Euler-Poisson 方程的另一推导

Olivier de La Grandville

摘要 很少有方程如 Euler-Poisson (欧拉 – 泊松) 方程那样看起来简单，但同时缺少对它的明白易懂的解释. 我们在这里提供一个简单的推导 —— 只需初等运算 —— 它有助于完全揭示其含义.

Euler-Poisson 方程

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,y',y'')-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}(x,y,y',y'')+\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''}(x,y,y',y'')=0 \tag{1}$$

构成了 $y(x)$ 是泛函

$$I=\int_a^b F(x,y,y',y'')\,dx \tag{2}$$

一个极值的一个一阶条件.

这个四阶非线性微分方程对于大多数人来说似乎都是令人不快的. 事实上，在 (1) 中实施完全的求导会导致一个 4 个变量 x,y,y',y'' 的不少于 24 个函数的微分方程. 在这 24 个函数中，有 9 个都带有三阶导数 y''', 有 1 个由于包含有四阶导数 y^{IV}, 其性状甚至更坏. 不仅其一般形式在实践中从未有过闭形式解，而且其表达式，即使是紧凑形式的，也难以直观地理解，因而难于记忆.

Euler-Poisson 方程的传统推导，是当最优曲线被给出一个变分时先对被积函数的一个元素施行一次分部积分，并对其另一元素施行两次分部积分，最后应用变分法基本引理. 这里我们提供另一种最初由 Euler 所设计，具有几何本质的推导 (关于 Euler 推导这个方程的方法以及一个 19 岁男孩 Ludovico de La Grange-Tournier 写信给 Euler 的美好故事，见 [3]).

假设 $y(x)$ 是极值问题的解，并且 $F(x,y,y',y'')$ 和 $y(x)$ 是足够多次可微的. 我们用图 1 中相应于网格 $x_i=a+i\triangle x$ 的折线来逼近 $y(x)$, 这里 $i=0,1,\ldots,n$; $\triangle x=(b-a)/n$. 我们再用极限 $\lim_{\triangle x\to 0}\sum_0^{n-2}F(x_i,y_i,\frac{y_{i+1}-y_i}{\triangle x},\frac{y_{i+2}-2y_{i+1}+y_i}{(\triangle x)^2})\triangle x$ 代替 $\int_a^b F(x,y,y',y'')\,dx$. 为了简化记号和阐述，我们用 $F(x_i)$ 表示这个有限和的第 i 项; 类似地，我们用 $\frac{\partial F}{\partial y}(x_i),\frac{\partial F}{\partial y'}(x_i),\frac{\partial F}{\partial y''}(x_i)$ 表示在 $(x_i,y_i,\frac{y_{i+1}-y_i}{\triangle x},\frac{y_{i+2}-2y_{i+1}+y_i}{(\triangle x)^2})$ 处取值的几个偏导数. 为方便，我们用 (x, y) 表示任意点 (x_i,y_i), 并给

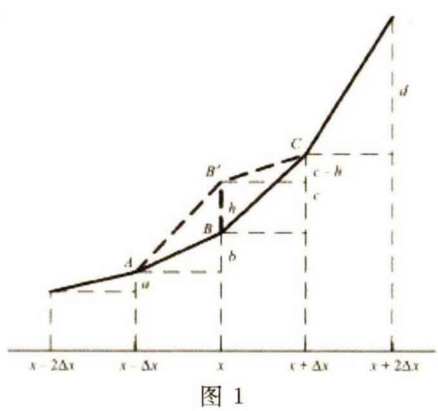

图 1

译自：The Amer. Math. Monthly, Vol. 123 (2016), No. 8, p. 821–824, An Alternate Derivation of the Euler-Poisson Equation, Olivier de La Grandville, figure number 1. ©the Mathematical Association of America 2016. Reprinted with permission. All rights reserved. 美国数学协会授予译文出版许可.

作者的邮箱地址是 odelagrandville@gmail.com.

$y(x)$ 一个任意小的增量 h.

这样一个增量将对泛函有直接影响，并通过由 $y(x)$ 的一阶和二阶导数诱导的变化产生非直接的影响. 我们现在用线性逼近来量化这些影响.

在被积函数和泛函上的直接影响简单地就是 $\frac{\partial F}{\partial y}(x)h\triangle x$, 忽略了 h 的高阶项 (这个限制将适用于以下所有的逼近).

我们现在来考虑由导数改变而引起的影响. 从图 1 可以直接看到，这些改变是 $h/\triangle x$ 和 $-h/\triangle x$. 它们的总影响是

$$\begin{aligned}&\frac{\partial F}{\partial y'}(x-\triangle x)(h/\triangle x)\triangle x+\frac{\partial F}{\partial y'}(x)(-h/\triangle x)\triangle x\\ =&-h\left[\frac{\partial F}{\partial y'}(x)-\frac{\partial F}{\partial y'}(x-\triangle x)\right]\equiv -h\triangle\frac{\partial F}{\partial y'}(x-\triangle x).\end{aligned}\tag{3}$$

最后我们需要添加在点 $x-2\triangle x$, $x-\triangle x$ 和 x 处由二阶导数所引起的一些改变的结果. 在点 $x-2\triangle x$ 处，在由 y 接受 h 的改变前，斜率的初始增量是 $\frac{b-a}{\triangle x}$, 斜率增量的初始比率, 即初始二阶差分，是 $\frac{b-a}{\triangle x}\frac{1}{\triangle x}$. 新的比率，即新的二阶差分，是 $\frac{b+h-a}{\triangle x}\frac{1}{\triangle x}$. 因而这个比率的增量是 $h/(\triangle x)^2$, 它导致泛函的增量 $\frac{\partial F}{\partial y''}(x-2\triangle x)\frac{h}{(\triangle x)^2}\triangle x=\frac{\partial F}{\partial y''}(x-2\triangle x)\frac{h}{\triangle x}$.

在点 $x-\triangle x$ 处, 斜率增量的初始比率是 $\frac{c-b}{\triangle x}\frac{1}{\triangle x}$; 新比率是 $\frac{c-h-(b+h)}{\triangle x}\frac{1}{\triangle x}$, 它蕴含了二阶差分增量 $-2h/(\triangle x)^2$. 这就产生了泛函的增量 $\frac{\partial F}{\partial y''}(x-\triangle x)\frac{-2h}{(\triangle x)^2}\triangle x=-2\frac{\partial F}{\partial y''}(x-\triangle x)\frac{h}{\triangle x}$.

最后, 用类似的方法，在点 x 处 y 的单位改变量将给二阶差分带来一个等于 $h/(\triangle x)^2$ 的改变，它给泛函带来 $\frac{\partial F}{\partial y''}(x)\frac{h}{(\triangle x)^2}\triangle x=\frac{\partial F}{\partial y''}(x)\frac{h}{\triangle x}$ 的改变.

二阶差分比率的改变对泛函的总影响等于

$$\begin{aligned}&\frac{\partial F}{\partial y''}(x-2\triangle x)\frac{h}{\triangle x}-2\frac{\partial F}{\partial y''}(x-\triangle x)\frac{h}{\triangle x}+\frac{\partial F}{\partial y''}(x)\frac{h}{\triangle x}\\ =&\frac{h}{\triangle x}\left\{\left[\frac{\partial F}{\partial y''}(x)-\frac{\partial F}{\partial y''}(x-\triangle x)\right]-\left[\frac{\partial F}{\partial y''}(x-\triangle x)-\frac{\partial F}{\partial y''}(x-2\triangle x)\right]\right\}.\end{aligned}\tag{4}$$

括号中的每一项可以分别被写为 $\triangle\frac{\partial F}{\partial y''}(x-\triangle x)$ 和 $\triangle\frac{\partial F}{\partial y''}(x-2\triangle x)$; 它们的差是 $\triangle\frac{\partial F}{\partial y''}(x-\triangle x)-\triangle\frac{\partial F}{\partial y''}(x-2\triangle x)\equiv\triangle\triangle\frac{\partial F}{\partial y''}(x-2\triangle x)\equiv\triangle^2\frac{\partial F}{\partial y''}(x-2\triangle x)$. 因而这个总影响就等于

$$\frac{h}{\triangle x}\left\{\triangle\frac{\partial F}{\partial y''}(x-\triangle x)-\triangle\frac{\partial F}{\partial y''}(x-2\triangle x)\right\}=h\frac{\triangle^2}{\triangle x}\frac{\partial F}{\partial y''}(x-2\triangle x).\tag{5}$$

我们现在可以把 y 的 h 改变对泛函的影响与一阶、二阶导数的改变蕴含的影响加在一起. 这样，对泛函产生的总增量 $\triangle I$ 近似地等于

$$\triangle I\approx h\left[\frac{\partial F}{\partial y}(x)\triangle x-\triangle\frac{\partial F}{\partial y'}(x-\triangle x)+\frac{\triangle^2}{\triangle x}\frac{\partial F}{\partial y''}(x-2\triangle x)\right].\tag{6}$$

除以 $h\triangle x$, 得到

$$\frac{\triangle I}{h\triangle x}\approx\frac{\partial F}{\partial y}(x)-\frac{\triangle}{\triangle x}\frac{\partial F}{\partial y'}(x-\triangle x)+\frac{\triangle^2}{(\triangle x)^2}\frac{\partial F}{\partial y''}(x-2\triangle x);\tag{7}$$ (下转 172 页)

处. 数学家倾向于带着目的阅读，或者至少希望由此产生富有成效的建议. 这里我们可以引用 Jacobi 在年轻时关于一本刚读过的书的话："直到现在，" 他说，"每当我学习了一件有价值的工作，它就激发我原创性的想法；这次结果很是两手空空". 1) 如 Dirichlet (狄利克雷) 所注意的，我从他那儿借用了这段引语，讽刺的是，所说的这本书正是 Legendre (勒让德) 的《积分练习 (Exercices de calcul intégral)》，里面有椭圆积分的工作，很快就为 Jacobi 最伟大的发现提供了灵感；但那些话是典型的. 数学家去阅读最主要是为了激发他的原创性 (或者，我可以补充说，有时不是那么原创的) 思想；我认为，说他的目的比历史学家的是更直接的功利主义没有不公平. 然而，双方基本的职责都是处理数学思想，那些过去的，那些现在的，如果他们能，那些未来的. 双方都能在对方的工作中得到无价的训练和启迪. 因此我最初的问题 "为什么有数学史？" 最后归结为问题 "为什么有数学？"，幸运的是我未感到被召唤来回答.

(席南华 译　　陆柱家 校)

****

(上接 192 页)

在 (7) 式中对 $h\to 0$ 和 $\triangle x\to 0$ 取极限，并令此极限 2) 等于 0, 导致

$$\lim_{h\to 0,\triangle x\to 0}\frac{\triangle I}{h\triangle x}=\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}+\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''}=0, \tag{8}$$

此即为 Euler-Poisson 方程.

致谢 (略)

参考文献

[1] R. Courant, Über eine neue Klasse von kovarianten Funktionalausdrüken, welche aus Variationsproblemen entspringen, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikaliche Klasse, Zeit-schriftenband 1925 (1925) 111–117.

[2] I. M. Gelfand, S. V. Fomin, Calculus of Variations. Trans. R.A. Silverman. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1963.

[3] H. Goldstine, History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century. Springer Verlag, New York, 1980.

[4] P. Lévy, Leçons d'analyse fonctionnelle. Gauthier-Villars, Paris, 1922.

[5] V. Volterra, Theory of Functions and of Integral and Integro-differential Equations. Dover Publications, New York, 1959.

(陆柱家 译　　姚景齐 校)

---

1) "Wenn ich sonst ein bedeutendes Werk studiert habe, hat es mich immer zu eignen Gedanken angeregt ... Diesmal bin ich ganz leer ausgegangen und nicht zum geringsten Einfall inspiriert worden". (Dirichlet, Werke, Bd. II, S. 231).—— 原注
原文误把 "he said, (他说,)" 置于 Jacobi 所说的话中. —— 校注

2) 看似无害的乘积 $h\triangle x$——(7) 式左端的分母 —— 恰为多边形 $ABCB'$ 的面积. 如果 $\lim_{h\to 0,\triangle x\to 0}\triangle I/(h\triangle x)$ 存在，则它相应于泛函 I 的一阶导数，这是由 Vito Volterra (伏尔泰拉) 于 1887 年引进，继而由 Paul Lévy (莱维) 和 Volterra 在 1925 年改进和发展的概念；见 [4] 和 [5]. 对于高阶泛函导数的推广属于 Richard Courant (库朗) [1]. 在 Gelfand (盖尔范德) 和 Fomin [2] 中有类似于图 1 的图. —— 原注