

奇点理论, 动力系统, 极限环

综合报告

椭圆曲线

① 1557 \ 37951 \ 016 \ 001
97, 16(1) 奇点理论与动力系统若干问题

1-16

V.I. Arnold

Arno., VI

0175.1

束建明 ✓

本文基本上是 1991 年国立莫斯科大学奇点讨论班上所提出来的问题. 这样的问题每年都要整理一批. 以前的一些已经在 [1-4] 中发表了. I. G. Petrovsky 有一次说, 他之所以在数学中做了一点工作, 与其说是因为他懂得一点数学, 还不如说是因为有许多数学他一点也不懂. 不过, 他接着说, 知道自己还有不懂的东西却总是非常重要的.

非标准 \mathbb{R}^4 与动力系统

能否明确地给出 \mathbb{R}^5 中的一个向量场 (比如说, 分量是多项式或三角多项式), 使得它的轨道空间为非标准 \mathbb{R}^4 ?

设 X 为同胚于 \mathbb{R}^4 但却不与它微分同胚的流形. 考虑乘积 $X \times \mathbb{R}$, 那么这个乘积就微分同胚于 \mathbb{R}^5 . 再考虑乘积空间上的向量场 $V = (0, 1)$. 那么, V 的轨道空间就是 X . 现在, 再将 V 在 \mathbb{R}^5 的通常的坐标下写出来, 那么 X 为非标准 \mathbb{R}^4 这一条件对向量场 V 的分量加了什么样的限制条件呢? 这些分量可以是多项式或者三角多项式吗?

极限环与椭圆曲线

考虑复平面上的一个全纯向量场, 再考虑这个向量场的一个实极限环. 那么, 这个极限环在复邻域中的局部轨道空间就是一个椭圆曲线.

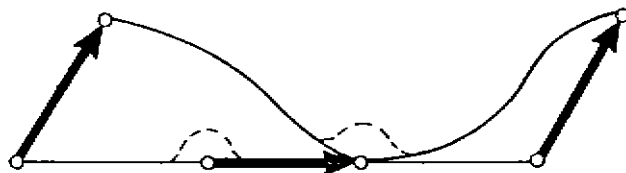
多项式向量场的轨道空间中, 椭圆曲线的集合有多大? 多项式映射的轨道空间中呢? 具有给定离散不变量 (亏格, 次数) 的代数对应的轨道空间中呢?

考虑复直线上的一个映射, 它在某环形区域 (不一定是圆环) 的一个边界圆附近是双全纯的, 并且将这个边界圆周映射到另一个边界圆周上. 将每个边界点与其像点等同起来, 就得到了一个椭圆曲线. 这个椭圆曲线就可以认为是表示了这一映射的 (局部) 轨道空间.

原题: Problems on Singularities and dynamical systems. 译自: *Developments in Mathematics, The Moscow School*, ed by Arnold and Monastyrsky, Chapman & Hall, 1993.

将初始圆周 (及其像) 作一形变, 是不会改变轨道空间的. (如果映射固定的话), 从而也就不会改变这个椭圆曲线的模数 (modulus).

如果这个映射全纯地依赖于某些参数, 那么, 椭圆曲线的模数也会随着这些参数全纯地变化, 直到某一时刻, 当局部轨道空间的拓扑发生改变为止. 这种拓扑改变的情况, 只有当初始圆与其像圆碰到一起时才会出现. 不过, 如果这时再将初始圆做一形变, 则椭圆曲线还可以继续延拓到参数空间中一个更大的区域上去 (图一).



图一. 轨道空间中椭圆曲线的解析开拓

考虑标准映射

$$z \mapsto z + a + b \sin z, \quad z \in \mathbb{C} \bmod 2\pi,$$

相应椭圆曲线的解析开拓的自然边界 (及其 Riemann 曲面) 有多大呢?

从对应于 $b = 0, \operatorname{Im} a > 0$ 的椭圆曲线

$$\mathbb{C}/(2\pi\mathbb{Z} + a\mathbb{Z})$$

出发, 对 a 与 b 作解析开拓. 或者, 从以实数轴及它的像 ($|b| < \operatorname{Im} a$) $\mathbb{C} \bmod 2\pi$ 所围成的环形区域出发也行. 设得到的椭圆曲线为

$$\mathbb{C}/(2\pi\mathbb{Z} + w\mathbb{Z}).$$

那么, “模数” w 至少对于 $|b| < \operatorname{Im} a$ 是全纯地依赖于 a 与 b ; 此外, 对 $\operatorname{Im} a > 0$ 有 $w(a, 0) = a$. 在 [5] 中讨论了这个“复旋转角” w 的一些计算公式.

研究“半标准映射” $z \mapsto z + iw + ibe^{iz}$ 相应椭圆曲线定义域的边界, 可能也是很有意思的.

现在回到最初的问题. 假定给了一个全纯向量场, 它有一个实极限环. 取一个与此极限环横截的复直线, 考虑复 Poincaré 映射, 然后用上面的方法构造一个椭圆曲线. 不过, 圆与椭圆曲线的一般定义并不需要用到全局横截复直线的存在性, 所以这些概念对于复相空间中由复相曲线组成的整体叶层结构 (foliation) 也是可以定义的.

拟周期拓扑与 Fermi 曲面

二元函数可以定义一个平面向量场, 即 Hamilton 向量场, 该向量场的向量与二元函数的等高线相切. 因此, 二维平面上的 Hamilton 向量场是可积的. 实际上, 只要 Hamilton 函数是单值的话, 任意二维曲面上的 Hamilton 向量场都是可积的.

二维环面上的多值函数, 如果其微分为一确定的 (well-defined) 闭一次形式, 则也可以定义一个环面上的 Hamilton 向量场. 在这种情况下, 虽然相应的 Hamilton 微分方程存在有“显式”解, 但这个“可积”Hamilton 系统的动力学行为却呈现出奇怪的遍历性质与拓扑性质 (混合性质等等).

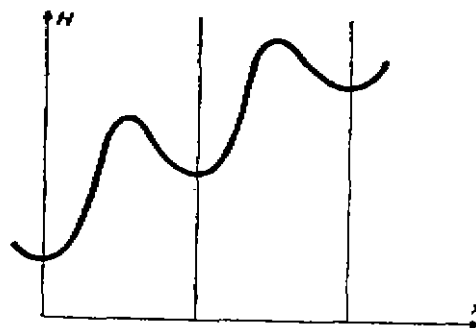
类似地, n 维环面上 $n-1$ 个多值函数定义了一个广义 Hamilton 系统 (或 Nambu 系统), 它可以显式地求积, 然而其相曲线的全局性态却非常古怪.

通过这种方式, 我们在通常的三维欧氏空间中得到了一个散度为零的周期向量场. 尽管这个向量场定义的微分方程, 是显式地“可积的”, 但对于它们全局拓扑性质却几乎一无所知, 即使对一个很简单的例子也是如此, 那就是在固态物理中很有意义的 Fermi 曲面的无理平面截口.

要表述拟周期拓扑的问题, 得用到下述定义. 一个映射 $H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ 称为 (对于格 \mathbb{Z}^n) 拟周期的, 如果

$$H(x+t) \equiv H(x) + w(t), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{Z}^n$$

其中 $w: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ 为一单同态. 换言之, H 是一线性映射与一周周期映射之和, 并且线性映射 w 将 \mathbb{R}^n 的基映成 \mathbb{R}^k 中 n 个完全不可公度的向量 (即在有理数域上线性无关) (参见图二).



图二. 拟周期函数

拟周期映射的水平集称为拟周期簇.

考虑一个解析的拟周期映射 $H: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, 若 $C \in \mathbb{R}^2$ 为非临界值, 那么拟周期曲线 $H^{-1}(c)$ 就是光滑的.

拟周期曲线 $H^{-1}(c)$ 的无界分支能否多于一个呢?

不难看出至少存在一个无界分支. 对于 Generic 的二元拟周期函数而言, 拟周期曲线恰好有一个无界分支. 对于 generic 的 n 元周期函数, 集合 $H > c$ 与 $H < c$ 都恰有一个无界分支 (见 [6]). 但是, 对于余维大于 1 的拟周期簇却一无所知.

欧氏空间 \mathbb{R}^n 的一个子流形称为 \mathbb{Z}^r 周期的, 如果它在 \mathbb{R}^n 的某个整数子格 \mathbb{Z}^r 的平移作用下是不变的.

考虑 \mathbb{R}^3 中一个 \mathbb{Z}^3 周期曲面 (即 Fermi 曲面), 然后用一个无理的 generic (仿射) 平面去截它. 对于所得到的截口曲线, S. P. Novikov 提出下述的问题:

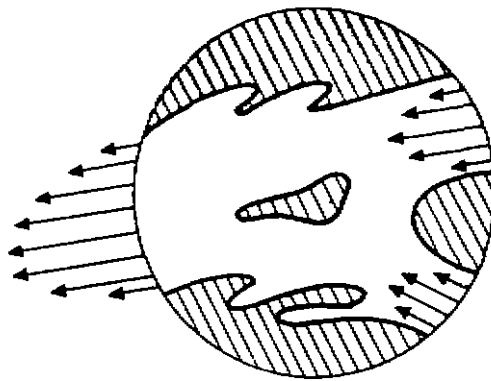
这个曲线的每个无界分支是否都在某条直线的有限邻域之内呢？

根据 A. Zorich[7], 这个结论对于所有平面组成的空间中的某个开集是成立的. 但是, 对于 \mathbb{R}^4 中 \mathbb{Z}^4 周期曲面的二维平面截面来说, 这个结论却可能不对 (因为这些截面可能有 5 个对称性并有无界分支, 见 [8]).

假定在 \mathbb{R}^n 中给定了一个连通的 generic 的 r -维 \mathbb{Z}^r 周期子流形, 然后用一个 generic 的 (完全无理的) 仿射超平面去截它. 那么, 在这个超平面的补集中恰有两个无界分支 (见 [6]). 应该有种“拟周期相交理论”, 它能把这个解答 (即“两个”) 推广到与任意维仿射空间相交的截面.

注 1 [6] 中的某些证明依赖于 Sard 引理的一个有趣的推广, 它是最近由 Yu. Chekanov 证明的.

在 n 维欧氏空间中考虑一个散度为零的 C^∞ 光滑向量场. 考虑闭的单位球, 再考虑在此球内向量场不为零的点集的某个连通分支 (图三).



图三. 广义 Sard 引理

引理 1 该向量场通过此分支与球面边界相交部分的流量等于零.

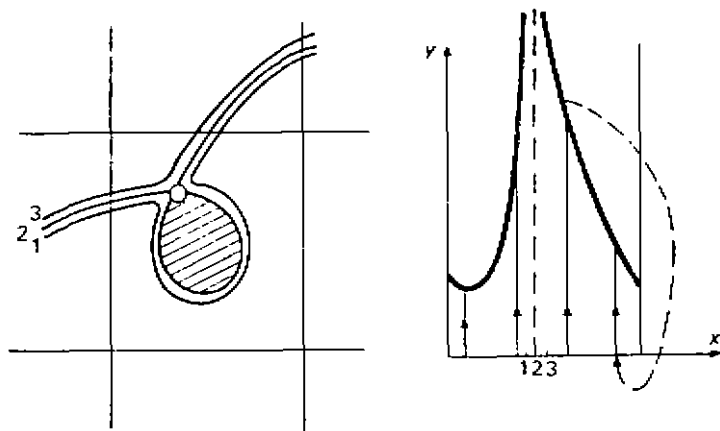
当 $n = 2$ 时, 流量等于流函数的增量之和. 所考虑的连通分支的位于球内的边界都由流函数的临界点组成. 根据 Sard 引理, 流函数在边界的每个连通分支上都是常数, 因此所有增量之和当然等于零.

上面的结果对 n 维空间中的 $n - 1$ 次微分形式推广了 Sard 引理, 它说明也有可能对任意 k 次形式推广 Sard 引理.

注 2 [6] 中的结果说明, 在二维环面上一个多值 Hamilton 函数所定义的 Hamilton 系统在一些“停滞区域”(stagnation domain) 之外是遍历的 (generic 说来, 环面上这些区域的个数是有限的). 而且, 在停滞区域之外的动力学行为就是在某个圆周旋转之上的“特殊流”. 这个圆周旋转的时间函数具有对数奇点 (图四). 特殊流的定义将在下段中给出.

设 $A: X \rightarrow X$ 为微分同胚, $f: X \rightarrow \mathbb{R}^+$ 为时间函数, 考虑 f 的部分图像

$$S = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R}^+ : x \in X, 0 \leq y \leq f(x)\},$$



图四. 环面上的流及等价的特殊流

将点 $(x, f(x))$ 与点 $(A(x), 0)$ 等同起来, 并考虑由向量场 $\partial/\partial y$ 在其上定义的流, 这就是相应的特殊流.

Khanin 与 Sinai[9] 最近证明, 如果 $A: S' \rightarrow S'$ 为 generic 圆周旋转, $f: S' \rightarrow \mathbb{R}^+$ 是有非对称对数奇点的 generic 函数, 那么相应的流 $\{g^t\}$ 是混合的. 混合的意思是说

$$\frac{\text{mes}(g^t U) \cap V}{\text{mes} S} \rightarrow \frac{\text{mes} U}{\text{mes} S} \frac{\text{mes} V}{\text{mes} S}$$

(两边之差以 $(\log t)^{-1}$ 的量阶趋于零).

在这种情形下, 时间函数 f 的不对称性是由于在停滞点的 separatrix 一边的邻近轨道访问该停滞点的邻域仅一次, 而在 separatrix 另一边的邻近轨道却访问两次.

考虑一个广义可积的拟周期 Hamilton 系统, 它的临界线位于三维环面上. 这种系统的遍历性质也是值得研究的. 在三维欧氏复盖空间中, 这个场可以用两个拟周期 Hamilton 函数来定义:

$$\dot{x} = [\text{grad } f, \text{grad } g].$$

一般而言, 给了一个映射 $H: M^n \rightarrow N^{n-1}$ 之后, 设 μ 与 ν 分别为 M 及 N 上的体积元素, 则下面的公式

$$i_W \mu = H^* \nu$$

唯一地确定了一个广义 Hamilton 向量场 W . 这个场的散度为零 ($L_W \mu = 0$) 并且有 $n+1$ 个首次积分 ($i_W dH = 0$).

我们来仔细考虑 \mathbb{R}^3 中的一个情形, 令 $f = (a, x) + F(x)$, $g = (b, x) + G(x)$, 这里 F 与 G 都为 \mathbb{Z}^3 周期的. 每个轨道都位于直线 $(a, x) = 0, (b, x) = 0$ 的一个有限邻域之内. 假定这根直线与平面 $z = \text{const}$ 横截. 在解析的情形 (或者 generic C^∞ 的情形), 每个轨道都与平面 $z = c$ 相交于有限个点, 这些点的个数是一致有界的 (上界不依赖于 c , 也不依赖于轨道).

因此, 对于 (f, g) 的一个非临界值而言, 相应的轨道或者是闭的, 或者是从 $z = -\infty$ 连到 $z = \infty$. 对于轨道加了定向之后, 就有四种可能性: $(-, +, -, +, -, +, +)$. 如果向量积 $[a, b]$ 在 z 方向的分量是正的, 那么在每个非奇异的水平集 $f = \text{const}, g = \text{const}$ 上都存在 $(-, +)$ 曲线. 不清楚对于完全无理的解析系统来说, 其它几种情况是否也能出现.

$(-, -)$ 曲线与 $(+, +)$ 曲线, 如果存在的话, 将对应于一个零测集. 这是因为环面上相应的子集可以分解为无穷个不相交可测集之并, 而这些可测集的测度又都相等.

对于 $(a, x) = 0 = (b, x)$ 为有理直线的系统来说, $(+, -)$ 曲线是存在的. 但要是这条直线是完全无理的话, 这或许就是不可能的了. 如果对 (f, g) 值集的某个正测度集存在这样的曲线的话, 那么对几乎每个值 (在 Lebesgue 意义下), 在 (f, g) 的水平集中都存在这样的曲线.

假定系统是解析的, 那么给定的由临界值组成的一条曲线, 如果既不封闭又不是从 $-\infty$ 连到 ∞ , 则必在某个临界点终止. 这种临界点一定是所考虑的向量场的零点. generic 说来, 它们形成 T^3 上的一条光滑曲线. 这条曲线在 \mathbb{R}^3 中的复盖曲线的分支或者封闭或者无界 (具有有理方向).

假定没有临界点. 此时, 通过环面上的微分同胚, (f, g) 可以化为标准形 $f = (a, x), g = (b, x)$. 向量场 W 也就化简为 $[a, b]h$ 的形式, 其中 h 为一个正周期函数.

实际上, T^3 上的任意非退化一次闭形式 df 都可以化为标准形 (Landenbach, Blank, Cerf, ...). 在 \mathbb{R}^3 中选一个 Riemann 度量. g 在平面 $df = 0$ 上的限制给出一个无处为零的梯度场, 因而梯度线可以无限地延拓. g 限制到一条梯度线上就给出了到实直线上的一个微分同胚. 从而, \mathbb{R}^3 上的每个水平集 $f = \text{const}, g = \text{const}$ 都仅有一个分支, 它是一条无界曲线. 容易构造一个 T^2 , 使它与 T^3 点的向量场 W 横截. 这样就可以将线性化坐标显式地写出来.

如果有临界点, 则某些轨道在 \mathbb{R}^3 中也许就是封闭的. \mathbb{R}^3 中向量场 W 的一个封闭轨道, 如果在曲面 $f = \text{const}$ 上围住了一有限区域, 则它就与临界曲线 (mod 2) 环绕在一起. 这可以从该区域的 Euler 特征必为奇数推出. 在三维空间中存在这样的系统, 它具有临界点, 但却没有闭轨道, 不论多么小的都没有.

在该轨道上引进标架 $(\nabla f, \nabla g, W)$, 则其在群 $SL(3)$ 中的标架类总是等于 mod 2 的环绕数. 这可以从下述事实推出: 这两个数 mod 2 之后都等于 \mathbb{R}^6 中的曲线 $(\nabla f, \nabla g)$ 与簇 V^4 的环绕数, 这里 V^4 是由 \mathbb{R}^3 中共线向量偶组成的簇.

不知道是否存在闭轨道, 它与临界曲线完全无环绕, 但有例子说明这个环绕数可以是偶数.

分歧复杂性与 Skolem 定理

考虑复二维平面到自身的局部全纯映射, 将原点映到原点, 再考虑两条包含原点的全纯曲线.

第一条曲线在此映射 n 次迭代之下的像与第二条曲线的相交重数随 n 增加的速度可以有多快 (如果所有这些重数都有限的话)?

例 1 $A(x, y) = (x, y^2)$, $X = \{y = x\}$, $Y = \{y = 0\}$. 那么, $A^n X = \{y = x^{2^n}\}$, 从而相交重数 2^n 以指数速度增长.

假定所有的像 $A^n X$ 都光滑, 在 [10] 中证明存在一个指数型上界. 如果一切对象都是代数的话, 那么重数最多也只能以指数增长 (见 [11], [12]). 但是, 对一般的全纯曲线这一问题还未解决, 即使映射为多项式且每点的逆像都为有限个点.

如果映射为局部双全纯, 则结果大不一样, 此时重数为一致有界的 [10]. 而且, 二维平面可以换成 \mathbb{C}^m , 两条曲线可以换成两个全纯子流形 X^k 与 Y^l , 它们当然要包含全纯映射 A 的不动点 0.

对于维数互补 ($k + l = m$) 的子流形, 可以将相交重数换成 $A^n \cap S$ 与 $Y \cap S$ 的环绕数, 这里 S 是以原点为中心的一个小球面.

对于超曲面 ($k = l = m - 1$), 可以考虑相切的阶数 (Milnor 数). 一般情况下, 可以考虑按下述方式构造的任意抽象 Milnor 数.

考虑在 \mathbb{C}^m 原点处 k 维与 l 维子流形偶的 (无穷)jet 空间 J . 固定一个 filtration

$$J \supset \sum^1 \supset \sum^2 \supset \cdots,$$

其中每个 \sum^i 都是一代数簇 (在有限个 Taylor 系数上用有限个多项式方程定义). 一对子流形的广义 Milnor 数是使子流形的 jet 偶属于 \sum^i 的最大的 i 值 (因此, \sum^i 由广义相交 “重数” 至少为 i 的偶组成).

在 [10] 中证明了, 对所有 $n \in \mathbb{Z}$, 偶 $(A^n X, Y)$ 的任何广义 Milnor 数都是有界的. 这个证明依赖于关于递归序列零点的 Skolem 定理.

令

$$f(n) = \sum_{i=1}^m c_i \lambda_i^n$$

为有限个指数之和, 系数为复系数. 那么, 它的整数根集

$$\{n \in \mathbb{Z} : f(n) = 0\}$$

由有限个等差数列组成.

可以将指数和 f 换成这种类型指数和的极限, 也就是一个类似的和, 但其中 c_i 换成了 n 的多项式, 次数小于 m_i , 这里 $\sum m_i = m$ (换句话说, 就是换成任意 m 阶的递归序列).

注 3 若 λ_i 是非共振的 ($\prod \lambda_i^{n_i} \neq 1$ 对任意非零整数 n_i), 那么根集是有限的.

对于 m 阶非共振递归序列而言, 根的个数是否有一致上界呢?

即使对三阶递归序列而言, 目前也不知道答案, 但大家猜测上界可能为 6.

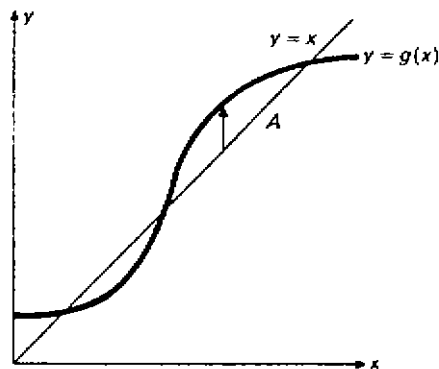
在射影 λ 平面中, 考虑由相应的广义 Van der Mond 行列式为 0: $\det[\lambda_i^{n_j}] = 0$, 定义的代数曲线. 这些曲线仅仅对于非常特殊的 (n_1, n_2, n_3) , 彼此之间才非平凡相交.

注4 上面所讨论的相交重数的一个特殊情形就是动力系统中周期点的分歧重数.

令 $g: M \rightarrow M$ 为解析微分同胚, 有一个不动点 0. 考虑乘积空间 $M \times M$ 上的映射

$$A = (\text{id}, g): M \times M \rightarrow M \times M, \quad A(x, y) = (x, g(y)).$$

这个映射将对角线 $\{y = x\}$ 变为 g 的图像 (图五). 它的 n 次迭代 A^n 将对角线变为 g^n 的图像. 因而在不动点 $(0, 0)$ 处, 对角线的 n 次像与对角线本身的相交重数, 就正好等于映射 g 的周期为 n 的周期点 0 的重数.



图五. 把不动点当作交点

从 M. Shub 与 D. Sullivan[13] 的一个定理, 即微分同胚迭代的 Poincaré 指标有界, 也能推出这些分歧重数的有界性.

若 g 不可逆, 可以猜测 g^n 的不动点 0 的重数随 n 的增长不可能比指数更快, 但这也仅在一切对象都是代数的时才被证明.

上面对动力系统中相交与分歧复杂程度渐近性质的上界都是局部结果, 它们也有相应的整体结果.

设 M^m 为紧光滑流形, X^k 与 Y^l 为紧子流形, $A: M \rightarrow M$ 是微分同胚. 在 X 上用 A 作用 n 次以后再与 Y 相交, 就得到

$$Z_n = (A^n X) \cap Y,$$

我们想给它的“拓扑复杂程度” $|Z_n|$ 估计一个上界, 这个上界应为时刻 n 的函数 (图五).

如果所考虑的都是代数对象, 则“拓扑复杂程度”至多以指数速度增长:

$$|Z_n| < ce^{\lambda n}.$$

[11] 中的方法可以对下述的各种不变量证明上述结论, 它们包括 Betti 数之和, 示性数, Morse 数以及基本群生成元与关系的个数 (见 [10], [12], [14]), 也许对于关系的长度也可以估计一个上界. 满足这些界的流形 Z_n 的数目或许是有限的 (在同伦等价,

同胚, 微分同胚甚至是嵌入同痕的意义下). 如果它们确实是有限的话, 则确定它们的数目如何随 n 的增长是一个非常有趣的问题.

在 C^∞ 光滑的情况下, 相交复杂程度可以任意快的速度增长. 确切地说, 对于任何递增序列 $a_n \rightarrow \infty$, 都存在四元组 (M^2, A, X', Y') 以及一个递增的整数序列 n_i , 使得

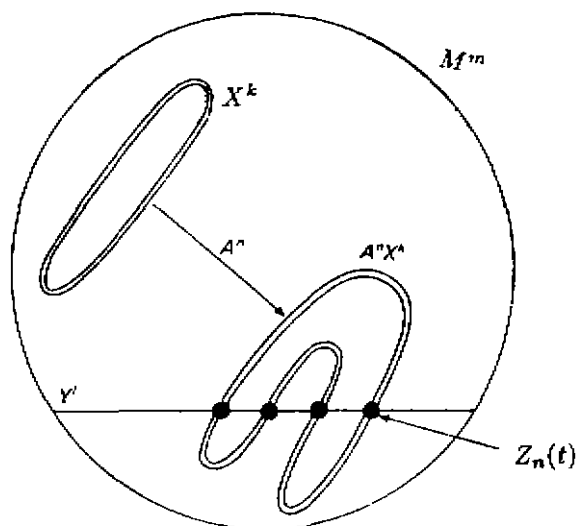
$$|(A^{n_i} X) \cap Y| > a_{n_i}, \quad \forall i,$$

其中 $|\cdot|$ 表示交点的数目, 且在所有交点处都是横截相交的 [12].

对于维数 $m \geq 2$ 的流形上微分同胚的周期点, 以及维数 $m \geq 3$ 的流形上向量场的周期轨道, 都存在有类似的例子 ([15], [16]).

但是对于许多衡量拓扑复杂性的测度而言, 指数型上界成立的概率都是 1. 我们来考虑一个四元组 (M^m, A, X^k, Y_l^t) , 其中 $A: M \rightarrow M$ 为微分同胚, Y_l 是 l 维子流形族, 它 generic 地依赖于参数 $t \in T^p$ (图六). 那么, 如果参数的个数充分大 ($p \geq m^2$), 则对几乎所有的 t (对 T 上的 Lebesgue 测度而言), $Z_n(t) = (A^n X) \cap Y_l$ 的拓扑复杂程度至多以指数速度增长:

$$|Z_n(t)| \leq C e^{\lambda n}.$$



图六. 交集的动力学行为

注 5 这里要用到下述的满射性质: 设 N 是 M 的切空间的所有 l 维子空间组成的丛, Y_0 的所有切空间在 N 中组成了一个流形, 那么所有子流形 Y_l 在所有点的切空间就组成了上述流形在 N 中的一个邻域 (也就是说, 相应映射 $Y \times T \rightarrow N$ 的导数在 $Y_0 \times 0$ 的每一点都是满射). 只要参数空间的维数 p 充分大, 那么这一满射性质对于 generic 的族都成立.

在前面的定理中, 作为复杂性的测度 $|Z|$ 可以选取下面一些项目:

1. 维数 $s = k + l - m$ 的体积 V_s ,

2. 分支个数 b_0 ,
3. Betti 数之和 b ,
4. Morse 数 μ ,
5. 任意示性数 p ,
6. 绝对全曲率 K ,

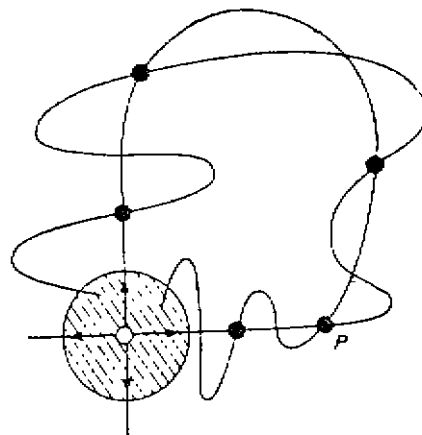
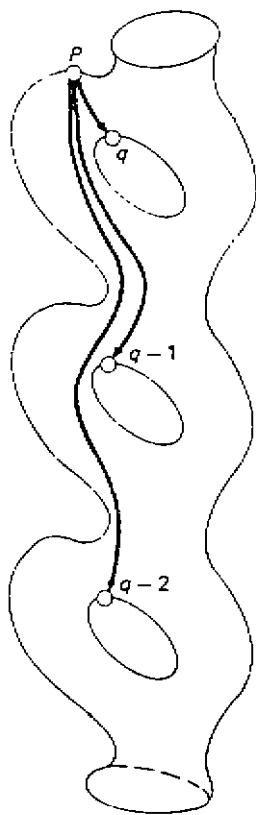
($K(Z)$ 是 Z 的切平面所组成的流形在 M 的切空间的 S 维平面所组成的 Grassmann 丛中的 s 维体积).

不知道基本群中关系的长度是否也可以有指数型上界 (生成元及关系的数目以 Morse 数为上界, 从而以绝对全曲率为上界, 从而以 n 的指数为上界).

不知道周期轨道的个数是否在前述意义下以概率 1 指数有界 (很可能是这样). 对于不是微分同胚的光滑映射来说, 这样结果可能也是对的, 但还有待证明.

上述结果可能推广的方向还有下述两个:

1. (S. P. Novikov) 给定一个紧流形, 考虑它的循环复盖 (cyclic covering), 再考虑这个复盖空间上的 generic 拟周期光滑 Morse 函数 f (f 的微分是从最初的紧流形上提升上来的).



图七. 从 p 到 $q-n$ 的瞬子 图八. 阶等于 5 的同宿轨道

记 \mathbb{Z} 在复盖空间上的作用为 $\div 1$, 并假定 $f(x+1) \equiv f(x) + 1$. 设 p 为指标等于 i 的临界点, q 为指标等于 $i-1$ 的临界点. 考虑连接 p 与 $q-n$ 的“瞬子”(grad f 的轨

道图七).

连接 p 与 $q-n$ 的瞬子数目会有 n 的指数型上界吗?

2. 考虑某个平面映射的双曲不动点. 固定此双曲点的一个邻域. 一个同宿点的阶定义为该同宿点轨道中不属于该给定邻域的点的个数 (图八).

n 阶同宿轨道的个数会有 n 的指数型上界吗?

也许, 对于 generic 的 C^∞ 系统有指数型上界的概率都是 1.

在解析的情况下, 相交复杂程度不会有上界. 这在 1991 年为 O. Kozlovsky 所证明. 他考虑了环面上的解析映射

$$A(x, y) = (x + \alpha, y + f(x)) \bmod 1$$

以及圆周 $X := Y = \{y = 0\}$.

如果巧妙地选取无理数 α 以及有很多空缺的三角级数 f , 则交点个数 $|(A^n X) \cap Y|$ 随 n 增长的速度就快于任意给定的序列 (对 n 的某个递增子序列 n_i 来说).

我们猜测这个情况可能类似于解析微分同胚的周期点, 也类似于解析向量场的周期轨道. 对于多项式向量场甚至有下面的猜测:

是否对于每一个递增序列 $a_n \rightarrow \infty$, 都存在 \mathbb{R}^m 上的一个多项式向量场 (它指向球面 $|x| = r > 1$ 的内部), 对于一个递增序列 $n_i \rightarrow \infty$ 来说, 这个向量场都有多于 a_{n_i} 个周期至多为 n_i 的周期轨道 (假定所有的周期轨道都非退化)?

拟凸超曲面与射影拓扑

在实射影空间 P^n 中考虑一个光滑超曲面以及两个环绕在一起的射影子空间 P^k 与 P^l , 这里 $k+l=n-1$.

定义 1 如果任意一条从 P^k 一点到 P^l 一点的直线都与此超曲面横截相交, 且正好有两个交点, 则称此超曲面为 (对于 P^k 与 P^l) 拟凸的.

例 2 令 $k=0, l=n-1$. 在仿射空间 $\mathbb{R}^n = P^n - P^{n-1}$ 中考虑一个包含 P^0 的凸体, 那么它的边界对于 P^0 与 P^{n-1} 来说就是拟凸的.

定义 2 实射影空间中一连通光滑超曲面称为局部双曲的, 如果它的二阶二次形式 (second quadratic form) 处处都非退化.

例 3 如果上面提到的形式是正定的, 那么这个曲面就是局部二次凸的. P^3 中的单叶双曲面就是局部双曲的.

容易看出, 射影空间中的一个连通的 (局部二次的) 闭凸超曲面在仿射部分就是通常的凸超曲面 (例如, 可参见 [17]).

P^3 中闭的连通的非凸曲面, 如果局部双曲的话, 是否一定是拟凸的呢?

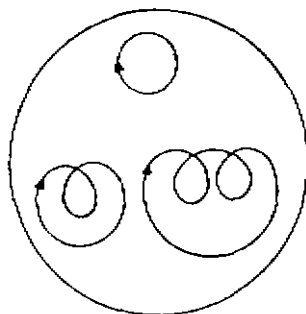
这个问题可以看作是三维欧氏空间中关于非负曲率完备曲面的 Hilbert 问题在射影空间中的形式.

P^3 中闭连通, 局部双曲的非凸曲面的全体所成的集合是连通的吗? 这样的曲面可以有一个凸的平面截口吗?

仿射空间与射影空间中局部双曲曲面的几何, 包含有偏微分方程理论中极大值原理的许多有趣的推广, 在其中函数图像换成为具有非平凡拓扑的超曲面.

局部射影空间中光滑子流形有一些古怪的拓扑性质, 值得很好的研究. 在此, 我想提一下 M. S. Shapiro 最近 (1991) 关于 S^n 中非退化曲线分类的工作.

一个浸入 $S' \rightarrow S^n$ 称为非退化的 (或称正的), 如果它的密切旗 (osculating flag) 处处非退化, 也就是它的 Frenet 标架定义了 S^n 的一个固定的定向.



图九. 二维球面上的三类凸曲线

若 n 为偶数, 则定向流形 $S' \rightarrow S^n$ 之间的正浸入的正则同伦类共有三个; 若 n 为奇数, 则共有两个. 图九中列出了 S^2 中的三类局部凸曲线 (这是由 J. Little[18] 发现的, 也可见 B. Z. Shapiro[19]). 这是射影拓扑学最初的定理之一, 在 [17] 中还可以看到对射影曲线拐点的分析以及四顶点定理等其它结果. 这是一片几乎还没有开垦过的土地.

四顶点定理与四脐点定理的新视角

四顶点定理说一条闭的平面凸曲线至少有四个顶点 (曲率的极值点). 四脐点定理说在一个 generic 凸曲面上至少存在四个点, 它们的两个主曲率相等. 这两条定理似乎并不像它们的标准叙述那样是属于欧氏度量几何的范畴, 它们似乎更应当是属于辛拓扑与接触拓扑的范畴, 就是说, 它们实际上是为欧氏空间中凸曲线与凸曲面的法线 Lagrange 映射的一类特殊奇点的个数提供了一个下界. 在一般情况下, 这些奇点是可以定义的, 有趣的是要决定到底是 Lagrange 投影的哪些性质可以推出这类下界.

我们从下面的初等推广开始, 它可以回溯到 Jacobi 的力学讲义 [20]. 考虑 S^n 上的任意一个 Riemann 度量 (比如说, \mathbb{R}^{n+1} 中 generic 椭球面的度量). 在球面上再固定一个 generic 点 0 . 从 0 出发的测地线的共轭点在 S^n 中组成了一个 $n-1$ 维超曲面, 即焦散面. 问题是要为这些焦散面奇点的个数找一个下界.

Jacobi 断言说, 在一个三轴不相等的椭球面上, 焦散面恰有四个尖点 (cusp). 但他并没有给出证明. 在他全集的最后一卷的最后一篇关于几何的论文 [21] 就讨论这个问题, 但这是一篇未完成的作品.

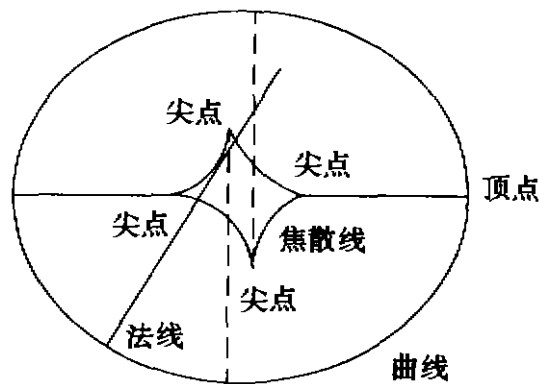
考虑二维球面上从一给定点出发的所有极值线 (extremal), 沿着这些极值线的第 r 个共轭点组成的一个焦散面. 如果这个焦散面是 generic 的话, 它是否至少有四个尖点呢?

考虑三维球面上从一给定点出发的所有极值线, 沿着这些极值线的第 r 个共轭点组成了一个焦散面. 如果这个焦散面是 generic 的话, 它是否至少有四个 D_4 奇点呢?

临界点与 Lagrange 奇点

四顶点定理在辛拓扑中的推广是将曲线的顶点解释成辛相空间 (即平面的余切丛) 中一个 Lagrange 子流形在 Lagrange 投影之下的尖点. 这个 Lagrange 子流形由该曲线的法线上所有单位向量组成, 在直线上的定向与朝内的法向量相同 (当然要用平面的欧氏度量将切向量与余切向量等同起来).

这个 Lagrange 子流形到平面投影的尖点就是最初所考虑的 generic 曲线在顶点处的曲率中心. 在所有点的曲率中心组成了焦散线, 而焦散线的奇点恰好就是这些尖点 (图十).



图十. 平面凸曲线的焦散线

由单位向量组成的 Lagrange 流形微分同胚于圆柱面. 取一个包含焦散线的大圆盘, 则圆盘之外的单位向量组成了此 Lagrange 柱面的两个领 (collar) (或者说半柱面). 这两个领是微分同胚地投影到平面上的.

柱面在两个领中间的部分投影下来就有奇点. 在这一投影下, 临界值的集合就是焦散线, 而顶点就对应于这个投影的尖点.

能否将柱面的中间部分换成另一个 Lagrange 嵌入, 使得最后得到的嵌入 Lagrange 柱面投影到平面上时没有尖点 (当然, 在两个领上要与原来柱面上的投影一致)?

考虑圆周上那样的函数组成的空间, 这些函数的奇点都不比 x^3 更复杂. 每个边界领都对应于此空间中一条闭路, 从而有一个指标. 两个边界领相应的指标之差就

可以说明在中间部分存在着尖点 [22]. 但是, 对我们所考虑的柱面来说, 两个领的指标却相等, 所以, 似乎至少应当存在一个浸入 Lagrange 柱面, 它没有尖点且在两个领上满足给定的边界条件.

是否存在这样的嵌入 Lagrange 柱面呢?

我们的 Lagrange 柱面是光学中的柱面 (它属于超曲面 $p^2 = 1$, 而这个超曲面在余切丛的每个纤维中都是二次凸的).

能否将我们的柱面换成光学的浸入 (嵌入) Lagrange 柱面, 它保持边界领不变, 并且在平面上的投影没有尖点? 研究具有温和奇点的函数组成空间的拓扑, 除了在 Lagrange 奇点问题上的应用外, 还有许多其它应用.

给定了一个紧流形, 考虑在它上面所有 Morse 函数的空间 (或者先给定一类温和的退化奇点, 考虑仅有这一类奇点的所有函数组成的空间), 这个空间的拓扑不变量一般说来都是该光滑流形的有趣的不变量.

这些函数空间的同伦型是由该流形的拓扑型决定的吗? 或者它确实依赖于光滑结构呢?

下面这些空间也值得研究: 非负函数的空间 (加上一个由根的数目决定的滤子 (filtration)), 流形上非退化辛结构或接触结构组成空间的边界 (加上一个由退化点个数决定的滤子).

考虑连通紧流形上的 Morse 函数, 用一个微分同胚, 就可以将所有临界点都推到该流形的小球 B^n 中去. 将这个函数限制到此球边界的一个邻域里, 就定义了一个 Lagrange 领 (或者 Legendre 领), 那就是该函数在球面邻域中所有点上一次微分 (或一阶 jet) 组成的集合.

例 4 假定初始流形为二维环面. 那么, 在一个球的内部, Lagrange 领就不能成为那种 Lagrange 截口的边界, 如果此 Lagrange 截口与零截口相交少于三次的话. 因为如若不然, 就可以得到一个 T^2 上临界点少于三个的函数.

知道了一个微分流形的 Lagrange 领是否就可以构造这个微分流形呢? 什么流形上存在有不同的函数, 它们在一个包含了全部临界点的球上全同呢?

这里的函数可以换成不与余切丛零截口相交的恰当 (exact) Lagrange 子流形.

我们将一族函数看作为定义在某个光滑纤维化全空间上的函数 (底空间与纤维都是紧的).

能否用纤维化的拓扑不变量, 对此函数限制到每根纤维上后 (不同类型的) 退化临界点的个数给出一个下界?

这样的下界可以看作是 Morse 不等式的推广, 因为它们反映了每个纤维上 Morse 复形的差异, 这是由纤维化的非平凡性导致的.

最后要讲一个属于 B. Teissier 的美妙的问题. 设有一光滑实函数, 它有一有限重数的临界点. 再假定梯度向量场在此临界点的指标等于零.

在此函数的万有 (versal) 变形中是否有一个函数, 它没有实临界点?

将此函数限制到以此临界点为中心的某球面的邻域内, 我们得到一个 Lagrange

领, 对它可以问类似问题:

这个领是否围住了一个不与零截面相交的 Lagrange 圆盘 (或者在此球的余切丛中的另一个嵌入 Lagrange 子流形).

参考文献

- [1] V. I. Arnold, Some unsolved problems in singularity theory. *Tr. Sem. S. L. Sobolev po kubaturn. formulam*, Novosibirsk, 1(1976): 5-15(in Russian).
- [2] V. I. Arnold, On some problems in singularity theory. In *Geometry and Analysis*, Papers, dedicated to the memory of V. K. Patodi, Proc. Indian Ac. Science, 99: 1(1981): 1-9.
- [3] V. I. Arnold, On some problems in singularity theory. In *Singularities*, Proc. Symp. Pure Math., vol. 40, Amer. Math. Soc. 1983, 57-89.
- [4] V.I. Arnold, Ten problems. In V.I. Arnold, ed., *Theory of Singularities and its Applications*. Advances in Soviet Mathematics, Vol. 1; Amer. Math. Soc., 1990, 1-8.
- [5] V.I. Arnold, Small denominators I. Mapping the circle onto itself. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Math.*, 25(1961): 21-86; *Math. USSR Izv.*, 1965.
- [6] V. I. Arnold, Topological and ergodic properties of closed differential 1-forms, *Functional Anal. Appl.*, 25: 2(1991), 1-12.
- [7] A. Zorich, The problem of S.P. Novikov on the semiclassical motion of an electron in a homogeneous magnetic field, closed to a rational field, *Uspekhi Math. Nauk* 39: 5(1984), 235-236; *Russian Math Surveys*, 39:5(1984), 287-288.
- [8] V. I. Arnold, Huygens and Barrow, Newton and Hooke: pioneers in Mathematical Analysis and catastrophe theory, from evolvents to quasicrystals, Birkhäuser, Basel, 1990.
- [9] K. Khanin and Ya. G. Sinai, Mixing in integrable Hamilton systems, *Functional Anal. Appl.* 26(1992).
- [10] V.I. Arnold, Majoration of Milnor Numbers of Intersections in Holomorphic Dynamical Systems, preprint 652, Utrecht University, April 1991, 1-9.
- [11] M. Artin and B. Mazur, On periodic points, *Ann. Math.*, 81(1965), 82-99.
- [12] V. I. Arnold, Dynamics of Intersections. In P. Rabinowitz and E. Zehnder, eds, *Analysis et cetera*, Research Paper Published in Honor of Jürgen Moser's 60th Birthday, Academic Press, NY, 1990, 77-84.
- [13] M. Shub and D. Sullivan, A remark on the Lefschetz fixed point formula for differentiable maps. *Topology*, 13(1974), 189-191.
- [14] V. I. Arnold, Dynamics of Complexity of Intersections, *Bol. Soc. Bras. Math.*, 21, 1(1990), 1-10.
- [15] E. Rosales, On the growth of the number of periodic points of dynamical systems, *Functional Anal. Appl.*, 25: 4, (1991), 14-22.
- [16] E. Rosales, On the growth of the number of long periodic solutions of differential equations, *Functional Anal. Appl.*, 26(1992).

- [17] V.I. Arnold, Ramified covering $\mathbb{CP}^2 \rightarrow S^4$, hyperbolicity and projective topology, *Sib. Math. J.*, 29, 5, (1988), 36–47.
- [18] J. Little, Nondegenerate Homotopies of curves on the unit 2-sphere, *J. Diff. Geom.*, 4(1970), 339–348.
- [19] B. Z. Shapiro, Disconjugate Linear Ordinary Differential Equations, Flag Varieties and Classification of Symplectic Leaves in Several Kac-Moody and Gelfand-Dikii Algebras, Matematiska Institutionen, Stockholms Universitet, 1990(esp. 43–47).
- [20] C. G. J. Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, G. Reimer, Berlin, 1884 (reprinted Chelsea, USA, 1969).
- [21] C. G. J. Jacobi, Über die Curve welche alle von einem Punkte ausgehenden geodätischen Linien eines Rotations-ellipsoides berührt. In *Gesammelte Werke*, G. Reimer. Berlin, 1891, 72–87.
- [22] V. I. Arnold Spaces of functions with mild singularities, *Functional Anal. Appl.*, 23: 3(1989), 1–10.

(余建明 译 李培信 校)