柯西不等式，单调减函数，C-S不等式

⑧ 259-260

O178

Cauchy 不等式之逆

D. Zagier

冯慈璜

Zagier, D.

设 $f:[0,\infty)\to[0,1]$ 为单调减函数，满足 $I(f)=\int_0^\infty f(x)dx$ 收敛，以 $\mathcal{M}$ 表示这类函数的集. 由 $f,g\in\mathcal{M}$，数性积 $(f,g)=I(fg)$ 收敛， Cauchy-Schwarz 不等式以及 $0\le f(x)\le 1$ 推知

$$(f,g)\le\min(I(f),I(g),(f,f)^{\frac{1}{2}},(g,g)^{\frac{1}{2}}),\qquad (f,g\in\mathcal{M})\tag{1}$$

在较早的同题文章 [2] 中，我们得到反向的不等式

$$(f,g)\ge\frac{(f,f)(g,g)}{\max(I(f),I(g))},\qquad (f,g\in\mathcal{M}).\tag{2}$$

本文以十分简洁的证明给出更一般的结果

定理 设 f 与 g 为 $[0,\infty)$ 上非负的单调减函数，对任何可积 (不必单调) 函数 $F,G:[0,\infty)\to[0,1]$ 有

$$(f,g)\ge\frac{(f,F)(g,G)}{\max(I(F),I(G))}.\tag{3}$$

证明 对一切 $x\ge 0$，我们有

$$\begin{aligned}(f,F)=&I(F)f(x)+\int_0^\infty[f(t)-f(x)]F(t)dt\\ \le&I(F)f(x)+\int_0^x[f(t)-f(x)]dt,\end{aligned}$$

由于 $\int_0^x G(t)dt$ 同时以 x 以及 $I(G)$ 为上界，故

$$\begin{aligned}(f,F)\int_0^x G(t)dt\le&I(F)xf(x)+I(G)\int_0^x[f(t)-f(x)]dt\\ \le&\max(I(F),I(G))\int_0^x f(t)dt.\end{aligned}$$

两极边乘以 $-dg(x)$ 并从 0 到 ∞ 作分部积分. 左边得到 $(f,F)(g,G)$，右边得到 $\max(I(F),I(G))(f,g)$. 由于测度 $-dg(x)$ 非负故定理得证.

原题: A Converse to Cauchy's Inequality. 译自: *Amer. Math. Monthly* Vol. 102, No. 10, 1995, pp. 919–920.

注 1 式 3 的另一证明如下. 几何上显知 (也不难证明), 由于 f 单调减, 对给定 $I(F)$ 值当可积函数 $F:[0,\infty)\to[0,1]$ 变动时, (f,F) 取最大值的 F 需 "尽可能靠左边", 即, 当 $0\le x\le I(F)$ 时取值为 1, 其它均为 0. 因此对于 $\max(I(F),I(G))\le A$, 当 F,G 在可积函数 $[0,\infty)\to[0,1]$ 中变动时, $(f,F)(g,G)/A$ 的最大值等于 $A^{-1}\int_0^A f(x)dx\int_0^A g(x)dx$; 它小于等于 (f,g), 这是因为两单调函数在区间上乘积的平均值至少等于它们平均值之乘积.

2. 对任何正线性泛函 $W(f)=\int_0^\infty f(x)W(x)dx(W(x)>0)$, 单调减的 f,g 以及使 $W(F),W(G)$ 有界的函数 $F,G:[0,\infty)\to[0,1]$ 成立着

$$W(f,g)\ge\frac{W(fF)W(gG)}{\max(W(F),W(G))}$$

这是 (2) 的进一步推广. 将 (3) 应用于函数 $f\circ v,g\circ v,F\circ v$ 及 $G\circ v$, 其中 $v=\int_0^x W(x')dx'$ 即得证明. 当 $F=f,G=g$ 时就是 [1] 中证明过的 (2) 的含权推广式.

3. 如 [1] 所指出, 借助四个参数 $I(f),(f,f),I(g)$ 及 (g,g), (1) 及 (2) 的界是最佳可能的. 对参数的一般值, 界 (2) 不能达到, 但通过取 f 与 g 为仅有两个非零值的阶梯函数, 即当 $x\le x_0$ 时等于 1, 当 $x_0<x\le x_1$ 等于 C, 当 $x>x_1$ 等于 0, 其中 $0<x_0<x_1,0<C<1$, 而可任意地接近. 具有给定值 $I(f)$ 及 (f,f) 的这类函数组成单参数族 (数 x_0,x_1 及 C 相互确定). 设 $I(g)\le I(f)$ 并令 f 向左移 $(x_0\to0)$ 且 g 向右移 $(C\to0)$, 则 $\int_0^\infty f(x)g(x)dx$ 趋于 $(f,f)(g,g)/I(f)$.

4. 单调减函数 $f:[0,\infty)\to[0,1]$ 可解释作概率测度的积分 ($f(x)=\int_x^\infty d\mu$, 其中 $d\mu$ 是积分为 1 的非负测度). 从而 (2) 可解释作统计分布相关. 这类结果之一, 也是该不等式的最初诱导, 是: 已知两部分人的各自数量, 平均收入及各自的 Gini 系数, 要估计总体的 Gini 系数 [3](Gini 系数是对大数量人收入不均匀性的量度, 广泛地用于经济数学). 由于不等式 (2) 及 (3) 非常一般, 它们应有其它应用, 也许对纯粹数学也有用.

(致谢部分从略)

参 考 文 献

[1] J.V.Pečarić, A weighted version of Zagier's inequality, *Nieuw Archief voor Wiskunde* **12** (1994), 125–127.

[2] D. Zagier, Een ongelijkheid tegengesteld aan die van Cauchy, *Proc. Nederl. Akad. Wet.* **80** (1977), 349–351.

[3] D. Zagier, *Inequalities for the Gini coefficient of composite populations, J. Math. Economics* **12** (1983), 103–118.

(冯慈璜 译　姚景齐 校)