群表示，调和分析，欧拉

Langlands.

进展简介

(3)

25-32

群表示与调和分析
—— 从 Euler 到 Langlands(上)

O152.6

O177.5

Anthony W. Knapp

Knapp, AW 冯绪宁

群表示与调和分析在诸如数论，概率论与数学物理这些迥然不同的学科中都起着关键作用. Langlands 的一个表示论定理在 Wiles 的费马大定理的证明中是必不可少的组成部分，表示论为预言夸克的存在提供了框架. 什么是群表示？为什么它们能如此广泛地渗透到数学中？它们的理论又起源于何处呢？

Euler 和他的乘积展开

象很多现代数学一样，表示论和调和分析领域的某些根基就在 Euler 的工作中. 1739 年， Euler 得到了 Weil[4] 称之为 "重大发现" 的结果，即从我们现在所称的 Riemann ζ 函数的级数 $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ 出发，他认识到这个和能够写成为一个乘积

$$\zeta(s)=\prod_{p\ 素}\frac{1}{1-p^{-s}}. \tag{1}$$

这里 $s>1$. 事实上，若 (1) 的右方的每个因子 $(1-p^{-s})^{-1}$ 被展为一个几何级数 $1+p^{-s}+p^{-2s}+\cdots$、则对于 $p\le N$ 的那些因子的乘积就等于那些能被小于等于 N 的素数除得尽的 n 所对应的项 $\frac{1}{n^s}$ 的和；于是通过取极限就得到 (1), Euler 很清楚，$\zeta(s)$ 大于积分

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^s}=\frac{1}{s-1}.$$

当 s 向 1 递减时，上述表达式是无界的；但乘积 (1) 不可能是无界的，除非它含有无穷多个因子. 因此 Euler 由 (1) 得到了 Euclid 关于存在无穷多个素数这一定理的一个新证明. 事实上， Euler 注意到 (1) 蕴含了更好的定理，即 $\sum 1/p$ 是发散的.

后来， Euler 从这个证明继续往前走，导出了存在无穷多个形如 $4n+1$ 的素数和无穷多个形如 $4n+3$ 的素数. 调和分析的历史从此真正开始了. 为了理解为什么

原题： Group Representation and Harmonic Analysis from Euler to Langlands, Part I. 译自： *Notices of the AMS,* Vol. 43(1996), No. 4, pp. 410–415.

前面的分析并不能导出后两个结论，更仔细地看看 $\sum 1/p$ 在上面的推理中是如何引进的是有益的．考虑取指数的函数的级数展开，对 $0<x<1$ 可得

$$\log(1+x)<x<\log\frac{1}{1-x},$$

而且容易看出当 $0<x\le\frac{1}{2}$ 时，上式右方不大于左方的 2 倍，因此从 (1) 可得当 s 向 1 递减时，有

$$\log\zeta(x)=\sum_{p\text{ 素}}\frac{1}{p^s}+\text{有界的项}. \tag{2}$$

同时，对级数 $\zeta(s)$ 乘以 2^{-s} 就再次得到这个级数中的偶数项，从而有

$$(1-\frac{1}{2^s})\zeta(s)=1+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}+\cdots \tag{3a}$$

和

$$(1-\frac{2}{2^s})\zeta(s)=1-\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}-\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}-\cdots. \tag{3b}$$

(3b) 的左方为 $(s-1)\zeta(s)$ 乘以一个当 s 趋于 1 时趋于 $\log 2$ 的因子． Euler 知道 Leibniz 关于收敛性的检验法，并能注意到 (3b) 的右方的级数当 $s>0$ 时是收敛的，并且其和是正的．由此可知 $\zeta(s)$ 在 $s=1$ 附近的值是 $(s-1)^{-1}$ 与一个具有有限非零极限的函数之乘积．将此结果与 (2) 对照，便有当 s 递减趋于 1 时，

$$\sum_{p\text{ 素}}\frac{1}{p^s}=\log\frac{1}{s-1}+\text{有界的项}. \tag{4}$$

在处理模 4 同余于 1 或 3 的素数时，我们可试验用以下的和来代替前面的 $1/p^s$ 对所有的素数求和：

$$\sum_{p\equiv1\bmod 4}\frac{1}{p^s}\quad\text{或}\quad\sum_{p\equiv3\bmod 4}\frac{1}{p^s}, \tag{5}$$

看看情况会怎么样．结果是，相应于 $(1-p^s)^{-1}$ 的积所得到的和的展开式并未带来任何容易处理之处． Euler 的关键的新思想是考虑 (5) 中这两项的和与差，而不是分开来单独处理它们，只是到最后才重新得到 (5) 中的这两项．这正是对于二元素群的羽翼丰满的调和分析．

调和分析的本质在于将复杂的表达式分解为能反映群作用 (当存在这种群时) 的结构的一个个分项．这样做的好处是使某些困难之处变得易于处理．以前面的推理的模型， Euler 又发现了两个有乘积表示的易于讨论的级数，第一个是

$$(1-\frac{1}{2^s})\zeta(s)=1+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi^+(n)}{n^s}=\prod_{p\text{ 素}}\frac{1}{1-\chi^+(p)p^{-s}}, \tag{6}$$

其中 $\chi^+(n)$ 对于偶数 n 为 0, 对于奇数 n 为 1. 第二个级数是

$$\begin{aligned} L(s) &= 1-\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}-\frac{1}{7^s}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi^-(n)}{n^s} \\ &= \prod_{p\ \text{素}}\frac{1}{1-\chi^-(p)p^{-s}}, \end{aligned} \tag{7}$$

其中 $\chi^-(n)$ 对于偶数 n 为 0, 对于模 4 同余于 1 的 n 为 1, 对于模 4 同余于 3 的 n 为 -1. $1/(1-\chi^-(p)p^{-s})$ 的对数近似等于 $\chi^-(p)p^{-s}$, 即使 $\chi^-(p)$ 为负数时也如此. 对乘积公式 (6) 取对数 (或简单地沿用 (4) 的结论) 可知，当 s 递减趋于 1 时有

$$(5)\text{中的两项之和} = \log\frac{1}{s-1}+\text{有界的项}. \tag{8}$$

同时，对级数 (7) 应用 Leibniz 的判别法可证明：当 $s>0$ 时 $L(s)$ 收敛，特别当 $s=1$ 时 $L(s)$ 有限. 此外，经检验可得 $L(1)>0$. 于是经过对乘积公式 (7) 取对数可知，当 s 递减趋于 1 时有

$$(5)\text{中两项之差} = \text{有界的项}. \tag{9}$$

比较 (8) 和 (9) 可知， (5) 中每个级数当 s 递减趋于 1 时都是无界的，因此有无穷多个素数模 4 同余于 1, 也有无穷多个素数模 4 同余于 3.

群在 Euler 乘积中的作用

群在哪里？它的作用是什么？两个函数 χ^+ 和 χ^-(两者中的任一个我们都可称为 χ) 有一个性质使得 (6) 与 (7) 中的和仍有乘积表示，那就是它们对一切正整数 m 和 n, 都有 $\chi(mn)=\chi(m)\chi(n)$. 这样的函数现称为 mod 4 的 Dirichlet 特征. 我们可以将 χ^+ 和 χ^- 考虑为作用于整数模 4 并与 4 互素的乘法群 $\{1,3\}$ 上的函数的提升，它们作用于全体整数上，只要在与 4 不互素的整数上都取值为 0. 这两个函数在群 $\{1,3\}$ 上的作用分别为

$$w^+(1)=w^+(3)=+1$$

和

$$w^-(1)=1,\quad w^-(3)=-1.$$

在这种两个元素的群上这些函数 w 是乘法特征，即是到非零复数乘法群上的同态，这也是该群仅有的乘法特征. 它们是在该二元群上的全体复值函数的复向量空间的基底. 实质上， Euler 研究了两个函数，即该群中每个一元素集合的特征函数：

$$I_1(1)=1,\quad I_2(3)=0$$

和

$$I_3(1)=0,\quad I_3(3)=1.$$

在 (5) 中考虑的级数可以写为

$$\sum_{p\ \text{素}} \frac{I_1(p)}{p^s} \quad 和 \quad \sum_{p\ \text{素}} \frac{I_3(p)}{p^s}.$$

Euler 的证明之所以能奏效是由于他将函数 I_1, I_3 用乘法特征的基表示出来：

$$I_1 = \frac{1}{2}(w^+ + w^-) \quad 和 \quad I_3 = \frac{1}{2}(w^+ - w^-),$$

并成功地对展开式中单独的项

$$\sum_{p\ \text{素}} \frac{w^+(p)}{p^s} \quad 和 \quad \sum_{p\ \text{素}} \frac{w^-(p)}{p^s}$$

进行了计算，并用下式重新表示其函数

$$w^+ = I_1 + I_3 \quad 和 \quad w^- = I_1 - I_3.$$

这就是调和分析的处理方法.

虽然在这项工作中调和分析可被看作是平凡的线性代数，但重要之点在于这种特别的线性代数是发挥群结构的优越性的媒介. 这里的例子对于理解基本原理而言，在某种程度上显得过于简单. 但事实上，这比 Dirichlet 完全理解并证明他自己的关于算术级数中有关素数的定理要早一百多年.

对 Euler 的上述工作，人们绝不是只有历史方面的兴趣. 它是现今的大量研究，包括从 Langlands 纲领到 Fermat 大定理引出的表示理论在内的代数数论问题的直接的鼻祖. 此外，它还解释了一个原则，即尽管调和分析可能位于某个问题求解的核心，而许多天才的思想可能产生于问题的陈述与调和分析的应用之间的不同层次上.

从 1737 到 1807 年左右，乘法特征在数学中起的作用是插曲性的，不是主要的. 1750 年 Cramer 引入了行列式，定义了置换的符号并证明了现在的所谓的 Cramer 法则. 置换的符号是 n 个字母的置换群的一个乘法特征，而行列式则是固定大小的非奇异矩阵的乘法特征. 但这些特征的调和分析在 Cramer 的工作中没有起作用. Gauss 在推广 Euler 用二元二次型表示整数的工作中引入了他自己的特征概念，粗略地说它对应于我们现在所谓的 Dirichlet 特征，但其中仍没有涉及调和分析.

Fourier 级数

在群表示论学科方面的下一个重大的发展是 Fourier 级数这一课题. 这里的描述取自 Grattan-Guinness 的 [1]. 1747 年， d'Alembert 提出了他关于弦振动问题的解；他发现了微分方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

并给定了初始条件，然后得到了解 $y=\frac{1}{2}(f(x+ct)+f(x-ct))$. 虽然 Euler 在 1748 年考虑过三角函数作为该方程解的例子，但直到 1750 年 d'Alembert 将变量分离方法引入解偏微分方程之前，没有一个人预见到这类函数具有任何普遍性. Daniel Bernoulli 从哲学上评论说三角正弦级数已足够一般到能表示出所有的解. 但 Euler 用另一套哲学理论拒绝了他的结论. 18 世纪的其余的人，在三角级数的研究上几乎没有什么进展. 的确，在 1777 年 Euler 发现了 Fourier 系数公式的无拘无束的推导方法，包括以正弦和余弦乘三角展开式及逐项积分，但这项工作直至 1798 年才发表. 1799 年，Parseval 发表了以积分表达的三角级数系数的平方和方式；他的公式相当地接近如今所称的 Parseval 公式.

然后，Fourier 登台了. 他的兴趣在于热扩散问题. Fourier 导出了热方程，对可作分离变量处理的各种情形作了系统的研究；他对弦振动问题有独到的洞察力；他还引入了我们现在熟知的 Foruier 级数，并提出某些不连续函数用这种级数来表达. 上述内容都包含在 1807 年他提交的同一篇文章中. 此文一出世就遭到了反对，特别是来自 Lagrange 和 Poisson 的反对，因而其出版受阻. 它遭反对的主要原因是：Fourier 的结果与当时流行的对函数的直觉认识相矛盾. 那时，函数都被假定为具有代数的特点. 如果三角级数 $\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\cdots$ 在区间 $(-\pi,\pi)$ 中求和为 $\frac{1}{2}x$ 这样的函数，那么该极限的代数特点将要求它处处等于 $\frac{1}{2}x$. 这样，该极限将不是周期函数，这是一个矛盾. 1811 年，Fourier 递交了修改稿，其中含有 1807 年文章的内容以及 Fourier 变换的反演公式，这次他赢得了一项奖. 但修改稿仍被拒绝出版. Fourier 的工作最后于 1822 年出现在他的名著《热的分析理论》(Théorie analytique de la chaleur) 中.

弦振动问题的解含有 Fourier 正弦级数. 这里没有涉及对称群，这项工作没有预示带有群表示的调和分析. 但是这个例子对始于 1836 年的 Sturm-Liouville 理论有推动作用. 类似地，Fourier 关于热方程的理论也没有自动地将群带进来. 群仅仅会在具有某些对称性的例子中才会出现，这样的例子之一是圆环，它具有圆的对称性. 在圆环的情形，Fourier 导出了即包括正弦又包括余弦的级数，今天我们通常将它写为复指数形式：

$$f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{inx},\tag{10}$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx.\tag{11}$$

存在于这些公式背后的群是圆群 $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. 函数 e^{inx} 恰是这个群的 (连续的) 乘法特征. (10) 式暗示我们 $f(x)$ 可按这些函数展开. Fourier 很为一种事忧虑，即今日所谓的正交集 $\{e^{inx}\}$ 的 L^2- 完备性问题，为此他宁肯用一个比 (11) 复杂得多的方法去得到 C_n. Fourier 通过级数演算得到了 Parseval 公式

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|C_n|^2,\tag{12}$$

显然他没有把他的推理的正确性跟同样的完备性问题联系起来.

Wiener 关于调和分析的观点

偏微分方程经变量分离后，展开式 (10) 就登场了. 线性常微分算子 D 作用于 $f(x)$ 上，其结果为 0. 这算子与圆群上的平移 $\tau_x(y)=x+y$ 可交换. 设 w 是一乘法特征，则 $(\tau_x w)(y)=w(x+y)=w(x)w(y)$, 我们可计算一下

$$\begin{aligned}Dw(x+y)&=(\tau_x Dw)(y)=(D\tau_x w)(y)\\&=(Dw(x)w)(y)=(Dw)(y)w(x).\end{aligned}$$

令 $y=0$, 可知 Dw 是 w 的倍数. 换句话说，微分算子 D 将每个乘法特征映为它自身的倍数，对 $f(x)$ 的影响是使它的 Fourier 系数乘以各种常数. 结果是逐项皆为 0, 于是我们就得到关于 $f(x)$ 的必要与充分条件.

Fourier 的工作为该原则提供的第二个说明是，虽然调和分析可能处于问题求解的核心地位，但许多天才的思想可能产生于从问题的陈述到调和分析的应用之间的不同层次上.

对于 20 世纪的 Wiener 而言 [5], 上述处理常系数微分算子的方法成为调和分析的基本素材. 我们有一个线性算子 T, 将周期函数映为周期函数，并与平移可交换. 算子 T 必将 e^{inx} 映为它的倍数 $b_n e^{inx}$, 由线性性可得三角多项式的公式

$$T\left(\sum C_n e^{inx}\right)=\sum b_n C_n e^{inx}. \tag{13}$$

在对 T 的适当的有界性条件或闭图条件下，(13) 可扩展到在 T 的定义域上的所有函数. 这样，Fourier 级数提供了一种理解可以跟平移交换的线性算子的工具，也就是说这些算子相对于平移群是对称的.

乘法特征的进一步应用

跟乘法特征有关的调和分析在 19 世纪余下的时间里还有另一些发展. Cauchy 在研究水波的期间开始讨论偏微分方程的积分解，并于 1817 年发表了反演公式

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty g(q)\cos qx\,dq$$

和

$$g(q)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos xq\,dx.$$

不知道 Cauchy 是否见到过 Fourier1811 年的手稿，那里有关于 Fourier 变换的 Fourier 反演公式. 用今天的记号，Fourier 变换和反演公式通常写为

$$\hat{f}(y)=\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-2\pi ixy}\,dx \tag{14a}$$

和

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) e^{2\pi i x y}\, dy. \tag{14b}$$

19 世纪在 Fourier 变换方面进一步的成就包括 Poisson 求和公式和对 Mellin 变换的研究. 前者从形式上将 (14) 中的两个函数联系起来：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n);$$

后者即是 Fourier 变换或 Fourier-Laplace 变换用乘法正实数代替加法实数后写成的另一种形式*. 在重要的应用方面，Riemann 在他讨论 ζ 函数的函数方程的一处证明中使用了 Poisson 求和公式 (函数方程本身是 Euler 提出的). 但关于 Fourier 变换本身的更严格的理论研究则必须等到 20 世纪 Lebesgue 积分的创立.

1840 年，Dirichlet 发表了他关于算术级数的定理：$an+b$, 其中 a 和 b 互素，当 n 取遍正整数时，$an+b$ 中包含有无穷多个素数. 这个证明是 Euler 关于 $4n+1, 4n+3$ 的论证的推广，只要将与 4 互素的乘法群上的乘法特征用与 a 互素的乘法群 G 上的乘法特征来代替. 每个 w 对应于一个模 a 的 Dirichlet 特征 χ、它定义为 w 到整数上的提升，在与 a 不互素的数上定义为 0. 代替函数 (6) 和 (7) 的是 Dirichlet L- 函数

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_{p\ 素} \frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}}.$$

对每个模 a 的 Dirichlet 特征都有一个 L- 函数. 在这种类型的乘法特征下的反演公式中明显地含有调和分析：若 f 是 G 上的复值函数，则

$$f(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{w} \Big(\sum_{y\in G} f(y)\overline{w(y)}\Big) w(x). \tag{15}$$

在这一证明中的另一个关键的组成部分，调和分析也派上了用场，尽管不那么明显. Euler 对 $a=4$ 的证明用到了 $L(1)\neq 0$;Dirichlet 则必须证明在 $s=1$ 处，所有的 $L(s,\chi)$ 全不为 0. 这个断言的一种证明办法是讨论对固定的 a 的所有 L- 函数的乘积，并与由有理数跟 $e^{2\pi i/a}$ 生成的域中的 ζ 函数有关；调和分析包含在这种等同性之中. $L(s,\chi)$ 在 $s=1$ 处的非零性，可从在上述域中的 ζ 函数在 $s=1$ 处有一个极点的这一事实得出.

后来，Dedekind 研究了在数域 (有理数的有限扩张) 的代数整数环中的 (有限交换) 理想类群的乘法特征；1882 年，Weber 对任一有限交换群 G 引入了乘法特征.

* Fourier 变换形如 $\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-itx} dx$; Fourier-Laplace 变换指在上式中以复数 $\zeta = t + i\sigma$ 代替 t 所得的变换, 即 $F(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\zeta x} dx$; Mellin 变换则是指 $F(s) = \int_0^{\infty} f(x) x^{s-1} dx$, $s = k + it$, $f(x)x^{k-1} \in L_1(0,\infty)$. 函数空间 L_p 中的 Mellin 变换的理论可与 Fourier 变换的情形平行地论述 —— 译注.

G 的乘法特征作成群 $\hat{G}$.$\hat{G}$ 中的乘法是逐点上值的相乘. 不同的乘法特征在下述意义下是正交的:

$$\sum_{x\in G} w(x)\overline{w'(x)} = 0$$

同时反演公式 (15) 也成立.

乘法特征在讨论非交换的对称群方面无所帮助. 乘法特征必须将每个换位子 $xyx^{-1}y^{-1}$ 都映为 1. 对于一个由它的换位子生成的群, 例如非交换单群, 将得出 1 是仅有的乘法特征. 为了使调和分析能对非交换群有用, 人们引入了乘法特征的多维推广, 即群表示. 在本文第 II 部分, 我们将仔细考查群表示及它们在调和分析中的作用.

参考文献

[1] I. Grattan-Guinness, *Joseph Fourier*. 1768–1830, MIT Press, Cambridge, MA, 1972.

[2] K. I. Gross, On the evolution of noncommutative harmonic analysis, *Amer. Math. Monthly*, 85(1978), 525–548.

[3] G. W. Mackey, Harmonic analysis as the exploitation of symmetry—a historical survey, *Rice Univ. Stud.* 64(1978), 73–228.

[4] A. Weil, Number theory: An approach through history, from Hammurapi to Legendre, Birkhauser, Boston, MA, 1983.

[5] N. Wiener, The Fourier integral and certain of its applications, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1933.

(冯绪宁、那吉生 译　王世坤、卞伟 校)

编后语: 万哲先教授从他正工作的瑞典 Lund 大学给编辑部寄来文章复印件并推荐译成中文. 编辑部先后收到冯绪宁教授和那吉生教授各自译出的很好的中译文稿, 现以两位教授共同署名的方式发表此译文. 编辑部对以上各位及校者对《数学译林》的支持深表谢意.