交换环论五十年*

永田雅宜

0. 前言

交换环论的历史很短。上世纪末左右 Kronecker 系统地处理多项式（理想当时被称为是 Modul），接着 Dedekind 考虑了有限维代数域的整数环的理想（由 Kummer 的 Idealzahl 而命名）。证明了理想分解成素理想的积，这些可以说是交换环论的开端。关于多项式虽可以由Lasker 以及 Macaulay 看到理论的进展，但正如从 Macaulay 有名的书 Algebraic theory of modular systems, Cambridge Tracts Math., 1966① 的题名可以知道，理想还不称为 ideal（在多项式环中），照顾到 Kronecker 流派而称为 modular system。

一方面，Steinitz 的交换域论（Crelle J., 137 (1910)）的出现也成了以后发展的基础之一，而到1920年代，Emmy Noether 给交换域论带来了一个转机。这主要由于如下的两篇论文。

Idealtheorie in Ringbereichen, *Math.Ann.*, 83(1921), 22—66.

Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl-und Funktionenkörper, *Math.Ann.*, 96(1927), 26—61.

前者包含了 Lasker-Macaulay 的结果：由理想的升链法则（与极大条件等价）导出理想的准素理想分解。后者则给出了 Dedekind 环(Krull 维数 1 的 Noether 整闭整环）的刻划。升链法则，Dedekind 也是考虑过的，应该将它作为使至今仍有个别处理倾向的理论向着一般理论巨大飞跃的基础。因此，大概可以认为，这一时期交换环论作为一个领域而确立了。

1927年 Grell 引入商环（只是以非零因子为分母的场合）(Beziehungen zwischen den Idealen verschiedener Ringe, *Math. Ann.*, 47(1927)490—523)也是重要的事件，而1931年则也是要重的一年。其中之一是 Springer 出版了 van der Waerden 有名的书 Moderne Algebra, Ⅰ，Ⅱ。这本书及其修订版、英文版似乎给大学的代数教育以很大的影响。另一个是 Krull, Allgemeine Bewertungstheorie, *Crelle J.*, 167(1931), 160—196，出来了。赋值的考虑在上述 Noether 的第二篇论文中也已经出现了，但 Krull 并不限定于实数值，导入了在一般的有序加法群中有值的加法赋值，从而构筑了整闭整环理论发展的强大基础。

另一方面，van der Waerden 在研究代数几何学中使用交换环的手法，使人们看到其对交换环论贡献，也是在1926年以后。这样，1920年以后，交换环论开始了急速的成长。然后在1935年，Krull 的 Idealtheorie 由 Springer 作为 Ergebnisse der Mathematik und ihre Grenzgebiete 中之一出版了。那里，包括了直至当时为止的交换环论的要重部分。因此，本文是就1920年至1980年的六十年间，以 Krull 的 Idealtheorie 以后直至 1975 年这一期间为中

---

* 原题：可换环论の50年，译自：《数学》，第36卷第2号（1984），157—163。

① Macaulay F.S.生卒年为1862—1937，此处1966显然有误。——译注。

心，且以日本国内为重点来加以叙述。

1. 直至 Krull 的 Idealtheorie 时的日本

在 Krull 的 Idealtheorie 的文献表中，所揭载的日本人的论文如下所示：

Akizuki, Y.（秋月康夫）[1]Bemerkungen über den Aufbau des Nullideals, *Proc. Phys-Math.Soe.Jap.*, 14(1932)253—262;[2] Über die Konstruktion der Zahlringe von endlichen Grad und ihre Diskriminantenteiler, *Tohoku Math.J.*, 37(1933),1—16.

Mori, S.（森新治郎）[1]Zur Zerlegung der Ideale, *Proc.Phys.-Math.Soc.*, 13 (1931), 302—309;[2] Über Ringe, in die größten Primärkomponenten jedes Ideals eindeutig bestimmt sind, *J.Sci.Hiroshima Univ.*, A1(1931), 159—191; [3]Über Produktzerlegung der Ideale, *J.Sci.Hiroshima Univ.*, A2(1932), 1—19; [4] Minimale Primärideale eines Ideals, *J.Sci.Hiroshima Univ.*, A2(1932), 21—32; [5]Über Teilerfremdheit von Idealen, *J.Sci.Hiroshima Univ.*,A2(1932), 103—116; [6]Struktur des Sanoschen Ringes, *J.Sci. Hiroshima Univ.*, A2(1932), 181—194; [7]Über Sonosche Reduktion von Idealen, *J.Sci.Hiroshima Univ.*, A2(1932), 195—206; [8] Axiomatische Begründung des Multiplikationsrings, *J.Sci.Hiroshima Univ.*, A3(1932);[9] Über eindeutige Reduktion in Ringe ohne Teilerkettensatz, *J.Sci.Hiroshima Univ.*, A3(1933)275—318; [10]Über ganz abgeschlossene Ringe, *J.Sci.Hiroshima Univ.*, A3 (1933), 165—175; [11]Antworten auf die Fragen von Dr.W.Weber, *J.Sci. Hiroshima Univ.*, A3(1933), 319—320; [12] Über allgemeine Multiplikationsringe, Ⅰ, *J.Sci. Hiroshima Univ.*, A4(1934) 1—26; [13] Über allgemeine Multiplikationsringe, Ⅱ, *J.Sci. Hiroshima Univ.*, A4(1934), 99—109.

Sono, M.（员正造）[1] On congruences, *Mem.Coll. Sci.Univ.Kyoto*, 2 (1917), 203—226; [2] On congruences, Ⅱ, *Mem.Coll.Sci.Univ.Kyoto*, 3(1918), 113—149; [3] On congruences, Ⅲ, *Mem.Coll.Sci.Univ. Kyoto*, 3(1918), 189—197; [4] On congruences, Ⅳ, *Mem.Coll.Sci.Univ.Kyoto*, 3(1918)229—308; [5] On the reduction of ideals, *Mem.Coll.Sci.Univ.Kyoto*, 7(1924)191—204.

Tazawa, M.（田泽正忠）[1]Über die Beziehungen zwischen Idealen und ihren Restklassenringen, *Tohoku Math.J.*, 38(1933), 324—331; [2] Einige Bemerkungen über den Elementarteilersatz, *Proc. Imp.Acad.Jap.*, 9(1933), 468—471.

其中，特别想在这里提一下的是关于员正造的论文。它的主要目标是Dedekind环的刻画，值得注意的是它从各方面给出了上述 Emmy Noether 1927年论文的基础。

2. 1935—1945年

在国外继续进行了许多研究，需要特别提出的是Krull, Dimensionstheorie in Stellenringen, *Crelle J.*, 179(1938), 204—226. 这里说的 Stellenring 就是局部环，这一论文中导入局部环的概念，奠定了局部环论的基础。local ring 一词的来由是根据 Chevalley, On the theory of local rings, *Ann.of Math.*, 44(1943), 690—708, Chevalley在这篇论文中明确并讨论了理想幂的拓扑（理想进拓扑），这关系到此后局部环论的发展。还有 Krull, Beiträge Zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche, Ⅲ, *Math.Zeit.*, 42(1937), 745—766 也很重要，Krull 在这一论文中包含了所谓 lying-over theorem, going-up theorem、going-down theorem（这些命名是根据 I.S.Cohen-A.Seidenberg, Prime ideals and integral dependence, *Bull. Am.Math.Soc.*, 52(1946), 252—261), 构筑了整扩张的理论。

这期间日本国内交换环论的研究，重要的有秋月康夫的如下二篇论文。

[1] Einige Bemerkungen über primäre Integritätsbereiche mit Teilerkettensatz, *Proc.Phys.-Math.Soc. Jap.*, 17(1935), 327—336; [2] Teilerkettensatz und Vielfachkettensatz, *Proc.Phys.-Math.Soc.Jap.*, 17(1935), 337—345.

论文[1]给出了 Krull-Akizuki 定理["如果取 Krull 维数 1 的 Noether 整环 R 的商域 K 的有限维代数扩张 L，则 R 与 L 的中间环 S 是 Krull 维数小于或等于 1 的 Noether 整环。这时，如果取 S 的非零理想 I，那么 S/I 作为 $R/(I\cap R)$ 模是有限生成的"，这一形式是后来在 I.S.Cohen, Commutative rings with restricted minimum condition, *Duke Math.J.*, 17(1950), 27—42 中所叙述的。Krull 证明了上面那样的 R 的整闭包$\bar{R}$是 Noether环 (Math. Ann., 103 (1930)，对此，秋月表明如果取 R 与 $\bar{R}$ 的中间环 T，若 T 的理想 I 非零，则 T/I 作为 $R/(I\cap R)$模是有限生成的，由此导出 T 是 Krull 维数 1 的 Noether 环。由这结果很容易导出 Cohen 所叙述的定理]。[2]证明了当交换环 R 有单位元时，或者 $R^2=R$ 时，如果在 R 中关于理想的极小条件成立，那么极大条件也成立。这一定理可以推广到，在有单位元的非交换环中当关于左理想（或关于右理想）的极小条件成立的情形，往往取指出这点的 Hopking 的名字而称为 Hopking 定理。

这一期间日本发表的交换环论的论文虽然从数量上说还有很多，但大部分是森新治郎的。可以想象出这表示当时日本进行交换环论研究的人是非常少的。这一时期的后半由于第二次世界大战，出现这种现象的一个原因也许是当时正处于外国文献几乎无法到手的时代。

3. Hilbert 第14问题

以下将不拘泥于时间的前后关系而涉及若干话题。Hilbert 第14问题是 Hilbert 在1900年提出的23个问题中的一个。下面的(A)是其内容，而(B)则记述了其动机。

(A) 域K上的 n 个变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的多项式环与包含K的 $K(x_1,\cdots,x_n)$的子域 L 的交，是否为K上有限生成的环？

(B) 当群G作用于域K上的 n 个变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的多项式环（在K上 trivial）时，$K[x_1,\cdots,x_n]$内的G不变元的全体是否为K上有限生成的环？

关于这问题，在 Zariski, Interprètations algé-bricogéometriques du guatorzième problème de Hilbert, *Bull.Sci.Math.*, (2) 78 (1954), 155—168中考虑了如下更一般化的问题：

(C) 域K上的有限生成整闭整环 $K[a_1,\cdots,a_n]$与包含在含 K 的 $K(a_1,\cdots,a_n)$中的域 L 的交，是否为 K 上有限生成的环？

并且表明即使是这种形式，假如L的超越次数在 2 以内，仍然是对的。Zariski 利用了代数曲面上的 linear system，因为所利用的结果不能推广到了 3 维以上，故永田探索了别的方法，导入 ideal-transform 的概念，得到了 Zariski 结果的另外证法，但不可能将其结果推广（*Mem. Coll.Sci.Univ. Kyoto*, 30(1956—57), 57—70, 197—200)。1957 年 D.Rees

作出了上述(*C*)的反例 (On a problem of Zariski, *Ill.J.Math.*, 2(1958), 145—149)。那是使用了次平面曲线性质而构成的，因为这是L不成为K上纯超越扩张的例子，因此不成为(A)的反例，但却是超越次数3的(C)的反例。1958年永田成功地得到了(A)的反例(*Proc.I.C.M*, 1958, 459—462)。后来注意到这是(B)的反例。(*Amer.J.Math.*, 81(1959), 766—772)。

4. 素理想的 chain problem

当P、Q是Noether环的素理想，$P \supset Q$时，连结P与Q的素理想链不能再加细的长度是否由P与Q所确定，这就是所谓的chain problem. 若代替R而考虑R/Q，也可以叙述如下。

当P是Noether整环，P是素理想时，连结P与Q的素理想链进行加细，能否使得其长度与P的高度相同呢？

熟知，在域上有限生成环的场合这是肯定的，又因为在完备局部环的场合也是肯定的，因此似乎有很多人猜想这是肯定的。永田也是其中之一，在1955年夏的某一天，他感到证明已经完成了，而在再检查时发现了错误，以这错误为基础就构成了反例(On the chain problem of prime ideals, *Nagoya Math.J.*, 10(1956), 51—64)。该反例不是整闭的，因为若取整闭包就不成其为反例，那么若整闭时将会如何呢？这便是下面的问题。外国也有几个人在向此挑战，但至最近，小駒哲司不仅是对简单的整闭，而且对具有一些与有限生成环相似性质的称作pseudo-geometric或universally Japanese的环（参照6）得到了反例(Non-catenary pseudo-geometric normal rings, *Jap.J.Math.*, 6(1980), 147—163)。

5. Hensel环

关于完备赋值环的Hensel Lemma是熟知的，而I.S.Cohen将其推广到了完备局部环的情形(On the structure and ideal theory of complete local rings, *Trans.Amer.Math.Soc.*, 59(1946), 54—106)。但是因为主张是多项式的分解，所以在代数扩张的范围内应该成立，据此永田所考虑的是Hensel化(On the theory of Henselian rings, *Nagoya Math.J.*, 5(1953), 45—57；同Ⅱ, *Nagoya Math.J.*, 7(1954), 1—19；同Ⅲ, *Mem.Coll.Sci.Univ.Kyoto*, 32(1959—60), 93—101)。最初考虑整闭的情况，以后则将其一般化了。这些都整理并记述在Nagata, Local rings, John Wiley(1962)中了。后来Michel Artin开始进行灵活运用，到最近许多人利用其更一般化的形式。

6. Pseudo-geometric rings

Krull为了研究Noether整环的整闭包而导入了所谓的Krull ring (在Krull的Idealtheorie中为endliche diskrete Hauptordnung)，但留下了下面的问题，即Noether整环的整闭包什么时候是有限生成的，什么时候为Noether环？（2中所述的Krull-Akizuki定理是解答之一。）

森誉四郎热衷于这个问题，得到了“完备的局部整环的整闭包是有限生成的”，“完备化是沒有幂零元的局部整环的整闭包的有限生成”，“Krull维数2的Noether整环的整闭包是Noether环”等结果(On the integral closure of an integral domain, *Mem.Coll.Sci.*

Univ.Kyoto, 27(1952—53), 249—256; 同Ⅱ, *Bull.Kyoto Gakugei Univ.*, B7 (1955), 19—30)。永田关于整环考虑了“商域的有限维代数扩张中的整闭包一定有限生成”这条件，表明了在Noether局部环中其任意素理想的同态像满足这一条件的完备化是沒有幂零元的 (Some remarks on local rings, *Nagoya Math.J.*, 6(1963), 53-58)。这个内容以整理过的形式归纳为pseudo-geometric ring（意指满足上面条件的Noether环）的说法。经二个日本人的手搞出的环Grothendieck定义为Japnese ring, universally Japanese ring, 后者相当于pseudo-geometric ring。

这一方向的究研作为其后的发展来说重要的恐怕是excellent ring. Noether环A是excellent者是指满足下面三个条件：（1）对于A的任意素理想P，假定$k(P)$是A/P的商域，A_P^*表示局部环A_P的完备化，对于$k(P)$的任意有限维代数扩张域L，$A_P^*\otimes_{k(P)}L$是正则环（亦即由素理想而成的商环是正则局部环），（2）在A的素理想全体Spec A中，使A_Q非正则的Q的全体成为Zariski闭集，（3）A上有限生成的环不成为素理想的chain problem的反例。日本的松村英之，外国的Christel Rotthaus的贡献引人注目，但因遗留的问题还很多，故省略之。

7. 局部环的一般论

关于紧接着Krull、Chevalley的局部环的一般论，其进展首先是在Hensel环一节中所涉及的Cohen的论文（1946）。这一结果完备化而变得易于使用。例如在pseudo-geometric ring一节中所谈及的森誉四郎的结果，也是利用了完备局部环的构造定理。由于在局部环的场合是以极大理想的幂、在半局部环的場合是以Jacobson根的幂引入拓扑，故如果进而考虑Noether环，那么一切理想就成闭集。即使以更一般的理想的幂引入拓扑，一切理想仍是闭集，指出这一很好性质的是Zariski, Generalized semi-local rings, *Summa Brasil Math.*, 1(1946), 169—185。还有，Grell的商环是限于分母是非零因子的場合，亦即成为全商环的子环的場合，而Chevalley, On the notion of rings of quotients of a prime deal, *Bull.Amer. Math.Soc.*, 50(1944), 93—97, 在素理想的补集时考虑容许分母中有零因子，接着，Uzkov, On the rings of quotients of commutative rings（俄文），*Mat. Sbornik*, *N.S.*, 22(64)(1948), 439—441, 将商环完全一般化了。

还有Artin-Rees引理（E.Artin在讲演中公布而沒有印刷（1955年）；Rees.是在Two classical theorem of ideal theory, *Proc.Cambridge Phi.Soc.*, 52(1956), 155—157中）在考虑局部环的拓扑上起着非常有效的作用，Chevalley辛辛苦苦得到的若干点，被简略成相当干淨利索的形式。

8. 局部环的重数理论

局部环中重数的概念是Chevalley在On the theory of local rings（2中谈及的）中关于system of parameters而定义的，在Intersections of algebraic and algebroid varieties, *Trans.Amer.Math.Soc.*, 57(1945), 1—85中最早表示了它的各种性质。在P.Samuel, La notion de multiplicitè en algèbre et en géomètrie algébrigue, *J.Math.pures appl.*, 30(1951), 159—274中，对于属于局部环A的极大理想m的任意准素素理想q，考虑有次数的环$F=\sum_{i=1}^{\infty}q^{i-1}/q^i$（直和；$q^0=A$），利用作为$R$模的$\sum_{i=1}^{n}q^{i-1}/q^i$的长度来定义$q$的重数

$e(q)$，从而作出了关于重数的优秀理论。Nagata, The theory of multiplicity in general local rings, *Proc.Intern.Symp*. Tokyo-Nikko 1955, *Sci.Council Jap.*, (1956), 191—226。是 Samuel 理论的发展。其内容是在东京-日光专题讨论会上公布的，该讨论会的广告牌上为整数论，但内容并不限定于整数论。为参加该讨论会而来日的 Serre 在日本几个大学讲演了用同调代数的手法来建设重数理论。其内容当时还沒有正式出版，主要內容大约十年以后收入 Springer 的 lecture notes, No.11中。

9. 正则局部环中素元分解的唯一性

"正则局部环是否素元分解环？"这个问题在1950年代已经得到了肯定的解决，我们试图回顾它的足迹。局部环 A 的完备化 A^* 若是素元分解环，则 A 也是，这点是比较容易的。因此內容知道当 A^* 为形式幂级数环时是肯定的，而所谓这种場合，或者是正则局部环 A 包含域，或者是非分歧（剩余类域的特征用 p 表示时，p（单位元的 p 倍）不属于极大理想的平方的場合）的情形。至于不是这种情形时，若 Krull 维数为 1，则因为是赋值环，故是肯定的；Krull 维数 2 时也比较容易。Krull 维数大于或等于 3 时多年沒有解决，但永田指出了"如果当 Krull 维数为 3 时是正确的，那么一般情形也正确"(A general theory of algebraic geometry over Dedekind domains, Ⅱ, *Amer.J.Math.*, 80(1958), 382—420)。这一结果 Zariski 也得到了，但沒有发表。而最后剩下的 Krull 维数 3 的場合，在 M.Auslander-D.A.Buchsbaum, Unique factorization in regular local rings, *Proc.Nat.Acad.Sci.U.S.*, 45(1959), 733—734中得到了肯定的解决。

10. 同调代数手法的引入

正如 8 节中所谈到的，1955年 Serre 在局部环的重数理论中采用了同调代数的手法，但对交换环论的同调代数手法的导入则在1955年已经开始了。Serre 无疑是在此意义上的第一人，东京-日光专题讨论会也是以 Sur la dimension homologique des anneaux et de modules noethérian 为题的 (*Proc.Intern.Symp*.Tokyo-Nikko 1955, pp.175—189)。1956年 H.Cartan-S.Eilenberg, Homological algebra, Princeton Univ.Press, 也出版了，1960年更容易谈的解说书 D.G.Northcott, An introduction to homological algebra, Cambridge *Univ*. Press 的出版等等，同调代数的手法已被大大采用了。1950年代作为采用同调代数的主要研究者可以举出J.P.Serre, M.Auslander, D.Buchsbaum, A.Grothendieck。关于 Serre 的情况已经说了。Aus-lander-Buchsbaum 的合著很多，合著而且采用同调代数手法的论文之一有 Codimension and multiplicity, *Ann.of.Math.*, 68(1958), 625—657。还有在 9 节中谈到的证明了 Krull 维数 3 的正则局部环的素元分解唯一性的合著论文也利用了同调维数。*Grothendieck* 的论文可以举出 Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tohoku Math.J.*, 9(1957), 119—221。

在利用同调代数手法兴盛起来的同时，Cohen-Macaulay 环、Gorenstein 环的研究也兴旺起来了。从 H.Bass, On the ubiquity of Gorenstein rings, *Math.Zeit*.82 (1963), 8—28开始，有许许多多人的论文。将这许多论文罗列起来是很麻烦的，因此首先我们试从被认为是最重要的三位中各取一篇论文，并尽可能从早一些的论文中选取。

M.Hochster, Rings of invariants of tori, Cohen-Macaulay rings generated by monomials, and polytopes, *Ann.of Math.*,96(1972),318—337.

K.Watanabe (渡边敬一), Certain invariant subrings are Gorenstein, Ⅰ,Ⅱ, *Osaka Math.J.*, 11(1974), 1—8; 379—388.

R.Y.Sharp, Gorenstein modules, *Math.Zeit.*, 115(1970), 117—139.

还有在这方面特别要提一下的论文是Hochster-Roberts,Rings of invriants of reductive groups acting on regular rings are Cohen-Macaulay, *Adv.in Math.*, 13(1974), 115—175.

与Cohen-Macaulay环等几乎沒什么关系，而与同调代数的手法紧密联系的话题中，有所谓的Serre猜想。这是J.P.Serre, Faisceaux algèbriques cohèrents, *Ann.Math.*, 61(1955), 197—278中提出的，即区域上的多项式环上的模的場合，投射模都是自由模，部分解决或者有关的研究，但却迟迟解决不了，结果经过了大约20年，D.Quillen, Projective modules over polynomial rings, *Inv.Math.*, 36(1976), 167—171，以及A.A. Suslin, Prozective modules over a polynomial ring are free (俄文), Dok. Acad.Nauk. SSSR, 229 No.5(1976), 1063—1066才独立地得到了肯定的解决。

11. 有限生成的环

域上有限生成的环作为具体对象，从很早以来，在各个方面接触到很多，但系统地处理似乎还在Noether的理想论以后。关于有限生成环的一个基本定理是Noether的正规化定理（也称为有限生成环的正规化定理，包含下面的內容，“对于域K上有限生成的环$R=K[a_1,\cdots,a_n]$，若取适当的$z_1,\cdots,z_t\in R$，则(1)R是$K[z_1,\cdots,z_t]$上整，(2)$K[z_1,\cdots,z_t]$与变量t的多项式环同构”），其最初的证明是Emmy Noether, Der Endlichkeitssatz der Iuvarianten endlicher linearer Gruppen der charakteristk p, Nachr.Ges.Wiss.Göttingen (1926), 28—35，但她是加上了K的元数无限这一假定而证明的。最早说明K为有限域时也对的是Zariski, Foudations of a general theory of birational correspondences, *Trans.Amer.Math.Soc.*, 53(1943), 490—542. Nagata, Some remarks on local rings, *Nagoya Math.J.*, 6 (1953), 53—58给出了包括有限域場合在内的简单证明。将域上的情形推广到环上的情形是很容易的，这在Nagata, A general theory of algebraic geometry over Dedekind domains, Ⅰ, *Amer.J.Math.*, 78(1956), 78—116时中被用到了。

沒有必要再举出象上面那样的东西了，代数几何与有限生成环有着密切的关系。因此，为了证明代数几何的定理，许许多多交换环论的结果得到了证明。

12. 概观与总结

正如最初所述，在接近上世纪末时，多项式环的理想论与有限维代数域的理想论是各别发起的。此后到1910年代，员正造试图刻画有限维代数数域的整数环。接着Emmy Noether（正确说是Amalie Emmy Noether）创建了Noether环（并非她自己这样称呼的）的理想论。包括有限维代数数域的整数环的理想论与多项式环的理想论，成功地刻画包括有限维代数数域的整数环情形在内的Dedekind环，则是在1920年代。以这些为开端，交换环论急速装备而成长起来了。特别是关于Dedekind环明确了赋值的概念，进而认识到了分式理想作成的群，与此同时，当然就注意到了代数扩张时理想的分解、分歧等等。由此似乎也可以

说，Krull 1930年左右作的更一般的赋值——在值群中有有序加法群的加法赋值——的理论也是自然而成的。这一般的赋值对整闭整环的理论非常有效，这一点也逐渐明确起来了，作为交换理论的潮流，处理分式理想所成的群的扩张，所谓的乘法理想论与作为赋值环一般化的 multiplication ring（有限生成的理想都是主理想那样的整环）等等似乎占了很大部分。关于乘法论，R.Gilmer, Multiplicative ideal theory, Ⅰ,Ⅱ, *Queen's Papers on Pure Appl.Math.*, 12(1968), *Queen's Univ.Press* (Ontario, Canada)，可以说是一个总结。另方面，正如2中所谈及的，关于 Krull 的 Idealtheorie 以后十年间的整扩张理论，Krull的贡献是很大的。

另一方面，正如前面所说，代数几何与交换环论的关系紧密，特别是关于有限生成环的基本研究，与代数几何相关联的地方很多，也影响到了1938年局部环的导入，趁着1940年左右开始的代数几何复兴的势头，由于代数几何中局部环的利用方法上的进步，与代数几何密切相关的考察也在局部环、局部环的完备化及其他交换环中进行了。因此，1940年代以后，在与代数几何相关联上建立起来的那些部分，可以说是成了交换环的主流。（但是，并不只是指在代数几何中直接起作用的结果，一般化也包括在一般环中什么是可能的这个方向的考察*）前面已经说了1950年代采用同调代数的手法，但同一时期在代数几何中也广泛利用，同调代数的方法因此同调代数的手法似乎也可以包括在交换环论与代数几何的密切关系中。另一方面，在代数几何方面用 Sheaf 来描述，成为1960年左右开始的主流，而且作为处理的对象，也不限定于域上的仿射空间或射影空间内的流形了，由于包括相当于坐标环的，甚至完全一般的环来进行处理，因此也可认为代数几何与交换环论的密切关系进一步增强。由此，也许还可以认为，代数几何的一部分很接近于交换环论。这方面的评价，总之要取决于，是否是好的理论取得好的结果，现在评价似乎为时尚早。

以上是粗略回顾一下交换环论的历史，可以认为交换环论现在到了一个转折关头。到现在为止的60年间是交换环论急速发展的时代。今后，要在至今所做的延长线，这一感受到的方向上继续同样的发展，感到很困难。不，过去到现在也很难说是在同样的方向上发展而是采用什么新的东西重新在此方向上发展。因此，感到很有必要考虑，今后采用什么东西使得交换环论发展为好？当然至今所做的工作中还有很多残留的问题。但这些都是因为很难而留下的，也许有些是一旦采用新东西就有解决的可能。再有，也许代数几何也有必要改变面貌。即使在域上的三维流形中，因为还留下各种各样的问题，解决这些问题也还需要些什么东西。

因此，很难预言交换环论今后的发展方向。但是我认为，围绕着现在流行(?)的 Gorentein 环、Buchsbaum 环、excellent ring 等等的研究大概将是主流。

（陈治中译　陈忠璉校）

每一门学科必定有除了其实用价值之外的受人尊敬的原由，否则不会招致对它勤奋追求的热情。

由于这两方面的原因，我认为数学应是一般学校中最主要的课程。再没有比这更好的训练头脑的课目；它的吸引力甚至超过了古代语言课。同时，数学的应用价值是众所公认的。

——Herbart, J.F.

IVAN MATVEEVICH VINOGRADOV*

J.W.S.Cassels, R.C.Vaughan

I.M.Vinogradov 生于1891年9月14日。父亲 Matveǐ Avraam' evich 是俄国西部 Pskov 省 Velikie Luki 区 Milolyub 村墓地教堂的牧师。母亲是教师。他很早就显示出绘画的才能他的双亲沒有让他上（对一个牧师的儿子来说合乎规范的）教会学校，而于1903年送他去 Velikie Luki 的新学堂就读（реадьное учнищз：即是与正统教育相反而传授科学技术的学，校），他父亲也携全家迁往那里的 Holy Shroud 教堂就任新职。

1910年他毕业以后，Vinogradov 进入首都的圣彼得堡大学物理数学系的数学部。教员中有 A.A.Markov，据说 Vinogradov 对他讲授的概率论课极为谙熟，还有 Ya.V.Uspenskiǐ（即 J.V.Uspensky，他后来在美国 Stanford 大学工作），他们两位都对数论及概率论有兴趣。对于这几门学科，那里有悠久的传统（Chebyshëv 在这两方面都有精深的造诣，而 Korkin，Zolotarëv，Voronǐ 则在数论方面成就卓著）。Vinogradov 则被吸引到数论这方面，并且表现出非凡的才华，故而在1914年毕业后被留校培训任教。他成功地通过了内容广泛的硕士考试，1915年经 V.A.Steklov 提议，授予他奖学金。他最早的工作是在 Uspensky 指导下做的关于二次剩余的研究。他受命寻求二次互反律的一个简单证明，但他可能是受概率想法的启发，却看上了给定素数的二次剩余在短区间中之分布问题。他得到误差项的一个估计，其中除常数项外，仍是迄今已知的最好的无条件估计。（此结果也为 Pòlya 于1918年独立地得到，见下面§6。）他继续推广曾被 Voronoǐ 对'Dirichlet 除数问题'用过的一个方法，当二阶导数 $f''(x)$ 有界时，他对 x 轴上一个区间以及曲线 $y=f(x)$ 之间所夹整点个数得到了估计：后来 Jarnik 证明了，在一般性的情况下 Vinogradov 所得之误差项已是最好可能的了（见下面§5）。他还用类似的想法求得 $\exp(2\pi if(x))$ 在短区间中和的界限，这是他要反复研究的一个问题。

第一次世界大战期间及革命刚刚成功这一阶段，与西方数学家只有很少的联系。例如，那时俄国数学家还不知道有关 Weyl 在三角和以及 Hardy 与 Littlewood 关于 Waring 问题的进展消息。类似地，Vinogradov 的成果多数也鲜为俄国以外的人所知，尽管有些已印了预印本并由 Uspensky 寄送给了 E.Landau 以及其他一些外国数学家。

1918—20年间他在 Perm（后为俄国东欧部分的 Molotov 市）的国立大学度过，先是当讲师，后是当教授。1920年末，Vinogradov 回到彼得堡，同时任专科学校教授及大学的讲师。在专科学校他以独创的方针开设较高深的数学课，在大学他开设数论课，这一课程成为他的名著《Осиовы meopuu чисед》（《数论基础》）的基础（这本教本现在只有很少的地方

* 本文译自：*Bull. London Math. Soc.*，17（1985），584—600。