Hilbert 第 15 问题

Hilbert (希尔伯特) 第 15 问题是 David Hilbert 于 1900 年提出的 23 个著名问题之一. 该问题要求为 Schubert (舒伯特) 的计数演算建立严格的基础.

1. 引言

Schubert 演算是相交理论在 19 世纪的表现形式, 也包括它在计数几何学中的应用. 说明该演算法则的正确性是 Hilbert 第 15 问题的内容, 同时也是 20 世纪代数几何学的主题之一 [1, 2]. 在奠定相交理论严格基础的过程中, van der Waerden (范德瓦尔登) 和 André Weil (韦伊) 将该问题归结为决定旗流形 G/P 的上同调环 $H^*(G/P)$ [3, 4][1), 这里 G 是一个 Lie (李) 群, P 是 G 的一个抛物子群.

Ehresmann (埃雷斯曼), Chevalley (谢瓦莱), Bernstein-Gel'fand-Gel'fand (伯恩斯坦 – 盖尔范德 – 盖尔范德) 关于 Schubert 演算的基定理 [5, 6, 7] 断言经典 Schubert 类构成了 $H^*(G/P)$ 的加法结构的一个自由基. 遗留下来的问题是: 如何将 Schubert 类的乘积表成为基元素的线性组合, Schubert 将这一问题称作 *特征数问题* (*the characteristic problem*) [8, 9, 3], 并称它是 " 计数几何学中主要的理论问题". [10]

尽管在其发展的头 100 年里, 计数几何学与物理学没有什么联系, 但后来它已逐渐成为弦理论的核心要素. [11]

2. 问题的陈述

Hilbert 关于第 15 问题的原始陈述全文如下:

"这个问题是: 对于计数几何中得到的几何数目, 在准确界定其适用范围的前提下, 严格地证明其正确性. 特别需要研究的是, Schubert 在他的书中, 基于所谓特殊位置原理 (或称个数守恒原理) 建立的一套计数演算, 并据此算出的那些几何数目."

虽然今天的代数学原则上保证了可以实施消元法, 但要证明计数几何中的定理, 对于代数学的要求却比这高得多, 因为它要求在对于特定的具体方程 (组) 进行消元时, 事先就能知道最后所得方程 (组) 的次数及其解的重数. [1]

3. Schubert 演算

Schubert 演算是 Hermann Schubert 在 19 世纪引入的, 起初是为了解答射影几何中的各种计数问题 (它们是计数几何的一部分), 如今它已成了代数几何学的一个分支. 它也是一些现代理论 (例如示性类理论) 的先导, 特别是, 与它有关的算法问题仍然是当前研究的关注点.

Schubert 引入的那些数学对象今天被称为 Schubert 胞腔, 它们是某类 Grassmann (格拉斯曼) 流形中利用一个给定旗 (flag) 下射影空间中的线性子空间的关联 (incidence) 条件来定义的局部闭子集. 至于细节, 请参阅关于 Schubert 簇的条目.

译自: Wikipedia, 链接是 `en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_fifteenth_problem`. 向本条目作者表示感谢.

1) van der Waerden 的经典文献 [3] 的引言部分已有中译文, 刊登于《数学译林》 2015 年第 3 期. —— 译注

根据 van der Waerden [3] 和 André Weil [4] 的要求，Hilbert 第 15 问题已被解决. 具体结果如下：

a) Schubert 的特征数问题已被段海豹和赵学志解决; [12]

b) 旗流形的 Chow (周炜良) 环的特殊表示已由 Borel (博雷尔), Marlin, Billey-Haiman, 段海豹与赵学志等人得到; [12]

c) Schubert 的主要计数算例 [8], 已被 Aluffi, Harris (哈里斯), Kleiman, Xambó 等人验证. [13, 12]

参考文献

[1] Hilbert, David, "Mathematische Probleme" Göttinger Nachrichten, (1900), pp. 253–297, and in Archiv der Mathematik und Physik, (3) 1 (1901), 44–63 and 213–237. Published in English translation by Dr. Maby Winton Newson, Bulletin of the American Mathematical Society 8 (1902), 437–479 [1] (`http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/hilbert/problems.html#prob23`) [2](`http://www.ams.org/journals/bull/1902-08-10/S0002-9904-1902-00923-3/S0002-9904-1902-00923-3.pdf`) doi:10.1090/S0002-9904-1902-00923-3 (`https://doi.org/10.1090%2FS0002-9904-1902-009 23-3`). [A fuller title of the journal Göttinger Nachrichten is Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen.]

[2] F. Sottile, Schubert calculus, Springer Encyclopedia of Mathematics (`https://encyclopediaofmath.org/wiki/Schubert_calculus`)

[3] Waerden, B. L. van der (1930). "Topologische Begründung des Kalküls der abzählenden Geometrie". Math. Ann. 102 (1): 337–362. doi:10.1007/BF01782350 (`https://doi.org/10.1007%2FBF01782350`). MR 1512581 (`https://www.ams.org/mathscinet-getitem?mr=1512581`).

[4] Weil, A. (1962), Foundations of algebraic geometry, Student Mathematical Library, 32, American Mathematical Society, MR 0144898 (`https://www.ams.org/mathscinet-getitem?mr=0144898`)

[5] Ehresmann, C. (1934). "Sur la topologie de certains espaces homogenes" (`http://www.numdam.org/issue/THESE_1934_162_391_0.pdf`) (PDF). Ann. of Math. 35 (2): 396–443.

[6] Chevalley, C. (1994). "Sur les D'ecompositions Celluaires des Espaces G/B". Proc. Symp. in Pure Math. 56 (1): 1–26. doi:10.1090/pspum/056.1 (`https://doi.org/10.1090%2Fpspum%2F056.1`).

[7] I. N. Bernstein; I. M. Gel'fand; S. I. Gel'fand (1973). "Schubert cells and cohomology of the spaces G/P" (`https://iopscience.iop.org/article/10.1070/RM1973v028n03ABEH001557/meta`). Russian Math. Surveys. 28 (3): 1–26.

[8] H. Schubert, Kalkül der abzählenden Geometrie, Reprint of the 1879 original. With an introduction by Steven L. Kleiman, Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, (1979)

[9] H. Schubert, a Lösung des Characteristiken-Problems für lineare Räume beliebiger Dimension, Mitteilungen der Mathematische Gesellschaft in Hamburg 1 (1886), 134–155.

[10] S. Kleiman, Book review on "Intersection Theory by W. Fulton", Bull. AMS, Vol. 12, no. 1(1985), 137–143. url = `https://projecteuclid.org/euclid.bams/1183552346`.

[11] Katz, Sheldon (2006), Enumerative Geometry and String Theory (`http://www.ams.org/bookstor e-getitem/item=stml-32`), Student Mathematical Library, 32, American Mathematical Society

[12] H. Duan; X. Zhao (2020). "On Schubert's Problem of Characteristics, in Schubert

Calculus and Its Applications in Combinatorics and Representation Theory (J. Hu et al. eds.)" (https://link.spr inger.com/chapter/10.1007/978-981-15-7451-1_4). Springer Proceedings in Mathemauics & Statistics. 332: 43–71. arXiv:1912.10745 (https://arxiv.org/abs/1912.10745). doi:10.1007/978-981-15-7451-1_4 (https://doi.org/10.1007%2F978-981-15-7451-1_4).

[13] S. Kleiman, Intersection theory and enumerative geometry: A decade in review, Proc. Symp. Pure Math., 46:2, Amer. Math. Soc. (1987), 321–370. url = https://www.ams.org/books/pspum/046.2/doi= https://doi.org/10.1090/pspum/046.2.

- Kleiman, Steven L. (1976), "Problem 15: rigorous foundation of Schubert's enumerative calculus", Mathematical developments arising from Hilbert problems (Proc. Sympos. Pure Math., Northern Illinois Univ., De Kalb, Ill., 1974), Proc. Sympos. Pure Math., XXVIII, Providence, R. I.: American Mathematical Society, pp. 445–482, MR 0429938 (https://www.am s.org/mathscinet-getitem?mr=0429938).
- Manin, Ju. I. (1969), "On Hilbert's fifteenth problem", Hilbert's problems (Russian), Izdat. "Nauka", Moscow, p. 175–181, MR 0254047 (https://www.ams.org/mathscinet-getitem?mr=02 54047).
- Pragacz, Piotr (1997), "The status of Hilbert's Fifteenth Problem in 1993", Hilbert's Problems (Polish) (Międzyzdroje, 1993), Warsaw: Polsk. Akad. Nauk, pp. 175–184, MR 1632447 (https:// www.ams.org/mathscinet-getitem?mr=1632447).

(余建明 译 李平 校)

****

(上接 76 页)

[13] G. d. B. Robinson, On the representations of the symmetric group, Amer. J. Math. 60 (1938), no. 3, 745–760, DOI 10.2307/2371609. MR1507943

[14] C. Schensted, Longest increasing and decreasing subsequences, Canad. J. Math. 13 (1961), 179–191, DOI 10.4153/CJM-1961-015-3. MR0121305

[15] A. Soshnikov, Universality at the edge of the spectrum in Wigner random matrices, Comm. Math. Phys. 207 (1999), no. 3, 697–733, DOI 10.1007/s002200050743. MR1727234

[16] T. Tao and V. Vu, Random matrices: universality of local eigenvalue statistics, Acta Math. 206 (2011), no. 1, 127–204, DOI 10.1007/s11511-011-0061-3. MR2784665

[17] C. A. Tracy and H. Widom, Level-spacing distributions and the Airy kernel, Comm. Math. Phys. 159 (1994), no. 1, 151–174. MR1257246

[18] S. M. Ulam, Monte Carlo calculations in problems of mathematical physics, Modern Mathematics for the Engineer: Second Series, McGraw-Hill, New York, 1961, pp. 261–281. MR0129165

[19] A. M. Veršik and S. V. Kerov, Asymptotic behavior of the Plancherel measure of the symmetric group and the limit form of Young tableaux (Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR 233 (1977), no. 6, 1024–1027. MR0480398

[20] E. P. Wigner, Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions, Ann. of Math. (2) 62 (1955), 548–564, DOI 10.2307/1970079. MR0077805

(陆柱家 译 童欣 校)