ESCUELA
COLOMBIANA
DE INGENIERÍA
JULIO GARAVITO

VIGILADA MINEDUCACIÓN

Departamento de Matemáticas
Cálculo Vectorial

Examen Final
Mayo de 2021

PRIMERA PARTE. Selección múltiple con única respuesta (Valor:50/100)

I. Para evaluar la integral $\iint_R f(x,y)\ dA_R$ se transforma la región R (en el plano π_{xy}), en la región T (en el plano π_{uv}), con las sustituciones $x = u^2+v^2$ e $y = u^2-v^2$. Una expresión que permite calcular $\iint_R f(x,y)\ dA_R$ por medio de dicha transformación es:

a) $-\iint_T f(x(u,v),y(u,v))\,(4-9uv)\,dA_T$
b) $\iint_T f(x(u,v),y(u,v))\,u^2(4-9uv)\,dA_T$
c) $\iint_T f(x(u,v),y(u,v))\,v^2(4+9uv)\,dA_T$
d) $-\iint_T f(x(u,v),y(u,v))\,uv(4+9uv)\,dA_T$

II. Tenga en cuenta el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y) = \left\langle \frac{1}{y}, 1-\frac{x}{y^2} \right\rangle$ y la curva en el plano π_{xy} cuya parametrización está dada por $\mathbf{r}(t) = \left\langle t^2+1, \sin(\pi t) \right\rangle$ si $t \in [0,1]$. Al calcular el trabajo que ejerce el campo $\mathbf{F}$ sobre una partícula que se mueve a lo largo de la curva $\mathbf{r}$, la afirmación verdadera es:

a) Se puede aplicar el **Teorema fundamental para integrales de línea** y el valor de dicho trabajo es positivo.
b) No se puede aplicar el **Teorema fundamental para integrales de línea** y el valor de dicho trabajo es positivo.
c) No se puede aplicar el **Teorema fundamental para integrales de línea** y el valor de dicho trabajo es negativo.
d) Se puede aplicar el **Teorema fundamental para integrales de línea** y el valor de dicho trabajo es negativo.

III. Se dan el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y) = \langle x-y, x+y \rangle$ y la curva C en el plano π_{xy} cuya ecuación corresponde a $r-\theta = 0$, con $0 \le \theta \le 2\pi$, seguida por el segmento de recta que une el punto $P = (2\pi, 0)$ con el punto $O = (0,0)$, recorrida positivamente. Al calcular $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ la afirmación verdadera es:

a) No se puede aplicar el **Teorema de Green** y el valor de la integral propuesta es positivo.
b) No se puede aplicar el **Teorema de Green** y el valor de la integral propuesta es negativo.
c) Se puede aplicar el **Teorema de Green** y el valor de la integral propuesta es positivo.
d) Se puede aplicar el **Teorema de Green** y el valor de la integral propuesta es negativo.

IV. El plano tangente a la superficie con ecuación $x^2z + 2xy^2 + 3yz^2 - 6 = 0$, en el punto $P = (1, 1, 1)$, contiene también al punto:

a) $Q = (1, 0, 2)$
b) $Q = (-1, 0, -2)$
c) $Q = (-1, 0, 2)$
d) $Q = (1, 0, -2)$

V. Con respecto al resultado de $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2axy}{x^2 + y^2}$ donde $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ se puede afirmar que:

a) Es cero para cualquier valor de a .
b) Es mayor que cero si $a > 0$.
c) Es menor que cero si $a < 0$.
d) No existe para ningún valor de a .

VI. Una partícula se mueve a lo largo de la curva parametrizada como $\mathbf{r}(t) = \left\langle t - \frac{t^3}{3}, t^2, \frac{t^3}{3} + t \right\rangle$, si $t \geq 0$. Un vector tangente unitario en el sentido de la curva dada, si $t = 1$, es:

a) $\mathbf{T} = \left\langle 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$.
b) $\mathbf{T} = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$.
c) $\mathbf{T} = \left\langle 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$.
d) $\mathbf{T} = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$.

VII. Dada la integral $\displaystyle\int_{-2}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} \left(x^2 + y^2\right) dz\, dy\, dx$ indique cuál (o cuáles) de las siguientes expresiones son equivalentes a ella:

i) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \int_{0}^{2\sqrt{2}} \int_{r}^{\sqrt{8-r^2}} r^3\, dz\, dr\, d\theta$ ii) $\displaystyle\int_{0}^{2\sqrt{2}} \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \rho^4 \sin^3(\phi)\, d\phi\, d\theta\, d\rho$:

a) Tanto i) como ii) son equivalentes a la integral dada inicialmente.
b) Solamente i) es equivalente a la integral dada inicialmente.
c) Solamente ii) es equivalente a la integral dada inicialmente.
d) Ni i) ni ii) son equivalentes a la integral dada inicialmente.

VIII. El área de la sección de una superficie, que está parametrizada como $\mathbf{r}(u, v) = \langle au\cos(v), au\sin(v), u \rangle$ donde $0 \leq u \leq b$ y $0 \leq v \leq 2\pi$, es:

a) $\pi a^2 b\sqrt{b^2 + 1}$
b) $\pi ab^2\sqrt{a^2 + 1}$
c) $\pi a^2 b\sqrt{a^2 + 1}$
d) $\pi ab^2\sqrt{b^2 + 1}$

IX. Dada la superficie $f(x,y) = 3x^2 + 4y^3 - 12xy + 2$, la afirmación verdadera es

a) Tiene un máximo en el punto $(0,0)$ y un punto de silla en $(2,4)$.
b) Tiene un mínimo en el punto $(0,0)$ y un máximo en $(2,4)$.
c) Tiene un mínimo en el punto $(2,4)$ y un punto de silla en $(0,0)$.
d) Tiene un máximo en el punto $(2,4)$ y un mínimo en $(0,0)$.

X. El valor de a para el cual la dirección de máximo incremento de la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 4z$ en el punto $(2,-1,1)$ es $< 4, a, -4 >$ es

a) -4
b) -2
c) 4
d) 2

SEGUNDA PARTE. Preguntas abiertas (Valor:50/100)

I. [SP-25]
Suponga que C es la curva que es frontera de las superficies $S_1 : x^2 - y + 1 = 0$, $S_2 : y + z - 5 = 0$ y $S_3 : z = 0$ en el primer octante. El vector normal a la superficie encerrada por dicha curva es positivo hacia afuera de S_1 . Si $\mathbf{F} = \langle yz, x, z^2 \rangle$ y la curva C se recorre positivamente, si se observa desde el punto $P = (2,0,1)$, obtenga el trabajo que ejerce el campo $\mathbf{F}$ sobre una partícula que recorre la curva C una vez,en el sentido indicado.

II. [SP-25]
Una superficie laminar es la sección del semicono circular superior con eje de simetría $\vec{z}$ y vértice en el origen, que contiene a la circunferencia de centro en $C = (0,0,a)$ de radio a paralela al plano π_{xy} , entre las superficies S_1 : Plano π_{xy} y $S_2 : 4 - z = 0$. La densidad superficial en cualquier punto de ella está dada por $\delta(x,y,z) = 10 - z$ gramos por centímetro cuadrado. Determine la masa total de la superficie.