组合学，形式幂级数，代数组合学
图论

进展简介

9

222-232

关于组合学现状的报告

在第五次形式幂级数和代数组合学会议开幕式上的讲演

Rota.GC
Gian-Carlo Rota 王天明 O157
麻省理工学院数学系，剑桥 MA 02139 美国

1. 引言

谢谢．今天，我在这里深感荣幸．肯定你们大家都想知道，我将要讲些什么才能与这个讲演的不平常的标题相符．正像大家所知，在实际会议召开之前同意这标题，根据是人们能接受任何标题，并且，明而不宣地相信无论怎样报告总能完成．

应当利用慷慨授予已经六十多岁人的特许，做一个与我们习惯的数学会议报告风格迥异的开幕词．

诚然，我难以抵制遵照所期望的风格去作一次数学讲演的诱惑．在像诸位这样杰出的公众之前，介绍自己数学工作中的认为是最新的和最有意义的成果，这样的机会不能轻易放过．但是，应该承受这种讲演的两种缺点．首先，最新成果，在我们天性中一贯地认为是事业中最重要的东西，多半无法用一种能被数学听众，甚至最成熟的数学家能听懂的方式阐述：在我们自己懂得所做工作的真实意义之前，可能需要几年时间去重复思考，不断构思和重新安排；更可能的是，将由其它人指出与这个工作相关的东西．

Erdös 曾经说过，如果一个数学家首次给出一个问题的解答是杂乱无章的话，无人会去指责他．可以补充一句，使 Erdös 的说法更全面．即数学中在粗糙的突破之后，不变的随之而来的整齐性的进步和原始发现一样是不缺少的．

大多数数学家和组合学家，有时可分成两类：解决问题的人和理论家．像所有分类的情况一样，这两类的每一种人都会偶尔相信另一类是多余的．但是，我们内心深处知道这两类行为不仅仅是相补的．而且，对双方来说都是互不可缺少的．如果不是由于来自要解决一个问题的动机的最初的推动，就不会有理论的存在．新的宝石费尽心力地从大自然的原始矿山中得到．但是，每件宝石需要打光．在解决问题的过程中，新方法和新的思考模式总是被发现．并且，这些方法不可避免地会在无可估量的实际应用中发挥作用．

原题：Report on the present state of combinatorics. 译自：*Discrete Math.* 153, 1996, pp. 289–303.

与上述提法似乎矛盾，我们也许会说，数学中最有价值的部分是由定义组成．学习数学很大程度上是学习定义．当然，学习定义的意义与仅仅了解定义的叙述是大不相同的．一旦我们掌握了由定义产生的活生生的理论，定义的意义就慢慢地显示出来．这样的学习过程需要许多年，甚至需要终生的时间．

这样，我愿意利用我六十多岁的权力同你们简单讨论的内容不是使我迷恋的任何最新问题的解答，也不是最新的定义，甚至也不是最新的定理、而是较全面地综述一下我们领域，组合学的现状．我急于要补充一句，这个综述必定是局限的，有倾向性的．跟踪仅仅 30 年前开始萌发的，由五六个朋友耕耘的这个数学分支的许多细节，今天已不可能．除一个小的范围外，企图用这个讲演包含今天的组合学的全部内容，对我来说是冒昧的．我希望这个话题将由其他人承担，在随后几年内能向你们讲演，并且成为类似风格的其它讲演的先例．有人会发现这里没有提及他们有关的领域或问题．在此，对他们表示歉意．任何这种遗憾都完全是由于本人的无知，或粗心，或两者兼有．我也有意将这个综述限制在代数组合学的这些部分，只涉及一点概率．

George Pólya 曾说过，每个数学结果重复三次．首先，必须宣布要说些什么．第二，必须说它．第三必须解释真正说了什么．

我们数学家一直懒于执行 Pólya 的这个指令．常常被所发现的结果迷住．并且，误认为所得结果的美将会使读者和听众狂喜，从而拒不提供任何动机和应用，也不讨论所介绍的数学的意义．

但是，今非昔比，数学的生存依赖于我们能够将信息传播的尽可能远和广．我们喜欢介绍标准的数学定理和证明的偏见依然很强．并且，无论谁偏离这个标准而去解释，思考和通俗化都会受到 MIT 的大学生们的一种"奖励"，即他们标出任何不使用公式的课程，指责它是"空谈"．

我恐怕已陷入几分钟的空谈．组合学的核心是什么？什么问题搅动着今天组合学的池水．除此之外，在表面问题之后什么是实质问题？

2. 组合学与代数

在我们时代组合学的发展追随着任何现代数学中都可见到的领导潮流之一、这个趋势可以标上"回到具体"的标签．乍一看，似乎本世纪前半叶的抽象在 60 年代达到顶峰，泛函分析，代数拓扑，代数几何和微分几何的成功发展似乎给了新动向一个基础，这个动向偏爱特殊的问题，可计算的算法以及那些似乎忽视了过去主流的具体结果．

不过，有点缺乏自信，我应该声明这个观点可能是草率的．例如，组合学与代数之间的今天的关系就不曾忘记过去．

仔细地看看就会发现，组合学中今天进行的某些杰出的工作正在使昨天的代数大大地受益．代数组合学成功地提供了非平凡的例子．给习惯上称为抽象代数的许多经典结果补充了实例．

例如，环簇理论已经提供新簇的例子，这是在代数几何学的内部发展过程中不会产

生的．直到环簇出现，代数几何学使用的主要簇类是行列式簇类以及它的同类．可是，现在代数几何学的定理在新近增加的环簇类中发现了未曾预料的新的生命．这来自完全不同的源泉，肯定是来自组合学的源泉．

更令人激动的是，环簇的发现提供了一部词典，代数几何的一些结果靠它能翻译成 Minkowski 和 Hadwiger 风格的凸积分几何学的结果．这种翻译的一个实例，几乎由 Khovanskii 和 Morelli 同时发现，已经成为 Riemann-Roch 定理重新阐述，成为凸几何学中关于枚举位于给定凸集中整数点的一个定理．一旦这种翻译进行完毕，给 Riemann-Roch 定理一个纯组合描述就变得十分清晰，完全与代数几何学无关．这样做，导致 Khovanskii 发现这个 Riemann-Roch 定理的组合模拟正好是渐近分析中经典的 Euler-Maclaurin 求和公式的多重推广．代数几何的中心结果之一和有限差分计算中的标准展开定理之一之间的联系的发现将预示其它几何定理的进一步组合化．这可能要求哑运算 (umbral calculus) 的某些另外的数值展开．勿需多言，如果这种推测即使在最小的范围内成立，我也会为此而高兴．

另一个完全不同的方向， Fulton 和 Lang 关于 Riemann-Roch 代数专题论文指明是习惯上代数几何的内容，怎样由于更成熟地使用对称函数代数而大大的受益．在 Fomin, Garsia, Greene, Haiman, Hanlon, Kerber, Lascoux, MacDonald, Schutzberger, Stanley, Stembridge 和其他一些人的著作中，这个理论获得深入而广泛的发展，把这个理论放置在数学的非常前沿的位置．

Grothendieck 的关于 $\lambda-$ 环的漂亮的定义是另一个在代数几何的抽象领域中建立，并证明在组合学中是成果丰富的概念．需对于 Mcmullen 引入的凸多面体环， Morelli 最近发现的 $\lambda-$ 环结构恰好是这种例子． Lascoux 曾提示，可能用模拟矢量丛的 $K-$ 理论而得到的理论来丰富对称函数代数． Lascoux 本人在早期 $\lambda-$ 环的 Grassman 扩张的构造中，提供了这种情况的第一个例子．不久，一个不需要矢量丛拓扑的组合理论将会出现，很像现在不用求助于环簇就能做凸几何一样．

组合学帮助了由于严重缺乏例子而长期停滞的代数理论的现象，能由几个例子看到．例如， Mike Artin 暗示甚至交换环的素分解理论，由于现在接受来自组合学的许多所需的例子而得到充实．也就是 Emmy Noether 和它的学派在二、三十年代把它抽象得尽善尽美的理论，仍然由于它的优美和缺乏具体例子而著称．

让我们回忆一个关于未曾料到的联系的全然不同的实例，来结束代数和组合学之间关系的简短综述． Hopf 代数概念是从一个令人迷惑的现象中痛苦地抽象出来的，依据的现象是拓扑空间上同调环具有一种代数结构，而同调环似乎没有这个结构．在 Cartan 讨论班中 Hopf 代数概念第一次出现之后， Hopf 代数的形式体系已经用巧妙的方式从容地进入到组合学的各个角落．并且最新一代组合学家被迫拳打脚踢，大喊大叫地要学会它．

三个实例．第一个例子：十九世纪 McMahon 和 Hammond 关于对称函数环上的微分算子的工作现在已被安置在对称函数的 Hopf 代数的自对偶特征中，事实上，详细地研究对称函数自对偶 Hopf 代数现时正在 Lascoux, Mendez 和其他几个人手中全速进行

着．也许 Hopf 代数形式体系将会在与 Schubert 多项式的联系中得到发展．

第二个例子：由局部有限序集的约化关联代数所产生的众多的 Hopf 代数簇，也许是具有高度非平凡对映体的 Hopf 代数的中心例子，像 Schmitt 所指明的那样．关联 Hopf 代数的对映体可以看做偏序集上的 Möbius 函数的推广，大致提供了 Möbius 函数扩张的恰当水平．这儿至少有一线希望，关联 Hopf 代数将对这些年来在代数拓扑中发现的一些杂乱的 Hopf 代数进行统一处理．

第三个例子：线性递归序列理论在经典的 Hopf 代数之一找到住所．感谢 Earl Taft 的原始思想，这一思想已由 Cerlienco、Mureddu 和巴黎的撒丁人学派能干地发展了．推测有一天带多项式系数的差分方程，即使不能符合通常的 Hopf 代数模型，至少也能符合这个概念适当的推广，而它正在台后等着呢．这种推测不算太轻率．如果差分方程能够用代数组合学方法处理，那么微分方程也不能落后得太远．

Stanley 提议给形式幂级数分级，从多项式到有理函数、代数函数，到多项式系数的微分方程的解．推测这个分级将与代数结构相伴的分级匹配．

3. 组合学与概率

由未曾预料到的例子看到的组合学在代数中起着赋予代数学生命力的作用，在概率论中也同样能观察到．让我们考虑两个实例．独立随机变量之和的理论在概率论形成不久，似乎就达到完美的程度．现在它展示出重新获得了生命力．由于研究在有限或无限图上或群上的随机游动所出现的随机游动的精细性质．随机游动和扩散间的联系，已被推广到图上，并且由 Fan Chung 和 Shlomo Stemberg 研究图上的 Laplace 方程显示了经典的 Sturm-Liouvill 理论的组合模拟．

关于随机游动细分地极限，我们发现当今的 Mahonian 统计理论，可以给它做概率上的解释，我敢大胆的猜测，如果没有 Foata, Gessel, Garsia, Wach 和其他几个人的工作决不会获得成功．并且，像 Aldous, Diaconis 和 Pitman 等概率学家最近推广的工作已经揭开概率论的庄严的篇章，这大概不可能内部地自我更新．在四十年代由 Donsker 的学位论文开创的不变量论现在由其他几个人的赋予灵感的极限结果中找到更新的生命力．

至今，组合学对概率杰出的贡献多半是来自 Erdös 的思想．为了确立具有给定组合性质的对象的存在性，使用纯概率的存在性证明，即证明具有这种性质的对象存在的概率是正的，从而得出结论．至今，还有相当多的组合结构，它的存在性只能靠概率方法来建立．

有趣的事是，职业数学哲学家还没有注意到数学中这种非构造的具体实例的哲学蕴含．广泛猜测应该存在一个算法，能够将由 Erdös 概率方法得到的存在性证明转换成通常的构造性的逻辑证明．就我所知，这种显式的转换算法还不存在． Joel Spehcer 在这个课题上做了许多工作，他猜测一种新的逻辑也许就包含在其中．

就图而言， Erdös 引入的随机性概念正被证明是最多产的数学应用的源泉之一．也许 Ron Graham 和 Fan Chung 的发现是组合随机性的最令人激动的最新工作．类似于图

长，对随机图成立的关联矩阵的特征值等附属性质，能够用来逼近随机性．换句话说，一个图的关联矩阵的谱与随机图关联矩阵的谱类似，可以期望这个图分享随机图的某些性质．这个发现在随机性模拟中找到本质性的实际应用，这种模拟在工程中经常需要．

4. 图论与拟阵理论

数学家习惯于轻视图论的时代已经过去很长时间了．回想已故的 Hassler Whitney 说过 (对 Gleason 说的，我从他那儿得到这个事实) 他对数学的最大贡献是他的那个定理，说每个平面三角剖分 (满足某种平凡的技术性质) 都有 Hamilton 圈．这不是不负责任的． Tutte 有一次告诉我，他在图论中甚至在拟阵中的许多工作，都是在寻找 Whitney 定理的满意的解释，到今天这个定理的原始证明还没有明显地简化．这个定理的满意的拟阵推广还没有发现．

图论也许仅与另一个数学分支，即数论共同具有一个独特的特性，我们在这两个领域中发现定义与非平凡定理的比率不寻常的高．

Robertson 和 Seymour 的意义深远的理论确定了图的某些特征的存在依赖于它的收缩格中缺少的排斥小图有限数目．依我个人的看法，这是本世纪后半期对数学最深刻的贡献之一． Robertson 和 Seymour 对部分良序集概念的使用，不大可能像曾看起来那样，它使人联想到上一世纪的另一个伟大的突破，即 Hilbert 基理论，说的是由自然数的拷贝的有限乘积形成的偏序集没有无限反链．这个定理是建立在类似的 Gordan 引理上．

Robertson 和 Seymour 引进的新方法的最高的报偿在去年作者确立了 Hadwiger 猜想成立时到来了．确实他们对 Hadwiger 猜想的证明依赖于平面图四色定理猜想的正确性．这个猜想已经由 Haken 和 Appel 用计算机程序验证了．我肯定大家都希望某一天能找到一个数学家能读懂的论证．

对任一个图定义对偶对象的想法，这在平面场合中归结于通常的对偶图，是使 Hassler Whilney 建立拟阵理论的原始动机．关于拟阵理论我已写过一本书和一些文章，我仍然必须诚实地承认，我不知道拟阵实质上是什么．人们可以把拟阵看成投影空间点集的推广，或看做图的圈集的推广．这两个定义的等价性允许用图论的论证去代替线性代数的论证，或者反过来．令人震惊的是，使用圈的观点揭示了线性代数的新事实．这样，通过提供代数学家未曾想到的新技术拟阵观点使线性代数大大地受益．

Robertson 和 Seymour 的排斥小图理论朝着阐明今天的拟阵深刻性质走了很长一段路．它漂亮地补充了几年前由 Kahn 和 Kung 建立的拟阵簇理论．在我看来拟阵的最令人迷惑和惹弄人的问题仍然是判定问题，如果你允许我做一个过分简单的叙述的话，就是用拟阵几何格的排斥小图或任何什么东西来寻找拟阵的特征多项式某些零点的位置和组合特征之间的关系．有一个不幸事件，图的染色问题是历史上第一个判定问题，它多半把组合学家也许能从较容易地更多揭示性质的实例引开了．

关于判定问题的理解方面很少进展，人们怀疑如果我们想在这个问题上打下个凹

痕，所有代数的及所有组合的资源都必须用上去. Stanley 的对于图的负值自变量特征多项式值的解释的发现，也许是七十年代向前迈的最大一步. 同样，Stenley 的几何格的每个模元素都产生这个特征多项式的一个分解的发现，也是向前迈的最大一步. 在解决判定问题中现在只有超可解格理论是已完成的一章.

从 Zaslavsky 的学位论文开始的超平面安置眼下甚至把代数几何学家拉入了组合学，而用超平面安置的语言对拟阵理论的重新阐述则表明了拟阵特征多项式和某种类型的 Hilbert 多项式之间的紧密联系. Orlik、Salomon, Terao, Ziegler 和其他几个人的工作越来越多地指出下面的猜想是正确的，即任何对判定问题的深入理解都依赖于与拟阵相伴的某种环结构的有限分解. 现在有几个候选对象，但还没确定是哪一个. 也许 Kung 的关于几何格的最近的 Radan 变换理论会进一步加深我们从严格的组合角度的理解.

Barnabei、Nicoletti 和 Pezzoli 还有与他们无关的 Bjorner 效仿 Edmonds 的多重拟阵概念、最近将超平面安置公理化. 优美地推广到线性簇的任意集的安置公理化. 情况就是这样，仅当我们用这种新的和更恰当的方式加以观察，才能揭示出今天的拟阵理论的一些问题的秘密.

来自拟阵理论的最成功的思想也许是 Tutte, Brylawski 建立的 Tutte-Grothendieck 环，还有其他人，参入者太多无法提及. 允许我离题讲一点个人轶事. 1973 年，我应邀到牛津哈代讲座去讲演，我选择 Tutte-Grothendieck 环作为这次讲演的题目. 结束后，Micheal Atiyah 来到我跟前并说："内容很好，但我坦白地说，看不清怎么把它用到组合学以外的地方"、或类似的这样一些话.

去年，也就是 19 年之后，我在英国剑桥遇到 Micheal Aliayh 爵士，提醒他说过的那段话. 并说"现在你看清 Tutte 多项式应用到什么地方吧！"

确实，从 Von Neumann 代数到纽结理论、粹子理论和统计力学，Tutte 多项式已经变成它的所特有的理论. 再允许我猜测那些正忙于使用 Tutte 多项式的分析学家，拓扑学家和代数学家们最终会在他们的工作中认清藏在 Tutte 多项式伪装下的实际是拟阵.

将拟阵理论加以改造以适应数学的其它领域，正在 Gelfand, Goresky, MacPherson 和其他几个人的工作中全力地进行着，这导致产生组合流行这一全新的优美理论和与每种李代数相对应的拟阵新品种. 拟阵的其它一些令人震惊的应用，首先是定向拟阵理论和由 Crapo、White 和 Whiteley 建立的结构的刚性理论. 在这一理论中，从上个世纪 (即从 Maxwell 起) 一直没解决的某些力学问题现已被漂亮地，彻底地解决了.

5. 不变量理论

这不是巧合，当他们使用的语言构通之后、最先的组合理论家也是不变量理论专家. 由于他们在组合学中的工作，现在许多人还记得 MacMahon. Hammond, Kewpe, Peterson 等人的名字，可是他们的动机来自经典的不变量理论. 现今"不变量"这个术语在许许多多意义下使用、以致变得没有特定意义了. 这里我急于补充一句，所谓"不变量理论"这个术语、我指的是经典不变量理论的继续. 它从十九世纪四十年代开始，在本世纪二

十年代突然停顿一段时间．并且，在最近二十多年里恢复了生气勃勃的新生命．

这里我不能抵制离题的诱惑，去解释一下为什么今天仍然局促不安地重复这个“Hil-bert 枪毙了不变量理论”的说法是错误的．实际上不变量理论不是由 Hilbert(当然是暂时的) 枪毙的，而是由 Van der Waerden 和 Emmy Noether 共同努力的结果．他们每人都另有企图反对论文指导教师． Emmy Noether 是伟大不变量理论专家 Paul Gordan 的学生．不幸的是，没能解决论文导师交给她的论文问题，即三元四次不变量的分类问题．因此，从此以后她在一生中都恨不变量理论．并且她发表了学位论文的结果之后，肯定在她所写的任何文章中绝不出现“不变量”这个名字． Van der Waerden 是 General Weitzenbock 的学生． Weitzenbock 是二十世纪最先懂得 Grassmann 工作意义，同时也懂得张量代数与不变量理论关系的数学家之一．并且他的工作超前了他的时代．在后半生中，他在纳粹党中很活跃．从而，他的数学著作变成禁止阅读的书籍．

有理由相信， Weitzenbock 的势不可挡的个性，对他与他学生 Van der Waerden 之间的关系没有帮助． Van der Waerden 的“近世代数”好几版中没有一版提到多重线性代数或外代数的，让‘不变量’这个词‘晒干’．

不变量理论本质上与表示理论有关，今天组合学的同等活跃的领域．表示理论的中心是群的不可约表示以及投影表示的构造．并使这种构造做的尽可能的明显和有效．组合表示理论的主要工具是对称函数理论和它的推广，像 Schubert 多项式，还有经典的 Schensted 算法．由于时间不多，这里只提 Schensted 算法的两种推广．第一个是最近由 Bonetti, Senati 和 Venezia 进行的 Plactic 幺半群的超对称的推广．第二个也许是由 Schensted 算法思想所产生的最漂亮的定理之一，即由 Fomin 和 Greene 独立发现的关于有限偏序集的定理．

然而，表示理论与经典的不变量理论之间不仅有风格的差别，而且也有本质上的不同．有一种方法可以看清这种差别，就是同概率论与测度论之间的差别相比较．有人肯用一生的精力专门研究可测函数，从未发现正态分布．类似的，有人可用一生时间专门研究一般线性群表示，也从未发现三次方程的不变量理论解．

四种基本成分使经典不变量理论成为组合学的前途光明的领域．它们是：

1.Richard Feynman 有一个在非交换代数中用一对变元代替每一个变元来表示单项式的天才想法，第一个是原来的变元，第二个指明在给定的 (非交换代数) 代数中该变元所占的位置．用这种方法，这一对变元可看做一个变元，现在叫做字位．字位产生一个交换环，称为字位代数．并且非交换代数的问题可以用字位代数改造成交换代数的问题．字位代数原来在不变量理论中是有用的，以及基本的直接算法可以看做 Schensted 算法的多重代数模拟．我再一次忍不住要告诉你们另一个故事．我最近一次在“Thinking machines”公司见到 Feynman, 是在第一个联通机器庆祝仪式上．在“Thinking machines”公司工作的大多数年轻计算机科学家都不时地在 MIT 听我的概率课．从而邀请我参加庆祝仪式就变成统计上的必然事件．

我对 Feynman 提到在几篇文章中使用了他的思想．他立即离开一群采访他的记者，把我带到一个角落．用很肯定的语气对我说：“我很高兴听到它．因为我认为时间排序

是我有过的最好的想法，比 Feynmen 积分好.” 然后他给我解释他们另一个想法，这个想法从未公开过，他在一片邮票大小的纸上写个概要．我把这片纸放在衣袋里，想以后要研究它．使我非常懊恼的是，在我要阅读它之前，不知什么时候从我衣袋里滑出去了．从那时起，我一直想知道 Feynmen 的后一个想法是关于什么的．

2. 由于引入超对称变元，即由于用外代数的张量积和均幂代数代替外代数使字位代数的直接算法丰富起来．这种交换变元与非交换变元的混合体在物理学中使用了很长一段时间．最近两个有力的成分已经加起来了．第一个是由 Andrea Brini 建立的思想，正变元到负变元的极化；第二个是哑运算，它允许在交换代数中用多项式表示斜对称张量的不变量．

在 Brini, Grosshans. Huany, Stein 和其他人的天才著作中，这些新技术解决了一些经典问题和导致经典李代数表示理论的简化．

由于使用超代数的语言， Brini 的化简与经典的 Gordan-Capelli 展开的扩张，才能成为可能．由此我们希望这个基本的展开不久取得和 Taylor 公式肩并肩的合法席位，成为普通数学家常用工具的一个重要部分．

3. 对超对称变元使用直接算法，再一次使一个老的长久未解决的问题的解决成为可能．即首先由 Lascoux 在特征为 0 时得到 Weyl 和 Schur 模的投影分解扩张到任意特征上． Buchsbaum 和我到目前为止虽然只发表了比较简单的二行的 Young- 表情况下的这种方法．似乎已清楚看出这个方法在一般情况下也有效．

4. 最后，驳回厄运的预言者不是不负责任的．他们要打发没被证明是驯服的所有难驾驭的不变量理论分类问题．我喜欢你注意一下永恒式 (perpetuant) 的概念，它仅仅是上个世纪部分地发展起来的不变量概念的推广． McMahon 文集的第二卷一大半是研究二次型的永恒式和它们的完全分类． McMahon 和 Stroh 非常清楚地证明了，在所有的二元代数齐式中仅仅永恒式有用几何的，组合的或代数齐式的性质解释的意义．这种猜测是合理的，代数齐式不变量的分类一般是不驯服的，而永恒式的分类却是驯服的．我很高兴宣布，关于任意代数齐式的永恒式概念至少已经给出一个定义．这个定义能在 Frank Grosshan 的刚刚在上个月面世的最新文章中找到．

6. 种属 (Species) 和双射组合学

由 Andre Joyal 十多年前引入的并在魁北克学派手中辉煌发展起来的种属概念是使组合学成为双射的系统节目中决定性的一步．简单地说，人们喜欢和对象本身和在这个对象上执行的运算打交道，而不喜欢用像发生函数这种推导出的结构打交道．

仍然反对采用种属语言的阻力使我想起另外两个类似的阻力．第一个是引入随机变量代替概率分布，这是在五十年代早期已结束的一场革命．一些墨守分布函数的著名数学家声称随机变量这个概念是多余的． Johns Hopkins 大学的 Aurel Wintner 就是这样的一个数学家，他写一篇概率论的专题论文排它性的只用概率分布概念．在这篇论文中证明了几个重要结果，后来用随机变量的概念又重新发现了这些结果．然而、 Wintner

没有为他的贡献得到任何荣誉.

第二个事例是在五十年代早期，Laerent 和 Schwartz 分布理论的引入. 有好几年人们能够听到陈腐的反对声"你用分布能做什么？没有分布你不能做!"一种只能暴露反对者在数学前进道路上无知的反对意见. 然而，拒绝与新的优秀概念打交道的那些人到头来被抛到一边.

现在，种属语言被认为是丰富的，构成可接受的双射证明的概念是逐渐丰富的. 例如，经过持续数年的无益尝试之后，似乎清楚了. Schur 函数不会有自然的双射解释. 双射性概念必须了解某些对应于同调代数中称为分解的结构，并且必须理解双射证明中负号的作用. Mendez 和 Yang 的 Mobius 种属的理论是沿这个方向迈进的一步. 也许下几步中之一是半单世界的双射理解. 这是在代数拓扑重组合化中遇到的惊人成功.

到此为止的种属理论的杰出成就是：

1. 由 Ehrenborg 和 Mendez 得到的关于形式幂级数的 Plethystic 逆的双射公式；

2. 最近的 Gilbent Labelle 的反圈枚举的理论；

3. Viennot、Foata、Gilbert 和 Jacques Labelle 等人的正交多项式的双射解释，它们急需种属语言；

种属理论有效性的一个好的检验，是看它能否给出 Rogers-Ramanujan 恒等式的比 Garsia 和 Milne 给出的更简单的证明. 我愿打赌，这种证明在不久的将来就会给出.

7. 特殊函数

在本世纪早期，英国数学家 F.H.Jackson 牧师，他的名字很少被提到，用了他一生的时间推导经典分析中公式的 $q-$ 模拟. 例如，他发现了积分 $q-$ 模拟，现在称做 $p-$adic 域的 right kind 积分，还给出 Γ 函数的 $q-$ 模拟，这个结果后来又被比较知名的数学家重新发现，他为此得到所有的荣誉. 我疑惑如果这位牧师看到现在对 $q-$ 模拟和量子群的狂热，他会说些什么.

诚实地说，量子群既不是量子也不是群，是 Hopf 代数的第一个例子，量子群既不是交换的也不是非交换的，然而它有人们期望的群所有的标准结构. Victor Kac 告诉我，$q-$ 模拟是一般线性群的群代数唯一可能的变形. 仅就这个事实就应该使 $q-$ 模拟保持活力.

目前，量子群是个大钳锅，它包容了一些组合学的最有前途的思想，辫群，Yang-Baxter 方程和 $q-$ 超几何函数. 我能够预见到在量子群理论中，群表示概念的一个意义深远的扩张，在其中群和表示两者可被忘掉，但是取代它们的东西无疑将是应该记住的、

在特殊函数领域和在组合学的各个方面，我们遇到太多的非平凡恒等式和用来理解他们的太少的概念.

最高的检验是量子群理论能否完成长期的承诺，发现超几何级数和基本超几何级数的统一理论.

也许由 Biedenharn 和 Louck 领导的工作在角动量量子理论的物理学家，已经发现

超几何函数和表示理论之间联系的关键，由 Racah-Wigner 代数开始的表示理论的杰出论点，现在已由量子力学神秘地赋予灵气的物理学家们推广到 n 维空间，是我们在组合学中被不公正忽略的表示理论中的一个领域.

值得一提的是，由于成熟的计算机程序，像 Mathematika 的出现给了特殊函数这个领域以新生命. 让我们回想一下，在计算机科学的早期，有一些数学家预言，由于计算机出现而特殊函数会死亡！

在这儿对特殊函数论中当前流行的众多的趋势加以判断是不可能的. 例如，由于时间限制，我不能提到椭圆函数与组合的相关性，以及由 Gelfand 和他们的学派， Gessel, Gulden, Jackson, Stanton, Zeilberger 和其他人可称道的发现. 可是，这个理论中有一个方面人人都认为它重要. 即是正性的作用. 似乎是，这些年来获得的和现在得到的最深刻的恒等式是提供正系数展开的一些恒等式. 我们几乎不用提醒就知道这个事实，由 Askey 和 Gasper 提出的带正系数的展开是 De Branger 证明 Bieberbarch 猜想中关键的一步.

正性、单调性和单峰性问题总是萦绕着组合学，而且到今天没有足够一般方法解决它们，虽然一些勇气十足的年轻数学家，像 Breni 正在勇敢地与它们作斗争. 例如. 也许使用像 Vershik 建议的 Young 表的连续的模拟能够得到全正矩阵 Edrei 结构定理的组合证明，这将会是十分有趣的. 我几乎不需提醒一个老的未解决的正性问题，我的老师 Willian Feller 习惯称它为数学家的引人注意的耻辱，即用随机变量累积量的简单不等式去刻画正性问题. 尽管它有概率腔调，它实际上是不变量理论问题. 像首先提出它的 Thiele 已经认识到的那样.

8. 其它方向

还有许许多多的课题必定不能提及，我试图给出一个简洁的提要. 我不可避免地简要提及的这些问题，比上面用很大篇幅讨论的问题不是不重要的. 正相反，组合学的生命正是依赖于这些原始的组合问题.

1. 凸多胞形. 凸多胞形和三角剖分的 $f-$ 矢量和 $h-$ 矢量分析是 Stanley 开创的，通过设置上界和 $g-$ 猜测得到极值组合学的最漂亮的一些结果. 关于这点，另一个例子是 Bjorner 和 Kalai 的具有给定的 $f-$ 矢量和给定 Betti 数的单纯复形的刻画工作. 他使用了某些外代数的一些巧妙计算.

另一个方向， Harper 的极值组合学，对单纯形是已知的结果推广到三次，建立了没料想到的有限极值问题同经典的变分计算之间的联系.

2. 在 Graham, Leeb, Rothschild 和一些其他人的能干的手中， Ramsey 理论已经达到完美的程度. 甚至哲学家正在观注它，并且把它应用在从混沌到有序的产生的推测上. 足以震惊的事，是我们仍然没有 Ramsey 定理的概率证明. 现有的上下界方法正不断地沿错误方向前进.

3. 有限格组合学近些年来已经跨了一大步，只要提一下下面的工作就够了. Gelfand 的在自由模格的结构的开创性工作， Haiman 的关于交换等价关系格的证明理论和 Her-

rman 和 Wild 的 2- 分布格理论，它推广到完全没料到的方向，Birkhoff 的有限分布格分类的经典理论和 Bruce Sagan 的枚举研究.

4. 泛代数. 二元运算和较高 arity 运算已经不祥地从经典代数中失掉了，并且直到不久之前这种运算似乎是由反常的代数学家设计出的一个怪物.

让我告诉你另一个故事. 已故的 Emil Post 工作了许多年，去建立精心研究的基于 n- 元运算上的多重群论. 阅读他的发表在美国数学会报上长达二百页的校样之后，他意识到了自己的恼恨，他的基本 n- 元运算能够用一串二元运算联接起来表示. 他在校样中加了一些脚注急忙寄回去了. 我不相信有谁会读 Post 的文章，虽然有许多地方是值得称道的.

可是现在形势变了，任意 arity 运算可能不久会出现在计算机科学面前，甚至出现在代数的最保守的章节，即一般线性群的表示论的面前. 最近，组合技术引入不变量理论使我们至少理解埋伏在任意对称类的张量之后的新的代数结构成为可能. 这种结构非常可能要求高 arity 运算，并且它将给泛代数注入新的生机，很像 Clifford 和 Heisenberg 代数给对称和斜对称张量注入了生机.

泛代数技术也来到由 Schutzengerger 开创的词组合学理论和半群簇的分类面前. 最近，Thurston Conway 已经把平面上的拼瓦研究化成组合群论中的判定问题.

5. 让我找点麻烦，供你考虑，在未来几年内在代数组合学中，起轴心作用的代数结构是结式概念. 因喜爱抽象方法，长期被忽视的结式现在正在 Gelfand, Jouanolou, Zclevinsky 和其他几个人的手中兴旺起来. 许多曾使行列式成为普通工具的进展很慢的艰苦的准备工作，现在仍然要对结式来做. 并且，无疑有新的组合应用等待开发，像行列式出现时那样. 假如让我大胆设想的话，也许新的匹配理论可能出自结式.

Beniamino Segre 提出有限几何的许多猜想仍然没有解决. 这些猜想中的一些按优美和深刻程度可与数论中的 Weil 猜想等价地给以评级. 这些猜想为意大利、比利时、美国、德国和加拿大的有限几何学家深入细致地研究提供了很强的动机.

7. 在解决各种不同的深刻而听起来是初等的问题的所有数学的努力中，组合学是杰出的. 这样的一些问题是邮票问题、有限分配格的枚举、自回避随机游动、硬球问题、有限偏序集的在指定水平上元素的链的枚举、把对称群的精细的理论推广到 Coxeter 群上，由 Young 表提供的绝不终止的惊喜等等. 由于时间已到，其中大多数已无法提到，并且我必须感谢你们耐心地听完这篇太长的演说. 谢谢.

佛洛伦萨，1993 年 6 月 23 日

(王天明 译　范更华 校)