维普资讯 http://www.cqvip.com

偏微分方程，微分几何，极小曲面方程

综合报告

① 91,10(4) 269-281,299

0175.2

偏微分方程和微分几何*

S. Hildebrandt 廖亮源
Hilde., S

1. 引论

长度，面积，体积和曲率均是微分几何的基本概念，与这些概念相联系的问题历来是引起人们的浓厚兴趣的。我想只须回想著名的等周问题或关于极小曲面的 Plateau 问题，在这方面（指关于微分几何）所出现的微分方程应该受到人们特别的重视。

举例来说，如在 1729 年 Euler[1] 所证明那样，在曲面上两点之间的最短连线具有这样的性质：在每点处的密切面均含有这曲面的法线[2]，这一性质对应于短程线的测地曲率为 0，这个关系导致 Euler 获得短程线的一个微分方程，而每一条满足这个微分方程的曲线通常称为测地线，现今在具有局部坐标 $(u^1,\cdots,u^n)$ 及线元为

$$ds=\sqrt{g_{ik}(u)du^i du^k} \tag{1}$$

的黎曼流形 N 中，测地线

$$u(t)=(u^1(t),u^2(t),\cdots,u^n(t)),\quad t_1\leqslant t\leqslant t_2$$

的方程写成通常形式

$$\frac{d^2u^l}{dt^2}+\Gamma^l_{ik}(u)\frac{du^i}{dt}\frac{du^k}{dt}=0,\quad 1\leqslant l\leqslant n, \tag{2}$$

其中，$\Gamma^l_{ik}=\frac{1}{2}\{g_{il,k}+g_{lk,i}-g_{ik,l}\}$ 表示对于正定的、对称矩阵 (g_{ik}) 的第二类 Christoffel 符号，众所周知，(2)式[3] 正好就是变分的积分

$$\int_{t_1}^{t_2} g_{ik}(u)\frac{du^i}{dt}\frac{du^k}{dt}dt \tag{3}$$

的 Euler 方程组。

另一个著名的方程就是 Lagrange [58] 所提出的极小曲面方程，在 $(m+1)$ 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^{m+1}$ 中，如果所给定的非参数超曲面为

$$z=z(x),\qquad x=(x^1,\cdots,x^m)\in\Omega,$$

其中，Ω 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的一个有界区域。那么，极小曲面方程就是曲面面积

* 原题：Partielle Differentialgleichungen und Differentialgeometrie。本文是作者在 Bayreuth 举行的德国数学会1982年的年会上所作的主要报告，根据预印本译出。

1) Euler 手稿注明日期是1728年，可是，他的文稿首次发表在1729年，参见[6]，第96页和117页。

2) 这个关系确实无疑是由 J.Bernoulli 在1698年发现，并告诉了 Leibniz。参见 Virorum Celeber. G.G.Leibnitii 和 Joh.Bernoulli 哲学和数学通信。Lausanne & Genevae, 1745，卷 I，第393页。Epist. LXXVI，以及 Carathéodory[6]，第117页。

3) 原文此处误印成“(1)式”——译注。

维普资讯 http://www.cqvip.com

$$\int_{\Omega}\sqrt{1+|Dz|^2}\,dx,\quad |Dz|^2=D_\alpha z\cdot D_\alpha z. \tag{4}$$

的 Euler 方程．也就是方程

$$\mathrm{div}\,\frac{Dz}{\sqrt{1+|Dz|^2}}=0 \tag{5}$$

或

$$D_\alpha[(1+|Dz|^2)^{-\frac{1}{2}}D_\alpha z]=0,\quad D_\alpha=\frac{\partial}{\partial x^\alpha}. \tag{5'}$$

这个方程(5)正好表明，在任意一点一个曲面 $z=z(x)$，$x\in\Omega$，当其面积(4) 对于给定的 $\partial\Omega$ 上的边值取最小值或至少是一个稳定值时，其平均曲率必为0．一般，人们称平均曲率为零的曲面为极小曲面．

在 $\boldsymbol{R}^3$中参数表达式为

$$u(x)=(u^1(x),u^2(x),u^3(x)),\quad x=(x^1,x^2)\in B$$

的二维极小曲面正是曲面面积

$$A(u)=\int_B|u_{x^1}\wedge u_{x^2}|\,dx^1dx^2 \tag{6}$$

的临界值．如果参数 x^1,x^2是共形的，即当

$$|u_{x^1}|^2=|u_{x^2}|^2,\quad u_{x^1}\cdot u_{x^2}=0\quad 在B中 \tag{7}$$

成立．那末，在该曲面的所有正则点处，关系 $H=0$，等价于方程组

$$\Delta u=0，在B中，其中\ \Delta=D_1^2+D_2^2. \tag{8}$$

从此，我们达到 Monge 和 Weierstraβ 的观点，依照这一观点，在 $\boldsymbol{R}^3$ 中的一个极小曲面正好是区域 $B\subset R^2$上的一组调和函数 u^1,u^2,u^3，这些函数的一阶导数满足共形性条件(7)，据此，函数论和极小曲面论之间就有着密切的关系．H.A.Schwarz 基于此观点对极小曲面作了出色的研究工作，他的研究成果至今仍然富有吸引力和重要意义．这一方面的内容对于极小曲面理论[1)] 的很大一部分始终是重要的．

众所周知，方程(8)是 Dirichlet 积分

$$D(u)=\int_B|Du|^2dx^1dx^2 \tag{9}$$

的 Euler 方程，而且，正如 Couraunt [8] 所证明，在某些几何边界条件下，关系(7) 就可以作为(9)的变分必要条件推得．

如果我们用 n 维黎曼流形N代替三维欧氏空间 R^3，其线元用(1)表示，那末，对于被 R^2 的一个区域B参数化的二维曲面 u：$B\to N$，其 Dirichlet 积分是

$$E(u)=\int_B g_{ik}(u)D_\alpha u^iD_\alpha u^k dx^1dx^2. \tag{10}$$

而且，对于(10)的一个临界点 u 的必要条件(7)和(8)，现在由

$$g_{ik}(u)u^i_{x^1}u^k_{x^1}=g_{ik}(u)u^i_{x^2}u^k_{x^2},\quad g_{ik}(u)u^i_{x^1}u^k_{x^2}=0\quad 在B中. \tag{11}$$

$$\Delta u+\Gamma^l_{ik}(u)D_\alpha u^iD_\alpha u^k=0\quad 在B中 \tag{12}$$

1) 请参见 J.C.C.Nitsche 的讲义[69]，关于这方面的新发展，读者可参考 R.Böhme 在 Bourbaki 讨论班上的报告[8]．

维普资讯 http://www.cqvip.com

代替，这个满足方程(11)和(12)的映射 u: $B\to N$ 就是在流形 N 中的二维的极小曲面。

此外，人们不难看出，当从直角坐标 u 变为任意曲线坐标时，在 $\boldsymbol{R}^3$ 上的积分(9)也就转变为形如(10)的一个积分。因此，方程(7)、(8)随之变为方程(11)、(12)。这就是说，如果我们想把非线性的几何的弯曲变形局部线性化，我们就得到一组非线性的椭圆型方程组(12)，而不是线性方程组(8)。

更一般些，我们可考虑一个 m 维黎曼流形 M 映入 n 维黎曼流形 N 的映射 U: $M\to N$。我们设想在 M 和 N 上的局部坐标分别是 $x=(x^1,\cdots,x^m)$ 和 $u=(u^1,\cdots,u^n)$。对这些坐标，M 和 N 的线元分别为 $d\sigma$ 和 ds，且取如下的形式：

$$d\sigma^2=\gamma_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha dx^\beta,\quad ds^2=g_{ik}(u)du^i du^k$$

上面重复出现的希腊文和拉丁文指标分别表示从 1 到 m 及从 1 到 n 求和。如果映射 U: $M\to N$ 用上述坐标通过 $u(x)=(u^1(x),\cdots,u^n(x))$ 局部地给出，那么类似于(9)或(10)的是

$$E(U)=\int_M \gamma^{\alpha\beta}(x)g_{ik}(u)D_\alpha u^i D_\beta u^k\sqrt{\gamma(x)}\,dx, \tag{13}$$

而对应的 Euler 方程是

$$\Delta_M u+\Gamma^{i}_{jk}(u)\gamma^{\alpha\beta}(x)D_\alpha u^j D_\beta u^k=0\,^{1)}, \tag{14}$$

其中 $(\gamma^{\alpha\beta})=(\gamma_{\alpha\beta})^{-1}$，$\gamma=\det(\gamma_{\alpha\beta})$，$\Delta_M$ 表示在 M 上 Laplace-Beltrami 算子

$$\Delta_M v=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}D_\beta\{\sqrt{\gamma}\,\gamma^{\alpha\beta}D_\alpha v\}. \tag{15}$$

方程

$$\Delta_M v=0 \tag{16}$$

的解 v 在 M 上是一个调和函数，也就是泛函

$$\int_\gamma \gamma^{\alpha\beta}(x)D_\alpha v D_\beta v\sqrt{\gamma(x)}\,dx \tag{17}$$

的临界点。

通过 Euler 方程(14)所描述的泛函(13)的临界点，称之为由 M 映入 N 中的调和映射。作为调和映射的特殊情况，我们得到

i) 测地线，当 $m=1$，$\gamma_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}$；

ii) 在 $\boldsymbol{R}^3$ 中关于共形参数的极小曲面：当 $m=2$，$M=B\subset\boldsymbol{R}^2$，$N=\boldsymbol{R}^3$，$\gamma_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}$，$g_{ik}=\delta_{ik}$；

iii) 一个 n 维黎曼流形中的关于共形参数的二维极小曲面：当 $m=2$，$M=B\subset\boldsymbol{R}^2$，$\gamma_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}$；

iv) 在黎曼流形 M 上的调和函数。$n=1$，$N=\boldsymbol{R}$，$g_{ik}=\delta_{ik}$。

今设 M 是在 $\boldsymbol{R}^{m+1}$ 中以一个非参数化形式的方程

$$z=z(x),\quad x\in\Omega$$

所给定的 m 维超曲面，它具有从 $\boldsymbol{R}^{m+1}$ 所诱导的度量 $d\sigma$，它满足

$$d\sigma^2=\gamma_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha dx^\beta,\quad \gamma_{\alpha\beta}(x)=\delta_{\alpha\beta}+z_{x^\alpha}\cdot z_{x^\beta}. \tag{18}$$

因此，我们可将 M 看作是一个黎曼流形 $\{\Omega,d\sigma\}$。

---

1) 原文把方程误印为：$\Delta_M u+\Gamma^{i}_{jk}(u)\gamma^{\alpha\beta}(x)D_\alpha u^i D_\beta u^k dx=0$。——译注。

维普资讯 http://www.cqvip.com

结果表明，超曲面M在$\boldsymbol{R}^{m+1}$中为极小曲面，从而$z(x)$在Ω上满足方程(5)，当且只当$z(x)$为$M=\{\Omega,d\sigma\}$上的一个调和函数，也就是说，如果$z(x)$对于度量(18)满足方程(16)，极小曲面和调和函数(即方程(16)的解)之间的奇妙关系还可以转移到较高余维数的空间情况中去。我们称一个由非参数给定的m维曲面

$$M=\{(x,z(x));\ x\in\Omega\subset\boldsymbol{R}^m,z(x)=(z^{m+1}(x),\cdots,z^{m+p}(x))\}$$

在$\boldsymbol{R}^{m+p}$中为极小曲面，如果其曲面面积

$$V(M)=\int_\Omega\sqrt{\gamma(x)}dx$$

的第一变分为零，式中$\gamma=\det(\gamma_{\alpha\beta})$。且在

$$d\sigma^2=\gamma_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha dx^\beta, \tag{19}$$

中令$\gamma_{\alpha\beta}(x)=\delta_{\alpha\beta}+D_\alpha z\cdot D_\beta z\left(D_\alpha z\cdot D_\beta z=\sum\limits_{i=m+1}^{m+p}D_\alpha z^i\cdot D_\beta z^i\right)$.

Osserman[71]曾经证明：M是极小曲面，当且只当p个函数$z^{m+1}(x),\cdots,z^{m+p}(x)$中的每一个均是在$M\cong\{\Omega,d\sigma\}$上的调和函数，即当且只当

$$\Delta_M z^i:=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}D_\beta\{\sqrt{\gamma}\gamma^{\alpha\beta}D_\alpha z^i\}=0 \tag{20}$$

在Ω上成立$(m+1\leqslant i\leqslant m+p)$。式中的$\gamma_{\alpha\beta}$由(19)定义。除了极小曲面和调和函数之间关系外，极小曲面和调和映射之间也有着极有趣的关系。众所周知，一个在$\boldsymbol{R}^3$中的二维极小曲面M的高斯法向图(所谓高斯映射)给出了一个共形映射，特别地也就提供了一个从M映入二维球面S^2的调和映射。这个结果的推广已为Ruh和Vilms[74]所发现。为了对此结果进行阐述，我们首先谈谈，在$\boldsymbol{R}^{m+p}$中m维有序平面的Graβmann流形$G(m,p)$可以写作商

$$G(m,p)=SO(m+p)/SO(m)\times SO(p).$$

于是，根据Cartan和Leichtweiβ[60]知道，除了$m=p=2$的情况之外，此流形具备了一个实质上唯一的、不变的黎曼度量。不难看出1)在P_0点处$G(m,p)$的切空间将可以由$m\times p$矩阵$X=(x_\alpha^i)$2)，$1\leqslant\alpha\leqslant m$，$m+1\leqslant i\leqslant m+p$来表示，使得在$P_0$处的两个切向量$X,Y$的内积$\langle X,Y\rangle$用

$$\langle X,Y\rangle=\operatorname{spur}X\cdot Y^*$$

给出，其中Y^*是Y的转置。在这种$G(m,p)$的不变度量的已规范化情况下，对于$G(m,p)$的切割曲率$K(X,Y)$满足下列关系：若令$l=\min\{m,p\}$，则

$$\begin{aligned}&K(X,Y)\equiv1,\quad 当\ l=1,\\&0\leqslant K(X,Y)\leqslant2,\quad 当\ l\geqslant2.\end{aligned} \tag{21}$$

不但如此，在卡当度量下$G(m,p)$是一个mp维的对称齐次完备空间。当$m+p\geqslant3$，它是单连通的。而且S^m可以和$G(m,1)$以及$G(1,m)$等同。

现在假设M是一个$\boldsymbol{R}^{m+p}$的m维子流形，那么，我们可定义M的高斯映射$G:M\to G(m,p)$如下，它将M上的每一点$Q\in M$与在Q点处M的切空间T_QM相对应，那么，根据Ruh和Vilms定理有如下结果：

1）参见[37]。

2）原文误印为(x^i)。——译注。

维普资讯 http://www.cqvip.com

M的高斯映射是调和的，当且只当M关于 R^{m+p} 的平均曲率向量场是平行的，尤其是，如果M是一个 R^{m+p} 的极小子流形，那么，其高斯映射也是调和的。

今问：对于预先给定的方位函数或者法向函数 $K>0$，可否在 R^{m+1} 中找到一个凸超曲面，使得它的高斯曲率为K，这一问题引出关于一个实值凸函数

$$Z=Z(x),\qquad x\in\Omega\subset R^m.$$

的 Monge-Ampère 方程

$$\det(Z_{x^\alpha x^\beta})=f(x,Z,DZ). \tag{22}$$

人们猜测，这个完全非线性方程和前面所提到的微分方程之间也存在一种密切的关系。可是至今人们只是在 $m=2$的情况下，发现这种关系。也就是说，如果 $z=z(x^1,x^2)$是二维极小曲面方程(5)的解，方程(5)也可以化为这样形式：

$$(1+z_{x^2}^2)z_{x^1x^1}-2z_{x^1}z_{x^2}z_{x^1x^2}+(1+z_{x^1}^2)z_{x^2x^2}=0, \tag{23}$$

于是，我们在 $z(x^1,x^2)$的定义域的每一个单连通子域上，求得一个函数 $Z(x^1,x^2)$，它满足方程

$$Z_{x^1x^1}Z_{x^2x^2}-Z_{x^1x^2}^2=1 \tag{24}$$

并借助可积性条件

$$\begin{aligned}
&Z_{x^1x^1}=\frac{1}{W}(1+z_{x^1}^2),\\
&Z_{x^1x^2}=\frac{1}{W}(z_{x^1}z_{x^2}),\\
&Z_{x^2x^2}=\frac{1}{W}(1+z_{x^2}^2),\\
&W=\sqrt{1+z_{x^1}^2+z_{x^2}^2},
\end{aligned} \tag{25}$$

和 $z(x^1,x^2)$联系起来。

在本报告继后的两个部分我们打算指出怎样才能由刚才所论的微分方程的解的准确知识获得关于微分几何的有趣的知识，不过，无论以任何方式也难以在此把文献中现有结果的丰富程度充分反映出来。我们宁可只限于阐述和 Liouville 和 S.Bernstein 的古典结果相关的几个研究结果。借助于它们，我们可以特别清楚地说明各种不同的基本微分方程和微分几何两者之间的交互作用。在此方向的更进一步结果可在我们的报告[39]中找到。此外，关于偏微分方程在当今的微分几何学中所起的作用，丘成桐的概览性文章[92]，[94]连同他的问题汇编[93]会给予人们一个十分清楚的印象。

到目前为止我们处理过的问题都是只和椭圆型方程有关。因此，我们打算还谈谈导致双曲型方程的两个问题作为本文的结束，然而，还有一些问题，比如对应于混合型方程的弯曲变形问题，我们却完全没有涉及，在那里还有一个十分宽广，然而至今尚很少有人涉足的研究领域。

2. 关于 Bernstein 和 Liouville 定理

现在，我们借助几个例子看看如何利用在§1中所考虑过的各种不同的微分方程之间的关系来获得几何的结果。

下面这个著名的结果归功于 S.Bernstein[2]：

维普资讯 http://www.cqvip.com

[Bernstein 定理] 极小曲面方程(23)的一个整解 $z(x^1,x^2)$(即给定在整个 $\boldsymbol{R}^2$ 上的解)必然是一个仿射线性函数：

$$z(x^1,x^2)=\alpha x^1+\beta x^2+\gamma;\qquad \alpha,\ \beta,\ \gamma\in\boldsymbol{R}.$$

Bernstein 的发现揭示了线性微分方程与非线性微分方程的解之间的显著的区别。众所周知，只当 $m=1$ 时，位势方程(8)的解具有上述的简单形状，而当 $m\geqslant 2$，(8)的解的结构就复杂得多了。

Bernstein 定理一个有趣的证明可由Jörgens下列漂亮的、由他发现的结果([50]、[51])推导出来：

[Jörgens 定理] Monge-Ampère 方程(24)的每一个整解 $Z(x^1,x^2)$ 必然是变量 x^1 和 x^2 的二次多项式。

如果 $z(x^1,x^2)$ 是(23)的一个解，正如上面所提及那样，我们可以找到一个函数 $Z(x^1,x^2)$，它在 $\boldsymbol{R}^2$ 上不但适合方程(24)，而且也满足关系(25)。那么，根据 Jörgens 定理知 Z 的二阶导数在 $\boldsymbol{R}^2$ 上是一个常数函数。于是，由(25)式即知，z 的一阶导数为常数，从而 Bernstein 定理的论断获证。

Pogorelov[72] 根据 Flanders 和 Calabi 的准备工作将 Jörgens的结果推广到高维空间中去，这就是

[Pogorelov 定理] 所有定义在 $\boldsymbol{R}^m$ 上的方程

$$\det(Z_{x^\alpha x^\beta})=1$$

的解必然是一个 $x^1,\cdots,x^m$ 的二次多项式。

至今我们还不清楚Monge-Ampère方程(22)的解和与极小曲面方程(5)的解之间是否存在一种类似于关系式(25)那样的联系，只是有一点是可以肯定的。即使它们之间存在一种关系，我们也无论如何推不出 Bernstein 定理在高维空间成立。因为 Bombieri, De Giorgi 及 Giusti[4] 对于 $m\geqslant 8$，证明了方程(5)的非线性整解的存在性。相反地，对于 $m\leqslant 7$，方程(5)在 $\boldsymbol{R}^m$ 上的每一个整解均是仿射线性的，其中当 $m=3$是由 De Giorgi[10] 证明；对于 $m=4$，由 Almgren[1] 证明；而对于 $m=5,6,7$，是由 Simons[78] 证明的。另一方面，Moser[68] 已经在 1961 年就发现 Bernstein 定理有如下的“弱”形式，其对于任何维数的空间均成立的：

[Moser 定理] 极小曲面方程的每一个整解(即定义在整个 $\boldsymbol{R}^m$ 上)是一个仿射线性函数，如果它的梯度在 $\boldsymbol{R}^m$ 上一致有界的话。

结果表明，如果我们对于梯度 Dz 再补充一个合适的定量条件，那么，上述结果还可以进一步推广到由(19)和(20)所给定的极小曲面方程的整解中去。事实上，Hildebrandt-Jost-Widman[37] 证明了

[Hildebrandt-Jost-Widman 定理] 设 $z(x)=(z^{m+1}(x),\cdots,z^{m+p}(x))$，$x\in\boldsymbol{R}^m$ 是极小曲面方程组

$$\Delta_M z^i=0\quad 在\ \boldsymbol{R}^m\ 上，\ i=m+1,\cdots,m+p.$$

的一个C^2-整解，其中M是流形$\{\boldsymbol{R}^m,d\sigma\}$，并且$d\sigma$表示度量 $d\sigma^2=\gamma_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$，其中

$$\gamma_{\alpha\beta}(x)=\delta_{\alpha\beta}+z_{x^\alpha}(x)\cdot z_{x^\beta}(x)\ 和\ \gamma(x)\det(\gamma_{\alpha\beta}(x))$$

如果还存在一个满足

维普资讯 http://www.cqvip.com

$$c<\frac{1}{\cos^{l}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{\varkappa l}}\right)},\qquad l=\min\{m,p\},\qquad \varkappa=\begin{cases}1 & \text{当 } l=1\\ 2 & \text{当 } l\geqslant 2\end{cases}$$

的常数 c，使得

$$\sup_{R^m}\gamma(x)\leqslant c^2,$$

那么，函数 $z^{i+1},\cdots,z^{i+p}$ 均是仿射线性的。

显然，这结果在$p=1$的特殊情况下便得到 Moser 定理。我们尚不清楚上面定理的这些定量假设是否确实必要的？（除了$m=3$，Fischer-Colbrie[13] 已证明条件是多余之外。）实际上，这些假设应是必需的，如果我们回想起由 Lawson 和Osserman[59] 所揭示的极小曲面方程组的解的非正则性态的话。

上述定理的证明基于如下事实：根据 Ruh-Vilms 定理，由 $\boldsymbol{R}^{m+p}$ 的极小子流形映入 Graβmann 流形 $G(m,p)$的 Gauβ 映射 $G:M\to(m,p)$是调和的。此外，根据定理的假设，M的像$G(M)$位于 $G(m,p)$的一个“正则球”之中。而且，由下面的 Liouville 定 理就可推出G是一个常映射，因此，M是 $\boldsymbol{R}^{m+p}$ 的一个仿射线性子流形。

刚才提及的证明所用到的那个 Liouville 定理同样在[37]中获证，这就是

［**Liouville 定理**］ 设 $U:M\to N$ 是一个由单纯黎曼流形M映入到一个完备的黎曼 流 形N的调和映射，那么U是一个常映射，如果M的像 $U(M)$含于N的一个正则球之中。

这里，M是单纯的，是指M与 $\boldsymbol{R}^m$ 同胚，并且M可用坐标 $x\in\boldsymbol{R}^m$来描述，对于它，M的度量

$$d\sigma^2=\gamma_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha dx^\beta$$

是一致椭圆的，即存在两个正数 λ 和 μ，使得

$$\lambda|\xi|^2\leqslant\gamma_{\alpha\beta}(x)\xi^\alpha\xi^\beta\leqslant\mu|\xi|^2$$

对于所有 $x,\xi\in\boldsymbol{R}^m$ 成立。

再者，称N的一个以 $Q\in N$ 为中心，以 $R>0$ 为半径的(测 地)球 $B_R(Q)$是正则的，如果$B_R(Q)$与Q的切割处 $C(Q)$不相交，而且满足$\sqrt{\kappa_N}\,R<\pi/2$，此处

$$\kappa_N=\max\left\{0,\sup_{B_R(Q)}K_N\right\}$$

及 K_N 表示N的切割曲率。

由于假设

$$\sqrt{\gamma}\leqslant c<\cos^{-l}(\pi/(2\sqrt{rl})),$$

因此，在上述的 Bernstein 定理中的$M=\{\boldsymbol{R}^m,d\sigma\}$是单纯的，而且，$G(M)$含于一个正则球之中，前者的结论是显然，至于后者，由对于 $N=G(m,p)$给出关系

$$\kappa_N=\kappa=\begin{cases}1 & \text{当 } l=1,\\ 2 & \text{当 } l\geqslant 2\end{cases}$$

的估计(21)式结合 Crittenden 对于 $G(m,p)$的截割处所作的为人们熟知的考虑，（详细说明可见于[37]）还将 Fischer-Calbrie[13] 的估计考虑在内，便可得证。

现在，因为 Gauβ 映射 $G:M\to G(m,p)$是调和的，当 而且只当M的中曲率向量场是平行的（当 $p=1$，这意味着 $G:M\to\boldsymbol{R}^{m+1}$为调和映射，当且仅当$M$的中曲率变为常数），于是，上

维普资讯 http://www.cqvip.com

述的Bernstein定理不但对于极小图

$$\{(x,z(x)):x\in\boldsymbol{R}^m,\quad z(x)\in\boldsymbol{R}^p\}$$

成立，而且，对于中曲率场是平行的图形也是真确的。在 $m=2$ 情况下，下列由Hoffman-Osserman-Schoen[43]发现的较强的结果是正确的：

i）设M是一个在$\boldsymbol{R}^3$中具常中曲率的完备定向曲面，那么，M是一个平面，如果M的Gauβ像位于S^2的一个开半球面内的话。如果M的Gauβ像被包含在一个闭半球面之中，那么M不是一个平面，就是一个柱面。

ii）设M是在$\boldsymbol{R}^4$中的一个完备定向曲面，它的中曲率向量是平行、且不是零向量。再设$G(2,2)$表示为2-球面的积：$S_1\times S_2$。那么，如果它在Gauβ映射下的像具有这样的性质：它在S_1或在S_2上的投影当中的一个位于一个闭半球面内，则M是一个平面，或者是在$\boldsymbol{R}^3\subset\boldsymbol{R}^4$中的一个柱面，再或者是圆的一个乘积。

这个定理的证明主要借助由Osserman建立的函数论工具，以及Fischer-Cobrie和Schoen[14]的一个值得注意的结果。

由下列的一个先验估计就可以得到上面所述的关于调和映射的Liouville定理，该估计同样在[37]中获证的：

设$U:M\to N$是一个单纯的黎曼流形M映入N的一个正则球的调和映射，那么存在两个正数c和σ，使得对于所有$d>0$及所有满足条件

$$\mathrm{dist}_M(P_i,P_0)\leqslant\delta\leqslant d,\qquad i=1,\ 2$$

的点$P_0,P_1,P_2\in M$，均有不等式

$$\frac{\mathrm{dist}_N(U(P_1),U(P_2))}{\mathrm{dist}_M(P_1,P_2)}\leqslant\frac{c}{d^\sigma}$$

成立。

如果我们现在将P_0和δ固定，让$d\to\infty$，就得到

$$U(P)\equiv\mathrm{const}.$$

对于所有满足$\mathrm{dist}_M(P,P_0)\leqslant\delta$的$P$成立。但由于$P_0$及$\delta>0$均是任意选取的，于是，我们即知$U$是一个常映射。

我们补充说明一点：在Giaquinta-Hildebrandt的工作[18]中，对于调和映射$U:M\to N$以及其导数在M的内部及在M的边界上的先验估计的推导仅仅与M和N的几何度量有关。对于此估计的主要思想是在Hildebrandt-Widman以及Wiegner关于对角型拟线性椭圆型方程组的论文[32],[33],[35]、[36]、[83]、[84],[85]中，还有在Hildebrandt-Kaul-Widman关于调和映射的论文[34]中得到发展的。处理对角型方程组的主要工具是格林函数(参见[61],[81]、[20])。人们利用Harnack不等式[68]可以对格林函数进行精确的估计。在调和映射情况下，人们却可以使用较为简单的辅助手段来解决，正如Sperner[79]最近才发现的那样，因为Laplace-Beltrami算子Δ_M是线性的。

最近，Jost和Karcher[55]基于[18]的$C^{0,\alpha}$-估计获得关于$U,DU,D^2U,\cdots$的十分有用的“几何的”估计，他们是利用比黎曼的常规坐标更为有效的一种新型坐标系而得到的。

在这里，我们不打算对导致对角型拟线性椭圆型方程组的解的估计的并不那么简单的考虑进行详细的阐述，特别是，在报告[39]中对此已经有详尽的研究。因此，在这里我们倒不

维普资讯 http://www.cqvip.com

如再来说明几个属于我们考虑的课题范畴的结果。

首先，我们回忆一下著名的 Bers 结果，据此极小曲面方程(23)的孤立奇异性总是可去的。后来，由 Finn 在所有 $m\geqslant 2$ 维空间中对方程(5)给出类似的结果，Nitsche(对 $m=2$)及 Giorgi-Stampacchia(对 $m\geqslant 2$)证明了 $(m-1)$ 维 Hausdorff 测度为 0 的紧奇异集也是可去的(参见[69]，第539—560页)。但是，对于极小曲面方程组(19)，(20)的解，这个论断不再正确。正如 Lawson 和 Osserman [59] 所发现的那样他们注意到通过定义一个 Lipschitz 连续函数 z: $\boldsymbol{R}^4\to\boldsymbol{R}^3$ 如下

$$z(x)=\frac{\sqrt{5}}{2}|x|\,\eta\left(\frac{x}{|x|}\right)\quad 对于 x\neq 0,$$

在 $\boldsymbol{R}^4-\{0\}$ 中它是(19)，(20)的解，如果

$$\eta(w_1,w_2)=(|w_1|^2-|w_2|^2,\quad 2w_1\bar{w}_2)$$

表示 Hopf 映射 $\eta: S^3\to S^2$ 的话。这个富有启发性的例子还证明了具发散型的非线性一致椭圆型方程组的弱解 z 未必是正则的，如果 $z\in C^{0,1}$ 的话，而根据 Morrey[67]，由假设 $z\in C^1$ 必然得到的 z 的正则性。另一个用来说明同一现象的完全不同的例子在早些时候已由 Necăs 给出。

不久前，M.Meier [64] 将 Bers-Finn 的结果推广到极小曲面方程组(19)，(20)中去，其证明是基于[37]的考虑以及[34]的正则性定理，也就是

[**Meier 定理**] 设 $z(x)=(z^{m+1}(x),\cdots,z^{m+p}(x))$ 是在 $\Omega\backslash\Sigma$ 中的极小曲面方程组(19)，(20)的一个 C^2-解，其中 Ω 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的一个开集，Σ 表示 Ω 的一个 2－容量为 0 的紧子集，$m\geqslant 2$(举例来说，Σ 可由有限多个 Ω 的孤立点组成)。而且，有

$$\sup_{\Omega\backslash\Sigma}\gamma(x)\leqslant c^2,$$

其中 c 表示满足

$$c<\cos^{-1}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{\kappa l}}\right),\quad l=\min\{m,p\},\quad \kappa=\begin{cases}1 & 当\ l=1\\ 2 & 当\ l\geqslant 2.\end{cases}$$

的一个数。那么 $z(x)$ 可以延拓为(19)，(20)在整个 Ω 上的一个实解析解。

在 Meier 的证明中实质性的一步在于证明 $M=\{\Omega\backslash\Sigma,d\sigma\}$ 的 Gauβ 映射 G: $M\to G(m,p)$ 具有有限的 Dirichlet 积分 $E(G)$，因此，它可以延拓为从 $\tilde{M}=\{\Omega,d\sigma\}$ 映入 $G(m,p)$ 的一个弱调和映射 $\tilde{G}$，那么，由[34]的正则性定理得到 $\tilde{G}$ 的连续性，从而，使得 $z(x)$ 可连续延拓到整个 Ω 上，最后，由 Morrey 正则性定理推出上述论断。

另一个关于调和映射的 Liouville 定理来自 Choi[8]：

[**Choi 定理**] 设 M 和 N 是完备黎曼流形，其中 M 的 Ricci 曲率以 $-A$ 为下界，$A\geqslant 0$，此外，$U: M\to N$ 表示这样的一个调和映射，它的象 $U(M)$ 含于 M 的一个正则球中，那么，U 是一个常映射。

换言之，上面所用到的“M 是单纯”的条件可由“Ricci $M\geqslant -A$，$A\geqslant 0$”代替，这就提出这样的问题：对 M 须作那些别的假设，才足以证明一个调和映射 $U: M\to N$ 是一个常映射，而它的像 $U(M)$ 位于 N 的一个正则球之中？

我们注意到，为了对于 $\boldsymbol{R}^{m+p}$ 的极小子流形获得别的 Bernstein 定理，Choi 定理显然是不适用的。此外，它推广了丘成桐（当 $N=\boldsymbol{R}$，见[90]及郑绍远（$K_N\leqslant 0$，见[7]）先前所得的

维普资讯 http://www.cqvip.com

Liouville 定理。

对于二维的极小曲面，有一些特殊的工具供我们使用以充分利用极小曲面和共形映射之间的交互作用，除了Nitsche 的讲义[69]之外，我们打算将读者的注意力特别地引向Hoffman和 Osserman 报告[40]、[41]和[70]上来。从这些报告中我们可以获得一个那方面最新发展的清晰的印象。

我们还打算提一下关于调和映射在最近几年来所发现的一些结果，除了[34]的正则性和存在性结果及[48]的唯一性定理之外，值得人们特别注意的是在 $\dim M=\dim N=2$ 的情况下，关于调和的微分同胚映射 $U:M\to N$ 的存在性的结果。这些结果在[52]，[53]和[56]证明过，它们不但根据在[33]，[34]，[37]的估计，而且，还利用由 Heinz 在[29]和[30]中提出的泛函行列式的下界才获证的。

根据著名的 Sacks-Uhlenbeck 定理，具有有限的 Dirichlet 积分的调和映射 $U:M-\{P\}\to N$ 的孤立奇异点 P 是可去的，如果 $\dim M=2$ 的话。但是，这个定理对于 $\dim M\geqslant 3$ 不再成立。因为我们根据[34]，借助函数 $u(x)=\dfrac{x}{|x|}$，$x\in M=\{y\in \boldsymbol{R}^m;\ |y|\leqslant 1\}$，$m\geqslant 3$ 可以构造一个由 $M-\{0\}$ 映入 m 维球面 S^m 的调和映射 U。显然，它在 $x=0$ 处是不连续的，然而当 $m\geqslant 3$ 时，它的 Dirichlet 积分 $E(U)$ 却是有限的。

Jäger 和 Kaul [49] 最近曾经证明当 $m\geqslant 7$，这个映射在 Dirichlet 边界条件下，给出 E 的一个绝对极小值，而对于 $3\leqslant m\leqslant 6$ 它是不稳定的（即对于具有零边值的确定变差 Φ 而言，E 的第二变分 $\delta^2E(U,\Phi)$ 为负值）。人们可以推测 E 的(有界)绝对极小值的奇异集 Σ 的Hausdorff 维数至多是 $m-7$[1)]。这样一个结果如果成立的话，就会带给人们处理Bernstein 定理的一条全新的途径。目前，在值得注意的 Giaquinta-Giusti [16]，[17] 和 Schoen-Uhlenbeck [76] 的工作中人们只对于 $\dim\Sigma\leqslant m-3$ 给出了证明。

3. 两个双曲问题

在 $d\sigma^2=\gamma_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha dx^\beta$ 表示 Lorentz 度量的假设下，我们现在来考察方程(14)和方程(16)。我们假定$(\gamma_{\alpha\beta})$是带有符号差 +，－，…，－的一个对称矩阵。从 Lorentz 流形M映入 Riemann 流形或 Lorentz 流形N的调和映射$U:M\to N$ 仍由(14)定义，不过，目前这个方程组是双曲型了。从 Gu 的研究工作[21]，[22]可以看出，对于 $m=2$ 的情况，此问题没有结果。更为一般些我们考察形如

$$-D_\beta\{A^{\alpha\beta}(x,u)D_\alpha u^l\}=f^l(x,u,Du),\qquad l=1,2,\cdots,m \tag{26}$$

的双曲型方程组，即“对角型”方程组，式中的右边依赖于解 $u(x)$的一阶导数 Du 的平方。众所周知，如果我们使用调和坐标(见[15]，第218—220页)，则在真空中的 Einstein 场的方程便可按照(26)样式写为

$$R^{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R=-kT^{\alpha\beta}. \tag{27}$$

现在我们对于 Lorentz 度量 $d\sigma$ 来考察单个标量方程(16)这一简单得多的情况，在这里我们涉及一个齐次线性波动方程，也就是一个标准的双曲型微分方程。

1) Boldes先生新发现的结果似乎已初步指出这个推测一至少在这里所给定的形式中是不正确的 (6,12,82)。

维普资讯 http://www.cqvip.com

Hadamard[28] 曾提出这样的问题：度量 $d\sigma$ 满足什么样的条件，狭义的惠更斯原理才能成立？（见 Hadamard 的 “minor Premise” [28]，第53—57页。）也就是说，一个在空间中任意的有界的初扰动所产生的传播波，在什么条件下其以波的前阵面和波的后阵面为界的波的壳层形状是这样的，当初扰区域的直径趋于零时，波壳的密度是任意小。换言之，就是问对于 $\gamma_{\alpha\beta}$ 作哪些假设，由(16)所描述的“伪调和”函数是非散射的（即波的传播无“回声”进行）？

Hadamard 发现，为此必须 m 是一个偶数，而且 $m \geqslant 4$。此外，他还发现，(16)的基本解不含对数部分是一个充分且必要的条件。E.Hölder[44] 证明，只当 $\gamma_{\alpha\beta}$ 的数曲率 R 恒为零时才得到上述情况。

更一般地，我们考虑齐次线性的典型的双曲型方程

$$\gamma^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta u + A^\alpha\nabla_\alpha u + Cu = 0 \qquad (\nabla_\alpha = \text{共变式导数})。 \tag{28}$$

对此方程，P.Günter[23] 给出惠更斯原理成立的一个必要条件，当 $A^\alpha \equiv 0$，$C \equiv 0$ 时，这个条件便归结为 Hölder 条件 $R \equiv 0$。

Hadamard 问题，即刻划方程(28)中惠更斯原理成立的那些类，在今天还未完全解决，尽管 P.Günter 和他的学生已发现重要的部分结果(见[23]—[27]，[75]，[86]—[88])。此外，Hadamard 猜想所有这类方程（简称为“惠更斯波动方程”）均可应用下列的初等变换：

(i) 坐标变换；

(ii) 用一个函数 σ 乘(28)；

(iii) 度规变换 $u = \lambda x'$

转化为特殊的波动方程

$$(D_1^2 - D_2^2 - \cdots - D_m^2)u = 0.$$

Stellmacher[83] 证明了这个猜想对于 $m = 2l \geqslant 6$ 是错误的，然而，对于在物理上有重要意义的 $m = 4$ 的情况却未能解决。一直到P.Günter[25] 才成功地驳斥了这一情形的 Hadamard的猜想，他证明了所谓平面对称度量（平面波度量）

$$d\sigma^2 = dx^1dx^2 - a_{\mu\nu}(x^1)dx^\mu dx^\nu. \tag{29}$$

为 Hadamard 猜想提供了反例（其中，μ 和 ν 是从 3 到 $m = 2l \geqslant 4$ 求和，$(a_{\mu\nu}(x'))$ 是正定的，而且只与变量 x^1 有关）。Schiming[75] 证明了对于度量(29)而言，惠更斯原理对于麦克斯韦方程

$$d\omega = 0,\ \delta\omega = 0 \tag{30}$$

也成立。其他关于惠更斯原理成立的有趣结果我们可在工作[27]，[63]，[86]—[88]中找到。

举例来说，在 Schwarzschild 场[83] 中在标量的波传播情况下，惠更斯原理是不成立的。然而，电磁波在满足 Einstein 方程 $R_{\alpha\beta} = 0$ 的情况下，按照惠更斯原理传播的充要条件是度量 $d\sigma$ 为(29)型。

在刚才所探讨过的问题范畴中，我们还可以找到许多有趣的结果的，这些结果对于微分几何学家来说是富有魅力的。这里我们只打算提一提 Günter[26] 所发现的惠更斯原理和巴赫场方程之间的联系。巴赫(Bach)场方程是由巴赫在对共形不变的 Weyl 相对论的研究中提议用来代替 Einstein 方程的一种方程，它是变分的积分

维普资讯 http://www.cqvip.com

$$\int C^{\alpha\beta\mu\nu} C_{\alpha\beta\mu\nu} \sqrt{-\gamma}\, dx$$

的 Euler 方程，其中 $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ 表示共形曲率张量的分量。此外，E.Hölder 在其论文[45]的第 3 节中所作的一些说明是值得我们认真思考的。

（廖亮源译 陈家鼐校）

参 考 文 献

[1] Almgren,F.J., Some interior regularity theorem for minimal Surfaces and an extension of Bernstein's theorem. Annals of Math. (2), 84 (1966), 277—292.

[2] Bernstein, S.N., Über ein geometrisches Theorem und seine Anwendung auf die partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus. Math. Z.26 (1927), 551—558.

[7] Cheng, S.-Y., Liouville theorem for harmonic maps. Preprint.

[8] Choi, H.J., On the Liouville theorem for harmonic maps. Preprint 1981.

[9] Courant,R., Dirichlet's principle, conformal mapping, and minimal surfaces. New York, Interscience (1950).

[14] Fischer-Colbrie, D., and Schoen, R., The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of nonnegative scalar curvature. Comm. Pure Appl. Math. 33 (1980), 199—211.

[15] Fock, V., Theorie von Raum, Zeit und Materie. Akademie-Verlag, Berlin, 1960.

[16] Giaquinta, M., and Giusti, E., On the regularity of the minima of variational integrals. Acta Math., erscheint demnächst.

[17] Giaquinta, M., and Giusti,E., The singular set of the minima of certain quadratic functionals. Analysiss, erscheint demnächst.

[18] Giaquinta, M., and Hildebrandt, S., A priori estimates for harmonic mappings. J.Reine u. Angew.Math., erscheint demnächst.

[20] Groter, M., and Widman, K.-O., The Green function for uniformly elliptic equations. Man. math., 37 (1982), 303—342.

[21] Gu, Ch., On the Cauchy problem for harmonic maps defined on two-dimensional Minkowski space. Preprint ITP-SB-79-85.

[22] Gu, Ch., On the initial-boundary value problem for harmonic maps from the 2-dimensional Minkowski space. Manuscripta math., 33 (1980), 51—58.

[23] Günther, P., Zur Gültigkeit des Huygensschen Prinzips bei partiellen Differential leichungen vom normalen hyperbolischen Typ. Ber. Verh. Sächs.Akad.Wiss. Leipzig, Math.-nat. Kl.100, Heft 2, 1952.

[24] Günther, P., Über einige spezielle Probleme aus der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung. Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss.Leipzig, Math.-nat. Kl. 102, Heft 1, 1957.

[26] Günther, P., Über das Cauchysche Problem für die Bachschen Feldgleichungen. Math. Nachr. 69 (1975), 39—56.

[28] Hadamard, J., Lectures on Cauchy's problem in linear partial differetial equations. New York, Dover publications, 1952 (Original edition, Yale Univ. Press, 1923).

[30] Heinz, E., Existence theorems for one-to-one mappings associated with elliptic systems of second order, I, II. J. Analyse math. 15, 325—352 (1965); 17 (1966), 145—184.

[31] Hildebrandt, S., and Kaul,H., Two-dimensional variational problems with obstructions,

维普资讯 http://www.cqvip.com

and Plateau's problem for H-surfaces in a Riemannian manifold.Comm.Pure Appl.Math. 25 (1972), 187—223.

[32] Hildebrandt, S., and Widman, K.-O.: Some regularity results for quasilinear elliptic systems of second order. Math. Z., 142 (1975), 67—86.

[33] Hildebrandt, S., and Widman, K.-O.: On the Hölder continuity of weak solutions of quasilinear elliptic systems of second order. Ann. Scuola Norm.Sup.Pisa (IV), 4(1977), 145—178.

[34] Hildebrandt, S., Kaul, H., and Widman, K.-O.: Ab existence theory for harmonic mappings of Riemannian manifolds. Acta Math., 138 (1977), 1—16.

[35] Hildebrandt,S.,and Widman,K.-O.: Variational inequalitles for vector-valued functions. J. für Reine u. Angew. Math., 309 (1979), 191—220.

[36] Hildebrandt, S., and Widman, K.-O., Sätze vom Liouvilleschen Typ für quasilineare elliptische Gleichungen und Systeme. Nachr. Akad. Wiss Göttingen, II. Math.-Phys. Klasse, Nr. 4, 41—59, Jahrgang 1979.

[37] Hildebrandt, S., Jost, J., and Widman, K.-O., Harmonic mappings and minimal submanifolds. Inventiones math., 62 (1980), 269—298.

[39] Hildebrandt, S.: Nonlinear elliptic systems and harmonic mappings Proc. 1980 Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Epuations, Vol.I, 481—615, Science Press, Beijing 1982.

[40] Hoffman, D.A., and Ossermau,R.: The geometry of the generalized Gauss map.Memoirs of the Amer.Math.Soc.Vol. 28, 1980.

[41] Hoffman, D.A., and Osserman, R., The area of the generalized Gaussian image and the stability of minimal surfaces in S^n and R^n.

[44] Hölder, E.: Poissonsche Wellenformel in nichteuklidischen Räumen. Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-nat. Klasse, 99 (1939).

[45] Hölder, E., Mit harmonischen Feldern verwandte Differentialforman unter Rand-und Anfangsbedingungen. Ann. Acad.Sci.Fenn. 336/7 (1963).

[48] Jäger, W., and Kaul, H., Uniqueness and stability of harmonic maps and their Jacol fields, Manuscripta math. 28 (1979), 269—291.

[49] Jäger, W., und Kaul, H., Vortrag in Oberwolfach,Konferenz über"Variationsrechnung", Juli 1982.

[55] Jost, J., und Karcher, H.: Geometrische Methoden zur Gewinnung vo na-priori-Schranken für harmonische Abbildungen. Man. math. 40 (1982), 27—77.

[56] Jost, J., and Schoen, R., On the existence of harmonic diffeomorphisms between surfaces. Inventiones math.66 (1982), 353—359.

[61] Littman, W., Stampacchia, G., and Weinberger, H. F., Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Sci. fis. mat. III. Ser. 17 (1963), 43—77.

[63] McLenaghan, R.G.: An explicit determination of the empty space-time, on which the wave equation satisfies Huygens' principle. Proc. Cambridge Phil. Soc. 65 (1969), 139—155.

[64] Meier, M.,Removable singularities of bounded harmonic mappings and minimal submanifolds. Preprint 1982.

[67] Morrey, C.B.: Multiple integrals in the calculus of variations. Springer, Berlin-Heidelberg-New York (1968).

[69] Nitsche, J.C.O.: Vorlesungen über Minimalflächen. Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1975,

（下接第299页）

维普资讯 http://www.cqvip.com

$$A(u) = -P^{12}, \quad B(v) = -P^{23},$$

而Yang-Baxter方程化为

$$P^{12}P^{23}P^{12} = P^{23}P^{12}P^{23},$$

这正是置换群的基本性质，所以，Yang-Baxter方程乃是置换群这一数学结构的一种推广，而这也就是为什么Yang-Baxter方程会进入如此之多的数学和物理学分支领域的原因。

（张莫宙译　朱重远校）

文献与注释

[1] H.A.Bethe,Z.Physik, 71, 205(1931).

[2] L. Hulthen, Arkiv, Astro, Fysik 26A, No., 11(1938).

[3] E.H.Lieb and Liniger, Phys, REv, 130, 1605(1938)

[4] C.N.Yang, Phys, Rev.Letters, 19, 1312, (1967).

[5] E.H.Lieb, Phys. Rev. Letters 19, 103(1967).

[6] B. Sutherland, Phys, Rev.Letters 19, 103 (1967); E.h.Lieb, Phys.Rev. Letters 19, 108 (1967); C.N.Yang, Phys, Rev.Letters 19, 586(1967).

[7] R.J.Baxter, Amer.Phys, 70, 193(1972).

[8] L.D.Faddeev, Physica Scripta, 24, 832(1981).

[9] Braid Group, Knot Yheory and Statistical Mechanics, ed.C.N.Yang and M.L.Ge, (World Scientific, (1989); Yang-Baxter Equations, Conformal Invariance and Integrability in Statisical Mechanics and Field Theory, eds. M. Barber and P. Pearce, (World Scientific, 1990).

[10] C.h.Gu and Chen Ning Yang, Commun.Math, Phus, 122, 105 (1989).

（上接第281页）

[70] Osserman, R., Minimal surfaces, Gauss maps, total curvature, eigenvalue estimates and stability. The Chern Symposium 1979, Springer, New York-Heidelberg-Berlin 1980.

[72] Pogorelov, A.V., On the improper convex affine hyperspheres. Geometriae dedicata, 1 (1972), 33—46.

[74] Ruh, E.A., and Vilms, J., The tension field of the Gauss map.Trans.Amer Math.Soc., 149 (1970), 569—573.

[75] Schimming, R., Zur Gültigkeit des Huygensschen Prinzips bei einer speziellen Metrik. ZAMM, 51 (1971), 201—208.

[76] Schoen, R., and Uhlenbeck, K., A regularity theory for harmonic maps.J. Diff. Geom. 17 (1982), 307—335.

[79] Sperner, E., jr., A priori gradient estimates for harmonic mappings. Preprint no.513, SFB 72, Bonn (1982).

[80] Stellmacher, K.L., Eine Klasse von Huygensschen Differentialgleichungen. Math. Ann., 130 (1955), 219—233.

[83] Wiegner, M., Über die Regularität schwacher Lösungen gewisser elliptischer Systeme. Manuscripta math. 15 (1975), 365—384.

[84] Wiegner, M., Ein optimaler Regularitätssatz für schwache Lösungen gewisser elliptischer Systeme. Math. Z., 147 (1976), 21—28.

[85] Wiegner, M., A-priori Schranken für Lösnngen gewisser elliptischer Systeme.Manuscripta math., 18 (1976), 279—297.

[86] Wünsch, V., Über selbstadjungierte Huygenssche Differentialgleichungen mit vier unabhängigen Variablen. Math. Nachr., 47 (1970), 131—154.

[90] Yau, S.T., Harmonic functions on complete Riemannian manifolds. Comm. Pure Appl. Math., 28 (1975), 201—228.