

几何与表示掠影

付保华

摘要 过去几十年,人们发现几何学与表示论有着十分深刻的联系,由此带来了丰富的成果并开辟了很多新的研究方向.在这个联系中,几何学中的奇点扮演着突出的角色,看似特殊的 McKay 对应和 Springer (斯普林杰) 解消都对后来的发展起了巨大的推动作用.本报告将以这个对应和解消为主题,浮光掠影式地展示几何学与表示论的奇妙联系.

目 录

1. 引子: 正多面体	1
2. $SL(2, \mathbb{C})$ 中有限子群的表示	2
3. Klein 奇点及其极小解消	4
4. McKay 对应及其发展	5
5. 幂零轨道	7
6. Springer 解消	8
7. Springer 对应	10
8. McKay 遇见 Springer?	12

1. 引子: 正多面体

几何学是研究形的一门科学,其产生是随着人类自身的进步而自然出现的. Euclid (欧几里得) 的《几何原本》基本囊括了几何学从公元前 7 世纪的古埃及,一直到公元前 4 世纪 (Euclid 生活时期) 前后总共近 400 年的数学发展历史,乃是一部不朽之作. 该书的最后一章证明了正多面体只有 5 类: 正四面体, 正方体, 正八面体, 正十二面体以及正二十面体. 有理由相信, 这个漂亮的结果也是促使 Euclid 写《几何原本》的原因之一.

古希腊伟大的哲学家 Plato (柏拉图) 也对于正多面体的分类结果着迷. 他在其晚期著作《蒂迈欧篇》中提出世间万物都是由火, 土, 气, 水 4 种元素构成, 这 4 种元素分别对应于正四面体, 正方体, 正八面体以及正二十面体 (正十二面体对应于宇宙模型).

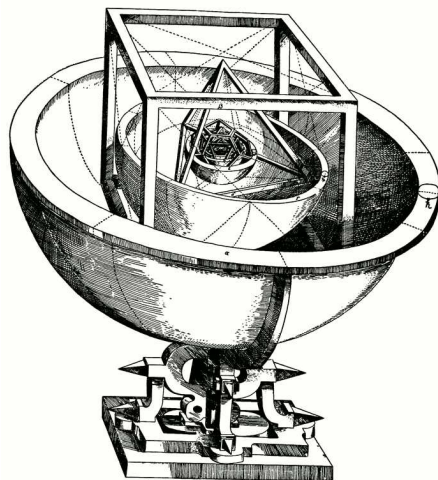
这是作者于 2017 年 10 月 11 日在中国科学院数学与系统科学研究院数学研究所“数学所讲座”上的报告. 作者是中国科学院数学与系统科学研究院数学研究所和晨兴数学中心研究员. 版权所有 ©2017 中国科学院数学与系统科学研究院数学研究所《数学所讲座》编委会. 所有权利保留. 数学与系统科学研究院《数学所讲座》编委会与作者授予出版许可.

作者于 1998 年本科毕业于北京大学, 2003 年在法国尼斯大学获数学博士学位. 主要从事代数几何及相关方向的研究. 2008 年入选中国科学院百人计划回国. 曾获国家基金委杰出青年基金资助, 入选青年长江学者计划, 万人计划, 青年拔尖人才计划, 创新领军人才计划等项目, 被评为第 12 届中国科学院杰出青年.

数学所讲座 (The Institute Lecture) 旨在讲解现代数学的重要内容及其思想、方法和影响, 扩展科研人员和研究生的视野、提高数学修养和加强相互交流、增强学术气氛. 时间定在每月 (寒暑假另外安排) 的第一个星期三上午 10—12 点 (其中 10:00—10:30 是茶点时间).

这些元素还被给予了以三角形为基础的形式结构, 从而使得相互间可以发生化学反应. 比如, 1 等量的水加 1 等量的火可以转化为 3 等量的气, 这也符合我们的生活常识. 与之类似地, 在我国的远古道教的哲学中, 有五行一说. 在《五帝》篇中写道: “天有五行, 水火金木土, 分时化育, 以成万物.”

1596 年, Kepler (开普勒) 在其《神秘的宇宙》一书中用正多面体构造了宇宙的模型. 当时仅发现了 6 颗行星: 金星, 木星, 水星, 火星, 土星以及地球. 当时大家认为这些行星的轨道都在某个球面上. 他发现若把土星轨道放在一个正方体的外接球上, 则木星轨道便在这个正方体的内切球上; 确定木星轨道的球内接一个正四面体, 火星轨道便在这个正四面体的内切球上; 火星轨道所在的球面再内接一个正十二面体, 便可确定地球轨道. 确定地球轨道的球内接一个正二十面体, 这个正二十面体的内切球决定金星轨道所在的球面; 在金星轨道所在的球内接一个正八面体, 水星轨道便落在这个正八面体的内切球上. 由此完美地解释了为何只有 6 颗行星 (而第 7 颗行星: 天王星, 直到 1781 年才发现). 上图是 Kepler 书中宇宙模型的原图.



2. $SL(2, \mathbb{C})$ 中有限子群的表示

Euclid 空间 \mathbb{R}^n 上所有保距保定向的变换构成特殊正交群 $SO(n, \mathbb{R})$. 在 \mathbb{R}^2 中任何正多边形的对称群都是一个循环群, 反之, 任何 $SO(2, \mathbb{R})$ 的有限子群都是一个循环群, 从而都可以实现为某个正多边形的对称群. 那么 $SO(3, \mathbb{R})$ 中的有限子群有哪些呢? 首先这些有限子群包括 $SO(2, \mathbb{R})$ 的有限子群, 即循环群. 同时 \mathbb{R}^2 中正多边形在 \mathbb{R}^3 中的对称群 (即多了空间中的反射) 也是 $SO(3, \mathbb{R})$ 的有限子群, 称为二面体群. 那么是否还有别的有限子群呢?

正多面体的旋转对称群叫多面体群. 容易得到, 正四面体群同构于 4 次交错群 A_4 , 正方体群与正八面体群都同构于 4 次对称群 S_4 , 而正十二面体群与正二十面体群都同构于 5 次交错群 A_5 . 这些群都自然地是特殊正交群 $SO(3, \mathbb{R})$ 的有限子群.

Euler 的一个定理说特殊正交群 $SO(3, \mathbb{R})$ 中任何非平凡元素都是沿 \mathbb{R}^3 中某个直线轴的旋转, 特别地, 它恰好固定单位球面 S^2 上的两个点. 对于 $SO(3, \mathbb{R})$ 中的任何有限子群 H , 容易看到其所有非平凡元素在 S^2 上的固定点的集合 P 是在 H 的作用下不变的. 由此我们可以得到一个关于 H 在 P 上的轨道个数 r , 稳定子群阶数 $a_i (i = 1, \dots, r)$ 以及 H 的阶数 d 的如下不定方程

$$2 - \frac{2}{d} = \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{a_i}\right).$$

注意到 a_i 可以整除 d , 由此方程可以解出 d, r, a_i , 进而可以得到:

命题 2.1 $SO(3, \mathbb{R})$ 中的所有有限子群都同构于：循环群，二面体群或正多面体群。
回忆一下二阶特殊酉群

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}.$$

它自然地同构于三维单位球面 S^3 . Lie (李) 群 $SU(2)$ 的 Lie 代数 $\mathfrak{su}(2)$ (即 S^3 在单位点的切空间) 同构于 \mathbb{R}^3 , 其上有一个自然的内积 $\langle U, V \rangle = \frac{1}{2} \text{Tr}(U\bar{V}^t)$. 注意到任一元素 $g \in SU(2)$ 在 $\mathfrak{su}(2)$ 上的共轭作用保持该内积, 从而得到一个自然的群态射:

$$p: SU(2) \rightarrow SO(3, \mathbb{R}).$$

可以验证 p 是一个满同态, 其核 $\text{Ker}(p)$ 同构于 $\pm Id$. 如果我们把 $SO(3, \mathbb{R})$ 等同于三维实射影空间 \mathbb{RP}^3 , 则映射 p 就是 $S^3 \rightarrow \mathbb{RP}^3$ 的自然态射. 由于 $SO(3, \mathbb{R})$ 中的所有有限子群都已经清楚 (命题 2.1), 我们可以借助态射 p 来得到 $SU(2)$ 中的所有有限子群的分类.

更进一步, $SL(2, \mathbb{C})$ 中的任何有限子群都同构于 $SU(2)$ 中的一个有限子群, 从而我们得到 Klein (克莱因) 在 1884 年证明的如下分类:

命题 2.2 $SL(2, \mathbb{C})$ 中的任一有限子群都同构于下列群之一:

- 循环群: $C_n = \langle a \mid a^n = 1 \rangle$;
- 二元二面体群: $BD_{4n} = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^n \rangle$;
- 二元四面体群: $BT_{24} = \langle a, b \mid a^2 = b^3 = (ab)^3 \rangle$;
- 二元八面体群: $BO_{48} = \langle a, b \mid a^2 = b^3 = (ab)^4 \rangle$;
- 二元二十面体群: $BI_{120} = \langle a, b \mid a^2 = b^3 = (ab)^5 \rangle$.

设 Γ 为一个有限群, 记 $\text{Conj}(\Gamma)$ 为 Γ 的所有共轭类所构成的集合. Γ 的一个表示 (representation) 是指 Γ 在某个向量空间 V 上的一个线性作用, 等价地, 是指一个群同态 $\rho: \Gamma \rightarrow GL(V)$. 我们记此表示为 (V, ρ) (或 V_ρ 或更简单地 V). 本文只讨论有限维的复表示 (即 V 是一个有限维的复向量空间). 如果 V 中没有非平凡的 Γ 不变子空间, 则称 (V, ρ) 为不可约表示 (irreducible representation). 可以证明 Γ 的任何表示都可以写成一些不可约表示的直和, 所以不可约表示是最基本的. 我们记 $\text{Irr}(\Gamma)$ 为 Γ 的所有不可约表示 (此处不区分同构的表示) 所构成的集合. 可以证明 $\text{Irr}(\Gamma)$ 是一个有限集合, 其阶等于集合 $\text{Conj}(\Gamma)$ 的阶, 但这两个集合之间没有一个自然的双射 (仅有一个自然的对偶关系).

记 $\Gamma \subset SL(2, \mathbb{C})$ 为一有限子群. 记 V_{stand} 为其在 \mathbb{C}^2 上的自然表示, 记 Γ 的所有不可约表示为

$$\text{Irr}(\Gamma) = \{V_0, V_1, \dots, V_r\}$$

其中 V_0 为平凡表示. 对任一 i , 张量积 $V_{\text{stand}} \otimes V_i$ 仍然为 Γ 的一个表示, 所以它可以写成不可约表示的直和形式:

$$V_{\text{stand}} \otimes V_i = \bigoplus_j V_j^{\oplus a_{ij}}, a_{ij} \in \mathbb{N}.$$

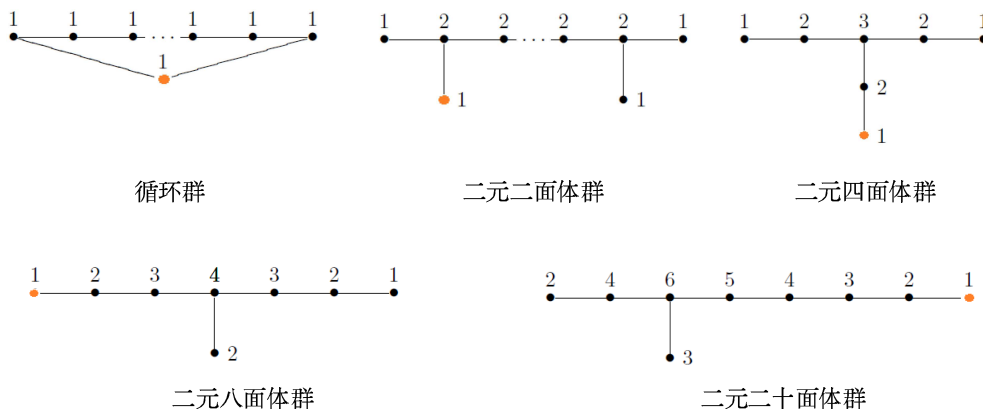
可以证明 $a_{ij} = a_{ji}$. 由此我们可以构造 Γ 所对应的 *McKay* 图 (*McKay graph*): 顶点为所有不可约表示 V_0, \dots, V_r , 两个顶点 V_i, V_j 之间由 a_{ij} 条边连接. 我们在每个顶点上标出相应不可约表示的维数.

例子 2.3 假设 $\Gamma = C_n = \langle a \mid a^n = 1 \rangle$. 由于 Γ 是 Abel (阿贝尔) 群, 其所有不可约表示都是一维的. 记 $\xi = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}}$, 则 Γ 的所有不可约表示为:

$$\rho_k : \Gamma \rightarrow \mathrm{GL}(1) \simeq \mathbb{C}^*, a \mapsto \xi^k, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

注意到 Γ 在 \mathbb{C}^2 上的自然表示 V_{stand} 同构于 $V_1 \oplus V_{n-1}$. 由此可得 $V_{\text{stand}} \otimes V_i = V_{i-1} \oplus V_{i+1}$. 从而 Γ 的 McKay 图就是一个有 n 个顶点的圈图.

McKay 在文 [M] 中给出了所有 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ 中有限子群所对应的 McKay 图, 得到如下结果 (我们标记出了平凡表示):



这是一个让人吃惊的发现, 因为这些图正好是 ADE 型仿射 Dynkin (邓肯) 图! 如果我们把平凡表示去掉, 则得到的是 ADE 型 Dynkin 图. 而众所周知的是 Dynkin 图对应于复单 Lie 代数, 所以一个自然的问题就是:

问题 2.4 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ 中有限子群如何与 ADE 型的复单 Lie 代数联系起来?

另外一个有意思的观察是每个顶点标注的维数正好是相应 Lie 代数中最长根在对应单根前的系数. 这又有什么背后的意义呢?

插曲 2.5 复 Lie 代数就是一个复向量空间 \mathfrak{g} 及其上的一个反对称的双线性运算 (称为 Lie 括号): $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ 使得如下的 Jacobi (雅可比) 等式对于任意 $x, y, z \in \mathfrak{g}$ 都成立:

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0.$$

如果 \mathfrak{g} 没有非平凡的理想且 Lie 括号非平凡, 则称 \mathfrak{g} 为复单 Lie 代数. 复单 Lie 代数的分类最先由 Killing (基灵) 得到 (其证明的缺陷由 E. Cartan (嘉当) 补上), 而后 Dynkin 在上世纪 60 年代引入了 Dynkin 图来标记单 Lie 代数. A_n 型 Dynkin 图对应于矩阵代数 $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$, D_n 型 Dynkin 图对应于 $\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$, 而 E_6, E_7, E_8 型 Dynkin 图则对应于 3 个例外单 Lie 代数.

3. Klein 奇点及其极小解消

让我们再回到几何. 固定一个有限子群 $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, 记 \mathbb{C}^2/Γ 为群 Γ 在 \mathbb{C}^2 上作用的所有轨道构成的商空间. 所有 \mathbb{C}^2 上 Γ 不变的多项式组成一个代数 $\mathbb{C}[u, v]^\Gamma$, 商空间 \mathbb{C}^2/Γ 其实有一个自然的代数簇结构, 就是同构于 $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[u, v]^\Gamma)$. 由于 Γ 在 \mathbb{C}^2 上的作用限制

到开集 $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上都是自由的, 由此可以得到商空间 \mathbb{C}^2/Γ 具有一个孤立奇点 o , 称之为 *Klein 奇点* (*Klein singularity*).

例子 3.1 假设 $\Gamma = C_n = \langle a | a^n = 1 \rangle$. 记 $\xi = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}}$, 则 Γ 在 $\mathbb{C}[u, v]$ 上的作用为

$$a \cdot u = \xi u, \quad a \cdot v = \xi^{-1}v.$$

从而所有 Γ 不变的多项式为

$$\mathbb{C}[u, v]^\Gamma = \mathbb{C}[uv, u^n, v^n] \simeq \mathbb{C}[x, y, z]/(x^n + yz).$$

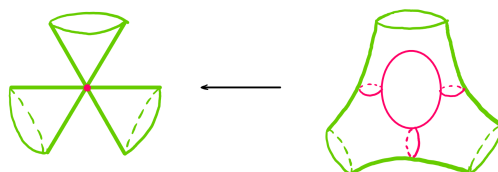
由此得到 \mathbb{C}^2/Γ 同构于 \mathbb{C}^3 中由方程 $x^n + yz = 0$ 所定义的超曲面.

Klein 在其 1884 年出版的《二十面体及五次方程求解讲义》中发现所有的 \mathbb{C}^2/Γ 都同构于 \mathbb{C}^3 中的一个超曲面. 这些曲面方程可以具体写出来:

- $\Gamma = C_{n+1}$: $x^{n+1} + yz = 0$, 称为 A_n 型 Klein 奇点;
- $\Gamma = BD_{4n}$: $xy^2 - x^{n-1} + z^2 = 0$, 称为 D_n 型 Klein 奇点;
- $\Gamma = BT_{24}$: $x^4 + y^3 + z^2 = 0$, 称为 E_6 型 Klein 奇点;
- $\Gamma = BO_{48}$: $x^3 + xy^3 + z^2 = 0$, 称为 E_7 型 Klein 奇点;
- $\Gamma = BI_{120}$: $x^5 + y^3 + z^2 = 0$, 称为 E_8 型 Klein 奇点.

由 Hironaka Heisuke (广平中佑) 的大定理我们知道任何复代数簇都有解消 (resolution), 即可以通过一些代数的操作替换掉奇点从而使之变成光滑的. 一般而言, 给定代数簇都有许多不同的解消. 在二维情形, 可以证明存在唯一一个极小解消 (*minimal resolution*), 即别的任何解消都是在此解消之上再做操作得到的. Du Val (杜瓦尔) 在 1934 年构造出了所有 Klein 奇点的极小解消. 他发现对于这个解消 $\pi: Z \rightarrow \mathbb{C}^2/\Gamma$, 其例外纤维 $\pi^{-1}(o)$ 是一串的 \mathbb{P}^1 . 这些不同分支之间的相交数正好构成 *ADE* 型的 Cartan 矩阵. 换言之, $\pi^{-1}(o)$ 的对偶图 (即每个分支为一个顶点, 两个分支如果相交则相应顶点之间连一条线) 恰好就是相应的 *ADE* 型 Dynkin 图.

右图为 D_4 型 Klein 奇点的极小解消的示意图. 可以看到极小解消的例外纤维有 4 个分支 (图中紫红色部分), 它们的对偶图正好是 D_4 的 Dynkin 图.



4. McKay 对应及其发展

对于 $SL(2, \mathbb{C})$ 中的有限子群 Γ , 由前面两节的介绍我们知道 Γ 所对应的 McKay 图 (去掉平凡表示) 与 \mathbb{C}^2/Γ 极小解消 $\pi: Z \rightarrow \mathbb{C}^2/\Gamma$ 的例外纤维的对偶图完全一样, 特别地, 这两个图的顶点有个一一对应. 翻译过来, 我们得到如下的表示与几何之前的一个对应, 称为 *McKay 对应* (*McKay correspondence*).

$$\boxed{\Gamma \text{ 的非平凡不可约表示}} \longleftrightarrow \boxed{\text{例外纤维 } \pi^{-1}(o) \text{ 的不可约分支}}$$

这个对应是基于一个巧妙的观察, 但是其对于后面相关方向的发展起了先导作用. 一个自然的问题是: 如何用几何方法来实现该对应?

Gonzalez-Sprinberg 及 Verdier 在其 1983 年的文章中 [GSV] 给出了 McKay 对应的几何构造. 主要想法是 \mathbb{C}^2/Γ 的基本群就是 Γ , 所以任一 Γ 的不可约非平凡表示 V 都诱导

出光滑开集 $(\mathbb{C}^2 \setminus 0)/\Gamma$ 上的一个向量丛 F . 他们注意到 F 通过极小解消 $\pi: Z \rightarrow \mathbb{C}^2/\Gamma$ 的拉回 (只是定义在 Z 的一个开集上面) 可以延拓为 Z 上的一个向量丛, 记为 F_V . 他们的主要结果是不可约表示 V 对应于向量丛 F_V 的第一陈类的对偶, 而这个对偶就是 π 的例外纤维的某个分支.

McKay 对应能否推广到高维呢? 一般地, 给定有限子群 $\Gamma \subset \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, 商空间 $W := \mathbb{C}^n/\Gamma$ 也是一个仿射代数簇 $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^\Gamma)$. 由于 Γ 在 $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ 中, 所以 \mathbb{C}^n 上的体积元在 Γ 作用下是不变的, 从而诱导出 W 光滑部分上的一个体积元. 换言之, W 是一个奇异的 Calabi-Yau (卡拉比-丘成桐) 簇, 特别地, 其典范因子 K_W 是平凡的.

之前提到过的极小解消是二维代数簇所特有的, 一般高维代数簇没有极小解消. 作为替代, 我们引入无差解消 (crepant resolution): 即满足 K_Z 平凡的解消 $\pi: Z \rightarrow W$, 换言之, 保持典范因子的解消. 在二维情形, 无差解消就是极小解消. 值得注意的是无差解消不一定存在 (比如 $\mathbb{C}^4/(\pm Id)$ 就没有无差解消), 而且即使存在也不一定是唯一的. McKay 对应在高维情形就是说如果 $\pi: Z \rightarrow W$ 是一个无差解消, 则 Z 的很多拓扑性质都由 Γ 所决定. 特别地, 这些拓扑性质是不依赖于无差解消 π 的选取的. 当然从意识到这一点到正确叙述以及证明还是花了很长的时间的.

早在 1986 年左右, 物理学家 Vafa 等人定义了 \mathbb{C}^n/Γ 的弦论 Euler 数 (stringy Euler number), 并猜测该数就是 \mathbb{C}^n/Γ 的无差解消的 Euler 数. 在 1992 年左右, Reid 正式提出了高维的 McKay 对应的叙述:

猜想 4.1 设 $\Gamma \subset \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ 为一有限子群. 假设 $Z \rightarrow \mathbb{C}^n/\Gamma$ 为一个无差解消. 则有一自然对应

$$\begin{aligned} \mathrm{Irr}(\Gamma) &\longleftrightarrow H^*(Z, \mathbb{Z}) \text{ 的一组基,} \\ \mathrm{Conj}(\Gamma) &\longleftrightarrow H_*(Z, \mathbb{Z}) \text{ 的一组基.} \end{aligned}$$

特别地, Z 的 Euler 数等于 Γ 的共轭类的个数.

$\mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ 中的有限子群早在 20 世纪初已经被 Miller (米勒), Blichfeldt (布利克费尔特), Dickson (迪克森) 等人分类 (有 4 个无穷序列以及 8 个零散子群). 为了验证前面的猜想, 需要知道 \mathbb{C}^3/Γ 是否有无差解消. 经过多位代数几何学家的努力 (Ito, Markushевич (马尔库舍维奇), Nakamura, Reid, Roan 等人, 见 [Re] 及其参考文献), 最后发现对于所有 $\Gamma \subset \mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$, 其商空间 \mathbb{C}^3/Γ 都有无差解消 (这是三维所特有的). 进一步地, 他们对于这些无差解消验证了上述猜想.

在高维的情形, 猜想 4.1 关于 Euler 数的部分被 Batyrev 用 p 进制非 Euclid 积分的方法证明 [B], 而其余部分最终是由 Denef-Loeser 于 2002 年完全证明 [DL], 其关键之处在于 Kontsevich (孔采维奇) 提出的母题积分 (motivic integration). 猜想 4.1 也激发了更多的类似猜想, 比如导范畴意义下的对应: $D^b(\mathrm{Coh}(Z)) \sim D^b(\mathrm{Coh}(\mathbb{C}^n)^\Gamma)$, 该猜想在三维时被 Bridgeland-King-Reid 所证明 [BKR], 而高维类似猜想迄今还没有被完全证明. 现在只对于 $\Gamma \subset \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$ 的情形有证明 [BK]. 猜想 4.1 只确定了无差解消的同调群的加法结构, 那么是否能够确定其环结构呢? 这是当前非常热门的一个方向, 其主导猜想是阮勇斌提

出的无差解消猜测: \mathbb{C}^n/Γ 的轨形 (orbifold) 上同调 [CR] 是 Z 的量子上同调在某个参数的取值. 但是该猜想及其各种变形只对于很少的情形得到了验证.

时至今日, 还有不少与 McKay 对应相关的问题亟待有志之士去解决.

5. 幂零轨道

让我们再回到初始的问题 2.4: $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ 中的有限子群 Γ 的 McKay 图就是 ADE 型仿射 Dynkin 图, 那么 Γ 或 \mathbb{C}^2/Γ 又与 ADE 型的复单 Lie 代数有什么联系呢? 为了回答这个问题, 我们先介绍复单 Lie 代数中的一类有趣的代数簇: 即幂零轨道.

记 \mathfrak{g} 为一个复单 Lie 代数 (例如 $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$), G 为 \mathfrak{g} 的伴随 Lie 群 (例如 $\mathrm{PGL}(n+1, \mathbb{C})$). 群 G 在 \mathfrak{g} 上有个自然的伴随作用 (在经典 Lie 代数时, 这就是矩阵的共轭作用). 给定元素 $v \in \mathfrak{g}$, 记 \mathcal{O}_v 为 v 在此作用下的轨道, 则 $\mathcal{O}_v \simeq G/G_v$ 为一光滑流形, 其在 v 点的切空间自然地同构于 $[\mathfrak{g}, v]$. Kostant (科斯坦), Kirillov (基里洛夫) 及 Souriau 等人发现可以用 \mathfrak{g} 上的 Killing 形式 κ 来定义 \mathcal{O}_v 在 v 点切空间的一个非退化二次形式:

$$\omega_v : T_v \mathcal{O}_v \times T_v \mathcal{O}_v \rightarrow \mathbb{C}, \quad ([u, v], [u', v]) \mapsto \kappa([u, u'], v).$$

我们再用 G 作用把这个二次形式推到 \mathcal{O}_v 的所有切空间上, 从而得到 \mathcal{O}_v 上的 G 不变的非退化二次闭形式, 换言之, \mathcal{O}_v 是一个全纯辛流形. 特别地, \mathcal{O}_v 的维数一定是偶数且其典范因子一定是平凡的.

根据 Jordan (若尔当) 分解, \mathcal{O}_v 的几何可以分为两种情形: v 为半单的 (即 ad_v 在 \mathfrak{g} 上的线性变换 $u \mapsto [v, u]$ 可以对角化) 或幂零的 (即 ad_v 是幂零的线性变换). 对于前者, \mathcal{O}_v 在 \mathfrak{g} 中是闭的, 所以它自然成为一闭子代数簇, 称为半单轨道. 而对于幂零情形, \mathcal{O}_v 在 \mathfrak{g} 中不是闭的 (除了 $v = 0$). 记 $\overline{\mathcal{O}_v}$ 为其在 \mathfrak{g} 中的闭包, 称为幂零轨道闭包. 容易证明 $\overline{\mathcal{O}_v}$ 一定是奇异的代数簇, 从而带来了许多有意思的几何.

在经典 Lie 代数的情形, 幂零轨道就是幂零元素的共轭类. 特别地, 它们唯一地由其 Jordan 标准型中 Jordan 块的大小所决定. 比如 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$, 则幂零轨道一一对应于数 $n+1$ 的剖分. 其它经典 Lie 代数中的幂零轨道一一对应于满足某些条件的数的剖分. 可以证明任何复单 Lie 代数中幂零轨道的个数都是有限的, 且其闭包由一些幂零轨道组成.

记 \mathcal{N} 为 \mathfrak{g} 中所有幂零元素组成的集合, 称为 \mathfrak{g} 的幂零锥. 则 \mathcal{N} 为 \mathfrak{g} 中所有幂零轨道的并. 据前所述, 这是一个有限并, 从而一定有一个开轨道, 记之为 $\mathcal{O}_{\mathrm{prin}}$, 称为主轨道 (principal orbit). 可以证明 \mathcal{N} 的边界 $\mathcal{N} \setminus \mathcal{O}_{\mathrm{prin}}$ 仍然为一个轨道 (称为次主轨道, 记为 $\mathcal{O}_{\mathrm{sub}}$) 的闭包. 次主轨道 $\mathcal{O}_{\mathrm{sub}}$ 在 \mathcal{N} 中的余维数为 2.

例子 5.1 让我们看一个简单的例子 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, 其上元素 $v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ 是幂零的当且仅当 $a^2 + bc = 0$. 从而 \mathfrak{g} 中所有幂零元素组成的集合 \mathcal{N} 同构于 \mathbb{C}^3 中的超曲面 $x^2 + yz = 0$. G 在 \mathcal{N} 上的作用有两个轨道: 主轨道以及零轨道 (也是次主轨道), 他们分别对应于 2 的剖分 [2] 及 [1, 1].

回忆一下, $x^2 + yz = 0$ 正好是之前我们讲到的 A_1 型 Klein 奇点. 也就是说, 子群 $\Gamma = \pm Id \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ 的 McKay 图就是一个点, 作为 Dynkin 图, 它代表的就是 A_1 型 Lie

代数, 即 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. 而刚才的例子说明在 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 中的幂零锥 \mathcal{N} 就是 A_1 型的 Klein 奇点 \mathbb{C}^2/Γ ! 这是一个惊奇的巧合, 是不是对所有别的子群都对呢? 从而我们就得到了 Γ 与其对应的 Lie 代数 \mathfrak{g}_Γ 的联系了呢?

遗憾的是, 事实不是这么简单, 原因是 \mathcal{N} 的维数除了 A_1 型 Lie 代数之外都至少是四维的, 所以不可能成为某个 Klein 奇点. 那么究竟 Γ (或 \mathbb{C}^2/Γ) 与 Lie 代数 \mathfrak{g}_Γ 有没有直接的联系呢?

6. Springer 解消

记 \mathfrak{g} 为一复单 Lie 代数, G 为其伴随 Lie 群, $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}$ 为一个幂零轨道. 如前所述, \mathcal{O} 在 \mathfrak{g} 中的闭包 $\overline{\mathcal{O}}$ 虽然是奇异的, 但是其典范因子是平凡的. 类似于之前 \mathbb{C}^n/Γ 的情形, 我们称双有理射影态射 $\pi: Z \rightarrow \overline{\mathcal{O}}$ 为无差解消, 如果 Z 是光滑的且其典范因子也是平凡的. 可以验证, 此时 \mathcal{O} 上的辛形式延拓到 Z 上的一个全纯辛形式, 从而 Z 成为一个全纯辛代数流形. 与之前类似地, 一个基本问题是 $\overline{\mathcal{O}}$ 是否有无差解消? 如果有, 那么一共有多少个呢?

对于幂零锥 \mathcal{N} , Springer 构造出了一个无差解消: 取 G 中的一个 Borel (博雷尔) 子群 $B \subset G$, 则 G/B 为一射影旗簇. G 在 G/B 上的自然作用诱导一个在其余切丛 $T^*(G/B)$ 上的 Hamilton (汉密尔顿) 作用, 从而得到一个动量映射 (moment map):

$$\pi: T^*(G/B) \rightarrow \mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}.$$

可以证明, π 的像就是 \mathcal{N} , 且映射 $\pi: T^*(G/B) \rightarrow \mathcal{N}$ 是一个解消. 由于 $T^*(G/B)$ 具有平凡的典范因子, 所以 π 是一个无差解消.

对于 G 的一个抛物子群 $P \subset G$, 商簇 G/P 也是射影的. 与前类似, G 作用于 $T^*(G/P)$ 从而得到一个动量映射

$$\pi: T^*(G/P) \rightarrow \mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}.$$

Richardson (理查森) 证明了其像一定是 \mathfrak{g} 中的某个幂零轨道闭包 $\overline{\mathcal{O}_P}$ (这样的轨道叫 Richardson 轨道). 与之前不同的是, 映射 $\pi: T^*(G/P) \rightarrow \overline{\mathcal{O}_P}$ 不一定是双有理的: \mathcal{O}_P 中每个点的原像都是有限多个点 (个数就称为 π 的映射度). 当 π 是双有理时, 称之为 $\overline{\mathcal{O}_P}$ 的 Springer 解消, 此时得到 $\overline{\mathcal{O}_P}$ 的一个无差解消. 在 [F1] 中, 我证明了 $\overline{\mathcal{O}}$ 的任一无差解消一定是 Springer 解消. 特别地, 如果 $\overline{\mathcal{O}}$ 有无差解消, 则 \mathcal{O} 一定是 Richardson 轨道. 这个结论反过来是不对的. 由此出发, 我们可以得到具有无差解消的幂零轨道的分类.

让我们看 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ 的例子. 此时 G/B 同构于旗流形

$$\text{Flag} := \{V_\bullet \mid V_0 = 0 \in V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = \mathbb{C}^n, \dim V_i = i\}.$$

由此可以得到余切空间的描述

$$T^*(\text{Flag}) \simeq \{(V_\bullet, A) \in \text{Flag} \times \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \mid A(V_i) \subset V_{i-1}, i = n, \dots, 1\}.$$

在此同构下, Springer 解消 $\pi: T^*(G/B) \rightarrow \mathcal{N}$ 就是 $T^*(\text{Flag}) \rightarrow \mathcal{N}$ 的自然映射 $(V_\bullet, A) \mapsto A$ (注意到 $A^n = 0$, 所以 $A \in \mathcal{N}$), 从而态射 π 是射影的. 根据定义可得:

$$\mathcal{O}_{\text{prin}} = \{A \in \mathcal{N} \mid \text{rk}(A) = n - 1\}, \quad \mathcal{O}_{\text{sub}} = \{A \in \mathcal{N} \mid \text{rk}(A) = n - 2\}.$$

让我们来看看这两个轨道上的点的原像是什么. 注意到对于任一给定 $A \in \mathcal{N}$,

$$\pi^{-1}(A) = \{V_\bullet \in \text{Flag} \mid A(V_i) \subset V_{i-1}, i = n, \dots, 1\}$$

如果 $rk(A) = n - 1$, 则由维数原因必然有 $V_i = \text{Ker}(A^i)$, 所以 π 是双有理的, 从而得到 \mathcal{N} 的一个无差解消.

考察 $rk(A) = n - 2$ 的情形. $V_\bullet \in \pi^{-1}(A)$ 当且仅当 $A(V_i) \subset V_{i-1}, i = n, \dots, 1$. 注意到 $A^i(V_i) = 0$ 以及 $\text{Im}(A^{n-i}) = A^{n-i}(V_n) \subset V_i$, 从而有

$$\text{Im}(A^{n-i}) \subset V_i \subset \text{Ker}(A^i).$$

由于 $rk(A) = n - 2$, 我们有

$$\dim(\text{Im}(A^{n-i})) = i - 1, \quad \dim(\text{Ker}(A^i)) = i + 1.$$

由此容易得到 $\pi^{-1}(A)$ 其实由如下的 $n - 1$ 个不可约分支构成:

$$L_k = \{\text{Im}(A^{n-2}) \subset \text{Im}(A^{n-3}) \cdots \subset \text{Im}(A^k) \subset V_{n-k} \subset \text{Ker}(A^{n-k}) \subset \text{Ker}(A^{n-2}) \subset \mathbb{C}^n\}.$$

注意到每个分支都同构于 \mathbb{P}^1 , 并且 $L_i \cap L_j \neq \emptyset$ 当且仅当 $|i - j| = 1$, 此时两个分支相交于一个点. 换言之, $\pi^{-1}(A)$ 的对偶图就是由 $n - 1$ 个顶点连成的 A_{n-1} 型 Dynkin 图.

回忆一下, A_{n-1} 型的 Klein 奇点的极小解消的例外纤维正好也是 $n - 1$ 条 \mathbb{P}^1 , 且其对偶图就是 A_{n-1} 型 Dynkin 图. 更进一步, 是不是 \mathcal{N} 沿其余二维的边界 \mathcal{O}_{sub} 的奇点就是 Klein 奇点呢? 这就是 Grothendick (格罗滕迪克) 的一个猜想. 该猜想最后被 Brieskorn (布里斯科恩) 所证明 [Br]. 终上所述, 我们得到下面的联系, 从而回答了我们之前一直在探索的问题.

$$\begin{aligned} \Gamma \subset \text{SL}(2, \mathbb{C}) \text{ 有限子群} &\longleftrightarrow \text{McKay 图所对应的复单 Lie 代数 } \mathfrak{g}_\Gamma \longleftrightarrow \\ \mathfrak{g}_\Gamma \text{ 的幂零锥 } \mathcal{N} \text{ 沿 } \mathcal{O}_{sub} \text{ 的奇点} &\text{就是 } \mathbb{C}^2/\Gamma. \end{aligned}$$

更进一步地, 我们可以问 \mathcal{N} 沿着更小一些轨道的奇点又长什么样子呢? 这个问题迄今还没有被人深入研究过, 主要问题是这些奇点越来越复杂, 也不是我们通常遇到的奇点. 当然从另一方面看, 这些奇点也是非常好的奇点, 因为他们都具有无差解消 (由 Springer 解消限制得到). 这可能是一个值得继续深入研究的方向. 另外一个问题是如果把 \mathcal{N} 换成别的幂零轨道闭包呢? 即研究 $\overline{\mathcal{O}}$ 的一般奇点. 该问题在 Brieskorn 的结果之后就被不少数学家研究过. 经典 Lie 代数的情形最后由 Kraft-Procesi [KP] 完全解决. 而例外 Lie 代数的情形最近才被我们解决 [FJLS].

插曲 6.1 我们解释一下 $\overline{\mathcal{O}}$ 沿着某一轨道 \mathcal{O}' 的奇点含义. 任取 $x \in \mathcal{O}'$, 根据 Jacobson-Morozov (雅各布森-莫罗佐夫) 的定理, 可以找到 $y \in \mathcal{O}', h \in \mathfrak{g}$, 使得 $\mathbb{C}\langle x, y, h \rangle$ 作为 Lie 代数同构于 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. 过 x 点的仿射空间

$$S_x := \{z \in \mathfrak{g} \mid [z - x, y] = 0\}$$

被称为 x 点的 Slodowy 切片 (Slodowy slice). 可以证明, \mathcal{N} 在 x 点附近同构于 \mathcal{O}' 与 $S_x \cap \mathcal{N}$ 的乘积, 所以 $S_x \cap \mathcal{N}$ 包含了 \mathcal{N} 在 x 点附近的奇点信息. 类似地, $S_x \cap \overline{\mathcal{O}}$ 则包含了 $\overline{\mathcal{O}}$ 在 x 的奇点信息, 从而我们称 $S_x \cap \overline{\mathcal{O}}$ 的奇点类型为 $\overline{\mathcal{O}}$ 沿轨道 \mathcal{O}' 的奇点.

例子 6.2 设 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$. 考察 \mathcal{O}_{sub} 中的如下元素 x, y 以及 $h \in \mathfrak{g}$:

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则 x, y, h 张成一个 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. 从而得到 x 点的 Slodowy 切片:

$$S_x = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{a}{2} & 1 & 0 \\ b & \frac{a}{2} & c \\ d & 0 & -a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C} \right\}.$$

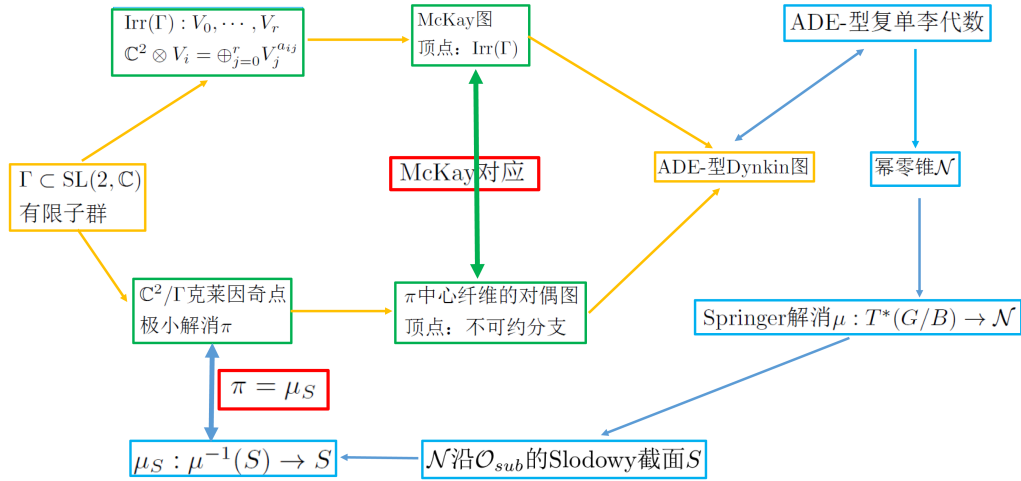
经过简单计算可以得到

$$S_x \cap \mathcal{N} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{a}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{3a^2}{4} & \frac{a}{2} & c \\ d & 0 & -a \end{pmatrix} \mid a, c, d \in \mathbb{C}, a^3 = cd \right\}.$$

这说明 $S_x \cap \mathcal{N}$ 同构于 \mathbb{C}^3 中由方程 $x^3 = yz$ 所定义的超曲面. 这正正好就是 A_2 型的 Klein 奇点, 由此我们直接证明了此时的 Grothendieck 猜测. 类似计算可以对所有经典 Lie 代数进行, 这是一个有趣的高等代数的练习题!

而我们之前关于 Springer 解消在 \mathcal{O}_{sub} 上某点 x 的纤维的计算就说明了 $\pi^{-1}(S_x \cap \mathcal{N}) \rightarrow S_x \cap \mathcal{N}$ 就是 Klein 奇点的极小解消.

总结一下, 我们迄今为止所讲的内容如下:



7. Springer 对应

固定复单 Lie 代数 \mathfrak{g} 及其伴随 Lie 群 G . 考察 \mathcal{N} 的 Springer 解消 $\pi : T^*(G/B) \rightarrow \mathcal{N}$. 对于 $x \in \mathcal{N}$, 称 $\mathcal{B}_x := \pi^{-1}(x)$ 为 x 点的 Springer 纤维. 因 \mathcal{N} 是正规的, 由 Zariski (扎里斯基) 主定理知道 \mathcal{B}_x 是连通的. 由 Spaltenstein 的一个定理知道, \mathcal{B}_x 的每个不可约分支的维数都是 $\frac{1}{2}\text{codim}_{\mathcal{N}}(\mathcal{O}_x)$. 一般而言, \mathcal{B}_x 有许多分支, 而且分支之间的构形可以非常复杂, 迄今为止只对很特殊的 x 我们知道得比较清楚. 现在还有不少人试图从各个方面增加对于 \mathcal{B}_x 的了解.

例子 7.1 由于 π 是双有理的, 当 x 在主轨道 \mathcal{O}_{prin} 时, \mathcal{B}_x 就是一个点. 上节我们提到的 Brieskorn 定理就说明了当 $x \in \mathcal{O}_{sub}$ 时, \mathcal{B}_x 是由一堆树状的 \mathbb{P}^1 构成, 其对偶图就是 \mathfrak{g} 的 Dynkin 图. 另外一个简单情形是 $x = 0$, 则 \mathcal{B}_x 就是 G/B .

记 $H(\mathcal{B}_x) = H^0(\mathcal{B}_x, \mathbb{C})$ 为由 \mathcal{B}_x 的各个不可约分支所张成的 \mathbb{C} 复向量空间. 这是一个有限维的向量空间. G 在 x 点的稳定子群 G_x 自然地作用在 \mathcal{B}_x 上. 记 A_x 为 G_x 的分支群 (component group), 即 $A_x = G_x/G_x^\circ$, 可以证明这是一个有限群. 注意到

$$H(\mathcal{B}_x) = H^0(\mathcal{B}_x, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C},$$

而 $H^0(\mathcal{B}_x, \mathbb{Z})$ 是个离散群, 从而连续群 G_x° 在其上 (及 $H(\mathcal{B}_x)$ 上) 的诱导作用是平凡的. 这样我们就得到 A_x 在 $H(\mathcal{B}_x)$ 上的作用, 这个作用从几何上看就是所谓的单换作用 (monodromy action). 换言之, $H(\mathcal{B}_x)$ 是有限群 A_x 的一个有限维复表示. 从而可以写成一些不可约表示的直和形式:

$$H(\mathcal{B}_x) = \bigoplus_{\rho \in \text{Irr}(A_x)} V_\rho \otimes H(\mathcal{B}_x)_\rho,$$

这里 V_ρ 指 A_x 的不可约表示 ρ 所对应的向量空间, 而 $H(\mathcal{B}_x)_\rho$ 是该分解的 ρ 同型分量 (isotypical component), 即一个向量空间, 其维数为 ρ 在 $H(\mathcal{B}_x)$ 中的重数. 如何确定 / 理解这个向量空间呢?

记 \mathcal{W} 为 G 的 Weyl (外尔) 群. 这是一个有限群, 但是它没有在 \mathcal{B}_x 上的作用. Springer 在 [S] 中发现了如下令人惊叹不已的事实: Weyl 群 \mathcal{W} 在 $H(\mathcal{B}_x)$ 上有个自然的作用使得 $H(\mathcal{B}_x)_\rho$ (如若非零) 是一个 \mathcal{W} 的不可约表示. 反之, 每个 \mathcal{W} 的不可约表示都是某个 $H(\mathcal{B}_x)_\rho$. 由此我们得到如下的 Springer 对应 (Springer correspondence), 这是几何表示的一个奠基性工作.

$$\boxed{\text{Weyl 群 } \mathcal{W} \text{ 的不可约表示}} \longleftrightarrow \boxed{\{(\mathcal{O}, \rho) \mid \rho \in \text{Irr}(A_x), H(\mathcal{B}_x)_\rho \neq 0\}}$$

例子 7.2 当 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ 时, Weyl 群 $\mathcal{W} \simeq \mathcal{S}_n$ 为 n 次对称群. 此时 $A_x = 1$, 从而 Springer 的定理说明 $H(\mathcal{B}_x)$ 就是 \mathcal{S}_n 的一个不可约表示. 换言之, $\text{Irr}(\mathcal{S}_n)$ 一一对应于 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ 中的幂零轨道, 而后者对应于数 n 的剖分. 注意到数 n 的剖分也一一对应于 \mathcal{S}_n 的共轭类, 从而我们得到一个自然的对应

$$\text{Irr}(\mathcal{S}_n) \longleftrightarrow \text{Conj}(\mathcal{S}_n).$$

回忆一下, 在 §2 中我们提到对于一般有限群, 这两个集合的阶数一样, 但其间没有一个自然的双射. 但是对于对称群 \mathcal{S}_n , 我们通过 Springer 对应得到了一个自然的双射.

我们来看看例子 7.1 中提到的情形: $x \in \mathcal{O}_{prin}$ 时, $H(\mathcal{B}_x)$ 对应于群 \mathcal{S}_n 的平凡表示. $x = 0$ 时, $H(\mathcal{B}_x)$ 对应于群 \mathcal{S}_n 的符号表示 (sign representation). $x \in \mathcal{O}_{sub}$ 时, $H(\mathcal{B}_x)$ 对应于群 \mathcal{S}_n 的反射表示 (reflection representation).

那么 Weyl 群在 $H(\mathcal{B}_x)$ 上的作用是怎么来的呢? Springer 在文 [S] 中的构造比较复杂, 我们下面介绍后来 Ginzburg 所给出的一个几何构造.

考察如下的 Steinberg (斯坦伯格) 簇

$$Z = T^*(G/B) \times_{\mathcal{N}} T^*(G/B).$$

可以证明

$$Z = \bigsqcup_{w \in \mathcal{W}} T_{Y_w}^*(G/B \times G/B)$$

为一些余切法丛的无交并, 这里 $Y_w \subset G/B \times G/B$ 是 G 在 $G/B \times G/B$ 上的轨道, 特别地, Z 的不可约分支的个数与 Weyl 群 \mathcal{W} 的阶数相同. 与前类似地, 记 $H(Z) = H^0(Z, \mathbb{C})$ 为 Z 的不可约分支所张成的 \mathbb{C} 向量空间, 其维数为 \mathcal{W} 的阶数. 定义如下沿 i, j 分量的投射:

$$p_{ij} : T^*(G/B) \times_{\mathcal{N}} T^*(G/B) \times_{\mathcal{N}} T^*(G/B) \rightarrow T^*(G/B) \times_{\mathcal{N}} T^*(G/B).$$

我们定义 $H(Z)$ 上的如下卷积:

$$\forall \alpha, \beta \in H(Z), \quad \alpha * \beta = (p_{13})_*(p_{12}^* \alpha \cdot p_{23}^* \beta).$$

这使得 $H(Z)$ 成为一个 \mathbb{C} 代数. 记 $\mathbb{C}[\mathcal{W}]$ 为 \mathcal{W} 的群代数, 这也是一个 \mathbb{C} 代数. Ginzburg 的结果 [CG] 说明存在一个自然的 \mathbb{C} 代数同构: $\mathbb{C}[\mathcal{W}] \simeq H(Z)$.

定义如下沿第 (1, 3) 分量以及 (2, 3) 分量的投射:

$$q_{13}, q_{23} : T^*(G/B) \times T^*(G/B) \times pt \rightarrow T^*(G/B) \times pt.$$

类似地定义 q_{12} . 我们可以在 $H(\mathcal{B}_x)$ 上定义一个 $H(Z)$ -模结构:

$$\forall \alpha \in H(Z), u \in H(\mathcal{B}_x), \quad \alpha * u = (q_{13})_*(q_{12}^* \alpha \cdot q_{23}^* u),$$

这里把 $T^*(G/B) \times pt$ 等同于 $T^*(G/B)$. 而由前所述, $H(Z) \simeq \mathbb{C}[\mathcal{W}]$, 所以这样得到 $H(\mathcal{B}_x)$ 是 Weyl 群 \mathcal{W} 的一个表示.

插曲 7.3 用深刻的分解定理 (decomposition theorem), 我们可以把上述构造推广到非常一般的情形: $\pi : X \rightarrow Y$ 是半小 (semi-small) 的双有理映射 (即纤维的维数小于轨道 (orbit) 的余维数的一半的映射). 此时定义 $Z = X \times_Y X$, 则类似可以得到如下的代数同构

$$H(Z) \simeq \bigoplus_{\phi=(\alpha, \rho)} \text{End}(H(F_\alpha)_\rho),$$

这里 F_α 为 π 在 $\alpha \in Y$ 的纤维. 从而可以得到 $H(Z)$ 是半单的, 其所有有限维不可约表示都可以用 π 的纤维的几何来实现. 关键问题是怎么选取好的 π 使得 $H(Z)$ 成为我们熟悉的代数 (比如群代数). 我们可以把类似构造应用到一般的 Springer 解消 $T^*(G/P) \rightarrow \overline{\mathcal{O}}_P$ 上或者更一般地应用到辛解消上面. 这些解消都是半小的.

8. McKay 遇见 Springer?

回顾一下 McKay 对应说的是对于任何 $\Gamma \subset \text{SL}(n, \mathbb{C})$, 如果 $\pi : X \rightarrow \mathbb{C}^n/\Gamma$ 是一个无差解消, 则 $\pi^{-1}(0)$ 的拓扑都是由 Γ 所唯一确定的 (因为 \mathbb{C}^n 上的 \mathbb{C}^* 作用把 X 同伦等价到其中心纤维). 特别地, $\pi^{-1}(0)$ 中的每个不可约分支代表了 Γ 的一个不可约表示. 我们用 $\text{Irr}_0(\Gamma) \subset \text{Irr}(\Gamma)$ 来记所有这些表示的集合, 其阶正好为 $H(\pi^{-1}(0))$ 的维数.

而 Springer 对应是对于 Springer 解消: $\mu : T^*(G/B) \rightarrow \mathcal{N}$, 任一点 $x \in \mathcal{N}$ 的纤维的最高同调 $H(\mathcal{B}_x)$ 都是 G 的 Weyl 群 \mathcal{W} 的一个表示. 这两个对应看上去非常相似, 但又有本质的不同: 因为这两种解消是完全不同的. 问题是: 他们有没有可能一样? McKay 能遇见 Springer 吗?

考察最原始的例子 $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ 及其极小解消 $\pi : X \rightarrow \mathbb{C}^2/\Gamma$. 由最初 McKay 的结果, 我们知道 $\mathrm{Irr}_0(\Gamma)$ 是 Γ 所有非平凡的不可约表示的集合. 由 Brieskorn 的定理我们知道: 在 Γ 所对应的复单 Lie 代数 \mathfrak{g}_Γ 中, 记 S_x 为点 $x \in \mathcal{O}_{\mathrm{sub}}$ 的 Slodowy 切片, 则 $S_x \cap \mathcal{N} \simeq \mathbb{C}^2/\Gamma$. 特别地, 把 Springer 解消 $\mu : T^*(G/B) \rightarrow \mathcal{N}$ 限制到 $S_x \cap \mathcal{N}$ 上, 我们得到 \mathbb{C}^2/Γ 的极小解消, 即 Springer 解消与极小解消可以联系起来! 换言之, 我们有 $\pi^{-1}(0) = \mathcal{B}_x$, 容易验证此时 $A_x = 1$, 所以 $H(\mathcal{B}_x) = H(\pi^{-1}(0))$ 是 \mathcal{W} 的一个不可约表示! 从而 McKay 对应与 Springer 对应结合, 我们得到新的 Γ 与 \mathfrak{g}_Γ 的 Weyl 群 \mathcal{W} 的直接联系:

$\mathrm{Irr}_0(\Gamma)$ 所张成的向量空间是 \mathfrak{g}_Γ 的 Weyl 群 \mathcal{W} 的一个不可约表示!

注意到 $\mathrm{Irr}(\Gamma)$ 就是 $\mathrm{Irr}_0(\Gamma)$ 并上平凡表示, 所以如果我们把平凡表示作为 \mathcal{W} 的平凡表示, 则我们得到 $\mathrm{Irr}(\Gamma)$ 张成的 \mathbb{C} 向量空间是一个 \mathcal{W} 模, 为两个不可约的 \mathcal{W} 表示的直和!

这个观察能否推广到高维呢? 为此, 我们需要在 \mathcal{N} 的某些 Slodowy 切片中找出同构于 \mathbb{C}^n/Γ 的例子. 第一个这样的例子是我在 2007 年首先发现的 [F2]. 这里取 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(6, \mathbb{C})$ 及 $x \in \mathcal{O}_{[2,2,2]}$. 我们证明了 Slodowy 切片与 \mathbb{C}^4 的某些有限商的同构:

$$S_x \cap \overline{\mathcal{O}_{[4,2]}} \simeq \mathrm{Sym}^2(\mathbb{C}^2/\pm 1) \simeq \mathbb{C}^4/\Gamma,$$

这里 Γ 为一个八阶的有限群. \mathbb{C}^4/Γ 有两个无差解消

$$\pi_i : Z_i \rightarrow \mathbb{C}^4/\Gamma,$$

它们由一个 Mukai 复络 (flop) 所联系起来. 而幂零轨道闭包 $\overline{\mathcal{O}_{[4,2]}}$ 恰好有两个 Springer 解消:

$$\mu_i : T^*(G/P_i) \rightarrow \overline{\mathcal{O}_{[4,2]}},$$

这两个 Springer 解消限制到 Slodowy 切片正好给出 \mathbb{C}^4/Γ 的两个无差解消. 此时 π 的中央纤维 $\pi_i^{-1}(0) = \mathbb{P}^2 \cup F_4$, 这里 F_4 为一个 Hirzebruch (希策布鲁赫) 曲面, 从而得到 $\mathrm{Irr}_0(\Gamma) \simeq \mathbb{Z}_2$. 而 P_i 的 Weyl 群是 $\mathcal{W}_{P_i} \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, 由此得到它的一个二维表示. 由于 \mathcal{W}_{P_i} 是 Abel 群, 所以它的所有不可约表示都是一维的, 从而该表示是两个一维表示的直和.

在 [FJLS] (以及后续文章) 中我们还发现了多个类似的例子. 当然更多的例子还亟待大家的发现!

致谢 席南华院士对本文初稿提出了宝贵的修改意见, 在此特别感谢!

参考文献

- [B] Batyrev, Victor V.: Non-Archimedean integrals and stringy Euler numbers of log-terminal pairs. J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 1 (1999), no. 1, 5–33.
- [Br] Brieskorn, E.: Singular elements of semi-simple algebraic groups, in: Actes du Congrès International des Mathématiciens, Tome 2, Nice, 1970, Gauthier-Villars, Paris, 1971, pp. 279–284.
- [BK] Bezrukavnikov, R. V.; Kaledin, D. B.: McKay equivalence for symplectic resolutions of quotient singularities. Proc. Steklov Inst. Math. 2004, no. 3 (246), 13–33.
- [BKR] Bridgeland, Tom; King, Alastair; Reid, Miles: The McKay correspondence as an equivalence of derived categories. J. Amer. Math. Soc. 14 (2001), no. 3, 535–554.

- [CG] Chriss, N.; Ginzburg, V.: Representation theory and complex geometry, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1997.
- [CR] Chen, Weimin; Ruan, Yongbin: A new cohomology theory of orbifold. Comm. Math. Phys. 248 (2004), no. 1, 1–31.
- [DL] Denef, Jan; Loeser, Francois: Motivic integration, quotient singularities and the McKay correspondence. Compositio Math. 131 (2002), no. 3, 267–290.
- [F1] Fu, Baohua: Symplectic resolutions for nilpotent orbits, Invent. Math. 151(2003), 167–186.
- [F2] Fu, Baohua: Wreath products, nilpotent orbits and symplectic deformations. Internat. J. Math. 18 (2007), no. 5, 473–481.
- [FJLS] Fu, Baohua; Juteau, Daniel; Levy, Paul; Sommers, Eric: Generic singularities of nilpotent orbit closures, Adv. Maths. 305(2017), 1–77.
- [GSV] Gonzalez-Sprinberg, G.; Verdier, J.: Construction géométrique de la correspondance de McKay, Ann. sci. ENS 16 (1983), 409–449.
- [KP] Kraft, H.; Procesi, C.: On the geometry of conjugacy classes in classical groups. Comment. Math. Helv. 57 (1982), 539–602.
- [M] McKay, John: Graphs, singularities, and finite groups. pp. 183–186, Proc. Sympos. Pure Math., 37, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1980.
- [Re] Reid, M.: La correspondance de McKay, Séminaire Bourbaki (novembre 1999), no. 867, Astérisque 276 (2002), 53–72.
- [Ru] Ruan Yongbin: The cohomology ring of crepant resolutions of orbifolds. In Gromov-Witten theory of spin curves and orbifolds, volume 403 of Contemp. Math., pages 117–126. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [S] Springer, T. A.: Trigonometric sums, Green functions of finite groups and representations of Weyl groups. Invent. Math. 36 (1976), 173–207.

(上接 192 页)

这两个命题也就都被证明了. 为此, 令 ϑ 是这样一个测度, $\psi \in \mathcal{N}$, 并注意到

$$\vartheta(A) = \int_X |\mathbb{1}_A|^2 d\vartheta = \int_X |\mathbb{1}_A - \psi|^2 d\vartheta \leq \int_X |\mathbb{1}_A - \psi|^2 d\mu.$$

在 \mathcal{N} 上取下确界即得 $\vartheta \leq \mu_{ac}$.

现在, 令 η 是一个测度, 满足 $\eta \leq \nu$ 和 $\eta \leq \mu_s$. 在此情形, $\mu_{ac} + \eta \leq \mu$, 并且 $\mu_{ac} + \eta \ll \nu$, 因而 $\eta = 0$, 这蕴含着 ν 和 μ_s 是奇异的.

如果 $\mu = \mu_1 + \mu_2$, 其中 $\mu_1 \ll \nu$, 并且 $\mu_2 \perp \nu$, 则 $\mu_{ac} - \mu_1$ 是一个测度, 同时它是 ν 绝对连续的和 ν 奇异的. 这就导致 $\mu_1 = \mu_{ac}$, 因而分解是唯一的. ■

注 Anton R. Schep 指出, 在 μ_{ac} 的定义中指数 2 是不必要的, 利用 \mathcal{L}^1 半范数, 相同的证明是有效的. 这样我们可以说, 绝对连续部分度量了子空间 \mathcal{N} 的特征函数的 \mathcal{L}^1 半距离.

参考文献

- [1] W. N. Anderson Jr, G. E. Trapp, Shorted operators II, SIAM J. Appl. Math. 28 (1975) 60–71.
- [2] M. G. Krein, The theory of self-adjoint extensions of semi-bounded Hermitian operators, Mat. Sbornik 10 (1947) 431–495.
- [3] Zs. Tarsay, A functional analysis proof of the Lebesgue-Darst decomposition theorem, Real Anal. Exchange 39 (2013) 219–226.

(陆柱家 译 陆昱 校)