

学科与专题介绍

外代数与数学中的重要概念

Gunnar Fløystad

献给 Stein Arild Strømme (1951–2014)

忽视外代数是 20 世纪数学的不幸.

—— Gian-Carlo Rota, 《浑然一体的思想 (Indiscrete Thoughts) 》 (1997)

本文概述外代数 (exterior algebra) 和它的形变 (deformations) 或商 (quotients) 如何引出数学中 5 个领域的本质:

- 组合数学
- 拓扑学
- Lie (李) 理论
- 数学物理
- 代数几何

外代数首先出现在 1844 年 Hermann Grassmann (格拉斯曼) (1809—1877) 的书《线性扩张理论 (Ausdehnungslehre) 》, 以及 1862 年认真细致的修订版中, 这个修订版在 2000 年有了英译本 [20]. Grassmann 在当时属于德国的斯德丁 (Stettin, 现为波兰西北部的一个城市 —— 译注) 的预科学校当教授. 部分因为 Grassmann 是一个有独创性的思想家, 也许部分是因为他所受的教育没有太多关注数学, 他的书的第 1 版具有的哲学形式重于数学形式, 因而在数学界几乎没有什么影响. 第 2 版 (1862) 在数学意义上是严格的. 然而, 它还是没什么影响, 可能是由于它转向另一边时走得太远, 而且显得缺乏动机. 它用超过 400 页的篇幅发展了外代数的外积和内积, 以及较少有人懂的回归积 (regressive product), 后者从直观上对应于线性空间的交. 这就把它与几何联系起来, 还说明分析可以怎样扩展到适用于大量的函数. 仅在 19 世纪的最后 20 年里, 受 Grassmann 工作的启示而发表的著作达到了很大的数量. 也许有点遗憾的是, Grassmann 在他第 2 版的书中有一个独有的数学形式, 因为他在前言中说 “[扩张理论 (extension theory)] 不单单是数学分支中的一个, 如同代数、组合理论或者函数论那样, 而是超越了它们. 在这个分支下, 所有的基本元素得到了统一, 因而它成为了数学整体结构的基石.”

本文指出, 他离这里所说的并非太远. 我们对 Grassmann 原先的表述不再作进一步的描述, 而是在完全现代的环境中展示外代数. 关于 Grassmann 更多的历史背景, 可参见杰出的向量分析史的著作 [7], 以及关于 Grassmann 多方面遗产的会议论文集 [41] 和 [38]. 最近 15 年来, 出现了一系列的书, 提倡外代数及其派生物 Clifford 代数在物理学、工程学和计算机科学极为有效的应用. 我们将在最后一节简要地报告这方面的内容.

译自: Notices of the AMS, Vol. 62 (2015), No. 4, p. 364–371, The Exterior Algebra and Central Notions in Mathematics, Gunnar Fløystad, figure number 1. Copyright ©2015 the American Mathematical Society. Reprinted with permission. All rights reserved. 美国数学会与作者授予译文出版许可.

Gunnar Fløystad 是挪威卑尔根大学的数学教授. 他的邮箱地址是 gunnar@mi.uib.no.