四面体的"三球"的半径公式

李 湘 江
(长沙理工大学计算机与通信工程学院, 410004)

本文给出由六条棱表示的四面体的外接球, 内切球及旁切球的半径公式.

定理 1 设四面体的三组对棱为 a, a'; b, b'; c, c', 则四面体的外接球半径

$$R=2\sqrt{\frac{E(E-aa')(E-bb')(E-cc')}{P_1+P_2+P_3-Q}} \qquad ①$$

其中,

$$\begin{cases} P_1=(aa')^2(b^2+b'^2+c^2+c'^2-a^2-a'^2) \\ P_2=(bb')^2(c^2+c'^2+a^2+a'^2-b^2-b'^2) \\ P_3=(cc')^2(a^2+a'^2+b^2+b'^2-c^2-c'^2) \\ Q=(abc)^2+(ab'c')^2+(a'bc')^2+(a'b'c)^2 \end{cases} \qquad ②$$

$$E=\frac{1}{2}(aa'+bb'+cc') \qquad ③$$

定理 2 设四面体的三组对棱为 a, a'; b, b'; c, c', 则四面体的内切球半径

$$r=\frac{\sqrt{P_1+P_2+P_3-Q}}{4(S_1+S_2+S_3+S_4)} \qquad ④$$

其中, P_1, P_2, P_3, Q 如②所示, 而 S_1, S_2, S_2, S_4 分别是四面体四个侧面的面积, 即

$$\begin{cases} S_1=\sqrt{q_1(q_1-a)(q_2-b)(q_3-c)}, \\ \quad q_1=\frac{1}{2}(a+b+c) \\ S_2=\sqrt{q_2(q_2-a)(q_2-b')(q_2-c')}, \\ \quad q_2=\frac{1}{2}(a+b'+c') \\ S_3=\sqrt{q_3(q_3-a')(q_3-b)(q_3-c')}, \\ \quad q_3=\frac{1}{2}(a'+b+c') \\ S_4=\sqrt{q_4(q_4-a')(q_4-b')(q_4-c)}, \\ \quad q_4=\frac{1}{2}(a'+b'+c) \end{cases} \qquad ⑤$$

定理 3 设四面体 $D\text{-}ABC$ 的三组对接 $BC=a$, $AD=a'$; $AC=b$, $DB=b'$; $AB=c$, $DC=c'$; 侧面面积 $S_{\triangle ABC}=S_1$, $S_{\triangle BDC}=S_2$, $S_{\triangle ACD}=S_3$, $S_{\triangle ABD}=S_4$; 侧面 S_1, S_2, S_3, S_4 的旁切球半径分别记为 r_1, r_2, r_3, r_4, 则

$$r_i=\frac{\sqrt{P_1+P_2+P_3-Q}}{8(T-S_i)}\ (i=1,2,3,4) \qquad ⑥$$

其中, P_1, P_2, P_3, Q 如②所示, S_1, S_2, S_3, S_4 如⑤所示, 而

$$T=\frac{1}{2}(S_1+S_2+S_3+S_4) \qquad ⑦$$

为了证明上述定理, 我们先引入如下三个引理:

引理 1 [1] 三角形到四面体的一个等价变换:

$$f(a, b, c, \triangle)\equiv f(aa', bb', cc', 6RV) \qquad ⑧$$

其中, $a, b, c, \triangle$ 分别是三角形的三边, 面积; $a, a', b, b', c, c', R, V$ 分别是四面体的三组对棱, 外接球半径, 体积.

引理 2 [2] 已知四面体三组对棱 a, a', b, b', c, c', 则四面体的体积

$$V=\frac{1}{12}\sqrt{P_1+P_2+P_3-Q} \qquad ⑨$$

其中, P_1, P_2, P_3, Q 如②所示.

引理 3 设 $D\text{-}ABC$ 为四面体, O 为空间一点,

1) 若 O 在四面体 $D\text{-}ABC$ 内(图 1), 则体积

$$V_{D\text{-}ABC}=V_{O\text{-}BCD}+V_{O\text{-}ACD}+V_{O\text{-}ABD}+V_{O\text{-}ABC} \qquad ⑩$$

2) 若 O 在四面体外, 比如在界面 ABC 之外, 如图 2 的情形, 则

$$V_{D\text{-}ABC}=V_{O\text{-}BCD}+V_{O\text{-}ACD}+V_{O\text{-}ABD}-V_{O\text{-}ABC} \qquad ⑪$$

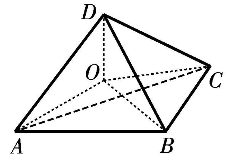

图 1

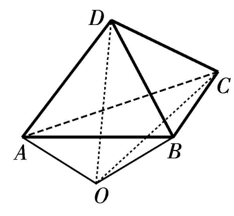

图 2

证明 由图 1, 图 2, 易证(略).

现在回到定理的证明.

定理 1 的证明 由海伦—秦九韶公式知, 以 a, b, c 为边的三角形的面积

$\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

即 $\triangle^2 = \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{c+a-b}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}$

则由引理 1, 即等价变换⑧, 得

$$(6RV)^2 = \frac{aa'+bb'+cc'}{2} \cdot \frac{bb'+cc'-aa'}{2} \cdot \frac{cc'+aa'-bb'}{2} \cdot \frac{aa'+bb'-cc'}{2} \quad ⑫$$

由③有

$$\frac{aa'+bb'+cc'}{2} = E,$$
$$\frac{bb'+cc'-aa'}{2} = E - aa'$$
$$\frac{cc'+aa'-bb'}{2} = E - bb', \quad ⑬$$
$$\frac{aa'+bb'-cc'}{2} = E - cc'$$

于是由⑫与⑬即得

$$R = \frac{1}{6V}\sqrt{E(E-aa')(E-bb')(E-cc')} \quad ⑭$$

再由引理 2 与式⑭即知定理 1 结论成立.

定理 2 的证明　由引理 3 之 1)及四面体内切球的性质知, 四面体的体积

$$V = \frac{1}{3}rS_1 + \frac{1}{3}rS_2 + \frac{1}{3}rS_3 + \frac{1}{3}rS_4$$

则 $r = \frac{3V}{S_1+S_2+S_3+S_4}$　⑮

再由⑮及引理 2 即知定理 2 的结论成立.

定理 3 的证明　仅证 $i=1$ 的情形, 如图 3, 设位于侧面 S_1 (即面 ABC)的旁切球的球心为 O, 连接 OA, OB, OC, OD, 并记四面体 D-ABC 的体积为 V, 则由引理 3 之 2)及旁切球的性质知

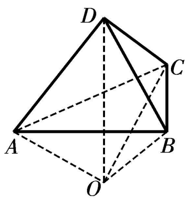

图 3

$$V = \frac{1}{3}r_1S_2 + \frac{1}{3}r_1S_3 + \frac{1}{3}r_1S_4 - \frac{1}{3}r_1S_1$$

于是 $r_1 = \frac{3V}{S_2+S_3+S_4-S_1}$　⑯

由⑦, 式⑯又可表为

$$r_1 = \frac{3V}{2(T-S_1)} \quad ⑰$$

由⑰与⑨即得

$$r_1 = \frac{\sqrt{P_1+P_2+P_3-Q}}{8(T-S_1)} \quad ⑱$$

$i=2, 3, 4$ 时可同样证之(证毕).

当四面体为等腰四面体, 即各对棱分别相等, 即 $a'=a$, $b'=b$, $c'=c$ 时, 由定理 1, 2, 3 可得如下

推论 1　设等腰四面体的三组对棱为 a, b, c, 并记
$$\begin{cases} E = \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2) \\ q = \frac{1}{2}(a+b+c) \end{cases} \quad ⑲$$

则: 1) 等腰四面体外接球半径

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{E} \quad ⑳$$

2) 等腰四面体内切球半径

$$r = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(E-a^2)(E-b^2)(E-c^2)}{q(q-a)(q-b)(q-c)}} \quad ㉑$$

3) 等腰四面体的四个旁切球半径皆相等, 都等于

$$r_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(E-a^2)(E-b^2)(E-c^2)}{q(q-a)(q-b)(q-c)}} \quad ㉒$$

由定理 2 与定理 3, 即式④与⑥可得如下

推论 2　设四面体的内切球半径为 r, 各侧面 S_1, S_2, S_3, S_4 的旁切球半径分别为 r_1, r_2, r_3, r_4, 则

$$r_i = \frac{Tr}{T-S_i} \ (i=1, 2, 3, 4) \quad ㉓$$

其中, T 如⑦所示.

由推论 1 的 2)与 3)还可得如下

推论 3　等腰四面体的旁切球半径是内切球半径的 2 倍.

推论 4　设正四面体的外接球, 旁切球, 内切球的半径分别为 R, r_0, r, 则

$$R : r_0 : r = 3 : 2 : 1 \quad ㉔$$

证明　设正四面体的棱长为 a, 则由推论 1 即式⑳, ㉒, ㉑, 有

$$R = \frac{\sqrt{6}}{4}a, \ r_0 = \frac{\sqrt{6}}{6}a, \ r = \frac{\sqrt{6}}{12}a \quad ㉕$$

由此即得㉔.

参考文献:

[1]　孔令恩. 三角形到四面体的一个等价变换[J]. 数学通讯, 1995(1).

[2]　陈金辉. 四面体的求积公式[J]. 数学通报, 1985(3).

(收稿日期: 2013—05—23)