几何，微分方程 非线性

综合报告

(2)

17-24

几何及非线性微分方程的现状与前景

O18

O175.4

丘成桐 成铁 V

因微分方程，代数几何中Calabi猜测，广义相对论中正质量猜测以及实与复的Monge-Ampère方程等方面的工作丘成桐荣获1982年Fields奖.

A 摘要：二十世纪数学发展的主流之一就是多维流形的研究．最近十年，在某些物理问题的数学建模中，譬如说统计力学中无穷多粒子系统的建模中，理论物理学家开始使用无穷维流形的结果．其中的一些对有限维流形也同样适用，或许有朝一日，甚至那些经典的老问题也可以通过对万有模空间直接使用无穷维理论而得以解决.

另一个会有重大发展的领域是奇点的研究．本质上讲，奇点在每个领域里都可能出现．近四十年来，奇点的代数理论已经建立起来，但人们更多关心的是它在与偏微分方程相关的自然系统中的应用.

最后，现代计算机科学也提出了许多有趣的数学问题．可以想象对计算机算法的认识将会导致深刻的数学理论产生.

应邀在讨论会上演讲深感荣幸(*)．谈论整个数学发展的未来是十分困难的，甚至是不可能的．因为数学已不再是一门孤立的学科、数学与其它理论及应用科学的联系日益紧密．因此探讨数学的发展而不涉及其它学科的认真讨论是很难想象的、

另一方面，在当今找一个精通数学各个分支的“全才”已经很难，我们怎敢说对别的学科有足够了解呢？因此，我只想谈论我个人较熟悉的一些分支．譬如说，我将只讨论有几何和分析有关的问题而无力涉及代数，数论，逻辑等话题.

纯数学领域中非线性分析与拓扑，代数几何，数论，群论以及算子代数都密切相关、另一方面，在粒子物理，广义相对论，量子化学逆问题，生物模型，天气预报，信息理论，计算机图形学以及机器人学等研究中非线性分析与几何已成为基本

原题：The Current State and Prospects of Geometry and Nonlinear Differential Equations.

译自： Resarch Today and Tomorrow. Viewpoint of even Fields Medalists. Lecture Notes 1525. Springer.

(*) 原注：因家母病危本人无法参加讨论会．家母于会议前不久辞世，这令我十分悲恸．自家父二十七年前作古后，家母为教养我可谓殚精竭思．谨献此篇以表怀念.

工具.

以下我将从个人兴趣出发就几何与分析的研究现状与发展前景进行讨论. 尽管数学既是门科学又是门艺术，但数学问题的选择却在很大程度上受历史发展过程的限制. 为了解释已知的现象,. 数学家会自己提出一些问题而不考虑其实用性. 这些现象可能来自自然界也可能来自别的数学家的工作. 判断定理重要与否的原则通常来讲要么是它具有漂亮的表达形式，要么是它可以解释物理和工程等学科中的自然现象. 本文中，我们将遵循这一判定原则.

无穷维流形上的分析

二十世纪数学发展中，多元函数或多维流形始终是主流. 其研究要联合使用许多数学工具. 随着多维流形研究的发展逐渐地人们认识到无穷维流形是自然的研究对象.

一个重要而又经典的例子是 Hamilton 力学和 Riemann 几何中周期解的存在性问题. 这一理论可追溯到 Poincarè, Birkhoff, Morse 等人. 其中最成功的例子是关于紧致流形上闭测地线存在性的证明. 通过研究无穷维流形上长度函数的临界点， Morse, Bott, Klingenberg, Gromoll-Meyer 及 Sullivan 等人证明了大多数紧致单连通流形上存在无穷多条闭测地线. 证明中涉及自由圈空间 (free loop space) 的伦型研究. 等变 Morse 理论及退化临界点 Morse 理论也因此而建立了起来. 最近 15 年，山路引理 (临界点理论的一种) 被 Robinowitz 及 Nirenberg 等人成功地用于 Hamilton 力学中闭轨道，半线性椭圆方程解以及双曲方程周期解的存在性研究中.

Hamilton力学中相应问题的研究自然地导致辛几何的临界点理论. 其中有 Arnol'd 关于辛映射不动点个数 (与函数临界点相关) 的猜测. Conley 和 Zehnder 建立了一套漂亮的辛流形的临界点理论. Floer 利用它得到了对一大类辛流形 Arnol'd 猜测成立的证明. Floer 还结合 Lagrange 子流形的相交理论给出了 Floer 同调群的构造. 其中借用了 Witten 关于 Morse 理论的分析解释的想法.

六十年代，Palais 和 Smale 提出了无穷维流形 Morse 理论成立的条件. 遗憾的是除了圈空间的情形外，在许多重要的应用中，我们不能指望 Morse 理论完全成立. 然而就某些具体情形而言，部分 Morse 理论的确成立，而且往往导致新思想的产生. Morse 理论在极小曲面方面的部分应用早已为 Morse-Tomkins 及 Courant 所知. 而 Morrey 及 Sacks-Uhlenbeck 的深刻工作使人们对这部分 Morse 理论有了更深的了解. 此外 Taubes 及 Uhlenbeck 关于四维规范理论的重要工作以及 Gromov 关于辛几何中拟全纯曲线的工作也产生过类似的影响. 这些理论本质上在于解释临界点可能存在而实际并不存在的原因. 建立一个与 Palais-Smale 条件相似的条件来刻画这一现象将是数学的一大发展. 我们希望能推广 Morse 理论以实现临界点空间的紧化并且把理想临界点的贡献具体计算出来.

看起来，人们将来会出于对无穷维流形本身的兴趣而对它们进行研究. 这不足为奇，因为无穷多相互作用粒子的研究本身就很有意义. 事实上，近十年来，理论物

理学家断言许多对有限维流形成立的定理在无穷维时也对. 这种形式上的类似也预言了有限维流形的一些结果. 令人惊讶的是，这些预言都是对的，而且能被间接地证明. 这方面最著名的例子是 Taubes 关于 Casson 不变量的定义以及对 Witten 关于椭圆亏格刚性猜测的证明. 很明显，分析和几何的部分结果能被严格推广到无穷维. 圈空间上 Dirac 算子的谱理论应如何理解？类似这种问题的回答显然要有新的思想提出. 由此会产生有限维流形的许多有趣的问题. 拓扑量子场论，矩阵模型 (matrix model) 以及共形场论的许多方面导致了 3 维和 4 维新不变量的引入，模空间 Chern 示性数的新等式以及代数几何中的一些新问题. 在 Donaldson 用经典方法引进他的不变量之后，Witten 用拓扑量子场论的语言给出了新的解释. 这种解释虽然精妙，但却不能提供经典意义下的证明. 或许有朝一日，即使经典老问题也可用无穷维的理论给出严格证明.

过去二十年来，为了统一四种相互作用力，理论物理学家引进了许多重要概念，其中包括超几何和超对称. 与此同时，也引进了一些无穷维代数或 Lie 群，如 Virasoro 代数，Kac-Moody 代数以及量子群. 这些无穷维的对称性是必须的，因为我们处理的对象是无穷维流形. 这些代数的表示理论不仅对非线性微分方程及几何有广泛而深刻的影响，而且它们在对流体力学及统计力学中完全可积系统的理解也扮演着基本角色. 虽然从经典几何的角度来看，“超几何” 与 “超对称” 的概念仍是个谜，然而它们却导致数学上巨大的发展. 例如，借助这些概念可得到 Atiyah-Singer 指标定理的新证明，也可自然地建立起具有平凡典范丛的紧代数流形的丰富理论. 利用共形场论中的对称性可在代数流形的模空间上建立起意想不到的 “境像对称” 的概念. 特别地，它们也给出了五叶三重体 (quintics threefold) 上有理曲线条数的一个猜想的公式. 这方面的研究目前十分活跃.

现代理论物理为几何的许多研究提供了非常有效的指导. 然而令人费解的是虽然理论物理为数学提供了深刻的直觉，但却很少导致严格的直接证明. 这一点的确十分奇怪. 要揭开这个谜，还有待人们对无穷维流形有更好的了解.

大多数数学中考虑的量子场论要求固定底流形 (underlying manifold) 的拓扑. 例如 Donaldson 多项式就是通过研究给定向量丛联络空间上的 Chern-Simons 泛函而得到的. 但另一方面，量子引力理论中，底流形的拓扑是容许改变的. 然而目前还没有有意义的数学问题允许底流形拓扑改变. 如果将来证明的确存在统一场理论，我们将得到允许拓扑变化的分析和几何理论.

人们一致认为强相互作用和引力理论中，扰动不变的效应是重要的. 但另一方面，这些效应却很难估计，因为需要大量的数值计算，而且当维数趋于无穷时，直接的数值计算是不可能的. 为了确保理论与实践相吻合，理论物理学家必须对计算给予更多的重视. 另一方面，没有好的理论，数值算法的可靠性就很难判断. 因此我们希望有一个无穷多自由度系统的数值算法，使得我们可以用来对物理现象做可靠的预测. 因此无穷维流形的分析应该是非常关键的.

奇点

每个分支都会有奇点的概念.通常当某结构是非光滑的或者是"非通有"(nongeneric)的时候，就会有奇点产生．奇点未必不好．事实上它们能提供整体结构的极有价值的信息．Morse理论就是最好的例子．然而目前几何中仍没有一个关于奇点的完整理论．卓有成效的研究都以嵌入到非奇异空间的几何体做为对象．Euclid空间中由多项式组定义的闭集就自然地包含奇点．而这些点的邻域不能很好地参数化．Hironaka的基本定理说，在此情形下，奇点是可以解消的(resolved).换句话说，通过将奇点替换成适当的低维子簇，就可将该闭集的奇性解消掉.显然这定理十分基本却又应用广泛，但它与微分几何的关系人们即知之甚少，其原因部分地是由于Hironaka所使用的低维子簇不是"典范"簇.

长期以来，始终没有好的上同调理论或者同伦理论来刻画奇异代数流形．十年前，Goresky和MacPherson引进了相交上同调的概念．许多事实表明相交上同调是刻划奇性空间的恰当的上同调理论．由Looijenga及Saper-Stern解决的Zucker猜测即为一个重要的例证．Saper还给出了奇点集的补集上完备Kähler度量的构造并证明了其上的L^2-上同调即为相交上同调．Stern得到了局部Hermite对称空间的L^2-指标定理．而对一大类奇性空间，Tian及作者构造了其上的完备典范Kähler-Einstein度量．人们希望这些度量有好的性质从而具有与局部对称空间相似的L^2上同调和L^2指标.

除完备Kähler度量外，还有一类Kähler度量可以反映奇点的几何特性：即复射影空间上的诱导度量．对于这类度量，目前还没有多少深刻的结果．但由于它们相当自然，所以我们希望对这些度量的谱理论有更多的了解．例如，这些度量下自然的微分算子的L^2指标是什么？

代数几何中，当人们考虑各种结构的模空间时，就自然地得到了奇性空间．这些空间带有自然的度量－所谓Weil-Peterson度量．关于该度量的几何学饶有趣味，而其奇点将会反映这些结构的退化性.

另一类奇点出现在变分问题中．在研究偏微分方程时，为了得到解的存在性，我们将函数空间扩大以便能够使用紧性定理．其中主要的工作是证明这些广义解集合的奇点集要么为空，要么很小、这方面一个重要的例子就是极小子流形的研究.

极小子簇理论深刻且历史悠久.对于2维子簇的奇点已有了很好的了解.尽管还有许多工作要做，但对于曲面面积趋于最小时其拓扑如何变化人们已略有所知，许多3维流形的拓扑问题能转化为面积以某种方式趋于最小的曲面的拓扑变化问题.对于不稳定极小曲面，许多更深刻的问题正等待解决.

对于高维极小子簇来讲，问题将更为复杂．关于其奇点集，我们至多只能说它是一具有确定余维数的闭集．这方面最好的结果属于Almgren.他证明了奇点集是测度为零的闭集．奇点集的结构是个重要且困难的问题．例如，奇点集能否进行三角剖分？对于流形间的调和映射也存在类似的问题．调和映射奇点方面最好的工作属于Schoen-Uhlenbeck.但这一工作还不足以强到可用来证明存在性定理．原因在于我

们不清楚映射能量极小化时拓扑的变化情况.

在使用变分法证明奇点存在性时，常常要对梯度流进行研究. 因此需要考虑抛物方程，尽管我们实际感兴趣的只是椭圆方程，当 Morse 理论部分成立时，抛物方程常常能够提供更多的信息. 然而奇点往往出现在非线性抛物方程中. 事实上，奇点的出现会导致与发展方程的意义相关的许多严重的问题.

相对而言，数量值抛物方程比较容易理解. 而对于向量值发展方程来讲，情形要复杂得多. 当非线性项只出现在低阶项时，有关的文献很多，对于解的性质的了解也比较透彻. 遗憾的是多数自然界和几何中出现的发展方程都包含非线性高阶项. 许多方程同时具有抛物和双曲方程的特性. 从理论上讲，在初始条件无奇性且有很好的渐近性质时，奇点是否会产生是一个基本的问题. 譬如数学中一个著名的问题就是 Navier-Stokes 方程是否有奇点. 即使对 Euler 方程这一问题也无答案，但多数人相信奇点的存在性.

在所有确实存在奇点的发展方程中，空间维数为 1 的气体动力学方程也许是了解最多的一类. Glimm, Lax, Liu 及 DiPerna 等人对此做了杰出的贡献. 然而对于空间维数高于 1 的气体动力学方程，目前还未得到什么研究结果.

近十年来，人们对非线性 Schrödinger 方程进行了透彻研究. Papanicov 等人从理论及数值角度研究了该方程的奇异性. 这也许可以做为研究其它非线性发展方程的一个有用的模型.

几何中有许多非线性双曲方程. 其中多数没人研究过. 即使在空间维数为 1 时问题也很难解决. 原因是特征线是些很难研究的曲线，这种情形在研究 $\mathbb{R}^3$ 中负截面曲率曲面的等距嵌入问题时就会遇到. 当截面曲率变号时，方程成为混合型. 奇点的结构变得十分复杂以致于人们根本无法预测究竟会发生什么.

几何中最为人所知的发展方程是平均曲率曲面方程. 当空间为 1 维或初始曲面为 $\mathbb{R}^n$ 中的凸曲面时， Grayson 及 Huisken 等人证明不会产生奇点. 但其余的情形就会有奇点. 弄清奇点产生的原因很有意义. 目前，关于该方程的广义解还没有普遍接受的理论. Osher 及 Sethian 从 Flame propagation 的角度用数值方法对该方程进行研究. 而 Evans 及 Spruck 则是通过将曲面用高维 Euclid 空间函数的水平集代替来进行理论上的探讨. 很可能在奇点出现后，解的定义取决于我们建立的物理或几何模型. 无论怎么说，这都是个有待研究的大问题.

另一类重要的发展方程由 Hamilton 引进的. 这是近十年来第一个有重大发展的关于 Riemann 度量形变的抛物方程. 这方面的研究将会十分活跃. 其中主要的问题是奇点是如何形成的. 显然这与流形的拓扑变化有关. 除了在一些拓扑问题上的应用之外，这一问题的解决还有助于更好地理解紧流形上典范度量的构造.

奇点研究中的一个非常棘手的问题出现在广义相对论中，时间和空间的拓扑变化导致了严重的困难. 正如 Kruskal 对 Schwarzschild 解的处理一样，明显的奇点可以通过变换坐标克服掉. 除了考察有限时空的奇点外，了解无穷远处奇点的性质也具有同样的重要性，因为它可以刻画时空的动力学特征. 不幸的是，没有一个已知

的 Einstein 方程的显式解显示出动力学特征．这使得我们无法断言，哪怕是部分地断言，引力辐射具有何种性质．另一方面， Penrose 著名的 "宇宙审查" (the cosmic censorship) 猜测断言：通有 (generic) 时空的奇点不可能被彻底了解，这一深刻猜测在数学上和哲学上都有重要意义，但却远没有被证明．

过去人们曾尝试将 Lorentzian 度量解析延拓到 Riemann 度量．即使是在 Riemann 度量非奇异时，许多经典解也带有奇性．这简直是个奇迹．也许它是理解广义相对论奇点的一条好途径．

当今，狭义相对论中最重要的问题是给出具有引力辐射的时空的具体例子．有限和无限距离的奇点结构都同样重要．另一个有趣的问题是给出与弦理论相容的 10 维非奇异真空解．

最后，值得一提的是 $\mathbb{R}^2$ 中非线性映射叠代的奇点构成的漂亮图案．这一问题许多杰出的数学家都考虑过．我们希望这些图案能揭示自然界中出现的奇点．很明显，它们正被成功地用于图形的识别．对几何学来说，能够画出一个漂亮的图形无疑是一种重要的能力．然而目前对这些图形的了解还很少，还需要进行系统的研究．

几何结构的分类

给定光滑流形上几何结构的构造与分类问题始终是几何学的主要问题．许多情况下，我们感兴趣的是何时可用坐标图覆盖流形使得坐标变换属于给定的伪群或 Lie 群．人们最熟悉的伪群是全纯变换群，两个最流行的李群是共形变换群及射影变换群．由于对其它领域的潜在应用，人们将会对许多其它的伪群和李群进行研究．例如代数变换构成的伪群在理解实代数流形中扮演重要的角色．因为在对流形上几何量进行估计时，代数变换的映射度是必须的．

伪群或 Lie 群结构存在性的直接推论是切丛的结构群可约化为其某个子群．结构群能否约化成其子群的问题比伪群结构的存在性容易得多．例如流形上近复结构的存在性并不难验证，但是在给定流形上找一个复结构却要困难得多．

一个基本的问题是： 3 维以上的近复流形是否都具有可积的复结构．另外，如何判断一个复结构是否容许一个 Kähler 结构以及是否每个 Kähler 流形都可形变成代数流形是两个有待解决的重要的经典问题．

Mori 的奠基性工作使得代数几何学家将代数曲面的分类理论推广到高维代数簇．然而，代数曲面的许多问题还没有得到解决．一个基本的问题是哪些光滑 4 维流形具有代数结构．另外，光滑 4 维流形代数结构模空间的刻画也是个基本问题．Donaldson 的漂亮工作就是利用稳定丛模空间的拓扑性质来得到拓扑中的唯一性定理．值得注意的是： Donaldson 的工作是以 Taubes 关于自对偶联络存在性这一基本定理做为基础的．

存在性定理在几何中非常重要．证明存在性的一条途径是使用偏微分方程或者变分法．例如 Hodge 定理就是一个例子．另一途径是采用代数分析的方法． Mori 关于有理曲线存在性的证明是个这样的例子．综合使用两种方法很重要．这方面典型

的例子是 Hirzebruch、Grothendieck 以及 Atiyah-Singer 对 Riemann-Roch 公式的推广

对于一大类代数流形，作者给出了其上的典范 Kähler-Einstein 度量．由此得到的任何几何不变量都是代数不变量．许多有趣的例子来源于对度量的谱的研究．Donaldson 以及 Uhlendbeck-Yau 的工作给出了稳定丛上的典范 Hermite 度量．人们也可以研究这些度量的不变量，这些不变量可用来刻画 Hermite 对称域的商域．我们希望这些一致化定理能有代数的证明，因为它能提供代数流形上代数基本群的一个好的理解．

当具有伪群结构的流形的伪群不变集是子流形时，我们可以讨论流形从其所在流形诱导的结构．其中紧致子流形对于了解其所在大流形的结构很有用处．人们总希望知道同调类是否可用这类子流形来表示．了解和计算这类子流形的交也同样重要．著名的 Hodge 猜测就是尝试用代数链来刻画同调类．具有平凡典范丛的代数三重体上"镜像对称"研究的最新进展给出了计算有理曲线条数的方法．这一方法依赖于超对称的存在性，而这一存在性又依赖于 Ricci 曲率为零的 Kähler 度量的存在性．

研究具有诱导结构的子流形自然地导致人们寻找具有特定结构的纤维丛．而纤维丛的满足某些性质的截面就是所求的链 (cycles)．拓扑向量丛上给定结构的存在性是个基本的问题．如果该结构是全纯的，则存在性的必要条件是所有 Chern 类都是 (p,p) 型的．反之，如果一个拓扑向量丛具有上述性质，则人们猜想在加上一个全纯向量丛后，得到的全空间将具有全纯结构．我们将上面的猜测看作推广的 Hodge 猜测．

当结构群是非紧致 Lie 群时，它与作用在流形上的非紧 Lie 群理论紧密相关．该理论也与具有以非紧 Lie 子群为和乐群 (holonomy group) 的联络的向量丛的研究有关．两方面的研究目前都很活跃．其中 Margulis 的著名工作最为突出．他的方法已成为近 15 年研究非负截面曲率流形上离散群作用的基本工具．

Thurston 的 3 维流形一致化 (uniformization) 定理是流形上 $SO(n,1)$ 结构的存在性定理．这是在给定拓扑条件下，关于 G- 结构存在性的最好的定理．将定理条件减弱或者将结论推广到高维都将是十分重要的工作．在证明给定拓扑条件下的存在性定理时 Thurston 的方法将是重要的指南．

许多年前，作者率先使用调和映射的方法来处理流形上离散群作用和复结构的刚性问题．Siu, Sampson, Eells, Corlette, Gromov, Jost, Schoen, Carlson-Toledo 等人先后成功地继续了作者的工作．另外在 Yang-Mills 联络研究方面， Donaldson, Uhlenbeck-Yau 以及 Simpson 都做过贡献．我们希望将来会有更多的解析方法来研究离散群．

最后我想指出几何上一个最迷人的结构是 Einstein 度量的存在性．除了一些特殊类型的齐性 Einstein 度量或者 Kähler-Einstein 度量的构造外，对于一般的 Einstein 度量还没有办法．这一状况很不令人满意，我们甚至无法推测应该如何处理这一问题．原因是我们对于 Einstein 度量的几何性质所知甚少，尤其是在数量曲率为负的时候．有关其曲率满足被两个常数夹挤的度量空间的文献有很多．我们希望这最终

会导致对存在性定理的新认识.

经典微分几何

很遗憾，$\mathbb{R}^3$ 中曲面理论这一优美的课题近 20 年来没有被很严格地讨论过. 以 Alexandrov, Pogorelov 及 Effimov 为首的俄罗斯几何学家对其中的经典问题的研究曾做过许多贡献. 而计算几何, 工程力学的发展将会明显地刺激这一理论的进一步研究.

围绕 $\mathbb{R}^3$ 中曲面的弯曲状况有许多困难而有趣的问题. 其中最著名的一个是闭曲面等距形变的可能性问题. Donnelly 给出了无边界逐片线性情形的例子. 但光滑情形的例子还尚未发现.

当曲面的曲率为负或者变号时，曲面的等距浸入问题将面临巨大的困难. 原因部分地在于我们缺乏非线性双曲方程方面的知识. 就等距浸入问题而言，是由于我们不了解渐近曲线的行为. 这方面最杰出的工作是 Effimov 关于 Hilbert 定理的推广. 该定理说强负曲率曲面不可能完备. 这些曲面的奇点集很难刻画. 人们猜测奇点集无法孤立.

尽管 C.S. Lin 关于 non-negatively curved 曲面等距嵌入的定理很漂亮，但还不能说人们对局部等距浸入已经有很好的了解.

对于凸曲面，俄罗斯几何学家发展了一套完整的理论. 人们希望这些理论可以推广到非凸曲面. 变分法在曲面，特别是极小曲面，毛细曲面 (capillary surfaces) 以及常平均曲率曲面的研究中卓见成效. 对于常平均曲率曲面， Wente 证明了著名的 Hopf 猜测. 估计这方面的进展还会有很多.

更高维的子流形研究起来要困难得多. 除了有名的 Nash 等距嵌入定理外，我们还不知如何以优雅的方式将高维子流形等距嵌入到抽象流形中. 要做的工作还很多.

人们非常希望能将一个抽象定义的结构嵌入到以经典方式定义的简单空间中来表示. 就 Nash 嵌入定理而言，它不仅漂亮，而且实用. 例如，为了定义流形间的弱可微调和函数， Morrey 需要将象流形等距嵌入到一个 Hilbert 空间，因为那时还没有 Nash 嵌入定理. (Morry 的想法有其独立的意义，后来它被 Gromov 用来定义几何不变量) 但是 Nash 定理不能控制那些与内蕴量有关的外在量. 另外，"刚性" 的意义也远没被人们所了解.

在代数几何中也有类似的情况， Kodaira 嵌入定理给出到 $\mathbb{C}P^n$ 的嵌入. 但其定义方程即使对许多简单的内蕴定义的代数流形来讲也没有很好的理解. 在流形为复流形或者 Kähler 流形时，我们甚至找不到一个理想的嵌入流形，更谈不上将它们识别出来.

(成斌 译　邹建成 校)