

Capacitancia y dieléctricos

Ejercicios

Capacitores y capacitancia

1. Un capacitor de placas paralelas con aire tiene una capacitancia de 500 pF y una carga de $0,346 \mu\text{C}$ de magnitud en cada placa. Éstas están separadas una distancia de 0,453 mm. a) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas? b) ¿Cuál es el área de cada placa? c) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico entre las placas? d) ¿Cuál es la densidad de carga superficial de cada placa?

Rta.: a) 692 V; b) $0,0256 \text{ m}^2$; c) $1,53 \cdot 10^6 \text{ V/m}$; d) $1,35 \cdot 10^{-5} \text{ C/m}^2$.

2. Las placas de un capacitor de placas paralelas están separadas 4,79 mm y cada una tiene una carga de $5,16 \cdot 10^{-8} \text{ C}$. Las placas están en el vacío. El campo eléctrico entre las placas tiene una magnitud de $4,77 \cdot 10^6 \text{ V/m}$. a) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas? b) ¿Cuál es el área de cada placa? c) ¿Cuál es la capacitancia?

Rta.: a) 22848 V; b) $0,00122 \text{ m}^2$; c) 2,25 pF.

3. Un capacitor tiene una capacitancia de $6,17 \mu\text{F}$. ¿Cuánta carga debe eliminarse para bajar la diferencia de potencial entre las placas en 50 V?

Rta.: $3,09 \cdot 10^{-4} \text{ C}$.

4. Un capacitor esférico está formado por dos cascarones conductores esféricos concéntricos separados por el vacío. La esfera interior tiene un radio de 20 cm y la capacitancia es de 150 pF. a) ¿Cuál es la distancia entre las superficies de las dos esferas? b) Si la diferencia de potencial entre las dos esferas es de 220 V, ¿cuál es la magnitud de la carga en cada esfera?

Rta.: a) 34,8 mm; b) $3,3 \cdot 10^{-8} \text{ C}$.

5. Un capacitor esférico está formado por dos cascarones conductores esféricos concéntricos separados por el vacío. La esfera interior tiene un radio de 12 cm y la exterior, de 15 cm. Se aplica una diferencia de potencial de 140 V al capacitor. a) ¿Cuál es la capacitancia del capacitor? b) ¿Cuál es la magnitud de \mathbf{E} en $r = 12,1 \text{ cm}$, justo fuera de la esfera interior? c) ¿Cuál es la magnitud de \mathbf{E} en $r = 14,9 \text{ cm}$, justo dentro de la esfera exterior? d) En un capacitor de placas paralelas \mathbf{E} es uniforme en la región entre las placas, excepto en los bordes. ¿Esto también es cierto para un capacitor esférico?

Rta.: a) 66,7 pF; b) 5740 V/m ; c) 3786 V/m ;

6. Un cable coaxial utilizado para conectar un aparato de TV a una videocasetera es un capacitor cilíndrico de capacitancia por unidad de longitud de 69 pF/m. a) Encuentre el cociente de los radios de los conductores interior y exterior. b) Si la diferencia de potencial entre los conductores interior y exterior es de 2 V, ¿cuál es la magnitud de la carga por unidad de longitud en los conductores?

Rta.: a) 2,24; b) $1,38 \cdot 10^{-10} \text{ C}$.

7. Un capacitor cilíndrico tiene un conductor interior de 2,5 mm de radio y un conductor exterior de 4 mm de radio. El capacitor completo viene 3,5 m de largo. a) El potencial del conductor externo es 350 mV mayor que el del conductor interior. a) Encuentre las cargas (magnitud y signo) sobre los dos conductores. b) ¿Cuál es la capacitancia por unidad de longitud?

Rta.: a) $1,45 \cdot 10^{-10} \text{ C}$; b) $1,18 \cdot 10^{-10} \text{ F/m}$.

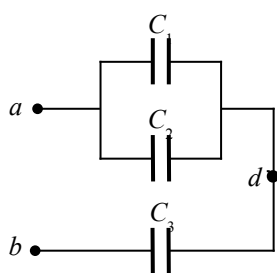
Capacitores en serie y en paralelo

8. Dos capacitores $C_1 = 4 \mu\text{F}$ y $C_2 = 6 \mu\text{F}$ están conectados en serie a una diferencia de potencial $V = +67,5 \text{ V}$. Calcule a) la carga en cada capacitor; b) la diferencia de potencial a través de cada capacitor.

Rta.: a) $1,62 \cdot 10^{-4} \text{ C}$; b) $V_1 = 40,5 \text{ V}$; $V_2 = 27 \text{ V}$.

9. Dos capacitores $C_1 = 4 \mu\text{F}$ y $C_2 = 6 \mu\text{F}$ están conectados en paralelo a una diferencia de potencial $V = +67,5 \text{ V}$. Calcule a) la carga en cada capacitor; b) la diferencia de potencial a través de cada capacitor.

Rta.: a) $Q_1 = 2,7 \cdot 10^{-4} \text{ C}$; $Q_2 = 4,05 \cdot 10^{-4} \text{ C}$; b) $67,5 \text{ V}$.

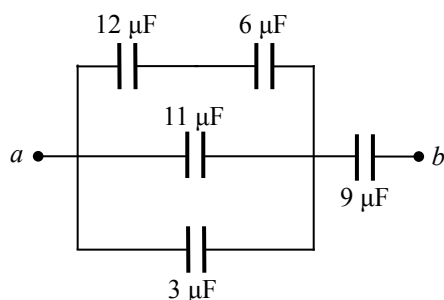
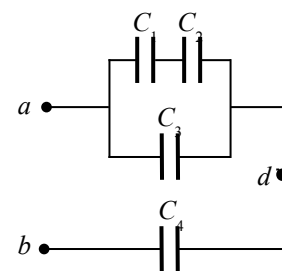


10. En la figura, $C_1 = 2 \mu\text{F}$, $C_2 = 4 \mu\text{F}$ y $C_3 = 9 \mu\text{F}$. El potencial aplicado es $V_{ab} = +61,5 \text{ V}$. Calcule a) la carga en cada capacitor; b) la diferencia de potencial a través de cada capacitor; c) la diferencia de potencial entre los puntos a y d .

Rta.: a) $Q_1 = 7,38 \cdot 10^{-5} \text{ C}$; $Q_2 = 1,476 \cdot 10^{-4} \text{ C}$; $Q_3 = 2,214 \cdot 10^{-4} \text{ C}$; b) $V_1 = V_2 = 36,9 \text{ V}$; $V_2 = 24,6 \text{ V}$; c) $V_{ad} = V_1$.

11. En la figura, cada capacitor tiene $C = 2 \mu\text{F}$ y $V_{ab} = +40,4 \text{ V}$. Calcule a) la carga en cada capacitor; b) la diferencia de potencial a través de cada capacitor; c) la diferencia de potencial entre los puntos a y d .

Rta.: a) $Q_1 = Q_2 = 1,616 \cdot 10^{-5} \text{ C}$; $Q_3 = 3,232 \cdot 10^{-5} \text{ C}$; $Q_4 = 4,848 \cdot 10^{-5} \text{ C}$; b) $V_1 = V_2 = 8,08 \text{ V}$; $V_3 = 16,16 \text{ V}$; $V_4 = 24,24 \text{ V}$; c) $V_{ad} = V_3$.



12. Para la situación descrita en la figura, suponga que $V_{ab} = +25 \text{ V}$. Calcule a) la carga en cada capacitor; b) la diferencia de potencial a través de cada capacitor. c) La carga en la red completa es igual a $Q = C_{eq} V_{ab}$, donde $C_{eq} = 6 \mu\text{F}$. Explique por qué Q es igual a la carga en el capacitor de $9 \mu\text{F}$. Explique por qué Q también es igual a la suma de las cargas en los capacitores de $3 \mu\text{F}$, $11 \mu\text{F}$ y cualquiera de los capacitores de $12 \mu\text{F}$ o de $6 \mu\text{F}$.

Rta.: a) $Q_{12} = Q_6 = 3,332 \cdot 10^{-5} \text{ C}$; $Q_3 = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ C}$;

$Q_{11} = 9,163 \cdot 10^{-5} \text{ C}$; $Q_9 = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ C}$; b) $V_{12} = 2,78 \text{ V}$; $V_6 = 5,55 \text{ V}$; $V_3 = V_{11} = 8,33 \text{ V}$; $V_9 = 16,67 \text{ V}$.

13. Suponga que el capacitor de $3 \mu\text{F}$ de la figura anterior se sustituye por uno distinto y que éste cambia la capacitancia equivalente entre los puntos a y b a $8 \mu\text{F}$. ¿Cuál es la capacitancia del nuevo capacitor?

Rta.: $57 \mu\text{F}$.

14. Dos capacitores de placas paralelas con vacío tienen una separación entre placas d_1 y d_2 y la misma área A para las placas. Muestre que cuando los capacitores están conectados en serie, la capacitancia equivalente es igual que para un solo capacitor con placas de área A y separación $d_1 + d_2$.

15. Dos capacitores de placas paralelas con vacío tienen placas de área A_1 y A_2 e igual separación entre placas, d . Muestre que cuando los capacitores están conectados en paralelo, la capacitancia equivalente es igual que para un solo capacitor cuyas placas tienen área $A_1 + A_2$ y una separación d entre ellas.

Almacenamiento de energía en capacitores y energía del campo eléctrico

16. Un capacitor de aire está hecho con dos placas paralelas separadas una distancia de 1,20 mm. La magnitud de la carga en cada placa es de $0,024 \mu\text{C}$ cuando la diferencia de potencial es de 200 V a) ¿Cuál es la capacitancia? b) ¿Cuál es el área de cada placa? c) ¿Cuál es el máximo voltaje que se puede aplicar sin que haya ruptura dieléctrica? (La ruptura dieléctrica del aire se presenta cuando $E = 3 \cdot 10^6 \text{ V/m}$.) d) Cuando la carga es de $0,024 \mu\text{C}$, ¿cuál es energía total almacenada?

Rta.: a) 120 pF; b) $0,0163 \text{ m}^2$; c) 3600 V; d) $2,4 \cdot 10^{-6} \text{ J}$.

17. Un capacitor de $300 \mu\text{F}$ está cargado a 276 V. Después se conecta un cable entre las placas. ¿Cuántos joules de energía térmica se producen a medida que el capacitor se descarga, si toda la energía almacenada se utiliza para calentar el cable?

Rta.: 11,4 J.

18. Un capacitor de aire que consiste en dos placas paralelas muy juntas tiene una capacitancia de 1000 pF. La carga en cada placa es de $4,36 \mu\text{C}$. a) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas? b) Si la carga se mantiene constante, ¿cuál será la diferencia de potencial entre las placas si la separación se duplica? c) ¿Cuánto trabajo se requiere para duplicar la separación?

Rta.: a) 4360 V; b) 8720 V; c) $9,5 \cdot 10^{-3} \text{ J}$.

19. Un capacitor de placas paralelas tiene una separación de placas de 4 mm y está cargado a una diferencia de potencial de 500 V. Calcule la densidad de energía en la región comprendida entre las placas en unidades de J/m^3 .

Rta.: $0,069 \text{ J/m}^3$.

20. a) Encuentre la densidad de energía del campo eléctrico en un punto situado a 25 cm de una carga puntual aislada $q = 4 \text{ nC}$. b) Si la carga puntual del apartado (a) fuera $q = -4 \text{ nC}$, ¿qué efecto tendría en la densidad de energía del campo eléctrico? Explique.

Rta.: $1,47 \cdot 10^{-6} \text{ J/m}^3$.

21. Un capacitor cilíndrico de aire de 25 m de longitud almacena $5,4 \cdot 10^{-9} \text{ J}$ de energía cuando la diferencia de potencial entre los dos conductores es de 3 V. a) Calcule la magnitud de la carga en cada conductor. b) Calcule el cociente de los radios de los conductores exterior e interior.

Rta.: a) $3,6 \cdot 10^{-9} \text{ C}$; b) 3,18.

22. Un capacitor esférico está formado con dos cascarones conductores esféricos concéntricos separados por el vacío. La esfera interior tiene un radio de 12 cm y la separación entre las esferas es de 2 cm. La magnitud de la carga en cada esfera es de $5,30 \text{ nC}$. a) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las dos esferas? b) ¿Cuál es la energía del campo eléctrico almacenada?

Rta.: a) 56,8 V; b) $1,5 \cdot 10^{-7} \text{ J}$.

23. Considere el capacitor esférico del ejercicio 5. a) ¿Cuál es la densidad de energía u en $r = 12,1$ cm, justo fuera de la esfera interior? b) ¿Cuál es u en $r = 14,9$ cm, justo dentro de la esfera exterior? c) Para un capacitor de placas paralelas, la densidad de energía es uniforme en la región comprendida entre las placas, excepto cerca del borde de las placas. ¿Esto también es cierto para un capacitor esférico?

Rta.: a) $1,45 \cdot 10^{-4} \text{ J/m}^3$; b) $6,34 \cdot 10^{-5} \text{ J/m}^3$.

24. Un capacitor de placas paralelas tiene una energía almacenada de 6,45 J. La separación entre las placas es de 1,40 mm. Si la separación se disminuye a 0,70 mm, diga cuál es la energía almacenada si a) el capacitor se desconecta de la fuente de potencial, de modo que las cargas sobre las placas permanecen constantes; b) el capacitor permanece conectado a la fuente de potencial, de modo que la diferencia de potencial entre las placas permanece constante.

Rta.: a) la mitad; b) el doble.

25. Fuerza sobre una placa de capacitor. Un capacitor de placas paralelas con área de placa A y separación x tiene cargas $+q$ y $-q$ sobre sus placas. El capacitor se desconecta de la fuente de carga, de modo que la carga sobre las placas permanece constante. a) ¿Cuál es la energía total almacenada en el capacitor? b) Las placas se separan una distancia adicional dx . ¿Cuál es ahora la energía total? c) Si F es la fuerza con la que las placas se atraen entre sí, entonces la diferencia de las energías de los apartados (a) y (b) debe ser igual al trabajo $dW = Fdx$ realizado al separar las placas. Muestre que $F = q^2/2\epsilon_0 A$. d) Explique por qué F no es igual a qE , siendo E el campo eléctrico entre las placas.

Rta.: a) $\frac{q^2 x}{2\epsilon_0 A}$; b) $\frac{q^2 (x + dx)}{2\epsilon_0 A}$.

26. Un capacitor $C_1 = 20 \mu\text{F}$ está cargado a una diferencia de potencial $V_0 = 900 \text{ V}$. Los terminales del capacitor cargado se conectan a los de un capacitor descargado $C_2 = 10 \mu\text{F}$. Calcule a) la carga original del sistema; b) la diferencia de potencial final a través de cada capacitor; c) la energía final del sistema; d) la disminución de energía cuando se conectan los capacitores. ¿A dónde ha ido la energía "perdida"?

Rta: a) 0,018C; b) 600 V; c) 5,4 J; d) 2,7 J.

Dieléctricos

27. El dieléctrico que se va a utilizar en un capacitor de placas paralelas es una variedad de goma que tiene una constante dieléctrica de 3,40 y un campo de ruptura de $2 \cdot 10^7 \text{ V/m}$. El capacitor debe tener una capacitancia de 1,37 nF y debe soportar una diferencia de potencial máxima de 6000 V. ¿Cuál es el área mínima que deben tener las placas?

Rta.: $0,0137 \text{ m}^2$.

28. Deduzca que la densidad de energía eléctrica para un capacitor de placas paralelas con un material dieléctrico entre las placas es $u = \frac{1}{2} K\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \epsilon E^2$

29. Dos placas paralelas tienen cargas de igual magnitud y signo opuesto. Cuando se hace el vacío en el espacio comprendido entre las placas, el campo eléctrico es $E = 3,60 \cdot 10^5 \text{ V/m}$. Si el espacio

entre las placas se llena con un dieléctrico, $E = 1,8 \cdot 10^5 \text{ V/m}$. a) ¿Cuál es la densidad de carga en cada superficie del dieléctrico? b) ¿Cuál es la constante dieléctrica?

Rta.: a) $1,59 \cdot 10^{-3} \text{ C/m}^2$; b) 2.

30. Dos placas conductoras idénticas cargadas con carga de signo opuesto están separadas por un dieléctrico de 1,60 mm de espesor; el dieléctrico tiene una constante dieléctrica de 4,50. El campo eléctrico resultante en el dieléctrico es de $1,40 \cdot 10^6 \text{ V/m}$. Calcule a) la carga por unidad de área sobre cada placa conductora; b) la carga por unidad de área sobre las superficies del dieléctrico.

a) $E_0 = KE = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ b) $\sigma_i = \sigma \left(1 - \frac{1}{K}\right)$ Rta.: a) $5,58 \cdot 10^{-5} \text{ C/m}^2$; b) $4,34 \cdot 10^{-5} \text{ C/m}^2$; c)

31. Cuando un capacitor de aire de 255 nF se conecta a una batería, la energía que almacena es de $1,99 \cdot 10^{-5} \text{ J}$. Mientras el capacitor se mantiene conectado a la batería, se introduce un trozo de dieléctrico que llena completamente el espacio entre las placas. Esto aumenta la energía almacenada en $2,69 \cdot 10^{-5} \text{ J}$. a) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas? b) ¿Cuál la constante dieléctrica del bloque dieléctrico?

Rta.: a) 12,5 V; b) 2,35.

32. Dos placas paralelas, cada una de 40 cm^2 de área, están cargadas con cargas de signo opuesto y magnitud $1,80 \cdot 10^{-7} \text{ C}$. El espacio entre las placas está ocupado por un dieléctrico y el campo eléctrico dentro de éste es de $3,40 \cdot 10^5 \text{ V/m}$. a) ¿Cuál es la constante dieléctrica? b) ¿Cuál es la carga total inducida en cualquiera de las caras del dieléctrico?

Rta.: a) 15; b) $1,68 \cdot 10^{-7} \text{ C}$.

33. Un capacitor tiene placas paralelas de 12 cm^2 de área separadas una distancia de 2 mm. El espacio entre las placas está lleno con polipropileno (Constante dieléctrica $K = 2,2$, campo de ruptura $7 \cdot 10^7 \text{ V/m}$). a) Encuentre la permitividad del polipropileno. b) Encuentre el máximo voltaje permisible a través del capacitor para evitar la ruptura dieléctrica. c) Cuando el voltaje es igual al valor encontrado en el apartado (b), encuentre la densidad de carga superficial en cada placa y la densidad de carga superficial inducida en la superficie del dieléctrico.

Rta.: a) $1,947 \cdot 10^{-11} \text{ F/m}$; b) 140000 V; c) $1,36 \cdot 10^{-3} \text{ C/m}^2$ y $7,43 \cdot 10^{-4} \text{ C/m}^2$.

34. Se establece una diferencia de potencial constante de 24 V a través de los terminales de un capacitor de aire de placas paralelas de $0,25 \mu\text{F}$. a) Se inserta entre las placas una hoja de Mylar (Constante dieléctrica $K = 3,1$) que llena el espacio. Al hacerlo, ¿cuánta carga adicional fluye hacia la placa positiva del capacitor? b) ¿Cuál es la carga total inducida en cualquier cara de la hoja de Mylar? c) ¿Qué efecto tiene la hoja de Mylar sobre el campo eléctrico entre las placas? Explique cómo puede conciliar esto con el aumento de carga sobre las placas que hace que *aumente* el campo eléctrico.

Rta.: a) $1,26 \cdot 10^{-5} \text{ C}$; b) $1,26 \cdot 10^{-5} \text{ C}$.

Ley de gauss en dieléctricos

35. El volumen entre las placas de un capacitor de placas paralelas está lleno con un plástico de constante dieléctrica K . La magnitud de la carga sobre cada placa es Q . Cada placa tiene área A y la distancia entre las placas es d . a) Use la ley de Gauss para calcular la magnitud del campo eléctrico en el dieléctrico. b) Use el resultado obtenido en el apartado (a) para calcular la diferencia de

potencial entre las las placas. c) Utilice el resultado obtenido en el apartado (b) para determinar la capacitancia del capacitor. Compare el resultado con la $K = C/C_0$.

Rta: a) $\frac{Q}{AK\epsilon_0}$; b) $\frac{Qd}{AK\epsilon_0}$

36. Una carga puntual q se encuentra dentro de un material sólido de constante dieléctrica K . a) Use la ley de Gauss para hallar la magnitud del campo eléctrico debido a la carga puntual, a una distancia d de ésta. b) Use el resultado obtenido en el apartado (a) y la ley de Gauss en su forma original ($\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q_{dentro}}{\epsilon_0}$), para determinar la carga *total* (libre y ligada) dentro de una esfera de radio d centrada en la carga puntual q . c) Encuentre la carga ligada total dentro de la esfera descrita en el apartado (b).

Rta.: a) $\frac{1}{4\pi\epsilon_0 K} \frac{q}{d^2}$; b) q/d ; c) $q\left(1 - \frac{1}{K}\right)$

Problemas

37. Los flashes electrónicos integrados en las cámaras contienen un capacitor para almacenar la energía utilizada para producir el destello. En uno de estos dispositivos, el destello dura $t = 1/100$ s con una potencia media de salida de luz de $P = 600$ W. a) Si la conversión de energía eléctrica en luz tiene una eficiencia del 95% (el resto se convierte en energía térmica), ¿cuánta energía debe almacenarse en el capacitor para producir un destello? b) Si la capacitancia del capacitor del dispositivo es de 0,754 mF, ¿cuál es la diferencia de potencial entre sus placas cuando el capacitor ha almacenado la cantidad de energía calculada en el apartado (a)?

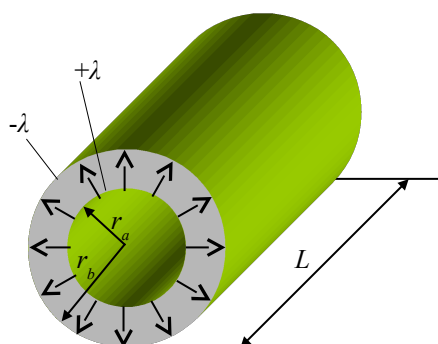
Rta.: a) 6,32 J; b) 129 V.d

38. Teclado de computadora. En cierto tipo de teclado de computadora, cada tecla está conectada a una pequeña placa de metal que sirve como una de las placas de un capacitor de aire de placas paralelas. Cuando se presiona una tecla, la separación entre las placas disminuye y aumenta la capacitancia. Se utiliza un circuito electrónico para detectar el cambio de capacitancia y determinar qué tecla se presionó. En un teclado determinado el área de cada placa metálica es $A = 49$ mm² y la separación entre las placas es $d_1 = 0,6$ mm antes de que se presione la tecla. Si el circuito puede detectar un cambio de capacitancia $\Delta C = 0,3$ pF, ¿cuánto debe presionarse la tecla antes de que el circuito detecte la presión?

Rta.: 0,176 mm

39. Un conductor cilíndrico largo tiene radio r_a y una densidad lineal de carga $+\lambda$. Está rodeado por un cascarón coaxial cilíndrico conductor de radio interno r_b y densidad de carga lineal $-\lambda$. Suponga que existe vacío en el espacio entre los cilindros. a) Demuestre que la capacitancia por unidad de longitud es:

$$\frac{C}{L} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(r_b/r_a)}$$



b) Sea $d = r_b - r_a$ el espacio entre los conductores interior y exterior. Sean los radios de los conductores ligeramente diferentes, de modo que $d \ll r_a$. Muestre que el resultado

obtenido en el apartado (a) se reduce así a la ecuación $C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$, la ecuación de la capacitancia de un capacitor de placas paralelas, donde A es el área de cada cilindro. Use el hecho de que $\ln(1 + x) = x$ para $|x| \ll 1$. c) Aunque la Tierra es básicamente esférica, su superficie nos parece plana porque su radio es muy grande. Utilice esta idea para explicar por qué el resultado del apartado (b) tiene sentido desde un punto de vista puramente geométrico.

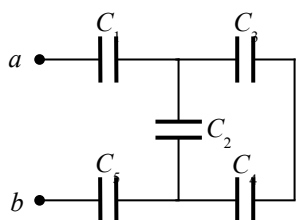
40. Un capacitor de aire de placas paralelas está hecho con dos placas de $0,18 \text{ m}^2$ separadas una distancia de $0,58 \text{ cm}$. Está conectado a una batería de 50 V a) ¿Cuál es la capacitancia? b) ¿Cuál es la carga sobre cada placa? c) ¿Cuál es el campo eléctrico entre las placas? d) ¿Cuál es la energía almacenada en el capacitor? e) Si la batería se desconecta y luego se separan las placas hasta una distancia de $1,16 \text{ cm}$, ¿cuáles son las respuestas de los apartados (a) a (d)?

Rta.: a) 275 pF ; b) $1,37 \cdot 10^{-8} \text{ C}$; c) 8620 V/m ; d) $3,42 \cdot 10^{-7} \text{ J}$; e) 137 pF ; $1,37 \cdot 10^{-8} \text{ C}$; 8620 V/m ; $6,85 \cdot 10^{-7} \text{ J}$.

41. Suponga que la batería del problema anterior permanece conectada mientras las placas se separan. ¿Cuáles serían las respuestas de los apartados (a) a (d) después de separar las placas?

Rta.: a) 137 pF ; b) $6,85 \cdot 10^{-9} \text{ C}$; c) 4310 V/m ; d) $1,71 \cdot 10^{-7} \text{ J}$.

42. Se dispone de varios capacitores de $0,50 \mu\text{F}$. El voltaje a través de cada uno no debe exceder de 250 V . Ud. debe hacer un capacitor cuya capacitancia sea de $0,50 \mu\text{F}$ que se conecte a través de una diferencia de potencial de 400 V . a) Muestre en un diagrama cómo se puede obtener un capacitor con las propiedades deseadas. b) Ningún dieléctrico es un aislante perfecto. Suponga que el dieléctrico en uno de los capacitores de su diagrama es un conductor moderadamente bueno. ¿Qué sucederá en este caso si su combinación de capacitores está conectada a través de una diferencia de potencial de 400 V ?

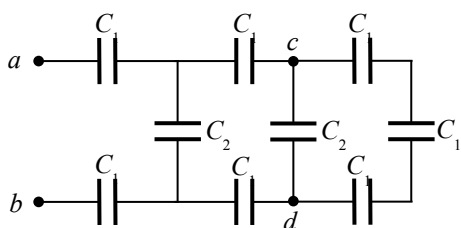


43. En la figura, $C_1 = C_5 = 4,6 \mu\text{F}$, y $C_2 = C_3 = C_4 = 2,30 \mu\text{F}$. El potencial aplicado es $V_{ab} = 540 \text{ V}$. a) ¿Cuál es la capacitancia equivalente de la red entre los puntos a y b ? b) Calcule la carga en cada capacitor y la diferencia de potencial a través de cada uno.

Rta.: a) $1,38 \mu\text{F}$; b) $Q_1 = Q_5 = 7,45 \cdot 10^{-4} \text{ C}$, $Q_2 = 4,968 \cdot 10^{-4} \text{ C}$, $Q_3 = Q_4 = 2,484 \cdot 10^{-4} \text{ C}$; $V_1 = V_5 = 162 \text{ V}$, $V_2 = 216 \text{ V}$, $V_3 = V_4 = 108 \text{ V}$.

44. Dos capacitores, uno $C_1 = 2 \mu\text{F}$ y otro $C_2 = 3 \mu\text{F}$, están conectados en serie a través de una línea de suministro de $V_0 = 600 \text{ V}$. a) Encuentre la carga en cada capacitor y la diferencia de potencial a través de cada uno. b) Los capacitores cargados se desconectan de la línea y entre sí, y luego se vuelven a conectar con los terminales de signo igual juntos. Encuentre la carga final en cada capacitor y la diferencia de potencial a través de cada uno.

Rta.: a) $7,2 \cdot 10^{-4} \text{ C}$ y 360 V ; $7,2 \cdot 10^{-4} \text{ C}$ y 240 V ; b) $5,76 \cdot 10^{-4} \text{ C}$ y $8,64 \cdot 10^{-4} \text{ C}$; 288 V .



45. En la figura, cada capacitancia C_1 es de $9,3 \mu\text{F}$ y cada capacitancia C_2 es de $6,2 \mu\text{F}$. a) Calcule la capacitancia equivalente de la red entre los puntos a y b . b) Calcule la carga en cada uno de los tres capacitores más cercanos a a y b cuando $V_{ab} = 840 \text{ V}$. c) Con 840 V a través de a y b , calcule V_{cd} .

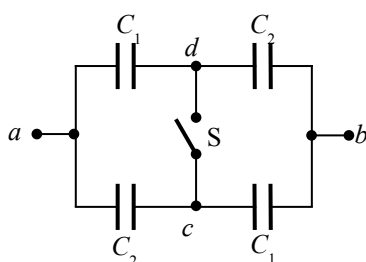
Rta.: a) $3,1 \mu\text{F}$; b) $2,604 \text{ mC}$ (en C_1) y $1,736 \text{ mC}$; c) $93,3 \text{ V}$.

46. Dos capacitores, $C_1 = 6 \mu\text{F}$ y $C_2 = 3 \mu\text{F}$, se conectan en paralelo a una diferencia de potencial $V_{ab} = 24 \text{ V}$. Suponga que los capacitores cargados se desconectan de la fuente y entre sí, y después se vuelven a conectar con las placas de signo *opuesto* juntas. ¿En qué cantidad disminuye la energía del sistema?

Rta.: $2,304 \cdot 10^{-3} \text{ J}$

47. Dos capacitores, uno $C_1 = 1 \mu\text{F}$ y otro $C_2 = 2 \mu\text{F}$, están conectados en paralelo a través de una línea de suministro de $V_0 = 1200 \text{ V}$. a) Encuentre la carga en cada capacitor y el voltaje a través de cada uno. b) Los capacitores cargados se desconectan de la línea y entre sí, y después se vuelven a conectar con las placas de signo distinto juntas. Encuentre la carga final en cada capacitor y el voltaje a través de cada uno.

Rta.: a) $1,2 \cdot 10^{-3} \text{ C}$ y $2,4 \cdot 10^{-3} \text{ C}$; 1200 V ; b) $4 \cdot 10^{-4} \text{ C}$ y $8 \cdot 10^{-4} \text{ C}$; 400 V .



48. Los capacitores de la figura ($C_1 = 3 \mu\text{F}$ y $C_2 = 6 \mu\text{F}$) están descargados inicialmente y se les conecta como se muestra en el diagrama con el interruptor S, abierto. La diferencia de potencia aplicada es $V_{ab} = +360 \text{ V}$. a) ¿Cuál es la diferencia de potencial V_{cd} ? b) ¿Cuál es la diferencia de potencial a través de cada capacitor cuando el interruptor S está cerrado? c) ¿Cuánta carga fluye por el interruptor cuando está cerrado?

Rta.: a) $+120 \text{ V}$; b) 180 V ; c) $5,4 \cdot 10^{-4} \text{ C}$.

49. Tres capacitores de capacitancia $7,2 \mu\text{F}$, $7,2 \mu\text{F}$ y $3,6 \mu\text{F}$ están conectados en serie a través de una diferencia de potencial de 24 V . a) ¿Cuál es la carga en el capacitor de $3,6 \mu\text{F}$? b) ¿Cuál es la energía almacenada en los tres capacitores? c) Los capacitores se desconectan de la fuente de voltaje sin permitir que se descarguen. Luego se les vuelve a conectar en paralelo, con las placas cargadas positivamente conectadas juntas. ¿Cuál es el voltaje a través de cada capacitor en la combinación en paralelo? d) ¿Cuál es la energía total almacenada ahora en los capacitores?

Rta.: a) $4,32 \cdot 10^{-5} \text{ C}$; b) $5,184 \cdot 10^{-4} \text{ J}$; c) $7,2 \text{ V}$; d) $4,67 \cdot 10^{-4} \text{ J}$.

50. Considere el capacitor cilíndrico largo descrito en el ejercicio 39. a) ¿Cuál es la densidad de energía en la región entre los conductores a una distancia r del eje? b) Integre la densidad de energía obtenida en el apartado (a) sobre el volumen que hay entre los conductores en una longitud L del capacitor, para obtener la energía total del campo eléctrico por unidad de longitud. c) Use la ecuación de la energía potencial almacenada en un capacitor $U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}$ y la capacitancia por unidad de longitud calculada en el ejercicio 39 para calcular U/L . ¿Su resultado concuerda con el obtenido en el apartado (b)?

Rta.: a) $\frac{\lambda^2}{8\pi^2\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$; b) $U = \frac{\lambda^2 L}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_b}{r_a}$.

51. Capacitancia de una esfera aislada. a) El concepto de capacitancia se puede aplicar también a un *solo* conductor. Analice por qué este concepto tiene sentido. (*Sugerencia:* En la relación $C = Q/V_{ab}$, considere que en el segundo conductor está colocado en el infinito.) b) Use la ecuación $C = Q/V_{ab}$ para mostrar que para una esfera conductora sólida de radio R , $C = 4\pi\epsilon_0 R$. c) Utilice el resultado obtenido en el apartado (b) para calcular la capacitancia de la Tierra (que es un buen

conductor). Consulte los datos físicos de la Tierra. Compare la Tierra con los capacitores típicos, que pueden caber en la palma de su mano y que tienen capacitancias desde 10 pF hasta 100 μ F.

Rta.: c) $7 \cdot 10^{-4}$ F.

52. Una esfera conductora sólida de radio R lleva una carga Q . Calcule la densidad de energía del campo eléctrico en un punto situado a una distancia r del centro de la esfera para a) $r < R$; b) $r > R$. c) Calcule la energía total del campo eléctrico asociada con la carga de la esfera. (*Sugerencia:* Considere un cascarón esférico de radio r y espesor dr , cuyo volumen es $dV = 4\pi r^2 dr$, y encuentre la energía almacenada en este volumen. Luego integre desde $r = 0$ hasta $r \rightarrow \infty$). d) Explique por qué el resultado del apartado (c) puede interpretarse como la cantidad de trabajo requerida para reunir la carga Q sobre la esfera. e) Usando la ecuación $U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}$ y el resultado del apartado (c), muestre que la capacitancia de la esfera es la dada en el problema anterior.

Rta.: a) 0; b) $\frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4}$; c) $\frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0 R}$.

53. Energía almacenada en una esfera uniformemente cargada. Considere una esfera uniformemente cargada de radio R y carga total Q . Calcule la densidad de energía del campo eléctrico en un punto situado a una distancia r del centro de la esfera para a) $r < R$; b) $r > R$. c) Calcule la energía total del campo eléctrico.

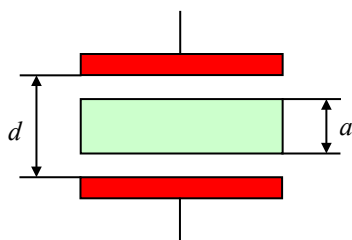
Rta.: a) $\frac{Q^2 r^2}{32\pi^2 \epsilon_0 R^6}$; b) $\frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4}$; c) $\frac{3}{5} \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q^2}{R}$.

54. Las placas paralelas de un capacitor tienen un área de 2000 cm^2 y están separadas una distancia de 1 cm. Suponga que el capacitor permanece conectado a una fuente de alimentación de 3000 V mientras se introduce entre las placas una hoja de plástico aislante con $K = 3$, ocupando todo el espacio entre ellas. Calcule a) la magnitud de la carga Q sobre cada placa después de introducir el dieléctrico; b) la magnitud de la carga inducida Q_i sobre cada superficie del dieléctrico; c) el campo eléctrico E después de haber introducido el dieléctrico; d) la energía total almacenada en el campo eléctrico cuando está presente el dieléctrico; e) la densidad de energía con el dieléctrico presente. f) En el apartado (d) debió obtener que la energía almacenada aumentó cuando se introdujo el dieléctrico, mientras que si el capacitor hubiera estado desconectado de la fuente de alimentación, la energía almacenada hubiera disminuido al introducir un dieléctrico. ¿Por qué hay esta diferencia? En el presente caso, ¿de dónde viene la energía extra?

Rta.: a) $1,593 \cdot 10^{-6}$ C; b) $1,062 \cdot 10^{-6}$ C; c) $3 \cdot 10^5$ V/m; d) $2,39 \cdot 10^{-3}$ J; e) $1,195$ J/m³.

55. Las paredes de algunas células del cuerpo humano tienen una doble capa de carga superficial: una capa de carga negativa en la parte interior y una capa de carga positiva de igual magnitud en el exterior. Suponga que las densidades de carga superficial son $0,50 \cdot 10^{-3} \text{C/m}^2$ y que el espesor de la pared celular es de $d = 5 \cdot 10^{-9}$ m. Suponga que el material de la pared celular tiene una constante dieléctrica $K = 5,4$. a) Encuentre la magnitud del campo eléctrico en la región entre las dos capas de carga. b) Encuentre la diferencia de potencial entre las partes interior y exterior de la célula. ¿Cuál está a mayor potencial? c) Una célula humana típica tiene un volumen $Vol = 10^{-16} \text{m}^3$. Estime la energía total del campo eléctrico almacenada en la pared de una célula de este tamaño. (*Sugerencia:* Suponga que la célula es esférica y calcule el volumen de su pared.)

Rta.: a) $1,05 \cdot 10^7$ V/m; b) 0,052 V; c) $1,37 \cdot 10^{-15}$ J.

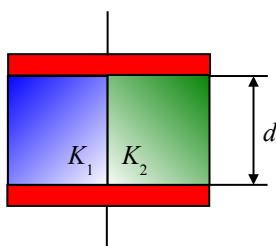


metálico no está presente. c) Analice qué sucede a la capacitancia en los límites $a \rightarrow 0$ y $a \rightarrow d$.

Rta.: a) $\epsilon_0 \frac{A}{d-a}$; b) $C_0 \frac{d}{d-a}$

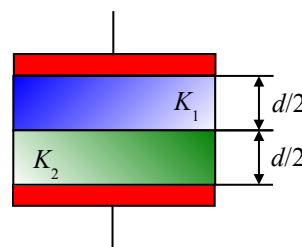
57. El espacio entre las placas de un capacitor de placas paralelas está lleno con dos bloques dieléctricos, uno con constante K_1 , y el otro con constante K_2 , (ver figura). Cada bloque tiene un espesor $d/2$, siendo d la separación entre las placas. Muestre que la capacitancia es

$$C = \frac{2\epsilon_0 A}{d} \left(\frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} \right)$$



58. El espacio entre las placas de un capacitor de placas paralelas está lleno con dos bloques dieléctricos, uno con constante K_1 , y el otro con constante K_2 (ver figura). El espesor de cada bloque es igual que la separación entre placas, d , y cada bloque llena la mitad del volumen entre las placas. Muestre que la capacitancia es

$$C = \frac{\epsilon_0 A (K_1 + K_2)}{2d}$$



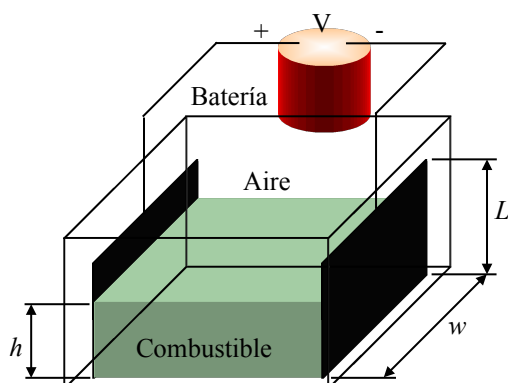
PROBLEMAS DE DESAFÍO

59. Tres placas metálicas cuadradas A, B y C, cada una de 7,5 cm de lado y 3 mm de espesor, están ordenadas como se muestra en la figura. Las placas están separadas por hojas de papel de 0,45 mm de espesor y poseen una constante dieléctrica de 4,2. Las placas exteriores están conectadas entre sí y con el punto b . La placa interior está conectada al punto a . a) Copie el diagrama y muestre con signos más y menos la distribución de carga sobre las placas cuando el punto a se mantiene a

un potencial positivo con respecto al punto b . b) ¿Cuál es la capacitancia entre los puntos a y b ?

Rta.: $9,3 \cdot 10^{-10} \text{ F}$

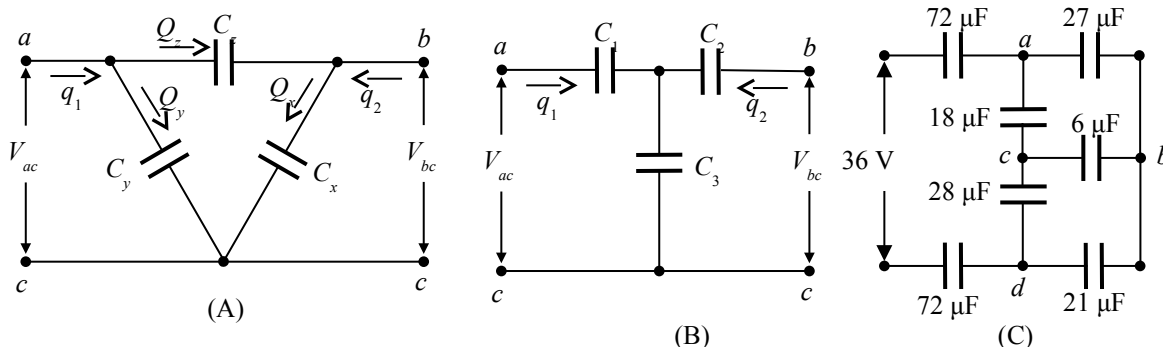
60. Un medidor de combustible utiliza un capacitor para determinar la altura del combustible en el tanque. La constante dieléctrica efectiva K_{ef} cambia desde un valor de 1, cuando el tanque está vacío, hasta el valor de K , la constante dieléctrica del combustible, cuando el tanque está lleno. El circuito electrónico determina la constante dieléctrica efectiva de la combinación de aire y combustible entre las capas del capacitor. Cada una de las dos placas rectangulares



tiene un ancho w y una longitud L (ver figura). La altura del combustible entre las placas es h y la separación entre las placas es b . Desprecie cualquier efecto de borde. a) Deduzca una expresión para K_{ef} en función de h . b) ¿Cuál es la constante dieléctrica efectiva para un tanque lleno a 1/4, 1/2 y 3/4 de su capacidad si el combustible es nafta ($K = 1,95$)? c) Repita el cálculo del apartado (b) para metanol ($K = 33$). d) ¿Para qué combustible es más práctico este medidor?

Rta.: a) $1 - \frac{h}{L} + K \frac{h}{L}$; b) 1,2375; 1,475; 1,7125; c) 9; 17; 25.

61. Los capacitores de una red no siempre se pueden agrupar en combinaciones en serie o en paralelo. Considere los capacitores C_x , C_y y C_z , de la red de la figura A. Esta configuración de capacitores, conocida como *red delta* debido a su forma triangular, no puede ser transformada en un solo capacitor equivalente, pues existen tres terminales, a , b y c , en dicha red. Se puede mostrar



que, por lo que respecta a cualquier efecto sobre el circuito externo, una red delta puede transformarse en lo que se conoce como una red Y. Por ejemplo, la red delta de la figura A puede sustituirse por la red Y de la figura B. (El nombre "red Y" se refiere también a la forma de la red.) a) Muestre que las ecuaciones de transformación que dan C_1 , C_2 y C_3 en términos de C_x , C_y y C_z , son

$$C_1 = (C_x C_y + C_y C_z + C_z C_x)/C_x$$

$$C_2 = (C_x C_y + C_y C_z + C_z C_x)/C_y$$

$$C_3 = (C_x C_y + C_y C_z + C_z C_x)/C_z$$

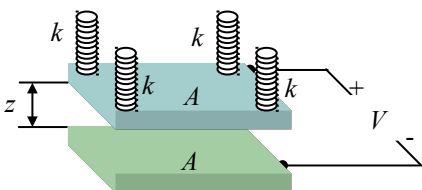
(*Sugerencia:* La diferencia de potencial V_{ac} debe ser igual en ambos circuitos, así como V_{bc} . También, la carga q_1 que fluye desde el punto a a lo largo del alambre, como se indica, debe ser igual en los dos circuitos, así como q_2 . Obtenga una relación de V_{ac} en función de q_1 y q_2 (y las capacitancias) para cada red, y obtenga una relación aparte para V_{bc} para cada red. Los coeficientes de las cargas correspondientes en las ecuaciones correspondientes deben ser iguales para ambas redes.) b) Determine la capacitancia equivalente de la red de capacitores entre los terminales del extremo izquierdo de la red que presentamos en la figura C. (*Sugerencia:* Use la transformación delta Y deducida en el apartado (a). Use los puntos a , b y c para formar la delta y transfórmela en una Y. Los capacitores pueden combinarse entonces fácilmente mediante las relaciones para combinaciones en serie y en paralelo de los capacitores.) c) Determine las cargas de cada capacitor de la figura C y las diferencias de potencial entre cada uno.

Rta.: 72 μ F: 504 μ C, 7 V; 21 μ F: 252 μ C, 12 V;

28 μF : 252 μC , 9 V; 18 μF : 234 μC , 13 V;

27 μF : 270 μC , 10 V; 6 μF : 18 μC , 3 V.

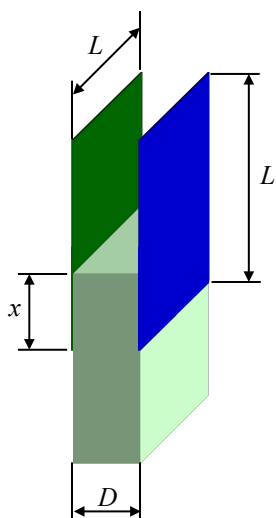
62. Capacitor sobre resortes. Un capacitor de placas paralelas consiste en dos placas conductoras horizontales de igual área A . La placa inferior está fija y la superior está suspendida por cuatro resortes, con constante k , colocados en las cuatro esquinas de la placa (ver figura). Cuando están descargadas, las placas se encuentran separadas una distancia z_0 . Se conecta una batería a las placas y se produce una diferencia de potencial V entre ellas. Esto ocasiona que la separación disminuya a z . Desprecie el efecto de los bordes. a) Muestre que la fuerza electrostática entre las placas cargadas tiene una magnitud $\epsilon_0 AV^2/2z^2$. b) Obtenga una expresión que relacione la separación entre placas z con la diferencia de potencial V . La ecuación resultante debe ser cúbica en z . c) Usando $A = 0,3 \text{ m}^2$, $z_0 = 1,2 \text{ mm}$, $k = 25 \text{ N/m}$ y $V = 120 \text{ V}$, encuentre los dos valores de z para los que la placa superior estará en equilibrio. (*Sugerencia:* Puede resolver la ecuación cúbica insertando un valor de prueba de z y luego ajustando el valor hasta que se satisfaga la ecuación con tres cifras significativas. El localizar de manera gráfica las raíces de la ecuación cúbica puede ayudarle a escoger un valor inicial de z en este procedimiento de prueba y error. Una raíz de esta ecuación tiene un valor negativo, sin significado físico.) d) Para cada uno de los dos valores de z encontrados en el apartado (c), ¿el equilibrio es estable o inestable? En el equilibrio estable, un pequeño desplazamiento del objeto da lugar a una fuerza neta que tiende a devolver al objeto a la posición de equilibrio. En el equilibrio inestable, un pequeño desplazamiento da lugar a una fuerza neta que aleja al objeto todavía más del equilibrio.



los dos valores de z encontrados en el apartado (c), ¿el equilibrio es estable o inestable? En el equilibrio estable, un pequeño desplazamiento del objeto da lugar a una fuerza neta que tiende a devolver al objeto a la posición de equilibrio. En el equilibrio inestable, un pequeño desplazamiento da lugar a una fuerza neta que aleja al objeto todavía más del equilibrio.

Rta.: b) $8kz^3 - 8kz_0z + \epsilon_0 AV^2 = 0$; c) $z_2 = 0,000537 \text{ m}$; $z_3 = 0,00101 \text{ m}$; d) z_2 inestable, z_3 estable.

63. Dos placas conductoras cuadradas, cuyos lados tienen longitud L , están separadas una distancia D . Se introduce un bloque dieléctrico con constante K y dimensiones $L \times L \times D$ a una distancia x en el espacio entre las placas, como se muestra en la figura. a) Encuentre la capacitancia C de este sistema (ver el problema 58). b) Suponga que el capacitor está conectado a una batería que mantiene una diferencia de potencial V constante entre las placas. Si el bloque dieléctrico se introduce una distancia adicional dx en el espacio entre las placas, muestre que el cambio en la energía almacenada es



$$dU = + \frac{(K-1)\epsilon_0 V^2 L}{2D} dx$$

c) Suponga que antes de que se mueva el bloque la distancia dx , las placas se desconectan de la batería, de modo que la carga total en las placas permanece constante. Tenga en cuenta que, debido a la presencia del dieléctrico parcialmente introducido entre las placas, la distribución de cargas no será uniforme sobre las mismas (habrá mayor densidad de carga en la zona de las placas donde se encuentra el dieléctrico). Determine la magnitud de la carga total sobre cada placa; plantee que dicho valor debe permanecer constante y halle una expresión para la variación de V debido aun desplazamiento dx . Luego muestre que, cuando el bloque se desplaza una distancia dx hacia el espacio entre las placas, la energía almacenada cambia en una cantidad que es el *negativo* de la expresión para dU dada en el apartado (b). d) Si F es la fuerza ejercida sobre el bloque por las cargas sobre las placas, entonces dU debe ser igual al trabajo que debe hacerse en contra de esta fuerza para mover el bloque una distancia dx dentro de las placas. Así pues, $dU = -Fdx$. Muestre que la aplicación de esta expresión al resultado del apartado (b) sugiere que la fuerza eléctrica tira del bloque hacia afuera del capacitor, mientras que el resultado del apartado (c) sugiere que la fuerza empuja al bloque *hacia dentro* del capacitor. e) En realidad, la fuerza empuja al bloque hacia adentro del capacitor. Explique por qué el resultado del apartado (b) da una respuesta incorrecta

dicho valor debe permanecer constante y halle una expresión para la variación de V debido aun desplazamiento dx . Luego muestre que, cuando el bloque se desplaza una distancia dx hacia el espacio entre las placas, la energía almacenada cambia en una cantidad que es el *negativo* de la expresión para dU dada en el apartado (b). d) Si F es la fuerza ejercida sobre el bloque por las cargas sobre las placas, entonces dU debe ser igual al trabajo que debe hacerse en contra de esta fuerza para mover el bloque una distancia dx dentro de las placas. Así pues, $dU = -Fdx$. Muestre que la aplicación de esta expresión al resultado del apartado (b) sugiere que la fuerza eléctrica tira del bloque hacia afuera del capacitor, mientras que el resultado del apartado (c) sugiere que la fuerza empuja al bloque *hacia dentro* del capacitor. e) En realidad, la fuerza empuja al bloque hacia adentro del capacitor. Explique por qué el resultado del apartado (b) da una respuesta incorrecta

para la dirección de esta fuerza, y calcule su magnitud. (Este método no requiere el conocimiento de la naturaleza del campo en los bordes.)