综合报告

二十世纪的拓扑学 (II)

S. P. Novikov

8. 拓扑中的连续同胚

连续同胚 [1] 问题在拓扑中有特殊地位. 对拓扑同胚或同伦等价中所有光滑映射而言, 微分同胚是稳定的,[2] 但在所有连续映射中连续同胚却是不稳定的. 例如, 如果不对导数加以控制 (或者导数不存在时), 在一个小的随机扰动下, 一个双射就可以不再是双射. 这使得连续同胚问题特别困难. 最后的分析表明对光滑的单连通闭流形而言, 在维数为 2, 4, 5 时, 同胚与同伦等价是一样的, 并且对维数为 3 可能也对 (Poincaré 猜想). 对 $n = 4$ 这就是 Freedman 定理 (1984); 而对 $n = 5$, Novikov 1964 年证明, 它们甚至是微分同胚的. 但是, $n > 5$ 的情形却与此不同了. 此时, 将同胚与同伦型区分开的主要量是 Pontryagin 类在闭链上的积分, 1965 年 Novikov 证明了这是拓扑不变量 (见下文).

20 世纪的很长一段时间中, 拓扑学都有一个前提假设, 即所有重要的拓扑学定律在连续同胚下都是不变的. 然而, 在定义一些重要量的时候, 却总要用到其它的结构, 例如, 在 Poincaré 的时代, 同调群与基本群的严格定义都要用到组合技巧 (比如细分成单形及将空间表为单纯复形), 后来的 Reidemeister-Whitehead 挠率的定义也要用到组合技巧. 在 1930 年代 Whitney 的发现之后, 人们才有可能使用光滑结构了, 作为光滑结构的不变量引进了 Stiefel-Whitney 示性类与 Pontryagin 示性类, 它可以表成 Riemann 度量的某个表达式在闭链上的积分, 也可表示成向量场或张量场奇点组成的闭链, 还可通过 Gauss 映射的奇点来表达. 拓扑学作为一门精确科学, 是在组合基础上建立起来的, 自它存在之日起, 就有人断言, 连续同胚的单纯复形一定组合等价 (若是逐片线性流形则一定逐片线性等价), 这就是组合拓扑学的基本猜测, 即所谓 “Hauptvermutung” (主猜测). 对连续同胚的光滑流形也有一个类似的猜测, 即它们一定微分同胚, 这在 1956 年被 Milnor 否定了 (见上文). 事实上, Milnor 揭示了光滑结构与逐片线性结构之间的差异: 在维数 ≥ 7 时, 存在逐片线性同构的光滑流形, 它们并不微分同胚. 当维数 ≥ 8 时, 存在有这样的光滑流形,, 它上面没有任何的光滑结构, 某些这类流形可在射影空间中用只有单个孤立奇点的一个复方程来定义.

1958–1965 年间, 几位作者 (Thom, Munkres, Hirsch 及其他人) 定义了障碍群, 它是以某个有限 Abel 群为系数的上同调群的子群. 这个系数群就是球面微分同胚群对那些可以扩张到球体的微分同胚所成子群的商群. Milnor 与 Kervaire 发现, 除了四维以外,

原题: Topology in the 20th Century: a View from the Inside. 译自: Russian Math. Surveys, Vol.59 (2004), No.5, p.803–829.

1) 以下所说的拓扑同胚与连续同胚含义相同, 即映射本身及其逆皆为连续映射. —— 译注

2) 连续同胚即通常的同胚, 作者特别标出 “连续” 二字, 或者意在强调与微分同胚或逐片线性同胚的不同. —— 译注

在其它的维数，这个障碍群就是球面上光滑结构所构成的群. 剩下一个四维的障碍群，1966 年被 Cerf 找到了，它等于零. 就是说，对维数 ≥ 5 的流形来说，模掉一个有限数以后，光滑范畴与逐片线性范畴是等价的. 在这种情况下，相关的拓扑猜想就“差不多是正确的”. 高维流形的整系数上同调中，虽然 Pontryagin 类在闭链上的积分，如上面指出的那样，是组合不变量，然而 Pontryagin 类的某些挠部分却不是逐片线性不变量. 因此，就使用的方法与得到的结果而言，逐片线性流形的理论看上去与光滑理论非常相似，它们都用到了横截性及其类比概念，用了向量丛及其类比概念，等等. 如果将向量丛换为 Milnor 的所谓逐片线性微观丛 (microbundle)，则 Browder-Novikov 分类定理也很容易搬到逐片线性流形上去.

纯粹的连续同胚又怎样呢？在小维数的时候，任何连续同胚都可以用逐片线性同胚来逼近，甚至能用微分同胚逼近. 对三维流形，这一结果是 Moise 在 1950 年代早期证明的，而且这是用直接的初等方法所能得到的最强的结果. 大约 1960 年，M. Brown 与 Mazur 在高维时候证明了一条与三维 Schönflies 定理[1)] 类似的结果，即，嵌入到 n 维欧氏空间的一个 $(n-1)$ 维球面，如果它的边界是“温良”的话，即局部看起来是与单位区间的直积，那么它就是某个 n 维圆盘的边界. （即使在三维，“温良”这一条件也不一定总被满足，例如 Alexander“粗野嵌入”的长角球面.）用漂亮的初等方法，Mazur (1960) 还证明了，假定两个闭流形伦型相同，它们的切丛伦型也相同，那么在乘上一个高维欧氏空间以后彼此微分同胚，当然，它们本身不一定微分同胚. Milnor 指出，将这些方法用到透镜空间上，就可以否证主测猜. 他证明了，如果同伦等价的透镜空间 (三维透镜空间总是可平行化的) 有相互不同的 Reidemeister 行列式，则其上的丛是等价的，然而丛的 Thom 空间相互同胚但不组合等价. 例如，对平凡丛来说，Thom 复形是如下得到的：将透镜空间与 n 维圆盘做直积，然后将圆盘边界缩成一个点即可，这样就得到一个奇点. Reidemeister 挠率“模掉一个奇点”之后就是一个组合不变量，而对于透镜空间，它正好就是 Reidemeister 挠率，因此，这些同胚的复形确实具有不同的组合类. 这种方法给出了维数 ≥ 6 的复形的例子. 此外，Milnor 还猜测，假如一个三维流形是同调球面，则对它作 double suspension，结果必同胚于五维球面. 这个猜想 15 年后在 1970 年代为 Edwards 所证明. 他用几何方法直接构造了一个同胚，它基于 Shtan'ko 发展的“粗野嵌入消解 (即性质良好的逼近)”的构作方法. 不用说，这说明五维球面有极为复杂的三角剖分，它甚至还可以不是一个逐片线性流形. 当然，这些与通常五维球面的标准三角剖分是不组合等价的.

然而，光滑流形与逐片线性流形最重要的不变量又怎样呢？上面讨论的反例都不是逐片线性流形. 已经说过，同调群与同伦群都是同伦不变量. 闭流形的 Stiefel-Whitney 类也是同伦不变量，所以无法区分同胚型与伦型. 上面还说过，Pontryagin 类在闭链上的积分一般不是同伦不变量.

1964—1965 年， Novikov 发现了一个全新的方法来研究连续同胚，这使他得以证明

1) Schönflies 定理应属二维拓扑的范畴. —— 译注

Pontryagin 类在闭链上的积分是拓扑不变量，即对光滑流形与逐片线性流形作纯粹连续同胚变换之后，它们保持不变．这个新方法的基础是 Pontryagin-Hirzebruch 积分在流形某些特殊的"环体"区域上作局部化，以及继之发展起来的深刻的代数拓扑与微分拓扑技巧，它们本是用来研究具有自由 Abel 基本群的环体型流形的．比如说，在某些特殊的情况下，需要证明环体型流形的 Pontryagin 类是零．

这一方法在概念上与 Grothendieck 的"étale 拓扑"有联系．后者起源于 1950 年代后期至 1960 年代早期，目的在于对有限特征域上的代数簇定义合适的同调理论，它利用 Zariski 拓扑中开集上覆盖的范畴来组成 étale 拓扑．此后，关于连续同胚拓扑的所有深刻结果都用到了这一方法或其后续发展．从 Pontryagin 类的不变性可以推出，任何维数 ≥ 5 的单连通闭流形上都只有有限个光滑结构或逐片线性结构．这个方法的发展也导致了以下结果的证明 (Sullivan, 1967)：一个维数 ≥ 5 的单连通流形，若其三维同调中没有 2 幂的挠元，那么，对这个流形主测猜成立．很奇怪的是，Sullivan 起初没有注意到需要后面那个关于三维同调的限制条件，而是由 Novikov 与 Browder 向他指明的．无疑，这件事说明，这些结果当时还处于一种粗糙原始的状态．应该注意的是，Sullivan 理论还没有完全严格的文字整理材料．虽然，后来这一理论的许多部分被不同的作者证明并发表，比如，Madsen 与 Milgram 用不同的想法在 1980 年代得到了同伦论中必需的结果，又比如，用 Quinn 在 1980 年代发展的技巧可以得到一系列其它必需的结果，但是，在现有的文献中还没有一个 Sullivan 理论完整统一的证明．

较弱一些的定理可以更简单地证明，其形式也更完整，比如，主测猜对 3- 连通流形成立 (Lashof 与 Rothenberg, 1968)；即使对单连通流形，只要它的三维同调群模 2 平凡，主测猜也成立 (Casson, 1969, 证明很久以后才发表)．关于连续同胚的所有这些结果都基于 Novikov 引进的环体构造法．1968 年 Kirby 改进了环体构造法，并将它漂亮地用来解决了著名的"圆环问题"，即证明欧氏空间中两个"温良"球面之间所界的区域一定同胚于柱体 (即 $n-1$ 维球面与闭区间的乘积)．在光滑的情形，这由维数 ≥ 6 的 Smale 定理推出，然而纯粹连续的情况却很困难．Kirby 的方法将这一问题转化为与 n 维环面伦型相同流形上的光滑结构理论，不过这些同伦环面要求满足比 Pontryagin 示性类理论中更多的条件，因为我们要证明的不仅是它们都可平行化，还要证明，过渡到充分大的多重覆盖时，它们之间就不再有差别了．这个证明在维数 ≥ 5 时由 Siebenmann 完成．Kirby 的方法导致了一系列很强的结果．在 Chernavskii 关于流形连续同胚群是局部可缩的定理的基础上，1960 年代后期，Kirby 与 Siebenmann 使用拓扑中长期积累的全部方法，证明了对高维逐片线性流形主猜测不成立．在它们的工作中，用来区分两个流形的不变量取值在三维同调的 2 幂挠元部分．它来源于所谓的"Rokhlin 加倍"，即在计算 n 维球面的 $n+3$ 维同伦群阶数时 12 与 24 之间的深刻差别，上面已经提到过 Rokhlin 在计算时犯了错误．1970 年代，在 Farrell 与 Hsiang (1968) 结果的基础上，Kirby 与 Siebenmann 构造了连续流形的分类理论．不过，与圆环问题及否定回答主测猜时不同的是，后一项工作依赖于上面提到的 Sullivan 理论，因此他们完整的证明还没有存在于现有的文献中．

1970 年代中期，Sullivan 提出一个有趣的想法：他提出了在流形上构造 Lipschitz 结

构的方法，以及在纯粹连续流形上这种结构存在并且唯一的一个证明提纲 (这要用到圆环问题的解，因为这个事实怎么也无法认为是初等的). 但是，这些定理的证明却从来没有完整地写出来过. 随后, Sullivan 与 Teleman 一道, 1990 年代后还加入了 Weinberger, 他们开始在 Lipschitz 流形上构造分析与算子理论. 他们的理论可以导出 Pontryagin 类拓扑不变性的一个证明，作为这个理论的一个副产品，Novikov 在 1970 年对 Pontryagin 类中同伦不变表达式的分类做出了一个猜测，它们就是 Pontryagin-Hirzebruch 多项式在一些闭链上的积分，这些闭链对偶于那些在基本群之上的上同调类 (这就是 Novikov 猜想，或称高维符号差猜想). 由 Lusztig 的工作 (1971) 出发，许多作者在这个问题上用几何方法与泛函分析的方法得到了深刻的结果，这中间有 A. Mischenko, Kasparov, Gromov, Connes 以及其他人. 迄今为止，这一猜想仍未完全解决. 1974 年, Chapman 用初等几何的方法漂亮地证明了 Reidemeister-Whitehead 挠率的拓扑不变性. 1980 年代与 1990 年代, Lawson 和 Gromov 对正常值曲率的单连通流形发现了极为有趣的性质，并且存在具有这种性质的度量是一个 spin 配边不变量. 在非单连通的情形，类似于 Novikov 猜想，有 Lawson-Gromov-Rosenberg 猜想，在其中 Hirzebruch 多项式换成了 Dirac 算子理论中出现的 A-亏格. 1990 年代，Kreck 与 Stolz 成功地应用配边理论来解决几何问题.

回来讨论代数拓扑与同伦论的问题，应该提一下一个漂亮的一般范畴论的构造，即同伦型的所谓 "p 进局部化" (不仅是稳定同伦型，而是所有单连通复形，甚至更一般的空间). 这个构造是 Sullivan 与 Quillen 在 1970 年左右提出的，这使他们得以证明上面提到过的 Adams 猜想，这个猜想将稳定向量丛的纤维同伦等价类所成群的阶数用 K 理论中的 Adams 运算表出来，对于拓扑中的分类问题十分要紧. 在这个构造中，起决定作用的是 Grassmann 流形可用代数的方法在整数上定义这一事实. 这一方法的一个奇特之处在于，性质上是一般范畴论的构造却可用来解决具体应用中的困难问题. 近几年，同伦论中出现了一系列很有价值的结果，包括 1970 年代发现的一个非平凡有限维 H-空间，即它既不是 Lie 群，也不是七维球面 (Hilton 与 Mislin); 也包括 Nishida 关于球面稳定同伦环的任意元素都是幂零元的证明；以及多位作者基于配边方法做出的一系列很有价值的构造与计算，这些作者包括 Wilson, Ravenel, Buchstaber, Merava 与 Miller.

1970 年代出现了有理同伦型与实同伦型的 "极小模型" 理论，这是一个有用的纯粹环论性质的理论, Sullivan 成功提出这一理论的出发点是复形上的 Whitney-Thom 单纯微分形式环 (单纯微分形式就是一族定义在每个单形上的微分形式，它们限制到公共面时结果相等). Sullivan 指出，有一个有理系数的子环是由函子性条件决定的. 这就导出了一个有理同伦型模型. 在研究许多具体流形的拓扑时，这成了一个有效的工具，例如，Kähler 流形 (在 Deligne, Griffiths, Morgan 与 Sullivan 的一项合作工作中证明，此时有理型的权由上同调环所决定), 齐性空间，等等.

此前的若干年, Chen 提出了有意思的分析想法，即在微分形式环中利用 "迭代积分" 来写出从圆周到流形映射的同伦不变表达式，这在 1950 年代就有了, 1970 年代后期他又将这推广到从球面到流形的映射. 在同伦型的环论理论框架中，这些问题都可得到自然的处理.

在这里也有有趣的代数构造与代数问题，它们与 1984 年 Novikov 为了场论中的需要所提出的一个问题有关，这个问题就是如何刻划由分析条件给定的光滑微分形式环的有理积分. 我们注意到，这种类型的积分最初是 1950 年代 Whitehead 在研究球面同伦群的 Hopf 不变量时提出来的，他当时的背景是 19 世纪涡旋流体力学中的 Kelvin 积分.

为我们对经典代数拓扑极盛时期 (即 1950 年代与 1960 年代) 的报告总结一下，我们看到在随后的 1970 年代与 1980 年代也得到了大量深刻的结果. 但是，拓扑学家的圈子对于他们的想法在数学其它部分的意义越来越不关心，他们的兴趣与领域越来越狭窄，他们的语言越来越孤立而抽象. 而且，象上面指出的那样，该学科中甚至是最好的结果都没有严格的证明，而圈子中的人对此并不在意. 尽管一些中心的定理没有证明，但后代学人对此甚至毫不知晓，还在盲目地 "信任经典结果"，这一点无疑证实了该学科的水平正在下降.

应该指出，1950—1970 年这一时期的经典代数拓扑，除了一些孤立的例外之外，并没有写入可为大众接受的教科书中，已有的书籍或者只提了一下开始的阶段，或者难以想象的抽象. 研究这一学科最好是从原始文献入手，它们写得既清楚又详细 (在 [1] 与 [2] 中可以找到一份原始文献的目录). 在本文最后，我们列了几本书 [3]—[11]，这些书比其它绝大多数书籍都更加好读一些.

下面将看到，在 1985—1995 年间，拓扑学经历了另一个上升的时期，其动力来源于全新的想法，起主导作用的是来自量子理论世界的想法与人物.

9. 低维拓扑与双曲拓扑

低维拓扑起源于 1950 年代，始自 1957 年 Papakyriakopoulos 对所谓 "Dehn 引理" 的证明. 第一个试图证明这个引理的是 Dehn 本人，不过他在 20 世纪初做的那个证明却含有一个大漏洞. 这个定理断言，如果三维空间中一个纽结补集的基本群是交换群 (循环群)，那么这个纽结是平凡的. 与此同时， Papakyriakopoulos 还证明了 "球面定理"，它说，如果一个三维流形的二维同伦群非平凡，则它包含一个同伦类非平凡的嵌入二维球面. Milnor 指出了这一结果的一系列漂亮的推论，其中之一是，三维球面中所有纽结的补集都是非球面状 (aspherical) 空间. 任何闭三维流形都可表为一些 "基本" 三维流形的连通和. 在可定向的三维流形中，基本流形有二维球面与圆周的乘积，具有有限基本群的流形，以及具有可缩万有覆盖的流形. 1960 年代， Haken 与 Waldhausen 构造了一套深刻的三维流形结构理论，并在三维流形中构造了特殊的 "不可压缩" 曲面. 1960 年代后期， Waldhausen 证明一个纽结的拓扑型完全由基本群及它的一个特殊的交换子群所决定. Haken 构造了一个算法，它可以决定一个纽结是否平凡，然而很长一段时间内都没人能将它付诸实施. 于是，开始一个研究计划，目标是要证明，两个纽结同构与否这个问题是算法可决定的. Haken 的很多后继者介入了这项研究，但截至目前还是有一些漏洞. 很有可能，在 21 世纪初的时候，Matveev 利用他的三维流形复杂性理论成功地完成这项计划，不过他的工作至今还没有人检验. 1990 年代，利用 Haken 理论的方法，Rubinstein 与 Thompson 构造了一个算法可用来区分三维球面.

有一个很困难的研究计划，它的主要想法最初由 Casson 提出，就是要修改 Smale 对高维情形的证明方法，象处理无穷收敛级数一样处理它们. 在 1970 年代结束的时候，M. Freedman 成功地完成了这项计划. 最后能够证明，两个单连通的四维闭流形，若伦型相同，则必连续同胚. 特别，这证明了纯连续情形的四维球面的 Poincaré 猜想. 待会儿我们要讨论四维流形的微分同胚问题，这方面目前还只有否定性的定理，即流形并不微分同胚 (见下文). 在肯定性定理的方向上还看不出有可能取得进展. 在与拓扑学相关的结果中，1980 年代后期有 Appel 与 Haken 的著名定理，它证明了关于一个有限平面地图可以用 4 种颜色着色的古典猜想. 这项工作中一个突出的特点是在数学证明中使用了计算机来进行计算，用当时的标准来看，这是一项巨大的工作.

1970 年代，Thurston 发现许多三维流形都有常负曲率的度量. 特别这适用于许多纽结的补空间，假定这个补空间可以由 Lobachevsky 三维空间 ("双曲空间") 的一个离散运动群而得到，要求这个离散群的一个基本域的体积是有限的. Thurston 发展了深刻的方法来研究与构造双曲流形. 他提出了 "几何化猜想"，粗略地说，他猜测如果没有任何明显障碍的话，则三维流形都有常负曲率的度量. 对闭流形来说，这意味着它的基本群是无限群，不能分解为自由积，并且所有交换子群都是循环群. 这个结果可能会否证 Poincaré 猜想，由于担心这一点，所以我们修改一下，说此时流形必定同伦等价于一个负曲率流形. 但是，Thurston 本人的猜想比这要一般得多. 对于一类特殊的 "Haken" 流形，Otal 实现了 Thurston 的想法，他在 1990 年代对这种情况给出了完整的证明. 这个猜想在其它很多特殊情形也被证明了. 顺便提一下，纽结的补集都是 Haken 流形. 有很多专家发展了这些想法.

Goldman 在研究 Riemann 曲面模空间时，作为一项副产品，在曲面的闭道路同伦类集合上发现了一个奇怪的 Lie 代数结构. 研究 Riemann 曲面上模空间与向量丛的拓扑是现在正在进行的一项深刻工作，它涉及的想法我们还没有加以讨论.

再回到纽结与环链的理论，我们注意到就在最近，进入到 21 世纪之后，对纽结与环链的分类问题，Dynnikov 发展了一个全新的代数方法，将纽结与环链表成一本 "有许多页的书" (即一些半空间沿一个公共轴粘在一起)，并且书的页数 $k \geq 3$. 这样一种表示法 100 年前就有了，但是 Dynnikov 发现了一个重要的代数性质，将分类纽结与环链问题化成了计算一个有限生成幺半群中心的问题. 在群论的框架中，这样的问题是没法做的. 在此，得到了一个能区分平凡纽结的算法，它惊人地简单明了，由此还得到关于辫子群的很多推论. 看起来，这是一个极为成功的方法.

最近，Perel'man 推出了一系列预印本，据称是证明了 Poincaré 猜想. 在对 "Ricci 流" 的分析方法适当修改以后，可以在同伦三维球面上引入一个正曲率度量. 很多顶尖的专家确信，在这些预印本中含有极其有意思与有希望的想法. 目前，我们还不知道，这些想法能否导致预期的结果.

应该注意的是在 1980 年代与 1990 年代早期，纽结理论与三维流形理论中出现了重要的概念性进展. 1984—1985 年左右发现了纽结的重要的多项式不变量，例如 Jones 多项式及其推广 (例如 HOMFLY 多项式)，它们给经典的 Alexander 多项式带来了新的认识.

很快 Turaev 就指出，如果在 Alexander-Markov 模型的框架下，通过辫子群的一系列原创性的表示，Jones 多项式一类的多项式不变量的构造变得更加自然，因为它们可以从所谓 "Yang-Baxter" 方程的某些特殊解来构造 (这个方程出现在统计物理与量子场论的精确可解模型中)，在所考虑的情况中，这些解恰好就是辫子群的表示．用 Jones 多项式的几何性质证明了 19 世纪末期 Tait 的一个猜想 (Kauffman 与 Murasuqi, 1987)，即除了平凡的情形以外，交替纽结图中交点的个数是一个拓扑不变量．这一结果用经典代数拓扑的方法是不能证明的．1980 年代后期，有限阶 "Vassiliev 不变量" 理论引起许多拓扑学家的关注．1992 年底，Kontsevich 对特征零域上的 Vassiliev 不变量做出了完全分类，他的方法受到量子场论中想法的启发．一个拓扑不变量在 Vassiliev 意义下 "具有有限阶" 这样一个性质，是一个很有用、很一般的概念．Bar-Natan, Birman 与 Lin 在 1990 年代早期证明了，Alexander 多项式、Jones 多项式及其推广多项式的系数都是这种类型的多项式．

1980 年代后期，Witten 注意到可用量子场论的方法来处理 Jones 多项式，将它表为著名的 "Wilson 环路" 的关联函数，Wilson 环路与 Yang-Mills 场论中的闭曲线有关．在所考虑的情形，我们有一个三维的 Yang-Mills 理论，它具有一个很特别的 "拓扑" 作用泛函，即所谓 Chern-Simons 泛函．拓扑量子场论中的想法有一段奇怪的历史．1970 年代早期，Singer 与 Ray 开始发展椭圆算子行列式理论，并用分析方法处理 Reidemeister 不变量，Atiyah 将这一方法弄完备了．许久以后，到了 1980 年代，Müller 与 Cheeger 利用微分形式上 Laplace-Baltrami 算子的单纯逼近，证明了解析的 Ray-Singer 挠率与组合的 Reidemeister 挠率的确是一样的．

1970 年代末，A. Schwarz 提出了这样一个问题：能否象量子场论那样，通过在所有场上的一个作用泛函的积分 (且不管这是什么意思)，来构造流形的拓扑不变量，并且使这个作用不依赖 Riemann 度量的选择？他考虑了三维流形上一次形式的最简单的 Abel 规范理论，具有 Kelvin-Whitehead 作用 (即 Hopf 不变量的密度)，其中规范变换是在一次形式上加上一个不改变作用的恰当因子．在系统地研究这个规范场理论 (包括构造 Faddeev-Popov "鬼怪") 的时候，Schwarz 证明在其中所产生的量确实有意义，它就等于 Reidemeister-Ray-Singer 挠率．在与 Faddeev-Popov "鬼怪" 有关的规范不变场论中，行列式理论变得十分流行起来．

1980 年代末，Witten 开始积极发展不同流形上的拓扑量子场论，特别是在二维，三维与四维．对三维流形上最简单的非交换场论，即具有 Chern-Simons 作用泛函的 Yang-Mills 理论，Witten 发现，当所谓 "Wilson 环路" 有定义的时候，它就与纽结的 Jones 多项式相同．我们不去深入讨论这一理论，只提一下 Atiyah 与 Segal 对它给出的纯粹拓扑的公理化描述，它说，任何一个这样的称作 TQFT 的 "理论"，都给每个 $n-1$ 维定向流形配上一个有限维欧氏空间，并给两个流形的并配上它们的张量积．对每个 n 维定向有边流形，在相应的欧氏空间中指定一个特异向量来表示具有诱导定向的边界．假如边界有好几个分支，则相应的特异向量表示成张量积，带有张量指标．如果将两个带边流形沿着某个边界分支粘合起来，那么，将原来的两个特异向量对应于公共分支的所有指标做卷积 (convolution)，得到的张量积就是新的特异向量．在经典拓扑中，已知的例子仅有

两个. 在这两个例子中，空间都是一维的，而特异元或者是带边流形 Euler 数的指数 (对 $n = 2k$), 或者是它符号差的指数 (对 $n = 4k$). 将带边流形沿一个边界分支粘合时，其 Euler 数是可加的；而 Novikov-Rokhlin 引理 (1965—1966) 说明，其符号差也是可加的. 根据 Jänich (1967) 的一个结果，这个可加性可以作为一条公理来决定这两个量. 这个事实说明在 TQFT 公理化描述中，对粘合时行为的规定是合理的. 空间维数大于 1 的 TQFT 只出现在现代量子理论中. 从 TQFT 可以得到新的拓扑不变量，例如对三维流形来说，若将它表成为两个带边流形沿一个公共分支的粘合，则特异向量的内积就是一个拓扑不变量. 用组合方法来有效构造一个 TQFT 不是一个容易的问题. 在某些情况下，这个问题在 1990 年代已被 Turaev-Reshetikhin 与 Viro-Turaev 解决，他们构造了著名的三维流形 "量子" 拓扑不变量，可以看作是 Witten 连续统积分的精确定义. 如果我们能成功地理解这些不变量与流形的拓扑性质及经典代数拓扑之间更深层的联系，那么这些量应该能得出极为重要的拓扑应用.

10. Morse 理论中的新思想

与现代数学物理及理论物理的相互作用，在变分法的拓扑方面引入了一系列新的想法. 1981 年，从经典力学系统的 Hamilton 表述 (例如，引力场或者理想流体中的陀螺) 以及拓扑非平凡磁场中带电粒子运动理论出发, Novikov 提出，用一次闭形式取代单值函数来构造一种类似于 Morse 理论的理论. 对于这种高维场论中局部 Lagrange 函数 (即 Wess-Zumino-Novikov-Witten 作用) 他给出了分类，并给出了 "耦合常数拓扑量子化" 的条件，这个条件是为了使 Feynman 振幅 (作用的指数函数乘以虚根单位) 为单值泛函而提出的. 因此，该作用的变分应该是场空间上的一个一维整系数上同调类. 这是磁单极场中粒子的 Dirac 量子化条件的另一种表述方法，不过不是用 Schrödinger 量子化的框架来表述的，而是用现在广泛接受的 Feynman 量子化条件来表述，因为这种形式可以方便地推广到高维. 在考虑多个粒子系统时, Deser-Jackiw-Templeton (1982) 与 Witten (1983) 得到类似的想法. 对于有限维流形上的一次形式，Novikov 发展了一套类似于 Morse 理论的理论 ("Morse-Novikov 理论"). 在这个理论中，若使用系数环为所谓 Novikov 环的上同调，则有类似的关于临界点个数的 Morse 不等式 ("Morse-Novikov 不等式"). 最简单的 Novikov 环就是单变元的整系数有限阶 Laurent 级数环. 这一理论是由 Farber 发展的 (1984), 他证明了在某些条件下这些不等式是非常精确的 (Sharp)(这类似于 Smale 的一个定理). 对磁场中的粒子来说，在环路空间上构造 Morse-Novikov 理论是非常困难的. 对多值泛函, Novikov 与 Taimanov 提出并使用了 "删除闭链原则", 但只在几个特殊情况下这样做的合理性才得到严格的证明.

很久以后, 起始于 Floer 关于 Arnold 猜想 (这是关于紧辛流形上周期依赖于时间的非自治 Hamilton 系统的周期轨道个数的一个猜想) 的工作 (1988), 辛拓扑中实际上也出现了多值泛函，尽管人们一开始并没有认识到这一点. 紧辛流形上的 Hamilton 变分原理总是会导致与 Novikov 工作中同样的情况，即作用泛函总是多值的. 这一理论在 MacDuff, Salamon 与 Hofer 的后续工作中 (1990 年代早期) 得到极大的发展. 我们不再进一步讨论

辛拓扑与接触拓扑中极为深刻的方面，比如 Gramov-Witten 不变量，Hofer- Eliashberg-Givental 理论，镜象对称，等等.

1982 年, Witten 提出了一个独创的分析方法来证明通常的 Morse 不等式. 他的想法导致了丰富的成果，但在此我们不去讨论细节. Pazhitnov 将 Witten 的方法用到上面讨论过的关于一次闭形式的 Novikov 问题 (1987). Novikov 试图将此方法也用于非闭的形式 (向量场). Atiyah 与 Bott 成功地将 Witten 的方法用到全纯向量场上，但这一主题将把我们带离本文的主题太远.

1980 年代, 利用基本群的表示流形, 对于非单连通流形的 Morse 理论 (Novikov, 1986) 以及纽结理论 (Le Thang, 1990 年代早期) 有一系列研究. 这个课题有重要的前景，近年来很多拓扑学家对于表示流形都给予了大量的关注.

11. 1980 与 1990 年代中四维流形拓扑的新想法

从 1970 年代以来，理论物理学界对于代数拓扑中的想法开始表现出日益增加的兴趣. 大家清楚地认识到, 自然界中许多客观现象其本质是拓扑的, 这一点在量子物理中反映最为明显. 只要有非平凡的现象出现，比如说与磁场或 Yang-Mills 场 (向量丛上的微分几何联络) 有关，拓扑就一定会出现. 只要有一个数学上复杂的带有非平凡奇点的场出现，拓扑就一定会出现. 在许多物质的低温相态中，在液晶及其它情形中，都出现了相似情况. 在此，我们只提一下那些对拓扑产生了大量影响的物理学家的想法. 在 Yang-Mills 场论中，发现了诸如 Polyakov-'t Hooft 磁单极这样的拓扑现象 (1973), 并且还没有用实验观测到；在 Polyakov-Schwarz-Belavin-Tyupkin 的工作中发现了瞬子 (1974), 并且同一篇文章中还发现了瞬子满足的著名的自对偶方程.

我们不去讨论这种想法在物理学中的命运，让我们提一下，从 1980 年代开始, Donaldson 发现了瞬子在四维拓扑中的一个重要应用，例如，他成功地证明了，每个闭的单连通光滑四维流形，如果其二维闭链上的相交形式正定的话，则一定同伦等价于复射影平面及其复共轭的连通和，就是说，实际上只有一些平凡的正定形式可以被几何实现. Donaldson 发现在某些四维流形上有不同的微分结构. 这个重要的事实要用到非线性椭圆偏微分方程定性理论中深刻的结果，是一个庞大而非常困难理论的产物. 它同时也要用到上面讨论过的 Freedman 关于四维流形同胚的定理. 从 Kodaira (小平邦彦) 的时代开始，就有了一张代数曲面的列表，用它可以不太费力地找到两个单连通的四维流形，他们有不同的构造，但有同构的相交形式. 由 Freedman 的结果知道，它们实际上是同胚的. 然而，这些流形却有不同的瞬子流形 (自对偶方程的解空间). 这就说明它们不是微分同胚的.

许多这类结果得到了重大改进，还发现了 Seiberg-Witten 方程，它研究起来简单多了，从而使许多基本定理容易了许多，并得到许多类似结果. 1990 年代后期, Kronheimer 与 Mrowka 证明了关于一个二维闭链表示曲面极小亏格的 Thom 猜想. 1990 年代中期, 对某类特殊构造的流形，Fintushel 在 Seiberg-Witten 方程与纽结的 Alexander 多项式之间发现了一个漂亮的联系. 他得到了有效的方法，在很多例子中来计算这些不变量，从

而得到很强的结果. 拓扑学发展这个新阶段的详细讨论还是留给更专业的文章吧.

在这篇文章中, 有些领域我们没有讨论, 例如, 流形上叶状结构的拓扑与几何, 接触拓扑与辛拓扑, 接触几何与辛几何, 然而这些领域与我们讨论过的拓扑学新方法有着密切的联系.

为了研究带奇点的代数流形, 产生了一系列深刻的同调论研究, 例如, Goresky 与 MacPherson 的相交上同调及其在许多例子中的计算. 在研究与计算群作用下, 特别是 Abel 群作用下, 各种类型的等变上同调方面, 得到了许多结果 (Kirwan, Jeffrey 及其他人). 在 Riemann 曲面模空间的几何与拓扑上, 利用弦论中的想法 (Polyakov, Takhtajan 与 Zograf), 利用矩阵模型的理论 (关于 chern 数的 Witten 猜想). 我们没有篇幅再来讨论这些想法了.

我们文章没有包括进来的还有关于非单连通流形的许多深刻的方面, 例如, "von Neumann 不变量"—— 这是 Betti 数的类似物, 指标公式, Morse 不等式与 Reidemeister 挠率, 这些是 1980 年代由 Atiyah, Singer, Novikov, Shubin, Lott, Gromov 与 Farber 所发展的.

参考文献 (略)

(钱妙云 译　潘建中 校)

****

(上接 241 页) 我们的安排自然是不合法的, 然而也不能改变了. 显得重要的是 Weyl 的感觉, 他仍然感到是苏黎世 ETH 的数学生活中的一部分.

5. 七十岁生日

在 1955 年秋天, ETH 和数学 - 物理部组织了一次美妙的活动, 以庆祝 Hermann Weyl 的 70 寿辰. 我只提一下 Wolfgang Pauli 所作的关于 Weyl 工作的全面重要性的出色讲话, 还有在苏黎世市政大厅的晚宴. 一个月之后, Weyl 带着他写的对所有祝寿人们的感谢信来到邻近的邮局. 这是些手写的白色小卡片, 在它的顶端印着歌德的诗句 "你要走向无穷, 只要从所有方向走进有限. (Willst Du ins Unendliche schreiten, geh nur im Endlichen nach allen Seiten.)" 这些由 (复) 射影几何来的简单句子正是对 Weyl 一生的工作和思想的恰当描绘. 在从邮局回家的路上因心脏病突发而倒下. 他摔倒在大街上并立即死去.

在 ETH, 普林斯顿高等研究院, 和 Birkhäuser Verlag Basel 出版社的帮助下, 为纪念他 70 诞辰的一卷本《Hermann Weyl 选集》出版了. Weyl 他自己进行了选取: 从他的巨大数量的发表物中决定哪些文章应包括在内, 哪些不应该在内! 对此项目他充满了热情, 关于他自己的著作他有着坚定的看法. 我们, 即 Heinz Hopf, Michel Plancherel 和我自己, 与他的取舍进行了长时间的讨论, 但并不总能接受他的意见. 当然, 我们接受了他的决定. 这本书在 1956 年初面世. 令人伤感的是 Weyl 看不到它了, 不能亲手握住他这最后的书了.

(李振宇 译　陆柱家 校)