进展简介

八十年代的分析和几何*

M. Atiyah

1.引言

高等科学研究所（I.H.E.S.）成立二十五周年纪念日显然是对数学作一个适当的总结的很特殊的机会。想要总结过去二十五年的数学是很有意思但是也是很困难的事。想要预见今后二十五年的数学就更有意思但是也更困难了。所以我的目标要谦逊得多，我将只讲一讲现在的数学，也就是八十年代的数学。

事实上，正如我的讲题所指出的，我将集中在几何和分析的互相作用上。这当然是由于我的个人见解，但是对我这样选择讲题也还有更客观的解释。今年夏天我参加了华沙的国际数学家大会，当 Fields 奖颁发以后，有一件事使我很震动，就是三位获奖者都是在几何和分析交叉的领域中工作的。这似乎表明这个领域当前在数学中产生了许多令人振奋的事，对于我选择这个题目也提供了一些理由。

2. 1983年 Fields 奖获奖者

现在我要简要地概述一下 Fields 奖获奖者的工作，并分别加上一些评论。

Connes. Connes 的主要工作是阐明了Ⅱ型和Ⅲ型 von Neumann 代数的构造。泛函分析的这个分支受到了物理学的思想的很大影响，但是也有其几何的侧面。构造Ⅱ型或Ⅲ型代数的标准的方法是从一个遍历地作用于一个测度空间上的群（例如圆周上的无理旋转）开始。

Connes 在他近期的工作中一直以大得多的深度研究这个几何侧面。他特别考虑了李群在流型上的以及更一般地在叶状结构上的光滑作用，并且把代数分析精密化了使得能够考虑可微函数（而不仅是可测函数）。出现了微分几何和泛函分析的内容丰富的融合，而且 K-理论和表现论有密切的关系。例如，Ruelle 和 Sullivan 引入的可测叶状结构的实同调类（它是纤维化中纤维的通常的整同调类的推广）在 Connes 的理论中起了很自然的作用，因为它定义了这个叶状结构的 Von Neumann 代数的迹。

这样把线性分析引进几何学是非线性有限维问题（几何问题）和线性无限维技巧的基本的联系。从经典力学过渡到量子力学也就是这个精神。

* 本文是作者1983年10月在法国高等科学研究所（I.H.E.S.）的讲话，未发表。

丘成桐， 丘成桐的工作一直是在以非线性偏微分方程求解几何问题这个经典的传统之中的。我将提到他的两个最重要的成就。其一是Calabi猜想的解决，这个猜想的一个特例是三维复射影空间中的任意4次非奇异代数曲面都具有Kähler-Einstein度量。这一点应该看作是平面三次曲线必有平坦度量这个经典的结果的推广。关于丘的度量，除了它的存在以外迄今所知极少。进一步的研究似乎是重要的。

丘成桐的另一个成就是与R.Schoen共同解决了广义相对论中的正质量猜想。在服从Einstein方程的宇宙里，只要这个宇宙是渐近平坦的，就可以定义整体的质量概念。但是事先并不知道它是否正的。这个重要问题最后由Schoen和丘成桐相当一般地解决了，他们特别使用了极小曲面方程。

有趣的是E.Witten根据对旋量场的Dirac方程进行研究而给出了第二个证明。因此这些方程是线性的而极小曲面方程则是非线性的，Witten的证明在分析上更为初等。Lawson Gromov也曾在更加几何化的框架下用过这个概念，很清楚，旋量给出了一个有力的几何工具。

Thurston， 紧Riemann曲面的理论是以几何、拓扑和复分析的精巧的相互交织为基础的。Thurston进一步提炼了这个经典的理论，特别是关于Teichmuller空间和蜕化性质的研究，并由此进而发展了一个给人深刻印象的研究三维流形的程序。主要的猜想是：任意三维流形都有一个‘几何构造’，这大体上就是说它可以分成许多小块，而每一块都有一个局部齐性度量，这个猜想已经在一些重要情况下得证。这是经典的二维理论的一个深远的推广。

八十年代（甚至可能还有九十年代）的一个突出问题就是完全一般地证实Thurston的猜想。寻找一个研究途径，它以巧妙地选择一个变分问题为基础，这是很吸引人的。证明一个这种类型的存在定理将最终成为一个分析问题，然而为了得到最好的提法，大量的几何直观是必要的。

3. 四维几何学

除了以上所总结的以外，在几何与分析的交叉处一直都有令人激动的其它发展。M.Freedman和S.Donaldson合作的工作在四维几何学中产生了壮观的新结果。最值得注意的是，现在我们知道了，四维欧氏空间还有一个非标准的微分构造。准确些说，有一个微分流形M^4同胚于$\mathbf{R}^4$但有一个奇异的性质，即它有一个紧集K不能被任何可微嵌入的$S^3\subset M^4$所包含。

这个结果清楚地表明四维几何学比任何人所曾设想的更为精微。或许这是因为Riemann曲率张量需要四个指标才能完全地展现出来，因而任何多余的东西都会使事情更容易一些。换个说法就是，在四维情况下，曲率的效应产生最大的“相互作用”。

设想未来的进展中会有Thurston在三维情况下的工作和新近出现的四维的工作的某些综合，这样设想是合理的。说不定起点之一是考虑确能包含奇异紧集K的闭三维流形$\Sigma^3\subset M^4$、因为$\Sigma^3\neq S^3$，应该研究Σ^3特别是它的基本群。

一个与此有关的大问题是决定一个给定的闭的四维拓扑流形是否具有不等价的微分结构。

我也应该指出，Donaldson 的工作用到一些非线性偏微分方程。它是受到的物理学的强烈影响的。Donaldson 理论的基础，Yang-Mills 方程，就来自基本粒子物理学的模型。

Donaldson 定理的一个很有趣的例子其实是涉及四次代数曲面的（在上述丘成桐的工作中引述过）。虽然上述四维流形拓扑地是另一个流形 M^1 和三个 $S^2\times S^2$ 的连通幷，但在可微范畴中都不然，M^1 不能光滑化。

4. 计算机的冲击

另一个与几何和分析有关幷且吸引了许多人注意的现代研究方向是动力系统的渐近性态。特别是"奇异吸引子"的存在。与此密切相关的是研究映射的迭代，例如复平面用多项式的自映射以及相关连的 Julia 集。所有这些工作的一个主要主题都是某些奇异对象（例如连续但处处不可微曲线）的出现以及越来越多地应用计算机以图了解这些现象。

Thurston 的工作中也有与此相类似之处，即与 Klein 群相关的病态的集，在这里也广泛地使用了计算机。

Freedman 的工作涉及了几何作图的无限次的迭代，这可能也是值得注意的。这可能意味着奇异 $\mathbf{R}^4$ 在无穷远处的性态也有与 Thurston 的工作中出现的相似的"病态"。换个说法，这些奇异的 $\mathbf{R}^4$ 是自然地出现的。这也值得作一些研究。

虽然计算机在分析浑沌性态时起了很大的作用，十分奇怪地是，它在完全相反的方向上也是十分重要的。某些类微分方程是出人意料地"可积"或"可解"的，而且有值得注意的"孤立子"解。孤立子的研究一直是过去十到二十年的一个主要的特点，而这首先是受到计算机上的数值工作的刺激。这个领域特别繁荣和生动，因为它对范围很广的科学家和数学家都有兴趣，从做实际工作的电机工程师直到研究代数几何的纯数学家。一些最早的例子来自微分几何，而紧 Lie 群的环路空间的几何现在在这理论中起了重要作用。

在分析问题和几何问题互相交混的领域，环路群提供了一个无穷维几何的有趣例子。理论物理中还出现了其它的无穷维流形，整个这个领域有许多引人入胜的、细致的数学问题。它们大都涉及发散量的规则化（如微分算子的行列式）。十分可能，这个方向的工作在将来还会增多。

5. 结束语

看一看几何和分析相互作用的这些领域，有几件事是清楚的。首先是一种值得注意的向经典问题和观念的返回：Bäcklund 关于孤立子的工作，Klein和Lie 的几何观念，Julia 的分析观念。还有就是从物理学中本质地输入观念和问题。最后，精巧的计算机的发展和应用提出了一种新形式的刺激，它肯定将迅速增长。

从这个简单的总结可以清楚看到，几何和分析结合起来，正处于很健康的状况之中，而在整个这个十年內很可能是十分突出的。

（齐民友译　钟家庆校）

创记录的数字因子分解*

——数学家们在三十二小时内解决了一个存在了三个世纪之久的难题

位于阿布奎基的桑迪亚国立实验室是一个多方向的研究机构，它因为从事包括核武器在内的、高度机密的国防项目而闻名天下。上星期，桑迪亚国立实验室又爆出了属于另一种类的特大新闻。该机构的数学家们宣布，他们已得到一个六十九位数的因子分解，这是至今为止被分解出的最大的一个数字。他们的成功远远超出了智力训练的范围，它对国家安全有着深远的影响。

如同曾经学过中学代数的任何人都知道（或者曾经知道）的那样，因子分解意味着将一个数字分解成大于1的最小的整数的乘积，例如，3和5恰是15的因子。不过随着数字的增大，因子分解也相应地变得困难了。直到最近，数学家们对分解五十位以上的数还感到绝望，他们推算，计算速度最快的计算机（每秒钟进行一百万次除法运算）将花费一亿多年时间方能完成这项工作。

一九八二年秋天，一次偶然的相遇填补了这个空白。在加拿大温尼伯召开的一个科学会议期间，桑迪亚国立实验室应用数学部主任Gustavus Simmons在与一位数学家和一位工程师喝啤酒的时候仔细考虑了因子分解问题——工程师来自制造世界上计算速度最快的计算机的克雷研究公司。这个叫Tony Warnock的工程师指出，克雷计算机的内部运行特别适用于因子分解，因为这种工作基本上是靠试凑法完成的。克雷计算机与普通计算机不同，它能同时抽样整串的数字，就象格筛从沙子中筛出硬币一样。

在桑迪亚国立实验室，Simmons跟他的同事，即数学家James Davis和Diane Holdyidge，教他们自己的克雷计算机如何进行因子分解，这包括研究编制一套算法，即一套代数运算指令。这些指令将因子分解工作分成若干小步骤，他们令人羡慕地获得了成功，他们接二连三地实现了五十八位数、六十位数、六十三位数和六十七位数的因子分解。

然而，到此为止，他们的克雷计算机的能力似乎到达了极限。但是，桑迪亚的工作小组又作了一次尝试。这一次他们的目标是这样一个数字，它是十七世纪法国数学家Marin Mersenne汇编的著名的数表中最后一个尚未分解的数。这个数字是：132686104398972053177608575506090561429353935989033525802891469459697。幸运的是，这个数字可以表成$2^{251}-1$。整整用了三十二个小时十二分钟的计算机时间（在一个月内，利用零星时间断断续续地工作），答案出来了。Mersenne的那个数字有三个基本因子：178230287214063289511，61676882198695257501367和12070396178249893039696 81。Simmons说："解决了一个存在了三个

（下转第67页）

* 原题：Cracking a Record Number—Mathematicians Solve a three—Century-old puzzle in 32 hours，译自：1984年2月13日美国《Time》，41页。