综合报告

微分方程在微分几何中的作用*

丘 成 桐**

在自然提出的几何对象的研究中，主要的工具是群和方程。关于前者，已经有了一些有力的合用的代数方法使我们能够解决许多深入的问题。而关于后者，虽然代数方法仍然是重要的，但分析方法却起着支配的作用，特别当着定义方程是超越的时候。事实上，即使在几何对象是齐性的或代数的，分析方法也常常能导致重要的贡献。在本报告中，我们将讨论一类微分几何问题以及在解决此类问题中所包含的分析方法。

微分几何的主要目的之一是理解一个曲面（及其推广物）在内蕴或外蕴的意义下是如何弯曲的。自然，这类问题一般不会是线性的，因为曲率是由一些几何量的微分而来，其中所出现的方程大都是非线性的。在研究弯曲空间的时候，一个最重要的工具是该弯曲空间的切向量空间。用偏微分方程的语言来说，研究非线性方程的主要工具是线性化算子的应用。因此，即使我们面对的是非线性的对象，线性算子的理论仍然是不可缺少的。自然，无需指出，这里当然还留有一个如何用线性算子去精确逼近非线性算子的困难问题。

为了说明这些，我们提出微分几何中五个重要的微分算子。

第一或许是最重要的一个是 Laplace-Beltrami 算子。如果度量张量由 $\sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j$ 给出，那么此算子由

$$L(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial x^i}\left[g^{ij}\sqrt{g}\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}\right]$$

给出，其中 $g=\det(g_{ij})$， $(g^{ij})=(g_{ij})^{-1}$。

第二个是极小曲面算子。其形式是

$$L(\varphi)=\sum_i\frac{\partial}{\partial x^i}\left[(1+|\nabla\varphi|^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\right],$$

其中 $|\nabla\varphi|^2=\sum_i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\right)^2$。

第三个是 Monge-Ampère 算子

$$L(\varphi)=\det\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\partial x^j}\right).$$

第四个是复 Monge-Ampère 算子

* 本文译自 Proceedings of The International Congress of Mathemeticians, Helsinki, 1978.

** 1978年赫尔辛基国际数学家大会上的报告。

$$L(\varphi)=\det\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^i\partial \bar{z}^j}\right).$$

第五个是 Einstein 场方程，它是一个非线性双曲系统。如果 $\sum g_{ij}dx^i dx^j$ 是罗伦兹 (Lorentz) 度量，那么包含在Einstein 场方程中的算子是

$$L(g_{ij})=R_{ij}-\frac{R}{2}g_{ij},$$

这里 R_{ij} 和 R 分别是 Lorentz 度量的 Ricci 曲率和纯量曲率。

五个算子中，Laplace-Beltrami 算子和极小曲面算子是椭圆型的。只当 φ 是严格凸时实 Monge-Ampère算子和当 φ 是强多次调和 (*Strictly plurisubharmonic*) 时复Monge-Ampère 算子才是椭圆的。除去 Laplace 算子以外所有其它算子都是非线性的。并且，能够证明，极小曲面算子和 Monge-Ampere 算子的线性化算子可以适当地解释为某些度量的 Laplace-Beltrami 算子。

为了看清这些算子在微分几何中是怎样提出的，我们要讨论一个重要的问题。粗略地说，它是问一个空间整体上是如何弯曲的。稍微确切一点，它可以叙述成这样：给定一个流形M，找出使M允许一个具有给定曲率性质的度量的充分必要条件。

让我们回忆某些定义，以建立一些术语。从曲率张量中，可以引出下列的一些几何量。流形上给定一点以及过此点切空间的一个二维平面，我们就得到相对于此平面的截面曲率。给定一点和过此点的一个切线，将所有含有此切线的二维切平面的截面曲率加以平均，就得到沿此切线方向的 Ricci 曲率。将通过给定点的所有截面曲率加以平均，得到的是此点的纯量曲率 (*Scaler Curvature*)。从这些定义显然可见，截面曲率当然较其它曲率给出更多的信息。例如，因为截面曲率能告诉我们流形沿每个二维切面是如何弯曲的，它对流形上测地线的性状就能给出很好的控制。测地线依赖于常微分方程的理论，而在其它曲率的情况下，有关测地线的信息就少得多，因而偏微分方程的理论也就不可避免了。在本报告中，我们将只集中讨论纯量曲率和 Ricci 曲率。现在我们从寻求可积性条件一般方法的讨论开始，这种可积性条件是解决满足一定曲率条件的度量的存在性的。

I. 可积性条件

找出满足给定曲率条件的度量的整体存在性的完全可积条件，是一个相当困难的问题。但是，对于二维曲面，由于紧致曲面的 Gauss-Bonnet 定理和完备开曲面的 Cohn-Vossen 不等式，这一问题已经有了满意的回答（Kazdan-Warner 的新近工作[33]给出了二维几何的曲率函数的性状的更精确的信息）。

在高维时，情况要远为复杂。这部分是由于曲率是个张量，部分是由于拓扑不变量和几何不变量之间的联系——在现阶段——相当的弱。让我们在此列举一下常用来寻求可积条件的一些主要方法：

1° 用曲率形式来表达欧拉类、庞特里亚金类、陈类的陈省身理论提供了对一般流形而言最基本的可积条件。著名的 Atiyah-Singer 定理可以看成是这一理论的辉煌推广。它们的某些应用下文将会涉及。

2° 经由Hodge理论证明消灭定理（*Vanishing theorem*）的Bochner方法仍将在一个长时间内保持其重要性。它已经导致了Kodaira消灭定理、多复函数论中的L^2方法等。

3° 变分方法是微分几何中最经典、也是最重要的方法之一。它包含曲线的变分、曲面的变分、映射的变分等。

自然，以上所举并沒有穷尽所有的方法。但是，对于我们将要讨论的所有结果来说，它们都可以通过以上三种方法的适当组合而得到。

II. 纯 量 曲 率

关于纯量曲率的最简单的问题是找出那些具有同一符号（正或负）纯量曲率的完备度量的流形来。

很早以前，Yamabe[25]曾考虑过如何将一个度量保角地形变到具常纯量曲率的度量去。在此过程中出现的方程有下列形式：

$$\triangle u=\frac{(n-2)}{4(n-1)}Ru-\frac{(n-2)}{4(n-1)}\overline{R}u^{\frac{n+2}{n-2}},$$

这里n是流形的维数，R和$\overline{R}$分别是形变前和形变后的度量的纯量曲率。

正如Trudinger[49]所指出，Yamabe的方法似乎行不大通。Trudinger以后，尚有Aubin, Berger, Eliason, Kazdan-Warner, Nirenberg, Moser等人的工作。这些工作的一个简单结论是任何维数大于2的紧致流形都容许一个度量其纯量曲率是负的。Greene-伍鸿熙[27]用另外的方法证明，每个非紧的流形都具有一个负纯量曲率的完备度量。因此我们可得结论：具负纯量曲率的完备度量的存在性并不要求流形有任何拓扑的限制。

然而，具非负纯量曲率的完备度量却给出一些拓扑的信息。这个方向的第一个结果属于Lichnerowicz[35]，他证明对于具正纯量曲率的紧致旋流形（*Spin manifold*），不存在调和旋量（*harmonic Spinor*）。应用Atiyah-Singer指数定理，这一Lichnerowicz消灭定理就可证明：对于具正纯量曲率的紧致旋流形，其$\hat{A}$-亏格为零。遵循这种讨论，Hitchin[30]发现对这种具正纯量曲率的紧致旋流形，由Milnor引进的（mod2）KO-理论不变量也是零。特别地，任何不是旋流形边界的怪球（*exotic sphere*）都不能容许具正纯量曲率的度量。

与数学家们致力于有关纯量曲率问题的同时，一些物理学家，从不同的观点出发也在考虑类似的问题。

让我们用几何的语言来叙述一下广义相对论中的这一问题。假定在一个四维流形上给定一个Lorentz度量。那么，在相当一般的条件下，R. Schoen和作者（指丘成桐本人，下同）能够证明极大类空超曲面——即在诱导面积的形变下局部稳定的超曲面——的存在性。通常，我们假定Lorentz度量满足弱能量条件，这样，根据高斯曲率方程，上面提到的极大类空超曲面将具有非负的纯量曲率。

因为极大类空超曲面是三维的，我们实际上讨论的是具非负纯量曲率的三维流形。一方面众所熟知三维流形是可平行化的，因此高维情况下已知的拓扑不变量的大多数都是零，因而Lichnerowicz定理和Atiyah-Singer指数定理的推论也无法提供什么信息。但另一方面，上面提到的广义相对论的问题却能给我们一些指引。该问题粗略地可以说成[26]，对于一个孤立的物理系统，局部质量密度的非负性蕴含着总质量（*Total mass*）的非负性。用数学的

语言，可以叙述成这样：M是一个具非负纯量曲率的三维流形（即上文提到的极大类空超曲面），设M微分同胚于 $\mathbf{R}^3$，其度量具有形式

$$\left(1+\frac{m}{2r}\right)^4 ds_0^2+O\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

这里ds_0^2是 $\mathbf{R}^3$ 是通常欧氏度量，r 是对原点的距离，$O\left(\frac{1}{r^2}\right)$表示一个张量，它及它前两阶导数都像$\frac{1}{r^2}$一样当 $r\to\infty$时趋于零。数m称为流形M的总质量。广义相对论中的正质量猜测说：m是非负的，并且$m=0$当且仅当度量是欧几里得的。此猜测的一个特殊情形是，如果我们在 $\mathbf{R}^3$有一个非负纯量曲率的度量，它在一紧致集合外是欧氏的，那么它就处处是欧氏的。最后的这一命题对几何学家正在考虑的问题有着直接的关系。

正质量猜测最近由 R.Schoen 和作者所证明（关于此猜测先前的最好工作是 Choguet-Bruhat 和 Marsden 的局部结果[21]）。我们的动机和方法来自了解具非负纯量曲率的三维流形的拓扑的企图。由于三维流形本身的拓扑性质，重要的是了解其基本群。在这方面，我们证明了如果具非负纯量曲率的三维流形的基本群包含一个同构于某亏格⩾1的紧致曲面的基本群的子群，那么其度量就是平坦度量（*Flat metric*）。证明此定理和正质量猜测的方法都是本报告开头所论及的极小曲面方程的研究。极小曲面研究的是M中这样的曲面，其局部说来，和邻近的曲面相比较有极小的面积。这类对象的研究现在已经是非线性椭圆型偏微分方程和变分法的最重要的分支之一（它推动了一门新的重要领域——几何测度论——关于这点 Almgren 在本次会议上将有报告）。极小曲面对研究流形拓扑是有用的，其理由在于它能告诉我们流形的内部几何的性状。在二维情况下，我们能控制极小曲面的拓扑，这归功于 C.B. Morrey 的工作，而在高维情况，这些尚待研究。

目前我们离能给出使一个流形容许一具正纯量曲率的度量的判据还很远。例如，甚至还没有一个好的存在性定理。在这方面，我们可以提一下 B.Lawson 和作者的一个定理[33]。我们证明，如果流形容许一可微、非交换、连通的紧致李群作用的话，那么此流形将容许一完备度量存在，其纯量曲率为正（结合上面提到的 Hitchin 的定理，这就说明了，对于那些不是旋流形边界的怪球，将不允许 $SU(2)$的作用。这给出了一个拓扑定理，同时也展示了曲率是怎样用来处理拓扑问题的）。作为上面关于三维流形工作的推广，可以提出下面的问题：如果一个具非负纯量曲率的紧致流形由欧氏空间拓扑地覆盖，那么它是不是平坦流形？

Ⅲ. Ricci 曲率

如同纯量曲率的情形一样，关于 Ricci 曲率的最简单的问题，是找出那些容许具有同一符号的 Ricci 曲率的完备度量的流形来。因为 Ricci 曲率是由张量给出，其可积条件更强一些，因而存在性问题也就显著地困难一些。已知的可积性条件还很不完全，我们这里只能提及很少几个。

首先，Bonnet 定理告诉我们，对于具正截面曲率的紧致流形，其基本群有限。这一定理后来被 *Myers*[41] 推广到正 Ricci 曲率的情况，又被 Cheeger-Gromoll[14] 推广到只需假定 Ricci 曲率非负即可。对于非紧、具非负 Ricci 曲率的完备流形其基本群也有一些条件，它

们分别由 Milnor[36]、Wolf[51]、Schoen 和作者[46]得到。很可能是：具正 Ricci 曲率的完备流形应有有限的基本群，但这一点至今尚未证明。具负 Ricci 曲率的度量了解起来似乎更加困难。例如，在高维情况下，我们甚至不知道，是否球面能容许这样一种度量。只是在最近，作者才能在一个紧致、单连通的流形上产生这样的度量。对于存在性问题，如能找出一些可积条件肯定是有兴趣的。似有可能的是，如果一个流形容许一个具负 Ricci 曲率的度量，则它将不容许一个有效、可微、非交换、连通的紧致李群在其上作用。考察一个紧致流形是否能同时既容许一个非负纯量曲率又容许一个负 Ricci 曲率的度量也将是很有兴趣的。

由于广义相对论的兴趣，具常 Ricci 曲率的度量特别重要。长时间以来我们知道的例子仅是那些有一紧致李群在其上可递作用的流形。这种度量存在性的第一个必要条件是 *M. Berger*[6] 找到的。他证明，对于四维 Einstein 流形——即具常 Ricci 曲率的流形——其 Euler 数必须是正的，除非它们是平坦流形。这一 Berger 不等式后来由 Gray 和 Hitchin[30] 加以推广。在所有这些定理中，陈省身的用曲率表述拓扑不变量的理论起着非常重要的作用。

在很长时间里，人们沒有非齐性 Einstein 流形的例子。特别是，甚至是否存在非平坦、零 Ricci 曲率的紧致黎曼流形都不知道（这点由于广义相对论中的类似情况而尤为引人注目）。部分地由于这个问题的推动，Calabi[9] 建议了一种研究一类特殊流形的 Ricci 曲率的方法。他注意到在 Kähler 流形的情况，Ricci 张量的方程特别简单。这是建立在用曲率形式表达第一陈类的基础上的，可以简述如下：设 $\sum\limits_{i,j} g_{i\bar{j}}dz^i\otimes d\overline{z}^j$ 是定义在紧致复流形上的一个 Kähler 度量，则 (1,1) 形式

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\sum_{r,s}\frac{\partial^2}{\partial z^r\partial\overline{z}^s}[\log\det(g_{i\bar{j}})]\ dz^r\wedge d\overline{z}^s$$

是闭的，在流形上整体定义、代表了第一陈类。由[17]，这个 (1,1) 形式也正是该 Kähler 度量的 Ricci 形式。因此，一个 (1,1) 形式要是某一 Kähler 度量的 Ricci 形式，它必须是闭的，并代表第一陈类。Calabi 的问题是，是否这就是唯一的可积条件。这一问题之所以激起很多兴趣，部分是由于它给出了 Kähler 流形的 Ricci 张量的一个完全理解，部分是由于它创造了许多具零 Ricci 曲率的紧致流形的例子。例如 K-3 曲面就是第一陈类为零的单连通紧致流形。Calabi 猜测直接表明 K-3 曲面上 Ricci 平坦度量的存在性（K-3 曲面的单连通性保证了它不能具有任何平坦的度量）。用来解决 Calabi 猜测所需的方程有下列形式：

$$\det\left(g_{i\bar{j}}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^i\partial\overline{z}^j}\right)=e^F\det(g_{i\bar{j}}),\qquad (*)$$

这里 φ 是未知函数，F 是光滑函数使 $\int_M e^F$ 是 M 的体积。

方程（*）类似于实 Monge-Ampère 方程，可以看成复 Monge-Ampère 方程。为了使方程（*）是椭圆的，我们必须找那些使 $\left(g_{i\bar{j}}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^i\partial\overline{z}^j}\right)$ 正定的函数 φ。为了研究方程（*），Calabi[11] 考虑了方程 $\det\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\partial x^j}\right)=1$，其中 φ 要求是凸的。他试图证明，如果 φ 是定义在整个欧氏空间，那么它就是一个二次多项式。他将 Jörgen 定理[59] 从 2 维推广到维数 $\leqslant 5$。他著作中最重要的一点是引进了量 $S=\sum\varphi^{ir}\varphi^{js}\varphi^{kt}\varphi_{ijk}\varphi_{rst}$，这里 (φ^{ij}) 是

(φ_{ij}) 的逆矩阵，而 φ_{ijk} 是 φ 对 x^i，x^j，x^k 的三阶导数。这个量自然地出自仿射几何.在仿射几何中我们要研究的量都是在特殊线性群下不变的。仿射几何对于讨论 Monge-Ampère 方程是最自然的了，因为 Monge-Ampère 算子显然是在特殊线性群下不变。事实上，由方程 $\det\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\partial x^j}\right)=1$ 的解所定义的图（*Graph*）有很好的仿射几何意义。它被称为伪仿射球（*Improper affine sphere*）. Calabi 的重要贡献在于，他建立了 $M(\varphi)=\det\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\partial x^j}\right)$的线性化算子作用在量 S 上的公式. 他的公式可以使我们在区域内部估计方程 $\det\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\partial x_j}\right)=F(x,\varphi)$ 的解的三阶导数，如果我们已知 φ 的低阶估值的话。复情况下类似于 Calabi 三阶导数的量也存在，类似的公式（由Nirenberg 给出）也成立。

1971年 Pogorelov [44] 推进了 Calabi 的方法，证明在一般情况下，方程 $\det\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\partial x^j}\right)=1$ 的整凸解是一个二次多项式。Pogorelov证明的要点之一是方程 $\det\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\partial x^j}\right)=F(x,\varphi)$ 的二阶内部估值。除内部估值外，Pogorelov 使用了许多凸体几何来证明仿射度量的完备性，而这正是 Calabi 方法未曾解决的主要之点。后来，Calabi、郑绍远、Nirenberg以及作者又证明了双曲仿射球的完备性，其相应的方程是 $\det\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\partial x^j}\right)=(-1/\varphi)^{n+2}$。最后一个的证明方法不依赖于凸体几何。它对我们下面要提及的工作有着直接的影响。

回到方程（*），Calabi 曾经证明，如果 F 充分接近于 0，则（*）有唯一解。在Kähler 流形上假定一定的曲率条件，Aubin [4] 曾提出过证明方程（*）的存在性的一种变分方法（有猜测：这样一种曲率条件将导致流形是复射影空间。这对我们以后的几何应用是不够的。并且，对 Monge-Ampère 方程，变分方法虽然是自然的，但至今还留有一些困难待克服）。1976年，作者 [55]、[56] 使用了连续性方法证明了方程（*）唯一解的存在性而不需附加任何假定。如通常一样，证明的基本步骤是给出（*）直到三阶导数的先验估计。三阶估计本质上是 Calabi 基础性贡献的推论。二阶估计则由 pogorelov 的工作 [45] 所启发。无论是三阶估计还是二阶估计，两者都有赖于 Sup $|\varphi|$ 的估值。而这正是长时间以来所没有解决的，构成了求解方程（*）的主要困难。在方程的右端有形式 $e^{\varphi+F}\det(g_{i\bar{j}})$ 的情况下，Sup $|\varphi|$ 的估值可由极大值原理容易得到。在[56]中，Sup $|\varphi|$ 的估计依赖于精巧的、技术上相当复杂的极大值原理和积分方法的结合使用。这种估计后来由 Kazdan [60] 和 Bourguignon 稍加简化。作为方程（*）的解及其证明的一个推论是，在紧致 Kähler 流形上存在着一典型的 Kähler Einstein 度量其第一陈类是零或负（此结果的特殊情况，即当（*）的右端是$e^{\varphi+F}\det(g_{i\bar{j}})$时，曾由 Aubin [4b] 独立地宣布并概要地证明，其证明依赖于他早先工作 [4a] 中的变分方法）。

方程（*）的解，通常称为 Calabi 猜测。在某种程度上，它给出了紧致 Kähler 流形上 Ricci形式的一个完全了解。如果更深入地想一想，就会发现这一方向上还有许多问题好做。我们可以提及的是，Calabi 猜测的解决在代数几何上给出了许多未曾料及的应用 [55]。其中最有趣的一个或许是复射影平面上复结构的唯一性。这是来自我们在代数流形上构造的典型度量。这些度量推广了代数曲线的 Poincaré 度量。可以设想，它对代数几何中的模问题（*Moduli problem*）将是有用的。事实上，两年以前，作者曾用上面这一度量证明，如果 n

维代数流形M其典型线丛（*Canonical line buudle*）是丰富（*ample*）的，则 $(-1)^n 2(n+1) C_2 C_1^{n-2} \geqslant (-1)^n n C_1^n$，并且等号成立当且仅当$M$由复球（*Complex ball*）所覆盖（在二维代数曲面的情况下，这方面有 Van de Ven, Bogomolov, Miyaoka 等的工作，其中 Miyaoka 亦曾独立地建立了此不等式。但至今为止，他们的代数方法无法确定当等号成立时的情况）。此定理的一个简单推论是，复射影空间上仅有唯一的 Kähler 结构。

具非负 Ricci 曲率的 Kähler 度量也可以用来讨论与代数流形有关的问题。相当于复环面及覆盖问题的研究，可以把具非负陈类的 Kähler 流形的研究归向单连通、具非负第一陈类的 Kähler 流形的研究。在 Kähler 流形其第一陈类为零的情况下，可以证明对于 $H^{1,1}(M)$ 中的任何 Kähler类 ω，都有 $\omega^{n-2} U C_2(M) \geqslant 0$，等号成立只当$M$的覆盖面是环面。此外，尚有 S. Kobayashi 的有趣工作[58]，他表明了如何利用 Einstein 度量去获得新的消灭定理。Bourguignon 与 Koiso 推广了 Berger-Ebin 的工作[61]来研究 Einstein 度量的形变。他们把 Calabi-Vesentini 的工作[63]推广到具负曲率的 Kähler 流形上。因为 Einstein 度量具有很好的曲率性质，它也有可能用来强化代数几何中 Griffiths 的超越方法。

通过进一步深化作者上面使用的方法，郑绍远和作者得以证明在许多非紧复流形上完备、Käher Einstein 度量的存在性。例如，如果 D 是紧代数流形 M 上具有法截面的除子，满足 $C_1(M)-C_1([D])<0$ 者[29]，则我们证明在 M/D 上这样的度量是存在的。再如，我们也证明了 Stein 流形中任何具 C^2 边界的有界拟凸域上存在有完备的 Kähler Einstein 度量。另外，下面的事实也是有趣的：作为作者所给出的 Schwarz 引理[54]的一个推论，在任何复流形上至多只有一个完备的 Kähler Einstein 度量其 Ricci 曲率$=-1$（这一事实亦曾由伍鸿熙所指出）。因此，即使是对非紧致流形，完备 Kähler Einstein 度量也是典型的，理当得到更多的研究。

关于 $\mathbf{C}^n$ 中光滑有界域 Ω 的 Kähler Einstein 度量，我们建议求解的方程具有形式：$\det\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}\right)=e^{(n+1)u}$，$u$ 要求在 $\partial\Omega$ 上趋向无穷。为了搞清楚度量在接近边界时的性状，只需要研究函数 $v=e^{-u}$ 的边界性质。

函数 v 满足另一个 Monge-Ampère 型的方程。这一方程曾由其它学者讨论过。特别是 C. Fefferman[24]，他研究了它和 Bergman 核函数渐近性质的关系。几年以前，他揭示了在假定 v 存在的条件下，如何找出它的渐近性状。他将 v 按 Ω 的定义函数的幂级数来展开，其展开式表明，在第$(n+1)$阶项后必然出现 log 项，这里 $n=\dim\Omega$。他新近关于 Bergman 核函数展开系数的深入工作也表明函数 v 的重要性。部分由于他的工作的启发，郑绍远和作者证明实际的解是 $C^{n+\frac{3}{2}-\delta}(\bar{\Omega})$，这里 δ 是任意小的正数。最好的结果应该是 $n+2-\delta$，我们相信在适当改进我们的方法后将能给出这一结果。不管怎样，我们的结果对于给出靠近 $\partial\Omega$ 时的 Kähler Einstein 度量的了解而言是足够了。

最后，让我们来谈谈具零 Ricci 曲率的完备、Kähler 度量的存在性问题。这些度量在广义相对论中有很大兴趣。这种度量的存在性有更多的条件，而关于它们的知识比较起来则是更不完备。我们在此列举一下将能导致进展的若干问题：

第一个问题是，是否每一个四维单连通、紧致、具零 Ricci 曲率的黎曼流形都允许一 Kähler 结构？根据 Hitchin 的考察，这对 K-3 曲面是对的。对 K-3 曲面，作者已经构造了 Ricci 平坦的 Kähler 度量（事实上，这对紧致流形中的一类——具非零指数 (*index*) 的旋流

形亦是正确的）。

第二个问题是，是否每个具零 Ricci 曲率的 Kähler 流形都可在复解析意义下紧致化？作者曾经证明[57]这样的流形沒有任何有界的解析函数，这给出了预示此命题正确性的一个依据。

第三个问题是，假定$\widetilde{M}$是上述流形M的一个紧致化。是否$\widetilde{M}$的反典型线丛（*Anti Canonical line bundle*）容许一在$\widetilde{M}\backslash M$为零的全纯截面？如果$M$的度量仅按多项式增长，那么确能证明$M$的体积形式就能引出这样一种截面。这建立在由 Calabi 和作者建立的下述定理之上：完备、非紧、具非负 Ricci 曲率的黎曼流形体积不能有限。

总之，作者可以证明，对于紧致的 Kähler 流形$\widetilde{M}$，如果其反典型线丛容许一仅有非奇异零点的全纯线丛，那么此零点集的余集将容许一具零 Ricci 曲率的完备 Kähler 度量。这里零点的非奇异性似乎并不必需。事实上，对于许多其陈类满足某些条件的紧致 Einstein 流形上的负全纯向量丛，整个丛空间容许一完备 Kähler 度量，其 Ricci 曲率为零（对许多特殊的丛，Calabi 也曾发现过这些度量。对CP^1的余切丛，这由 Eguchi-Hamsen 和 Hitchin 更早地发现，他们甚至知道度量的明显形式）。在这些情形，当我们将丛空间紧致化时，反典型线丛的零截面有大于 1 的重数。

在问题三中，我们要求$\widetilde{M}\backslash M$是一个除子是因为人们可利用体积的增长来证明$\widetilde{M}\backslash M$中沒有一个连通分支是余维大于 1 的子簇。Cheeger-Gromoll 的一个定理[14]也表明除子$\widetilde{M}\backslash M$是连通的，除非$M$是$\mathbf{C}$和另一空间的乘积。我们可以证明$\widetilde{M}$的*Plurigenera*[1)]是零。因为$P_m(M)$（对某一$m>0$）的正性蕴含着一非零$(n,n)$形式$\widetilde{V}=(\sqrt{-1})^n f\, dz^1\wedge\cdots\wedge dz^n\wedge d\bar{z}^1\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^n$的存在性，这里$f\geqslant 0$，$\log f$在$f\neq 0$的那些点上是多次调和的。如果$dV$是$M$的体积形式，则$\widetilde{V}/dV$定义了一个在$M$上$L^1$可积的函数。加在$\widetilde{V}$的条件连同$M$的 Ricci 曲率为零的假定将导致$\widetilde{V}/dV$是一常数[53]。当$M$体积无限，此常数必须是零，这就得到矛盾。

这里提一下作为[54]中证明的 Schwarz 引理的一个推论，M及其通用覆盖都不能容许有界解析函数的存在。限定在二维复曲面的情况，可以利用分类理论得出结论：M必须是有理的，至少当M单连通时如此。总之，我们希望上面提的问题在近期能得到解答。一个肯定的回答即使是对复曲面而言也是很有兴趣的。

IV. 对偏微分方程的应用

直到目前，我们似乎主要是利用偏微分方程的方法讨论微分几何的问题。而实际上相反的过程也在进行。常常是微分几何的状况启发了微分方程中某些有用的量的研究。这特别对极小曲面方程和 Monge-Ampère方程是如此。事实上，最近郑绍远和作者解决的 Monge-Ampère方程的 Dirichlet 边值问题就是利用了上面我们构造的度量。这一方法并不依赖于广义解的概念。对于实 Monge-Ampère方程，有 Alexandrow[1]和Pogorelov 的工作。在[43]中 Pogorelev 概要地证明了当方程的右端不依赖于未知函数时广义解的光滑性（而在[16]中，作者和郑绍远给出了一般情形下解的光滑性的详细证明，其中方程右端可以依赖于未知函数。证明中，我们注意到[43]中曾观察过的几个主要之点，虽然是通过不同的方法）。对于

1) Plurigenera 的中文译名待定．其定义为，如M是紧致Kähler 流形，K是M的典型线丛，m是一正整数，则数$P_m=\dim H^0(M,\ K^m)$称为M的 Plurigenera.——译注．

复Monge-Ampère方程，先前的最好结果属于Bedford和Taylor[5]，他们证明了C^1广义解的存在性（用不同的方法，Gaveau[62]也得到类似于[5]的广义解）。

[钟家庆译，石赫校]

参考文献

[1] A.D.Alexandrov, Dirichlet problem for the equation Det $\|Z_{ij}\|=\Phi(Z_1, \cdots, Z_n, Z, X_i, \cdots, X_n)$, I, Vestnik Leningrad Univ., *Mat. Meh. Astronom.*, 13 (1958), 5-24, (Russian).

[2] A.D.Alexandrov and V.A.Zalgaller, *Intrinsic geometry of surfaces*, Transl. R.I., (1967), Math. Monographs, vol.15, Amer.Math.Soc., Providence.

[3] M.F.Atiyah and I.M.Singer, The index of elliptic operators: III, *Ann. of Math.*, 87(1968), 546-604.

[4] T.Aubin, Metriques Riemanniennes et Courbure, *J.Diff.Geom.*, 4(1970), 383-424. Equations du type Monge-Ampere sur les variétés Kähleriennes compactes, C.R.Acad.Sci.Paris, 283(1976), 119-121.

[5] E.Bedford and B.A.Taylor, The Dirichlet problem for a Complex Monge-Ampère equation, *Invent.Math.*, 37(1976), 1-44.

[6] M.Berger, *Sur les varietes d'Einstein compactes* (in Comptes Rendus III^e reunion Math. Expression latine, Namur 1965).

[7] S.Bochner, Curvature and Betti numbers, *Ann. of Math.*, 49(1948), 379-390.

[8] D.Brill and S.Deser, Variational methods and positive energy in general relativity, *Ann.physics*, 50(1968), 548-570.

[9] E.Calabi, *The space of Kähler metrics*, Proc.Internat. Congress Math., Amsterdam, 1954, vol.2, 206-207.

[10] _______, *on Kähler manifolds with vanishing canonical class, Algebraic geometry* and *Topology*, A symposium in honour of S.Leptschitz, Pincston Univ.Press, Frinceton, N.J., 1955, 78-80.

[11] _______, Improper affine hypeprsheres and a generalization of theorem of J.K.Jorgens, *Michigen Math.J.*, 5(1958), 105-126.

[12] _______, Complete hyperspheres I, *Inst. Naz.Alta Mat. Symp.Math.*, 10 (1972), 19-38.

[13] _______, On manifolds with non-negative Ricci curvature Ⅱ, *Notices Amer. Math.Soc.*, 22(1975), A205.

[14] J.Cheeger and D.Gromoll., The splitting theorem for manifolds of non-negatives, Ricci curvature, *J.Differential Geometry*, 6(1971), 119-128.

[15] S.Y.Cheng and S.T.Yau, On the regularity of the solution of the n-dimensional Minkowskl problem, *Comm.Pure Appl.Math.*, 29(1976), 495-515.

[16] _______, On the regularity of the Monge-Ampère equation $\det(\partial^2 u/\partial x^i \partial x^j) = F(x,u)$, *Comm.Pure Appl. Math.*, 30(1977), 41-68.

[17] S.S.Chern, Characteristic classes of manifold, *Ann.of Math.*, **47**(1946), 85-121.

[18] ______, On curvature and characteristic classes of a Riemannian manifold, *Abh. Math.Sun. Univ.Hamberg*, **20**(1956), 117-126.

[19] ______, *On holomorphic mappings of Hermitian manifolds of the same dimension*, Proc. Sympos.Pure Math.,Vol.11,Amer. Math. Soc. Providence, R.Ⅱ.,1968, 157-170.

[20] S.S.Chern and J.Moser, Real hypersurfaces in complex manifolds, *Acta Math.*, **133**(1974), 219-271.

[21] Y.Choquet-Bruhat and J. Marsden, Solution of the local mass problem in general relativity, *Comm.Physics*, (to appear).

[22] J.Ells and S.Sampson, Harmonic mappings of Riemannian mamifolds, *Amer. J.Math.*, **86**(1964), 109-160.

[23] H.Federer, *Geometric measure theory*, Springer-Verlag, New York,1969.

[24] C.Fefferman, Monge-Ampere equations, the Bergman Kernel, and geometry of pseudoconvex doma ins, *Ann. of Math.*, **103**(1976), 395-416.

[25] A.Fisher and J.Marsden, Deformations of the scalar curvature, *Duke Math. J.*, **42**(1975), 519-547.

[26] R.Geroch, *Generai reletivity*, Proc. Sympos.Pure Math., vol.27, part 2, Amer.Math.Soc.,Frovidence, R.I.1975,401-414.

[27] R.E.Greene and H.Wu, *Whitney's embedding theorem by solutions of elliptic equations and geometric consequences*, Proc.Sympos.Pure Math.,vol.27,part. 2, Amer.Math.Soc., Providence, R.I.,1975, 287-296.

[28] P.A.Griffiths, *Hermitian differential geometry, Chern classes and positive bundles, Global analysis*, Papers in Honour of K. Kodaila, Princton Univ. Press, Princeton, N.J.,1970, 185-251.

[29] ______, A.Schottky-Landau theorem for holomorphic mappings in several complex variable,Iat.Naz.di Alte Mate. *Symposia Math.*, **10**(1972),229-243.

[30] N.Hitchin, The space of harmonic spinors, *Advances in Math.*, **14**(1974), 1-55.

[31] ______, Compact four-dimensional Einstein manifolds, *J.Differential Geometry*, **9**(1974), 435-441.

[32] J.Kazdan and F.Warner, A direct approach to the determinatinn of gaussian and scalar functions, *Invent.Math.*, **28**(1975),227-230.

[33] ______, Curvature functions for compact 2dimensions manifolds, *Ann. of Math.*, **99**(1974), 14-47.

[34] H.B.Lawson and S.T.Yau, Scalar curvature, nonabelian group actions and the degree of symmetry of exotic spheres, *Comment.Math.Helv.*, **49**(1974), 232-244.

[35] A. Lichnerowicz, Spineurs ha moniques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **257**(1963), 7-9.

[36] J. Milnor, A note on curvature and fundamental group, *J. Differential geometry*, **2**(1968), 1-7.

[37] C. B. Morrey, *Multiple Integrals in the calculus of variations*, Springer-Verlag, New York, 1966.

[38] _______, The problem of plateau on a Riemannian manifold, *Ann. of Math.*, **49**(1948), 807-851.

[39] J. Moser, On Harnack's theoram for elliptic diff-erential equation, *Comm. Pure Appl. Math.*, **14**(1961), 577-591.

[40] _______, *On a non-linear problem in differential geometry*, Dynamical Systemst (M. Peixoto, ed.) Academic Press, New York, 1978.

[41] S. Myers, Riemannian manifolos with positive mean curvature, *Duke Math.*, **8**(1941), 401-404.

[42] L. Nirenberg, The weyl and Minkouski problems in differential geometry in the large, *Comm. Pure Appl. Math.* **6**, (1953), 337-394.

[43] A. V. Pogorelov, On the regularity of generalized solutions of the equation $\det(\partial^2 u/\partial x^i \partial x^j) = \varphi(x^1, x^2, \cdots x^n) > 0$, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **3200**(1971), 534-537.

[44] _______, The Dirichlet problem for the n-dimensional analogue of the Monge-Ampere equation, *Dokl, Akad. Nauk SSSR*, **201**(1971), 790-793.

[45] _______, Improper convex affine hyperspheres, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **202**(1972).

[46] R. Schoen and S. T. Yau, Harmonic maps and the Topology of stable hyper-surfaces and manifolds with non-negative Ricci curvsture, *Comm. Math. Hely*, **39**(1977), 333-341.

[47] _______, *Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three dimensional manifolds with nonnegative scalar curvature* (to appear).

[48] J. L. Synge, On the connectivity of spaces of positive curvature, *Quart. J. Math. Oxford Univ. Soc.*, **7**(1936), 316-320.

[49] N. Trudinger, *Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Ann. Scuola Norm. Sup. pisa (to appear).

[50] A. Van de Ven, On the Chern numbers of surfaces of general type, *Invent. Math.*, **36**(1976), 235-293.

[51] J. A. Wolf, Growth of finitely generated solvable groups and convergence of Riemannian manifolds, *J. Differential geometry*, **2**(1968), 421-446.

[52] H. Yamabe, On a deformation of Riemannian structure on compact manifolds, *Osaka Math. J.* **12**, (1960), 21-37.

[53] S. T. Yau, On some function theoretic properties of a complete Riemannaian manifolds and their applications in geometry, *Indiana Univ. Math. J.*, (1976).

[54] _______, A general Schwarz lemma for Kähler manifolds, *Amer. J. Math.*, **100** (1978), 197–203.

[55] _______, Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, **74** (1977), 1778–1799.

[56] _______, On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation I, *Comm. Pure Appl., Math.* **31** (1978), 339–411.

[57] _______, Harmonic functions on a complete Riemannian manifold, *Comm. Pure AopI. Math* (to appear).

[58] S. Kobayashi, *The first Chern class and holomorphic symmetric tensor fields* (to appear).

[59] K. Jörgens, Uber die Lösungen der Differentialgleichung $rt-s^2-1$, *Math. Ann.*, **127** (1954), 130–134.

[60] J. L. Kazdan, A remark on the preceding paper of Yau, *Comm. Pure Appl. Math.*, **31** (1978), 412–413.

[61] M. Berger and D. Ebin, Some decompositions of the spaces to symmetric tensors on a Riemannian manifold, *J. Differential Geometry*, **3** (1969), 379–92.

[62] B. Gaveau, Method de control optimal in d'Analyse complex I, Resolution d'equation de Monge-Ampère, *J. Functional Analysis*, **25** (1977).

[63] E. Calabi and E. Vesentini, On compact locally symmetric Kähler manifolds, *Ann. of Math.*, **71**, 472–507.

复分析中的偏微分方程方法(上)*

J. J. Kohn

I

我们先来考虑著名的 H. Lewy 方程，说明它是如何在多复变中提出的，并要讲一下 P. Greiner, E. Stein 和作者本人最近得到的一些结果[1]. 这个题目会把我们直接引向边界 Laplacian 的 Hodge 分解的讨论；而这又把我们带到我们的主要课题，即，经由$\bar\partial$-Neumann 问题来研究正则性.

设 x, y, t 表示 $\mathbf{R}^3$ 中的坐标，命 $z=x+iy$，且

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

则 Lewy 方程为

(1) $$Lu\equiv\partial u/\partial z+i\bar z\partial u/\partial t=f.$$

［2］中 H. Lewy 证明：对很多 f 上述方程无解. ［3］中 Sato 给出（1）式微局部可解的充要条件. 这里介绍一下[1]给出的结果. 它给出（1）式局部可解的充要条件以及最好的光滑解.

考虑域 $\Omega\subset\mathbf{C}^2$,

(2) $$\Omega=\{(z_1,z_2)\in\mathbf{C}^2|\operatorname{Im}(z_2)>|z_1|^2\}.$$

用 $b\Omega$ 表示 Ω 的边界，则 $b\Omega$ 为

(3) $$b\Omega=\{(z_1,z_2)\in\mathbf{C}^2|\operatorname{Im}(z_2)=|z_1|^2\}.$$

用下式把 $\mathbf{R}^3$ 映到 $b\Omega$ 上

(4) $$z_1=z, \text{ 和 } z_2=t+i|z|^2,$$

此映射诱导出 $\mathbf{R}^3$ 切向量到 $b\Omega$ 的切向量的映射；此时 L 的像为

(5) $$L'=\partial/\partial z_1+2i\bar z_1\partial/\partial z_2.$$

可以看出：切于 $b\Omega$ 的形为 $a\partial/\partial z_1+b\partial/\partial z_2$ 的向量都是 L' 的倍数.

设$L_2(b\Omega)$是相应于体积元 $d\sigma=dxdydt$ 的平方可积函数组成的空间，$\mathscr{H}(b\Omega)$表示 Ω 上全纯函数边界值所组成的 $L_2(b\Omega)$ 的子空间. 更为精确地，我们取 $\mathscr{H}(b\Omega)$ 为光滑全纯函数边

---

* 本文译自Proceedings of Symposia in Pure Math., 30 (1977).