名词解释

什么是 Sobolev 正交多项式？

Francisco Marcellán　Juan J. Moreno-Balcázar

如正弦和余弦这样的正交函数，以及相关的 Fourier (傅里叶) 级数或 Legendre (勒让德) 多项式和级数，在解决问题时是有用的．我们来描述被广泛应用然而并不太知名的 Sobolev (索伯列夫) 正交多项式，其中正交性的概念涉及导数．

在区间 $[a,b]$ 上关于一个正测度 μ 的通常的正交多项式 P_n (其次数 $=n$) 满足

$$(P_n,P_m):=\int_a^b P_n(x)P_m(x)d\mu=\begin{cases}0, & \text{若 } n\neq m,\\ \alpha_n>0, & \text{若 } n=m.\end{cases}$$

这样，经典的 Legendre 多项式

$$1,x,\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2},\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x,\ldots,$$

在 $[-1,1]$ 上关于 Lebesgue (勒贝格) 测度是正交的．

现在我们在实直线上取两个有限的正 Borel (博雷尔) 测度 μ_i, $i=0,1$, 并且我们构造包含导数的一个内积

$$(f,g)_S=\int f(x)g(x)d\mu_0+\int f'(x)g'(x)d\mu_1. \tag{1}$$

相应的范数

$$\|f\|_S^2=(f,f)_S=\int f^2(x)d\mu_0+\int(f'(x))^2d\mu_1$$

是著名的 Sobolev 范数．这样，关于此范数的赋范空间就是一个 Sobolev 空间．关于 (1) 的正交多项式 s_n 满足

$$(s_n,s_m)_S=\int s_n(x)s_m(x)d\mu_0+\int s_n'(x)s_m'(x)d\mu_1=\begin{cases}0, & \text{若 } n\neq m,\\ \beta_n>0, & \text{若 } n=m,\end{cases}$$

其中 s_n 的次数为 n. 导数的出现改变了一切：通常的正交多项式大多数上好的性质对于 Sobolev 正交多项式不再成立．通过包含更多的导数可以推广内积 (1).

Sobolev 正交性源自对于一个函数及其导数的最佳最小二乘逼近以获得这样的多项式的问题．即，我们需要求得 $p\in\mathbb{P}_n$ 使得

$$\|f-p\|_S^2=\inf_{q\in\mathbb{P}_n}\|f-q\|_S^2,$$

译自： Notices of the AMS, Vol. 64 (2017), No. 8, p. 873–875, What is ... a Sobolev orthogonal polynomial?, Francisco Marcellán and Juan J. Moreno-Balcázar, figure number 2.

Francisco Marcellán 是西班牙马德里卡洛斯三世大学的数学教授，他的邮箱地址是 pacomarc@ing.uc3m.es.

Juan J. Moreno-Balcázar 是西班牙 Almeria 大学的应用数学教授，他的邮箱地址是 balcazar@ual.es.

其中 $\mathbb{P}_n$ 是次数至多为 n 的多项式的线性空间. 上述极值问题的解由

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n}(f,s_i)_S s_i(x)$$

给出, 其中 $\{s_n\}_{n\geq 0}$ 是 Sobolev 正交多项式的一个序列 (对所有 n, $\beta_n=1$), 诸项 $(f,s_i)_S$ 被称为 Fourier-Sobolev 系数.

这个问题由 D. C. Lewis 于 1947 年提出, 虽然在其论文中并未处理正交多项式. 几位德国数学家对于一些特别的测度在 1960 年代首先考虑并研究了这些问题. 当引进*凝聚测度* (*coherent measures*) 的概念 —— 它为 Sobolev 正交多项式的许多代数的, 微分的和渐近的性质铺平了道路 —— 时, 该领域于 1980 年代后期被激发了. 关键在于在 Sobolev 正交多项式和通常的正交多项式之间在固定数目的项之间建立一个代数关系. 实际上, 凝聚性概念极大地限制了测度的选择: 它们密切相关, 因而决定了所有可能的凝聚对. 自此, 这个概念以包含更多类型的测度而以多种方式被推广了.

图 1 Sergei Lvovich Sobolev (1908–1989) 于 1970 年在法国尼斯国际数学家大会. Sobolev 多项式关于 Sobolev 内积 (1) 是正交的

Sobolev 正交多项式有一些值得注意的性质. 在 1990 年代注意到, 对于具有非通常参数的著名的 Laguerre (拉盖尔) 多项式, 某种 Sobolev 正交性成立. 对于具有非经典参数的 Gegenbauer (盖根鲍尔) 多项式和 Jacobi (雅可比) 多项式也已经做出了类似的关联. 这些关联非常好: 它们把经典的多项式与非通常的正交性漂亮地联系起来了.

相应于 Sobolev 正交多项式的渐近行为, 广泛地研究了另一论题. 对上述 Sobolev 内积好奇和深入的观察, 暗示了在渐近行为中测度 μ_1 起着主要作用. 如果我们想平衡两个测度的作用, 我们必须使内积变形: 即, 我们考虑

$$(f,g)_S=\int f(x)g(x)d\mu_0+\lambda_n\int f'(x)g'(x)d\mu_1.$$

当两个测度都具有有界支集时, 只需当 $n\to\infty$ 时取 $\lambda_n\sim n^{-2}$ 即可. 当测度具有无界支集时, 情形变得有趣了. 这时, 对于指数权重, 我们应该选取 $n^2\lambda_n\sim a_{n+1}^2$, 其中 a_n 与所谓的 Mhaskar-Rakhmanov-Saff 数有关.

现在我们来看另一类 Sobolev 内积. 考虑包含在 0 处九阶导数值的一个内积的情形:

$$(f,g)_S=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)g(x)e^{-x^2}dx+Mf^{(9)}(0)g^{(9)}(0). \tag{2}$$

当 $M=0$ 时, 我们即有著名的 Hermite (埃尔米特) 正交多项式 h_n. 它们的渐近式由所谓的 Mehler-Heine (梅勒 – 海涅) 公式给出:

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n n^{1/4}h_{2n+1}(z/\sqrt{n})=\frac{\sin(2z)}{\sqrt{\pi}}.$$

(下转 260 页)

mathunion.org/icm/icm-videos /icm-2002-videos-beijing-china/icm-beijing -videos-27082002. MR1989192

[19] H. Kesten, M. V. Kozlov, and F. Spitzer, A limit law for random walk in a random environment, Compositio Math. 30 (1975), 145–168. MR380998

[20] H. Kesten and J. Th. Runnenburg, Priority in waiting line problems. I, II, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 60 = Indag. Math. 19 (1957), 312–324, 325–336. MR89775, MR89776

[21] H. Kesten and B. P. Stigum, A limit theorem for multidimensional Galton-Watson processes, Ann. Math. Statist. 37 (1966), 1211–1223. MR198552

[22] G. F. Lawler, O. Schramm, and W. Werner, On the scaling limit of planar self-avoiding walk, Fractal Geometry and Applications: a Jubilee of Benoît Mandelbrot, Part 2, 2004, pp. 339–364. MR2112127

图的来源

图 1 由康奈尔大学提供.

图 2 由 Rob van den Berg 提供.

图 3 由 Hugo Grimmett 提供.

图 4 由 Konrad Jacobs 提供. 源自 Oberwolfach 数学研究所档案馆.

图 5 由 Michael A. Morgen 提供.

图 6—9 由 Geoffrey Grimmett 提供.

(苏中根 译　　林正炎 校)

****

(上接 277 页)

对于任一 $M > 0$, Mehler-Heine 公式中的正弦函数对于相应的正交多项式由第一类 Bessel (贝塞尔) 函数的一个线性组合 $b(z)$ 代替. 图 2 展示了这两个极限.

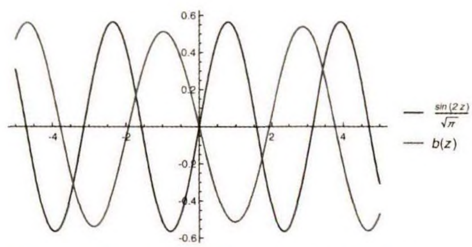

图 2 当包含九阶导数的一项加进经典的 Hermite 正交性时, Hermite 多项式的蓝色正弦曲线的渐近极限被红色的第一类 Bessel 函数的线性组合 $b(z)$ 所替代

我们只是提到了单变量 Sobolev 正交多项式理论的一些基本方面. 在这里, 我们不论及另一些重要的和活跃的论题, 如多变量 Sobolev 正交多项式, 或导数算子改变为其它算子时的 Sobolev 正交性. Marcellán 和 Xu [2] 提供了处理这些论题中的某些论题的一份最新的综述. 我们的希望是想使读者初步了解 Sobolev 正交性这个领域.

参考文献

[1] W. Gautschi, Orthogonal polynomials: computation and approximation, Numerical Mathematics and scientific computation Oxford University Press, 2004. MR2061539

[2] F. Marcellán and Yuan Xu, On Sobolev orthogonal polynomials, Expo. Math. 33 (2015), 308–352. MR 3360352

(陆柱家 译　　童欣 校)