直线与 Lorentz 群 $SL(2;\mathbb{C})$ 有什么联系呢？考虑这个群中极限圆组成的集合：单位上三角矩阵 $\left(\begin{smallmatrix}1 & u\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ $(u\in\mathbb{C})$ 的幂零子群 N 的双侧位移. 这个集合作为 $\mathbb{C}^4$ 里的双曲面 $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ 恰好是这个群中所有 (复) 直线构成的 3 参数族 (在 $\mathbb{C}$ 上). 如果将此双曲面投影到 (α,β,δ) 为坐标的平面上，那么几乎所有的极限圆 (不包括那些投影到点的情形) 变换成与该双曲线相交的直线．论文 [1] 中的反问题的解是一个非常简单的公式，这让人联想到 Radon 反演公式．对于该群上广义 Fourier 变换的逆 (Plancherel 公式), 它仍然仅是通常 Mellin 变换的逆．在这种解释之后，Gelfand 和 Graev 去定义一般情况下的极限球面和极限球面变换就很直接了．论文 [2] 的作者显然不知道这种几何解释，但是看看这篇文章，人们不能不惊叹于他们在他们的计算里多么紧密地遵从了这一点 (《广义函数 (Generalized Functions)》 [4] 第 5 卷里有关积分几何这个问题的相应段落与 1947 年的论文不同之处，仅在于添加了一些文字，但没有任何关于公式的实质性的变化).

然而，这个时候，故事浪漫的一面结束了，而平淡无奇的日常数学问题开始了．极限球面变换的优美及其重要性是毋庸置疑的，但它提出以下问题也很合理：它对表示论的贡献在哪里呢？从一开始，Gelfand 就认为有直接的方法来得到某些广义 Radon 变换的逆，其中包括极限球面变换，他还认为应该有更自然的方式来获得 Plancherel 公式．然而，在 1959 年，没有发现这样一种方式，并且，从本质上讲，论文 [1] 得到了相反的情况：复半单 Lie 群和某些齐性空间的极限球面逆变换公式由已知的 Plancherel 公式推导而得．得到了一个重要公式，它类似于奇数维空间中的 Radon 逆变换公式，但同时也指出对于秩大于 1 的空间需要做何种修改：需要平均化 (在过一点的极限球面集合上) 运用在平行极限球面上作用的明确的微分算子 (阶数等于秩) 的结果．这仍然需要发展积分

几何中的直接方法，并且去理解这种方法对于调和分析有什么优点．这在 10 年后的论文 [5] 中才部分完成．

即便如此，一些重要的支撑性观察慢慢地积累起来．Gelfand 最开始就注意到群 $SL(2;\mathbb{C})$ 的对称 Riemann 空间是具有经典意义上的极限球面的三维双曲空间．极限球面的反演公式在合适的定义下与三维欧氏空间中 Radon 变换的逆公式恰好相匹配．而与此相反，欧氏空间中 Fourier 变换的 Plancherel 公式与双曲空间中的有显著的不同．在某种意义上，极限球面变换是独立于曲率的！这个观察的重要性毫无疑问，但在令人惊讶的一段很长时间里，没有人尝试将它纳入到一些一般的结果中．今天，很显然，如果一个人考虑负曲率 Riemann 对称空间的 “平” 对应 (将曲率变为零), 那么极限球面的逆变换公式对于这两个空间将是一样的．在我看来，这就用简单明确的公式的性质解释了半单 Lie 群表示 (这使它们的创作者感到惊讶): 从极限球面方法的角度，问题变得等价于平坦情形．还存在另一个毫无疑问被默认为十分重要的情形，即使我从来没有遇到过关于它的讨论．即，在 Plancherel 公式标准方法里，在共轭类上的积分被正则化，使其在奇异共轭类，最终在单位类上有意义．极限球面在一定意义上是共轭类的生成元；把它们纳入分析给奇异类的研究指明了方向．

3．直线和曲线的积分几何

接下来的时期中，最大的成功是将 Lorentz 群上极限球面解释为与双曲线相交的直线. 一切从一个自然的问题开始: 如果将双曲线替换为另一条曲线, 会发生什么呢？Kirillov 证明了在这样的替换下逆公式保持不变．这意味着一件非常重要的事情：将双曲线替换为另一条曲线，那么群消失了，因而很明显 Lorentz 群表示理论一个重要的部分并不与群结构有关，而是与某种更一般的几何结构有关．这是第一个支持 Gelfand 将表示论嵌入到更广泛的几何分析领域的证据．

下一步也是明显的：了解 “与一条固定的曲线相交” 的一族直线所需条件的性质．$\mathbb{C}^3$ 中所有直线构成的族依赖于 4 个 (复) 参数．对积分几何来说，很自然地去考虑 3 个参数的族 (在经典术语里直线的复形), 因为此时积分将 3 个变量的函数转变为 3 个变量的函数．对于哪种直线复形有 Radon 型的反演公式？Gelfand 和 Graev [4] 表明，这不仅对与固定曲线相交的直线复形是可能的，而且对相切于固定曲面的直线复形也是可能的，但对其他任何直线复形则不可能．他们称这样的复形是 *可容许的* (*admissible*). 对于这个惊人结果的证明，值得说几句．

F. John (约翰) 发现，在实情形下，沿三维空间中直线积分的算子的像可由超双曲微分方程描述．在复情形下，则不得不考虑这种微分方程的全纯和反全纯版本．事实表明所需反演公式的存在性等价于 Goursat (古尔萨) 问题的可解性，因此与这个算子的特征条件相一致．这是一个可以用 Hamilton-Jacobi (哈密顿 – 雅可比) 方法积分的非线性方程．次特征 (bicharacteristics) 的考虑给出了可容许复形的描述．这些复形已经出现在经典微分几何中．很自然地，它们是极大退化的：与 (无穷小地) 位于平面中一条固定直线相交的复形的直线．

此结果可推广到任意维数空间中一般位置的直线的复形上. 很自然, 下一步是要考虑将直线换成曲线的可行性. 这个方向的最终结果由 Bernstein 和我 [12] 得到 (在 Gelfand, Shapiro 和我以前发现曲线复形反演公式的一个通用结构 [6] 之后). 可容许曲线的复形恰恰是有理曲线的无穷小完全族 (无穷小意义上, 它们是射影直线上某向量丛的所有截面的空间). 在这里, 最重要的条件是这些曲线是同时有理的. 这是一个十分有效的条件, 使得可以构造许多具有 Radon 型反演公式的曲线族的明确例子, 例如, 二阶曲线. 在这些构造中, 自然地舍弃了曲线族是复的要求 (族的参数数目等于流形的维数). 在这种情况下, 考虑积分几何问题的推广存在可能性, 但更多的启发是表示论之外的应用的可能性. 例如, 存在与 Penrose (彭罗斯) 扭量 (twistor) 理论的联系: 4 参数可容许曲线族对应于共形右平坦 4 度量 (Weyl 曲率的自对偶部分为零). 这使我们发展了一套构造 Einstein 自对偶方程显式解的方法. 在我看来, 在曲线的情形, 积分几何已经成功地全面发展了. 这似乎是非线性分析集中在显式可积问题的一部分, 并且与单谱参数情形逆问题的方法联系在一起.

4. 平面的复形

维数高于 1 的子流形的情形明显更复杂, 在此情形很可能无法将工作推进到如一维的情形. 这看起来与多个谱参数逆问题可积性的可能性类似. 然而, 已经得到了一些基本的结果. 让我们回想一下, 从积分几何的第一项工作 [1] 开始, 通过极限球面的逆变换找到一个 Plancherel 公式的证明是一个极大的挑战. Gelfand, Graev 和 Shapiro 用 10 年时间完成了与群 $SL(n;\mathbb{C})$ 对应的工作 [6], [5]. 我们已经讨论过当 $n=2$ 时, 极限球面可以被看作是直线的事实. 对于任意的 n, 这个群的极限球面也可以视为 $\mathbb{C}^N$ 中的 $k=n(n-1)/2$ 维平面, 其中 $N=n^2-1$. 这族平面的维数恰好等于 N, 所以我们有一个 $k-$平面的复形. 关键的想法是通过一个函数在任意复形的平面上的积分来重新构造该函数, 而不是限制在极限球面的一个复形上. 我们注意, 通过在所有平面上的积分重新构造函数是高度超定的, 而过渡到复形是使问题有良好定义的一种自然的方式. 事实证明, 对于在某点重新构造函数总是能够写出一个令人想起 Radon 反演公式的公式. 这个公式涉及到沿着通过某个点的复形的平面构成的集合平均化某具体的微分算子 (阶为 $2k$). 这个算子定义在所有 $k-$平面构成的集合上; 但是, 我们可以利用它在很强条件的复形的平面构成的集合上的限制来计算它. 让我们称满足这些条件的复形为 *可容许的*. 这会再次出现涉及特征的条件. 我们可以略有不同地描述这些条件. 在 $k-$平面上积分算子的像通过某个二阶微分方程组描述, 这推广了 John 方程, 并且可容许的复形一定是此组的特征. 从某种意义上说, 可容许的复形是极大退化的.

对于 $k>1$ 的可容许复形描述的非线性问题可能是不可积的. 然而, Gelfand 和 Graev [5] 直接验证了在 $SL(n;\mathbb{C})$ 中极限球面的复形是可容许的. 作为结果, 我们得到了极限球面变换的逆, 并因而得到 Plancherel 公式. 我确定在极限球面流形的退化性里有非常重要的东西. 我认为半单 Lie 群表示论的几何基础就在这种现象里. 显然, 这样的结果大量使用了将 $SL(n;\mathbb{C})$ 上极限球面视为平面的可能性. 对于其他半单 Lie 群, 这是不可能

的，但我发现，通过考虑任意子流形的可容许复形，上述构造可能被推广到这些群上 [8].

5. 非局部问题和离散系列的积分几何

在复群的情形，微分算子平均化反演公式的结构表明，特别地，这些公式是局部的：对于在一点处函数的重新构造，知道该点附近极限球面上的积分就足够了. 在 Radon 变换的情形，这仅仅适用于奇数维的情形. 对偶数维空间，反演公式是非局部的：在此情形，一个伪微分算子被平均化. 如果我们从复群到实群及其齐性空间，那么第一个新困难将与不可避免出现的非局部公式有关. 很自然地，从非紧型 Riemann 对称空间 $X = G/K$ 着手，其中 G 是一个实半单 Lie 群，而 K 是 G 的一个极大紧子群. 从而极限球面变换总是单射，并且反演公式是局部的当且仅当所有根的重数是偶数. 在这种情形，反演公式可以通过使用上面描述的对于复群的方法推导出来. 然而，一般情形必须涉及非局部反演公式，并需要新的思路. 在 Karpelevich 和我通过 Harish-Chandra $c-$ 函数的乘积公式计算这些空间的 Plancherel 测度后，在这种情形我们 [13] 找到了类似于 Gelfand 和 Graev 在他们的第一篇论文 [1] 里对于复群的方法：我们通过 Plancherel 密度的逆 Mellin 变换计算了极限球面逆变换的核. 我们对经典群做了上述计算. 之后，Beerends 对一般情形完成了上述讨论. 下一步应该是使用几何分析的方法直接推导这些反演公式 (正如偶数重数的情况), 但到目前为止这尚未完成. 我们与 Gelfand [9] 试图在这个方向上前进，在实 Grassmann 流形上发展微分形式的某种对称推广，毫无疑问这本身是有趣的. 然而，我们在这个问题上没有取得重大进展. 在我看来，今天许多要点看起来更清晰，并且这个问题看起来可以切实解决.

最后，我们可以开始讨论基于极限球面变换表示论的发展的主要障碍，这是从一开始就十分明确的. 对于实半单 Lie 群极限球面变换，作为一项规则，有一个除了极大连续系列以外的所有表示系列构成的核. 这对于群 $SL(2;\mathbb{R})$ 已是正确的：如果我们将其正则表示分解为分别对应于连续和离散系列的子空间 L_c, L_d 的和，那么极限球面变换的核与 L_d 一致，而变换的像同构于 L_c. 似乎没有得到极限球面反演变换的方法或用这种方法来导出 Plancherel 公式. 容易将它解释为实群情形 —— 其中离散系列发挥了核心的作用 —— 积分几何威力引人注目的局限性. 这似乎是 Gelfand 将积分几何应用到表示论的想法没有引起表示论专家太多热情的原因.

我应该是以下这个事实的见证者：Gelfand 从来不相信极限球面的应用被限制在连续系列上. 在他看来，了解离散系列情形极限球面的对应是有必要的，并且也是完全可能的. 这与他对数学审美和谐的信仰产生了共鸣. 在和他的第一次交谈 (在 1955 年) 中，我听到他这样形容 von Neumann 第二类因子 (它当时并没有任何已知的的应用):“这样的美丽绝不能消失！”Gelfand 和 Graev [7] 仅在一种情况下 (一个虚的三维双曲空间) 找到一个合适的推广：那里的离散系列与某些退化极限球面有联系. 然而，这与某些非常特殊的情况有关，并且没有直接推广的机会.

$SL(2;\mathbb{R})$ 的情形仍是第一个需要被解决的. 在 1977 年 Gelfand 和我 [10] 试图去了解它. 我们做法的理念基于 Plancherel 公式必须通过两个阶段推导出来的事实. 首先，必

须找出到对应于表示系列的子空间的投影．表示的系列对应于 Cartan 子群的等价类．将每个系列分解到不可约子空间可退化为对应于相伴 Cartan 子群上的一个交换 Fourier 变换 (连续或离散)．所以第一阶段是主要的．两个主要的相关问题是找出到系列的投影以及此系列子空间的内部解析特征．我们对 $SL(2;\mathbb{R})$ 解决了这些问题．对应于全纯与反全纯离散系列的子空间可以作为复群 $SL(2;\mathbb{C})$ 的某些管状域中全纯函数在 $SL(2;\mathbb{R})$ 上的边界值而被刻划．投影可以被解释为 Cauchy (柯西) 积分公式的某种类似．我记得 Gelfand 得到这些结果时是多么高兴．他常说表示里新的重要的东西通常对 $SL(2)$ 已经是非平凡的．我们预计，在一般情况下系列也与某些管状域有关，这可能不是 Stein (斯坦) 流形，那就必须考虑这些区域上的 $\bar{\partial}$ 上同调．后来这被称为 Gelfand-Gindikin 纲领．这一纲领取得了重要进展，但只是对于全纯离散系列．

可以预期到系列的投影一定与积分几何有某种联系，但在当时认为不可能找到极限球面的合适推广．很久以后，我发现了某种自然的构造 [14]．在 $G = SL(2;\mathbb{C})$ 上有两类极限球面，在每一类上都允许构造极限球面变换．我们已经讨论了一维极限圆．然而，也可以考虑二维极限球面 (双边作用下 $SL(2;\mathbb{C}) \times SL(2;\mathbb{C})$ 中极大幂零群的轨道)．它们的几何特征通过各向同性平面由被视为双曲面的群的截面构成．极限圆是二维极限球面的线性生成元；由于这个原因，这两类极限球面变换是等价的．对于 $SL(2;\mathbb{R})$, 两个变换都有核．想法是由于没有足够多的实极限球面，我们必须考虑某些复极限球面．

1966 年，在布达佩斯的游泳池．
前，P. Dirac, I. Gelfand;
后，B. Bollobas, M. Arato

让我们考虑那些与实子群 $SL(2;\mathbb{R})$ 不相交的复极限球面．这种极限球面有 3 类．这里我们考虑在没有实点的复极限球面上有奇点的 Cauchy 核 (在实群上) 的卷积，而不是考虑实极限球面上的积分．作为结果，它们 3 个部分的极限球面变换被定义．它已经没有核，而各个部分的像利用各个系列的表示被分解．极限球面表示的逆给出到系列上的投影以及 Plancherel 公式．同时，从连续系列中函数的延拓可以作为某个管状域的一维 $\bar{\partial}$–上同调得到，这与我们的假设一致．我希望，对实半单 Lie 群复极限球面理解的正确发展对于表示论的积分几何等价的构造是足够的．有趣的是，这甚至可以对没有实极限球面的紧 Lie 群来做．

Gelfand (与 Graev 和我合作) 在积分几何的许多其他方面一起工作．我还没有讨论这些结果是因为在这里我想集中精力考虑与表示论相关的积分几何，这在我看来是这个项目最重要的部分．而在 Radon 变换与表示论的联系被发现之前很久，Gelfand 就对其感兴趣，这是十分有趣的．他喜欢提供给他的学生与 Radon 变换有关的问题，虽然他自己从没做过这个方向的工作．这几乎是未来联系的预感，一种往往在卓越的数学家身上体现出来，并且是他的代表性的能力．积分几何不是他最成功的课题之一，它没使他获得广泛认可或众多的追随者．然而，我们可以用一种非常突出的方式在其中发现他独特的数学方法．像每一个有幸与 Gelfand 一起工作的其他数学家一样，我已经习惯于信任

他非凡的直觉，而且我相信我的故事还没有结束．也许我会看到他的神奇课题的实现．

参考文献

[1] I. M. Gelfand, M. I. Graev, Geometry of homogeneous spaces, representations of groups in homogeneous spaces and related questions of integral geometry, Amer. Math. Soc. Transl. (2), 37 (1964), pp. 351–429.

[2] I. M. Gelfand, M. A. Naimark, Unitary representations of the Lorentz group, Izv. Acad. Nauk SSSR, Ser. Mat., 11 (1947), pp. 411–504.

[3] I. M. Gelfand, Integral geometry and its relation to the theory of group representations, Russ. Math. Surv., 15 (1960), no. 2, pp. 143–151.

[4] I. M. Gelfand, M. I. Graev, N. Ya. Vilenkin, Generalized Functions, Vol. 5. Integral Geometry and Representation Theory, Academic Press, 1966.

[5] I. M. Gelfand, M. I. Graev, Complexes of k-dimensional planes in the space $\mathbb{C}^n$ and Plancherel's formula for the group $GL(n, \mathbb{C})$, Soviet Math. Dokl., 9 (1968), p. 394–398.

[6] I. M. Gelfand, M. I. Graev, Z. Ya. Shapiro, Integral geometry on k-dimensional planes, Funct. Anal. Appl., 1 (1967), no. 1, pp. 14–27.

[7] I. M. Gelfand, M. I. Graev, An application of the horospheres method to the spectral analysis of functions in real and imaginary Lobachevsky space, Trudi Mosk. Math. Soc., 11 (1962), pp. 243–308.

[8] S. G. Gindikin, Integral geometry on symmetric manifolds, Amer. Math. Soc. Transl. (2), 148 (1991), pp. 29–37.

[9] I. M. Gelfand, S. G. Gindikin, Nonlocal inversion formulas in real integral geometry, Funct. Anal. Appl., 11 (1977), pp. 173–179.

[10] ———, Complex manifolds whose skeletons are semisimple real Lie groups and holomorphic discrete series of representations, Funct. Anal. Appl., 11 (1977), pp. 258–265.

[11] I. M. Gelfand, S. G. Gindikin, Z. Ya. Shapiro, The local problem of integral geometry in the space of curves, Funct. Anal. Appl., 13 (1979), pp. 87–102.

[12] J. Bernstein, S. Gindikin, Notes on integral geometry for manifolds of curves, Amer. Math. Soc. Transl. (2), 210 (2003), pp. 57–80.

[13] S. G. Gindikin, F. I. Karpelevich, A problem of integral geometry, Selecta Math. Sov., 1 (1981), pp. 160–184.

[14] S. Gindikin, Integral geometry on $SL(2;\mathbb{R})$, Math. Res. Lett., 7 (2000), pp. 417–432.

Peter Lax

I. M. Gelfand

像其他人一样，我第一次听到的 Gelfand 的名字是其作为交换 Banach 代数中极大理想的著名定理和应用它证明 Wiener 的关于其 Fourier 级数绝对收敛的函数定理的作者．下面的故事描述了这个结果在美国被接受的情况．

在它发表后不久，Ralph Phillips (菲力浦斯) 在哈佛大学介绍了这个结果．它引起了听众的兴趣，并被要求对全体教师再讲一次．此后，第 3 次他被要求给 G. D. Birkhoff (伯克霍夫) 单独讲述．

其他早期的基本结果是关于谱半径的 Gelfand 公式以及 Gelfand-Levitan 关于常微分算子的逆谱理论．如果你有一个完全可积系统，你应该能够完全地积分它．对 KdV 方

Peter Lax 是美国 Courant 数学科学研究所的荣誉退休教授．他的邮箱地址是 `lax@courant.nyu.edu`.

程，Gelfand 和 Levitan 关于二阶微分方程逆谱问题的具有里程碑意义的结果是进行积分的关键.

衡量 Gelfand 终身成就的一个观点是这些壮观的早期结果今天看来只是他所有工作的一小部分.

下面是揭示 Gelfand 谦虚品格的一个故事. 我是第一届 Wolf (沃尔夫) 奖遴选委员会的 3 个成员之一. 我们都一致认为, 这个奖应授予在世的最伟大的数学家. 在我看来那个人应该是 Carl Ludwig Siegel (西格尔), 但另一名委员会成员坚持认为是 Israel Moiseevich Gelfand. 因此, 在作出平分该奖的决定之前我们徒劳地来回争辩. 一段时间之后, Gelfand 在一次偶然的谈话中说,“和 Siegel 分享这个奖对我而言是一个伟大的荣誉.”

在这个世界上很长很长的时间内都不会出现 Israel M. Gelfand 这样的人了.

Andrei Zelevinsky

缅怀 I. M. Gelfand

2009 年 12 月 6 日，I. M. Gelfand 过世两个月后，在他的最后工作地 Rutgers 大学举行了 Gelfand 纪念会. 这次活动汇聚了莫斯科几代数学家精英 (他们现在散落在世界各地), 这些数学家的数学生活在很大程度上是受到 I. M. 的影响塑造的. 尽管这是个悲伤的场合，但是看到很多老朋友，并和大家分享我们参加 Gelfand 在莫斯科国立大学著名的讨论班的学生时代的回忆是一件很高兴的事. 当然，大家一起分享了 I. M. 的故事. 他在许多人的生命中是一个巨大的存在，因而他的去世留下了难以填补的空白.

在 1970 年初秋，我第一次见到了 I. M. Gelfand. 会面由 Victor Gutenmacher 安排，那时他在 I. M. 组织的函授学校工作 (目的为使数学进入苏联各地学童的生活). I. M. 像往常一样，同时参加无数的科学和教学的各种项目，他决定在著名的莫斯科第 2 学校组织七年级学生的一个特殊的数学班，这样的班已经有长达 10 年之久的传统. 为了帮助他运行这个项目，I. M. 让 Victor 帮他找几个在他们的中学时期自己也经历过这样班级的年轻助理. 我当时很幸运地成为 4 个这样的助手之一. (另一个是从七年级起的我的老朋友和同学，现在是杰出数学家的 Borya Feigin.) 我们 4 个都是一年前同期毕业于第 2 学校，而我们都是莫斯科国立大学数学系二年级本科生，并且我们对我们的数学学习都觉得有点迷茫.

本来组织事宜应该在几分钟之内解决，但我们和 I. M. 的第一次见面持续了数小时. 我们 4 个 (加上可怜的 Victor) 和 I. M. 一起走了几个小时，他向我们讲述了数学和其他的各类事情. 他询问我们有关数学最喜欢的方向，以及我们在大一时曾参加的讨论班和选修课. 当然，他觉得我们所做的一切都是错误的，并且几乎在数学中迷失了，但他认为如果我们马上参加他的讨论班的话我们还是有希望的. 他还向我们解释如何学习一个新的数学方向：专注于最基本的东西直到你完全理解它；之后技术性的问题会非常迅速并且毫不费力地被理解. 我清楚地记得他如何通过向我们解释线性代数的基础来说明这

Andrei Zelevinsky 是美国东北大学的数学教授. 他的邮箱地址是 andrei@neu.edu. Zelevinsky 感谢他的女儿 Katya 提出有用的编辑建议.

一点：向量空间的一个子空间由一个整数即它的维数表征；一对子空间由 3 个整数表征 (两个子空间的维数和它们交集的维数). 那么子空间三元组呢？子空间四元组呢？[1)]

这次碰面肯定是改变我人生最重要的经历之一. 我从来没有见过拥有这样的个人魅力以及点燃别人对数学热情的能力的人. 我记得那天晚上我很晚才回家，疲惫不堪但很高兴，并且认定我的数学命运在那一天已被确定. 那晚我没法睡觉，并且将大部分时间用在思考子空间三元组的奥秘上！我参加了 Gelfand 讨论班将近 20 年. 它的独特性已经广为流传，包括关于 I. M. 粗暴对待发言者和与会者的可怕故事. 我在那里也有过感到羞辱的经历，既作为一个报告者又作为一个在讲座中间被 Gelfand 叫到黑板前去解释报告者想说些什么的一个 “控制听众 (control listener)”. 许多人，包括一些优秀的数学家无法忍受这种风格，因而不再参加讨论班. 留下来的人 (包括我自己) 认为这样一个很好的学习体验值得忍受一些痛苦. 同样重要的或者比讨论班讲座本身更为重要的是，Gelfand 所选择的议题；他的往往背离原来话题很远的评论和滔滔不绝的讲话；当然，还有他著名的关于 “教学” 的笑话和故事.

1984 年在莫斯科国立大学与 Serre 和 MacPherson 在周一晚上的讨论班

讨论班的正式开始时间是在星期一晚上 7 点 (还是 6:30?), 但它几乎每次都会大大推迟，有时长达两个小时！我相信 I. M. 是有意这样做的，因为每周讨论班前与一些朋友一起来到大学里的来自莫斯科各地的与会者也是很有吸引力的. 有时甚至在 I. M. 到来后，他也没有立即开始讨论班，却在走廊里待上一段时间，像其他人一样与人们聊天.

我觉得自己是 I. M. “数学上的孙辈”: 我的第一个真正的老师以及博士导师 Joseph Bernstein[2)] 是 Gelfand 最好的学生之一. 然而，在 Joseph 移民之后的某个时刻 (我相信是在 1980 年), I. M. 找到我并建议我们开始一起工作. 我们密切的数学合作历时约 10 年 (从 1984 年第一篇联合文章至 1994 年与 Misha Kapranov 一起写的书). 要全面介绍 I. M. 数学上的贡献需要大量篇幅，所以我只分享对他作为一名数学家和一名教师 [3)] 的一些独特特点的个人印象.

与他一起工作可能是一个非常令人沮丧的体验. 只是看看他令人难以置信的多产科学作品，人们就会把他想象为一个有效率的样板，并且从来没有浪费一点时间. 但我们日常会面的大部分时间里充满了许多分心的事，从一个话题跳跃到另一个话题，他和令

1) 子空间三元组展示了有限维向量空间的子空间与有限集子集的有效类比的局限性：子空间的格仅仅是模的，而不是分布的. 对这个类比的思考使我得到了接下来几年中我所发表的最早两篇短文. 对子空间四元组，正如我很久以后才意识到的那样，I. M. 刚刚才完成他与 V. A. Ponomarev 的重要论文 “线性代数的问题与有限维向量空间的子空间四元组的分类”. 所以，他是在向我们谈论他前沿的研究！—— 原注

2) Joseph 并不是我的正式导师，因为他从未与莫斯科国立大学数学系有关联，这也是其他许多来自 “Gelfand 圈” 的一流数学家的情况. A. A. Kirillov Sr. 也是 Gelfand 的一名学生，非常友善地同意作为我的正式导师. 当然，我从他身上和从参加他的讨论班上学到了许多.—— 原注

3) 对 I. M. 来说，这两个职业是不可分离的. 他做数学的方式也总是包含了与他无数学生和合作者的亲切互动.—— 原注

人惊奇的许多人长时间的电话交谈涉及各种各样的令人惊奇的话题，等等．经常像这样度过数小时后，我会感到疲惫不堪，并有一种令人沮丧的感觉：我们刚刚浪费了一个完美的工作日．但几乎没有例外都会出现这样一个他完全投入到我们课题的时刻 (有时当我已经在门口说再见时), 引领我们的课题极其迅速地发展，完全弥补了这一刻之前的数小时折磨．这似乎是他潜意识下从没停止我们的课题工作 (可能同时也没有停止其他众多事情), I. M. 只是花费很长一段时间来准备这项工作结果的详细说明．

I. M. 思维过程的这种 “非线性” 也是使他的讨论班如此独特的众多特征之一．他会花费大量的时间要求每个人向他解释一些基本定义和事实，而当大部分的参与者 (当然从演讲者开始) 感到完全沮丧时，I. M. 会突然改变方式，并说一些有启发的东西使这一切都变得很值得.[1)]

我从来没有见过任何其他数学家有这种能力去看到 “大画面”, 并始终忽略不必要的技术性问题直接进入问题中心．他有一种不可思议的能力来提出 “正确” 的问题，并找到不同数学领域之间意想不到的联系．I. M. 完全意识到这份天赋，并且用他的众多 “教学” 故事中的一个来说明它：“一个老水暖工来修复加热器．他绕着它想了一会儿，并用锤子敲了它一下．加热器立即开始正常工作．水暖工收了 200 卢布服务费．店主说，‘但是，你只花了两分钟，并且没有做任何事情．’ 水暖工回复道，‘我用锤子敲加热器只收 3 卢布，其余的钱花在知道敲哪里上，我花了 40 多年的时间学习这些！’ ”[2)]

I. M. 有这么多的理念和计划，因此即使为了实现其中很小的一部分也需要很多的合作者帮助他．他对人的了不起的直觉了解总是给我留下非常深刻的印象．和一个新认识的人交谈几分钟就能让他全面衡量一个人，了解他或她的科学潜力，优势和劣势，甚至能知道那个人承受压力的能力．就我自己而言，I. M. 似乎在我自己意识到它之前就发现我对代数组合情有独钟 (我必须说当时这在莫斯科相当罕见)．我参加他的讨论班不久后他就让我学 (并且然后给出报告) D. E. Littlewood (利特尔伍德) 的老书《群特征理论和群的矩阵表示论 (The Theory of Group Characters and Matrix Representations of Group)》, 其中的表示论具有较强的组合风格．这确实像狙击手的射击：我从这本书中学会的事实和想法至今对我仍有用．I. M. 另一个确实有启发性的建议是将 Borya Feigin 和 Dmitry Borisovich Fuchs (富克斯) 聚在一起，这促成我们多年卓有成效的合作．像我的很多朋友和同事一样，我感到非常幸运能够认识著名的 Israel Moiseevich, 并有机会接近这个拥有强大的，复杂的，智慧的，催人奋进的，令人无限神往的个性的人．

(王耀华 译　　李艳芳 校)

---

1) I. M. 经常这样打断演讲者，“我可以问一个愚蠢的问题吗？” 对此，Y. I. Manin 在他为数不多的几次演讲的一次中给出了最好的回答，“不，I. M. , 我不认为你能胜任这样的事情！”.—— 原注

2) I. M. 的开启新的富有成效的数学研究方向的惊人纪录提供了大量 “知道敲打哪里” 的例子．让我仅仅举一个例子：由 I. M. 提出的一般超几何函数的理论 (我和他在这上有重要合作) 来自他对超几何函数应当在 Grassmann 流形上存在的洞察.—— 原注