黎曼曲面、代数曲线、解析函数



综合报告

①
96,15(2)
89-97

O187.1

# 黎曼曲面与代数曲线

V. V. Shokurov

Shok.,VV 袁文俊

"黎曼曲面"的取名是历史上名符其实的少有的情形之一：与这概念有关的所有基本思想都属于黎曼．这些思想的中心是单复变解析函数定义在某些自然集合上，并在它上面研究解析函数．这个集合不必与最初所给函数在复平面中的定义域一致．通常，定义的这个自然集合不与复平面 $\mathbb{C}$ 中区域一致，而是较复杂的，且必需由这个函数特别构造的曲面：所以我们称其为这个函数的黎曼曲面．只有在整个黎曼曲面上考虑这个函数我们才能得到它的完整图象．黎曼曲面有不平凡的几何，它确定了这个函数的某些本质特征．

扩充复平面，由复平面加上无穷远点得到，可被看作了解黎曼曲面的胚胎形式．拓扑地讲，扩充复平面是一个二维球面，也称为黎曼球面．这个例子已经展现了黎曼曲面一般概念的某些特征：

1)．黎曼球面 $\mathbb{CP}^1$ 可用复平面中两个圆盘粘合定义；例如，圆盘 $|z|<2$ 和 $|w|<2$、其中圆环 $\frac{1}{2}<|z|<2$ 和 $\frac{1}{2}<|w|<2$ 由对应 $w=z^{-1}$ 确定 (这导出图 1 中的阴影部分)

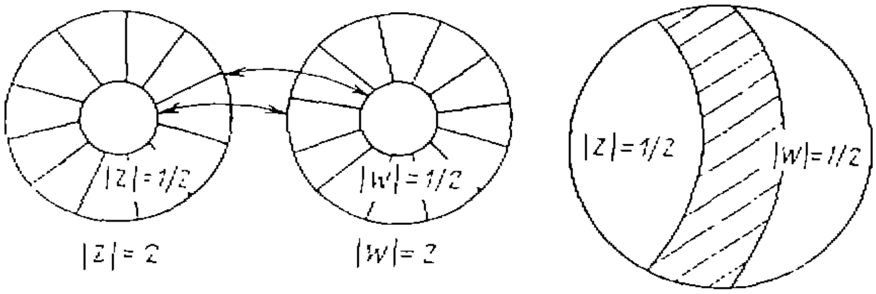



图 1

原题：Riemann Surfaces and Algebraic Curves. 译自：《Encyclopaedia of Mathematical Sciences》, Vol. 23, 《Algebraic Geomelry I》, 1994, pp. 5–15.

本文是 I. R. Shafarevich 教授为 V. V. Shokurov 著的《Riemann Surfaces and Algebraic Curves》写的引言．他精辟地介绍了黎曼曲面与代数曲线的基本思想和它们的本质联系．——译注．

2). 关系 $w = z^{-1}$, 定义了上述的粘合，是它所确定的区域上的一对一且解析 (共形) 的对应. 因此，在某些点解析的性质在两个圆环上亦真. 这导出了由它们粘合的黎曼球面上统一的解析函数概念. 由此就可叙述和证明如下的定理：“整个黎曼球面上全纯的函数是常数”或“在黎曼球面上仅以极点为奇点的函数是有理函数”.

同样的原理构成黎曼曲面一般概念的基础. 我们仅涉及紧黎曼曲面. 根据定义，这是一个由复平面中有限多个圆盘 $U_1, U_2, \ldots, U_m$ 粘合来的闭 (紧) 曲面 $S$: 对任两个圆盘 $U_i$ 和 $U_j$、区域 $V_{ij} \subset U_i$ 和 $V_{ji} \subset U_j$ 由一个一对一且解析的对应 $\varphi_{ij} : V_{ji} \to V_{ji}$ 确定.

换句话说，黎曼曲面是集合 $U_1, \ldots, U_N$ 的并，其中每个集合被赋予一个坐标函数 $z_i (i = 1, \ldots, N)$.$z_i$ 是 $U_i$ 到复平面中一圆盘的单射. 进而，在交集 $V_{ij} = U_i \cap U_j$ 上，坐标 $z_j$ 可表示为 $z_i$ 的解析函数. 类似地 $z_i$ 可表示为 $z_j$ 的解析函数.

于是，正如黎曼球面情形一样，对某点 $p \in S$ 领域内的连续复值函数的解析概念有一个好定义. 进而，我们能够将极点，亚纯函数的性质等概念搬到曲面 $S$ 上的函数中来. 因此，黎曼曲面是一个集合，在这个集合上说一函数解析是有意义的，且局部地 (在充分小的领域内), 这种解析函数与通常的复平面内某区域上解析函数概念一致. 这个定义在第一章的 §1 中将作详细的解释.

所以，借用于黎曼曲面的概念，我们遇到一个数学本质. 它可与几何中的黎曼流形，代数中的域相媲美. 就像在黎曼流形上定义度量，在域上定义代数运算一样，可以在黎曼曲面上定义解析函数的概念. 特别地，现在可以陈述和证明下述定理：整个 (紧) 黎曼曲面上的解析函数是常数.

黎曼曲面的概念是不平凡的，它使多值解析函数变得简单明了. 事实上，对每个这样的函数，我们都可以构造一个黎曼曲面使其成为该曲面上的单值函数. 对代数函数，对应的黎曼曲面是紧.

最简单的情形，由函数 $w = \sqrt[n]{z}$ 表示的曲面，已不是什么新的曲面. 事实上，我们有 $z = w^n$ 所以，尽管 $w$ 是 $z$ 的多值函数，但函数 $z(w)$ 是单值的. 因此，我们认为 $w$ 是一个独立变量，跑遍整个黎曼球面 $S$.$S$ 就是函数 $w$ 的黎曼曲面. 关系 $z = w^n$ 定义了 $w-$ 球面 $S$ 到 $z-$ 球面 $\mathbb{CP}^1$ 上的映射. 我们可认为球面 $S$ 在 $\mathbb{CP}^1$ 之“上”(在某个更大空间内), 以这种方式对上面每点 $z = z_0$、我们找到一些点与之对应. 那么对 $z_0 \neq 0, \infty$, 其充分小的圆盘 $U : |z - z_0| < \varepsilon$ 在 $S$ 上的逆象是由 $n$ 个不相交的区域 $W_i, i = 1, \ldots, n$:

$$w = w_i g(t), \quad |t| < \frac{\varepsilon}{|z_0|}, \quad g(t) = \sqrt[n]{1+t}, \quad g(0) = 1, \quad t = \frac{z}{z_0} - 1,$$

组成，其中 $w_i$ 是 $\sqrt[n]{z_0}$(图 2a) 不同的值. 但是，在点 0(或相应地 $\infty$) 的邻域内，圆盘 $|z| < \varepsilon$(对应地 $|t| < \epsilon, t = z^{-1}$) 的逆象由单一圆 $W : |w| < \sqrt[n]{\varepsilon}$ 构成. 它以一个“蜗牛”的形状在这个圆盘之上 (图 2b, 其中 $n = 2$)

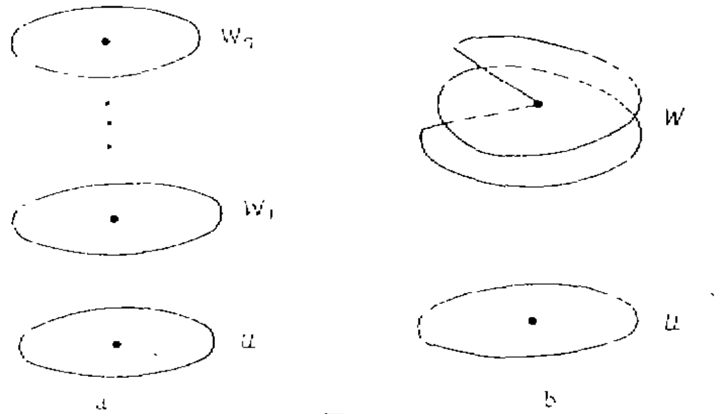



图 2

一般情形，代数函数由方程 $f(z,w)=0$ 定义，其中 $f(z,w)$ 是关于 $z$ 和 $w$ 的二元多项式，$f(z,w)=a_0(z)w^n+\cdots+a_n(z)$, $a_i(z)$ 是关于 $z$ 的多项式. 先粗略地看，函数 $w$ 的黎曼曲面就是 $f(z,w)=0$ 的所有解 $(z,w)$ 之集 $\widetilde{S}$. 在 $\widetilde{S}$ 上，$w$ 是在 $(z_0,w_0)$ 处取值 $w_0$ 的函数. 然而，这个定义须下的更精确. 我们假定 $\widetilde{S}\subset\mathbb{C}^2$, 其中 $\mathbb{C}^2$ 是复变量 $z,w$ 的复平面，且 $\widetilde{S}$ 上的拓扑就是 $\mathbb{C}^2$ 的拓扑. 换句话说，$\widetilde{S}$ 是平面 $\mathbb{C}^2$ 内的复代数曲线.

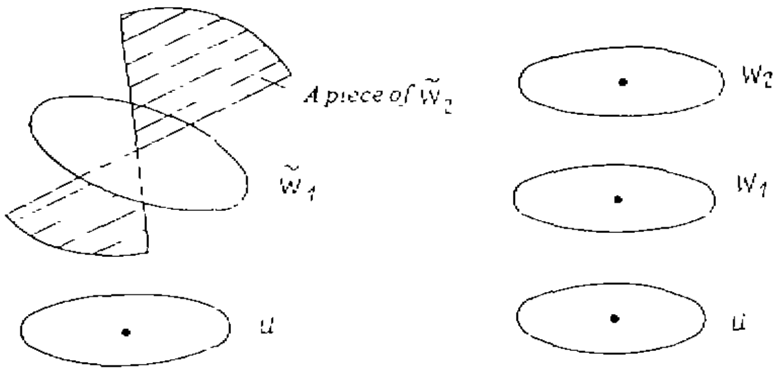
假定 $z_0$ 使得 $(z_0,w)=0$ 有 $n$ 个不同根 $w_1,\ldots,w_n$. 这意味着 $a_0(z_0)\neq 0$ 且 $f'_w(z_0,w_i)\neq 0$, 那么根据隐函数定理，$w$ 是 $z$ 在 $z_0$ 的某邻域 $|z-z_0|<\varepsilon$ 内的解析函数 $g_i(z)$. 精确地讲，$f(z,w)=0$ 的靠近 $(z_0,w_i)$ 的所有解能表示成 $(z,g_i(z))$, $i=1,\ldots,n$ 的形式. 也就是说，由 $|z-z_0|<\varepsilon$ 得到的解落进 $n$ 个圆盘 $W_i$, $i=1,\ldots,n$:

$$|z-z_0|<\varepsilon,\quad w=g_i(z),$$

正如图 2a 所示. 我们称它们为圆盘，是因为函数 $z$ 将它们以一对一的方式映到圆盘 $U:|z-z_0|<\varepsilon$ 上.

剩下的情形在此省略，这是 $f(z_0,w)=0$ 的解的个数小于 $n$, 以及 $z_0=\infty$ 在黎曼球面 $\mathbb{CP}^1$ 上的情形. 在所有这些情形里，存在一个圆盘 $U:|z-z_0|<\varepsilon$(相应地，$|t|<\varepsilon$, $t=z^{-1}$, 若 $z_0=\infty$) 使得对所有点 $z\in U$, $z\neq z_0$ 都有我们在前面考虑过的性质. 我们用 $\widetilde{U}$ 表示去心圆盘：$|z-z_0|<\varepsilon, z\neq z_0$. 用 $\widetilde{W}$ 表示 $\widetilde{U}$ 在 $\widetilde{S}$ 中的逆象，集合 $\widetilde{W}$ 可以是不连通的.

平凡的情形是，如果 $f(z_0,w)=0$ 有两不同解，$w_i$ 和 $w_j$, 那么在 $\widetilde{S}$ 中的两小邻域不相交且导出 $\widetilde{W}$ 的不同连通分支，像图 2a 中的集合 $W_1,\ldots,W_n$. 但是也有不平凡的情形. 即 $\widetilde{W}$ 的多个不同的连通分支收敛于 $\widetilde{S}$ 的同一点. 这个思想实际上是这些分支必须定义为 $w$ 的黎曼曲面 $S$ 的不同点：在 $S$ 中它们必须是分离的. 例如，如果 $w^2=z^2+z^3$, 那么 $w=z\sqrt{1+z}$. 现在，函数 $\sqrt{1+z}$ 在 $z_0=0$ 的邻域内有两分支 $g_1(z)$ 和 $g_2(z)=-g_1(z)$. 所以 $\widetilde{W}$ 由两个分支组成：$\widetilde{W}_1=\{|z|<\varepsilon, z\neq 0, w=zg_1(z)\}$ 和 $\widetilde{W}_2=\{|z|<\varepsilon, z\neq 0, w=zg_2(z)\}$. 当 $z\to 0$ 时它们合并了 (图 3a)




a　　　　　　b

图 3

一般情形，我们用 $\widetilde{W}_1, \dots, \widetilde{W}_r$ 表示 $\widetilde{W}$ 的连通分支. 黎曼曲面 $S$ 按照这样一个方式定义：可以说在 $S$ 内 $\widetilde{W}_i$ 相互之间是“孤立的”，即当 $z \to z_0$ 时，它们的闭包不相交. 从集合论角度看，$S$ 不同于 $\widetilde{S}$，在 $S$ 中现有 $r$ 个不同点在 $z_0$ 上，每个对应于它自己的分支 $\widetilde{W}_i$. 更精确地讲，每个 $\widetilde{W}_i$ 是去心圆盘 $\widetilde{U}$ 的连通的非分支覆盖：在每个点 $z \in \widetilde{U}$ 上，我们在 $\widetilde{W}_i$ 中找到相同个数 $n_i$ 个点，且 $n_1 + \cdots + n_r = n$. 易证，函数 $w_i$ 能定义在每个 $\widetilde{W}_i$ 上——$\widetilde{W}_i$ 由去心圆盘 $|W_i| < \varepsilon^{\frac{1}{n_i}}$，$w_i \neq 0$ 给定，且映射 $w_i : \widetilde{W}_i \to \widetilde{U}$ 定义为 $z - z_0 = w_i^{n_i}$. 然后，我们看实心圆盘 $W_i : |w_i| < \varepsilon^{\frac{1}{n_i}}$、不同的圆盘 $W_i$ 可看成是黎曼曲面 $S$ 中的不相交集 (见图 3b). 每个 $W_i$ 被函数 $w_i$ 映射到复平面的一个圆盘上，并且所有 $W_i$ 像图 2b 中一样位于黎曼 $z$- 球面之上.

从前面构造出的所有圆盘 $W_i$，在不同的点 $z_0 \in \mathbb{CP}^1$(包括 $z_0 = \infty$) 上，我们能选出有限个 $W_1, \dots, W_N$，它们的并包含剩下的所有圆盘. 由这些映射的解析性，易推出，由 $W_1, \dots, W_N$ 粘合的曲面满足黎曼曲面定义中的条件. 于是 $S$ 事实上是黎曼曲面，这个构造的详细判断参见第一章第二节.

任何黎曼曲面带有大量的几何信息. 特别地，代数函数的黎曼曲面揭示了这个函数的某些重要特征. 由于粘合函数 $\varphi_{ij}$ 是共形的，因而它是保定向的，可传递的，且任何黎曼曲面是可定向的. 所以从拓扑观点看，它有一个唯一的不变量：亏格. 亏格 $g = 0, 1, 2, 3, 4$ 的曲面如图 4 所描绘.

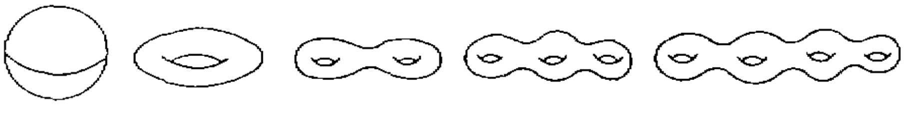


图 4

例如，如果一多项式 (次数为 $2n$ 或 $2n-1$)，$f(z)$ 没有重根，那么函数 $w = \sqrt{f(z)}$ 的黎曼曲面的亏格为 $n-1$. 除此以外，在黎曼曲面上我们可以定义在共形变换下不变的所

有概念：它有一个"共形几何".Laplace 算子和调和函数是共形变换下不变的概念. 特别地，在黎曼曲面的某区域内的解析函数的实部和虚部都是调和的. 这就能使我们借助于椭圆微分算子为工具，甚至于借助物理直观去研究黎曼曲面上的函数. 黎曼曲面上的调和函数可被设想为某些物理系统平稳状态的描述：如温度分布，此时黎曼曲面为同质热导体. Klein(Riemann 的追随者) 在他的脑子里有一个非常具体的描述：

> "用薄片覆盖黎曼曲面很容易作到这一点……假定给定电压的可变电流电池的两极被设置在点 $A_1$ 和点 $A_2$. 一通电，它的势函数 $u$ 除去两不连续点 $A_1$ 和 $A_2$ 外在整个曲面上是单值，连续且满足方程 $\Delta u=0$"
>
> *[Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19.Jahrhundert, p.260]*

具有这种物理背景的函数其存在性在椭圆型偏微分方程理论的基础上建立起来. 这提供了在黎曼曲面上构造解析函数的绝新方法：一旦调和函数 $u$ 被构造，我们找出它的共轭函数 $v$, 那么 $u+iv$ 是解析的.

特别地，这能使我们描述任一黎曼曲面 $S$ 上的所有亚纯函数构成的类. 如果 $S$ 是由 $f(z,w)=0$ 给定的代数函数 $w$ 的黎曼曲面，那么 $w$ 和 $z$ 都是 $S$ 上的亚纯函数. 因此 $w$ 和 $z$ 的任何有理函数都是亚纯函数. 易证，这是一个得到 $S$ 上所有亚纯函数的方法. 这是：黎曼球面上的亚纯函数都是有理函数这一定理的一个推广. 然而对任一黎曼曲面，甚至有一非常数亚纯函数都不是明显的. 正如前面所说这样的函数可用椭圆偏微分方程理论的方法构造. 进一步我们能用同样的方法构造 $S$ 上的两个亚纯函数 $w$ 和 $z$, 其中 $w$, $z$ 由关系 $f(z,w)=0$ 相联系，其中 $f$ 是多项式且满足性质：$S$ 就是由 $f=0$ 确定的代数函数 $w$ 的黎曼曲面. 这个结果被称为"Riemann 存在定理".

因此一个 (紧) 黎曼曲面的抽象概念化为一个代数函数的黎曼曲面.这是一个极不平凡的结果,具有强有力的应用.事实上,在许多特殊情形里所出现的都是"抽象"的黎曼曲面.然而前面的定理给这类曲面提供了一个非常简明的表示. 这种情形中最简单的例子是何时 $S$ 为商群 $\mathbb{C}/\Lambda$: 复平面 $\mathbb{C}$ 模以由两复数 $w_1$ 和 $w_2$ 张成的格 $\Lambda=\{w_1n_1+w_2n_2|n_1,n_2\in\mathbb{Z}\}$. 设 $U$ 是任一充分小的圆盘，以使其中之两点被 $\Lambda$ 中的向量分开. 那么 $\mathbb{C}$ 上坐标 $z$ 将 $U$ 一对一地映到 $S=\mathbb{C}/\Lambda$ 内的一个域. (图 5). 进而这些圆盘构成 $S$ 的一个覆盖. 拓扑地看 $S$ 是环面：亏格为 1. 在这情形，黎曼存在定理表明 $S$ 是代数函数 $w=\sqrt{z^3+az+b}$ 的黎曼曲面，其中 $a$ 和 $b$ 为复数且多项式 $z^3+az+b$ 无重根. 可以证明以这方式可以得到所有亏格为 1 的黎曼曲面. $S$ 上的亚纯

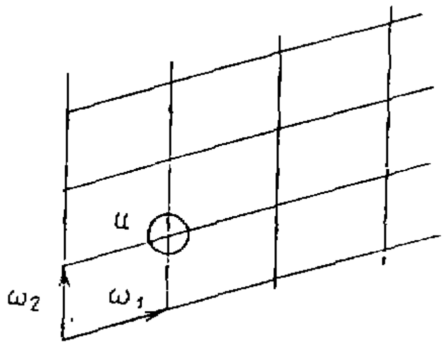



图 5

函数可被解释为在格 $\Lambda$ 中向量构成的变换下不变的所有 $z$ 的亚纯函数. 即椭圆函数. 在这种情况下, 黎曼存在定理给椭圆函数域提供了一个简明的描述.

对亏格 $g>1$ 的黎曼曲面, 这种描述也是可行的. 我们不得不考虑作用在圆盘 $|z|<1$ 内线性分式变换的离散群. 两个点是恒等的如果由这种群 $\Gamma$ 中的一个元素使它们相互对应. 于是黎曼曲面被表示为商群 $\mathbb{D}/\Gamma$,[1] 其中 $\mathbb{D}$ 是单位圆盘. 就像平面 $\mathbb{C}$(对亏格为 1 的曲面), 亏格 $g>1$ 的单位圆盘是黎曼曲面 $S$ 的万有覆盖. 对亏格 $g=0$,$S$ 不是别的, 正是黎曼球面且是它自己的万有覆盖. 在平面 $\mathbb{C}$ 内 Euclidean 度量 $ds^2=|dz|^2$ 在群 $\Lambda$ 变换下是不变的且指定了曲面 $S$ 上一个零曲率度量. 同样地, 在单位圆盘内, 度量 $ds^2=|dz|^2/(1-|z|^2)$ 定义了常负曲率的 Lobachevskian 几何, 且因此在曲面 $S=\mathbb{D}/\Gamma$[2] 上也有类似地度量. 最后在球面 $\mathbb{CP}^1$ 上有一个常正曲率度量. 在三种情形里, 这些度量给黎曼曲面提供了"共形几何". 因此依赖于它们的拓扑的黎曼曲面的性质可综述如下: (表 I)

| 亏格 | 万有覆盖类型 | 常曲率 $K$ 的度量 |
|---|---|---|
| 0 | 黎曼球面 $\mathbb{CP}^1$ | $K>0$ |
| 1 | $\mathbb{C}$ | $K=0$ |
| $>1$ | $\mathbb{D}=\{z:\|z\|<1\}$ | $K<0$ |

从此表我们知道在任何黎曼曲面 $S$ 上我们都可以定义一个常曲率 $K$ 的度量 $ds^2$, 它给曲面提供一个共形几何, 其逆也成立: 任何紧可定向曲面 $S$ 上的度量 $ds^2=Edx^2+2Fdxdy+Gdy^2$ 在其上定义一个黎曼曲面结构. 即可以证明在曲面上任何点的邻域 $U$ 内, 任何这种度量都能在某坐标系下写成 $ds^2=\lambda(dx^2+dy^2)$($x$ 和 $y$ 被称为等温坐标). 令 $z=x+iy$, 我们可写度量为 $ds^2=\lambda dzd\bar{z}$. 类似地, 如果在另一区域 $V$ 内 $ds^2=\mu dwd\bar{w}$, 易验证 (以曲面的可定向性这种观点)$dw=\varphi dz$. 结果 $w$ 是 $z$ 的解析函数. 于是区域 $U$ 与它们的坐标 $z$ 一起在 $S$ 上定义了一个黎曼曲面结构. 两个度量定义同一黎曼曲面, 若这两个度量相差一个因子 $\psi$, 它在 $S$ 上处处为正且为实的函数. 乘这样一个函数叫规范变换. 于是一个黎曼曲面就是一个具有微分几何度量的曲面, 这个度量可相差一个规范变换. 这就是何以在量子域论里, 在所谓的超弦理论里提出黎曼曲面的概念.

由方程 $F(z,w)=0$ 给定的代数曲线 $\widetilde{S}\subset\mathbb{C}^2$ 出发, 我们已经在上面说明了怎样构造黎曼曲面 $S$. 这黎曼曲面能用于研究这代数曲线. 一方面, 每个多项式 $G(z,w)$ 可由方程 $G(z,w)=0$ 定义一条新代数曲线 $C$; 进而 $F(z,w)=0$ 和 $G(z,w)=0$ 的共

[1] 原文误写为 $\Gamma/\mathbb{D}$.—— 译注.

[2] 原文又误写为 $\Gamma/\mathbb{D}$.—— 译注.

同解可被看作曲线 $\widetilde{S}$ 和 $C$ 之交点. 另一方面, $G(z, w)$ 是黎曼曲面 $S$ 上的亚纯函数; 它的零点对应于 $\widetilde{S}$ 和 $C$ 之交点. 零点重数定义为 $\widetilde{S}$ 和 $C$ 的接触阶数. 为了给出 $S$ 中的点 $z$ 或 $w$ 趋于无穷的几何意义, 我们不得不在射影平面 $\mathbb{CP}^2 \supset \mathbb{C}^2$ 内考虑代数曲线.

例如, 如果曲线 $\widetilde{S}$ 的级为 3, 那么易知在某坐标系内它的方程可写为 $w^2 = z^3 + az + b$. 如前所述, 伴随的黎曼曲面形如 $\mathbb{C}/\Lambda$(见图 5). 于是任意点 $p \in \widetilde{S}$ 对应于曲面 $S = \mathbb{C}/\Lambda$ 上的一点, 即对应一复数 $z$, 它能确定但相差一元素 $w \in \Lambda$. 下表说明点 $p \in \widetilde{S}$ 的几何性质怎样由对应复数表示. 证明在此略去. (表 II)

| | |
|---|---|
| 三点 $p_1, p_2, p_3$ 共线 | $z_1 + z_2 + z_3 \in \Lambda$ |
| 点 $p_1, \ldots, p_m$ 构成 $\widetilde{S}$ 与级为 $n$ 的曲线 $C$ 之交 | $m = 3n$<br>$\sum_1^m z_i \in \Lambda$ |

例如, 若在 $p_1$ 处存在触点, 则 $p_1 = p_2$; 若存在 2 级触点 (拐点), 则 $p_1 = p_2 = p_3$, 等等.

例如, 假设我们希望找到通过点 $p \in \widetilde{S}$ 与 $\widetilde{S}$ 相切的切线, 那么复数 $z'$ 对应于触点 $p'$ 满足关系 $2z' + z \in \Lambda$(其中 $z$ 对应于点 $p$). 换句话说,

$$2z' + z = n_1\omega_1 + n_2\omega_2, \quad n_i \in \mathbb{Z}$$

$$z' = -\frac{1}{2}z + \frac{\nu_1\omega_1 + \nu_2\omega_2}{2} + \omega, \quad \nu_i = 0, 1; \quad \omega \in \Lambda.$$

因此如图 6 所示, 存在 4 条这样的切线 ($\nu_1 = 0, 1$; $\nu_2 = 0, 1$)

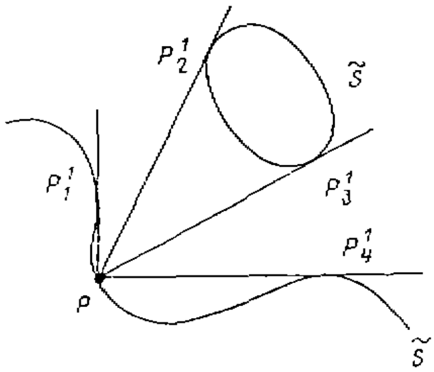



图 6

以完全相同的方法知， $\widetilde{S}$ 的拐弯点对应于使得 $3z \in \Lambda$ 的复数 $z$, 因此

$$z = \frac{\nu_1\omega_1 + \nu_2\omega_2}{3} + \omega, \nu_i = 0, 1, 2; \quad \omega \in \Lambda.$$

所以，存在 9 条切线. 进一步得结论：如果一条直线过 2 个拐点，它与 $\widetilde{S}$ 的第三个交点也是一个拐点. "$n$ 级" 拐点的一般问题可用相同方法处理. 这些点 $p \in \widetilde{S}$ 是使某些 $n$ 级曲线与 $\widetilde{S}$ 交于 $p$ 而不是交于其它点. 它们对应于复数 $z$ 使得 $3nz \in \Lambda$; 所以，它们的个数是 $9n^2$. 对其它曲线，它们依附于亏格 $g > 1$ 的黎曼曲面，这些曲面亦能用来导出曲线的大量新的几何性质.

黎曼曲面不是研究代数曲线的唯一的一种方法：事实上这两个理论是 "同构的". 它们可看成是描述同一逻辑关系体系的两种语言. 语言的选择决非不重要，因为它隐含了它本身的直观和叙述问题的特色. 特别地，可用代数曲线作为出发点，而不是用多值代数函数或抽象的黎曼曲面. 这导出 "综合" 几何的一个分支、实质上它是圆锥曲线的直接延拓，同时它仍然可与黎曼曲面理论相比较. 特别地，对应于由方程 $f(z, w) = 0$ 确定的代数函数的黎曼曲面的亏格能以纯几何方法定义为用同一方程 $f(z, w) = 0$ 确定的代数曲线的一个不变量. 于是对代数曲线有一个亏格的概念. 作为特殊情况，直线和圆锥曲线的亏格为 0、三次曲线的亏格为 1, 黎曼曲面的共形等价对应于能几何地定义的代数曲线间的关系、即双有理等价. 也许最突出的事是甚至与黎曼曲面上的积分 ('abelian 积分') 有关的结果都有其代数几何等价性.

此观点值得一提的特征是所有几何结构都能描述为有关点的坐标和线的方程的系数的代数运算. 考虑到这一点，我们可以假定这些量在任一域而不必在复数域 $\mathbb{C}$ 内. 一旦代数几何学家写道： "……考虑定义在任一域 $k$ 上的代数曲线", 他就由此宣布他将一直在综合的纯几何框架内研究曲线. 若 $k$ 碰巧是复数域，那么黎曼存在定理保证它就等价于紧黎曼曲面的理论. 利用其它类型的域就打开了应用代数曲线理论的全新的可能. 例如，研究 $f(x, y, z) = 0$ 给定的代数曲面，其中 $f$ 为多项式，我们把 $x$ 看作参数且将它加到系数中去. 那么 $f$ 就是系数在有理函数域 $\mathbb{C}(x)$ 上的关于 $y$ 和 $z$ 的多项式，且代数曲面就是域 $\mathbb{C}(x)$ 上的代数曲线. 代数曲面的研究已取得了非常丰富的成果.

另一例是 $k = \mathbb{R}$ 为实数域，此时代数曲线位于实平面里，它恰巧就是解析几何中研究的对象. 通常，它不连通、而是由多片组成，称为 "卵形线"(参见图 6, 它表示曲线 $y^2 = x^3 + ax + b$, 当多项式 $x^3 + ax + b$ 有三个实根的情形). 它的数目和有关位置引出了大量问题. 其中某些问题可用代数曲线理论去研究，其它问题的答案却是未知的. 著名的结果之一是亏格为 $g$ 的曲线至多分成 $g + 1$ 条卵形线. 例如，在射影平面里考虑曲线、则双曲线的两个分支组成一个单卵形线. 图 6 说明 $g = 1$ 的情形.

如果 $k = \mathbb{F}_p$ 是 $p$ 元域 (模素数 $p$ 的剩余域) 那么代数曲线的方程 $f(x, y) = 0$ 成为同余式 $f(x, y) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$. 来自代数曲线论的方法的应用在数论同余专题中已产生了许多深刻的结果. 这是一种情形，其中在曲线 (在域 $\mathbb{F}_p$ 内) 上点的个数有限，且这点集的拓扑问题被其数目问题所代替. 设 $N$ 是方程 $f(x, y) = 0$ 所确定的曲线

$C$ 上点的个数，包括在无穷远处的点 (曲线还必须在射影平面内). 这个数可与直线上的点的数目相比较，后一个数目为 $p+1$(包括无穷远点). 就亏格为 $g$ 的曲线而言，有断言：

$$|N-(p-1)| \leq 2g\sqrt{p}.$$

数论中特别有趣的是 $k$ 为有理数域 $\mathbb{Q}$ 的情形. 落在代数曲线上的点对应于不定方程 $f(x,y)=0$ 的有理数解. 例如，若 $f(x,y)=x^n+y^n-1$, 则我们更便遇到 "Fermat 大定理" 了. 一切都与曲线的亏格有关. 对亏格为 0 的曲线，解有明显的有理参数化，

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad y=\frac{2t}{1+t}$$

它类似于 $x^2+y^2=1$ 的解的参数化. 对亏格为 1 的曲线情形，前面的表 I 能使我们扩充 $\mathbb{C}/\Lambda$ 中的加法到曲线上的点中去. 这个运算以纯几何方式定义. 所以，特别地如果它的方程的系数是有理的，那么曲线上的有理点构成一个群. 一个基本定理断言此群是有限生成的. 最后，亏格 $g>1$ 的曲线有有限个有理点，这是一个重要定理. 若 $k$ 是域 $\mathbb{Q}$ 的有限扩充，这个结果仍成立. 于是我们可从表 I 中添加另一列，用算术的观点刻划了代数曲线 (表 III)

| 亏格 | 坐标在 $\mathbb{Q}$ 的有限扩充 $k$ 的点集 |
|---|---|
| 0 | 明 显 有 理 参 数 化 |
| 1 | 有 限 生 成 群 |
| $>1$ | 有 限 集 |

在各种情形中，注意到代数曲线的亏格作为其点集的主要特征如何出现是有趣. 对复数域上的曲线情形，它刻划了该点集的拓扑，万有覆盖的类型及与微分几何有关的性质. 在实数域 $\mathbb{R}$ 的情形，它对该曲线的连通分支或 "卵形线" 及点集的数目给出了一个估计 (正如实多项的次数只给一个界而不能指出实根个数一样). 在有限域情形，它刻划了点的个数与平均值的偏差. 在有理数域的情形，它决定了有理点集的 "类型".

(袁文俊 娄增建 译　何育赞 校)