牛顿n体问题，n体问题，非碰撞奇异性

1-8?

综合报告

①
96,15(1)
1-9

有限时间内趋于无穷

P132

Saari, DG 许鹏程
Donald G. Saari, 夏志宏

自己试一下……

在一篮球的顶部放一网球，把它们从齐胸的高度掷下. 网球会神奇般地弹起——这些在户外完全可以做到.

牛顿质点 n 体问题能否在有限时间内弹射出飞向无穷的质点？这个引发了许多有趣且深刻的数学结论的耐人寻味的世纪悬案，最近在夏志宏的博士论文中得到解决；他证明了对所有 $n \geq 5$, 三维的例子存在. 随后 Gerrer 肯定了平面 $3n$ 体问题也会出现类似的现象，但 n 是待定且很大的数.

虽然熟知的牛顿平方反比定律提醒我们可以允许如此反直觉的性态发生，但这反直觉的性态是如此令人吃惊，以至于有理由要问这高深莫测的问题是怎样提出来的. 在这篇简短的介绍中我们可以看到，夏志宏回答了 Poincaré 和 Painlevé 约一百年前提出的一个自然而基本的问题. 这个问题描述了 n 体系统的"奇异性"的性质. 这里奇点意味着在某时刻 $t = t^*$, 解的解析连续性破坏.

那么，奇异性因何而生？设第 j 个质点的质量和位置向量分别为 $m_j, \mathbf{r}_j$, 且设 $r_{ij} = \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|$. 由运动方程

$$m_j \mathbf{r}_j'' = \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{r_{ij}^3} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_j}, \quad j = 1, \cdots, n, \tag{1}$$

这里自位势为：

$$U = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}, \tag{2}$$

显然，奇异性要求当 $t \to t^*$ 时某距离 r_{ij} 变得任意小. 通常的碰撞就是奇异的. 但是是否所有的奇异性都是由碰撞产生的呢？有一种可能的方案，它在十九世纪末登台亮相，就是奇异性轨道是否可以表现为某种振荡性态，此时，$r_{\min}(t) = \min_{i \neq j}(r_{ij}(t))$ 的下极

原题：Off to Infinity in Finite Time. 译自：*Notices of the American Mathematical Society*, Vol. 42, No. 5, 1995, pp. 538–546.

限趋于 0, 同时两质点间最小空间的上极限仍保持正值. 即，不经碰撞，质点会不会很快跑掉呢？

用构形空间的术语，我们重新叙述一下该问题. 如果

$$\Delta_{ij} = \{\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_n) \in (\mathbb{R}^3)^n \mid \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_j\},$$

则 $\Delta = \cup_{i<j}\Delta_{ij}$ 表示 $(R^3)^n$ 中所有方程 (1) 没定义的点. 这等价于存在子序列 $\{t_i\}$, 使得 $t_i \to t^*$ 时 $\mathbf{r}(t_i) = (\mathbf{r}_1(t_i), \cdots, \mathbf{r}_n(t_i))$ 趋近于 Δ 但 $\mathbf{r}(t)$ 不趋于 Δ. Painlevé 1895 年在瑞典的演讲中否定了这个提案.

Painlevé 的证明是标准的存在性定理的巧妙应用，这一定理保证 $\mathbf{x}' = f(x)$ 的解在由 $\|f(\mathbf{x})\|$ 的上界所确定的有限的时间区间内有界. 为讨论方程 (1) 的上界，找一个走向奇异性的解，设有序列 $\{t_k\}$, $t_k \to t^*$, 使得 $\limsup_{t\to t^*}(r_{\min}(t)) > d > 0$, 这里所有的距离满足 $r_{ij}(t_k) \geq d$. 由于有界性，这些距离不为 0, 方程 (1) 的右端和 U 均有上界. 由 U 的有界性和能量积分

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j\mathbf{v}_j^2 = U + h, \tag{3}$$

得到速度 $\mathbf{v}_j$ 的有界性 (这里 h 是积分常数). 因而，对每一个 t_k, 由存在性定理断言方程 (1) 的解可延拓到 t_k 之外，这个延展只依赖于 d 和 h. 适当地选择 t_k, 使 $t^* - t_k$ 小于这个允许值的一半，就与 t^* 的奇异性的假设矛盾.

定理 (Painlevé). n 体问题在 $t = t^*$ 处存在奇异性当且仅当

$$\mathbf{r}(t) \to \Delta \quad \text{当 } t \to t^* \text{ 时.} \tag{4}$$

尽管 Painlevé 告诉我们奇异性要求 $\mathbf{r} \to \Delta$, 但还是不清楚碰撞是否必需. 如图 1 所示，任何距离都不趋于零，当 $t \to t^*$ 时， $r_{\min}(t) \to 0$ 的条件能不能满足？换言之，质点无碰撞的奇异性还是可能的. 我们谈到的碰撞定义为：

定义: 时刻 t^* 的奇异性称为碰撞，如果当 $t \to t^*$ 时，存在 $\mathbf{q} \in \Delta$, 使 $\mathbf{r}(t) \to \mathbf{q}$. 其它的奇异性就称为非碰撞奇异性.

Painlevé 用三角不等式证明了三体问题不会出现图 1 的病态行为. 也就是说，当 $n = 3$ 时，所有的奇异性都是碰撞奇异性. 为弄清缘由，需把质点的最大和最小距离联系起来. 显然， U^{-1} 是 $r_{\min}(t)$ 的度量，把质心放在原点，质点间的最大距离就可以用 $I^{1/2}$ 来度量，这里 $I = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j\mathbf{r}_j^2$. 这就表明此度量可由 Lagrange-Jacobi 方程

$$I'' = U + 2h \tag{5}$$

联系起来 (对 $I(t)$ 微分两次并利用方程 (3)). 例如，这一关系式确定了质点什么时候相互接近 (U 取很大的值); 什么时候产生转动惯量的加速度 (I'' 开始为正). 奇异性是一个特例，此时 $r_{\min}(t) \to 0$ 或 $U \to \infty$ 要求 $I \to \infty$ (方程 (5)), 就是要求 I'' 是正的，当 $t \to t^*$

时要求 $I \to A$、$A \in [0, \infty)$.$A = 0$ 是可能的，这里 $I \to 0$ 显然对应着所有的质点于质心处的碰撞．如果 $I \to A > 0$, 这意味着由三个质点定义的三角形的两个边有界非零．又由于 $r_{\min}(t) \to 0$、因而三角形的另一边应收缩到零．但若使 $r_{\min}(t)$ 保持充分小，三角不等式不允许不同的质点对起到确定 $r_{\min}(t)$ 的作用．当 $r_{\min}(t)$ 最终由单质点对定义时，图 1 的情况不会发生．这就说明所有的质点都趋于一个极限的位置．

Painlevé 在证明这一结果之后，就考虑对 $n \geq 4$ 非碰撞奇异性的存在性，即 $\mathbf{r}(t)$ 会不会趋于 Δ 但不是集合中的某一点？这就是夏志宏解决的问题．他证明了对 $n \geq 5$、这样的解是存在的．

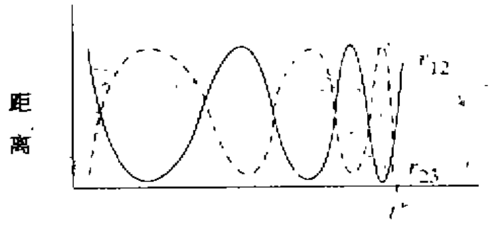


图1．最小距离趋于 0 的振动

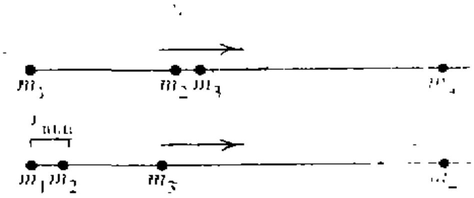


图2．往返运动质点的二种选择

非碰撞奇异性的性态和可能性

von Zeipel 在 1908 年作出了继 Painlevé 之后的另一件卓越的工作，得到了非碰撞奇异性的一个惊人的结论．他的思想源于如下的观察：当质点间的距离很大时，平方反比定律产生的加速度可忽略，因而在一小段时间内，相距较远的质点主要在一条直线上运动，速度的改变量很小．于是 von Zeipel 分别研究邻近质点的相互作用以及邻近的质点簇怎样彼此分离．由于这种对簇的讨论与 $I \to A < \infty$ 相矛盾，他证明了如下惊人的结论[1)]:

定理 (von Zeipel)．非碰撞奇异性发生于 t^* 当且仅当 $t \to t^*$ 时，$I \to \infty$.

可以说，von Zeipel 避开了讨论非碰撞奇异性的存在性这个要害问题．然而牛顿运动定律竟可以使质点在有限的时间内飞向无穷，这怎么可能？或许就是这个奇特的要求把 Painlevé 的构想控制了半个多世纪．

十九世纪六十年后期奇异性问题再次受到人们注意，当时 Sarri [S1] 刻划了所有碰撞的特征，其中一部分工作是同 Pollart 合作完成的，讨论的问题是牛顿 n 体问题的渐近性态．这些结果鲜明地指出，所有碰撞质点以阶 $(t^* - t)^{\frac{2}{3}}$ 彼此靠近．（以前只知道二体碰撞 (Sundman [Su]) 和当 $I \to 0$ 时全部碰撞 (Wintner [W])).

指数为何是 $\frac{2}{3}$? 实际上这个值反映了力定律的选择，因为对 p 力反比定律指数是

[1)] Chazy [Ch], Sperling [Sp] 和 Sarri [S3] 给出证明，推广了 von Zeipel 目前的定理，并更为确切．同时可参看 McGehee 的文章 [MG1].

$2/(p+1)$, $p>1$(牛顿定律是 $p=2$). 这一点从共线方程 $x''=-(p-1)x^{-p}$ 容易看出. 方程两边乘以 x' 后积分，得到能量积分 $(\frac{1}{2}x')^2=x^{1-p}+h$ 或 $(\frac{1}{2}(x')^2x^{p-1})=1+hx^{p-1}$. 则 $x\to 0$ 的碰撞条件对应于能量积分. 当 $t\to t^*$ 时 $x'x^{(p-1)/2}\sim -\sqrt{2}$, 这个结论 (对于简单的共线性问题) 也由此积分得到.

对碰撞而言，把

$$U\sim A(t-t^*)^{-\frac{2}{3}},\quad t\to t^*,\tag{6}$$

这个充要条件代入方程 (5), 积分后发现，不仅 I 有界，I' 亦然. 要建立非碰撞奇异性，为使 $r_{\min}(t)$ 更快地趋于零需要 I'' 更敏感. 但宇宙膨胀的速度究竟有多快呢？根据方程 (5) 和 $U(t)$ 允许 $I\to\infty$, 当 $t\to t^*$ 时，$I\sim ln((t^*-t)^{-1})$ 是否合理呢？如 [S3] 中所示，I 趋于无穷的速度比一大类相似函数更快.

对我们重要的是在 [S3] 中建立的非碰撞运动的强振荡性态. 它指出，某质点必须频繁且任意地逼近另一个质点. 直观的想象是质点由于自身有近零的加速度，速度基本上保持常数而飞向无穷. 但常值速度又排除了有限时间趋于无穷的可能性. 因而加速度需要增大，这就要求有另一个质点 "访问"(加入). 例如，考虑图 2 所示的四体问题，条件 $I(t)\to\infty$ 迫使某些质点，比如说 m_1, 满足 $\limsup_{t\to t^*}(r_j(t))=\infty$. 如果在 t^* 之前的时间周期内，没有质点来到如 m_1 的 10^{-20} 之内的距离，则 r_1'' 是有界的. 但积分后便与 $\limsup(r_1(t))=\infty$ 相矛盾. 因此，如果 m_j 有性质 $\limsup(r_j(t))=\infty$, 它必然在任意时间区间 (t,t^*) 内，m_j 同另外的质点任意逼近. 把上述讨论应用于二体质心运动方程，并附一点额外的工作，便得出如果没有其它的质点访问这个二体，此二体和质量中心保持有界性. 于是我们便知，如果对 m_j 有 $\limsup_{t\to t^*}((r_j(t))=\infty$, 那么在任意的时间区间 (t,t^*) 内，都有另一个质点 "访问"m_j. 类似地，二体要重复地满足 $r_{\min}\to 0$ 这一条件，也必须有另外的质点频繁且任意逼近地 "访问" 它们.

当然，由于质量中心固定，质点无论何时远离原点，总有另一个质点位于相反的方向上. 因此，在众多的质点中至少有两个远离的质点. 为了保持 $I\to\infty$, 总有两个质点远离而另一个质点往复其间. 对 $n=4$, 至少有两个质点需要定义 $r_{\min}(t)$, 只有下面两个方案的组合可以实现这个 "访问" 条件：两个质点分离，并且一组二体往复其间 (图 2 中上图), 或一个质点与一组二体分离，另一个质点往复其间 (图 2 中下图). 因而，在 t^* 之前的任何时间区间内，每个质点都可以被 "访问", 且这种 "访问" 发生无穷多次.

重新观察一下上面的移动过程：往复的质点基本上在一条直线上运动，而且很仔细地瞄向目标. 正如人们所料，这一运动迅速使系统逼近于物理空间的一条不变直线. 同样，大部分速度项的方向也由这条不变直线表述. 因而，由于 $n=4$ 非碰撞奇异性把运动压缩到相空间中一条不变线附近，我们可以想象发生 $n=4$ 非碰撞奇异性的可能性是很小的，原因就是系统的保测性. 正因为如此，Sarri 运用直观及早期证明 Littlewood 假设 [L](对所有 n, 任何形式的碰撞都不大可能发生) 的方法 [S2], 证明了四体问题的非碰撞奇异性组成一个 Lebesgue 零测集 [S4].

结合 [S2] 和 [S4] 的结果，我们知道对 $n\le 4$, 产生奇异性的可能性很小，大部分

轨道都长时间存在．我们自然希望对 $n \geq 5$ 也有相同的结论．因为碰撞的可能性已很小 [S2]，为证明这一推断，只需说明非碰撞奇异性是一个 Lebesgue 零测集．改变一下 [S4] 的证明就可以看出，这个论断对质点最终沿直线运动 (夏志宏的构造) 的非碰撞奇异性亦成立．实际上 [S4] 的方法和结论应当可以拓广到所有的非碰撞奇异性 (但尚未证明)．这是由于这种轨道要求的 "访问" 性态迫使质点快速逼近于相空间中一个低维超平面上．

Mather-McGehee的构造

所有对非碰撞奇异性的怀疑都随 Mather 和 McGehee 1975 年的论文 [MM] 的发表而烟消云散了．他们证明了对共线性四体问题，二体碰撞会以某种方式聚集而放出一个在有限的时间内飞向无穷的质点．这并没有解决 Painlevé 的问题 (因为非碰撞奇异性是系统的第一类奇异性)，但它强有力地暗示了这种运动的存在性．的确，Anosov [An] 认为四体非碰撞奇异性的例子有可能在 Mather-McGehee 例子的邻域中存在；但这个方法尚未成功． Mather-McGehee 的构造的根据是 McGehee 早期关于共线性三体问题几乎三体碰撞的轨道分析．这个思想简述如下：

由 Sundman [Su]，我们知道二体碰撞为一个代数分支点，为弹性碰撞的动态模拟． Seigel [Se] 进一步证明了三重碰撞通常是在解的不连续处定义了一个对数奇性．接下来的工作便是分析三重碰撞附近解的性态．为此 McGehee [MG2] 给出了一类球坐标，它的半径定义为 $r_{\max}(t) = I^{1/2}$，在这个尺度下， "角坐标" 表示由质点构成的 $\frac{1}{r_{\max}}(\boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_n)$ 构形．这个构造的重要性在于力定律是齐次的，而使得半径项成为解决问题的关键，并成为新时间尺度下的独立变量．这 "角坐标" 的系统描绘了构形的变化．

从数学上讲，新的尺度系统对 $r_{\max}(t) = 0$ 都是有定义的，这就是 $\triangle$ 中的零点． "放大" 这种完全破坏奇异性产生一个不变的带边流形 C，称之为 "碰撞流形"．由于所讨论的动力系统光滑地延拓到了边界上，几乎三重碰撞的性态就可以用 C 上得到的简单的类梯度流来分析．因此关于几乎三重碰撞的性态也就可以得到．

为描述这些结论，回忆一下小球从建筑物上落下这一高中物理实验．球和地面碰撞的弹性越好，球反弹的越高．球在撞击地面的时刻，自然回弹并急骤上升．为了加大速度，再用力掷一个更小的球，使之在第一个球刚刚开始回升时撞击它．即使撞到是的静态的地面，第二个球也会急骤反弹超过另一个球．因而，弹性碰撞使较大的一个球转化为垒球板，第二个球从此碰撞中获得了更大的动能，弹起的高度也就比去掉这个碰撞的贡献时更高一些．

类似的方法可描述共线性牛顿三体问题的几乎三重碰撞的性态．把导致完全破坏解的初始条件稍加改变，使质点 m_3，稍后到达三重碰撞点．首次碰撞的质点 m_1，m_2 形成一个弹性碰撞，由方程 (3)，(6)．当距离充分接近碰撞时，反弹的速率任意大．反弹的质点和稍后赶到的 m_3，并且有任意大的动能接近碰撞．就物理实验而言，新

的弹性碰撞使稍后到达的 m_3 以更大的速率离开碰撞 —— 远远大于进入的速度. 尽管实际的情况可能很复杂. (例如：仅对球而言，我们需要考虑质量. 因为依赖于这些质量，当一个小球被逐出以前，将发生一系列的二体碰撞. 被逐出的质点的选择依赖于二体碰撞所要求的次数及相对于三重碰撞的时间等等.) 此描述概括了几乎三重碰撞的精髓.

几乎三重碰撞 (碰撞问题) 的描述表明 m_3(在图 2 的上图) 以任意大的速率被逐出 m_1, m_2 二体. 为了保持 m_3 不会逃逸，还需设置一个障碍物 —— 第四个质点. 因此，如 m_3 的速度充分大，它赶上且同 m_4 弹性碰撞. 令 m_3 的质量充分小，这一碰撞使得 m_3 反弹回到 m_1, m_2 二体，如果到达的时间接近形成另一个三重碰撞，则 m_3 又被反弹回. 正确地调整时间 (也就是，用一个符号动力学的证明)，这个情形会在有限的时间段内重复无穷多次. 用这样的方式 Mather 和 McGehee 证明了这种性态在初始条件下的一个 Cantor 集中发生.

McGehee 的坐标系已经成为分析三体共线性问题几乎完全破坏轨道动态行为的标准方法 (例如看 [McG2])，也是分析三个质点总构成等腰三角形 (例如看 Devaney [D1, D2]. Moekel [M1, M2], Simo [Si]) 各向异性的 Kappler 问题 [D2] 的几乎完全破坏轨道的动态行为的标准方法. 这样，三体问题出现大量的令人惊奇的 "混沌" 行为. 在一个相关联但略有不同的研究方向，我们 [SX] 用此坐标系确定新一类轨道的存在性，更使人惊奇的是 "超双曲运动"，早期由 Pollard [P2] 讨论过，而后 Marchel 和 Sarri [MS] 把它作为描述 n 体问题怎样演化的一部分. 此问题与 n 体宇宙的膨胀是否有上界有关. 也就是说，是否存在 $f(t)$，使 $t\to\infty$ 时所有的解最终有界. 例如考虑特殊的关系，所有的速度都以光速为上界，则 $f(t)=ct$. 但牛顿的宇宙不满足爱因斯坦的框架，一旦 $n\geq 4$，对牛顿 n 体系统，没有这样的 $f(t)$ 存在. 相反，对任意 $f(t)$，四体问题存在初始条件使当 $t\to\infty$ 时，$r_{\max}(t)/f(t)\to\infty$. 例如选择

$$f(t)=\exp(\exp(\exp(\cdots(\exp(t)\cdots)))).$$

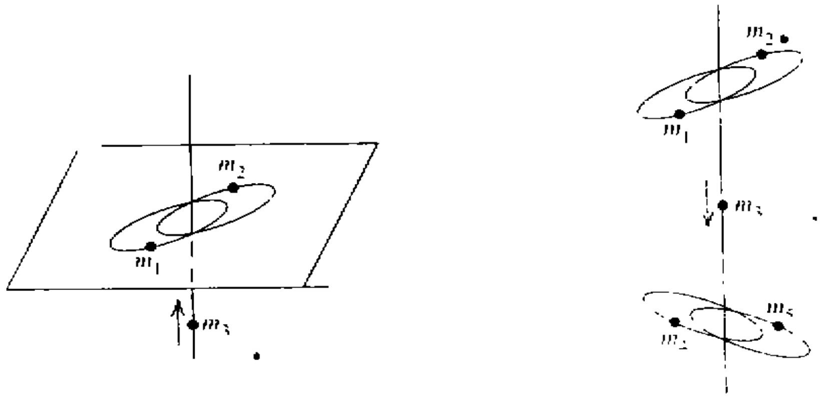
显然 n 体系统可以以反直觉的方式扩张.

我们的证明要求 "放慢" Mather-McGehee 运动，使其永远进行下去而不是迅速逃掉. 这种作法的直观来源于两个球的实验；如果第二个球不是快速掷下，而仅在第一个球的动能减小之后才碰撞它. 类似地，我们需要介绍一种能研究如下动态结果的方法，它使相互作用的质点不是任意逼近三重碰撞，而是让被撞击的 m_3 充分迟地赶到使之不至于被大力掷出. 我们利用导致三重碰撞的初始集的复流形结构，得到了产生这个滞后的研究方法.

夏志宏的构造

Painlevé 问题的简单介绍给出了构造非碰撞奇异性所需的条件. 首先，质点必须无限频繁而且无限靠近地往复其间. 其速度又要满足这无限频繁的访问都来自于几

乎多重碰撞. 它的数学难点在于：要成为非碰撞奇异性，必须不利用碰撞来研究几乎多重碰撞. 但由于排除了碰撞，我们就不能舒舒服服地设置碰撞问题，因为它总是要求质点突然碰到一起. 一旦强制组成共线性的方向失去了，我们需要把互换的质点 "瞄准" 到靶子质点恰好到达的方向. (这是因为质点任意逼近新的宿主之前，"访问" 质点的速度基本上保持恒定). 此时问题的复杂性就是把原来的理论推广到高维构造的框架中，并把它们联系起来使预想的性态出现，这就是夏志宏的贡献.



3a. 三体作用　　　　3b. 夏志宏的构造

图3. 五体构形

为理解夏志宏的构造，我们从三体问题的非对称解出发，此处两个质量相等的质点 m_1 和 m_2 的运动总平行于 $x-y$ 平面， m_3 限制在 z 轴上. (见图 3a, 这种运动的存在性易知). 设 m_1、m_2 沿圆周运动，它们作用在 m_3 上的引力 (由距离 r_{13} 和 r_{23} 决定) 取决于 m_3 离开平面多远. 然而，若 m_1, m_2 作非常 (很扁) 的椭圆运动，那么它们对 m_3 的力不仅依赖于它与平面的距离，还依赖于 m_1 和 m_2 相互接近的程度. 例如：考虑一个极端的情形，二体的轨道接近于直线，这样、二体可以任意接近，也可以分开一个适当的距离. 假设它们彼此接近时， m_3 从下面经过平面并到平面的上方一点，当这三质点充分接近 (且正确地选择质量) 时，该二体施加于 m_3 一个强大的力并把它拉回. 事实上，通过调节质点间的距离可以使吸引力满足要求. 因而，当 m_1, m_2 开始分离时， m_3 可以被任意大的速率拉回. 通过适当地选择时机，使分离的二体对 m_3 失去任何制动作用. 这样 m_3 就会迅速沿 z 轴向下运动.

为阻止 m_3 逃掉，仍需要一个干扰. 但不能在 z 轴上放置第四个质点，因为这样会发生碰撞. 于是重复上面的情形，在远离 m_3 的下方，垂直于 z 轴放置质点 m_4、m_5、使此二体作严格不同心的平面运动 (见图 3b). 精确地选择时机，当 m_4、m_5 二体充分接近时，往复的 m_3 恰刚刚经过这一平面 —— 结果有强大的力施加于 m_3 并使之突然以任意大的速率向下运动. 注意利用对称性， m_3 成为 "靶子"、瞄准的问题就被解决了.

夏志宏证明了上面的构想在有限时间内重复无限次. 十分类似于标准 Cantor 集

的构造，即在每一步移开新的"中间三分段"、夏志宏推广了这个挑选的过程，换言之，三个质点至少发生一次预期解的初值构成一个大致为楔形的初始集．此楔形中初始条件的某些解允许 m_3 与二体以指定的方式相互作用，而某些解则不能．去掉这些不能得到预期性态的点(特别地，取消所有使 m_3 不满足到达另一个二体的精细的时刻要求的点)．把这一过程继续下去，存在极限集，它是初始条件 Cantor 集，其中的点使这个过程无限重复．

进一步讲，怎样找到初始条件的楔形？注意到极限状态时， m_3 从 m_1, m_2 到 m_4, m_5 已经运动无限快，这只是当 m_3 开始任意逼近 m_1, m_2 时， m_4, m_5 相互作用也已经充分接近时发生这种情况．因而，极限的构形是： m_1, m_2, m_3 发生三体碰撞的同时， m_4, m_5 发生两体碰撞．这一基本思路是根据多重碰撞的稳定流形和不稳定流形的结构，以一定方式选取初始值，至少在一段时间内可避免碰撞．避免碰撞的一个途径是赋予每二体以非零的角动量 c，这里 c 的符号代表二体顺时针或逆时针旋转． c 的大小决定了二个质点的接近程度．为了得到任意接近，当 $t \to t^*$ 时，必须 $c \to 0$．为看清楚旋转的作用、把原来的碰撞流形 C(二维，无旋转) 包括 c 值增加一维、真正的三体问题有 c 作为运动常数．因而这一分析要求引入一个相关变量 μ，来描述二体运动的方向和速度．

在介绍下一步之前，先考虑下面的简单系统： $x' = -x$, $y' = y$、此处，沿 x 轴为一个解 —— 稳定流形 —— 在原点相会；同时 y 轴的解 —— 不稳定流形 —— 急速逃向正负无穷，见图 (4)．其余的解则结合了这两组性态，即：起始于接近 x 轴的解，当走向原点时、它的轨道仍在此轴附近．当它充分靠近原点时， y 方向的排斥效应起了作用，解开始模拟 y 轴运动并靠近 y．注意到我们可以控制某种性态的发生，例如为了保证解最终沿正 y 轴 (不是负向) 运动，只要选择一个适当的 $y > 0$ 的初始集 (图 4 中的粗段)．几乎碰撞分析不过是这种现象的高维的，更复杂的形式、而"楔形"就对应于初始条件 $y > 0$ 的选择．

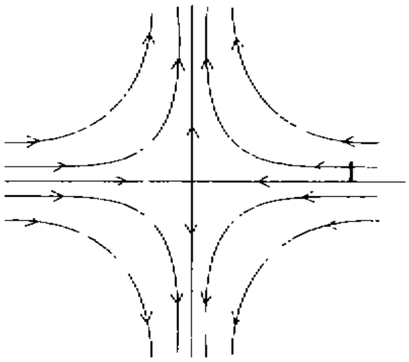


图4． 简单系统的行为

从三重碰撞定义的有双曲结构的平衡点 $x^* \in C$ 出发， (因此 x^* 代替了简单系统的原点)．如今 $\sum$ 为最终发生三体碰撞的初始条件的集合，则 $\sum$ 就定义了 $x^* \in c$

的稳定流形 ($\sum$ 代表模拟问题的 x 轴). 由 x^* 的双曲性和倾角引理 (例如看 Robinson [R], p. 200), 我们知道起始于 $\sum$ 附近的轨道在到达 C 前将保持在 $\sum$ 附近, 而后趋向 x^* 的不稳定流形 (不稳定流形可看做是 y 轴的高维形式). 可以说, 稍稍错过了三体碰撞后, 运动就开始模拟 C 中的轨道. 因而最终的性态由接近 x^* 的 C 上的轨道结构来控制.

这一结构的有趣之处是 x^* 的不稳定流形. C 中的不稳定流形决定着三体碰撞后 m_3 是平行向上还是向下. 另一个需要注意的是变量 μ, 它代表着二体相互临近作用后的旋转方向. 在 C 中不稳定流形上选取预期的性态, 并把所得的楔形做为一个靶子, 则在 $\sum$ 附近可确定一个初始条件的楔形, 它的解由三个质点的性态 C 来控制. (在模拟系统中, 楔形的选择类似于图 (4) 中粗段的选择, 它使这些解最终走向 y 轴的正向而不是负向.) 这些通过几乎三体碰撞, 在所需的条件下允许 m_3 达到另一个二体, 并重复上面情形的解, 又定义了一个子楔形: 这就是挑选的过程.

由此得到的初始条件的 Cantor 集, 可以使 $r_{\max}(t)$ 在有限时间趋于无穷, 而且不存在预先的碰撞. 于是, 用这种方法解决了 Painlevé 一百多年前提出的问题, 而且这一构造充分利用了许多研究者在奇妙的数学领域中作出的几个不同的卓越贡献.

尽管我们现在知道了非碰撞奇异性的存在性, 奥秘尚有很多. 上面叙述中就包含这样的问题: 是不是 $n=5$ 为出现此类奇异性的下限, 或四体问题能否在有限时间内把质点推向无穷? 例如, Anosov 的假设能实现否? 平面问题最小的 n 是多少? 正如所表明的, 质量在证明中起了重要作用 (原因类似于物理实验中球的大小的重要性), 有没有使非碰撞奇异性不发生的质量选取? 夏志宏的构形得到的初始条件为 Lebesgue 零测集, 所有的非碰撞奇异性发生的可能性都很小吗? 如上所示, 构造无界运动的例子需要仔细分析几乎碰撞的解的性态, 这就意味着如令 CO 为产生任何种类碰撞的初始集, 则 CO 的闭包就应当是产生所有奇异性的集合 (包括 [SX] 中描述的运动), 这是否正确? 更特殊些, 模仿 Painlevé 问题可以提出: 以 CO 的闭包为初始条件的解有什么性质?

总而言之, 牛顿 n 体问题是有趣的数学问题的源泉.

(参考文献略)

(许鹏程 译　井竹君 校)