为什么 Navier-Stokes 方程的全局正则性问题是困难的？

Terence Tao (陶哲轩)

编者按 本文是 Terence Tao (陶哲轩) 于 2008 年在美国数学会出版的书《结构与随机性 (Structure and Randomness)》中的 §3.4, 题为 “Why global regularity for Navier-Stokes is hard”, §3 的标题为 “Open Problems”. 为了读者方便，特把文中提到的诸文献列于文后.

Navier-Stokes (纳维 – 斯托克斯) 方程的全局正则性问题当然是克莱数学促进会 (Clay Mathematics Institute) 千禧大奖难题之一 [Fe 2006]. 它是问一组非线性 PDE (偏微分方程) 的 Cauchy (柯西) 问题全局光滑解是否存在. 对很多 (当然不是所有的) 其他的非线性 PDE, 有数不清的这种全局正则性结果；例如，人们已经知道的两个空间维数而不是三维的 Navier-Stokes 方程的全局正则性 (这个结果基本上要追溯到 Leray (勒雷) 的论文 [Le1933]!). 为什么很多其他方程的全局正则性很简单，或者至少是可以得到的，而三维 Navier-Stokes 方程的全局正则性问题考虑起来如此困难？

在本文中, 我只是从纯数学的观点和 Clay 数学促进会给出的精确公式中考虑 Navier-Stokes 方程的全局正则性问题；我将不会讨论所有的问题, 如这个问题的精确解对物理、计算流体力学或者其他学科有什么 (积极的或者消极的) 影响，因为这些超出了我的专业领域.

上述问题的一个普遍回答是*湍流*—— 三维 Navier-Stokes 方程的行为在精细尺度 (fine scale) 下比在粗糙尺度 (coarse scale) 下，是更加非线性的 (因此也是不稳定的). 我将稍有不同地描述这种困难，如 *超临界*. 或者，更精确的，我们知道 (但知道的不多) 所有 Navier-Stokes 方程的全局控制量关于尺度或者是超临界的 —— 这是指它们在精细尺度的行为控制上比在粗糙尺度的控制上弱多了，或者是 *非强制的*—— 这是指无论在粗糙尺度还是精细尺度，它们根本没有真正地控制住解. (稍后我将更精确地定义这些术语.) 目前，所有我们知道的得到一个 (确定性的) 非线性 PDE 的 Cauchy 问题全局光滑解的方法要求满足下面 3 个条件之一：

(I) 精确的和显式的解 (或者至少通过一个精确的显式的变换使之成为简单得多的 PDE 或 ODE (常微分方程));

(II) 扰动假设 (如，小初值，初始值接近一个特殊解，或者在某处包含一个 ε 的更一般的假设);

(III) 一个或多个全局控制量 (如总能量), 这既是强制的，也是临界的或者次临界的.

译自：Why global regularity for Navier-Stokes is hard, In Structure and Randomness: pages from year one of a mathematical blog, p.220–233. Providence: American Mathematical Society, 2008, Terence Tao. 作者的邮箱地址是 tao@math.ucla.edu.

注意到，(I), (II) 或者 (III) 是目前全局正则性结果的必要条件，但远不是 *充分的*; 否则，关于各种非线性 PDE 的全局正则性问题的论文就会大幅缩短了．特别的，目前有很多关于 Navier-Stokes 方程的全局正则性优秀的、深入的、重要的论文，但它们都对初始值或解有额外的假设 (I), (II) 或 (III). 例如，在近些年，我们已经看到在假设 (II) 下关于全局正则性好的结果 [KoTa2001], 和在假设 (III) 下的全局正则性结果 [EsSeSv2003]; 关于目前结果的一个完整文献目录太长了而不能在这里给出.

对任意大的光滑初始值的 Navier-Stokes 方程全局正则性问题缺少所有这 3 个条件. 不改变问题的陈述，或者不添加一些另外的假设，(II) 不可能成立；而且，在扰动的情形，Navier-Stokes 方程几乎是线性的，而在非扰动情形，它的行为非常非线性，所以这基本上不可能有非扰动情形到扰动情形的简化，除非有人想出一个高度非线性的变换来得到这种简化 (如一个单纯的尺度变换不可能起效). 因此，如果人们想完全解决这个问题，只剩下 3 个可能的策略：

(1) 精确地和显式地解 Navier-Stokes 方程 (或者至少将这个方程精确地显式地转化到一个更简单的方程);

(2) 发现一个新的全局控制量，既是强制的，也是临界的或次临界的；或者

(3) 发现一种即使没有上面的条件 (I), (II), (III), 也可得出整体光滑解的新方法.

这要花费很多的努力，特别是在策略 3 上，但是方程的超临界带来一个相当大的困难，使得所有已知的方法全都失效了．策略 1 可能是毫无希望的；上个世纪的经验表明 (被完全可积系统排除在外，Navier-Stokes 方程 *不是* 其中的例子), 大部分非线性 PDE, 甚至那些从物理产生的方程，对 *任意* 初始值都没有解的显式公式 (虽然可能有从特殊值 (如对称) 得来的有趣的精确解). 策略 2 也许有一点希望；毕竟，Poincaré (庞加莱) 猜想在 Perelman (佩雷尔曼) 引进了一个新的既是强制的，也是临界的 Ricci (里奇) 流的全局控制量 (*Perelman 约化体积* (reduced volume)) 后变得可以解决了 [Pe2002] (虽然仍是非常困难的). (也可以在 [Ta2006c] 看我关于这个主题的阐述.) 但我们仍然不善于发现新的全局控制量；引用 Klainerman [Kl2000] 的原话，“发现 *任何* 基本物理方程的广义解的任何新的界，比能量提供的更强的界，是一个有重要意义的大事件”(强调我的).

稍后我将回到策略 2, 而现在让我们讨论一下策略 3. 第 1 个基本的观察是，如很多其他基本的模型方程一样，Navier-Stokes 方程遵循一个 *尺度不变量*: 特别地，给定任意的尺度参数 $\lambda > 0$, 和任意光滑速度场 $u\colon [0,T)\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, 对某个时间 T, 解 Navier-Stokes 方程，人们可以通过公式

$$u^{(\lambda)}(t,x)\colon = \frac{1}{\lambda}u\left(\frac{t}{\lambda^2},\frac{x}{\lambda}\right)$$

构造一个新的速度场 $u^{(\lambda)}\colon [0,\lambda^2 T)\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, 把 Navier-Stokes 方程一直解到时间 $\lambda^2 T$. (严格地讲，这个尺度不变量只是作为外力出现在非周期域 $\mathbb{R}^3$, 而不是周期域 $\mathbf{T}^3$. 这里人们可以在另外的背景下，稍作努力来修改这个讨论，关键点是近似尺度不变量可以在下面的考虑中起一个完美尺度不变量的作用. 压力场 $p(t,x)$ 也可以通过 $p^{(\lambda)}(t,x)\colon = \frac{1}{\lambda^2}p\left(\frac{t}{\lambda^2},\frac{x}{\lambda}\right)$ 尺度化，但是这里我们不需要研究压力．粘性 ν 保持不变.)

我们需要考虑尺度参数大的情况 (如 $\lambda > 1$). 然后考虑把从 u 转化到 $u^{(\lambda)}$ 的变换看作一种 "放大镜", 得到 u 的精细尺度行为, 并且匹配一个相同的 $u^{(\lambda)}$ (尺度化, 但是速度慢下来) 粗糙尺度行为. 这个放大镜的作用在于通过在一个固定尺度 (如单位尺度) 用某种方法鉴别两种行为, 而允许我们在相同的立足点处理精细尺度和粗糙尺度行为. 我们观察到, 尺度要求精细尺度行为比粗糙尺度有小得多的时间尺度 (T 相比 $\lambda^2 T$). 因此, 例如, 如果一个单位尺度解在时间 1 处有某个有趣的行为, 那么尺度化后的精细尺度解在空间尺度 $1/\lambda$ 和时间 $1/\lambda^2$ 处将会展现某个相似的有趣的行为. 当解把能量转换到逐步越来越精细的尺度时, 能够发生爆破,[1] 因此转换发展越来越迅速, 并且最终到达一个奇性, 在这个奇性中, 大量发展的时间和空间的尺度收缩到零. 因此, 为了避免爆破, 我们必须阻止这种从粗糙尺度 (或低频) 到精细尺度 (或高频) 的能量运动.

现在, 让我们考虑 Navier-Stokes 方程的任意大初始值的光滑解, 并且让这个解在一个很长的时间段 $[0, T)$ 中发展, 假设这个解除去可能的时间 T, 一直是光滑的. 在发展的最后期, 如接近终点时间 T 时, 没有理由希望解还与初值类似 (除去扰动的方法, 这些类似性在任意大初始值情形就不会有了). 事实上, 我们可能有的解在晚期行为的唯一控制是那些由发展的全局控制量提供的. 除非突破策略 2, 我们只有两个非常有用的全局控制 (即, 在非常大的时间 T 也有界) 量:

- *最大动能* $\sup_{0 \le t < T} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |u(t,x)|^2 dx$ 和
- *累积能量耗散* $\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u(t,x)|^2 dx\, dt$.

事实上, 能量守恒律表明这些量的界都被初始动能 E 所控制, 这些量可能很大 (我们假设我们的初始值可能很大), 但是至少假设是有限的. 通过把这些界代回到原始方程, 我们可以再得到一些 Navier-Stokes 流的有界量, 但是它们和上述有完全相同的 "效果".

控制这两个量意味着, 解, 甚至在很晚期的时间, 保持在某个函数空间的有界区域内, 在这个意义上, 上面的两个量是*强制的*. 但这基本上是我们唯一知道的解在晚期的行为 (而不是一直到时间 T 解都是光滑的, 但是这只是一个定性的假设并且没有给出界). 所以, 除非我们突破策略 2, 否则我们不能排除最坏的情形, 即解在靠近时间 T 基本上是*任意* 光滑且散度为零的向量场, 它的动能和累积能量耗散 [2] 关于 E 都是有界的. 特别地, 接近时间 T, 对某个空间尺度 $1/\lambda$ 来说, 解能够把它的大部分能量聚集到精细尺度.

现在, 让我们运用放大镜, 把精细尺度的行为通过 λ 放大到一个粗糙尺度 Navier-Stokes 方程的解. 如一个简单的变量变换所示, 假设精细尺度的解能够 (在最坏的情形) 与动能和累积能量耗散至多为 E 的任意光滑向量场一样糟糕, 那么重尺度化的单位尺度的解能够与动能和累积能量耗散至多为 $E\lambda$ 的任意光滑向量场一样糟糕. 注意到, 由我们的两个关键量给出的控制被 λ 的一个因子破坏了; 由于这种破坏, 我们说, 这些量是*超临界的* (supercritical) —— 在越来越精细化的尺度下, 他们开始变得对控制解越来越无

1) 有许多途径可使这些陈述变得严格, 例如利用 Littlewood-Paley 理论, 但我们不在这里讨论它, 而宁愿对如 "粗糙尺度" 和 "精细尺度" 这样的术语不加定义.—— 原注

2) 当然, 累积能量耗散不是单一时间的一个函数, 而是在所有时间上的一个积分; 为了当前的讨论, 我就不再提这个事实了.—— 原注

用. 这应该和*临界*量对比 (如二维 Navier-Stokes 方程的能量), 它在尺度下是不变的, 因此控制所有尺度是同样有效的 (或者是同样糟糕的), 并且*次临界* (subcritical) 量的控制在精细尺度下更加有效 (而在非常粗糙的尺度下越来越不起作用).

现在, 假设我们知道动能和累计能量耗散与 $E\lambda$ 一样大的单位尺度解的例子, 但是这个解能把它们的能量在一个界为 $O(1)$ 的时间内转化到下一个更精细的尺度, 如, 一个 1/2 尺度. 考虑到之前的讨论, 我们不能排除我们重尺度化的解有像这个例子一样的行为的可能性. 不做这种尺度变换, 这意味着我们不能排除原始解将把它的能量在时间 $O(1/\lambda^2)$ 内从空间尺度 $1/\lambda$ 变换到空间尺度 $1/2\lambda$ 这个可能性. 如果这种糟糕的情况一遍又一遍的重复, 那么几何级数的收敛表明解事实上可能在有限时间内爆破. 注意到, 这种糟糕的情形不会一个接一个地立即发生 (*自相似* (self-similar) 爆破情形); 解可能从尺度 $1/\lambda$ 转换到 $1/2\lambda$, 等一下 (在重尺度化的时间内) 再 "混合" 系统并且回到一个 "任意" (因此也可能是 "最糟糕情形") 状态, 然后转换到 $1/4\lambda$, 如此下去. 即使累积能量耗散的界能够提供某个关于这个系统在这种 "持续模式" 能够 "等候" 多长时间的界, 但它太弱了而不能在有限时间内阻止爆破. 用另外一种方法陈述, 我们没有严格地, 确定性的方法阻止 "Maxwell (麦克斯韦) 妖 (demon)" 在越来越频繁的区间 (在绝对时间) 破坏解, 上述情形的各种各样的重尺度化来推动解的能量到越来越精细的尺度, 直到爆破出现.

因此, 为了使策略 3 能够成功, 我们基本上需要排除有*任意大*动能和累积能量耗散的单位尺度解把它们的能量转换到下一个最高的尺度的情形. 然而我们知道的每个单个的分析技巧 (除了那些关于*精确*解的, 如策略 1) 需要至少一个解的界. 基本上, 为了控制所有的非线性误差, 人们需要至少一个界 —— 我们知道的任何没有通过精确解推进的策略有至少一个需要被控制的非线性误差. 这里我们唯一有的是解的*尺度*界, 它不是在解的模有界的意义上的界; 因此我们被困住了.

总之, 通过策略 3 得出 Navier-Stokes 方程全局正则性的讨论一定不可避免地 (借助尺度不变量) 提供一个全新的给出单位时间任意大的非线性单位尺度解的非平凡控制的方法, 若没有策略 1 或策略 2 的新突破这看起来是不可能的. (有两个人们可以尝试利用的漏洞: 人们可以转而尝试改善每次到下一个更精细尺度转化的 "等待时间" 或 "混合数量" 上的控制, 或者尝试利用每个这样的转换需要某一数量的能量耗散这一事实, 但是人们能够使用相似的尺度讨论来进一步表明没有沿着策略 2 的路线的新的界, 或者在单位尺度对任意大初始值有效的某种讨论, 这种类型的漏洞不能被利用.)

用更加专业的术语来重述: 动力所在的 "能量面" 可以用尺度不变量作商. 作完商后, 即使在单位尺度下, 解可以跑到离原点任意远, 我们失去了解的所有控制, 除非我们有精确控制 (策略 1) 或能很大程度的收缩能量面 (策略 2).

上面是对策略 3 的一般的评论, 现在我要转到一些已经做出的特别的尝试, 来补充策略 3, 并且讨论困难所在.

(1) *使用弱的或逼近解的概念* (如粘性解, 罚解, 上解或下解, 等). 这种类型的方法可以一直追溯到 Leray [Le1933]. 很早人们就知道通过弱化 Navier-Stokes 方程的非线性部分 (如, 控制非线性性), 或增强线性部分 (如, 引入超耗散), 或作一个空间尺度的离散或

正则化，或放宽“解”的概念，人们能够得到全局解来逼近 Navier-Stokes 方程. 然后希望取极限得到一个光滑解，与 Leray 在 1933 年对 Navier-Stokes 方程构造的纯粹全局弱解完全不同. 但是为了保证极限是光滑的，我们需要在强拓扑下的收敛. 事实上，以前使用的相同类型的尺度讨论基本上需要我们得到在某种临界或者次临界拓扑下的收敛. 若没有策略 2 的某个突破，我们有的唯一的收敛类型是非常粗糙的拓扑意义下的 (特别地，在超临界情形). 试图把这种收敛提高到临界或次临界拓扑是之前讨论的定量问题的定性类比，并且最终面临同样的试图控制任意大单位尺度解的问题 (即使运用非常不同地语言). 在一个纯定性背景下 (使用极限等) 而不是一个量化背景 (使用估计等) 研究，能够掩盖这些问题 (而不幸的是，如果极限被粗心处理的话，能够导致误差), 但是定性主义不会神奇地使这些问题消失. 注意到，人们已经知道紧密联系的 Euler (欧拉) 方程的弱解的糟糕的行为 [Sc1993]. 更一般的，在一个充分抽象的体系中 (如解附近的形式极限), 修改这个问题，有很多方法来制造一个可以被当作一种广义解的抽象对象，而当人们尝试建立关于这个广义解的真正地控制时，会遇到前面提到的所有超临界困难.

(2) *在一个函数空间中的迭代方法*(如压缩映射原理，Nash-Moser (纳什 – 莫泽) 迭代，幂级数，等等). 这些方法是扰动的，并且要求 *一些东西* 很小：初始值，或非线性，或者想得到的存在时间必须非常小. 这些方法对构造大初始值的局部解或小初始值的整体解是非常出色的，但是不能解决大初始值的全局解 (遇到与策略 3 的方法相同的问题). 这些方法也是典型的，对方程的特殊结构非常敏感，这已经成为了一个主要的警告标志，因为人们可以轻松构造 (很人为地) 与 Navier-Stokes 相似的方程组，而人们已经知道这些方程组会发生爆破. 最优的扰动结果可能是非常接近于 Koch (科赫)–Tataru 建立的结论 [KoTa2001], 原因在那篇文章中讨论了.

(3) *利用爆破准则*. 扰动理论可以得出一些非常重要的爆破准则 —— 如果解要爆破，解的某个范数一定发散. 例如，Beale (比尔)–Kato (加藤)–Majda [BeKaMa1984] 的著名结果指出，涡量最大值对时间的积分一定在爆破点发散. 但是，所有这些爆破准则本质上是次临界的或是临界的，并且因此，除非突破策略 2, 不能使用已知的全局控制量来得到某个矛盾. 与上面给出的那些类似的尺度讨论表明扰动方法不能得到某个超临界爆破准则.

(4) *爆破点的渐近分析*. 另一个方法是在爆破点附近对解作尺度化，并且取某种极限，然后继续做分析，直到产生一种矛盾. 这种方法在很多其他的背景下是有用的 (如，理解 Ricci 流). 但是，为了真正取到一个有用的极限 (特别的，仍然在强的意义上解 Navier-Stokes 方程，会突然失败得到了平凡解), 人们需要解的所有尺度的一致控制 —— 或者换句话说，人们需要突破策略 2. 这个方法的另外一个主要困难是爆破不只在一个点发生，而是在一个一维的集合上接连爆破 [Sc1976]; 这是超临界的另一个表现.

(5) *极小爆破解的分析*. 这是一个由 Bourgain (布尔盖恩) 创始的方法 [Bo1999b], 最近在建立很多具有临界守恒量方程的大初始值全局正则性结果时非常成功 ([KeMe2006], [CoKeStTaTa2008], [RyVi2007], [Vi2007], [TaViZh2008], [KiTaVi2008]); 也就是说，这个方法是反证法，如果爆破解存在，然后获得一个极小化了守恒量的 *极小* 爆破解去推导矛

盾. 这个方法 (基本上把扰动理论推进到了它的本质极限) 似乎会成为处理大初始值临界方程的标准方法. 它具有非常好的特征, 即极小爆破解 (一旦用尺度对称作商) 有足够的紧性 (或者殆周期性), 以至于人们也可以开始利用次临界和超临界守恒律和单调公式 (见我在这个课题的综述 [Ta2006f]). 不幸的是, 现在当人们理解了这个方法时, 它似乎不能直接应用于超临界情形 (除非人们简单的假设某个临界范数是全局有界的), 因为利用尺度不变量去最小化一个非尺度不变量, 这是不可能的.

(6) *抽象方法* (避免使用 Navier-Stokes 方程的特殊性质). 最好的是, 抽象要能够有效组织并抓住问题的关键困难, 把问题置于一个考虑这些困难的直接自然解决的框架, 不需要为无关紧要的具体细节分心. (Kato 的半群方法 [Ka1993] 是这个方法在非线性 PDE 中一个很好的例子; 令人遗憾的是, 这个讨论限于次临界情形.) 最坏的是, 抽象方法用一些巧妙的定义或概念掩藏了困难 (如, 到一个极限的各种类型的收敛). 因此带来的风险是困难通过难以察觉的错误在方法的操作中被 "神奇地" 避开了. 因此, 一种设法轻松地忽略问题的超临界性质的抽象方法看起来是非常令人怀疑的. 更实质性的是, 有很多满足强制守恒律的方程仍然表现出在有限时间内爆破 (如, 质量临界聚焦 NLS 方程); 因此这种抽象方法不得不开发 Navier-Stokes 解的一些精细的特征, 而这种特征不是在所有知道可能出现爆破的例子中出现的. 这种特征在它第一次被具体发现之前不会被抽象地发现; 人们已经证明 PDE 领域是这样一种数学, 它的推进一般从具体开始, 然后发展到抽象的数学, 而不是相反.

如果我们抛弃策略 1 和策略 3, 那么我们剩下策略 2—— 发现新的界, 比那些由 (超临界) 能量提供的更强的界. 这不是一个 *先验* 不可能性, 但是在简单地希望有一个新的界和实际发现并严格建立一个界之间有巨大的差距. 简单地坚持 Navier-Stokes 方程存在能量界并且知道出现什么就能再提供一些界, 如尺度讨论很快揭示的那样, 但它们将都是超临界的. 我们知道的另外创造全局非扰动确定性界的唯一方法是发现一个新的守恒量或单调量. 过去, 当这种量被发现时, 它们总是与几何 (辛几何, 黎曼几何, 复几何等), 物理, 或一些非线性可持续利用的 (散焦的) 符号 (或在系统中的各种各样的 "曲率"). 方程中有用的几何是很少的; 另一方面, 欧式结构通过耗散项 $\triangle$ 和向量场散度为零的性质进入方程, 但是非线性是由速度向量场描述的输运, 速度向量场基本上只是一个保持体积的任意无穷小微分同胚 (特别的, 它与欧式结构无关). 人们能够试图用这个微分同胚作商 (如在 Lagrange (拉格朗日) 坐标中研究), 但是当人们这样做时, 剩下非常少的几何不变量可用. (在 Euler 方程的情形, 涡量向量场在这种微分同胚下是模守恒的, 如 [Li2003] 中观察的那样, 但是这个变量远不是强制的, 性质几乎是纯拓扑的.) Navier-Stokes 方程作为一个方程组而不是一个单个方程, 也几乎没有有利的符号性质, 特别是在排除由极大值原理或相似的比较原理给出的界的类型方面. 这只剩下了物理, 但是除了能量, 还不清楚是否有任何关于流体的 *决定性地*[1] 单调物理量. 当然得到非扰动控制量的第 4 种方法是很棒的, 不是来自于几何, 物理, 或有利的符号, 但是目前看起来这有点不大可

1) 事情在随机水平上看起来更好, 热力学定律可能发挥作用, 而 Navier-Stokes 问题, 如 Clay 数学促进会解释的那样, 是确定性的. 于是我们要应付 Maxwell 妖.—— 原注

能. 事实上，鉴于 Navier-Stokes 方程湍流的，不稳定的，混沌本质的特性，很可能实际上，除了那些由能量得到的量，没有合理的全局控制量出现.

当然，考虑到给出全局正则性是多么困难，人们可能转而尝试去建立有限时间内爆破 (这对千禧年大奖也是可接受的 [Fe2006]). 不幸的是，虽然人们知道 Navier-Stokes 方程是非常不稳定的，但是人们完全不清楚越过这个得到爆破解的一个严格描述. 我知道的所有严格证明有限时间内爆破的结果 (与仅仅是非稳定性结果相反) 依赖下面的一个或几个要素：

(a) 精确爆破解 (或者至少是得到一个简单得多的 PDE 或 ODE 的精确变换，有了这个变换，爆破解可以建立起来);

(b) 爆破解 (或精确解) 的一个拟设 (Ansatz)[1], 与某个非线性稳定性理论联系的一个拟设;

(c) 一个比较原理的讨论，用一个在有限时间内爆破的量控制解，用这个量和解做比较；或者

(d) 一个间接的讨论，构造一个解的泛函，这个泛函必须在有限时间内得到一个不可能的值 (如，一个对光滑解明显非负的量，但是一定在有限时间内成为负的).

很好的是有一些外来的对称限制能够给出 (a), 但是没有人找到任何好的精确可解的 Navier-Stokes 方程的特殊情形 (事实上，那些已经发现的特殊情形有全局光滑解). 方法 (b) 是有问题的，有如下两个原因：首先，对一个爆破解，我们没有一个好的拟设，但是可能更重要的是似乎不可能为这样创立的拟设建立一个稳定性理论，因为这个问题本质上是全局正则性问题的一个更加困难的版本，尤其是在主要困难方面，即在精细尺度下控制高度非线性行为. (实施方法 (b) 时讽刺的一点是为了在某种意义上建立严格的 *爆破*, 人们必须先在另外的某种意义上 (重整化) 建立严格的 *稳定性* 概念.) 方法 (c) 需要比较原理，如前面注意到的，这似乎对不是单个方程的 Navier-Stokes 方程是没有的. 方法 (d) 有同样的问题，最终回到 “策略 2” 的问题，即在这个系统中我们几乎没有全局单调量可用 (除了能量单调性，但是只有能量单调性明显是不足的). 得到一个新的途径，而不是上面的 (a)—(d) 来形成爆破将是非常革命性的，不仅仅对 Navier-Stokes 方程；但是我不知道在这些方向的任何建议，虽然可能拓扑方法可以有一些效果.

那么，所有这些否定以后，对于如何解这个问题我有任何积极的建议吗？我的意见是策略 1 是不可能的，而策略 2 需要从物理获得一些特别好的灵感，或者一次令人难以置信的好运. 剩下策略 3 (事实上，我认为 Navier-Stokes 问题有趣的主要原因之一是它 *推动* 我们去创造策略 3 的技巧). 考虑到策略 3 看起来是多么困难，如上面讨论的，我只在这些方向给出一些非常尝试性的和推理性的想法，我要阐明的所有想法是非常漫无天际的：

(1) *研究初值的整体，而不是单个初始值.* 我们目前的所有确定性发展方程的理论

1) 拟设 (德语, ansatz), 是数学和物理学术语. 意思是先作出一个假设，并且按照这个假设去进行一系列的演算，用所得到的结果来检验最初的假设是否成立. 当一个问题难以用直接的方法解决的时候，拟设经常是解决问题的出发点 (引自维基百科).—— 译注

只处理从单个初始值得来的单个解. 用初值和解的多个参数族或者概率测度 (如 Gibbs (吉布斯) 测度或其他不变测度) 研究可能会更有效. 一个明显的力图达到的部分结果是尝试对一般大初值而不是对所有大初值建立全局正则性; 换句话说, 承认 Maxwell 妖可能出现, 但是表明它实际上出现的可能性是非常小的. 问题是我们事实上没有工具来处理一般 (平均 – 情形) 初值, 而不是处理所有 (最糟糕 – 情形) 初值; 问题是 Navier-Stokes 流它自己可能有某个怪异的熵减少性质, 这使得平均情形在很长时间周期后向 (或者至少在附近发生) 最坏情形偏移. 这极不可能是真的, 但是目前我们没有工具来阻止它发生.

(2) *研究一个简单得多的 (但是仍然超临界) 小模型.* Navier-Stokes 模型是抛物的, 这很好, 但是在许多其他方面是非常复杂的, 例如相对高维和本质上不是单个方程. 研究其他简化的仍然包含只有全局控制量是超临界的这一关键困难的模型是有意义的. 例子包含 Euler 方程的 Katz-Pavlovic 二元模型 [KaPa2005] (对这个方程来说, 爆破可以用某个单调性讨论来描述; 见 [FrPa2008]), 或者 3 个空间维度的球对称散焦的超临界非线性波方程 $-u_{tt}+\triangle u=u^7$.

(3) *发展非扰动工具来控制确定性不可积动力系统.* 贯穿本文我们已经讨论了 PDE, 但是实际上, 有一些相似主题源自表面上更简单的有限维动力系统 (ODE). 除了在扰动背景下 (如在一个固定点的邻域或不变环面), 对一个确定性初值的动力系统的长时间发展解仍然在很大程度上只被经典工具, 如精确解, 守恒律, 和单调公式控制; 为此一个新的有效公式的发现将是一个主要的突破. 一个自然的起始点是更好地理解经典三体问题的长时间非扰动系统, 因为这仍然有一些基本的未解决问题.

(4) *在临界问题或临界问题附近建立真正好的界.* 最近, 我指出 [Ta2007] 一个临界方程有一个非常好的界本质上蕴涵着对一个勉强的超临界方程, 也有一个全局正则性结果. 想法是使用单调公式, 当人们使用越来越精细的尺度时, 单调公式略有弱化, 而且每次到更精细的尺度时花费非常大量的单调性; 因为只遇到一个单调有界量, 结果在我的方程中后者的效果仅仅克服了前者来找回全局正则性 (虽然这样做, 界从临界情形的多项式糟糕到我的对数超临界情形的双指数). 我非常怀疑我的方法能够推进到非对数超临界方程, 但是它的确描述了在临界水平有非常强的界可能导致在这个问题上一点的推进.

(5) *尝试某个拓扑方法.* 这是 (1) 的特殊情形. 人们可以使用主要的拓扑讨论来构造解或者建立爆破; 在椭圆理论中有一些这种类型构造的先例. 这样的方法就其本质而言是非常全局的, 并且因此没有限制到扰动或接近线性框架. 但是, 这里没有明显的拓扑 (除了可能由涡丝 (vortex filament) 产生的), 并且据我所知, 对任何发展方程甚至没有一个这种想法的 "概念证明" 版本. 所以这实际上是在任何具体的策略之外的愿望.

(6) *理解伪随机.* 这是一个极为模糊的描述; 但是这个问题中的困难也以不同的形式出现在很多其他著名问题 (如 Riemann (黎曼) 假设, P=BPP, P≠NP, 孪生素数和 Goldbach (哥德巴赫) 猜想, 数字 π 的正规性, Collatz (柯拉茨) 猜想, 等等). 我们希望任何充分复杂的 (但是确定性的) 动力系统表现 "混沌无序" 或 "伪随机的", 但是我们仍然很少有工具来实际使这种直觉精确化, 特别是如果一个人考虑确定性初值而不是一般初值. 在其

他的背景甚至戏剧性的不同背景下理解伪随机性，或许能间接的对研究 Navier-Stokes 方程的湍流行为带来一丝曙光.

总之，偶尔在不可能的问题中找到解决的办法是很好的，可以尝试你的运气，我自己会花费更多的时间在其他方面，比 Clay 奖问题更易处理的 PDE 问题，虽然人们在做其他问题时一直记着这个问题，人们确实在看起来像突破了上面的策略 1, 2 或 3 的道路上蹒跚而行. (特别的，在流体方程中有很多其他的重要的并且有趣的问题，这些问题远不如 Navier-Stokes 方程的全局正则性困难，但是还是非常值得解决的.)

3.4.1 一些注

本文最早于 2007 年 3 月 18 日贴在 terrytao.wordpress.com/2007/03/18.

Nets Katz 指出一个显著简化的 (但是仍然是有些超临界的) 问题将改进 Beale-Kato-Majda [BeKaMa1984] 给出的二维 Euler 方程周期解的涡量增长双指数界.

Sarada Rajeev 指出 V. I. Arnold 的一个早期的观察，Euler 方程事实上是保体积微分同胚的测地线流 (使用速度场的欧氏 L^2 范数来决定 Riemann 度量结构); 此结构可能在推进我们对 Euler 方程的理解上是决定性的，因此 (间接的) 对 Navier-Stokes 方程也一样.

Stephen Montgomery-Smith (蒙哥马利 – 史密斯) 指出，任何新的守恒或单调量 (需要使得策略 2 有效的那种类型) 可能扭曲了著名的 Kolmogorov (柯尔莫戈洛夫) 的能量谱的 5/3 次幂法则. 因为这个法则已经被很多数值实验证明了，这也许可以作为论据来反对策略 2 研究方法的有效性. 另一方面，Montgomery-Smith 也指出，对二维的 Navier-Stokes 方程来说，人们有不影响来自于涡量拟能的 Kraichnan 3 次幂法则的涡量的 L^p 界.

最初贴出这篇文章以后，我设法指出 [Ta2008b] Navier-Stokes 的周期全局正则性问题与得到经典解的一个局部的或者全局的 H^1 界是等同的，因此指出，正则性问题在某种意义上 “等同” 于使得策略 2 有效.

参考文献

[BeKaMa1984] J. T. Beale, T. Kato, A. Majda, Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3-D Euler equations, Comm. Math. Phys. 94 (1984), no. 1, 61–66.

[Bo1999b] J. Bourgain, Global well-posedness of defocusing 3D critical NLS in the radial case, J. Amer. Math. Soc. 12 (1999), 145–171.

[CoKeStTaTa2008] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, and T. Tao, Global Well-posedness and scattering for the energy-critical nonlinear schrödinger equation in R^3, to appear in Annals of Math. (已发表在 Ann. of Math. (2) 167 (2008), no. 3, 767–865.)

[EsSeSv2003] L. Eskauriaza, G. Serëgin, V. Sverák, $L^{3,\infty}$-solutions of Navier-Stokes equations and backward uniqueness, (Russian) Uspekhi Mat. Nauk 58 (2003), no. 2, (350), 3–44: translation in Russian Math. Surveys 58 (2003), no. 2, 211–250.

[Fe2006] C. Feffeman, Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation, Millennium Prize Problem, Clay Math. Inst., Cambridge, MA , 2006, 57–67.

[FrPa2008] S. Friedlander, N. Pavlovíc, Dyadic models for the equations of fluid motion, preprint.

[Ka1993] T. Kato, Abstract evolution equations, linear and quasilinear, revisited. Functional analysis and related topics, 1991 (Kyoto), 103–125, Lecture Notes in Math. 1540,

Springer, Berlin, 1993.
[KaPa2005] N. Katz, N. Pavlovíc, Finite time blow-up for a dyadic model of the Euler equations, Trans.Amer. Math. Soc. 357 (2005), no. 2, 695–708.
[KeMe2006] C. Kenig and F. Merle, Global well-posedness, scattering and blowup for the energy-critical, focusing, non-linear schrödinger equation in the radial case, Invent. Math. 166 (2006), 645–675.
[KiTaVi2008] R. Killip, T. Tao, M. Visan, The cubic nonlinear schrödinger equation in two dimensions with radial data, preprint. (已发表在 J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 11 (2009), no. 6, 1203–1258.)
[Kl2000] S. Klainerman, PDE as a unified subject, GAFA 2000 (Tel Aviv, 1999), Geom. Funct. Anal. 2000, Special Volume, Part I, 279–315.
[KoTa2001] H. Koch, D. Tataru, Well-posedness for the Navier-Stokes equations, Adv. Math. 157 (2001), no. 1, 22–35.
[Le1933] J. Leray, Étude de diverses équations intégrates Nonlinéaires et de quelques problèms que pose thy-drodynamique, J. Math. Pure Appl. 12 (1933), 1–82.
[Li2003] Y. Li, Chaos in PDEs and Lax pairs of Euler equations, Acta. Appl. Math. 77 (2003), no. 2, 181–204.
[Pe2002] G. Perelman, The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, preprint.
[RyVi2007] E. Ryckman and M. Visan, Glabal well-posedness and scattering for the defocusing energy-critical nonlinear Schrödinger equation in R^{1+4}, Amer. J. Math. 129 (2007), 1–60.
[Sc1976] V. Scheffer, Partial regularity of solutions to the Navier-Stokes equations, Pacific J. Math. 66 (1976), no. 2, 535–552.
[Sc1993] V. Scheffer, An inviscid flow with compact support in space-time, J. Geom. Anal. 3 (1993), no. 4, 343–401.
[Ta2006c] T. Tao, Perelman's proof of the Poincare conjecture a nonlinear PDE perspective, unpublished, Available at arxiv.org/abs/math.DG/0610903
[Ta2006f] T. Tao, Global behaviour of nonlinear dispersive and wave equations, Current Developments in Mathematics 2006, International Press, 255–340.
[Ta2007] T. Tao, Global regularity for a logarithmically supercritical defocusing nonlinear wave equation for spherically symmetric data, J. Hyperbolic Diff. Eq. 4 (2007), 259–266.
[Ta2008b] T. Tao, A quantitative formulation of the global regularity problem for the periodic Navier-Stokes equation, preprint. (已发表在 Dyn. Partial Differ. Equ. 4 (2007), no. 4, 293–302.)
[TaViZh2008] T. Tao, M. Visan,and X. Zhang, Global well-posedness and scattering for the defocusing mass-critical nonlinear Schrödinger equation for radial data in high dimensions, to appear in Duke Math J. (已发表在 Duke Math. J. 140 (2007), no. 1, 165–202.)
[Vi2007] M. Visan, The defocusing energy-critical nonlinear Schrödinger equation in higher dimensions, Duke Math. J. 138 (2007), 281–374.

(李灵芝 译 李明杰 校)

****

(上接 284 页)

[5] P. L. Tchebycheff, Théorie des méchanismes, connus sous le nom de parallélogrammes, In Mémoires présentes a l'Academie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg, VII, 1854. 539–568.

(陆柱家 译 陆昱 校)