圆周率 超越数 数学常数 数学史

学科与专题介绍

圆周率的探索

D.H.Bailey, J.M.Borwein, P.B.Borwein, S.Plouffe

Bail., DH 王天明 V

这篇文章介绍了数学常数 $\pi = 3.14159\cdots\cdots$ 的计算和分析的简短历史，以及各个历史时期使用过的计算 π 的若干公式. 详细讨论了一些激动人心的新进展，其中包括利用高阶收敛算法将 π 计算到超过六十亿位十进制小数和最近发现的允许单独计算 π 的 16 进制的任一位数字的模式.

1970 年以前的关于 π 的更为详细的历史，读者可参阅 Peter Beckmann 的一本易读且有趣的书 [3]. 表 1 和 2 中给出了 π 的计算的一系列里程碑. 我们相信这比任何容易找到的资料更全.

古代

关于 π 的最早 (大约公元前 2000 年) 记载之一，是巴比伦人使用了近似值 $3\frac{1}{8} = 3.125$. 大约在同一时期或更早一些，根据古埃及文件记载，他们认为直径为 9 的圆和边长为 8 的正方形面积相同，这意味着 $\pi = 256/81 = 3.1604\cdots\cdots$ 古代的其它人满足于使用简单的近似值 3. 旧约全书中下一段文字便是证据：

他也造了一个铜圆容器，深 $7\frac{1}{2}$ 英尺，直径 15 英尺并且圆周为 45 英尺. (国王 I.7:23; 又见编年史 II,4:2)[1)]

π 值的第一次严格的数学计算归功于叙拉古 (西西里岛的一个港口) 的阿基米德 (约于公元前 250 年)，他使用了基于内接和外切多边形的几何方法得到了上下界，$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. 换言之，$3.1408\cdots < \pi < 3.1428\cdots$ [11]. 许多世纪内，虽然有几个人使用这个一般方法得到一些更精确的近似值，但是，无人能改进阿基米德方法. 例如，生活在亚历山大时代，公元 150 年的天文学家 Ptolemy 使用过 π 的值是 $3\frac{17}{120} = 3.141666\cdots$ 5 世纪中国数学家祖冲之使用了一种变形的阿基米德方法，将 π 计算到 7 位精确数字，而欧洲直到十六世纪才达到这个水平.

原题: The Quest for Pi. 译自: *The Mathematical Intelligencer*, Vol. 19. No. 1, 1997. pp. 50–57.

1) 这段译文根据圣经当代英文版翻译. —— 译注.

表 1. π 的计算历史 (20 世纪前)

Babylonians巴比伦	2000?$B.C.$	1	$3.125(3\frac{1}{8})$
Egyptians埃及	2000?$B.C.$	0	$3.16045[4(\frac{8}{9})^2]$
China中国	1200?$B.C.$	0	3
Bible($1\bar{K}ing7:23$)圣经	550?$B.C.$	0	3
Archimedes阿基米德	250?$B.C.$	3	3.1418(平均)
Hou Hao Shu后汉书	$A.D.$130	0	$3.1622(=\sqrt{10}?)$
Ptolemy	150	3	3.14166
Chung Hing张衡	250?	0	$3.16227(\sqrt{10})$
Wang Fau王蕃	250?	0	$3.15555(\frac{142}{45})$
Liu Hui刘徽	263	5	3.14159
Siddhanta	380	4	3.1416
Tsu Ch'ung Chi祖冲之	480?	7	3.1415926
Aryabhata	499	4	3.14156
Brahmagupta	640?	0	$3.162277(=\sqrt{10})$
Al-Khowarizmi	800	4	3.1416
Fibonacci	1220	3	3.141818
Al-Kashi	1429	14	
Otho	1573	6	3.1415929
Viéte	1593	9	3.1415926536(平均)
Romanus	1593	15	
Van Ceulen	1596	20	
Van Ceulen	1615	35	
Newton	1665	16	
Sharp	1699	71	
Seki	1700?	10	
Kamata	1730?	25	
Machin	1706	100	
De Lagny	1719	127	(112正确)
Takebe	1723	41	
Matsunaga	1739	50	
Vega	1794	140	
Rutherford	1824	208	(152正确)
Strassnitzky and Dase	1844	200	
Clausen	1847	248	
Lehmann	1853	261	
Rutherford	1853	440	
Shanks	1874	707	(527正确)

牛顿时代

象科学和数学的其它领域一样，中世纪对 π 的探索的进展主要发生在伊斯兰世界，Samarkand 的 AL-Kashi 大约在 1430 年将 π 计算到 14 位.

在十七世纪，随着牛顿和莱布尼兹发明了微积分，发现了一些本质上新的计算 π 的公式. 回忆起

表 2. π 的计算历史 (20 世纪)

Ferguson	1946	620
Ferguson	Jan.1947	710
Ferguson and Wrench	Sep.1947	808
Smith and Wrench	1949	1,120
Reitwiesner, *et al.*(ENIAC)	1949	2,037
Nicholson and Jeenel	1954	3,092
Felton	1957	7,480
Genuys	Jan.1958	10,000
Felton	May1958	10,021
Guilloud	1959	16,167
Shanks and Wrench	1961	100,265
Guilloud and Filliatre	1966	250,000
Guilloud and Dichampt	1967	500,000
Guilloud and Bouyer	1973	1,001,250
Miyoshi and Kanada	1981	2,000,036
Guilloud	1982	2,000,050
Tamura	1982	2,097,144
Tamura and Kanada	1982	4,194,288
Tamura and Kanada	1982	8,388,576
Tamura,Yoshino, and Kanada	1982	16,777,206
Ushiro and Kanada	Oct.1983	10,013,395
Gosper	1985	17,526,200
Bailey	Jan.1986	29,360,111
Kanada and Tamura	Sep.1986	33,554,414
Kanada and Tamura	Oct.1986	67,108,839
Kanada, Tamura, Kubo,*et al.*	Jan.1987	134,217,700
Kanada and Tamura	Jan.1988	201,326,551
Chudnovskys	May1989	480,000,000
Chudnovskys	June1989	525,229,270
Kanada and Tamura	July1989	536,870,898
Kanada and Tamura	Nov.1989	1,073,741,799
Chudnovskys	Aug.1989	1,011,196,691
Chudnovskys	Aug.1991	2,260,000,000
Chudnovskys	May.1994	4,044,000,000
Takahashi and Kanada	June.1995	3,221,225,466
Kanada	Aug.1995	4,294,967,286
Kanada	Oct.1995	6,442,450,938

$$tan^{-1}x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots)dt$$
$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \cdots$$

由此可容易地推导出这些公式中的一个. 令 $x = 1$, 它给出了著名的格里高里 - 莱布尼兹公式

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots .$$

令人遗憾的是这个级数收敛的如此之慢，即使只将 π 的数值计算精确到两位数字，也将要求计算数百项．然而，利用三角恒等式 (由正切函数的加法公式得到) 能够得到

$$\frac{\pi}{4}=(\frac{1}{2}-\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}-\frac{1}{7\cdot 2^7}+\cdots)+(\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}-\frac{1}{7\cdot 3^7}+\cdots),$$

它收敛得快得多． Machin 利用恒等式

$$\frac{\pi}{4}=4\tan^{-1}(\frac{1}{5})-\tan^{-1}(\frac{1}{239})$$

类似地得到一个更快的公式． 1837 年， Shanks 利用这个公式将 π 精确地计算到十进制的第 707 位，后来 Alas 发现这个计算在 527 位之后是错的．

牛顿发现类似的反正弦函数级数：

$$\sin^{-1}x=x+\frac{1\cdot x^3}{2\cdot 3}+\frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}+\cdots.$$

注意到 $\pi/6=\sin^{-1}(\frac{1}{2})$. 这个公式可用来计算 π. 这种类型的更快的公式是

$$\pi=\frac{3\sqrt{3}}{4}+24(\frac{1}{3\cdot 2^3}-\frac{1}{5\cdot 2^5}-\frac{1}{7\cdot 2^7}-\frac{1}{9\cdot 2^9}-\cdots).$$

牛顿本人使用过这个特殊公式计算 π，他仅仅发表了 15 位数字，后来腼腆地承认 "我不好意思告诉你，由于那时无事可干，我已将 π 计算到了多少位数字".

在十八世纪，数学家欧拉，历史上有争议的最多产数学家，发现了 π 的几个新的公式，它们之中有

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots$$
$$\frac{\pi^4}{90}=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots$$

相对地更快收敛的级数是

$$\frac{\pi^2}{6}=3\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2\binom{2m}{m}}.$$

不管这些公式在理论推断上多么重要，但是，对于 π 的计算不是很有效的．

这个时期计算 π 的一个动机是考虑 π 的十进制展开是否重复，如是这样，表明 π 是两个整数之比 (虽然现在几乎无人认真地相信这一事实)．在十八世纪后期，在 Lambert 和 Legendre 证明了 π 是无理数后，这个问题才告解决．可是某些人仍然疑惑，π 是否是某个整系数代数方程的根，(和从前一样，虽然没有几个人真的相信这个事实)．在 1882 年， Lindemann 证明了 π 是超越数，这个问题才最终得以解决． Lindemann 的证明也一劳永逸地否定了古希腊的问题，即能否用直尺和圆规将圆画成正方形．这是因为可构造的数必定是代数的．

在 π 的编年史中，十九世纪的进展则有些踌躇不前．在进入该世纪的前三年，一个医学博士 Edwin J.Gooldman 为了使印地安那州富裕，向众议院介绍了一个 "新的数学真理"，由于这个发现，该州将会从王国那里得到好处．它的议案的第二部分包含了下面一段文字：

发现第四个重要事实，即直径和圆周之比等于 $\frac{5}{4}$ 和 4 之比；

于是， Gooldmsn 的新的数学 "真理" 之一是 $\pi = \frac{16}{5} = 3.2$. 印第安那众议院于 1897 年 2 月 5 日一致通过了这个议案，而后递交参议院的一个委员会，如果不是由于 Purdue 大学的 C.A.Waldo 教授在最后几分钟进行干涉，这个议案就会成为法律而生效了． Waldo 教授是在忙别的事时，碰巧听到关于这件事的一些议论的．

二十世纪

随着计算机技术在 50 年代的发展， π 被计算到十进制和二进制的几千位数字，而后是几百万位数字 (例如，见 [17])．这些计算得力于为了在计算机上进行高精度算术运算而发现的一些先进算法．例如，在 1965 年发现将新出现的快速富利叶变换 (FFT) 用于进行高精度乘法时，比通常方式快得多．这些方法戏剧般地减少了高精度计算 π 和其它数学常数时所要求的计算机时间．见 [1],[7] 和 [8]．

不管这些进展如何，直到 70 年代，所有计算机计算 π 时都仍旧使用经典公式，通常是 Machin 公式的变形．大约在 1910 年，印度数学家 Ramanujan 发现了一些新的无穷级数公式．可是，直到前不久，他的著作广泛流行之前，这些结果还不为更多的人知道．这些可称道的公式之一，是

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!(1103 + 26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}.$$

结果，这个级数的每一项对计算结果增加 8 位准确数字． 1985 年， Gosper 利用这个公式将 π 计算到一千七百万个数字．

尽管 Ramanujan 级数比经典公式有效得多得多，它仍然与经典公式具有同样的性质．即，必须要计算的项数随结果中所要求的位数线性地增加．换句话说，如果有人希望计算 π 的位数增加一倍，那么他计算的级数的项数也必须增加一倍．

在 1976 年， Eugene Salamin[16] 和 Richard Brent[8] 独立地发现了 π 的新算法．该算法是基于算术 - 几何平均值和某些在 19 世纪原属于高斯的思想 (虽然，因为某种原因，高斯从未见到它和计算 π 的联系)．这个算法产生的近似值收敛到 π 的速度比任何经典公式都快得多． Salamin-Brent 算法可叙述如下，设 $a_0 = 1, b_0 = 1/\sqrt{2}$, 并且 $s_0 = 1/2$. 对于 $k = 1, 2, 3, \cdots$ 计算

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}, \\ b_k &= \sqrt{a_{k-1} b_{k-1}}, \\ c_k &= a_k^2 - b_k^2 \\ s_k &= s_{k-1} - 2^k c_k \\ p_k &= \frac{2a_k^2}{s_k}. \end{aligned}$$

然后， p_k 平方地收敛于 π. 这就是说，这个算法的每次迭代大致使正确的位数加倍．特别地，各次迭代产生 π 的 1,4,9,20,42,85,173,347 和 697 个正确数字．为了将 π 计算到四千五百万个准确的十进位数字，只要 25 次迭代就足够了．然而，每次迭代都必须使用和最终结果所要求一样高的数字精度．

Salamin-Brent 要求高精度地开平方，而在 Machin 公式中不要求这种运算．高精度的平方根可用牛顿迭代有效地计算，它仅使用乘法和某些低成本的运算．每次迭代都使数字精度水平加倍．这种方法计算平方根的总成本大约是执行单个全精度乘法成本的三倍．这样，象 Salamin-Brent 公式的一些算法就能在计算机上非常快地实现．

在 1985 年初，本文的两个作者 (Jonathan and Peter Borwein) 发现了这种类型的另外一些算法 [5-7]，其中一个如下．令 $a_0 = 1/3$ 和 $s_0 = (\sqrt{3}-1)/2$ 迭代

$$\begin{aligned} r_{k+1} &= \frac{3}{1+2(1-s_k^3)^{1/3}}, \\ s_{k+1} &= \frac{r_{k+1}-1}{2}, \\ a_{k+1} &= r_{k+1}^2 a_k - 3^k(r_{k+1}^2-1) \end{aligned}$$

则 $1/a_k$ 立方地收敛到 π，即每次迭代大约使准确数字是原来的三倍．

四次方算法如下．令 $a_0 = 6-4\sqrt{2}$ 和 $y_0 = \sqrt{(2)}-1$．迭代

$$y_{k+1} = \frac{1-(1-y_k^4)^{1/4}}{1+(1-y_k^4)^{1/4}},$$

$$a_{k+1} = a_k(1+y_{k+1})^4 - 2^{2k+3}y_{k+1}(1+y_{k+1}+y_{k+1}^2).$$

则 $1/a_k$ 四次方地收敛到 π，在过去的十年里，东京大学的 Yasumasa Kanada 多次使用这个特殊算法以及 Salamin-Brent 方法计算 π．在这些计算中最近的一次，是 Kanada 在日立超级计算机上将 π 计算到六十四亿个十进制数字．这是该领域的当前世界记录．

最近，证明了对任意的 m，都存在收敛的 π 的 m 阶逼近．例如，9 次方 (9 阶) 算法如下．令 $a_0 = 1/3, r_0 = (\sqrt{3}-1)/2$，及 $s_0 = (1-r_0^3)^{1/3}$．迭代

$$\begin{aligned} t &= 1+2\gamma_k, \\ u &= [9\gamma_k(1+r_k+r_k^2)]^{1/3}, \\ v &= t^2+tu+u^2, \\ m &= \frac{27(1+s_k+s_k^2)}{v}, \\ a_{k+1} &= ma_k + 3^{2k-1}(1-m), \\ s_{k+1} &= \frac{(1-r_k)^3}{(t+2u)v}, \\ r_{k+1} &= (1-s_k^3)^{1/3}. \end{aligned}$$

则 $1/a_k$ 9 次方地收敛到 π．然而，应当注意到，这些高阶算法作为计算模式，似乎不比 Salamin-Brent 或 Borwein 4 次方算法快．因为，在高阶模式中为达到给定精度水平，虽然少几次迭代，但是每次迭代却更昂贵．

几种 π 的算法在计算机上实际运行时间的对比见下页的图 1．这些运行时间是在 IBM RS 6000/590 工作站上用二进制计算 π 到各种精度水平所花费的时间．图的横坐标是 16 进制位数，用 4 乘这些数字得到等价的 2 进制位数或用 $\log_{10}(16) = 1.20421\cdots$ 乘得到等价的 10 进制位数．在其它系统上实现这些算法可能给出稍微不同的结果，例如，在 Kanada 将 π 计算到六十亿位的最近计算中，4 次方算法比 Salamin-Brent 算法更快些 (116 小时比 131 小时)．但是，由这些比较得到的总印象是不会弄错的：现在模式比经典式运行的速度快许多倍，特别是用基于快速富利叶变换 (FFT) 的算法实现时．

哥伦比亚大学的 David 和 Gregory Chudnovsky 在最近几年也做了一些 π 的非常高精度的计算．这是与 Kanada 不同的另一个世界记录．他们最近的 (1994) 计算产生了 π

的四十亿个数字 [9]. 他们没有使用诸如 Salamin-Brent 或 Borwein 的高阶收敛算法，而是使用了下面的无穷级数 (它与上面的 Ramanujan 级数属于同一类型):

$$\frac{1}{\pi} = 12\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(6k)!(13591409 + 545140134k)}{(3k)!(k!)^3 640320^{3k+3/2}}$$

这个级数的每一项对计算结果增加 14 个准确数字. Chudnovsky 用非常聪明的模式实现了这个公式，这个模式允许他们利用某种精度水平的结果去进行更高精度的计算. 他们的程序是在他们家的超级机上运行的，他们利用私人积蓄装配了这台计算机. 文献 [14] 给出了关于 Chudnovsky 兄弟个人生活的有趣轶事.

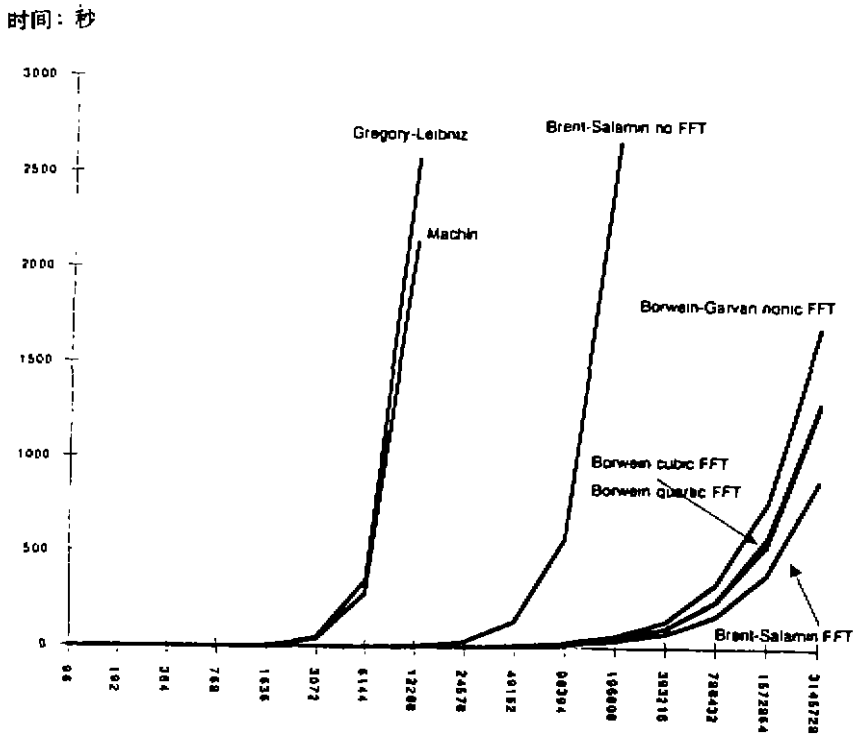

图1.十六进制位数

计算 π 的单个数字

在 π 的历史的几个关头，人们普遍相信关于这个常数的本质上有意义的每件事都已被发现，特别是，不存在关于 π 的根本性的新公式还能被发现. 在 1971 年 Beckmann 的关于 π 的历史一书 [3] 的最后一章，172 页更使人联想起这种情绪. 令人啼笑皆非的是，Salamin-Brent 算法仅仅在此之后 5 年被发现.

1990 年，Rabinowitz-Wagon 发现的关于 π 的 "水笼头" 算法 [15] 是人类关于 π 的知识的探索并未走到尽头的最新的提示. 按这个模式，在原先产生的数字基础上利用简单的递归算法能够计算出 π 的 (在任何所希望的进制基础上) 相继的数字，不要求多精度计算软件. 所以，这个模式能够容易在个人电脑上实现.

然而，请注意这个算法象前面所提到的所有其它模式一样，仍然具有这种性质，为了计算 π 的第 d 个数字，必须首先 (或同时) 计算出它前面的每一个数字. 换言之，利用这些公式并不产生计算第 d 个数字的捷径. 确实，在这个领域里广泛地承认 (虽然从未证明) 计算第 d 个数字的复杂性不比计算到 d 为止前面的所有数字的复杂性明显地少. 虽然证明起来非常困难，这仍可能是真的. 前面所知道的关于 π 的一些算法的另一个共同点都似乎要求巨大的计算机内存. 此外，所需内存还随着所产生的数字个数呈线性增长.

于是，最近发现的关于计算 π 的 16 进制的单个数字的新模式 [2] 引起了不小的震惊. 特别是 (1) 不需要计算前面的任何数字，就能直接计算 π 的第 d 位十六进制数字，(2) 在计算机上能简单地实现，(3) 不要求多精度算术软件，(4) 要求非常少的内存，以及 (5) 计算成本的增加比指标 d 的增加稍微快一点. 例如，计算 π 的十六进制的第一百万位数字在当前的 RISC 工作站或最高档的个人电脑上仅用一两分钟. 尽管这个算法计算 π 到某位 d 的所有数字在本质上并不比已知的算法快，但是，这个算法的优美性和简捷性是相当有意义的.

这个模式是基于下面关于 π 的非凡的新公式：

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i}\left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6}\right)$$

这个公式的证明不是非常困难的. 首先，注意到对任何 $k < 8$

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x^{k-1}}{1-x^8}dx = \int_0^{1/\sqrt{2}} \sum_{i=0}^{\infty} x^{k-1+8i}dx = \frac{1}{2^{k/2}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i(8i+k)}.$$

于是，我们能够写成

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i}\left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6}\right)\\ &= \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{4\sqrt{2} - 8x^3 - 4\sqrt{2}x^4 - 8x^5}{1-x^8}dx,\end{aligned}$$

用 y 代替 $\sqrt{2}x$, 上式变为

$$\int_0^1 \frac{16y-16}{y^4-2y^3+4y-4}dy = \int_0^1 \frac{4y}{y^2-2}dy - \int_0^1 \frac{4y-8}{y^2-2y+2}dy = \pi,$$

它反映了左边积分的部分因式分解.

可是，这个推导是不真实的，实际上发现它的道路是非常困难的. 事实上，这个公式不是由形式推理发现的，而是在计算机上利用 "PSLQ" 寻找整数关系算法进行数字搜索发现的 [10]. 在此之后才找到一个证明.

π^2 的类似公式 (也是首先通过 PSLQ 算法发现) 如下：

$$\begin{aligned}\pi^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i}\Big(&\frac{16}{(8i+1)^2} - \frac{16}{(8i+2)^2} - \frac{8}{(8i+3)^2} - \frac{16}{(8i+4)^2}\\ &- \frac{4}{(8i+5)^2} - \frac{4}{(8i+6)^2} + \frac{2}{(8i+7)^2}\Big).\end{aligned}$$

关于几个其它数字常数，这种类型的公式在 [2] 中给出.

利用上面的公式计算 π 的十六进制的单独一个数字，严格地依赖关于幂的计算的二进制算法知道些什么，人们用相继平方和乘法计算 x^n. 这使乘法的次数减少到 $2\log_2(n)$. 根据 Knuth 的说法，这种技术至少可以追溯到公元前 200 年 [13]. 在我们的应用中，需要得到幂的模整数 c 的计算结果. 这能够用下列二进制的计算幂的算法有效地进行，每次乘的结果模 c 后都被减小：

为计算 $r = b^n \mod c$. 首先，令 t 是一个小于等于 n 的 2 的最大次幂，并令 $r = 1$. 则

$$A : \text{if} n \geq t \,\text{then}\, r \leftarrow br \mod c\,; n \leftarrow n - t; \text{endif}$$

$$t \leftarrow t/2$$

$$\text{if} \geq 1 \,\text{tnen}\, r \leftarrow r^2 \mod c : \text{go to} A; \text{endif}$$

一旦从这个算法出来，r 有所希望的值. 这里 " mod " 用于二进制意义上，即由 $x \mod y := x - \lfloor x/y \rfloor y$ 定义的二进制函数. 注意到上面的算法在全部运行中使用大小不超过 c^2 的正整数. 作为一个例子，当用这个模式计算 $3^{49} \mod 400$ 时，变量 r 取值 1,9,27, 329,241,81,161,83. 确实 $3^{49} = 23929932923061752959008 3$. 所以， 83 是正确的结果.

现在，考虑上面 π 的公式中 4 个和式中的第一个和.

$$S_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k(8k+1)}$$

首先，观察到 S_1 的从位置 $d+1$ 开始的 16 进制数字能够由 $16^d S_1$ 的小数部分得到. 于是，我们能够记

$$\text{frac}(16^d S_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{16^{d-k}}{16^k(8k+1)} \mod 1 = \sum_{k=0}^{d} \frac{16^{d-k} \mod 8k+1}{16^k(8k+1)} \mod 1 + \sum_{k=d+1}^{\infty} \frac{16^{d-k}}{16^k(8k+1)} \mod 1$$

对于第一个和式的每一项，二进制求幂模式能够用来快速计算分子，在计算机上实现时，这可用整数或 64- 数字位 (bit) 浮点算术来完成. 然后浮点算术能够用来执行除法并把这个商加到模 1 的和中. 第二和中 16 的幂是负的，可以按所写的那样用浮点算术计算，只需要计算第二个和的几项就足以保证剩余项之和小于所用浮点算术的 "ε". 然后最终结果，是 0 和 1 之间的小数，它被转换成 16 进制，产生第 $(d+1)$ 位十六进制数字以及几个额外的数字. 这个模式的全部细节，包括某些数值上的考虑以及求其它基本数学常数的类似公式能够在 [2] 中找到. 这个模式的用 Fortran 及 C 实现的样本可从 Web 地址 *http://www.cecm.sfu.ca/personal/pborwein/*. 得到.

正象读者所见到的那样，关于 π 的新公式及它的证明或者刚刚描述的用它来计算 π 的 16 进制数字的模式，没有什么是复杂的. 事实上，在公式

$$\log(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k2^k}$$

的基础上，同样的模式可用于计算 log(2) 的 2 进位 (或 16 进位) 数字，而这一公式已经知道有好几个世纪了. 这样一来，令人吃惊的是，这些公式在这么长的时间里竟无人发

现. 例如, 为什么欧拉不能发现它们? 关于这一点, 今天的研究者所具有的唯一优势是先进的计算机技术. 表 3 给出了使用上述模型计算的 π 的一些十六进制的数字.

表 3. π 的十六进位数字

位置	在这位置开始的十六进位数字
10^6	26C65E52CB4593
10^7	17AF5863EFED8D
10^8	ECB840E21926EC
10^9	85895585A0428B
10^{10}	921C73C6838FB2

Fabrice Bellard 告诉我们用这个方法他最近计算了 π 的十六进制的第 1000 亿位数字, 它是 9C381872D27596F81D0E ……

一个立即可产生的问题是, 是否存在一个这种类型的公式及相关的计算模式能单独计算 π 的十进制数字. 现在还不知道任何单独计算 π 的十进制数字的模式, 虽然, 对某些常数, 如 log(9/10) 存在这种模式, 见 [2]. 另一方面, 现在还没有任何证明计算 π 的十进制模式存在. 当前, 这个问题正在积极研究着. 根据用 PSLQ 算法进行的一些数值研究, 似乎不存在用 10 代替 16 的上面形式的计算 π 的简单公式. 当然, 这并不排除完全不同的公式存在的可能性, 它仍然能允许快速地计算 π 的单个的十进制数字.

为什么?

π 的值到 40 位就足以用来计算银河系的圆周而误差小于一个质子大小. 当然, 有些科学计算要求中间计算的精度比最终结果的精度显著的高. 但是, 令人怀疑为了这种目的, 会有人需要 π 的数百位以上的数字. 有时, 利用 π 的数千位的数值在计算机上搜索数学问题. 但是, 我们从来不知道超出这个水平的任何有意义的应用.

计算 π 的数字的一个动机是, 这些计算是计算机软硬件的完整性的出色测试. 这是因为即使在计算中发生一个错误, 几乎肯定最终结果也是错的. 另一方面, 如果两个 π 的独立计算得到的数字一致, 那么很可能两个计算机都正确地运行了十亿次甚至万亿次运算. 例如, 在 1986 年, 一个 π 的计算程序检测出原来的 Cray 2 型超级机中的一台有某些模糊的硬件问题 [1].

计算 π 的挑战也刺激了先进的计算技术研究. 例如, 有效地计算线性卷积和快速富叶变换的一些新技术的产生起源于为了加速 π 的计算而所做的努力, 这些技术在科学和工程领域中有着广泛的应用.

撇开直接的实用性不管, 数学家一直对 π 的十进制和二进制展开感兴趣, 他们仍然不能解决 π 的展开是否是正则的这个问题 [18]. 特别是, 人们怀疑 $\pi, e, \sqrt{2}, \sqrt{10}$ 和许多其它数学常数都有这种性质, 即任何一个数字的极限频率是十分之一, 并且, 任意长为 n 的一串十进制数字的极限频率是 10^{-n}(二进制也类似). 这样一个性质能够成为, 例如, 科学计算的伪随机数发生器的基础. 不幸的是, 这个断言在一个实例中都没得到证实. 于是, 继续不断有兴趣进行关于这些展开的统计分析, 看它是否有任何不正则性, 使它们看起来不象随机数列. 到目前为止, 这种 π 的高精度值的研究还没有发现任何不正则性. 沿着这个思路, 计算 π 的数字的新公式和模式是有意义的, 因为, 它们会揭示出解决正则性问题的新方法.

最后，π 的计算有一个更根本的动机，它就是一个挑战，象征服一座高山或参加一项重要的体育比赛一样，π 无疑是基本数学常数中最有名的一个．每种技术文明必须掌握 π，对某些人来说，提高 π 的精度的挑战同样是不可避免的．

常数 π 以新的和不可预期的结果使人们不断震惊．就关于 π 的知识状况而言，如果有任何事情比上一个世纪更激动人心，那就是本世纪的发现．由此我们猜想关于这个著名常数的更使人激动的事还被深埋在未发现的知识中．

致谢

作者感谢东京大学的 Yasumasa Kanada 提供了有帮助的信息

参 考 文 献

[1] D.H.Bailey, The computation of pi to 29,360,000 decimal digits using Borwein's quartically convergent algorithm, *Mathematics of Computation* **42** (1988), 283–296.

[2] D H.Bailey, P.B. Borwein, and S.Plouffe, On the rapid computation of various polylogarithmic constants. (to appear in Mathematics of Computation).

[3] P.Beckmann. *A History of Pi*, New York: St.Martin's Press (1971).

[4] L.Berggren, J.M. Borwein, and P.B. Borwein,*A Sourcebook on Pi*, New York: Springer-Verlag (to appear).

[5] J.M. Borwein and P.B Borwein,*Pi and the AGM: A Study in Analytic Number Theory and Computational Complexity*, New York: Wiley (1987).

[6] J.M. Borwein and P.B. Borwein, Ramanujan and pi, *Scientific American* (February 1987), 112–117.

[7] J.M. Borwein and P.B. Borwein and D.H. Bailey,Ramanujan, modular equations, and approximations to pi, or how to compute one billion digits of pi, *American Mathematical Monthly* **96** (1989), 201–219.

[8] R.P.Brent, Fast multiple-precision evaluation of elementary functions, *Journal of the ACM* **23** (1976), 242–251.

[9] D.Chudnovsky and C.Chudnovsky, personal communication (1995).

[10] H.R.P.Ferguson and D.H Bailey, Analysis of PSLQ, an integer relation algorithm, unpublished, 1996.

[11] T.L.Heath (trans.), The works of Archimedes, in *Great Books of the Western World* (Robert M. Hutchins, ed.), Encyclopedia Britannica (1952), Vol. 1, pp. 447–451.

[12] Y.Kanada, personal communication (1996). See also Kanada's book (in Japanese), *Story of Pi*, Tokyo: Tokyo-Toshyo Co. Ltd. (1991).

[13] D.E.Knuth, *The Art of Computer Programming*, Reading, MA: Addison- Wesley, (1981), Vol. 2.

[14] R.Preston, The mountains of pi, *The New Yorker*, 2 March 1992, 36–67.

[15] S.D.Rabinowitz and S.Wagon, A spigot algorithm for pi, *American Mathematical Monthly* **103** (1995), 195–203.

[16] E.Salamin, Computation of pi using arithmetic-geometric mean, *Mathematics of Computation* **30** (1976), 565–570.

[17] D.Shanks and J.W.Wrench, Calculation of pi to 100,000 decimals, *Mathematics of Computation* **16** (1962), 76–79.

[18] S.Wagon, Is π normal? *Mathematical Intelligencer* **7** (1985), no. 3 65–67.

(王天明，刘秀平 译　姚景齐 校)