奇点，哲学，数学

数学哲学

(5)

42-46

奇点的哲学

Thom, R

René THOM

周建义

O1-0

当 S. Tojasiewicz 向我提议给这一卷 —— 关于奇点理论的最新结果 —— 写一前言，我首先有几分犹豫. 他让我解释一下，在什么地方以及为什么奇点理论使我觉得很重要 —— 这已经超出了数学而一直到了哲学上，在他善意的坚持下，我只得让步. 我在这里简捷地解释一下，以数学方式定义的奇点是怎样以及为什么被引入到我们对现实世界的描述和理解中的.

1 数学和预报

我们每个人都能接受，从实用主义的观点，科学的一个本质工作是对一些现象作预报. 然而预报，这是从对过去的认知中抽取对将来的认知. 用数学的话来说就是对一个已知 $t<0$ 时 (在过去的时间，记作 t^-) 的函数 $f(t)$ 向 $t>0$ 时 (记作 t^+) 的外推. 在数学提供的经典外推方法中，只有一个方法是以函数本身的典型特征外推的，这就是解析延拓. 事实上，认为当时这一瞬间 ($t=0$) 在延拓中起一个特殊作用是不现实的，也就是说，从 $f(t^-)$ 过渡到 $f(t^+)$ 的算子不能有任意性，因为对趋向于 0 的 t^- 和 t^+、这个算子趋向于等同；这等于说，如果 f 是解析的，这个算子只能是等同.

如果我们接受以上观点，假定对过去的研究能够提供一个解析的函数 $f(t^-)$, 那么 f 的解析延拓就能提供在 t^+ 上的预报. 这至少在解析延拓存在时是对的. 当然，解析区域将展现奇点，它们在区域的边界阻碍延拓. 由此看来，第一类的奇点是那些限定解析区域的奇点. 这些奇点中有些是简单的：比如象 $\frac{1}{z}$ 一样的亚纯函数的极点 $z=0$. 人们可以绕过这样的奇点. 有时，在绕过象 $\sqrt{z}$ 具有的奇点时，我们将引入函数的多值性，这实际上导至了解的不确定性.

最后我们注意一下，Riemann 的单值化定理告诉我们，在 $\mathbb{C}$ 中，任一开的圆盘都是一个解析区域. 在此意义下，$\mathbb{C}$ 中的一个解析区域的边界集可以是拓扑地很任意的，因而没有理由指望对它可能呈现的 "突变" 作一个完全分类. 但是在 $\mathbb{C}^2,\dots,\mathbb{C}^n, n>2$ 中，我们知道一个解析区域的边界应该满足一些，q- 凸性条件，如果这个集合是足

原题： Philosophie de la singularité. 译自： Banach Center Publication, Vol. 20, p. 7–14, PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw 1988.

够光滑的，这些条件也是充分的 (Oka 定理).

2 为什么解析？

以上的观点可能引起下面的异议：如果科学上的预测真的都导至了 —— 通过最后的分析 —— 解析延拓的使用，那么物理学家，化学家，生物学家，他们起什么作用？一句话，实验科学起什么作用？他们的工作是否缩减到只给我们将要延拓的函数 $f(t^-)$ 提供基本数值？这不是给了数学家们一个太漂亮的角色吗？再者、为什么认为所有的预报都以解析性为基础呢？没有一个算子，如双曲算子那样，在范畴 C^∞ 或 C^2 上运作的吗？为什么我们的宇宙以一个解析的实体为模型呢？

我们可以回答说 —— 不是没有理由地 —— 物理上的解析性的使用经常引出人们所说的 "路灯的哲学"[1]. 然而我认为有些更满意的回答. 至于非解析的外延，在 C^∞ 或 C^2 类上作用的算子通常是 "解析" 算子的自然推广、他们把解析函数变换成解析函数. 在 C^∞ 的预备定理的情形，我们有解析算子的一个非典型的 (也是非确定的) 推广. 在基础物理学里，解析性的应用的起因是对称群 (外部的或内部的) 的表示的解析特征标，这些群涉及粒子理论和它们的相互作用. 这个解析特征标是在所考虑的对称群 G 是紧的情形下证明 (Peter-Weyl 定理). 当然、以时间 $\mathbb{R}$ 为参数的群不是紧的，而动力学的丰富多彩就源于此. 但是在物理上，以及在其它学科，通常对 "渐近规律" 感兴趣而忘掉那里的过渡性规律. 在此情况下，我们通过在一紧致群中一个适合的表示除去迁移群 $\mathbb{R}$ 的非紧致特征. 因此量子力学的一个深刻起因是 Von Newmann 定理，他说交换李代数 (q,p) 在复投影群 $\mathrm{Proj}(k)$ 的一个表示提升成 Heisenberg 群在同样维数 k 的酉群里的一个表示.

但是，即使接受解析性是普遍的公设，人们也没有解决所有的问题. 事实上，根据定义，一个实验数据 $f(t^-)$ 总是接近值. 而我们很清楚地知道，在 C^∞ 或 C^k 拓扑中的一个紧致集上的函数 f 的所有邻域中，都存在一些解析函数 g. 它们的解析域和 (f) 的是很不同的. 解析区域的边界的这种不稳定性实际上破坏了仅以实验数据为基础的精确预报的可能性. 如果说物理成功了，那是因为它在现实世界的最终属性上做了一些本体论的假设，即宇宙的广阔性. 只有一个理论允许 "预先" 限制函数 $f(t^-)$ 的类别、使得这个解析区域的不稳定性能够被有效地控制，因而得到高精度预报.

3 描述与分类

我们首先看一下奇点中的一个纯静态的概念. 我们勘查一个空间，测定它的均质性或者 —— 相反地 —— 检测它的异质性. 我们把具有邻域 U_x、U_y 的两个点 x、y 放

---

[1] 讽喻一位先生的古典轶事，他在一条阴暗的街道丢失了钱包，却到路灯的光照下寻找，而他自己很清楚是在别的地方丢失的.

在同一个等价类中，如果这两个邻域能够连续地从其中一个变换为另一个，在此变换过程中，这些局部邻域的 (代数的或拓扑的) 局部类型没有任何中断. 由此我们自然地引进分层的概念. 在那些 "好" 的情形下 (解析集，半解析集，次解析集)，如此定义的等价类是一些嵌入的子流形， "层"、它们之间的相联关系被规定为要满足某些切空间的连续性条件. 这是 Hessler Whitney 的巨大贡献，他列举了微分准则 (性质 a)，b)). 在好的情形下、这些准则允许我们确立具有好的性质的分层的存在性. 比如，我们可以定义从一个流形到一个分层集 $K \subset \mathbb{R}^n$ 的映射：它的逆像 $f^{-1}(K)$ 是一些对几乎所有的 f 保持拓扑稳定性的分层集合. 一个逆紧解析态射 $\phi: A \to B$ 能够在弱意义下分层如果存在分层 $A = \cup_i X_i, B = \cup_j Y_j$ 使得 $f|_{X_i}$ 是到一个象层 $Y_{j(i)}$ 的一个满射. 但是只有那些 "没有吹开" 的态射才有好的拓扑性质，也就是说，定义了 $A \times I \to B \times I$ 的乘积分层的 ϕ 的变换 $\phi_\lambda, \lambda \in I$ 导致 ϕ_λ 的类型不变性. 在具有吹开 (亦即，某些 A 的层经受着邻近层的超过它的 "倒塌") 的一般情况下，这通常不再是对的，在此情形下，分层态射的一个精细的概念有待定义. 如果现在很好地理解了分层集 (嵌入到 $\mathbb{R}^n$ 的，因而是分离的) 的这种形式化，我们可以梦想有一个非分离的分层集的理论，它似乎涉及一些很简单的非紧致群的商的描述. 例如、 $\mathbb{R}^n$ 对于一个线性双曲自同态射的商. 这个观点下的分层理论无疑还会有很多发展.

4 奇点和传播过程

我们刚刚探讨了作为静态的持久形式的奇点. 这只是奇点这个概念的外貌. 事实上，奇点总是显式或隐式地与一个具有传播性质的，定义在形体在环境空间中的一个邻域上的全局过程相联系. 奇点也就以过程向空间传播时的阻碍 (或关联于一个阻碍) 的形式出现. 就象外部世界的实体 —— 很经常地 —— 被发现是我们的活动的阻碍、我们也就理解了为什么奇点的概念总是当我们想在科学上证明一个相对于我们来说的外界实体的存在时出现. 根据本文的部分 2，唯一使解析延拓稳定的那些理论模型总是建立在理论实体 (粒子. 场， ...) 的存在上的，对这些实体凭经验的表示是活动的障碍 (比如，我们考虑在碰撞试验中扩散 - 散射的作用). 然而有两个相当不同的情况要考虑.

4.1 有阻碍形体的流的冲激形成的奇点

我们考虑一个浸入到一个流 (物质的或能量的) 中的不能穿透的空间形体 (F). 这个流通过空间中形体 (F) 的邻域，碰撞 (F) 并且有把它卷走的趋势. 但是形体 (F)(在原则上) 是固定的，拒绝被带走；它将立即在流中产生一些方向的，密度的和振幅的变更，有些振幅还可能在障碍的下游永久地持续. 这阐述了一个在实验中不可缺的过程：观察、就象我们在物理中学到的，观察总是包含一个观察者，所有的视觉观察经过最后的分析都是一个几何投影 (p)，(比如，在观察者的视网膜球面上). (在量子力学中，同样地所有的测量都是一个投影 $p^2 = p$). 因此，我们从来看不见事物

的本身，而仅仅是它们的投影轮廓线，亦即，投影 p 在形体 (F) 上的限制的临界值的集合. 这特别地是 Morse 理论的情形，一个作用于流形 M, 到实轴 $\mathbb{R}$ 的光滑实函数，流形 M 抵制被压平，通过结晶出一些临界点来显示它对流 p 的对抗，这些临界点的分布和指标允许我们重建 M 的拓扑. 那些投影轮廓线通常呈现出奇点，其中一些是 "一般的 (générique)", 也就是说，它们阻止 (F) 的位置或者投影 p 的变形. 对每一对 (n,k) 从 $(\mathbb{R}^n,0)$ 到 $(\mathbb{R}^k,0_1)$ 的光滑映射只有有限个 (拓扑) 类的一般 (générique) 奇点. 最近的工作 (J. Mather, Arnol'd 和他的学派) 有很多是为了阐明奇点的这种现象. 关于这一点，我们将看到在泛函分析中，一个算子的谱仅仅是一个临界值的集合，一条 "投影轮廓线".

就象 Platon 岩洞中的囚犯，我们只看到事物的影子 (它们的投影轮廓线). 已知一个形体 (F) 的轮廓，重要的是重建这个形体. 我们将以这种方式解释 Hironaka 的解奇点定理. 给定一个嵌入到一个欧几里德空间 $\mathbb{R}^k$ 的 "好" 集合 E, 我们把它考虑成嵌入到 $\mathbb{R}^n$ 的一个更简单的集合 $\tilde{E}$ 在线性投影 $p:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ 下的象. 我们寻求使 $\tilde{E}$ 最可能地接近一个光滑流形. Hironaka 的定理显示我们不能避开正规交叉 (在 $\mathbb{C}$ 上) 或带角流形 (在 $\mathbb{R}$ 上). 然而对于一个嵌入到一个欧氏空间 $\mathbb{R}^m$ 的分层集合 K, 我们能够把 K 的每个层换成它的管状邻域，这些管都横截地相交. 集合 K 也就能够定义成带角流形 (沿着一个相联关系) 的并和. 角和正规交叉的这种持续性是解析奇点的一些最奥秘的事实之一.

由于观察者的位置变化时，一个现象的外貌也变化，所有的现象都可以看作是一个局部外貌间的等价类. 然而在欧几里德空间中的一个等价关系的标准几何实现是一个叶状结构. 由此可见，叶状结构的奇点，叶状结构的投影，或者双叶状结构的重要性. 同样地也有微分形式和向量场的奇点的重要性. 这些理论，它们几乎不超出一般情形，还处在幼年期，给未来的数学家留下了优美的事物.

4.2

在第二种情况，奇点以一个环境空间中的传播结构与它自身的冲撞的形式出现，或者说，奇点是由一个被其限制的传播过程生成的. 这显然是解析区域的边界奇点的情形. 我们也提一下在一个流形上的流的奇点，我们知道如果那个流形是 Euler 特征非零的，那么这些奇异点必然存在. 一般来说，当我们想构造一个纤维丛的截面时，我们总是可以在底空间的一个阻碍集之外把它构造出来. 我们努力去确定这个阻碍集在结构上稳定的一般形式，那么它的奇异点就有一个非零 "指标", 它定义成奇异点集的环链 (link), 在正则局部结构所构成的流形中的一个非零同伦类. 这些数学构造在物理世界中有等价物：几何光学的焦散面 (又名 Lagrange 子流形), 超音速流的冲激波. 最后，物质 (晶体，向列态液晶，碟状液晶) 的有序结构一般都展现出我们叫做缺陷的间断. 有一个关于稳定缺陷理论，它类似于纤维丛的截面奇点的指标理论，(法国 Toulouse 的 Kléman, 苏联 Mineev 的 Volovik 准则).

5 作为形体局部生成元的奇点

在奇点中，仅看到宇宙环境的无能为力这一点就去接受某个全局结构是错误的．我们可以从相反的方面去看，要求一个奇点具有组织环境空间的能力．无论如何，这是在代数上发生的事情．一个多项式 $P(x)$ 是由它的零点集（$\mathbb{C}$ 上）决定的．一个亚纯函数，除去一个可逆因子外，是由它的极点和零点决定的．一个代数集 A 可以看作是空间的一个静态闭集，它也可以生成一个处处定义的函数的理想 $\mathcal{F}$．从代数的观点看（至少在复数域上），存在一个集合论的观点与函数的局部代数的观点之间的拟完备等价性．

但是，还有另一种观点，它赋于奇点一个组织环境的能力．投影轮廓线的奇点集有一个分层结构，它表示出奇点的等级．我们可以把一个一般点 v 上的纤维 F_v 考虑成中心奇异纤维 $F_0 = p^{-1}(0)$ 的一个变形（通常是平坦的）．因此引入了一个解析超曲面芽的万有变形理论，万有展开空间是光滑的和有限维的．由此而知，使用解析延拓的一个新形式 —— 绝对点状的 —— 的可能性．这里，我们通过使展开参数化的“外部”变量来扩展初始变量（“内部变量”）的空间．这正是基础突变理论理论的原理，我们知道这个理论在描述（否则预言）象流的冲撞，焦散面（Lagrange 流形的投影）的奇点这样的现象时有令人信服的应用．

在物理上，一个载荷粒子是一个场的源：我们可以说这个粒子通过一种持久的爆发（吹开）生成了它的场．同样，在有序结构理论中，某些疵点是这个结构增长或者瓦解的特有的地方；因此，晶体的解体可能是昌须的来源，由于晶体沿着解体轴的加积产生的快速增长区域．

作为奇点的作用 —— 一点也不完整的 —— 罗列的结束，我想提一下在生物和人文科学中，作为信息的“指标”载体的奇点所起的作用．这里要说是追溯“编码”的起源：它总是涉及，在最后的分析上，停止，出生，二叉分枝的破裂或者在流中的一个障碍产生的汇流等事实．（比如：打开一扇门以保证被它分开的两个房间相连通）．这些“原始型”奇点在胚胎学的器官形成或在我们的工具的构思和制造中起到巨大的作用（由于它是隐性的，这一点很少被人领会）．在控制论中描述的表示原因的事实（刺激，抑制）上也起着同样重要的作用．这里我们进入了一个很少为人知晓的领域，试图找到与逻辑或布尔系统的动力对应的数学家们还很少进入的领域．

结论 作为环境的一个传播结构的缺陷的奇点和作为传播机制本身的源泉的奇点之间的这种对比，提出了一个我们能实际上在所有科学领域中找到的中心问题．现代物理更愿意接受第一个观点：粒子是它产生的场的源泉．爱因斯坦（Einstein）在广义相对论中更愿意在粒子中看到时空的一个测度的奇点．在此我们又找到了在数学中心的连续和离散间的基础疑难．我们还会在心理学上再找到这个同样的疑难：我们是因为思考而说，或者相反地，因为说而思考？

（周建义 译　姚景齐 校）