Grothendieck 如何简化代数几何学

Colin McLarty

“概形的想法如孩童般简单 —— 如此简单，如此谦逊，在我之前没人梦见它屈尊到这个地步 ... 它由简单性和内在一致性的单一要求自发而来.”

—— A. Grothendieck, Récoltes et Semailles (R&S), p. P32, P28

代数几何学从来不是真的简单. 不管是在 David Hilbert (希尔伯特) 把它在他的代数体系下重铸前后，还是当 André Weil (韦伊) 把它引入数论的时候，代数几何学都不简单. Grothendieck (格罗滕迪克) 把关键想法变得简单. 正如早在 Emmy Noether (诺特) 时期就有的模糊直觉，他的概形概念给出了空间一种最简洁的定义. 他的导出函子上同调理论将追溯到 Bernhard Riemann(黎曼) 的见解修剪为一种适合艾达尔 (étale) 上同调的灵活的形式. 需要澄清的是，艾达尔上同调不是任何东西的简化. 这是一个根本的全新的想法，通过这些对 Bernhard Riemann 的见解的简化而变得可行.

Grothendieck 并不是直接从原始的资源中获得这一遗产，而是在与 Jean-Pierre Serre (塞尔) 追逐 Weil 猜想的共同研究中获得的. Weil 和 Serre 都深深地贡献了整个遗产. 原始的想法与 Grothendieck 的迅速重新提法接近.

1. 一般性的表象

Grothendieck 对一般性的著名偏好不足以解释他的结果或是影响. Raoul Bott (博特) 在 54 年前通过描述 Grothendieck-Riemann-Roch (罗赫) 定理更好地展示了这点.

Riemann-Roch 成为分析学的主流已经有 150 年的历史，它展示了 Riemann 面的拓扑如何影响了它上面的分析. 从 Richard Dedekind (戴德金) 到 Weil 的数学家们把这个定理推广到了取代复数域的任何域的曲线上. 这使得算术的定理可以从模素数 p 整数的域 $\mathbb{F}_p$ 上的拓扑和分析原因得到. Friedrich Hirzebruch (希策布鲁赫) 推广了复数域的情形使得定理可以适用于所有维数.

Grothendieck 在所有域的所有维数上证明了这个定理. 这已经是一项壮举，并且他以一种特有的方式更进了一步. 除了单个的簇，他还证明了定理对簇的一种适当的连续族也成立. 因此：

“Grothendieck 已经把定理推广到不仅比 Hirzebruch 的版本更好应用，而且证明更简单自然的情形.” (Bott (博特)[6])

这是他的新的上同调和初期概形理论的第一个具体胜利. 在意识到很多数学家不相

译自： Notices of the AMS, Vol. 63 (2016), No. 3, p. 256–265, How Grothendieck Simplified Algebraic Geometry, Colin McLarty.

作者是美国 Case Western Reserve University 的哲学 Truman P. Hardy 讲座教授和数学教授，他的邮箱地址是 colin.mcLarty@case.edu.

信一般性之后，他写道：

“我更喜欢强调 ‘统一性’ 而不是 ‘一般性’. 但是对我来说这是一个方面的两种样子. 统一性代表了深刻的一面，而一般性代表了浅显的一面.” [16, p. PU25]

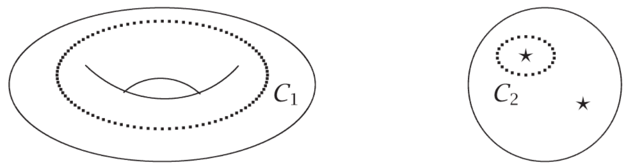
2. 上同调的开始

“带洞的曲面不仅仅是一个有趣的消遣，而是在方程理论中有非常基础的重要性.”

(Atiyah (阿蒂亚) [4, p. 293])

Cauchy (柯西) 积分定理告诉我们，沿着一个 Riemann 曲面的任意区域的完全边界 1) 的任一个全纯形式 ω 的积分为 0. 为了看到它的重要性，我们考虑 Riemann 曲面上的两条不是完全边界的闭曲线 C. 每个都围绕一个洞，且每个都存在全纯形式 ω 使得 $\int_C \omega \neq 0$.

沿着环绕环面的中心洞的虚曲线 C_1 切开环面可以得到一根管子，且这个单个曲线 C_1 只能成为一端的边界.



图中右边这个 *带孔球面* (*punctured sphere*) 上的星表示孔 (也即洞). C_2 两边的区域在孔上都是无界的.

Riemann 用了这一点来计算积分. 任意围绕同样的洞同样次数的曲线 C 和 C' 关于所有的全纯形式 ω 都有 $\int_C \omega = \int_{C'} \omega$. 这是因为 C 和 C' 的逆构成了避免这些洞的一类领口 (collar) 的完全边界，因而 $\int_C \omega - \int_{C'} \omega = 0$.

现代的上同调把洞视为解方程的 *障碍* (*obstructions*). 给定 ω 和一条路径 $P : [0, 1] \mapsto S$, 通过寻找满足 $df = \omega$ 继而 $\int_P \omega = f(P_1) - f(P_0)$ 的函数 f 来计算积分 $\int_P \omega$ 是一件非常棒的事情. 显然，这样的函数并不总是存在，因为这会推出对所有的闭曲线 P 都满足 $\int_P \omega = 0$. 但是 Cauchy, Riemann 和其他人发现如果 $U \subset S$ 不围绕任何的洞，那么存在这样的函数 f_U 满足在整个 U 上有 $df_U = \omega$. 洞是导致这些局部解 f_U 无法粘成整个 S 上的方程 $df = \omega$ 的解的障碍.

这个概念被推广到代数和数论中：

“事实上，现在人们本能地假设上同调群是用来描述所有的障碍的最好方式.” [32, p. 103]

3. 上同调群

“有了同调，同调项按照一般加法法则结合 [24, p. 449–450].”

Poincaré (庞加莱) 定义了曲线的加法，使得 $C + C'$ 定义为 C 和 C' 的并，而 $-C$ 表示 C 的逆方向. 因此对所有的形式 ω:

$$\int_{C+C'} \omega = \int_C \omega + \int_{C'} \omega, \quad \text{并且} \quad \int_{-C} \omega = -\int_C \omega.$$

当曲线 $C_1, \ldots, C_k$ 构成某个区域的完全边界时，Poincaré 把它记作 $\sum_k C_k \sim 0$, 并称他们的和 *同调于* (*homologous to*) 0. 有了这些术语，Cauchy 积分定理可以简单地表述为：

1) 即同调类为 0 的边界.—— 译注

如果 $\sum_k C_k \sim 0$, 那么对所有的全纯形式 ω 有 $\int_{\sum_k C_k} \omega = 0$.

Poincaré 把同调的这个想法推广到高维作为他的 位置分析学 (*analysis situs*), 现今被称为流形拓扑学.

值得注意的是，Poincaré 用不同的定义发表了 *Poincaré* 对偶 (*duality*) 的两个证明. 他的第 1 个表述是错的. 他的证明混合了一些不合理的推理和惊人的洞察力. 对任意 n 维拓扑流形 M 和任意 $0 \le i \le n$, M 的 i 维子流形和 $n-i$ 维子流形之间有紧密的联系. 不用同调很难表示这种关系，Poincaré 必须修正他的第 1 种定义使之正确. 即便第 2 个版本也依赖于关于三角化流形的过于乐观的假设.

拓扑学家花了数十年澄清了他的定义和定理并在此过程中得到了新的结果. 他们对所有的空间 S 和所有的维数 $i \in \mathbb{N}$ 定义了同调群 $H_i(S)$. 在每个 H_1 中群加法是 Poincaré 关于曲线的加法模掉同调关系 $\sum_k C_k = 0$. 他们还定义了相关的上同调群 $\mathrm{H}^i(S)$, 使得 Poincaré 对偶描述为对所有的可定向 n 维紧流形 M, $\mathrm{H}_i(M)$ 同构于 $\mathrm{H}^{n-i}(M)$.

Poincaré 关于同调的两种定义发展成单形、开覆盖、微分形式、度量的理论，带我们到了 1939 年：

“代数拓扑正在发展和解决问题, 但是非拓扑学家对此非常怀疑. 在哈佛大学, Tucker (塔克), 或者也许 Steenrod (斯廷罗德) 给了关于胞腔复形和他们的同调理论的专家讲座, 之后据说有一位杰出的听众指出这个学科已经达到了一种使之不太可能继续深入的代数复杂性.” (MacLane (麦克莱恩) [21, p. 133])

4. 变系数和正合列

“Grothendieck 在他的 Kansas (1955 年) 和 *Tôhoku* (1957 年) 的论文中证明了对任意层的范畴能定义上同调群的概念.” (Deligne (德利涅) [10, p. 16])

代数的复杂性进一步加深. 拓扑方法与 Galois 理论的方法融合在一起给出了群和拓扑空间的上同调的定义. 在这个过程中, Poincaré 的技术细节成了上同调的关键, 也即系数的选取. 当然他和其他人都用了整数、有理数或实数或模 2 的整数作为系数：

$$a_1C_1 + \cdots + a_mC_m, \quad a_i \in \mathbb{Z}, \text{ 或}\mathbb{Q}, \text{ 或}\mathbb{R}, \text{ 或}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

但只有少数几种相关的系数为了计算的便利被选中使用. 故而拓扑学家把 $H^i(S)$ 写作 S 的第 i 阶上同调群，而让系数群隐含在上下文中.

相比之下, 群论学家用 $\mathrm{H}^i(G, A)$ 来表示 G 的系数取自 A 的第 i 阶上同调, 因为这时候用到许多不同种类的系数, 而他们本身就和群 G 一样有意思. 举例来说, 著名的 Hilbert 定理 90[1)] 就变成了

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}(L/k), L^\times) \cong \{0\}.$$

一个 Galois 域扩张 L/k 的 Galois 群 $\mathrm{Gal}(L/k)$ 有平凡的一维上同调，其系数落在所有非零 $x \in L$ 的乘法群 $L^\times$. Olga Taussky [33, p. 807] 通过在 Gauss 数 $\mathbb{Q}[i]$ 用它证明整数的

1) Hilbert 定理 90 是循环域扩张的一个重要结论. 它的叙述如下：如果 L/K 是一个循环域扩张，其 Galois 群为 $G = \mathrm{Gal}(L/K)$, 生成元为 s. 如果 $a \in L$ 的相对范数为 1, 则存在 $b \in L$, 使得 $a = s(b)/b$.—— 校注

每个 Pythagoras (毕达哥拉斯) 三元组有以下形式

$$m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2,$$

进而解释了定理 90.

平凡的上同调表示了对解决某些问题没有障碍，由此定理 90 说明了域 L 上某些问题有解. $\mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}(L/k), L^\times)$ 和其他上同调群之间的代数关系蕴含了那些问题的解. 当然在群上同调出现的数十年前定理 90 就被引入用来解决许多问题. 上同调把这些用途组织和推广得如此好，使得 Emil Artin (阿廷) 和 John Tate (泰特) 使其成为类域论的基础.

同样在 1940 年代，拓扑学家们也采用了系数 *层* (*sheaves*). 空间 S 上的 Abel (阿贝尔) 群层 $\mathcal{F}$ 对于有包含关系的开子集 $U \subseteq S$ 赋予 Abel 群 $\mathcal{F}(U)$, 对于每个子集的包含 (关系) $V \subseteq U$ 赋予同态 $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$. 因此全纯函数层 $\mathcal{O}_M$ 在复流形 M 的每个开子集 $U \subseteq M$ 上赋予了 U 上的全纯函数加法群 $\mathcal{O}_M(U)$. 形如 $\mathrm{H}^i(M, \mathcal{O}_M)$ 的上同调群开始整合复分析.

这些领域的带头人们把上同调看作统一的想法，但是技术上的定义却大相径庭. 在 Henri Cartan (嘉当) 研讨班上，报告者 Cartan, Eilenberg (爱伦伯格) 和 Serre (塞尔) 围绕着 *分解* (*resolutions*) 组织了这个研讨会. 一个 Abel 群 A (或者模或者层) 的分解是同态的 *正合列* (*exact sequece*), 也就是每个同态的像是下一个同态的核：

$$\{0\} \to A \to I_0 \to I_1 \to \cdots.$$

很快我们就能得到许多上同调群的列是正合的. 其证明依赖于 *蛇引理* (*Snake Lemma*), 它因在网上广泛可以看到的一部好莱坞情景而变得不朽：“一个清晰的证明是在电影 ‘It’s My Turn’ 开头由 Jill Clayburgh 给出的” [35, p. 11].

把上同调群 $\mathrm{H}^i(X, \mathcal{F})$ 放进合适的正合列可以证明 $\mathrm{H}^i(X, \mathcal{F}) \cong \{0\}$, 因此由 $\mathrm{H}^i(X, \mathcal{F})$ 衡量的障碍不存在. 或者这可以证明一些同构 $\mathrm{H}^i(X, \mathcal{F}) \cong \mathrm{H}^k(Y, \mathcal{G})$, 从而 $\mathrm{H}^i(X, \mathcal{F})$ 衡量的障碍意义恰恰对应于那些由 $\mathrm{H}^k(Y, \mathcal{G})$ 衡量的障碍.

群上同调用 *内射* (*injective*) 模 I_i 做分解. 一个环 R 上的模 I 是内射的, 如果对所有的 R 模包含 $j : N \rightarrowtail M$ 和同态 $f : N \to I$, 存在某个 $g : M \to I$, 使得 $f = gj$. 这个图表是简单的 (右图):

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, tail, "j"] \arrow[dr, "f"'] & M \arrow[d, dashed, "g"] \\ & I \end{tikzcd}$$

这个 [1] 有效是因为任一环 R 上的每个 R 模 A 可以嵌入到某个内射 R 模里面. 没人相信这个简单的东西可以对层成立. 层上同调一开始只对充分正则的空间来定义，用到了各种关于内射对象的更复杂的拓扑替代品. Grothendieck 发现了一个前所未有的证明，得到了所有拓扑空间上的层都有内射嵌入. 类似的证明后来对任何 *Grothendieck 拓扑* 上的层也成立.

5. Tôhoku[2]

“在给定的拓扑空间，或是如果你喜欢的话，在所有可以用来测量空间的 ‘米尺’ 的巨大仓库上考虑所有层构成的几何. 我们在这种 ‘集合’ 或 ‘仓库’ 上赋予它的最明显的结

1) “这个” 指内射分解.—— 校注
2) 指 Grothendieck 在《 Tôhoku Math. Journal 》上发表的著名的关于上同调的文章.—— 校注

构，看起来好像 ‘就在你鼻子前面’; 这就是我们称之为 ‘范畴’ 的结构. ” [16, p. P38]

我们不会完整定义层，更不用说 *谱序列* (*spectral sequences*) 和其他那些在 Cartan 讨论班 [R&S, p. 19] 的时候 Grothendieck“完全逃脱了” 的 “充满覆盖了黑板的箭头的画 (称为 “图”)”. 我们将看到为什么 Grothendieck 在 1955 年 2 月 18 日给 Serre 的信中写到：“我摆脱了对谱序列的恐惧” [7, p. 7].

Cartan 讨论班强调了群和模用在一些基本定理的几个细节. 那些定理仅用了同态的图. 如, Abel 群 A 和 B 的和 $A+B$ 在同构意义下可以用如下事实唯一定义：存在同态 $i_A : A \to A+B$ 和 $i_B : B \to A+B$, 并且任意两个同态 $f : A \to C$ 和 $g : B \to C$ 可以给出唯一的 $u : A+B \to C$ 满足 $f = ui_A$ 和 $g = ui_B$ (右图):

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_A"] \arrow[dr, "f"'] & A+B \arrow[d, dotted, "u"] & B \arrow[l, "i_B"'] \arrow[dl, "g"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

同样的图给出模或者 Abel 群层的和的定义.

Grothendieck [13, p. 127] 采用了被 Cartan 讨论班使用的基本模型作为他的 *Abel 范畴* (*category*) 公理. 他在无限余极限 (colimits) 上又加了一个公理，AB5. 定理 2.2.2 说，如果一个 Abel 范畴满足 AB5 加一个集合论公理，那么这个范畴里的任意对象可以嵌入一个内射对象. 这些从模范畴得到的公理对任意拓扑空间的 Abel 群层也成立，因此结论适用.

那些认为这个只是一个层上的技术性结果的人发现，这个工具和产出不成比例. 他们两方面都错了. 这些公理也简化了已为人所知的定理的证明. 尤其是他们将许多有用的谱序列 (不是所有) 包含在 *Grothendieck 谱序列* (*spectral sequence*) 中. 这个谱序列如 (Serre [11, p. 683] 中的) 习题 A.3.50 一般简单易得.

Serge Lang (朗) 的《代数学 (Algebra)》的早期版本给出了 Abel 范畴公理以及一个著名的习题：“拿出任一本关于同调代数学的书，并在不看那本书里的任何证明的情况下证明所有的定理”[20, p. 105]. 当同调代数学的书自己都开始用公理化的证明时，即使他们的定理仅对模的情形叙述，他放弃了这个事情. 例如 David Eisenbud 称他对模的证明 “只用一点努力就能推广到 [任何] 好的 Abel 范畴上”[11, p. 620].

任何 Abel 范畴里的内射分解给出了那个范畴的 *导出函子上同调* (*derived functor cohomology*). 这显然比任何事后已知的命题都要一般. Grothendieck 确信这是正确的一般化：对任意一个问题，特别是 Weil 猜想的上同调解，找到合适的 Abel 范畴.

6. Weil 猜想

“这一真正革命性的想法使当时的数学家们兴奋不已，我可以见证. ” [30, p. 525]

把算术联系到拓扑的 Weil 猜想立刻被意识到是一个巨大的成就. Weil 知道只是把他们构想出来就是他职业生涯中的一个伟大时刻. 他证明的情形令人印象深刻. 这个猜想太漂亮了，不可能不是真的而且还几乎不可能完全叙述.

Weil [37] 用了 19 世纪 Betti (贝蒂) 数的术语展示了这里的拓扑. 但是他是公认的上同调专家：

“那个时候，Weil 正在用上同调和 Lefschetz (莱夫谢茨) 的不动点公式解释事情，[但

是他] 并不想预测 [这真的能起作用]. 事实上，在 1949–1950 年，没人认为这个是可能的.”(Serre 在 [22, p. 305] 中引述.)

Lefschetz 依据流形的连续性，用上同调来计数流形上连续函数 $f : M \to M$ 的不动点 $x = f(x)$. Weil 猜想处理的是有限域上的空间. 那些中没有已知的版本是连续的. Weil 和任何人都不知道什么会有用. Grothendieck 说：

“Serre 在 1955 年左右用上同调的形式向我解释了 Weil 猜想，并且只有在这些形式下他们才可能 ‘钩住’ 我. 没人知道怎样定义这样的一个上同调，我也不知道除了 Serre 和我以外的任何人，甚至不是 Weil, 如果可能的话，深深的信服这样的东西必须存在.” [R&S, p. 840]

7. 概形理论到底简化了什么

“事实上，Kronecker (克罗内克) 试图描述并开始一个新的数学分支，它包含数论和代数几何学作为特殊情形.” (Weil [38, p. 90])

Riemann 对复曲线的处理留下了许多的几何直观. 因此 Dedekind 和 Weber (韦伯) [8, p. 181] 从 “一个简单但是严谨，而且完全一般的观点” 证明了任何包含有理数的代数闭域 k 上的 Riemann-Roch 定理. 他们注意到 k 可以是代数数的域. 他们看出这关系到算数和分析也看出所有这些太好了以至于他们的结果 “非常难以阐述和表达” [8, p. 235].

任意紧 Riemann 面 S 上的亚纯函数构成了复数域 $\mathbb{C}$ 上超越度数 1 的域 $M(S)$. 每个点 $p \in S$ 决定了一个从 $M(S)$ 到 $\mathbb{C} + \{\infty\}$ 的函数 e_p: 也即当 f 在 p 上有定义的时候 $e_p(f) = f(p)$, 当 f 在 p 处有极点的时候 $e_p(f) = \infty$. 那么，如果我们忽略和 $\infty + \infty$, 则有：

$$
\begin{gathered}
e_p(f+g) = e_p(f) + e_p(g), \\
e_p(f \cdot g) = e_p(f) \cdot e_p(g), \\
e_p\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{1}{e_p(f)}.
\end{gathered}
$$

Dedekind 和 Weber 定义一般的 *代数函数域* (*field of algebgaic functions*) 为任意代数闭域 k 的任意超越度数为 1 的扩张 L/k. 他们定义 L 的一个 *点* (*point*) p 为任何从 L 到 $k+\{\infty\}$ 的满足那些方程的函数 e_p. 他们的 Riemann-Roch 定理把 L 看作是某个 Riemann 面的 $M(S)$.

Kronecker [19] 实现了一些 “绝对代数底域上的代数几何学” [38, p. 92]. 这些域是 $\mathbb{Q}$ 的有限扩张或者有限域 $\mathbb{F}_p$ 的有限扩张. 他们不是代数闭的. 他的目标是 “整数上的代数几何学”, 其中一个簇可以同时定义在所有这些域上, 但是这在当时是很困难的 [38, p. 95].

意大利代数几何学家依赖于复数簇 V 上 *泛点* (*generic points*) 的想法，这些点是没有明显特殊性质的复点 $p \in V$ [26]. 例如，他们不是奇性的点. Noether 和 Bartel van der Waerden (范德瓦尔登) 定义抽象的泛点为那些满足只有对所有 V 的点都通用的性质的点. Van der Waerden [34] 把他们变得很严谨，但是不如 Weil 希望那么好用. 受训于意大利的 Oscar Zariski (扎里斯基) 一开始在普林斯顿和 Noether 共事，后来和 Weil 一起给代

数几何学一个严格的代数基础 [23, p. 56].

Weil 精彩的《代数几何学基础 (Foundations of Algebraic Geometry)》 [36] 把所有这些方法结合到一起构成了前所未有的最复杂的代数几何学的基础. 为了处理任意域 k 上所有维数的簇, 他使用了无限超越度数的代数闭域扩张 L/k. 他纯粹地用有理函数的域的术语不仅定义了点, 还定义了一个簇 V 的子簇 $V' \subseteq V$. Raynaud [25] 给出优秀的概述. 我们列出 3 个关键主题:

(1) Weil 有泛点. 事实上, 用域 k 上的多项式定义的簇有无限多带有在 k 上超越的坐标的泛点, 这些泛点通过 k 上的 Galois 作用两两共轭.

(2) Weil 通过那些如何把由方程定义的簇粘合在一起的数据定义了 *抽象代数簇* (*abstract algebraic varieties*). 但是这些不作为单独的空间存在. 他们只作为具体簇加上粘合数据的集合存在.

(3) Weil 没有定义整数上的簇, 尽管他可以系统地把 $\mathbb{Q}$ 上的簇和 $\mathbb{F}_p$ 上的簇联系到一起.

8. Serre 簇和凝聚层

然后 Serre [27] 暂时把泛点和非闭域放到一边来描述代数簇的第一个真正深刻的上同调:

"这依赖于著名的 Zariski 拓扑的运用, 其中的闭集是代数子簇. 事实上这个粗糙拓扑可以被用于真正的数学, 这一非凡的事实最早是由 Serre 证得, 并由此产生了一场语言和技术上的革命." (Atiyah [3, p. 66])

称任何域 k 上的一个 *朴素簇* (*naive variety*) 是一个子集 $V \subseteq k^n$, 它是由有限多个 k 上的多项式 $p_i(x_1, \ldots, x_n)$ 定义:

$$V = \{\overrightarrow{x} \in k^n \mid p_1(\overrightarrow{x}) = \cdots = p_h(\overrightarrow{x}) = 0\}.$$

它们构成了 k^n 上的拓扑的闭集, 称为 Zariski 拓扑. 因为多项式环 $k[x_1, \ldots, x_n]$ 是 Noether 的, 所以即使它们的无限交也是由有限多个多项式定义的. 另外, 他们每个都继承了 Zariski 拓扑, 其中闭集是由更多的方程定义的子集 $V' \subseteq V$.

这些是非常粗糙的拓扑. 任意域 k 中的 Zariski 子集是 k 上的多项式族的零点集: 也即, 一些有限子集以及所有的 k.

每个朴素簇有一个 *结构层* (*structure sheaf*) $\mathcal{O}_V$, 他给每个 Zariski 开集 $U \subseteq V$ 赋予一个 U 上的正则函数环. 略去重要的细节:

$$\mathcal{O}_V(U) = \left\{ \frac{f(\overrightarrow{x})}{g(\overrightarrow{x})} \text{使得当 } \overrightarrow{x} \in U \text{ 时, 有 } g(\overrightarrow{x}) \neq 0 \right\}.$$

一个 *Serre 簇* 是一个拓扑空间 T 加上一个局部同构于一个朴素簇结构层的层 $\mathcal{O}_T$. 这类比于一个复流形上的全纯函数层 $\mathcal{O}_M$. 层的工具使得 Serre 能在相容的小片上把簇粘贴到一起, 就如同可微流形的片被粘贴到一起一样. Weil 不能用他的抽象簇来完成这个事情.

对应于结构层 $\mathcal{O}_T$ 的某类层叫做 *凝聚的* (*coherent*). Serre 把它们变成当今和概形一

起被广泛使用的上同调理论里的系数层．凝聚层和结构层的紧密结合，使得这个上同调不适用于 Weil 猜想．当簇 (或概形) V 是定义在一个有限域 $\mathbb{F}_p$ 上的时候，它的凝聚上同调是模 p 定义的，故只能数模 p 的映射 $V \to V$ 的不动点的个数．即使如此：

“在 1958 年概形理论突然强力产生的主要的，或许是唯一的外部灵感是著名的缩写为 FAC 的 Serre (1955 年) 的文章．” [R&S, p. P28]

9．概形

“关键点，大体上 (grosso modo)，是使代数几何学摆脱那些阻碍它的寄生假设：基域，不可约性，有限性条件．” (Serre [29, p. 201])

概形明显简化了代数几何学．当早期代数几何学家使用复杂的代数闭域的扩张时，概形学家们用任意的环．多项式方程被替换成了环的元素．泛点变成了素理想．复杂的概念在被需要的时候回归，这很常见，但不总发生也不是以最开始出现的样式回归．

事实上这种洞察追溯到 Noether, van der Waerden 和 Wolfgang Krull (克鲁尔) 的未发表工作．在 Grothendieck 之前：

“离概形思维 (在仿射情形) 最近的人是 Krull (大约 1930 年)．他系统使用局部化方法，并证明了交换代数中很多非平凡的定理．” (Serre 于 21/06/2004 的电子邮件，Serre 的插入语)

Grothendieck 实现了这个想法．他让每个环都成为一个被称为 R 的 谱 (*spectrum*) 的概形 $\mathrm{Spec}(R)$ 的坐标环．点是 R 的素理想，而这个概形在它的点的 Zariski 拓扑上有一个结构层 $\mathcal{O}_R$，就像 Serre 簇上的结构层一样．继而从 $\mathrm{Spec}(R)$ 到另一个仿射概形 $\mathrm{Spec}(A)$ 的保持结构的连续映射正好对应于反向的环同态：

$$A \xrightarrow{f} R \qquad \mathrm{Spec}(R) \xrightarrow{\mathrm{Spec}(f)} \mathrm{Spec}(A).$$

概形的点可以非常错综复杂：“当你需要构造一个概形时一般不会从点集出发” [10, p. 12].

举例来说，一元的实系数多项式 $\mathbb{R}[x]$ 是实数直线的自然的坐标环，所以概形 $\mathrm{Spec}(\mathbb{R}[x])$ 是实数直线的概形．每个非零素理想由一个首一不可约实系数多项式生成．这些多项式形如 $x-a$ $(a \in \mathbb{R})$ 和 $x^2-2bx+c$ $(b, c \in \mathbb{R}$, 且 $b^2 < c)$. 第 1 种点对应于实数直线的普通点 $x=a$. 第 2 种点对应于一对共轭的复数根 $b \pm \sqrt{b^2-c}$. 概形 $\mathrm{Spec}(\mathbb{R}[x])$ 自动包含了实数和复数点，这里细微的差别在于概形的复数点是一对共轭的复根．

一个形如 $x^2+y^2=1$ 的多项式有各种类型的解．我们可以把有理数和代数解看成复数解．但是模 p 的解，比如在有限域 $\mathbb{F}_{13}$ 中的 $x=2$ 和 $y=6$ 则不是复数．同时，模一个素数的解与模另外素数的解不相同．所有这些解被组织到单一的概形

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[x,y]/(x^2+y^2-1))$$

中．

坐标函数是那些整系数多项式模 x^2+y^2-1. 非零素理想不再简单．它们对应于这个方程在所有绝对代数域中的解，Weil 通过这种包含所有有限域的方式阐明了 Kronecker 的目标．事实上，Grothendieck 在《收获和播种 (Récoltes et Semailles)》中最接近概形

的定义是将一个概形称为将所有这些域上的代数簇折叠起来的 “魔术扇” (p. P32). 这是整数上的代数几何学.

现在考虑环 $\mathbb{Z}[x,y]$ 中由多项式 x^2+y^2-1 的倍数构成的理想 (x^2+y^2-1). 这是个素理想，所以它是 $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[x,y])$ 中的点. 概形都不是 Hausdorff 空间 [1]: 它们的点在 Zariski 拓扑中一般都不是闭的. 这个点的闭包是 $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[x,y]/(x^2+y^2-1))$. 这个理想是闭子概形

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[x,y]/(x^2+y^2-1)) \rightarrowtail \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[x,y])$$

的 *泛点* (*generic point*). 任何概形的不可约闭子概形，粗略地说，都由坐标环中的方程给出，且都有恰好一个泛点.

在环 $\mathbb{Z}[x,y]/(x^2+y^2-1)$ 中理想 (x^2+y^2-1) 是 0 理想，这是因为在这个环中 $x^2+y^2-1=0$. 所以 0 理想在整个概形 $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[x,y]/(x^2+y^2-1))$ 中是泛点. 发生在泛点的事情在 $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[x,y]/(x^2+y^2-1))$ 中 *几乎处处* (*almost everywhere*) 都会发生. 这种泛点实现了早期代数几何学家尝试追寻的概念.

概形也解释了更加古典的直观. 古希腊几何学家争论，切线与曲线是否除了交点外还相交于某些其它的东西. 概形理论说这是对的：一个切向量是点上的一个无穷小线段.

抛物线 $y=x^2$ 与 x 轴 $y=0$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中的交点由 $x^2=0$ 给出. 作为一个代数簇它仅仅是一个单点的空间 $\{0\}$, 但是它给出了一个非平凡的概形 $\mathrm{Spec}(\mathbb{R}[x]/(x^2))$. 坐标函数是模 x^2 的实多项式，换言之，实线性多项式 $a+bx$.

直观上，$\mathrm{Spec}(\mathbb{R}[x]/(x^2))$ 是包含 0 但是没有任何其它点的无穷小线段. 这个线段足够大，使得其上的函数 $a+bx$ 有斜率 b, 但是太小，以至于没有二阶导数. 直观上来说一个从 $\mathrm{Spec}(\mathbb{R}[x]/(x^2))$ 到任意概形 S 的概形映射 ν 是一个 S 中的无穷小线段，也即，带有基点 $\nu(0)\in S$ 的切向量.

Grothendieck 的称为 *相对观点* (*relative viewpoint*) 的特有方法，同样反应了古典的思想. 早期的几何学家会把比如 $x^2+t\cdot y^2=1$ 称作 x,y 中参数 t 的二次方程. 故而它定义了依赖于参数的椭圆或双曲线或一对线的二次截面 E_t. 更深地，这是把所有曲线 E_t 捆绑在一起得到的由 x,y,t 上的一个三次方程定义的曲面 E. 在实数上这给出了簇的一个映射

$$E=\{\langle x,y,t\rangle\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+t\cdot y^2=1\}\longrightarrow\mathbb{R}, \quad \langle x,y,t\rangle\mapsto t.$$

每个曲线 E_t 是这个映射关于参数 $t\in\mathbb{R}$ 的 *纤维* (*fiber*). 当提及二次曲线 E_t 的变化时，古典几何学家表述成把曲线 E_t 的连续族捆绑成曲面 E, 但一般把三次曲面隐含掉了.

Grothendieck 用严谨的方式把概形映射 $f:X\to S$ 处理成比 X 和 S 中的任何一个都简单的单个概形. 他把 f 称为 *相对概形* (*relative scheme*), 并把这个粗略地看成某个不定的 $p\in S$ 上的单个纤维 $X_p\subset X$.[2]

---

1) 除非概形由孤立点组成，比如 0 维概形.—— 译注

2) 在 1942 年 Oscar Zariski 鼓励 Weil 研究类似的事情 [23, p. 70]. Weil 将这个想法推进但最终没能使它成为一个有效的方法 [38, p. 91ff].—— 原注

Grothendieck 早在他有概形概念之前就有了这个观点：

“当然我们现在如此习惯把一些问题变成相对的形式以至于我们忘记在当时这是多么具有革命性. Hirzebruch 关于 Riemann-Roch 定理的证明是非常复杂的，而其相对版本 Grothendieck-Riemann-Roch 的证明是如此简单，它把问题转化成一种浸入的情形. 这太棒了.” [18, p. 1114]

Grothendieck 将 Hirzebruch 对复代数簇证明的东西推广到了对任意域 k 上的簇的适当映射 $f: X \to S$. 在诸多优点中，相对概形允许把证明归纳成有简单纤维的浸入映射 f 的情形.

这个方法依赖于把在一个基空间 S 上的相对概形 $f: X \to S$ 变换成另一个相关的基空间 S' 上的某个 $f': X' \to S'$ 的 *基变换* (*base change*). 纤维本身就是一个例子. 给定 $f: X \to S$, 每个点 $p \in S$ 是定义在某个域 k 上的，且 $p \in S$ 相当于一个概形映射 $p: \mathrm{Spec}(k) \to S$. 纤维 X_p 直观上是在 p 上的 X 的一个部分，准确来说是由拉回 (右上图) 给出的相对概形 $X_p \to \mathrm{Spec}(k)$.

$$\begin{tikzcd} X_p \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{Spec}(k) \arrow[r, "p"'] & S \end{tikzcd}$$

基变换的其它例子包含把定义在实数上的概形 $f: Y \to \mathrm{Spec}(\mathbb{R})$ 扩张成复数上的概形 $f': Y' \to \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$, 这是通过沿着从 $\mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ 到 $\mathrm{Spec}(\mathbb{R})$ 唯一的概形映射的拉回 (右下图) 得到.

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{Spec}(\mathbb{C}) \arrow[r] & \mathrm{Spec}(\mathbb{R}) \end{tikzcd}$$

其它基变换沿着作为严肃几何构造的参数空间的概形 S, S' 之间的概形映射 $S' \to S$ 而得到. 每个都是范畴论意义下的拉回. 然而他们编码了复杂的信息并把早前几何学家曾处于探索初步的构造给表示出来. Grothendieck 和 Jean Dieudonné (迪厄多内) 把这看成是概形理论的一个主要优点：

“得益于函子语言，我们引入基环 ‘变换’ 的想法得到了简单的数学表示. 它的缺失无疑解释了早期尝试的胆怯.” [17, p. 6]

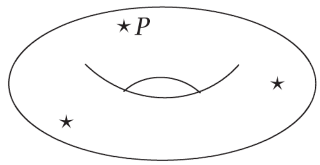
10. 艾达尔上同调

在 1958 年 4 月 21 日的 Chevalley (谢瓦莱) 讨论班上，Serre 给出了一个适用于 Weil 猜想的一维上同调群 $\tilde{\mathrm{H}}^1(\mathrm{X}, \underline{\mathrm{G}})$:“在报告的最后 Grothendieck 说这个想法可以给出任意维数的 Weil 上同调！我发现这个想法非常乐观” [31, p. 255]. 那年 9 月 Serre 写到：

“我们可以问是否有可能在任意维数代数簇上定义高阶上同调群 $\tilde{\mathrm{H}}^q(\mathrm{X}, \underline{\mathrm{G}})$. Grothendieck (未发表) 已经说明这是可行的，而且似乎当 G 是有限时，这些 (上同调群) 提供了证明 Weil 猜想所需要的 ‘正确的上同调’. 相关请见 [14] 的引言.” [28, p. 12]

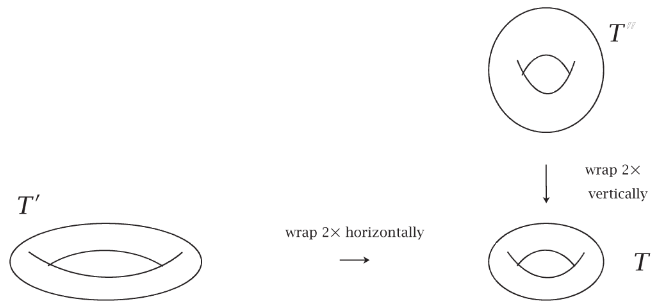
之后 Grothendieck 在 1958 年描述了他未发表的工作. 他说：“提出与发展这种新几何学的两个决定性想法是概形和拓扑斯. 他们几乎同时出现且有共生关系.” 特别地他构建了 “*Grothendieck 拓扑化范畴* (*site*) 的概念，这是决定性概念 *拓扑斯* (*topos*) 的技术的和临时性的版本” [R&S, pp. P31 和 P23n]. 然而在追寻该想法用到高维上同调群之前，他利用 Serre 的想法，类比于 Galois 理论定义了代数簇或概形的基本群.

值得注意的是，相比于环面中心和管子中的洞，Zariski 拓扑更直接地表现环面上的



小孔.

Zariski 闭子集 (局部地) 是多项式的零点集，于是环面上一个非空 Zariski 开子集就是整个环面去掉有限个点 (也可以没有). 这样一个子集可以包含某个点 P 本身, 也可以不包含, 所以 Zariski 开集可以用是否包含那个给定点来做区分. 而每个非空 Zariski 开集都围绕着环面中心和内部的洞. 这些子集无法通过是否包含洞来区分. 凝聚上同调通过凝聚层表现这些洞，如之前所述，无法在 Weil 猜想中发挥作用.



于是 Serre 利用了多重覆盖. 考虑环面 T 的两个不同的二重覆盖. 令 T' 是一个圆周长度两倍于 T 而管截面等同于 T 的环面，将 T' 沿着管道方向缠绕 T 两次 (右图). 令环面 T'' 与 T 长度相等但管道截面两倍于 T. 让 T'' 沿着管道截面缠绕 T 两次. 这两个覆盖的不同之处均来源于 T 本身，且反映了 T 的两个洞.

Riemann 类比于数域发明了 Riemann 面. 就如 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ 是有理数域 $\mathbb{Q}$ 的二重域扩张, $T' \to T$ 是一个 T 的二重覆盖. 类比于 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]/\mathbb{Q}$ 有一个二元的 Galois 群，其非单位元交换了 $\sqrt{2}$ 和 $-\sqrt{2}$, $T' \to T$ 也有一个二元对称群，其非单位的对称交换了 T' 在 T 之上的两叶 (sheets).

Serre 有意识地将 Riemann 的类比推广至更深远的等价. 他给出了 *非分歧覆盖* (*unramified covers*) $S' \to S$ 的纯代数定义, 其包含了上述 Riemann 面的覆盖作为特殊例子, 同时也包含了 Galois 域扩张甚至更多. 自然地，在这种一般化下一些定理和证明都有一些技术性, 但是一遍又一遍的, Serre 的非分歧覆盖理论使得 Riemann 面中的直观在所有这些例子下都行得通. Grothendieck 利用这些给出了代数簇或概形的基本群第一个有用的理论, 即一维 *同伦* (*homotopy*). 同时他研究了比非分歧覆盖略广泛的 *艾达尔映射* (*étale maps*), 这个概念包含了所有代数的 Riemann 覆盖空间.

Serre 计算了 *局部平凡纤维空间* (*isotrivial fiber spaces*) 而不是层的上同调. 在一个环面 T 上这些局部平凡纤维空间粗略的说是那种某个空间到 T 的带扭转的映射，而这个扭转提升到另外某个缠绕 T 的每个洞若干圈的环面 $T''' \to T$ 上时会被解开 (untwisted). 虽然 Grothendieck [12] 也为了定义一维上同调而使用了纤维空间，他发现他的 Tôhuku 文章中的方法在高维上同调上更有前景. 他需要某种层的概念来与 Serre 的想法相匹配.

在 1958 年期间 Grothendieck 发现，与其使用某个空间 S 中的开子集 $U \subseteq S$ 来定义层，对于一个概形，他可用艾达尔映射 $U \to S$. 他在 1961 年春发表了他的想法 [15, §4.8, p. 298]. 他利用 S 上的交换图 (右左图) 替代了包含关系 $V \subseteq U \subseteq S$. 他

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & U \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} U \times_S V \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[d] \\ U \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

利用拉回 $U \times_S V$ (上页末右右图) 替代了交 $U \cap V \subseteq S$. 于是概形 S 的一个 艾达尔覆盖 (*étale cover*) 就是一族像集的并是整个 S 的艾达尔映射 $U_i \to S$. 如今 Sites 经常被称为 *Grothendieck* 拓扑, 而这种 site 被称为 S 上的 艾达尔拓扑.

解决一个 S 上艾达尔拓扑局部上的问题有两种基本的方法. 你可以在任意一族 S 的 Zariski 开集覆盖上解决，你也可以在一个 S 的坐标环的可分代数扩张上解决它. 如果局部解在互相重叠部分相容，那第 1 种方法能给出一个正真的整体解. 第 2 种方法在当局部解是 Galois 不变时给出一个整体解 —— 这就像先将一个实系数多项式在复数域里分解，然后证明因子确实都是实的. 艾达尔上同调能够衡量能否将局部解通过他们的组合关系进行粘合的障碍.

在 1961 年 Michael Artin 证明了艾达尔上同调中第一个高维的几何定理 [1, p. 359]. 根据 David Mumford (芒福德) 的描述，去掉原点的平面有非平凡的 H^3. 在艾达尔上同调的语境下，这是任意一个坐标域 k 上的坐标平面去掉原点，$k^2 - \{0\}$. Weil 猜想暗示了当 k 是绝对代数的 (absolutely algebraic) 时，这个上同调应当与复数情形的 $\mathbb{C}^2 - \langle 0, 0\rangle$ 的经典上同调有极大的相似性. 这 (恰好) 是三维球面 S^3 的上同调，而它的 H^3 是非平凡的. 所以 Artin 的结果应该对任意 Weil 上同调都对. Artin 证明了在艾达尔拓扑上层的导出函子上同调满足这个性质. 如今这个上同调被称为 艾达尔上同调 (*étale cohomology*).

简而言之，Artin 证明了艾达尔拓扑不仅能够得到某种层的上同调，而且是好的有用的上同调. 经典的上同调的定理在微小且充分的修正下都能存活下来. Grothendieck 邀请了 Artin 到法国的讨论班进行合作，这个讨论班产生了《拓扑斯和艾达尔上同调理论 (Théorie des topos et cohomologie étale) 》 [2]. 这个课题得到爆炸式发展，我们不再深入它.

拓扑斯在如今几何学中的知名度不及概形或者范畴. Deligne 小心地表达了他的观点："拓扑斯理论中的工具容许了艾达尔上同调的构造" [10, p. 15]. 然而一旦构造完成，这个上同调 "如此地接近经典的直观，" 以至于对于多数的目的我们只需要一些经典的拓扑知识加上 "一点点信仰" [9, p.5]. Grothendieck 也许会 "建议读者们即使如此也要学习拓扑斯的语言，它提供了一个非常方便的统一原理" [5, p. VII].

我们以 Grothendieck 关于概形和它的上同调，拓扑斯是如何在艾达尔上同调中汇集到一起的观点作为结束，这恰恰在他和 Deligne 的手中成为了证明 Weil 猜想的手段：

"这里重要的是，从 Weil 猜想的观点看，这种新的空间的概念已经极其充分了，以至于我们可以赋予任何一个概形一个 '广义空间' 或者 '拓扑斯' (在问题中称为这个概形的艾达尔拓扑斯). 这个拓扑斯的某种 '上同调不变量' (如此 '婴儿般' 的 !) 似乎有很好的机会提供了给予这个猜想它全部的意义的必要条件，同时 (谁知道呢 !) 也许能给予证明它的方法." [16, p. P41]

参考文献

[1] Michael Artin, Interview, in Joel Segel, editor, Recountings: Conversations with MIT Mathematicians, A K Peters/CRC Press, Wellesley, MA, 2009, pp. 351–74.

[2] Michael Artin, Alexander Grothendieck, and Jean-Louis Verdier, Théorie des Topos et

Cohomologie Etale des Schémas, Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie, 4, Springer-Verlag, 1972, Three volumes, cited as SGA 4.

[3] Michael Atiyah, The role of algebraic topology in mathematics, Journal of the London Mathematical Society, 41:63–69, 1966.

[4] ———, Bakerian lecture, 1975: Global geometry, Proceedings of the Royal Society of London Series A, 347(1650):291–99, 1976.

[5] Pierre Berthelot, Alexander Grothendieck, and Luc Illusie, T'eorie des intersections et théorème de Riemann-Roch, Number 225 in Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie, 6, Springer-Verlag, 1971. Generally cited as SGA 6.

[6] Raoul Bott, Review of A. Borel and J-P. Serre, Le théorème de Riemann-Roch, Bull. Soc. Math. France 86 (1958), 97–136. MR0116022 (22 #6817).

[7] Pierre Colmez and Jean-Pierre Serre, editors, Correspondance Grothendieck-Serre, Société Mathématique de France, 2001. Expanded to Grothendieck-Serre Correspondence: Bilingual Edition, American Mathematical Society, and Société Mathématique de France, 2004.

[8] Richard Dedekind and Heinrich Weber, Theorie der algebraischen funktionen einer veränderlichen, J. Reine Angew. Math., 92:181–290, 1882. Translated and introduced by John Stillwell as Theory of Algebraic Functions of One Variable, copublication of the AMS and the London Mathematical Society, 2012.

[9] Pierre Deligne, editor, Cohomologie Étale, Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie, Springer-Verlag, 1977. Generally cited as SGA 4 1/2. This is not strictly a report on Grothendieck's Seminar.

[10] Pierre Deligne, Quelques idées maîtresses de l'oeuvre de A. Grothendieck, in Matériaux pour l'Histoire des Mathématiques au XX$^{\text{e}}$ Siècle (Nice, 1996), Soc. Math. France, 1998, pp. 11–19.

[11] David Eisenbud, Commutative Algebra, Springer-Verlag, New York, 2004.

[12] Alexander Grothendieck, A General Theory of Fibre Spaces with Structure Sheaf, technical report, University of Kansas, 1955.

[13] ———, Sur quelques points d'algébre homologique, Tôhoku Mathematical Journal, 9:119–221, 1957.

[14] ———, The cohomology theory of abstract algebraic varieties, in Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1958, Cambridge University Press, 1958, pp. 103–18.

[15] ———, Revêtements Étales et Groupe Fondamental, Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie, 1, Springer- Verlag, 1971. Generally cited as SGA 1.

[16] ———, Récoltes et Semailles, Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Montpellier, 1985–1987. Published in several successive volumes.

[17] Alexander Grothendieck and Jean Dieudonné, Éléments de Géométrie Algébrique I, Springer-Verlag, 1971.

[18] Luc Illusie, Alexander Beilinson, Spencer Bloch, Vladimir Drinfeld et al., Reminiscences of Grothendieck and his school, Notices of the Amer. Math. Soc., 57(9):1106–15, 2010.

[19] Leopold Kronecker, Grundzüge einer arithmetischen theorie der algebraischen grössen, Crelle, Journal für die reine und angewandte Mathematik, XCII:1–122, 1882.

[20] Serge Lang, Algebra, 3rd edition, Addison-Wesley, Reading, MA, 1993.

[21] Saunders Mac Lane, The work of Samuel Eilenberg in topology, in Alex Heller and Myles Tierney, editors, Algebra, Topology, and Category Theory: A Collection of Papers in Honor of Samuel Eilenberg, Academic Press, New York, 1976, pp. 133–44.

[22] Colin McLarty, The rising sea: Grothendieck on simplicity and generality I, in Jeremy Gray and Karen Parshall, editors, Episodes in the History of Recent Algebra, American

Mathematical Society, 2007, pp. 301–26,
[23] Carol Parikh, The Unreal Life of Oscar Zariski, Springer-Verlag, New York, 2009.
[24] Henri Poincare, Analysis situs, and five complements to it, 1895–1904, Collected in G. Darboux et al., eds., Oeuvres de Henri Poincaré in 11 volumes, Paris: Gauthier-Villars, 1916–1956, Vol. VI, pp. 193–498. I quote the translation by John Stillwell, Papers on Topology: Analysis Situs and Its Five Supplements, American Mathematical Society, 2010, p. 232.
[25] Michel Raynaud, Andre Weil and the foundations of algebraic geometry, Notices of the American Mathematical Society, 46:864–867, 1999.
[26] Norbert Schappacher, A historical sketch of B. L. van der Waerden's work in algebraic geometry: 1926–1946, in Jeremy Gray and Karen Parshall, editors, Episodes in the History of Modern Algebra (1800–1950), American Mathematical Society, 2011, pp. 245–84.
[27] Jean-Pierre Serre, Faisceaux algébriques cohérents, Annals of Mathematics, 61:197–277, 1955.
[28] ——, Espaces fibrés algébriques, in Séminaire Chevalley, chapter expose no. 1, Secrétariat Mathématique, Institut Henri Poincaré, 1958.
[29] ——, Rapport au comité Fields sur les travaux de A. Grothendieck (1965), K-Theory, 3:199–204, 1989.
[30] ——, André Weil: 6 May 1906–6 August 1998, Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society, 45:520–29, 1999.
[31] ——, Exposés de Séminaires 1950–1999, Société Mathématique de France, 2001.
[32] Peter Swinnerton-Dyer, A Brief Guide to Algebraic Number Theory, Cambridge University Press, 2001.
[33] Olga Taussky, Sums of squares, American Mathematical Monthly, 77:805–30, 1970.
[34] Bartel L. van der Waerden, Zur Nullstellentheorie der Polynomideale, Mathematische Annalen, 96:183–208, 1926.
[35] Charles Weibel, An Introduction to Homological Algebra, Cambridge University Press, 1994.
[36] André Weil, Foundations of Algebraic Geometry, American Mathematical Society, 1946.
[37] ——, Number of solutions of equations in finite fields, Bulletin of the American Mathematical Society, 55:487–95, 1949.
[38] ——, Number-theory and algebraic geometry, in Proceedings of the International Congress of Mathematicians (1950:Cambridge, Mass.), American Mathematical Society, 1952, pp. 90–100.

(申屠钧超 译　　赵晨 校)

****

(上接 333 页)

[KTW] A. KNUTSON, T. TAO, and C. WOODWARD, The honeycomb model of $GL_n(C)$ tensor products II: Facets of the Littlewood-Richardson cone, in preparation.
[L] B. V. LIDSKII, Spectral polyhedron of the sum of two Hermitian matrices, Funct. Anal. Appl. 16 (1982), 139–140.
[W] H. WEYL, Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte lineare partieller Differentialgleichungen, Math. Ann. 71 (1912), 441–479.
[Wo] C. WOODWARD, Honeycomb associativity via scattering theory, preprint.

(许劲松 译　　郭镜明 校)