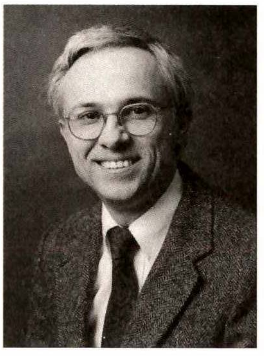
Daniel Quillen (I)

Eric Friedlander　Daniel Grayson (协调编辑)



Daniel Quillen

Daniel Quillen (奎伦), 1940—2011, Fields (菲尔兹) 奖得主, 改变了代数学, 几何学和拓扑学诸多领域的面貌. 特别是在 1967—1977 的 10 年间通过一系列卓越非凡的论文, Quillen 的独创震惊了整个数学界, 时至今日仍启发着现代数学的许多领域. Quillen 对数学的表述可以作为清晰性的终极典范. 聪慧如此, 熟悉他的人仍然时常为他的慷慨与谦逊留下深刻印象. 能够得到他的指导, 学习他卓越的成就, 是我们难得的机遇. 他的离去令我们深感悲痛.

在这篇忆文中我们收集了来自于 Quillen 的同事, 合作者, 学生和家人的 12 篇文章. Graeme Segal 的文章是一篇全面的关于 Quillen 的数学传记, 强调了他工作的深度与广度. Hyman Bass (巴斯) 综述了 Quillen 对代数 K 理论的杰出贡献. Quillen 的合作者 Joachim Cuntz 和 Jean-Louis Loday 讨论了他们和 Quillen 在循环同调 (cyclic homology) 上的工作. 牛津大学的 Michael Atiyah (阿蒂亚) 和 Ulrike Tillmann, 以及哈佛大学的 Barry Mazur (马祖尔) 也贡献了他们的回忆. Dennis Sullivan (沙利文) 与 Andrew Ranicki 回忆了他们早年与 Quillen 在数学上的交往. Ken Brown (布朗) 和 Jeanne Duflot 回顾了他们作为 Quillen 学生的经历. 在最后一篇中, Quillen 的妻子, 即他们 6 个孩子的母亲 Jean Quillen 使我们略窥如此一位创作了美丽数学的数学家在家中是怎样一位文静内敛的人.

Graeme Segal

Daniel Quillen (逝于 2011 年 4 月 30 日, 享年 70 岁) 是他所在的时代最具有创造力和影响力的数学家, 他改变了整个数学的面貌, 解决了一批重要而著名的问题, 但是他最有价值的贡献更多地在于找到了全新的方式来观察数学的核心问题, 并打开了通向此前不可抵达领域的道路.

他出生于新泽西的奥兰治 (Orange), 是两兄弟中的哥哥. 他的父亲 Charles Quillen 是一位化学工程师, 后来成为一位职业高中的教师; 他的母亲 Emma (出生时的姓是 Gray) 是一位秘书. 他的母亲对儿子们寄予厚望, 为 Daniel 找到了奖学金, 使他先是进入了 Newark 学院, 一所顶级的私立中学, 然后又在完成高中学业前一年进入了哈佛大学. 他在那里本科毕业后成为 Raoul Bott (博特) 的研究生. 他的论文是关于线性偏微分方程的

译自: Notices of the AMS, Vol. 59 (2012), No. 10, p. 1392–1406, Daniel Quillen, Eric Friedlander and Daniel Grayson, Coordinating Editors, figure number 8.
Eric Friedlander 是南加州大学数学系主任教授, 他的邮箱地址是 ericmf@usc.edu.
Daniel Grayson 是香槟伊利诺伊大学数学系荣休教授, 他的邮箱地址是 dan@math.uiuc.edu.
Graeme Segal 是牛津大学万灵学院 (All Souls College) 的荣休教授. 他的邮箱地址是 graeme.segal@all-souls.ox.ac.uk. 本节的内容此前曾发表在欧洲数学会通讯 (Newsletter of the EMS).

超定组的. 在 1964 年完成博士学位后他马上在麻省理工学院 (MIT) 得到一个位置, 他在那里一直待到搬去牛津为止 (中间有一些年在外访问, 包括法国高等科学研究院 (IHÉS), 普林斯顿, 波恩和牛津).

Quilen 曾说 Bott 是他的伟大楷模 ——Bott 是一位高大外向, 因其和蔼的性格和个人魅力而广受爱戴的人物, 表面上看与他这位内向沉默的学生正相反 ——Bott 使他明白成为一位出色的数学家不一定非得反应很快. 但是与 Bott 不同 ——Bott 总是让别人把事情向他解释很多次 —— 在其他人看来 Quillen 的反应一点都不慢. 但是 Quillen 认为自己是从第一原理出发, 缓慢而仔细地思考, 努力对待每一点微小进展的那一类人. 他对自己的能力很谦逊 —— 这点很吸引人 —— 但同时又有远大的抱负. Bott 是一位全面的数学家, 在许多不同的领域里做出过贡献, 同时又保持着几何学家的视角. 而 Quillen 同样也没有把自己限制在一个领域里. 他最著名的成就是在代数学中, 但他是以某种方式从外面进入代数学的. 他对几乎所有的数学和很大一部分物理学感兴趣: 当他的大女儿在哈佛学物理时, 他会认真地做她的练习题; 而同样的事情发生在 20 年后, 当他最小的女儿在帝国理工 (Imperial College) 学习电子工程时. 能够把来自许多不同领域的想法用来为他的目标服务是他做数学的一个特征. 他保持着一份优美的数学记录, 记载着他每天对于数学的思考,[1] 这些笔记变成了超乎寻常的档案, 涵盖了极多的主题, 有很多是他对读过的文章或听过的讲座的重新证明. 比如在 1972 年的记录中, 在他处理带有正合序列范畴的代数 K 理论的章节中间, 有一段长长的题为 "统计力学之教育 (Education in statistical mechanics)" 的 "题外话", 在其中以大学物理课程中常见的关于理想气体与 Carnot (卡诺) 循环 (cycles) 内容为开端, 进而通过对于统计力学中熵的更多的数学讨论, 转而思考如何在一个辛流形的大量拷贝的乘积上扰动 Hamilton (哈密顿) 结构或辛结构. 这段讨论终止于如下难解的话 "可能的应用: 熵以及它如何产生于阶乘的 gamma 函数替代."

对 Quillen 有影响的第 2 位伟大的数学家 —— 同时也是对他那一代中的很多人都有影响的 —— 是那一位令人仰视的人物, Alexander Grothendieck (格罗滕迪克). Grothendieck 有一个著名的神秘信念, 即当我们对一个数学问题给予足够多的关注, 找到它的正确内容和表述, 这个问题就会自动得到解决. 不管是否如此, 他开启了当代数学最神奇的全景之一, 联系起数论, 代数学和几何学. Grothendieck 的影响在 Quillen 的第一项必将具有长期影响的工作中最为显著, 这项工作就是出版于 1967 年的 Springer 讲义 (Springer Lecture Notes) 《同伦代数 (Homotopical Algebra)》, 一个与他的博士论文完全不同的学科.

这部著作的历史背景是之前几十年中一个叫做 "同调代数 (homological algebra)" 的新领域的发展: 给许多像群和代数这样初看起来完全和空间无关的代数与组合结构赋予同伦型, 或者按最初的想法, 同调群. Grothendieck 对这个领域的特殊贡献是 (与他的学生 Verdier 一起) 发明了 导出范畴 (*derived category*), 使得任何 Abel (阿贝尔) 范畴, 例如任何环的模范畴, 可以嵌入其中. 导出范畴之于 Abel 范畴, 就像同伦范畴之于拓扑空间的范畴. 更为惊人的是, Grothendieck 证明了如何把一个交换环或者域上的代数簇联系

1) 与他所声称的缓慢正相反, 他说他需要仔细地写下这些长篇笔记来使自己慢下来, 否则他的想法会一直向前奔腾直到一切陷于混乱之中. —— 原注

到一个同伦型，从而有可能证明 Weil (韦伊) 猜想. 1949 年提出的 Weil 猜想把一个有限域上的代数簇上点的个数联系到相应的复数域上代数簇的拓扑. Quillen 自己掌握了 Grothendieck 学派的思想，但同时他本身沉浸于另一个数学传统，来自于 MIT 的代数拓扑学家，特别是 Daniel Kan (卡恩), Kan 是第 3 个对他有重要影响的人. (他们两人都喜欢早起，经常在整个世界还没有醒来之前在 MIT 交谈.) Kan 是单纯方法 (simplicial methods) 的信徒，曾经证明了拓扑空间的同伦论可以通过纯组合的方法来研究. 同伦范畴是在拓扑空间的范畴中对是同伦等价的那些映射形式取逆得到的，而 Quillen 意识到 Kan 已经证明了 同一个 范畴可以通过在单纯集 (simplicial sets) 范畴中对某一类映射取逆得到. 他问自己什么时候在一个任意的范畴中对某一类态射取逆是有意义的，并且把得到的东西称为一个同伦范畴. 他发现关键在于纤维化 (fibration) 和上纤维化 (cofibration) 的概念中，这是代数拓扑学的传统工具，而且这是同调代数中射影与内射分解 (projective and injective resolutions) 的正确语境，例如一个内射模 (injective module) 是一个符合 Kan 条件的单纯集的类似物. 他在书中发展了一个非常完备的抽象同伦理论. 当时这个理论只引起了少数人的关注，但其实它是非常超前的；30 年后这个理论得到了广泛的应用，处于当代数学舞台的中心. 这本书极为抽象，几乎没有任何例子和应用，但 Quillen 马上用这些想法来发展了一个交换环的上同调理论，现在称为 “André-Quillen 上同调”，以及相关联的余切复形的理论，之后又证明了有理同伦范畴可以以微分分次 Lie (李) 代数 (differential graded Lie algebras) 为模型，或者等价地，以交换微分分次代数为模型.

1970 年在普林斯顿高等研究院
左起：George Lusztig, Daniel Quillen, Graeme Segal, Michael Atiyah

他之后的工作都不再像这第一本书一样具有明显的 Grothendieck 风格. Grothendieck 和 Quillen 都致力于探求一个问题中的绝对根本点，Grothendieck 是在一般化之中发现本质，而 Quillen 的指导原则是，要理解一个数学现象，就必须找出它的最简单具体的表现形式. 他觉得他自己不善于写作，但他那些经过了艰苦努力写出来的数学著作，非常易于理解，是准确清晰的文章典范，正如 Michael Atiyah 曾指出的，更让人想起 Serre (塞尔) 而不是 Grothendieck.

他 1968—1969 年作为斯隆学者 (Sloan Fellow) 是在巴黎附近的高等科学研究所度过的，Grothendieck 也在那里. 接下来在普林斯顿高等研究院度过的一年是他最多产的时期，新的成果不断迸发. 那时最激动人心的进展大概是对 Adams (亚当斯) 猜想的证明，这个猜想以 K 理论和 Adams 运算的形式把球面稳定同伦群中来自正交群的直和项确定下来. 3 年前 Quillen 已经给出了一个证明的纲要，指出它如何从人们期待的 Grothendieck 特征 p 代数簇的艾达儿 (étale) 同伦论的性质导出. [1] 同时他也在仔细学习以芝加哥为中心的代数拓扑学家的工作，他们利用无穷闭路 (loop) 空间的想法来计算了很多重要的分

1) 这个证明的纲要几年后在 Friedlander 的 MIT 博士论文中被写成完整的证明. —— 原注

类空间的同调. 此时他意识到他前面证明的关键点其实是说离散群 $GL_n(\bar{\mathbb{F}}_p)$ 的分类空间和李群 $GL_n(\mathbb{C})$ 的分类空间的同调, 在素数 p 以外是相同的, 而这点是可以直接证明的. (这里 $\bar{\mathbb{F}}_p$ 是 p 个元素的有限域的代数闭包.) 这直接导致他发展了代数 K 理论, 这也是他最为人们所记住的成就. 但在讨论这个之前我先说几件其他的事.

首先, Adams 猜想几乎同时也被 Sullivan 证明了, 也是用了 Grothendieck 的理论, 但是是以不同的方式. Quillen 的证明导向了代数 K 理论, 而 Sullivan 是在进行一项非常不同的研究, 即决定分片线性流形与拓扑流形的结构. 这只是 Quillen 和 Sullivan 的工作相交处之一, 尽管他们是在朝着不同的方向进展. 另一个相交处是他们互相独立的发展了有理同伦论, 这里 Sullivan 是被流形自同伦等价群的具体问题所驱动的. Ib Madsen 曾指出数学史上奇诡之处, 若干年以后, Becker 和 Gottlieb 发现了 Adams 猜想的一个非常初等的证明, 并不需要用到 Grothendieck 的理论: 如果这早几年发生的话, 我们就不知道当代数学中一些非常活跃的领域是否会被发明出来了.

在 1970 年尼斯的国际数学家大会 (ICM) 上, Quillen 把他前几年的工作主题描述成有限群的上同调. 除了 Adams 猜想和代数 K 理论之外, 另一个成果丰硕的发展路线由此开始. Quillen 证明和任何紧群的模 p 上同调被其初等 p 子群构成的格控制, 证明了 Atiyah-Swan 猜想, 即模 p 上同调环的 Krull 维数等于一个初等 p 子群的极大秩, 并且首次计算了自旋 (spin) 群的上同调环. 他对应用这些想法来得到有限群论中的重要结果感兴趣, 但很快就离开了这一领域, 把它留给了其他人.

这个黄金时代的另一个成就是复配边环及其与形式群理论的联系. 这一想法是最近稳定同伦论中工作的基础, 始于 Hopkins (霍普金斯) 对稳定同伦范畴中素元的决定以及球面同伦群的 "色 (chromatic)" 图像. Milnor (米尔诺) 在 1960 年利用 Adams 谱序列对复配边环的计算是代数拓扑最重要的成就之一. Quillen 考虑了 Grothendieck 关于母题 (motives) 的理论作为代数几何中的万有上同调理论, 以及 Grothendieck 早年关于陈类和 Riemann-Roch (黎曼–罗赫) 定理的工作中对射影空间丛的使用. 他注意到对于向量丛具有取值在其中的陈类的光滑流形的上同调理论, 复配边具有类似的万有地位, 向量丛具有取在这些上同调中的陈类, 而这样一个理论的基本不变量是形式群法则, 它描述了线丛在取张量积时第一陈类如何变化. 他得到了一个精妙的观察, 即复配边是万有形式群法则的基础. 他成功地对复配边环给出了一个全新的计算, 不用 Adams 谱序列, 而是利用流形上几何幂运算的基本性质. 这项工作是又一个将 Grothendieck 类型的想法和更具体更传统的代数拓扑结合的例子. 在他完成这一篇惊人的文章之后就再也没有回到过这一领域.

关于 Quillen 对于代数 K 理论的重建工作我不会说太多了, 对此已经有了很多文字. 如他在 1969—1970 年所解释的, 一个关键的出发点是 $BGL_\infty(\bar{\mathbb{F}}_p)$ 的同调的计算, 另一个是他注意到对称群分类空间的并的 Pontrjagin (庞特里亚金) 环和已知的 $\Omega^\infty S^\infty$ 的 Pontrjagin 环其实是一致的, 这里 $\Omega^\infty S^\infty$ 是无穷维球面的无穷闭路空间. 这导致他产生如下的想法: 从一个具有适当的加法运算的范畴出发, 例如有限集合范畴中的无交并, 或者一个环的模范畴中的直和, 我们可以得到一个上同调理论. 这里不是指由同构类的

半群生成的 Grothendieck 群，而是对这个范畴的 空间这个拓扑半群在同伦范畴内做群完全化 (group completion). 他在 1970 年的 ICM 报告中用到的著名的“加构造 (plus construction)”就是具体实现这个群完全化的绝妙的方法；它来自于 Sullivan 的建议，但我想这不是一个基本的想法. 在普林斯顿的那一年里 Quillen 飞快地掌握了范畴的同伦论，这些东西是他以前没怎么考虑过的. 他意识到他需要找到一个更一般的 Grothendieck 群构造的同伦版本，在这个更一般的 Grothendieck 群的构造中关系来自于正合序列而不仅仅是直和. 最终他以“Q 构造 (Q-construction)”作为他喜欢的定义所需空间的办法. 这些工作最后汇集于他为 1972 年西雅图代数 K 理论会议撰写的权威文章中. 在此之后他只写过一篇关于代数 K 理论的文章：1976 年他证明了 Serre 猜想，即多项式环上的射影模是自由模. 证明来自于对这个问题已知信息 —— 特别是 Horrocks 的那些工作 —— 的深入思考，并且用 Grothendieck 所提倡的那种打开坚果的方式去酝酿，答案就自然出现了.

Quillen 的哈佛大学申请照片

到了 1978 年被授予 Fields 奖的时候，Quillen 的兴趣已经转回到大范围几何和分析中去了. 他在 1976—1977 年的笔记主要关注于分析：常微分方程的 Sturm-Liouville (斯图姆 - 刘维尔) 理论，一维散射与反散射理论，统计力学，电力传输线理论，同样问题的量子和量子场论方面，以及正交多项式，Jacobi (雅可比) 矩阵，全纯函数的 Hilbert (希尔伯特) 空间的 de Branges (布朗基) 理论. 1977 年他在 MIT 开了一门关于这些主题的精彩的研究生课程，但是什么也没有发表. 我猜他觉得他没有得到任何有决定意义的新结果. 但是我想可以说此后一个联系到大范围分析和指标理论 —— 这个领域一方面延伸到量子场论，另一方面通过 Connes (孔涅) 对于指标理论的循环同调处理延伸到代数 K 理论 —— 的思想链环一直在很多不同的方面吸引着他的兴趣. 他在哈佛开的最后一门研究生课 (我想应该是在 2000 年) 是关于离散化的二维 Dirac (狄拉克) 方程的散射理论的.

早在 1982 年他就决定牛津是适合他的地方，特别是因为 Michael Atiyah 在那里. 1982—1983 年他在那里度过学术假年，并在 1985 年永久地从 MIT 搬到了牛津，成为 Waynflete 教授. (数学圈一直流传着的笑话：MIT 的系主任冲向 Dan, 给他提供了一个工资减半的合同.)

在 1980 年代他至少做出了 3 项长期改变数学面貌的贡献：发明了椭圆偏微分算子的“行列式线 (determinant line)”作为指标理论里的工具，微分几何和分析中的“超联络 (superconnection) 的概念，以及将循环同调联系到代数 K 理论的 Loday-Quillen 定理.

第 1 项来自对指标理论和量子场论中的反常 (anomalies) 间联系的思考. 行列式线是代数几何里常见的想法，而通过 zeta 函数来定义正则化的行列式是量子场论里的标准做法，也被像 Ray (雷) 和 Singer (辛格) 这样的数学家研究过. 然而像任何 Fredholm (弗雷德霍姆) 算子都有一条行列式线使得行列式取值于其中这样的简单想法，以及 zeta 函数在平凡化行列式线 (即把它同复数等同起来) 时所扮演的角色，都给这个领域带来了新的视角.

"超联络" 来自于对椭圆算子族的指标定理，以及 Witten (威顿) 关于量子理论中的超对称 (supersymmetry) 想法的思考. 如果我们有一个纤维丛，其纤维是紧 Riemann 流形，底空间上就有一个虚 (virtual) 向量丛，由每个纤维上的 Dirac 算子的指标构成. 族的指标定理给出这个虚向量丛的陈特征标 (Chern character) 的公式. Quillen 的想法是把将单个 Dirac 算子 D 的指标表示为热核 $\exp D^2$ 的超迹 (supertrace) 的公式与 (看起来完全一样的) 有限维向量丛上一个联络的陈特征标形式组合起来成为 $\exp D^2$ 的一个纤维状 (fiberwise) 超迹，这里 D 是这个联络的共变导数，其曲率 D^2 是一个矩阵值的 2 形式. 他的目标是证明族的指标定理，办法是将上面的想法应用于由沿纤维方向的旋量 (spinor) 场构成的无穷维向量丛，通过在旋量场自然的水平方向平移 (horizontal transport) 上纤维状地加上 Dirac 算子来定义一个超联络 D, 使得 $\exp D^2$ 属于迹类 (trace class). 超联络现在得到了广泛的应用，但是 Quillen 在发表了一篇短文，给出定义并宣布了计划之后，就再没有回到族的指标定理的工作上. 第 2 年 Bismut 发表了一个沿着 Quillen 路线的证明. Quillen 此后的文章中只有两篇涉及到超联络. 其中和学生 Mathai 合作的一篇非常有影响，尽管它只处理了有限维丛. 它用超对称量子论的语言漂亮地解释了 Thom (托姆) 类，为几何方法处理超对称规范理论提供了一个基本工具.

Quillen 最后的工作主要集中在循环同调上. 他从几个方向被吸引到这里. 一方面，循环上闭链 (cyclic cocycle) 是作为研究指标理论的工具被发明出来的，Connes 的 S 算子毫无疑问以某种神秘的方式联系到 Bott 周期性，而后者在一般代数 K 理论中的角色正是 Quillen 一直想要理解的. 更直接地，循环同调是一般环的代数 K 理论的陈特征标自然的值域. 而且，循环理论看起来应该以某种方式置于同伦代数的框架中，这正是 Quillen 第一本书的内容. Connes 是一位通过具体上链公式来发展循环上同调的大师，但是对于像 Quillen 这样背景的人来说这些公式显然不能作为理论的基础. 在寻找这个主题正确解释的尝试中，他使用了一系列的技术，特别是理解通过 Bott 映射拉回到 Grassmann (格拉斯曼) 流形 (Grassmannian) 上的微分形式的代数性质. 一个著名的成果前面已经提到了，他证明了 Loday 的一个猜想，这个猜想大致是说，循环同调之于一般线性群的 Lie 代数，恰如代数 K 理论之于一般线性群本身. [1] 在 1989 年献给 Grothendieck 60 岁生日的一篇文章中，他成功地给出了循环同调一个概念化的定义，但仍然写道 "对于循环同调一个真正的 Grothendieck 式的理解还是一个留给未来的目标". 整个 1990 年代他一直在这个领域做出重要贡献，主要通过与 Cuntz 合作，我对他的这段研究并不熟悉，读者请参见 Cuntz 的文章. 然而从整体上，Quillen 的感受可以用 T. S. Eliot 的诗来形容，即他对 Connes 工作的探索回到了起点，而且第一次熟悉了这个领域. [2]

在数学之外他的主要爱好是音乐，特别是 Bach (巴赫) 的音乐. 他总是说起如何遇到他的妻子 Jean 的，他不到 21 岁就娶了她. 那时他在哈佛管弦乐团里打三角铁，而她拉中提琴. (但是她说他那时是乐团的图书管理员，偶尔作为预备小号手.) 对于他数学上极简主

1) 这个定理在差不多同时被 Tsygan 独立证明.—— 原注

2) 这里指 T. S. Eliot 的诗: We shall not cease from exploration And the end of all our exploring Will be to arrive where we started And know the place for the first time.—— 译注

义者的风格而言，三角铁真是合适他的乐器. 他乐于搞清楚音乐的原理，并且谱写二三十个小节的曲子. 但是他太投入于数学，所以不能在音乐上花很多时间. 在博士毕业之前他和 Jean 就有了两个孩子，后来他们一共有了 6 个孩子. 除了数学之外，家庭就是他生活的全部. 虽然缄默寡言，在熟悉的人面前，他也很乐于讲讲孩子们的各种趣事和糗事. 尽管他在二十多岁的时候头发就开始变白了，但在外表和心态上他一直是一个年轻人.

他生命的最后 10 年是在不断侵蚀的老年痴呆症的折磨下度过的. 他身后留下妻子，6 个孩子，20 个孙辈和一个重孙辈的精心照料.

Michael Atiyah

我在访问哈佛大学时第一次遇到 Dan, 那时他是 Bott 的学生. 我记得那个让人振奋的年轻人，充满了想法和热情，而 Bott 也乐于给予鼓励. 许多年以后 Dan 成为我在牛津大学的资深同事. 此时他已经是一位有自己风格的成熟数学家了. 他是 Serre 的崇拜者，后来也成为 Grothendieck 的崇拜者，他的工作中也反映出这二人的影响. 简洁与优雅来自于 Serre, 但是他的万有主义的函子化的方式是来自 Grothendieck 的.

Dan 是一位孤独而深刻的思想者，为了得到一个问题的根本而花费数年思考，而就算偶有失利，他于此取得了卓越非凡的成功，罕有失利. 他兴趣广泛，本质的简洁性和必然性是他重要贡献的特征. 他在配边理论中对形式群理论的漂亮应用使我印象深刻，以优雅的代数带来了如此丰富的几何结果.

他的风格并不容易带来合作，但是他的影响是广泛的. 他为人安静谦逊，完全没有数学天才身上经常有的莽撞无礼. 但是在安静的外表下我还是能看到当年那个年轻学生身上的那种活力. 尽管全身心奉献于数学，他从对于家庭责任和音乐的爱好中取得平衡.

Hyman Bass

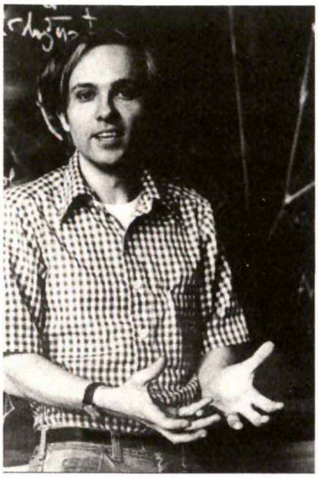
Dan Quillen 和我仅有两次在同一个地方工作，每次都是在一个花园般令人愉快而又酝酿着智慧的环境下. 一次是 1968—1969 年我们一起在高等科学研究院参加 Grothendieck 的讨论班和 Serre 在法兰西学院的课程. 另一次是一个两周长的代数 K 理论会议，1972 年夏天在西雅图的 Battelle 纪念研究所 (Battelle Memorial Institute).

在巴黎的那一年，Quillen 展现了他典型的性格特征：温和谦虚，随意的大男孩般的外表，并没有受到过早变得灰白的头发的影响，以及已经十分丰富的家庭生活. 在那个闪耀着智慧之光的数学环境里，Quillen 更多的是聆听而不是表达. 他只是在有十分重要的内容需要表达时才会说. 他之后的工作表明了他是一位深入的聆听者.

与此相反，在 Battelle 的会议上，Quillen 站在舞台的中央. 这次会议是代数 K 理论历史上的分水岭事件，主要是因为 Quillen 的表现. 我在此将回忆当时的背景和氛围，以及 Quillen 带来的那些改变了研究模式的结果和思考方法. 这些工作使他获得了 1978 年的 Fields 奖.

代数 K 理论起源于 Grothendieck 为了表达代数簇的广义 Riemann-Roch 定理 [4] 而

Michael Atiyah 是爱丁堡大学的荣休教授. 他的邮箱地址是 m.atiyah@ed.ac.uk.
Hyman Bass 是密歇根大学的数学教授. 他的邮箱地址是 hybass@umich.edu.



Quillen 在讲座中

引入群 $K(X)$. 这启发 Atiyah 和 Hirzebruch (希策布鲁赫) 创造了拓扑 K 理论，令 X 为拓扑空间，把 $K(X)$ 看成一个广义上同调理论 $K^n(X)$ $(n \geq 0)$ 的第 0 项，$K^0(X)$ [1].

当 X 是一个仿射概型 (affine scheme) $X = \mathrm{Spec}(A)$ 时，Grothendieck 用来构造 $K(X)$ 的代数向量丛对应于有限生成射影 A 模 (Serre [11])，当 X 是一个紧 Hausdorff (豪斯多夫) 空间而 $A = C(X)$ 是连续函数环时，这对拓扑的 $K(X)$ 也成立 (Swan [12]). 这就导致引入了有限生成射影 A 模的 Grothendieck 群 1)$K_0(A)$, 这是对 任意 环 A 都有效的定义 (而不需要是交换环). 这个代数上的 (而不是几何上的) 一般性不是没有意义的推广，因为拓扑学家已经确认了同伦论中一些问题的阻碍是落在基本群 π 的整群环 (integral group ring) $\mathbb{Z}\pi$ 的 K_0 群中的 (Wall [13]).

很自然要寻求拓扑 K 理论的代数类似，由群 $K_n(A)$ $(n \geq 0)$ 组成. 并没有明显的方法去做这件事, 但是特殊的方法成功地完成了前两步. 首先是定义 $K_1(A) = GL(A)/E(A)$ (Bass 和 Schanuel [3]), 这里 $GL(A)$ 是无限一般线性群, $E(A)$ 是其换位子群 (commutator subgroup), 已知由 $GL(A)$ 中的初等矩阵生成 (Whitehead [14]). 导致如此定义 K_1 的考虑包括与 K_0 自然的函子性的联系，以及又一次与拓扑的关联，因为单同伦论 (simple homotopy theory) 中的 Whitehead (怀特黑德) 挠不变量 (torsion invariants) 是落在群 $Wh(\pi) = K_1(\mathbb{Z}\pi)/(\pm\pi)$ 中 [14].

当 A 是一个数域中的整数环时, K_0 联系到理想类群 (ideal class group), K_1 联系到单位群 (group of units), 而相对 K_1 群包含了 $SL_n(A)$ $(n \geq 3)$ 的经典同余子群 (congruence subgroup) 问题的解答 [2].

第 2 步是定义 $K_2(A) = H_2(E(A), \mathbb{Z})$ (Milnor [6]), 即万有中心扩张 (universal central extension) $St(A) \twoheadrightarrow E(A)$ 的核，其中 “Steinberg (斯坦伯格) 群” $St(A)$ 由初等生成元和关系表现. 这仍然具有好的函子性，而且在数域中的计算表明了和具体的互反律的深刻联系. 而且 Hatcher [5] 发现了 K_2 和拓扑中伪同痕 (pseudoisotopy) 的联系.

所以尽管这些代数 K_0, K_1, K_2 群只是一个未知的一般理论的前几项，它们已经展示了足够多的与代数拓扑，代数几何，数论，以及没有提到的算子代数之间有趣联系，所以寻找一个完整的代数 K 理论看起来是一个值得投入的方向. 实际上已经有一批数学家 (Gersten, Karoubi-Villamayor, Swan, Volodin) 提出了高阶代数 K 函子的候选者. 但是它们的本质和它们之间的关系并没有完全被理解，而且对任意的环 A 也没有详尽的计算.

这就是 1970 年左右代数 K 理论的状况，一个只得到了预期进展中的零散结果，但是又取得了一些有趣的应用，足以吸引很多不同数学分支潜在关注的理论. 这使我想把这些发展和应用理论的人们汇聚在一起以期得到某种效果. 于是我们在西雅图的 Battelle 纪念

1) 这里改用下标是因为 X 与 A 之间的反变性 (contravariance).—— 原注

研究所优美的校园中举办了为期两周的会议. 70 名参会者中包括 Spencer Bloch, Armand Borel (博雷尔), Steve Gersten, Alex Heller, Max Karoubi, Steve Lichtenbaum, Jean-Louis Loday, Pavaman Murthy, Dan Quillen, Andrew Ranicki, Graeme Segal, Jim Stasheff (斯特谢夫), Dick Swan, John Tate (泰特), Friedhelm Waldhausen 和 Terry Wall (沃尔). 我在会议论文集的前言中写道 [BC]

"...很多具有不同研究动机和技术背景的数学家开始对代数 K 理论的各个方面感兴趣. 我不知道把这些努力汇集在一个主题之下的举动除了制造术语混乱之外是否有意义. 无论如何让这些数学家聚会在一个意气相投，身心放松的环境中是有意义的 —— 他们中有些人并没有其他机会进行认真的技术上的交流 —— 其他的就等着他们之间自然发生化学反应了."

我认为这个尝试取得了巨大的成功，超出了一切预想. 完全可以把它叫做代数 K 理论的 "Woodstock"[1), 而这里的巨星毫无疑问是 Daniel Quillen. 他带来了两个成功的高阶代数 K 理论的构造方法，在 Battelle 会议之前就已经得到的 "+ 构造", 和在会议上公布的 "Q 构造".

按照 + 构造的定义

$$K_n^+(A) = \pi_n(BGL(A)^+) \quad n \geq 1,$$

其中 $BGL(A)^+$ 是对分类空间 $BGL(A)$ 的改造，使得同调群不变而基本群是

$$K_1(A) = GL(A)/E(A).$$

Quillen 进一步验证了

$$\pi_2(BGL(A)^+) = K_2(A),$$

给这个定义提供了更多的动机. 另外的动机在于，对有限域，Quillen 证明了 $BGL(F_q)^+$ 的同伦群等于如下映射的同伦纤维 (homotopy fiber) 的同伦群

$$\Psi^q - Id: BU \to BU,$$

这个映射出现在 Quillen 对于 Adams 猜想的证明中 [7]. 利用后者可以完整地计算有限域的 K 理论.

+ 构造是一个巨大的进展，但它仍有两个局限. 首先，它没有直接包含 $K_0(A)$. 其次，也是更重要的，它本身没有自带那些对于低阶 K_n $(n = 0, 1, 2)$ 非常有效的基本计算工具. 为了克服这些困难，我们需要以 Grothendieck 原始定义的精神来对带有正合序列的加性范畴 C 定义 $K_n^Q(C)$ $(n \geq 0)$. (对于环 A, 要得到 $K_n^Q(A)$, 我们把 C 取成有限生成射影 A 模构成的范畴.) 这个目标由 "Q 构造" 实现，有定义 $K_n^Q(C) = \pi_{n+1}(BQC)$, 其中 BQC 是由 Quillen 定义的新范畴 QC (即 Q 构造) 的分类空间 (分类空间对任何范畴都可以定义). 一连串精彩的定理和奠基性的方法保证了这个定义的有效性:

- **一致性** (*consistency*): 对于 $n = 0, 1, 2$, $K_n^Q(A) = K_n(A)$; 对于 $n \geq 1$, $K_n^Q(A) = K_n^+(A)$, 所以对于所有的 $n \geq 0$ 可以把 $K_n(A)$ 定义为 $K_n^Q(A)$.

---

1) 指 1969 年 8 月 15—18 日的 Woodstock 音乐节，摇滚音乐史上的转折点之一. —— 译注

- *消解* (*resolution*): 如果 $C' \subseteq C$, 且 (C 中) 任何对象都有有限的 C' 消解，则 $K_n(C') \to K_n(C)$ 是同构.
- *解旋* (*dévissage*): 如果 $C' \subseteq C$, 且 (C 中) 任何对象都有有限的滤过 (filtration) 使得子商 (subquotients) 在 C' 中，则 $K_n(C') \to K_n(C)$ 是同构.
- *局部化* (*localization*): 如果 C 是 Abel 范畴， C' 是其 Serre 子范畴，则有一个局部化正合序列把 $K_n(C)$, $K_n(C')$ 和 $K_n(C/C')$ 联系起来.
- *同伦不变性* (*homotopy invariance*): 如果 A 是 Noether (诺特) 环，则 $K'_n(A[t]) = K'_n(A)$, 其中 $K'_n(A)$ 是有限生成 A 模范畴的 K 理论，由消解定理，当 A 是正规 (regular) 环时与 $K_n(A)$ 相等.
- *基本定理* (*fundamental theorem*): 有自然的短正合序列

  $$0 \to K_n(A) \to K_n(A[t]) \oplus K_n(A[t^{-1}]) \to K_n(A[t;t^{-1}]) \to K_{n-1}(A) \to 0.$$
- *代数几何* (*algebraic geometry*): 有一批应用于概型的 K 理论的定理，包括计算，以及与周环 (Chow ring) 的联系.

所有这些，及更多的内容，都是在 63 页隔行打印的纸上从头发展出来的 [8]. 它令人惊讶地集概念，技巧以及应用于一体，这样的工作通常人们只能期望许多数学家一起干 10 年才能完成. 它使代数 K 理论一跃从胎儿长成了青年，而且还不止这些. Quillen 在一个报告中用一个优雅的新方法完整地证明了代数整数环的 K 群的有限生成性. 此后 Quillen 证明了 Serre 猜想，即多项式代数上的射影模是自由模 [10], 这是对他的高超技巧的完美展示.

数学家通常被分为构建理论者和解决问题者. 在这两方面 Quillen 都是大师. 像 Grothendieck 一样，在解决具体问题时，他不是直接处理，而是通过找到并发展正确的概念，使得推理以数学上极为自然的方式向前演进. 但如果说 Grothendieck 的风格是 Wagner (瓦格纳) 式的，那么 Quillen 更接近 Mozart (莫扎特). 他谦虚又亲切，是一位出色的解释者，对听众和蔼而有启发性，没有任何多余的东西，没有任何需要改变的东西，人们可以从中一直有所收获. 见证 Quillen 的工作是一件让人既愉快又骄傲的事.

参考文献

[BC] Algebraic K-theory, I, II, and III, Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Washington, 1972, Lecture Notes in Math., Vols. 341, 342, and 343, Springer, Berlin, 1973.

[1] M. F. Atiyah, K-theory, Lecture Notes by D. W. Anderson, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1967.

[2] H. Bass, J. Milnor, and J.-P. Serre, Solution of the congruence subgroup problem for SL_n ($n \geq 3$) and Sp_{2n} ($n \geq 2$), Publ. Math. Inst. Hautes Éudes Sci. 33 (1967), 59–137.

[3] H. Bass and S. Schanuel, The homotopy theory of projective modules, Bull. Amer. Math. Soc. 68 (1962), 425–428.

[4] A. Borel and J.-P. Serre, Le théorème de Riemann-Roch, Bull. Soc. Math. France 86 (1958), 97–136.

[5] A. Hatcher, Pseudo-isotopy and K_2, in [BC, II], 489–501.

[6] J. Milnor, Introduction to Algebraic K-theory, Ann. of Math. Studies, No. 72, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1971.

(下转 187 页)

$(\mathbb{P}^1\backslash\{0,\infty\},\{1\})$, 我们得到一个 $\mathbb{Q}$ 线性 Tannaka (淡中忠郎) 群，因而得到没有任何进一步假设的 Abel 范畴 $MM(\mathbb{Q})$ [3]. 母题 Galois 群是在 Tannaka 意义下 $MM(\mathbb{Q})$ 的副代数 (pro-algebraic) 基本群 $G = \mathrm{Aut}^{\otimes}(T)$. 我们称 G 是一个 Galois 群，因为这种观点给出了关于零维簇 Galois 理论大范围的扩展. 在代数对 (X,D) 的上同调群 $MM(\mathbb{Q})$ 中是直接的混合母题，即 G 的一些有限维 $\mathbb{Q}$ 表示，或者等价地，相伴的 Hopf (霍普夫) 代数 A 的一些余模. 奇异上同调和 de Rham 上同调都给出了从 $MM(\mathbb{Q})$ 到 $\mathbb{Q}$ 向量空间的纤维函子 T_{sing} 和 T_{dR}. 副代数非共面直线对 (torsor) $\mathrm{Isom}^{\otimes}(T_{\mathrm{dR}},T_{\mathrm{sing}})$ 由 $\hat{\mathcal{P}}_{\mathrm{formal}}$ 的谱 $\mathrm{Spec}(\hat{\mathcal{P}}_{\mathrm{formal}})$ 给出，其中 $\hat{\mathcal{P}}_{\mathrm{formal}}$ 是形式周期代数 (即由四元组 (X,D,ω,γ) 生成的), 而且仅仅服从线性性，变量变换，以及 Stokes 公式诸关系；见 [3, 4].

在这一设定下, $\hat{\mathcal{P}}$ 是 $\mathbb{Q}$ 所有混合母题周期的集合. 多重 ζ 值形成 $\mathbb{Z}$ 上混合 Tate 母题周期子集. 局限于 $\mathbb{Z}$ 上的混合 Tate 母题的母题 Galois 群对多重 ζ 值给出了大量控制，并且蕴含着对固定权重 $s_1+\cdots+s_k$ 的多重 ζ 值 $\zeta(s_1,\ldots,s_k)$ 之间的一些关系式. Francis Brown 关于多重 ζ 值和 $\mathbb{P}^1\backslash\{0,1,\infty\}$ 的基本群的工作再次证明了母题哲学的价值；见 [1]. 在数论的其他部分 (例如在有理点领域中) 母题论证可被应用于有限性证明.

Grothendieck 叙述了著名而困难的*周期猜想* (*period conjecture*), 该猜想说，周期之间的任何关系都是从代数几何学中得来的，尤其是经过簇乘积上的代数闭链. 在 Nori 的设定中，这本质上等价于说法 “求值映射 $\mathrm{ev}\colon \hat{\mathcal{P}}_{\mathrm{formal}} \to \hat{\mathcal{P}}$ 是单射的”. 这个猜想将会通过 G 的作用对一个给定代数簇 X 所有周期的空间的超越度得出有力的结论.

进一步阅读

[1] F. Brown, Mixed Tate motives over $\mathbb{Z}$, Annals of Math. 175(2), 2012, 949–976.

[2] J. Carlson and Ph. Griffiths, What is a period domain?, Notices, AMS, 55(11), 2008, 1418–1419.

[3] A. Huber and S. Müller-Stach, On the relation between Nori motives and Kontsevich periods, arXiv:1105.0865v5 (2011).

[4] M. Kontsevich and D. Zagier, Periods, in Engquist, Björn (ed.) et al., Mathematics Unlimited-2001 and Beyond, Springer Verlag, 771–808 (2001).

(陈景辉 译　陆柱家 校)

****

(上接 153 页)

[7] D. Quillen, The Adams conjecture, Topology 10 (1971), 67–80.

[8] ——, Higher algebraic K-theory, I, in [BC, I], 85–147.

[9] ——, Finite generation of the groups K_i of rings of algebraic integers, in [BC, I], 179–198.

[10] ——, Projective modules over polynomial rings, Invent. Math. 36 (1976), 167–171.

[11] J.-P. Serre, Faisceaux Algébriques Cohérents, Ann. of Math. (2) 61, (1955), 197–278.

[12] R. G. Swan, Vector bundles and projective modules, Trans. Amer. Math. Soc. 105 (1962), 264–277.

[13] C. T. C. Wall, Finiteness conditions for CW-complexes, Ann. of Math. (2) 81 (1965), 56–69.

[14] J. H. C. Whitehead, Simple homotopy types, Amer. J. of Math. (1950), 1–57.

(未完，待续)

(苏阳 译　郭奕 校)