⑦ 335-337

矩阵. 若当分解定理
若当标准型

矩阵 Jordan 分解定理的一个简单证明

Gohbe., I

Israel Gohberg and Seymour Goldberg

叶顶锋

O151.21

关于复方阵的 Jordan 标准型的存在性有好几个证明. 对这些证明的讨论和有关参考, 读者可参阅 Väliaho 的文章 [1].

在这个注记里, 我们给出一个新的简单且短的关于复数域上有限维向量空间中线性算子的 Jordan 分解存在性的证明. 我们的证明基于这样一个算法, 该算法可构造出 n 维空间上的线性算子 A 的 Jordan 标准形, 如果 A 限制在一个 $n-1$ 维不变子空间上的 Jordan 标准型已知.

设 A 是复数域上有限维向量空间 V 上的一个线性算子. 回想 V 的一个子空间被称做 *循环的* 若它具有形式

$$\operatorname{span}\{\varphi, (A-\lambda)\varphi, \cdots, (A-\lambda)^{m-1}\varphi\}.$$

其中 $(A-\lambda)^{m-1}\varphi \neq 0$ 而 $(A-\lambda)^m\varphi = 0$. 这样的子空间是 A- 不变的且有维数 m. 这可从如下事实立即得出: 如果对某个 $r(r=0,1,\cdots,m-1)$

$$c_r(A-\lambda)^r\varphi + \cdots + c_{m-1}(A-\lambda)^{m-1}\varphi = 0 \text{ 和 } c_r \neq 0,$$

那么在等式两边作用 $(A-\lambda)^{m-r-1}$ 后, 我们有

$$c_r(A-\lambda)^{m-1}\varphi = 0.$$

证明的思路: 有关讨论可化为两种情形. 在一种情形下, 存在 V 的一个 $n-1$ 维 A- 不变子空间 F 之外的一个向量 g 使得 $Ag=0$. 此时 $V = F \oplus \operatorname{span}\{g\}$, 答案可清楚地从归纳假设得到. 困难的情形是这样的 g 不存在. 结果是 A 限制在 F 上的一个循环子空间被 A 在 V 上的一个维数增加 1 的循环子空间取代, 而另外的循环子空间保持不变.

观察 设 $W = H \oplus \operatorname{span}\{\varphi, A\varphi, \cdots, A^{m-1}\varphi\}$, 其中 $A^{m-1}\varphi \neq 0, A^m\varphi = 0$, H 是 V 的 A- 不变子空间且 $A^m H = \{0\}$. 给定 $h \in H$, 令 $\varphi' = \varphi + h$. 那么

$$W = H \oplus \operatorname{span}\{\varphi', A\varphi', \cdots, A^{m-1}\varphi'\},$$

原题: A Simple Proof of the Jordan Decomposition Theorem for Matrices. 译自: *The American Mathematical Monthly*, Vol. 103, No. 2, 1996, pp. 157–159.

且 $A^{m-1}\varphi' \neq 0$, $A^m\varphi' = 0$. 这个论断可从以下事实立得. 如果 φ'、$A\varphi'$, $\cdots$、$A^{m-1}\varphi'$ 的某个线性组合属于 H, 则对 $\varphi, A\varphi, \cdots$、$A^{m-1}\varphi$ 的同样的线性组合也属于 H.

分解定理. 设 $V \neq 0$ 是复数域上有限维向量空间, A 是 V 上的线性算子. 那么 V 可表示为循环子空间的直和.

证: 证明按对 $\dim V$ 的归纳进行. 若 $\dim V = 1$, 分解是平凡的. 假设对所有 $n-1$ 维空间分解均成立. 设 $\dim V = n$. 首先我们假定 A 是奇异的. A 的值域 $R(A)$ 至多具有维数 $n-1$. 令 F 是 V 的包含 $R(A)$ 的一个 $n-1$ 维子空间. 由于 $AF \subset R(A) \subset F$, 归纳假设保证了 F 是如下一些循环子空间的直和:

$$M_j = \mathrm{span}\{\varphi_j, (A-\lambda_j)\varphi_j, \cdots, (A-\lambda_j)^{m_j-1}\varphi_j\}, \quad 1 \leq j \leq k.$$

下标的选取使得 $\dim M_j \leq \dim M_{j+1}, 1 \leq j \leq k-1$. 定义 $S = \{j | \lambda_j = 0\}$. 取 $g \notin F$. 我们断言 Ag 具有形式: 若 $S \neq \emptyset$. 则

$$Ag = \sum_{j \in S} \alpha_j \varphi_j + Ah, \qquad h \in F. \tag{1}$$

若 $S = \emptyset$. 则 $Ag = Ah$. 为验证 (1), 注意到 $Ag \in R(A) \subset F$, 所以 Ag 是形如 $(A-\lambda_j)^q\varphi_j, 0 \leq q \leq m_j - 1, 1 \leq j \leq k$ 的一些向量的线性组合. 对 $\lambda_j = 0$, 向量 $A\varphi_j, \cdots, A^{m-1}\varphi_j$ 在 $A(F)$ 中. 若 $\lambda_j \neq 0$, 则由 $(A-\lambda_j)^{m_j}\varphi_j = 0$ 和二项展开我们得到 φ_j 具有形式 $\sum_{m=1}^{m_j} b_m A^m \varphi_j$ 这样所有向量 $(A-\lambda_j)^q\varphi_j$ 属于 $A(F)$、所以 (1) 式成立.

令 $g_1 = g - h$, 其中 h 由 (1) 式给出. 由于 $g \notin F, h \in F$, 有 $g_1 \notin F$、再由 (1) 式得

$$Ag_1 = \sum_{j \in S} \alpha_j \varphi_j \tag{2}$$

若 $Ag_1 = 0$, 则 $\mathrm{span}\{g_1\}$ 是循环的, 且 $V = F \oplus \mathrm{span}\{g_1\}$. 设 $Ag_1 \neq 0$. 令 p 是 (2) 式中最大的整数 j 使得 $\alpha_j \neq 0$. 那么对 $\tilde{g} = (1/\alpha_p)g_1$,

$$A\tilde{g} = \varphi_p + \sum_{j \in S, j < p} \frac{\alpha_j}{\alpha_p}\varphi_j. \tag{3}$$

定义

$$H = \sum_{j \in S, j < p} \oplus M_j.$$

子空间 H 是 A- 不变的, 且由 $\dim M_j \leq \dim M_p, j < p$, 推出 $A^{m_p}(H) = \{0\}$. 这样, 以上观察应用于 $H \oplus M_p$ 和式 (3), 我们有

$$H \oplus M_p = H \oplus \mathrm{span}\{A\tilde{g}, \cdots, A^{m_p}\tilde{g}\}.$$

所以

$$F = \sum_{j \neq p} \oplus M_j \oplus \mathrm{span}\{A\tilde{g}, \cdots, A^{m_p}\tilde{g}\}.$$

由于 $\tilde{g} \notin F$, 因而

$$V = F \oplus \mathrm{span}\{\tilde{g}\} = \sum_{j \neq p} \oplus M_j \oplus \mathrm{span}\{\tilde{g}, A\tilde{g}, \cdots, A^{m_p}\tilde{g}\}.$$

这就在 A 奇异的假设下完成了定理的证明.

对一般情形，令 μ 是 A 的一个特征值，则 $A-\mu$ 是奇异的. 以上结果应用于 $A-\mu$, 就证明了 V 是对于 A 的循环子空间的直和. Q.E.D.

这个证明显示了如何由 A 在一个 $n-1$ 维不变子空间 F 上的 Jordan 标准扩展而得 A 在一个包含 F 的 n 维空间 V 上的 Jordan 标准型.

注意该证明同样有效，如果复数纯量改换为一个代数封闭域.

示例. 令

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

那么

$$Ae_2 = e_1, \ Ae_1 = 0, \ Ae_4 = e_3, \ Ae_3 = 0.$$

取

$$F = \mathrm{span}\{e_1, e_2, e_3, e_4\} = \mathrm{span}\{e_2, Ae_2\} \oplus \mathrm{span}\{e_4, Ae_4\}.$$

现在 $e_5 \notin F$, 且

$$Ae_5 = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4 = be_2 + de_4 + A(ae_2 + ce_4).$$

若 $d \neq 0$, 取 $\tilde{g} = (e_5 - ae_2 - ce_4)/d$. 那么 $A\tilde{g} = e_4 + (b/d)e_2$, $A^2\tilde{g} = e_3 + (b/d)e_1$, 并且

$$\mathbb{C}^5 = \mathrm{span}\{e_2, Ae_2\} \oplus \mathrm{span}\{\tilde{g}, A\tilde{g}, A^2\tilde{g}\}.$$

若 $d = 0$ 且 $b \neq 0$, 取 $\tilde{g} = (e_5 - ae_2 - ce_4)/b$. 那么 $A\tilde{g} = e_2, Ae_2 = e_1$, 所以

$$\mathbb{C}^5 = \mathrm{span}\{\tilde{g}, A\tilde{g}, A^2\tilde{g}\} \oplus \mathrm{span}\{e_4, Ae_4\}.$$

最后，若 $d = b = 0$, 取 $\tilde{g} = e_5 - ae_2 - ce_4$. 则 $A\tilde{g} = 0$, 且

$$\mathbb{C}^5 = \mathrm{span}\{e_2, Ae_2\} \oplus \mathrm{span}\{e_4, Ae_4\} \oplus \mathrm{span}\{\tilde{g}\}.$$

参 考 文 献

[1] Välıaho, H., An elementary approach to the Jordan form of a matrix, *Amer. Math. Monthly* 93 (1986), 711–714.

(叶顶锋 译 戴宗铎 校)