Hoelder不等式，闵可夫斯基，不等式，

微分学

68-71

Hölder不等式和Minkowski不等式的简单证明

Malig., L
Lech Maligranda 陆昱

著名的 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式的证明，如同其诸多推广、逆和应用一样，可以在有关实函数、分析、泛函分析，或者 L_p 空间的许多著作中找到 (参阅 [Mi]). 这篇短文的目的是给出这些经典不等式的另一证明. 下述引理是我们的这些不等式的简单证明中的主要步骤. [KPS],[M] 和 [MP] 中的一些考虑激发了这个引理.

引理. 对于 $1 \le p < \infty$ 和任意 $a, b > 0$, 我们有

(i) $\inf_{t>0}[\frac{1}{p}t^{1/p-1}a + (1-\frac{1}{p})t^{1/p}b] = a^{1/p}b^{1-1/p}$.

(ii) $\inf_{0<t<1}[t^{1-p}a^p + (1-t)^{1-p}b^p] = (a+b)^p$.

第一个证明[1]. 在此证明中我们将用到微分学.

(i) 对于 $t > 0$, 令函数 f 由

$$f(t) = \tfrac{1}{p}t^{1/p-1}a + \left(1-\tfrac{1}{p}\right)t^{1/p}b$$

定义. 这样，导数 f' 满足

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{1}{p}\Big(\frac{1}{p}-1\Big)t^{1/p-2}a + \Big(1-\frac{1}{p}\Big)\frac{1}{p}t^{1/p-1}b \\ &= \frac{1}{p}\Big(\frac{1}{p}-1\Big)t^{1/p-2}(a-tb), \end{aligned}$$

因而，当 $t < t_0 = a/b$ 时 f' 是负的；当 $t = t_0$ 时为零；当 $t > t_0$ 时是正的. 所以在点 $t_0 = a/b$ 处 f 有最小值，这个最小值等于

$$\begin{aligned} f(t_0) = f(\frac{a}{b}) &= \frac{1}{p}(\frac{a}{b})^{1/p-1}a + \Big(1-\frac{1}{p}\Big)(\frac{a}{b})^{1/p}b \\ &= a^{1/p}b^{1-1/p}. \end{aligned}$$

(ii) 对于 $0 < t < 1$, 令函数 g 由

$$g(t) = t^{1-p}a^p + (1-t)^{1-p}b^p$$

原题: A simple proof of the Hölder and the Minkowski inequalities. 译自: *The Amer. Math. Monthly*, Vol. 102, No. 3, 1995, pp. 256–259.

[1] 在此证明中作者未讨论 $p = 1$ 时的平凡情形. — 译注.

定义．这样，仅当 $t=t_1=a/(a+b)$ 时导数 g' 满足方程

$$g'(t)=(1-p)t^{-p}a^p-(1-p)(1-t)^{-p}b^p=0.$$

由[1)]

$$g''(t_1)=(1-p)(-p)t_1{}^{-p-1}a^p+(1-p)(-p)(1-t_1)^{-p-1}b^p>0$$

即得：在 $t_1=a/(a+b)$ 处 g 有局部极小值，它等于

$$\begin{aligned}g(t_1)=g\left(\frac{a}{a+b}\right)&=\left(\frac{a}{a+b}\right)^{1-p}a^p+\left(1-\frac{a}{a+b}\right)^{1-p}b^p\\&=\left(\frac{a}{a+b}\right)^{1-p}a^p+\left(\frac{b}{a+b}\right)^{1-p}b^p=(a+b)^p.\end{aligned}$$

因为函数 g 在 $(0,1)$ 上是连续的，并且

$$\lim_{t\to0+}g(t)=\lim_{t\to1-}g(t)=+\infty,$$

因而 g 的这个局部极小值即为它的整体极小值．

第二个证明．在此证明中我们将用到某些函数的凸性．

(i) 函数 $\varphi(u)=\exp(u)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是凸的．这样，对于每个 $t>0$ 有

$$\begin{aligned}a^{1/p}b^{1-1/p}&=[t^{1/p-1}a]^{1/p}[t^{1/p}b]^{1-1/p}\\&=\exp\left[\frac{1}{p}\ln(t^{1/p-1}a)+\left(1-\frac{1}{p}\right)\ln(t^{1/p}b)\right]\\&\le\frac{1}{p}\exp[\ln(t^{1/p}a)]+\left(1-\frac{1}{p}\right)\exp[\ln(t^{1/p}b)]\\&=\frac{1}{p}t^{1/p-1}a+\left(1-\frac{1}{p}\right)t^{1/p}b.\end{aligned}$$

当 $t=a/b$ 时上式为等式．

(ii) 对于 $p>1$, 函数 $\psi(u)=u^p$ 在 $[0,\infty)$ 上是凸的．因而，对于每个 $0<t<1$ 有

$$\begin{aligned}(a+b)^p&=\left[t\cdot\frac{a}{t}+(1-t)\cdot\frac{b}{1-t}\right]^p\\&\le t(\frac{a}{t})^p+(1-t)\left(\frac{b}{1-t}\right)^p=t^{1-p}a^p+(1-t)^{1-p}b^p.\end{aligned}$$

当 $t=a/(a+b)$ 时上式为等式．

注 *1*. 当 $0<p<1$ 时，在不等式 (i) 和 (ii) 中把下确界 inf 改为上确界 sup, 则引理仍成立．

[1)]原文将 $g''(t_1)$ 误为 $g''(t)$.— 译注．

注 2. (i) 的第二个证明还给出了算术 - 几何平均不等式

$$a^{1/p}b^{1-1/p} \le \tfrac{1}{p}a + \left(1 - \tfrac{1}{p}\right)b$$

的一个不同的证明 (令 $t = 1$), 也给出了 Young 不等式的一个不同的证明.

经典的 Hölder 不等式叙述为: 令 $1 \le p < \infty$, 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 如果 $x \in L_p(\mu)$ 和 $y \in L_q(\mu)$, 则 $xy \in L_1(\mu)$, 并且有

$$\|xy\|_1 \le \|x\|_p \|y\|_q. \tag{HI}$$

等价地, 如果 $x, y \in L_1(\mu)$, 则 $|x|^{1/p}|y|^{1-1/p} \in L_1(\mu)$, 并且有

$$\|\,|x|^{1/p}|y|^{1-1/p}\|_1 \le \|x\|_1^{1/p}\|y\|_1^{1-1/p}. \tag{HI$_1$}$$

证明: 根据我们的引理, 对于所有的 $t > 0$ 不等式

$$a^{1/p}b^{1-1/p} \le \frac{1}{p}t^{1/p-1}a + \left(1 - \frac{1}{p}\right)t^{1/p}b$$

成立, 因而得到

$$\begin{aligned}
\|\,|x|^{1/p}|y|^{1-1/p}\|_1 &= \int_\Omega |x(s)|^{1/p}|y(s)|^{1-1/p}d\mu(s) \\
&\le \int_\Omega \left[\frac{1}{p}t^{1/p-1}|x(s)| + \left(1 - \frac{1}{p}\right)t^{1/p}|y(s)|\right]d\mu(s) \\
&= \frac{1}{p}t^{1/p-1}\int_\Omega |x(s)|\,d\mu(s) + \left(1 - \frac{1}{p}\right)t^{1/p}\int_\Omega |y(s)|\,d\mu(s) \\
&= \frac{1}{p}t^{1/p-1}\|x\|_1 + \left(1 - \frac{1}{p}\right)t^{1/p}\|y\|_1.
\end{aligned}$$

对所有的 $t > 0$ 取下确界, 并且再次利用我们的引理, 即得

$$\|\,|x|^{1/p}|y|^{1-1/p}\|_1 \le \|x\|_1^{1/p}\|y\|_1^{1-1/p},$$

此即为不等式 (HI$_1$).

注 3. 当用一般的 Banach 函数空间 $X(\mu)$ 代替空间 $L_1(\mu)$ 时, 我们对于 (HI$_1$) 的证明仍然有效, 即, 若 $x, y \in X(\mu)$, 则 $|x|^{1/p}|y|^{1-1/p} \in X(\mu)$, 并且有

$$\|\,|x|^{1/p}|y|^{1-1/p}\|_X \le \|x\|_X^{1/p}\|y\|_X^{1-1/p}. \tag{HI$_X$}$$

等价地 (参阅 [MP]), 若 $|x|^p \in X(\mu)$, $|y|^q \in X(\mu)$, 其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则 $xy \in X(\mu)$, 并且有

$$\|xy\|_X \le \|\,|x|^p\|_X^{1/p}\|\,|y|^q\|_X^{1/q}. \tag{HI}$$

经典的 Minkowski 不等式叙述为：令 $1 \le p < \infty$. 如果 $x, y \in L_p(\mu)$, 则 $x + y \in L_p(\mu)$, 并且有

$$\|x + y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p. \tag{MI}$$

证明: 利用引理的第二部分，也就是利用不等式

$$(a+b)^p \le t^{1-p}a^p + (1-t)^{1-p}b^p,$$

我们即知对于所有满足 $0 < t < 1$ 的 t, 有

$$\begin{aligned} \|x+y\|_p^p &= \int_\Omega |x(s)+y(s)|^p d\mu(s) \le \int_\Omega [|x(s)|+|y(s)|]^p d\mu(s) \\ &\le \int_\Omega \left[t^{1-p}|x(s)|^p + (1-t)^{1-p}|y(s)|^p\right] d\mu(s) \\ &= t^{1-p}\int_\Omega |x(s)|^p d\mu(s) + (1-t)^{1-p}\int_\Omega |y(s)|^p d\mu(s) \\ &= t^{1-p}\|x\|_p^p + (1-t)^{1-p}\|y\|_p^p. \end{aligned}$$

在 $0 < t < 1$ 上取下确界，并且再次利用我们的引理，即得

$$\|x+y\|_p^p \le (\|x\|_p + \|y\|_p)^p,$$

此即为不等式 (MI).

参 考 文 献

[KPS] Krein, S.G., Petunin, Y.U., Semenov, E.M., *Interpolation of Linear Operators*, AMS, Providence 1980.

[M] Maligranda, L., Calderón–Lozanovskii spaces and interpolation of operators, *Semesterbericht Funktionalanalysis, Tübingen* **8**(1985), 83–92.

[MP] Maligranda, L., Persson, L.E., Generalized duality of some Banach function spaces, *Indagationes Math.* **51**(1989), 323–338.

[Mi] Mitrinovic, D.S., *Analytic Inequalities*, Springer–Verlag 1970.

(陆　昱 译　陆柱家 校)