利用缩叠和计算 $\zeta(2m)$

Brian D. Sittinger

摘要 受 Daners [3] 给出的对于 $\zeta(2)$ 的利用初等的缩叠和 [1)] 证明的启发，本文中我们给出 $\zeta(2m)$ 闭形式的另一个证明. 从利用分部积分的某些积分推导而得的一些递推关系开始的这个证明，产生了用 $\zeta(2),\zeta(4),\ldots,\zeta(2m-2)$ 给出 $\zeta(2m)$ 值的一个恒等式. 用归纳法的一个快速证明产生了 $\zeta(2m)$ 的闭形式.

1. 引言

无穷级数理论中更为引人入胜的公式之一必定是恒等式

$$\zeta(2)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

最初由 Euler (欧拉) 于 1735 年前后建立的这个恒等式多年来一直受到极大的关注. Chapman 在 [2] 中编纂了这个结果的许多证明.

更一般地，对于任意 $m\in\mathbb{N}$, Euler 证明了

$$\zeta(2m)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2m}}=\frac{(-1)^{m+1}2^{2m-1}B_{2m}}{(2m)!}\pi^{2m},$$

其中 B_n 表示由母函数

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{t^n}{n!}$$

定义的第 n 个 Bernoulli (贝努利) 数. 上述关于 $\zeta(2m)$ 的恒等式同样以多种方法被建立，其中的一些可在 [1] 和 [4] 中找到. 本文的目的是推广 [3] 中 Daners 计算 $\zeta(2)$ 的方法来计算 $\zeta(2m)$. 在 [3] 中，Daners 仅依赖于对于一组简单的积分应用分部积分而得到的一些递推关系就建立了 $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$. 虽然推理更复杂些，但是主要的思想是类似的，并且我们发现了一个递推关系，它将建立 Euler 关于 $\zeta(2m)$ 的恒等式.

2. 结果的推导

我们先定义具有非负整数 k 和 n 为指标的一族积分:

$$I_{k,n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^{2k}\cos^{2n}x\,dx.$$

下述结果收集了以后要反复利用的 $I_{k,n}$ 的两个递推关系.

引理 1 对于所有正整数 n, 有

(1) $I_{0,n}=\dfrac{2n-1}{2n}I_{0,n-1}$,

译自: The Amer. Math. Monthly, Vol. 123 (2016), No. 7, p. 710–715, Computing $\zeta(2m)$ by Using Telescoping Sums, Brian D. Sittinger.
作者的邮箱地址是 brian.sittinger@csuci.edu.

1) 缩叠和指诸相邻项有部分相抵消的和式. 例如, $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{N}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=1-\frac{1}{N+1}=\frac{N-1}{N+1}$.
—— 译注

(2) $I_{k,n} = \dfrac{1}{(2k+2)(2k+1)}\Big(2n(2n-1)I_{k+1,n-1} - 4n^2 I_{k+1,n}\Big).$

证明 第 1 个递推关系由对 $u = \cos^{2n-1} x$ 和 $dv = \sin x\, dx$ 应用一次分部积分，并利用 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ 即得.

类似地我们建立第 2 个递推关系. 对 $u = \cos^{2n} x$ 和 $dv = x^{2k}\, dx$ 应用分部积分，产生

$$I_{k,n} = \frac{2n}{2k+1} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{2k+1} \cos^{2n-1} x \sin x\, dx.$$

再次应用分部积分，并利用 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, 即产生所希望的结果. ■

其次，我们利用引理 1 中用类似于 Daners [3] 中方法得到的一些递推关系来推导下述递推关系. 下文中，我们令 $S(k) = \sum\limits_{1 \le i_1 \le \cdots \le i_k} \dfrac{1}{i_1^2 \cdots i_k^2}$.

命题 1 对于任意 $m \in \mathbb{N}$, 有 $\sum\limits_{k=0}^{m} \left(\dfrac{-1}{\pi^2}\right)^k \dfrac{1}{(2m-2k+1)!} S(k) = 0.$

证明 首先，对引理 1 中的递推关系 (2) 的两端都除以 $n^2 I_{0,n}$:

$$\frac{I_{k,n}}{n^2 I_{0,n}} = \frac{1}{n^2(2k+2)(2k+1)}\left(2n(2n-1)\frac{I_{k+1,n-1}}{I_{0,n}} - 4n^2 \frac{I_{k+1,n}}{I_{0,n}}\right).$$

其次，我们应用恒等式 $I_{0,n-1} = \frac{2n}{2n-1} I_{0,n}$, 得到

$$\frac{I_{k,n}}{n^2 I_{0,n}} = \frac{4}{(2k+2)(2k+1)}\left(\frac{I_{k+1,n-1}}{I_{0,n-1}} - \frac{I_{k+1,n}}{I_{0,n}}\right).$$

定义 $S_N(0) = 1$, 以及对于 $k > 0$ 定义 $S_N(k) = \sum\limits_{1 \le i_1 \le \cdots \le i_k \le N} \dfrac{1}{i_1^2 \cdots i_k^2}$; 注意，$S_N(k)$ 是 $S(k)$ 的一个截断和. 当 k 变动时，对以前的恒等式重复做缩叠即产生

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k (2m)!}{2^{2k}(2m-2k)!} \frac{I_{m-k,0}}{I_{0,0}} S_N(k) = \frac{I_{m,N}}{I_{0,N}}. \tag{$*$}$$

为了解释缩叠过程是如何有效的，我们通过对 m 的归纳法来证实 $(*)$ 是正确的. 对于 $m = 1$ 的情形，我们在上面的恒等式中取 $k = 0$:

$$\frac{1}{n^2} = 2\left(\frac{I_{1,n-1}}{I_{0,n-1}} - \frac{I_{1,n}}{I_{0,n}}\right).$$

由于这些恒等式对 $n \in \mathbb{N}$ 成立，对 $n = 1$ 到 k 求和得到

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2} = 2\left(\frac{I_{1,0}}{I_{0,0}} - \frac{I_{1,k}}{I_{0,k}}\right),$$

这可以被重写为断言 $(*)$ 中 $m = 1$ 的形式.

按照归纳步骤，我们假设断言 $(*)$ 对于 m 为真. 将此代入递推关系 (有些下标被重写了) 产生

$$\frac{1}{j^2} \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^{m+k}(2m)!}{2^{2m-2k}(2k)!} \frac{I_{k,0}}{I_{0,0}} S_j(m-k) = \frac{4}{(2m+2)(2m+1)}\left(\frac{I_{m+1,j-1}}{I_{0,j-1}} - \frac{I_{m+1,j}}{I_{0,j}}\right).$$

对此式从 $j=1$ 到 N 求和，并注意到 $\sum_{j=1}^{N}\frac{S_j(n)}{j^2}=S_N(n+1)$, 即得

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^{m+k}(2m)!}{2^{2m-2k}(2k)!}\frac{I_{k,0}}{I_{0,0}}S_j(m-k+1)=\frac{4}{(2m+2)(2m+1)}\left(\frac{I_{m+1,0}}{I_{0,0}}-\frac{I_{m+1,N}}{I_{0,N}}\right).$$

如所要求的，此式可以任意地重写为一个形式，此形式验证了对于 $m+1$ 的断言.

我们现在来求 $(*)$ 右端的界. 利用在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上 $\sin x\geq\frac{2x}{\pi}$ 这一事实，连同 $I_{0,n}=\frac{2n-1}{2n}I_{0,n-1}$ 一起，我们得到

$$I_{m,N}\leq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)^{2m}\cos^{2N}x\,dx\leq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m}\sin^2 x\cos^{2N}x\,dx=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m}\frac{I_{0,N}}{N+1}.$$

由于被积函数是非负的，即得 $0<\frac{I_{m,N}}{I_{0,N}}\leq\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m}\frac{I_{0,N}}{N+1}$. 因而，我们可以把 $(*)$ 重写为

$$0<\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k(2m)!}{2^{2k}(2m-2k)!}\frac{I_{m-k,0}}{I_{0,0}}S_N(k)\leq\frac{\pi^{2m}}{2^{2m}(N+1)}.$$

令 $N\to\infty$, 由挤压定理即得

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k(2m)!}{2^{2k}(2m-2k)!}\frac{I_{m-k,0}}{I_{0,0}}S(k)=0.$$

注意到由一个简单的积分运算得到 $\frac{I_{n,0}}{I_{0,0}}=\frac{\pi^{2n}}{2^{2n}(2n+1)}$, 我们可以进一步简化上述公式. 应用这个事实，我们得到所希望的递推关系. ■

接着，我们来计算 $S(k)=\sum_{1\leq i_1\leq\cdots\leq i_k}\frac{1}{i_1^2\cdots i_k^2}$ 的值. 虽然这个结果在文献中是熟知的 [5], 我们在下面对这个结果仍将给出一个简短的推导.

引理 2 对任意 $k\in\mathbb{N}$, 我们有 $S(k)=2(1-2^{1-2k})\zeta(2k)$.

证明 考虑母函数 $G(x)=\sum_{k=0}^{\infty}S(k)x^{2k}$, 其中我们取 $S(0)=1$. 在重写 $G(x)$ 之前，我们不加证明地从复分析中引用两个景点结果 (进一步的细节见 [6]):

$$\sin z=z\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{(j\pi)^2}\right)\quad 和\quad \csc z=\frac{1}{z}-2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z}{z^2-(n\pi)^2}.$$

首先，在应用 $\sin x$ 的无穷乘积之后对 $G(x)$ 直接应用 $S(n)$ 的定义，得到 $G(x)=\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{j^2}\right)^{-1}=\frac{\pi x}{\sin\pi x}=\pi x\csc(\pi x)$. 其次，应用 $\csc x$ 的展开，我们得到 $G(x)=1-2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^2}{x^2-n^2}$. 因而，由几何级数得 $\frac{x^2}{x^2-n^2}=-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^{2k}$. 将此代入 $G(x)$ 最后的表达式，并交换求和次序，得到

$$G(x)=1+2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{2k}}x^{2k}.$$

现在，用 ζ 函数我们重写内和:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{2k}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n)^{2k}}=(1-2^{1-2k})\zeta(2k).$$

因而我们得到 $G(x)=1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}2(1-2^{1-2k})\zeta(2k)x^{2k}$. 另一方面，由于 $G(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}S(k)x^{2k}$, 令 x^{2k} 的系数相等即得所希望的结果. ■

在证明主要结果之前，我们需要关于 Bernoulli 数的下述恒等式，我们也用母函数来证明它.

引理 3 对于任意 $m\in\mathbb{N}$, 我们有 $\sum\limits_{k=0}^{m}\binom{2m+1}{2k}(1-2^{2k-1})B_{2k}=0$.

证明 由于 $\dfrac{t}{e^t-1}=\dfrac{1+e^t}{2}\cdot\dfrac{2t}{e^{2t}-1}$, Bernoulli 数的母函数以及 e^t 的 Maclaurin (麦克劳林) 级数即产生

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_kt^k}{k!}=\frac{1}{2}\cdot\Big(1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\Big)\cdot\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_k(2t)^k}{k!}\Big).$$

将此重排为

$$\sum_{r=1}^{\infty}B_r(1-2^{r-1})\frac{t^r}{r!}=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}(1-2^{j-1}B_j)\frac{t^r}{r!}.$$

令两端 t^{2m+1} 的系数相等，并注意到 $B_{2m+1}=0$, 得到

$$\sum_{j=0}^{2m+1}\binom{2m+1}{j}(1-2^{j-1})B_j=0.$$

由于奇数指标对等式左端和式没有贡献，我们可以把和式 (在对偶数指标重新标号后) 重写为

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{2m+1}{2k}(1-2^{2k-1})B_{2k}=0.$$ ■

最后，把命题与后两个引理放在一起，我们就对任意正整数 m 证实了 $\zeta(2m)$ 的闭形式.

定理 1 对任意 $m\in\mathbb{N}$, 有

$$\zeta(2m)=\frac{(-1)^{m+1}2^{2m-1}B_{2m}}{(2m)!}\pi^{2m}.$$

证明 首先注意，对命题应用引理 2 产生

$$\zeta(2m)=\frac{(-1)^{m+1}\pi^{2m}}{1-2^{1-2m}}\left[\frac{1}{2(2m+1)!}+\sum_{k=1}^{m-1}\left(\frac{-1}{\pi^2}\right)^K\frac{1-2^{1-2k}}{(2m-2k+1)!}\zeta(2k)\right].$$

利用这个恒等式, 通过关于 m 的强归纳法我们来证明定理. 令 $m=1$, 我们得到 $\zeta(2)=\dfrac{\pi^2}{6}=\dfrac{2^3B_2}{2!}\pi^4$, 这证实了基础情形. 其次，我们假设断言对于所有整数 $k=1,2,\ldots,m-1$ 为真. 对上述恒等式应用归纳假设，我们得到

$$\zeta(2m)=\frac{(-1)^{m+1}\pi^{2m}2^{2m-1}}{(2m)!}\cdot\frac{1}{(2m+1)(2^{2m-1}-1)}\sum_{k=0}^{m-1}\binom{2m+1}{2k}(2^{2k-1}-1)B_{2k}.$$

由于引理 3 蕴涵着

$$B_{2m}=\frac{1}{(2m+1)(2^{2m-1}-1)}\sum_{k=0}^{m-1}\binom{2m+1}{2k}(2^{2k-1}-1)B_{2k},$$

(下转 148 页)

要. 在里约热内卢获得 Fields (菲尔兹) 奖的 Birkar 在他的演讲中说道, 有一次我曾对他说, 一个没有梦想的数学家不是数学家. 我认为这是鼓舞人心的.

JACM: 事实上, 您在里约热内卢的国际数学家大会讲座中, 您谈过了算术物理学作为一项研究计划. 您能总结一下您对此计划的看法吗?

MA: 是的. 如果你观察数学和物理学, 它们在不同的领域中有重叠; 这种重叠有时在几何学中, 有时在代数学中, 有时在数论中. 例如, 一个非常具体的例子是称为模形式的东西, 它出现在数论中. 另一方面, 模形式是作为分拆函数 (partition functions) 出现在物理学中的. 它们常常是相同的, 但是你要问为什么. 我的目的是找到一个解释所有这一切的自然框架. 应该有某种自然的方式, 算术, 几何学, 代数学和物理学都被包含于其中.

JACM: 我非常感谢您给了我一些时间有了这次对话. 让我提出最后一个问题. 对于年轻的数学家, 您有什么建议?

MA: 我对年轻数学家的第 1 个建议就是你必须充满激情. 如果你这样做是因为你认为你会得到一些钱, 或者你会找到一份好工作, 算了吧! 有更简单的方法可以做到这一点. 这就是非常努力地工作: 你奋斗, 很多时候你很沮丧. 获得成功的唯一方法就是如果你充满激情. 如果你是充满激情, 那么你将要走很长的路. 第 2 件事是聆听你的长辈. 汲取他们的经验, 但是做你自己. 按照你自己的直觉, 因为如果这样你成功了, 你将是独一无二的. 如果你只是遵循你的老师告诉你的, 你只会重复他们所做的. 聆听老师的意见, 去听课, 读书; 带着那些知识去提问: 我现在想做什么. 你需要的是激情, 坚持和冒险寻找美的东西. 如果你这样做, 你有机会成功. 并且不要害怕敞开心扉, 与人们交谈. 与其他人互动, 你会得到想法. 你需要在你的激情和家庭之间取得平衡. 你需要一种平衡的生活.

(陆柱家 译　　童欣 校)

****

(上接 192 页)

我们就推得断言对于 m 亦为真, 因而完成了证明. ■

参考文献

[1] F. Beukers, E. Calabi, J. Kolk, Sums of generalized harmonic series and volumes, Nieuw Arch. Wiskd. 11 no. 4 (1993) 217–224.

[2] R. Chapman, Evaluating $\zeta(2)$, 2003, available at `http://empslocal.ex.ac.uk/people/staff/rjchapma/etc/zeta2.pdf`.

[3] D. Daners, A short elementary proof of $\sum 1/k^2 = \pi^2/6$, Math. Mag. 85 (2012) 361–364.

[4] T. Osler, Finding $\zeta(2p)$ from a Product of Sines, Amer. Math. Monthly 111 (2004) 52–54.

[5] Y. Ohno, W. Zudilin, Zeta stars, Commun. Number Theory Phys. 2 (2008) 325–347.

[6] R. Silverman, Introductory Complex Analysis. Dover, New York, 1972.

(陆柱家 译　　童欣 校)