

气候变化与海冰输运过程中的数学

Kenneth M. Golden

作为极地地区的海洋和大气之间的边界层的海冰是全球气候系统的一个关键要素。由于地球的气温变暖，北极地区的海冰堆在夏天的延伸范围特别展现了惊人的退缩。确实，极地海冰堆是气候变化的预兆。要预测今后 10 年、50 年或 100 年里将会发生什么的问题需要对关键的海冰形成过程和海冰在全球气候中所起的作用进行大量的建模工作。当前，各种大规模的气候模型实际上并不研究可能显著影响预测的一系列海冰过程。但是，对地球海冰堆的状态，特别是其厚度分布的监视将提供海冰影响全球变暖的关键数据。当前在处理这些基本问题时数学正在起着重要的作用，而在将来很可能起到更大的作用。下面我们给出本文内容的逐个要点的简要概述。

问题 1 极地海冰在全球气候中的作用是什么？

- 海冰形成了极地海洋和大气之间的边界，并促成了热、气以及热和气之间的动量交换。极地海冰堆帮助调整地球的气候，并且是气候变化的敏感指示器。
- 尽管海水吸收了大部分的入射太阳辐射，但是海冰反射了大部分的入射太阳辐射。地球上的海冰堆所起的作用既是太阳热量的反射器，也是海洋的隔热器，使得大量的热免于从海洋逃逸到大气中去。
- 海冰是纯冰和液体盐水包裹体的多孔复合物。通过海冰中的液体流动调节了对气候来说是重要的过程，从控制海冰堆反射的溶化池的发展到海水向上的渗滤，这种渗滤涌入到海水的表面然后结冰形成了海冰系统中日益重要的组成部分的雪-冰。通过海冰中的盐水流动也能加强热的交换。
- 海冰是支持极地海洋生命的藻类和细菌群落的宿主。经由这种微观结构的流体输运控制了营养补给过程。
- 极地海冰堆的状态——它们的延伸范围和厚度——为监测气候变化提供了重要信息。

问题 2 对海冰中的输运进行建模时数学的作用是什么？

- 在均匀化领域的各种方法被用来从海冰的微观结构的部分信息导出有关海冰中输运的宏观信息。
- 基于一般的微观结构信息，与孔隙边界进行相互作用的扩散过程的捕获常数和平均存活时间的各种变分陈述被用来获得海冰流体渗透率张量的精确范围的估计。
- 海冰中流体的输运在盐水体积的百分比约为 5% 的一个临界值处展现出透水 / 不透水的过渡，该临界值控制着地球物理和生物学过程。X-射线计算机层析扫描和孔隙微观结构到随机图的映射被用来说明海冰中的盐水在这个盐水体积百分比的临界值处相

译自: Notices of the AMS, Vol.56 (2009), No.5, p.562-584, Climate Change and the Mathematics of Transport in Sea Ice, Kenneth M. Golden, figure number 26 (fig.1, fig.10-13 reprinted). Copyright ©2009 the American Mathematical Society. Reprinted with permission. All rights reserved. 美国数学会与作者授予译文出版许可。

态经受着一种连通性过渡. 渗流理论 被用来从理论上预测这种过渡并从数学上来表征流体孔隙及其连通性的热演化.

- 格子模型和连续渗流模型 被用来预测海冰中流体透水性的临界行为, 其中有一个描述在临界阈值之上的行为的普适指数, 而 临界路径分析 给出了比例因子.

- 对多孔岩石研制的 层次模型 被用来预测在整个盐水孔隙的范围内海冰的流体透水性.

- 等价于随机电阻网络并用快速 多重网格方法 求解的 随机管道网络 被用来数值地模拟通过海冰的流体的流动.

- 复分析和 泛函分析 方法被用来获得表征海冰的电磁行为, 以及在诸如监测海冰厚度的遥感应用中海冰的响应的关键参数, 海冰的 有效复电容率 (介电常数) 精确范围的估计.

- 各种 反演方法 给出了来自复电容率数据的微观结构信息, 为海冰中的流体和热运输的电磁监测铺平了道路.

- 为了验证我们的模型并调研新的现象而在 2007 年进行的南极探险中我们已经完成了海冰中 流体和电的运输的测量.

- 目前, 各种有关大规模海冰和气候的模型一般没有融入我们有关运输的研究工作所描述的各种关键过程. 这些全球模型具有的网格尺寸的大小为许多公里的量级. 对 数学的未来挑战 包括单个浮冰尺度上的局部输运性质是怎样影响到与全球模型有关的更大尺度的海冰堆的行为的定量化研究.

本文分为两个主要部分. 我们在第 1 部分讨论海冰在气候系统中的作用以及它是怎样调节对气候变化各种问题来说重要的关键过程. 然后我们概述了数学正在怎样被用来对海冰中的流体和电磁输运进行建模的. 本文只给出了少量的关键参考文献以及进一步阅读的初级阶段的参考文献. 我们这项研究工作的许多参考文献可以在 [8, 9, 10] 中找到, 而大量更加广泛的参考书目的网络连接在本文末给出.

1. 海冰及其在全球气候系统中的作用

1.1. 夏季北极海冰堆的退缩

直到大约 10 年前, 每个夏季北冰洋的大部分都被区域范围约为美国大陆部分面积的海冰所覆盖. 到了 2005 年, 这种厚而且永久性的冰堆消失的面积约等于美国密西西比

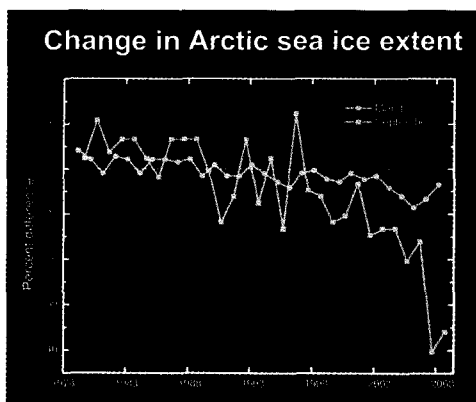


图 1 (左图) 题目是“北极海冰范围的变化”, 纵坐标为“百分比差”; March=3 月, September=9 月.

图 1 文字说明: 尽管北极冬季海冰的范围 (圆点折线) 在过去 30 年只有温和的退缩, 但是夏季的堆冰 (方点折线) 经受着, 特别是在最近几年里激烈的退缩. 虚线表示 1979—2000 年期间的平均范围. 有些气候科学家怀疑这种系统的临界行为是否意味着我们已经穿过了所谓的进入新的气候环境的转折点

河以东部分的面积。在 2007 年夏季溶化季节末，可以与大部分美国中西部地区的面积相比的冰堆也消失了，而北极冰堆从它 1979—2000 所占的平均范围缩小了近 40% (图 1)。(译文中只用了得到刊登许可的图 1 和图 10—13, 不再一一声明。——编注) 传说中的西北航道最终在人类记忆里第一次向海上旅行者开放了。北极海冰区域在夏季的令人震惊的消失也许表示了迄今为止在地球表面的全球变暖的最引人注目的、大规模的迹象。

围绕南极洲大陆的海冰堆大部分是季节性的，意即在回到又冷又黑暗的冬天前的夏季里溶化了。北极的夏季将会变成像南极那样大部分不结冰了吗？如果将会这样，要多长时间呢？对于全球气候而言，对这些问题的回答是决定性的。夏天的北极海冰堆作为地球的极地冰箱的主要部分，它冷却该地区并保护北冰洋免于吸收太多的太阳热量。今天的气候科学的中心问题之一就是要了解为什么北极冰堆会如此急促地减少并预测这个复杂系统在未来若干年里会如何演变。为了了解在处理这些基本问题时数学可以怎样起作用，我们首先讨论海冰的形成，探究海冰的材料结构，然后概述海冰在全球气候和极地生态系统中的作用。

1.2. 海冰的形成和结构

海冰是结了冰的海水，它在温度约为 -1.8°C 或 28.8°F 时结冰。一开始，在海面附近形成称为 屑冰 (*frazil*) 的细小层状结晶。它们常常聚合成称为 油脂冰 (*grease ice*) 的滑溜碎片。当在平静的条件下海冰形成时，首先看到的是称为 尼罗冰 (*nilas*) 的半透明的薄片冰，它们最终通过冻结增厚为灰冰，然后成为大而尚未变形的白色浮冰。洋流或微风常迫使尼罗冰互相靠拢，称为 漂流 (*rafting*) 的过程致使一片片互相叠合。图 3 上方所示的照片为漂流的尼罗冰。在宽阔海洋中典型的汹涌澎湃难以控制的条件下，“油脂”屑冰的悬浮体在波动环境中经受着来回的循环挤压，在挤压期间冰晶冻结在一起形成小的烂泥饼。它们经由堆积逐渐增大并经由冰晶间不断的冰冻固化而成为边缘凸起的饼冰 (*pancake ice*) [22]。图 3 下方所示的照片为新形成的油脂冰。饼冰的照片展示在图 8 下方的照片中，右下方的照片是在形成更大的浮冰过程中“粘接”在一起的饼冰。在一个季节后溶化的海冰称为 季节冰 (*seasonal ice*)，在一个夏季后没有溶化的海冰称为 多年冰 (*multiyear ice*)。

在南半球的冬季位于南极顶上的南极洲大陆大部分被南海的季节冰环绕覆盖，在 9 月份冰的覆盖面积达到最大。地理位置几乎与南极相对的北极，有一个被季节冰和多年冰所覆盖的被大陆包围的位于北极的海洋，在 3 月份冰的覆盖面积达到最大。海冰应该有别于所有源自大陆的冰山、冰川、冰盖和冰架。覆盖南极洲和格陵兰的巨大冰盖都厚达 2 英里而且是由雪形成的冰川冰组成的，这些雪在几千或几百万年的挤压下形成冰，这种冰在巨大压力下流动。

作为一种材料，海冰和冰川冰是相当不同的。当盐水结冰时，其结果是产生了一种由纯冰和液体盐水包裹体、气袋和固体盐组成的多晶复合材料。当海冰的温度升高时，盐水的孔隙率或相对体积百分比 ϕ 也变大了。亚毫米尺寸的盐水包裹体展示在图 8 的左上方，而它的厘米尺寸的多晶复合结构展示在图 8 的右上方。

海冰展现了一种极为有趣而且重要的临界现象 [5]。当盐水体积百分比 ϕ 低于 5%

时, 对流体流动来说海冰呈现有效的不透水性, 而当 ϕ 高于 5% 时, 随着 ϕ 的增高, 海冰逐渐变为可透水性的了. 这个临界盐水体积百分比 $\phi_c \approx 5\%$ 对应于盐浓度为 5‰ 的一块典型的海冰的临界温度 $T_c \approx -5^\circ\text{C}$, 称为 三五-规则. 当流体流动穿过海冰时, 输运是由尺寸从几厘米的水平片到垂直方向为一米或几米的 盐水通道 推进的, 如图 8 中间的图所示.

1.3. 冰 - 海洋 - 大气的相互作用以及全球气候

作为极地地区中海洋和大气之间的边界层, 海冰在全球气候和世界海洋系统中是一个主要的参与者, 而且是气候变化最重要的指示器 [23, 12, 19, 17]. 海冰堆调节地球的两个主要地球物理流体 —— 海洋和大气 —— 之间的热、水气以及动量的交换. 例如, 当风推动海冰在洋面上聚拢时, 动量转移到水下; 冰越粗糙, 这种转移越有效. 这个过程可以在海洋上部造成大规模的翻转, 把比较温暖的海水带到海面上. 另一个例子, 当海冰冻结时, 它拒绝又冷又致密的盐水, 在极地海洋中形成了向下的羽状物. 在南大洋, 这种过程导致了南极 底层水 的形成, 它们像在一条复杂的河流流经世界各海洋. 在大气 - 海洋相互作用中另一个重要的过程就是它们之间的热交换. 在海洋比较温暖的冬天, 热通过海冰自身流向大气, 海冰形成海洋上的一条保温毯子, 而且通过海冰堆上的 通道 或开口. 因此海冰的导热系数在耦合的气候模型中就成了有助于量化大气 - 海洋相互作用的一个重要的输运系数.

粗略地讲, 入射到由雪覆盖的海冰上的大多数太阳辐射都被反射掉了, 而入射到较暗海水上大多数太阳辐射都被吸收了. 海冰既是海洋的防晒霜又是海洋的保温毯, 海冰既阻止了太阳射线来温暖下面的海水又阻止了海洋的热量跑掉去温暖洋面上的大气. 被反射的太阳光和入射的太阳光之比称为 反照率 (*albedo*). 雪 - 覆盖冰的反照率接近于 1 (大于 0.8), 而海水的反照率接近于 0 (小于 0.1). 如果温暖的温度随时间的推移溶化了海冰, 那么可以用来反射太阳光的光亮表面更少, 而更多的热从海洋逃出去温暖大气, 从而冰被进一步溶化. 在一个正反馈循环中, 当更多的冰被溶化, 极地海洋的反照率降低, 导致吸收更多的太阳辐射和变暖, 转而导致更多的溶化, 形成正反馈循环. 人们相信这种所谓的 冰 - 反照率反馈 (*ice-albedo feedback*) 在夏天北极海冰范围的显著减少中已经起到了重要作用 [16]. 因此即使微小的温度增加也可能导致随时间发展的更强的变暖, 这就使极地地区成为地球上气候变化最敏感的地区. 全球变暖在极地地区 增强 了. 确实, 各种全球气候模型一致表明在高纬度的北极地区的变暖增强了, 尽管不同的模型在量级上有较大的不同. 例如, 模型预测 21 世纪末北极的平均地表气温要比预测的全球平均地表气温的增加高出约 1.5—4 倍.

2007 年夏季, 北极冰堆的范围达到了创纪录的最小值. 冰物质平衡的观察结果表明在那年夏季波弗特海 (Beaufort Sea)¹⁾ 中有超常量的冰的底部溶化 [16]. 计算表明上层海洋受到的太阳能加热是所观察到的北极冰堆溶化的主要原因. 开放水域百分比的增加导致输入上层海洋的太阳能热量高达 500% 的正异常增加, 触发了冰 - 反照率反馈, 加速

1) 波弗特海是北冰洋的边缘海, 位于美国阿拉斯加州北部和加拿大西北部沿岸以北, 因 1806 年英国水文地理学家、海军少将 Francis Beaufort (1774.05.27—1857.12.17) 到此考察而得名. —— 译注

了堆冰的缩减. 另一个值得关心的问题是在北极盆地显然一直存在较厚的多年冰的相对数量的显著减少. 近来许多作者都承认, 相对年轻又比较薄的冰覆盖更容易受大气和海洋强制效应的影响 [17]. 面对持续变暖的预测, 近来的大气和海洋环流模式的持续存在以及这些效应通过冰-反照率反馈机制的放大, 越来越有可能发生北冰洋从夏天的常年冰-覆盖最终变为不结冰的情况.

正如前面的讨论所见证的, 在预测北极海冰发展的关键决定因素是了解冰堆反照率将会怎样演变. 如图 6¹⁾ 的右图所示, 在冰的表面形成的溶化池决定了冰的反照率. 这些溶化池是否会扩展、加深或排出在很大程度上由海冰的流体渗透性所控制的问题正是我们在下面要讨论的有关海冰中流体输运研究的主要动机之一.

研究海冰中流体流动的另一个动力是从被淹没的冰面上冰冻的海冰产量的重要性, 特别是在南极地区整个冰堆被淹没是很普遍的现象. 在暴风雪期间, 当雪荷载增加时压头 (压差) 就增强了. 由于海冰渗透性的制约海水被迫经由海冰向上运动. 仅当整个海冰层的温度超过流体流动的临界温度 T_c 时才会有净流量涌向海面. 一旦冰面被淹没, 海水和雪的泥泞混合物就会冰冻成雪-冰 (snow-ice), 它们是南极地区生成冰的主要形式. 事实上, 我们在 1994 年在东威德尔海 (Eastern Weddell Sea)²⁾ 执行一个名为南极带流量实验 (Antarctic Zone Flux Experiment (ANZFLUX)) 的科研项目时在一次猛烈的冬季暴风雪中见证了这种过程, 我们还目睹了海水以一种相当引人注目的方式淹没海冰表面的情景, 正是这些成为本文作者开始研究海冰中流体输运问题的动机. 晚近的一些模型甚至间接地表明随着伴随全球变暖而增加的极地降水³⁾, 南极地区冬天的海冰堆会增厚, 而雪-冰的生产量在北极地区会变得更加重要. 经由海冰的流体流动也促进了出自冻结、溶化和排水过程的对流得到加强的热的输运以及上层海洋在盐水和淡水的输入 [23, 19].

1.4. 海冰生态学和流体输运过程

海冰中的盐水包裹体是大量海藻和细菌群落的宿主 [14, 19], 这些群落对于支持极地海洋中的生命是至关重要的, 例如说, 磷虾支持着鱼类、企鹅、海豹和小须鲸, 直至食物链顶端的捕食者如虎鲸、斑纹海豹和北极熊. 穿过多孔微观结构的流体流动促进了海冰微生物的营养补给过程. 例如, 在南极秋天, 威德尔海的对流颠覆的过程中不是海洋表面冰冻的泥浆引出的冰冷致密的盐水, 而是满载营养的海水向赤潮 (藻类的疯长) 提供养料的. 但是, 在秋季冻结期间, 一旦关键的等温线——在它之上冰是不透水的, 在它之下冰是透水的——穿过时藻类层就会有效地终止疯长 [5].

1.5. 海冰在 10 个量级上的多尺度结构

对海冰进行建模以及海冰在全球气候中的作用诸多有趣而挑战性的方面之一就是

- 1) 图 6 的说明: 白色冰-覆盖的地区对于夏天期间反射大部分入射的太阳辐射是很重要的, 海水吸收大部分的入射的太阳辐射. 海冰堆的反射或反照率很大程度上是由其表面的溶化池决定的, 如右图所示的 2007 年 6 月的情况. 溶化池演化很大程度上是由海冰下面的流体渗透性以及太阳的射线决定的.——译注
- 2) 南极洲的陆缘海之一, 位于大西洋的极南部, 是南冰洋的一部分. 是以英国航海家 James Weddell (1787.8.24—1834.9.9) 的名字命名的, 他曾于 1823 年前往威德尔海探险.——译注
- 3) 降水, 是指地面从大气中获得的诸如雨、雨夹雪、冰雹、雪和其他形式的水气凝结物.——译注

亚毫米大小到几百公里不等的超过 10 个量级的相关长度等级的结构差别很大的分布. 在图 8 和图 9 中, 我们用图示这种量级范围来说明若干主要的海冰结构的例子. 在大量级水平对海冰进行建模取决于对个别浮冰和更小的量级上海冰的物理性质的了解. 现今的一些气候模型甚至对充分发挥其全部能力的威力最强的计算机都提出了挑战. 最大的计算机的能力也只限于几十公里的水平分辨率并需要巧妙的逼近来对海冰的基本物理性质进行建模. 主要论题之一是怎样利用小尺度量级的信息去预测大尺度量级海冰的行为, 就像经典统计力学中所做的那样. 下面几节我们集中讨论海冰的微观物理学. 即, 我们要研究表征盐水的微观结构及其热演化的基本问题, 怎样利用这些知识来导出与各种气候模型有关的海冰的块输运性质, 以及监测气候变化等基本问题.

1.6. 海冰的流体渗透率的界

尽管在考虑气候变化和极地生态系统中流体流经海冰很重要, 但是在我们的研究工作 [5, 9, 8, 26] 之前很少有人关注, 特别是从理论的角度来研究这个问题 ([3] 是个值得注意的例外). 作为分析垂直流体渗透率 k 及其对微观结构的相关性的第一步, 我们得到了 $k(\phi)$ 的精确上界 [9, 8], 我们对此作一个简单的评述.

考虑流经多孔随机介质所在区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 上的低雷诺数流体的流动. 粘度为 μ 的盐水所占的盐水孔隙空间为 $\Omega_b \subset \Omega$, 其相对体积百分比 ϕ 由海冰的温度 T 及其块盐浓度 S 决定 [23, 19]. 固相冰所占的冰粒空间为 $\Omega_i \subset \Omega$, 其相对体积百分比为 $1 - \phi$. 记 $\chi(x)$ 为盐水所占的孔隙空间指示函数, 满足 $\chi(x) = 1$ 若 $x \in \Omega_b$, 而 $\chi(x) = 0$ 若 $x \in \Omega_i$. 假设对给定的 T 和 S 该多孔微观结构具有平移不变的统计性质, 致使其满足 遍历性假设, 其 (在无穷体积限下的) 等价总体和体积平均记为 $\langle \cdot \rangle$ [20].

和许多其他的多孔介质一样 [20], 存在与该介质相连的微观长度 ℓ . 例如, 使从 $\chi(x)$ 得到的两-点相关函数时变化的量级就是这种长度的一种很好的度量, 比之于诸如统计上均匀的层的样本大小或厚度这样典型的微观长度量级 L 而言 ℓ 是很小的. 于是参数 $\epsilon = \ell/L$ 是很小的, 而人们感兴趣的是得到 $\epsilon \rightarrow 0$ 时其极限的有效流体输运行为. 为了获得这种信息, 人们研究出了各种形式的二尺度均匀化方法 (method of two-scale homogenization) 或二尺度收敛法 (method of two-scale convergence) [20, 11], 这种方法是基于对两种尺度的确认: 慢尺度 x 和快尺度 $y = x/\epsilon$. 假设盐水中的速度场和压力场 $v^\epsilon(x)$ 和 $p^\epsilon(x)$ ($x \in \Omega_b$) 依赖于这两个尺度 x 和 y . 求解的思想是利用对 ϵ 幂的展开对快尺度求平均或均匀化, 这将导致描述流动总体行为更为简单的方程.

在盐水相态中的速度和压力满足 Stokes (斯托克斯) 方程

$$\nabla p^\epsilon = \mu \Delta v^\epsilon, \quad \nabla \cdot v^\epsilon = 0, \quad x \in \Omega_b, \quad (1)$$

并在孔隙表面满足无滑移边界条件 $v^\epsilon(x) = 0$, $x \in \partial\Omega_b$. (1) 中第 1 个方程是在雷诺数为零的极限情形下的稳态流体动量方程. 该宏观方程可以通过二尺度展开以及速度对 y 的首项 v_0 求平均而导出, 于是得到

$$v(x) = -\frac{1}{\mu} \mathbf{k} \nabla p(x), \quad \nabla \cdot v(x) = 0, \quad (2)$$

其中 $p(x) = p_0(x)$, 即 $p^\epsilon(x)$ 的展开式的零阶项, 而 \mathbf{k} 是有效渗透率张量. (2) 中第 1 个方程称为 Darcy (达西) 定律, 第 2 个方程是宏观不可压缩条件 [11]. 我们感兴趣的是单位为 m^2 的垂直方向的渗透率 $k_{zz} = k$.

为了得到我们想要的结果, 考虑在体积百分比为 ϕ 和 $1 - \phi$ 上电导率为 σ_1 和 σ_2 的二相复合物的电导率张量 σ^* . 这里要定义的方程是 $J = \sigma E$, 其中 J 为电流强度, E 为电场, 而 $\sigma(x)$ 是取值为 σ_1 和 σ_2 的局部电导率. 局部场满足

$$\nabla \times E = 0, \quad \nabla \cdot J = 0, \quad (3)$$

而类似于达西定律的平均后的方程 $\langle J \rangle = \sigma^* \langle E \rangle$ 定义了 σ^* . 就像垂直方向的情形那样的 σ^* 的对角线元素 σ^* 的最优上界和下界估计, 称为经典算术和调和平均的界估计 (或称为初等的界估计) 早在几乎 100 年前就由 Wiener (维纳) 得到:

$$\frac{1}{\frac{\phi}{\sigma_1} + \frac{1-\phi}{\sigma_2}} \leq \sigma^* \leq \phi\sigma_1 + (1-\phi)\sigma_2. \quad (4)$$

这个界估计是最优的, 因为如图 10 (a) 所示平行于场的流体层达到了该上界, 而垂直于场的流体层达到了该下界.

对于流体问题, 我们要问什么样的孔隙构形使渗透率 k 最大. 直观看, 使 k 最大的最佳安排如图 10 (b) 所示的具有适当半径的垂直的管子, 图中流体问题的电导率所没有表示出来的长度尺寸量级出现了. 这种差别可以从以下观察结果看出: 半径为 r 、单位长的圆柱体的电导率为 $g_e = \pi r^2 \sigma$, 这里 σ 为该材料的电导率, 而内管半径为 r 单位长管的圆柱体的流体电导率为 $g_f = \pi r^4 / 8\mu$. 我们在 [9] 中得到管的界估计, $k \leq \phi[a(\phi)]^2 / 8$, 其中平均盐水包裹体的水平横截面的半径为 $a(\phi) = 7 \times 10^{-5} + (1.6 \times 10^{-4})\phi$ 米. 基于尺寸一致管的这个简单的管界估计表达了实验室的数据 [9], 这里管的半径随 ϕ 或 T 的增加而增加. 但是考虑到北极地区的数据时, 由于那里涉及包裹体长度尺寸的范围更大, 某些数据落在这个界估计之外. 所以我们必须考虑允许半径分布更大的推广时的界估计. 这种界估计的推导 [21, 9, 8] 利用了孔隙空间中的扩散过程.

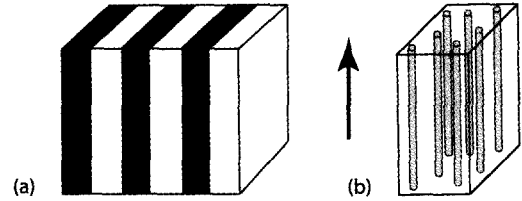


图 10 (a) 二相复合材料在垂直电场中的电导率由平行于该电场的层状结构极大化. (b) 多孔介质的垂流体渗透性由具有适当半径的垂直管极大化

考虑在多孔介质中的流体相区域 $\Omega_b \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$ 中示踪剂的扩散问题. 示踪剂与在孔隙空间的边界 $\partial\Omega_b$ 上部分或全部吸收的抑制物起反应. 设 $c(x, t)$ ($x \in \Omega_b$) 是由下列扩散方程和边界条件支配的反应物的时变浓度

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\Delta c + G, \quad x \in \Omega_b, \quad D\frac{\partial c}{\partial n} + \eta c = 0, \quad x \in \partial\Omega_b, \quad (5)$$

其中 D 是流体中反应物的扩散系数, η 是正表面反应率常数, G 是没有抑制物的单位体积的反应物的生成率, n 是从孔隙空间指向外的单位外法向. 在由扩散控制的限制的情形 [21], 典型的情形是反应物在孔隙空间中扩散的时间远长于与表面反应相应的特征时间,

所以我们考虑经由吸收边界的反应物的移出率正好由反应物的单位体积产出率 G 所补偿的稳态问题.

感兴趣的参数是 抑制常数 γ :

$$\gamma^{-1} = \langle u\chi \rangle, \quad (6)$$

其中 u 是从 c 的双尺度展开得到的在 Ω_b 中满足 $\Delta u = -1$, 在小孔边界上 $u = 0$ 已定量级的浓度. 抑制常数与小孔空间中的扩散 平均存活时间 τ 成反比, $\tau = 1/\gamma\phi D$. 利用具有适当结构的试验电场的抑制常数的变分定义, 给出一个一般的两点 空隙下界 估计 [21]

$$\gamma \geq \frac{(1-\phi)^2}{\ell_P^2}, \quad (7)$$

其中 ℓ_P 是由小孔的两点相关函数定义的长度尺度.

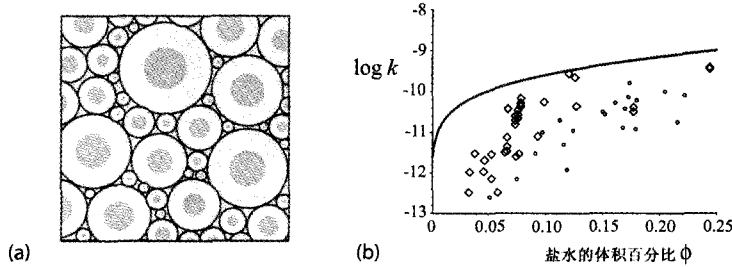


图 11 (a) Hashin-Shtrikman 覆盖圆柱体提供了能达到垂直流体渗透率的两点空隙上界估计的最佳几何形状. (b) 对数正态分布的管的界制约了垂直海冰渗透率所有的实验室和现场数据

在复合材料的理论中, 利用了体积百分比信息以及材料的各向同性性质, 各种 Hashin-Shtrikman 界估计 [20, 9, 10] 在提供有效输运性质的最优估计时是很重要的. 这些界估计在如下意义下是最优的: 它们可以在确切的几何形状 —— 即, 在 $d = 3$ 时的分层次的充满全空间的覆盖球, 或在 $d = 2$ 时的分层次的充满全空间的覆盖圆柱 —— 上达到. (7) 中的两点空隙下界估计可以对 Hashin-Shtrikman 覆盖的圆柱进行计算, 即对如图 11 (a) 所示的具有适当分布的包裹体半径 R_I 的充满盐水的垂直冰管的海冰问题中计算得到 [21]. [20] 利用把渗透率张量和抑制常数联系起来的一个不等式, 给出了最优的精确上界估计

$$k \leq \frac{\phi \langle R_I^4 \rangle}{8 \langle R_I^2 \rangle}. \quad (8)$$

人们发现测得的盐水包裹体的横截面的面积 A 服从对数正态分布 [8]. 于是 $z = \ln A$ 具有均值为 α 而变差为 ρ^2 的正态概率密度

$$P(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho^2}} e^{-(z-\alpha)^2/2\rho^2}. \quad (9)$$

我们在 [8] 中利用对数分布估算 (8) 中的矩, 给出

$$k(\phi) \leq \frac{\phi}{8\pi} \langle A(\phi) \rangle e^{\rho^2}. \quad (10)$$

如上面所说, 对于变差 $\rho^2 \approx 1$ 和 $\langle A(\phi) \rangle = \pi a^2(\phi)$, (10) 中的 对数正态分布的管的界制约了我们的北极现场数据以及实验室数据, 如图 11 (b) 所示. 现场数据是在美国最北端的城市阿拉斯加州的巴罗 (Barrow) 附近进行的水文学桶试验 (hydrological bail test) 中取得

的, 在试验中挖了一些圆柱形的洞, 并插入管子以防止水平流动, 水位的按时间序列的测量被用来估计洞下冰的渗透率.

2. 海冰流体渗透性的预测

2.1. 海冰的渗流理论

渗流理论一直被用来对一个相态的连通性支配其有效行为的无序材料进行建模 [18, 20, 11]. 例子包括从多孔岩石和多泡的冰川冰到半导体和碳纳米管复合材料. 考虑在整数格 \mathbb{Z}^d 连接最近网址的正方形 ($d=2$) 或立方体 ($d=3$) 上的键网络. 我们一开始先考虑经由这种网络的电输运, 然后再讨论流体输运的问题. 键的电导率被指定为 $\sigma_0 > 0$ (打开) 或 0 (闭合), 其概率分别为 p 和 $1-p$. 连通的开键组称为开串, 当 p 增加时平均的串的大小也增大.

这个模型的显著特征就是存在一个称为 渗流阈值 的临界概率 $p_c \in (0, 1)$, 在该值处首先出现一个无穷的开键串. $d=2$ 时 $p_c = 1/2$, 和 $d=3$ 时 $p_c \approx 0.25$.

无穷串密度 $P_\infty(p)$ 定义为原点 (或任意点, 因为平移不变的原因) 包含在该无穷串中的概率, 无穷串密度的图形展示在图 13 (b) 中. 两点函数 $\tau(x, y)$ 度量了两点 x 和 y 属于同一个开串的概率. 当 $|x - y| \rightarrow \infty$ 时, $\tau(x, y) \sim \exp(-|x - y|/\xi)$, 其中的 ξ 称为相关长度, 它是连通性量级的一种度量. 当 p 增大趋于 p_c 时相关长度发散, 从而形成无穷串, 如 13 (a) 所示. 在 p_c 的邻域中, $P_\infty(p)$ 和 $\xi(p)$ 具有如下幂律性质

$$\begin{aligned} P_\infty(p) &\sim (p - p_c)^\beta, \quad p \rightarrow p_c^+, \\ \xi(p) &\sim (p_c - p)^{-\nu}, \quad p \rightarrow p_c^-, \end{aligned} \quad (11)$$

其中 β 和 ν 是人们相信只依赖于维数而不依赖于格的细节的 普适 临界指数. 在 $d=3$ 的情形, $\beta \approx 0.41$ 而 $\nu \approx 0.88$ [18].

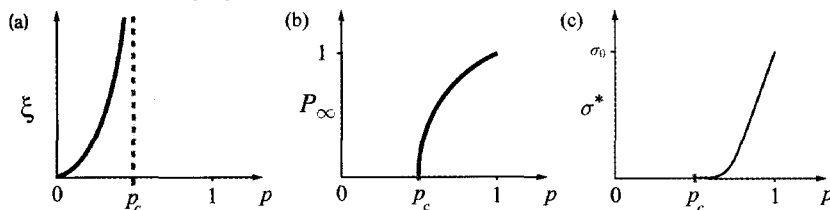


图 13 (a) 当 $p \rightarrow p_c^-$ 时相关长度发散. (b) 无穷串密度 $P_\infty(p)$ 小于 p_c 时为零, 大于 p_c 时按幂律增长. (c) 小于 p_c 时没有块输运, 大于 p_c 时输运系数按不同的幂律增长

设 $\sigma^*(p)$ 是这个随机电阻网络在垂直方向上的有效电导率, 如同在无穷体积限中定义的 Kirchoff (基尔霍夫) 定律一样 [4]. 对于 $p < p_c$, $\sigma^*(p) = 0$, 如图 13 (c) 所示. 对于靠近阈值的 $p > p_c$, $\sigma^*(p)$ 展示一种幂律行为,

$$\sigma^*(p) \sim \sigma_0 (p - p_c)^t, \quad p \rightarrow p_c^+, \quad (12)$$

其中 t 是电导率临界指数. 对于格而言, 人们认为 t 是只依赖于 d 的普通常数. 连接流体

电导率为 $\kappa_0/\mu = r_0^2/8\mu$ 的开或闭管的格相应的流体渗透率 $\kappa^*(p)$ 的行为类似于

$$\kappa^*(p) \sim \kappa_0(p - p_c)^e, \quad p \rightarrow p_c^+, \quad (13)$$

其中 e 是流体的渗透率指数. 对格而言, 人们认为 $e = t$ [20]. $d = 2$ 时 $t \approx 1.3$, 而 $d = 3$ 时 $t \approx 2.0$ [18, 20]. 也有一个精确的界估计 $t \leq 2$ [4].

考虑到依赖于 ϕ 是否大于或小于 0.05 的柱状海冰中盐水排水系统明显的临界行为 [23], 试图去寻找渗流理论的解释是合理的. 但是, 对于 $d = 3$ 的立体键格的 $p_c \approx 0.25$, 海冰中盐水微观结构的主要几何特征显然被这些格漏掉了. 在 [5] 中 $\phi_c \approx 0.05$ 被视为与能展示类似于海冰微观结构特征的压缩粉粒的连续渗流模型 [13] 中的临界概率是等同的. 这种等同解释了三五-规则以及藻类增长和雪-冰产量的数据. 展示在图 14 中的压缩粉粒用于所谓的隐形或雷达-吸收复合材料的研制中.

当我们在 10 年前把压缩粉粒模型用于海冰时, 我们并没有在一个临界盐水体积百分比处的盐水微观结构经受一种连通性的临界转折的直接证据. 证据的缺失部分是由于在三维空间中影像和定量表征盐水包裹体, 特别是其连通性热演化方面的困难. 现在通过 X 射线计算机层析扫描和孔隙结构分析 [8], 我们已经能够在 -18°C — 3°C 的温度范围内分析海冰单个晶体中的盐水连通性热演化的临界行为. 我们把盐水相态的三维图像映射到图上, 并分析它们作为温度和样本大小的函数的连通性. 盐水包裹体现实的网络模型可以从多孔介质的三维显微层析扫描图像分析中导出. 各种方法中包括发展完善的 3DMA 软件包 (三维中轴; 例如参见 [8]) 以及 Glantz 和 Hilpert 的发展紧对偶模型. 在这两种情形, 从小孔和狭窄通道导出了结点和边的三维图. 用一般的术语来讲, 步骤为: (1) 用多面体复形来表示小孔空间, (2) 把这个数字表示的小孔空间分解为小孔和狭窄通道并计算单个的特征半径, (3) 把这些映射为标记其各自半径的结点和边. 所产生的图能使吸排水表征、连通性和临界路径的分析成为可能 (见下面).

图 15 展示了盐水的形态和连通性怎样随温度而演化的一个例子. X 射线计算机层析扫描已经对小尺度晶体内的盐水层的连通性提供了新的洞察. 我们的工作提供了在这种尺度 ($\approx 1\text{cm}$) 上的第一个直接的观察结果. 值得注意的是, 我们观察到的小孔形态的热演化比经典模型 [19, 23] 要复杂得多, 从盐水薄片层到柱体到球形包裹体的转换构成了一系列多孔性模型 [19, 23] 的基础.

尽管渗流理论应用于无序材料已有 50 年之久, 但是诸如渗流概率 (当 $p < p_c$ 时等于 0, 而当 $p > p_c$ 等于 1)、无限串密度、相关长度以及它们的临界指数只是对像正方形格或立方体格那样的理想化模型, 而不是对真实的材料计算的. 一般说, 不仅取得复杂的无序介质的微观结构的图像是困难的, 而且方便地改变诸如岩石中的小孔空间或半导体的掺杂那样人们感兴趣的连通相态的体积百分比也是困难的. 但是对于海冰而言, 通过改变单个样本的温度我们可以很大程度上改变盐水的体积百分比. (在已经提交的由 Pringle, Miner, Eicken 和 Golden 写的论文中) 我们可以从有关小孔空间演化的三维图像来计算这些函数. 例如, 从两点连通性函数的分析, 我们生成了能解释相关长度发散性的一个十分类似于图 13 (a) 的图.

我们还能通过有限尺寸缩放 (*finite-size scaling*) 用我们的数据去求各向异性的渗流阈值. 有限尺寸缩放是为得到这种结果的探究感兴趣的函数对样本尺寸依赖性的一种物理方法, 它不是试图从真实数据及其体积百分比的变差去计算诸如渗流阈值或临界指数等非常敏感的参数. 在我们的情形, 一个关键性的关系式是

$$P_{\infty}(p_c, L) \sim L^{-\beta/\nu}, \quad L \rightarrow \infty. \quad (14)$$

在海冰的单晶中盐水的微观结构是高度各向异性的, 其包裹体通常按层排列. 利用 3 种不同的途径我们用有限尺寸缩放的方法得到在垂直方向的 $4.6 \pm 0.7\%$ 、横向平行于层的层方向的 $9 \pm 2\%$, 以及垂直于各层的 $14 \pm 4\%$ 的各向异性的临界多孔性. 对单晶的垂直方向的约 4.6% 的值应该小于单晶块连通性的约 5% 的阈值.

现在我们考虑用渗流理论来了解海冰的流体渗透性. 在连续的情形 [18, 20], 渗透性和连通性指数 e 和 t 可以取非普适值而且无需相等, 就像在三维瑞士芝士模型的情形那样. 连续模型是通过映射到具有键电导为 g 的概率密度 $\psi(g)$ 的格来进行研究的. 当 $g \rightarrow 0^+$ 时 $\psi(g)$ 为奇异时就能得到非普适行为. 但是, 对于像在海冰中那样, 由出现于对数正态分布的包裹体的交的对数正态电导分布来说, 其行为是普适的 [8]. 因此对海冰而言 $e \approx 2$.

采用临界路径分析方法估计出类似于 (13) 中的 κ_0 的海冰的渗透性缩放因子 k_0 (参见作者在 [11] 中的文章). 在广泛范围内对具有 g 的介质而言, 其总体行为是由一个临界的瓶颈电导 g_c 控制的, g_c 是使临界路径 $\{g: g \geq g_c\}$ 涵盖样本的最小的电导. 由于大多数盐水通道的直径在 1.0 mm 和 1.0 cm 之间 [23], 涵盖流体通道有最小特征半径 $r_c \approx 0.5\text{mm}$, 从而我们用管-流的结果 $r_c^2/8$ 来估计 k_0 . 因此

$$k(\phi) \sim 3(\phi - \phi_c)^2 \times 10^{-8}\text{m}^2, \quad \phi \rightarrow \phi_c^+. \quad (15)$$

在图 16 (c) 中, 正好大于 $\phi_c \approx 0.05$ [5] 的 ϕ 在 $[0.055, 0.15]$ 的现场数据与 (15) 的比较表明是很一致的. e 的最佳拟合 1.94 是从其他数据得到的. 引人注目的结果是三维情形的普适格值对于海冰为 $e \approx 2$ [20, 4] 是由于盐水包裹体的分布函数的通常对数正态结构. 我们结果的一般特性暗示诸如地球外天体上的盐水冰那样类似的多孔介质也可能展现普适的临界行为.

2.2. 层次模型

为了在所有的空隙上而不仅仅在渗流阈值附近的空隙上对 $k(\phi)$ 建模, 我们考虑全方位——某种程度, 特别是小尺度上的连通性和自相似性方面呈现出来的盐水相态的特征. 海冰微观结构的基本单位是其自身在更小尺度上具有亚结构的由盐水和冰包围的冰粒. 由在小孔空间中的盐水电导率为 σ_w 的较小球粒等包围的球状颗粒或其他形状的颗粒的层次、自相似模型曾被用来描述沉积岩的输运性质 [24]. 这种微观结构类似于图 11 (a) 所示的情形, 但是基本元素为盐水覆盖的冰球不属于这种情形. 有效介质理论给出 Archie (阿尔奇) 定律¹⁾ $\sigma = \sigma_w \phi^m$ 作为对指数 m 具有精确结果的该模型的电导率, 例如对球状

1) 以 Gus Archie 命名的表示岩石孔隙度、电导率和盐水饱和度之间的纯经验的公式.——译注

粒 $m = 3/2$. 相应的渗透性指数为 $2m$ [24], 对于上节中的 k_0 和 $m = 3/2$, 最简单的层次模型给出

$$k(\phi) = 3\phi^3 \times 10^{-8} \text{m}^2. \quad (16)$$

在图 17 (a) 中完整的现场数据集和这个理论预测进行了比较, 它们是相当一致的. 从海洋沙微观结构的显微照片看, 压实的盘状沙似乎是和海冰的细胞亚结构最类似的了. 这时 $2m \approx 3.04$, 和从我们的现场数据得到的最佳拟合 3.05 比较接近. 对于聚合方解石和枫丹白露砂岩, 一个像 (16) 那样的立方幂律与多孔性高于 10% 的渗透性数据非常一致, 其中枫丹白露砂岩的指数为 $2m \approx 3.05$.

我们的结果表明表征海冰中的液体输运和某些地壳、沉积岩的参数几乎是一样的. 这两种类型的介质都展示了在渗流阈值附近的临界行为, 对于海冰 $\phi_c \approx 5\%$, 对于聚合方解石和枫丹白露砂岩 $\phi_c \approx 4\%$. 而且, 这些岩石的多孔微观结构与海冰十分不同, 但是这两种情形其渗透率指数都落在格普适类中. 层次模型的渗透性指数 3 在这两种情形大约也是 3. 指出以下事实是很有趣的, 聚合方解石渗透率四阶量的变化在温度范围 633 K—833 K 以及围压范围 200 MPa—300 MPa 内达到. 对海冰来说, 类似的渗透性变化发生在温度范围约在 15 K 附近.

2.3. 经由海冰的流体流动的数值模型

如图 18 所说明的, 在 [26] 中我们研制了一个二维随机管道网络来模拟多孔介质中流体的流动. 对于海冰来说, 管道的横截面面积 A 是从 (9) 中的对数正态分布选取的, 其中的 $\langle A(\phi) \rangle$ 如同前面而 $\rho^2 = 1$. 该系统是与用快速多重网格法求解的电阻网络等价的. 尽管该模型与 $\phi > 0.15$ 时和实验室数据吻合得很好, 但是当 $\phi < 0.15$ 时却高估了 $k(\phi)$, 这时被忽略的渗流效应变得显著了. 为了与我们的 X 射线层析扫描数据一致, 我们引进了当 ϕ 减少时该网络分离开的随机不连通的概念. 于是这个结果如图 17 (b) 所示, 和实验室数据非常一致.

正如上面所讨论的, 在极地地区海洋和大气之间的热交换是通过海冰来实现的. 因此海冰的导热系数应该是进入气候模型的一个重要的输运系数. 我们将不讨论我们在这方面的的工作, 只是简单地提一下我们在本文中概述的研究输运的方法能应用于界定和数值计算这个重要的海冰参数. 热输运问题的一个特别有趣的方面就是当盐水流穿过海冰时, 例如当温度高于渗流阈值时的情形, 在热传导方程中有对流项. 有助于传热的速度场能改善所测得的导热系数, 这已经在南极的海冰中观察到了. 和我们有关流体渗透性方面的研究工作一起, 我们已经对这些过程作了理论上和数值上的建模工作.

2.4. 海冰的遥感: 监测气候变化的影响

由于监测地球上海冰堆的全球性质, 信息通常是从卫星、飞机和船只上的遥感平台获得的 [15, 2, 7, 6]. 作为遥感海冰问题基础的物理学涉及由 4 种成分组成的多晶复合物的电磁波的相互作用, 这 4 种成分为: 纯冰、盐水包裹体、气袋和固体盐的沉淀物 [23, 19]. 这里我们重点讨论海冰的两个主要组成部分, 即伴随有盐水包裹体的纯冰. 海冰遥感的最大挑战之一就是精确地恢复海冰堆的厚度分布. 评估全球变暖对极地地区的影响

不仅涉及对海冰范围的监测还要监测海冰的体积,这就需要知道海冰的厚度。尽管在许多应用中常常应用千兆赫频率范围内的微波,但是由于盐水相态的吸收性质和所涉及的短波长,通常微波只能穿透海冰浮冰的上部。诸如在由图 19 (a) 图示的探测冰、云和陆地海拔高度的卫星 (ICESat)¹⁾ 上的激光被用来反射冰或雪的表面,当它们与裂开的冰道中的海面反射回程比较,就能给出厚度的估计。南极和格陵兰的冰盖海拔高度的变化也能类似地得到。

近来对如图 19 (b) 所示的用低频电磁诱导仪器来估计海冰厚度 [25] 的兴趣越来越大。在兆赫范围波长为米量级的电磁场被用来探测气-冰-海洋的界面,从而估计冰层的厚度。这种技术有赖于能在比较有阻力的冰下面的海水中诱导出涡(电)流的(由一个发射线圈生成的)随时间变化的基本磁场。所产生的二级磁场由一个接受线圈感应,确定本质上由来自仪器和感应电流之间的垂直距离上集成产生的一个明显的电导率。这种数据的精确解释依赖于了解海冰的电导率,或更一般地,海冰的复电容率是怎样依赖于微观结构的特征的。例如,得到海冰厚度估计的当前的各种方法都假设电导率的单值性。但是,这个关键的参数随着给定浮冰的深度不同可以在两个量级上变化。因为典型的盐水包裹体的大小是在亚毫米的量级,利用准静态近似——其波长远比微观结构的尺度要长——可以处理海冰的电磁性态。于是可以用有效复电容率张量 ϵ^* 来表征海冰的电磁响应。对于在一特定方向给定的对角分量,实部对应于该方向极化率,或介电常数,而虚部对应于该方向的电导率。例如,入射到平坦海冰表面的波的反射系数是由海冰和在它上面的大气之间的复电容率中的错配决定的。

过去有大量的,特别是在微波区的有关估计和界定海冰的 ϵ^* 的研究工作 [2, 7]。这里我们将讨论我们的,特别是在低频范围有关界定 ϵ^* 的一些工作,尽管用到的数学是相当常规的。我们也将讨论怎样把这些界和其他信息反回来去恢复在监测海冰中流体和热的输运很重要的微观结构特征。在这方面有许多新的方法,例如,由 M. Ingham 及其同事研制的交叉钻孔层析扫描法有希望做到重建海冰电容率的数据图表,从而创建海冰自身的状态。

这里我们要评述一下由电容探头测得的几千个测量数据组成的在 50 兆赫具有 ϵ^* 众多室外箱体和现场数据的 ϵ^* 的主分量的理论界估计 [10]。特别是,要把这个低频测量和已知电容率分量为 ϵ_1 和 ϵ_2 , 而体积百分比为 p_1 和 p_2 的两相复合材料的复电容率的 Bergman-Milton 界 [7, 10] 进行比较。我们用到的这种界有两类。第 1 类只假设电容率和体积百分比已知,称为复初等界或算术和调和界。第 2 类进一步假设统计微观结构的各向同性为已知,称为复 Hashin-Shtrikman 界。

所考虑的所有数据都很好地位于复初等界内。但是,在盐水微观结构中自然会发生各向异性,就像在其首选的垂直方向上发生的情形那样 [23, 19], 在高于约为 5% 的临界盐水体积百分比时各向异性会变得更加明显,这时盐水相态渗滤了 [5]。还有,在水平平面内单个晶粒的 c -轴的首选方位角的排列一直在北极地区被观察到而且出现在北极海

1) ICESat (Ice, Cloud, and land Elevation Satellite), 此卫星是测量冰盖物质平衡, 云和气溶胶的高度, 以及土地地形和植被特征任务的地球观测系统的基准。——译注

冰中, 其电容率测量值属于这里所考虑的数据集合中的一个. 盐水微观结构中的各向异性和水平平面内复电容率的各向异性行为伴随有 c -轴的首选的排列. 比较不同的数据集与各向同性的界给出了有关海冰微观结构、其随温度的演化及其电磁性质的有趣而有用的洞察. 我们还把这些复界返回去从电容率数据得到盐水体积百分比的精确估计 [6].

2.5. 海冰复电容率的界

我们首先简单描述一下研究复合材料的有效性质的解析延拓法 [7, 10]. 设局部复电容率 $\epsilon(x)$ 是表示随机介质实现集合的适当的概率空间中 $x \in \mathbb{R}^d$ 的空间定常随机场. 我们假设 50 兆赫时, $\epsilon(x)$ 的取值在盐水中为 $\epsilon_1 = 63.3 + i1930$, 而在冰中为 $\epsilon_2 = 3.06$, 并记 $\epsilon = \epsilon_1\chi + \epsilon_2(1 - \chi)$, 其中 $\chi(x)$ 是盐水相的特征函数. 设 $E(x)$ 和 $D(x)$ 是满足本构定律 $D(x) = \epsilon(x)E(x)$ 和方程

$$\nabla \times E(x) = 0, \quad \nabla \cdot D(x) = 0, \quad (17)$$

的定常随机电场和随机位移场, 且 $\langle E(x) \rangle = e_k$, 其中 e_k 是 $k = 1, \dots, d$ 中第 k 个方向的单位向量, 而 $\langle \cdot \rangle$ 的含义是在整个 \mathbb{R}^d 上的整体平均或空间平均.

有效复电容率张量 ϵ^* 由

$$\langle D \rangle = \epsilon^* \langle E \rangle \quad (18)$$

定义. 为简单计, 我们集中讨论一个对角系数 $\epsilon^* = \epsilon_{kk}^*$. 由有效参数的齐性 $\epsilon^*(\lambda\epsilon_1, \lambda\epsilon_2) = \lambda\epsilon^*(\epsilon_1, \epsilon_2)$, ϵ^* 只依赖于比值 $h = \epsilon_1/\epsilon_2$, 我们定义 $m(h) = \epsilon^*/\epsilon_2$. $m(h)$ 的两个主要性质为: 在 h 平面上当 $h \notin (-\infty, 0]$ 时是解析的, 它把上半平面映射到上半平面, 所以它是 Herglotz (赫格洛茨) 或 Stieltjes (斯蒂尔切斯) 函数的一个例子. 解析延拓法的关键一步就是要获得 ϵ^* 的积分表示.

对函数 $F(s) = 1 - m(h)$ 来做更为方便, 其中 $s = 1/(1 - h)$, 在 s 平面上当 $s \notin [0, 1]$ 时 $F(s)$ 是解析的. 已经证明 $F(s)$ 有强有力的表示式

$$F(s) = \int_0^1 \frac{d\mu(z)}{s - z}, \quad s \notin [0, 1], \quad (19)$$

其中 μ 是 $[0, 1]$ 上的正测度 (不要和前面的粘性的记号相混). 公式 (19) 把用 s 表示的参数信息从包含在 μ (算子 Γ_χ 的谱测度, 其中 $\Gamma = \nabla(-\Delta)^{-1}\nabla \cdot$) 中有关混合几何的信息分离出来. 有关这种几何的统计假设经由 μ 的矩量 $\mu_n = \int_0^1 z^n d\mu(z)$ 融入 μ , 这可以从满足 $\mu_n = (-1)^n \langle \chi[(\Gamma\chi)^n e_k] \cdot e_k \rangle$ 的随机介质的相关函数计算得到.

ϵ^* 或 $F(s)$ 的界是通过以下几步得到的, 固定 (19) 中的 s , 在诸如只满足 $\mu_0 = p_1$ 的容许测度 μ (或容许几何) 上变化, 并在复平面上求 $F(s)$ 相应的值域. 得到了两类 ϵ^* 的界. 第一类界 R_1 只假设盐水和冰的相对体积百分比 p_1 和 $p_2 = 1 - p_1$ 已知, 满足 $\mu_0 = p_1$. 在这种情形, 测度的容许集形成一个紧凸集 \mathcal{M}_0 . 因为 (19) 是 μ 的线性泛函, 所以 F 的极值在 \mathcal{M}_0 的极值点 Dirac 点测度 $p_1\delta_z$ 处达到. F 的值位于由称为复初等界的圆弧界住的区域 R_1 内. 公式可以在 [7, 10] 中找到. 当 ϵ_1 和 ϵ_2 为实数时该区域退缩为区间 $(p_1/\epsilon_1 + p_2/\epsilon_2)^{-1} \leq \epsilon^* \leq p_1\epsilon_1 + p_2\epsilon_2$, 这就是算术 (上) 平均界和调和 (下) 平均界. 复初等界是最优的并可通过高宽比变化时被覆盖的椭球几何来达到. 如果进一步假设材料是统

计各向同性的, 即, $\epsilon_{ik}^* = \epsilon^* \delta_{ik}$, 那么也必须满足 $\mu_1 = p_1 p_2 / d$. 于是得到了较小的界区域 R_2 , 它形成了复 Hashin-Shtrikman 界. 解析延拓法的推广以及多成分介质的界将涉及多复变方法.

现在我们来比较具有这种界的海冰复电容率数据集的 3 个扩展集. 测量是在阿拉斯加州巴罗附近的楚科奇海 (14,004 个数据点)、南极洲的麦克默多海峡 (2,382 个数据点) 以及阿拉斯加州的费尔班克斯的室外箱体中的人造新海冰 (6,403 个数据点) 中进行的. 电容率的测量是通过一系列史蒂文斯水质监测系统的水探头 (hydraprobe) 来进行的. 每个水探头是一个如图 20 (a) 的放大照片所示的由中央尖头和包围它的 3 个空间等位分布且水平对齐的外尖头组成的同轴探头. 3 个外尖头持有接地电位, 频率为 50 兆赫的电压加在中央尖头上, 产生在垂直于尖头的平面内占优势的电场的圆极化波. 由这种探头测得的复电容率表示了在这个平面中 ϵ^* 的组成部分的一种平均.

在图 20 (a) 中展示了费尔班克斯的海冰箱体实验中一系列盐水空隙率 $\phi = p_1$ 值的区域 $R_1(\phi)$ 完整的数据集. 该数据已经分组为多空隙率区间 —— $[0.02, 0.03]$, $[0.03, 0.04]$, ..., $[0.08, 0.09]$ —— 各个区间用不同的颜色表示. 对应的初等界有相同的颜色. 每个区间中的所有数据位于对应的界内. 位于空隙率区间 $[0.049, 0.051]$ 标有灰色的数据对应于 [5] 中猜测的约为 5% 的渗流阈值.

指出以下事实是有用的, 如果已知材料具有包裹体分散的矩阵 - 质点结构时, 就像温度低于海冰临界温度时的海冰那样, 那么就可以得到 ϵ^* 更精确的界 [7]. 这时, μ 的支集在区间 $[s_m, s_M]$ 中, $0 < s_m < s_M < 1$. 包裹体越分散, 支集区间就越小, 从而界就越精确. 对于带有一系列界的 $\epsilon_1 = 51 + i45$ 而 $\epsilon_2 = 3.1$ 的海冰复电容率的较高频率 4.75 千兆赫 (吉赫, 红点) 的比较展示在图 20 (b) 中. 图中外面的点曲线是复算术和调和平均界, 而内部的点曲线都是 Hashin-Shtrikman 界. 实线的曲线界是矩阵 - 质点情形的界. 参数 q 度量包裹体的分散程度, 而且利用电容率数据可以把它界住.

在图 21 中我们展示了一系列在所示的空隙率区间中 50 兆赫数据的比较, 其相应的初等界为 $R_1(\phi_{\max})$ 以及各向同性界为 $R_2(\phi_{\max})$, 其中 ϕ_{\max} 是每个区间中的最大孔隙率. 电介质测量中各向异性性的发展, 或当盐水体积增长超过 5% 时的各向同性界的破坏和不断增加的连通和垂直拉长的盐水微观结构是一致的. 如果电场在垂直方向具有指向优势, 那么数据中的这种行为可能很严重.

2.6. 结构参数的逆界

逆界的目的在于利用海冰的电磁响应数据来恢复海冰的结构参数的信息, 特别是海冰的盐水体积百分比 ϕ , 或孔隙率. 如前面提到的, 由海冰相态关系的半经验方法导出的结论, 孔隙率 ϕ 可以写作块冰盐度 S 和温度 T 的函数. 例如, 给定盐度信息, 孔隙率的逆转给出了温度的信息. 我们在这里采用的逆方法 [6] 给出盐水体积百分比 ϕ 的不确定性区间. 给定复电容率 ϵ^* 的一个观察值, 直到 ϵ^* 的值碰到前节描述的区域 R_1 的边界之前 ϕ 都是增加的, 然后减少直到碰到另一个边界. 这个过程给出了 ϕ 值的范围 $\phi_1^l \leq \phi \leq \phi_1^u$,

$$\phi_1^l = |f|^2 \frac{Im(\bar{s})}{Im(f)}, \quad \phi_1^u = 1 - \frac{|g|^2 Im(\bar{t})}{Im(g)}, \quad (20)$$

其中 f 是 $F(s)$ 的已知值, 而 g 是 $G(t) = 1 - \epsilon^*/\epsilon_1$, $t = 1 - s$ 的已知值. 如果进一步假设材料是统计各向同性的, 那么可以得到二阶逆界 $\phi_2^l \leq \phi \leq \phi_2^u$. 我们要提一下由 E. Cherkaev 及其同事在研制从冰块性质的测量来重建 μ 的方法方面的最新进展. 这种方法在获得海冰微观结构更详细的信息方面大概会有用处, 就像它们已经在骨骼微观结构和监测骨质疏松症方面有用一样 [1].

图 22 (a) 把海冰箱体实验中作为时间 t 的函数的真实盐水孔隙率 $\phi(t)$ 和下逆界 ϕ_1^l 做了比较. 由于材料的极度差异性, 相应的上界相当大, 眼下几乎不能提供什么信息. 我们知道实际数据位于下界之上, 而重建下界的变化随实际孔隙率的变化而变化. 在图 22 (b) 中, 巴罗数据中的实际盐水孔隙率与下逆界 ϕ_1^l 和 ϕ_2^l 做了比较. 逆界得到遵从, $\phi(t)$ 的变化在重建中得到反映.

3. 南极海冰中流体和电输运的测量

在 2007 年的 9 月和 10 月期间, Adam Gully (犹他大学数学系学生) 和我参加了一个 6 周的到南极洲海冰堆的航海之旅. 在东南极洲离岸海面上进行的海冰物理学和生态系统实验 (The Sea Ice Physics and Ecosystem eXperiment (SIPEX)) 是对 2007—2008 国际极地年活动的澳大利亚资助项目的主要组成部分. 一项广泛的科学研究计划是由南极气候与生态系统合作研究中心 (Antarctic Climate & Ecosystems Cooperative Research Centre (ACE CRC)) 和澳大利亚南极局 (Australian Antarctic Division) 共同领导的由来自 10 个国家的 45 位科学家实施的. 该计划的实施得到了有助于研制更精确的全球气候模型而且也有助于我们了解极地生态系统可以怎样对未来的气候变化作出响应的有价值的信息.

研究人员利用了包括机载激光测高仪、雷达和一辆冰下遥控车 (remotely operated vehicle (ROV)) 在内的一系列尖端技术. 在南极洲前所未有地第一次直升飞机跟踪海冰的飞行飞了几千公里, 采集了大量有关海面上的雪和冰面高度的信息. 由采自冰芯和直接在冰上做的其他研究工作的信息补充了直升飞机采集的数据. 这种组合信息将有助于验证卫星测高数据, 这些数据最终被用于监测南极洲周围海冰厚度的变化.

生物学家把经典的取冰芯技术和遥控车结合起来研究海冰的下侧, 画出海冰藻类的分布图. 遥控车的观察结果表明有大量的磷虾生活在海冰下侧和浮冰间的裂隙中. 其他的科学家在冰藻类的生理学和海冰的生物地球化学进行研究, 以更好地了解从冬季到夏季的转移期间南极海冰带中的各种过程. 海洋学家研究了海冰下面大量水的性质和水流, 他们的发现与预期的相反, 海冰飘移的模式似乎更多的是受洋流而不是风的影响.

Adam Gully 和我结合我们的数学建模工作进行了第一年海冰的流体和电输运性质的现场研究. 我们做了第一个南极堆冰流体渗透率的测量以及对抽取的海冰块做了流体示踪试验. 与这些流体测量密切相关, 我们采用经借助于一组 Wenner (温纳) 电极阵列的表面阻抗层析扫描 (成像) 方法重建了海冰电导率的分布图. 我们还修改了我们的温纳配置来直接测量所抽取的冰芯的垂直电导率分量——对海冰来说这是第一次. (下转 27 页)

性质起着重要的作用. 这里我们再提到一种. 我们说函数 f 是强混合的, 如果对所有的可测集 A 和 B 成立

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A \cap f^{-n}B) = \mu(A)\mu(B).$$

这意味着, 在长时间内, f 把 B 同等均匀地分布到 $[0, 1]$ 中去. 强混合蕴含遍历性, 但是并不是所有的遍历函数都是强混合的. 本文的例子中有一个遍历函数的例子, 它在勒贝格测度下是强混合的, 而其它的例子并非如此. 你是否能想出这是哪个例子? 答案可在参考文献 [9, 15] 中找到.

致谢、参考文献 (略)

(冯贝叶 译 王世坤 校)

(上接 53 页) 这些测量就能把流体渗透率数据和海冰的电性质直接关联起来. 我们和这次航海之旅的负责人 Tony Worby 一起做的有关电学方面的工作是在和稍后进行的与之相关的由日本海冰科学家 Kazu Tateyama 的电磁诱导厚度测量完全一样的地点和配置下实施的. 我们仍在分析所得数据和准备发表的过程中, 因此, 我们的结果将在别处呈现.

4. 结论以及海冰建模中的未来挑战

就海冰建模在气候中的应用来说还有众多的挑战. 诸如雪-冰的形成、反照率的演变、覆盖在冰盖上的雪堆的许多方面以及冰的强度和动态驱动的冰的隆起和漂流的参数化等许多重要的过程只得到了粗略的表示. 图 25 展示了有关夏季北极海冰堆退缩的可怕的模型预测, 以及为了在我们对海冰中重要过程不断增长的知识 and 海冰堆是怎样与海洋和大气相互作用的了解的基础上去改善这些模型的预测方面, 还有许多工作要做.

对于海冰地球物理学和生物学中很多问题来说, 我们有关流体输运方面的研究工作处于中心地位, 但是仍然缺少基本的研究. 我们已经对海冰的流体渗透率及其对随温度变化的微观结构演化的依赖性发展了一套统一的理论. 该理论与估计有效复合材料的行以及紧紧抓住实验室和北极现场数据联系在一起. 我们也已经在海冰微观结构的计算机层析扫描成像——量化了在亚颗粒尺度上空隙连通性和形态学的热演化——方面取得了进展, 相应地对理论进展产生了影响. 我们有关海冰电性质的研究有助于为遥感新技术提供理论基础, 特别是有助于监测气候变化的影响.

我们的研究表明怎样把微观尺度的结构和宏观的输运性质的信息联系起来, 相应地这也限制了全球-尺度的气候学和生物学过程的重要性. 这些结果根据孔隙率 ϕ 以及状态变量 T 和 S 来解释穿过海冰的流体输运简单的参数化, 并有助于改善气候、生物地球化学和地球物理学模型中海冰的表示. 未来的研究必须考察这些结论会怎样影响到大尺度模型中对穿过海冰的热和流体流动的模拟, 当前这些模型都过分简化了这些过程.

致谢、参考文献 (略)

(叶其孝 译 吴庆宝 赵振江 校)