BAB III
POSET & LATTICE

1. POSET

Himpunan terurut parsial yang dikenal dengan istilah poset, merupakan konsep yang sangat penting yang mendasari lattice.

TIK :	Setelah mempelajari sub bab ini mahasiswa dapat : - menjelaskan pengertian relasi urutan parsial dan contohnya - Menggambar Diagram Hasse suatu poset - Menentukan supremum dan infimum suatu himpunan

Sebelum sampai pada pendefinisian poset, anda diingatkan kembali pada definisi relasi biner serta sifat-sifatnya.

Definisi 3.1.1

Misalkan A dan B adalah himpunan-himpunan tak kosong. Hasilkali Cartes dari A dan B dinotasikan dengan A x B adalah himpunan A x B = {(x,y) ; x $\in$A, y $\in$B}

Contoh 1:

Diketahui himpunan A = {1,2,3} dan B = {a,b}. Hasil kali Cartes dari A dan B adalah

A x B = {(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b)}, dan hasil kali Cartes dari B dan A adalah B x A = {(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3)}

Definisi 3.1.2

Misalkan A dan B adalah himpunan-himpunan tak kosong. Setiap himpunan bagian tak kosong dari A x B disebut relasi biner (atau secara singkat disebut relasi) dari A ke B.

Jika R adalah relasi dari A ke B dan (x,y) $\in$ R, maka pernyataan "x berelasi dengan y" dinotasikan dengan x R y.

Dalam matematika, relasi seringkali dinotasikan dengan symbol khusus yang bukan merupakan huruf dari abjad latin. Contoh yang paling umum adalah relasi "lebih besar dari" untuk himpunan bilangan real. Relasi ini dinotasikan oleh yang dapat dipandang sebagai nama suatu himpunan dengan elemen-elemennya berupa pasangan terurut. Jika a dan b adalah dua bilangan real sedemikian hingga $a > b$, maka dikatakan bahwa $(a,b) \in >$. Lebih tepatnya relasi > adalah

$$> = \{(x,y) \ ; \ x,y \text{ adalah bilangan real dan } x > y\}$$

Sifat-sifat relasi biner

Ada beberapa sifat relasi biner yang penting untuk diketahui yakni sifat refleksif, simetris, transitif, dan antisimetris.

Definisi 3.1.3

Misalkan R adalah relasi pada A (relasi dari A ke A). R dikatakan refleksif jika untuk setiap $x \in A$, maka $(x,x) \in R$.

Contoh 2:

Diketahui A = {-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5}

Suatu relasi R didefinisikan sebagai berikut :

$R = \{(x,y); x,y \in A, xy > 0\}$

Periksa apakah R refleksif atau tidak.

Penyelesaian

Ambil x = 0 ($0 \in A$). Karena 0.0 = 0, maka $(0,0) \notin R$.

Dengan demikian ada $x \in A$ sedemikian hingga $(x,x) \notin R$.

Ini berarti bahwa R tidak refleksif.

Soal latihan

Diketahui B = {1,2,3,4,5}. Relasi R didfinisikan sebagai berikut

$R = \{(x,y); x,y \in B, xy > 0\}$

Periksa apakah R refleksif atau tidak.

Definisi 3.1.4

Misalkan R adalah relasi pada A. R dikatakan simetris jika untuk setiap $x, y \in A$ dengan xRy, maka yRx.

Contoh 3:

Diketahui $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ Relasi R didefinisikan sebagai berikut

$R = \{(x,y); x,y \in A, xy > 0\}$

Periksa apakah R simetris atau tidak.

Penyelesaian

$A \times A = \{(-2,-2), (-2,-1), (-2,0), (-2,1), (-2, 2), (-1,-2), (-1,-1), (-1,0), (-1,1), (-1, 2), (0, -2), (0, -1), (0, 0), (0,1), (0,2), (1,-2), (1, -1), (1,0), (1,1), (1,2), (2,2), (2, -1), (2,0), (2,1), (2,2)\}$

Karena $R = \{(x,y); x,y \in A, xy > 0\}$, maka kita nyatakan sebagai berikut :

$R = \{(-2,-2), (-2,-1), (-1,-2), (-1,-1), (1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$

Dari sini jelas terlihat bahwa untuk setiap $(x,y) \in R$ berlaku $(y,x) \in R$. Dengan kata lain untuk setiap $x,y \in A$ dengan xRy, berlaku yRx. Jadi R adalah sebuah relasi yang simetris.

Latihan soal

Diketahui $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ Relasi R didefinisikan sebagai berikut

$R = \{(x,y); x,y \in A, x \leq y\}$

Periksa apakah R simetris atau tidak.

Definisi 3.1.5.

Misalkan R adalah relasi pada A. R dikatakan transitif jika untuk setiap $x, y, z \in A$ dengan xRy dan yRz, maka xRz.

Contoh 4:

Diketahui $A = \{-1, 0, 1\}$ Relasi R didefinisikan sebagai berikut

$R = \{(x,y); x,y \in A, x \leq y\}$

Periksa apakah R transitif atau tidak.

Penyelesaian

$A \times A = \{(-1,-1), (-1,0), (-1,1), (0, -1), (0, 0), (0,1), (1, -1), (1,0), (1,1)\}$

Karena R = {(x,y); x,y $\in$A, x $\le$ y}dan R merupakan himpunan bagian dari A x A, maka R dapat dinyatakan sebagai berikut

R = {(–1,–1), (–1,0), (–1,1), (0, 0), (0,1), (1, –1)}

Dari sini jelas terlihat bahwa untuk setiap x, y , z $\in$ A dengan xRy dan yRz, maka xRz. Dengan demikian R adalah relasi yang transitif.

Latihan soal

Diketahui A = {a,b,c} Relasi R didefinisikan sebagai berikut

R = {(a,b), (c,b), (b,a), (a,c)}. Periksa apakah R transitif atau tidak.

Definisi 3.1.6.

Misalkan R adalah relasi pada A. R dikatakan antisimetris jika untuk setiap x, y $\in$ A dengan xRy dan yRx, maka x = y.

Contoh 5:

Diketahui A = {–2, –1, 0, 1, 2} Relasi R didefinisikan sebagai berikut

R = {(x,y); x,y $\in$A, y = $|x|$ }

Periksa apakah R antisimetris atau tidak.

Penyelesaian

A x A = {(–2,–2), (–2,–1), (–2,0), (–2,1), (–2, 2), (–1,–2), (–1,–1), (–1,0), (–1,1), (–1, 2), (0, –2), (0, –1), (0, 0), (0,1), (0,2), (1,–2), (1, –1), (1,0), (1,1), (1,2), (2,2), (2, –1), (2,0), (2,1), (2,2)}

Karena R = {(x,y); x,y $\in$A, y = $|x|$ }, dan R merupakan himpunan bagian dari A x A maka R dapat kita nyatakan sebagai berikut :

R = {(–2,2), (–1,1), (0,0), (1,1), (2,2) }

Dari sini jelas terlihat bahwa untuk setiap x, y $\in$ A dengan xRy dan yRx, berlaku x = y. Dengan demikian R adalah relasi antisimetris.

Latihan soal

Diketahui A = {a,b,c} Relasi R didefinisikan sebagai berikut

R = {(a,b), (b,a), (a,c), (c,a), (b,c), (c,a)}

Periksa apakah R antisimetris atau tidak.

Definisi 3.1.7.

Himpunan P dengan relasi R pada P dinamakan poset jika R memenuhi sifat refleksif, antisimetris, dan transitif.

Contoh 6:

Misalkan Z adalah himpunan semua bilangan bulat positif. Relasi $\leq$ (lebih kecil atau sama dengan) adalah sebuah relasi pada Z. Periksa apakah himpunan Z dengan relasi $\leq$ atau dinotasikan $(Z, \leq)$ merupakan poset atau bukan.

Penyelesaian

Ada tiga sifat yang harus diperiksa yaitu refleksif, antisimetris, dan transitif.

a. Karena untuk setiap $x \in Z$ berlaku $x \leq x$, maka sifat refleksif dipenuhi.
b. Karena untuk setiap $x,y \in Z$ dengan $x \leq y$ dan $y \leq x$, berarti bahwa $x = y$, maka sifat antisimetris dipenuhi.
c. Karena untuk setiap $a,b,c \in Z$ dengan $a \leq b$ dan $b \leq c$, berlaku $a \leq c$ maka sifat transitif dipenuhi.

Karena tiga sifat terpenuhi, maka $(Z, \leq)$ merupakan poset.

Latihan Soal

1. Misalkan Z adalah himpunan semua bilangan bulat positif. Periksa apakah relasi $<$ pada Z merupakan poset atau bukan.
2. Periksa apakah $(Z^+, |)$ merupakan poset atau bukan. Z^+ adalah himpunan bilangan bulat positif. Relasi $x | y$ adalah relasi y habis dibagi x, untuk setiap $x, y \in Z^+$.

Definisi 3.1.8

Diberikan (P,R) sebuah poset.

- Elemen $x, y \in P$ disebut dapat dibandingkan jika xRy atau yRx.
- Elemen $x, y \in P$ disebut tidak dapat dibandingkan jika tidak terpenuhi xRy ataupun yRx.

Definisi 3.1.9.

Misalkan (P,≤) sebuah poset. Jika untuk setiap x, y ∈ P berlaku x ≤ y atau y ≤ x , maka (P,≤) disebut *rantai*..

Contoh 7:

Dari contoh sebelumnya diketahui bahwa (Z, ≤) merupakan poset. Periksa apakah poset (Z, ≤) merupakan rantai atau bukan.

Penyelesaian

Karena untuk setiap x, y ∈ Z berlaku x ≤ y atau y ≤ x , maka (Z,≤) merupakan rantai.

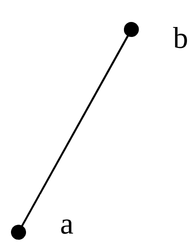
Latihan Soal

Misalkan R adalah himpunan semua bilangan real. Periksa apakah

1. (R, ≤) merupakan poset atau bukan
2. (R, ≤) merupakan rantai atau bukan

Diagram Hasse Poset

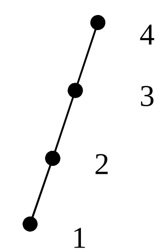
Misalkan (P, ≤) adalah sebuah poset. Jika P hingga, maka (P, ≤) dapat dinyatakan dalam bentuk diagram yang dikenal dengan diagram *Hasse*. Dalam diagram seperti ini, tiap elemen diwakili oleh sebuah lingkaran kecil atau titik. Jika x < y, maka lingkaran yang mewakili x∈P digambar di bawah lingkaran yang mewakili y∈P. Untuk lebih jelas lagi, misalkan a, b ∈ P, a ≤ b, a ≠ b dan tak ada anggota lain c sedemikian hingga a ≤ b ≤ c, maka relasi a ≤ b dinyatakan dengan rantai langsung dengan posisi b di atas a. Ilustrasinya dapat dibuat sebagai berikut.



Gambar 1

Contoh 8:

Misalkan P ={1,2,3,4} dan ≤ didefinisikan sebagai relasi "lebih kecil atau sama dengan". Dapat diperiksa bahwa (P, ≤) merupakan sebuah rantai. Diagram Hasse untuk (P, ≤) adalah sebagai berikut



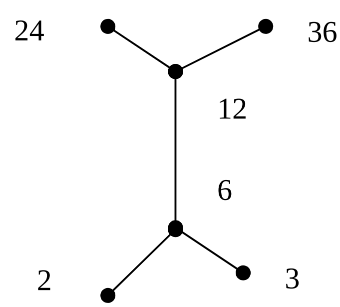
Gambar 2

Contoh 9:

Misalkan X ={2,3,6,12,24,36}. Relasi ≤ didefinisikan sebagai x ≤ y jika y habis dibagi x (x,y ∈ X). Gambarlah diagram Hasse untuk (X, ≤).

Penyelesaian

Berikut ini merupakan diagram Hasse untuk (X, ≤).



Gambar 3

Latihan Soal

Misalkan A adalah sebuah himpunan hingga dan p(A) adalah himpunan kuasanya. Misalkan ⊆ merupakan relasi inklusi pada elemen-elemen dari p(A). Gambarlah diagram Hasse dari (p(A), ⊆) jika

a. A = {a}
b. A = {a, b}
c. A = {a, b, c}
d. A = {a, b, c, d}

Elemen maksimal dan minimal

Misalkan (P, R) adalah sebuah poset.

- $a \in P$ disebut elemen maksimal dalam poset (P,R) jika tidak ada $b \in P$ sedemikian hingga aRb
- $a \in P$ disebut elemen minimal dalam poset (P,R) jika tidak ada $b \in P$ sedemikian hingga bRa

Elemen maksimal dan minimal tidaklah tunggal

Elemen terbesar dan terkecil

Misalkan (P, R) adalah sebuah poset.

- $a \in P$ disebut elemen terbesar (greatest element) dalam poset (P,R) jika bRa untuk setiap $b \in P$.
- $a \in P$ disebut elemen terkecil (least element) dalam poset (P,R) jika aRb untuk setiap $b \in P$.

Elemen terbesar dan terkecil adalah tunggal

Batas Atas dan Batas Bawah

Definisi 3.1.10.

Misalkan $(P, \leq)$ adalah sebuah poset dan $a, b \in P$. Elemen $c \in P$ disebut batas atas dari {a, b} jika $a \leq c$ dan $b \leq c$. Sebaliknya $d \in P$ dinamakan batas bawah dari {a, b} jika $d \leq a$ dan $d \leq b$.

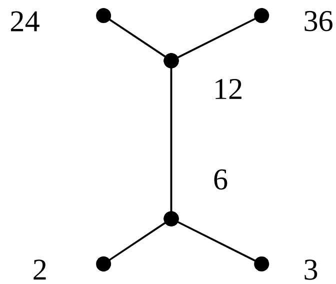
Contoh 10:

Misalkan X ={2,3,6,12,24,36}. Definisikan $x \leq y$ sebagai y habis dibagi x.

a. Gambarlah diagram Hasse dari $(X, \leq)$.
b. Carilah batas atas dari {2, 3}
c. Carilah batas bawah dari {24, 36}

Penyelesaian

a. Berikut ini merupakan diagram Hasse untuk $(X, \leq)$.



Gambar 4

b. Batas atas dari {2, 3} adalah 6, 12, 24, dan 36.

c. Batas bawah dari {24, 36} adalah 12, 6, 3, dan 2.

Definisi 3.1.11.

Misalkan (P, ≤) adalah sebuah poset dan a, b ∈ P. Jika ada c ∈ P sehingga c batas atas dari {a, b}dan untuk setiap batas d dari {a, b} berlaku c ≤ d, maka c dinamakan *batas atas terkecil* atau *supremum* dari {a, b}dan dilambangkan c = a ⊕ b.

Sebaliknya, jika ada p∈ P sehingga p batas bawah dari {a, b}dan untuk setiap batas q dari {a, b} berlaku q ≤ p, maka p dinamakan *batas bawah terbesar* atau *infimum* dari {a, b}dan dilambangkan c = a * b.

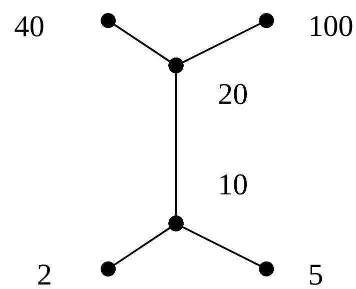
Contoh 11:

Misalkan X ={2,5,10,20,40,100}. Definisikan x ≤y sebagai y habis dibagi x.

a. Gambarlah diagram Hasse dari (X, ≤).
b. Carilah batas atas dari {2, 5}
c. Carilah batas bawah dari {40, 100}
d. Carilah supremum dari{2, 5}
e. Carilah infimum dari {40, 100}

Penyelesaian

a. Berikut ini merupakan diagram Hasse untuk (X, ≤).



Gambar 5

b. Batas atas dari {2, 5} adalah 10, 20, 40, dan 100.

c. Batas bawah dari {40, 100} adalah 20, 10, 5, dan 2.

d. Supremum dari {2, 5} adalah 10.

e. Infimum dari {40,100} adalah 20

Teorema 3.1.12.

Misalkan (P, $\leq$) adalah sebuah poset dan a, b $\in$ P.

a. Jika supremum {a, b}ada maka supremum tersebut tunggal.
b. Jika infimum {a, b}ada maka infimum tersebut tunggal

Latihan soal

1. Misalkan A adalah himpunan bilangan asli. Relasi $\geq$ (lebih besar atau sama dengan) adalah sebuah relasi pada A. Periksa apakah (A, $\geq$) merupakan poset atau bukan. Jika (A, $\geq$) poset, periksa apakah (A, $\geq$) rantai atau bukan.
2. Misalkan A adalah himpunan semua factor dari bilangan bulat positif m. Definisikan x $\leq$ y sebagai y habis dibagi oleh x. Buatlah diagram Hasse untuk
   a. m = 12.
   b. m = 45.
3. Misalkan A={2, 3, 4, 6,12,18, 24, 36}. Definisikan x $\leq$ y sebagai y habis dibagi x.
   a. Gambarlah diagram Hasse dari (A, $\leq$).
   b. Carilah batas atas dari {2, 3}

c. Carilah batas bawah dari {24,36}

d. Carilah supremum dari{2, 3} (bila ada)

e. Carilah infimum dari {24,36}(bila ada)

2. LATTICE

TIK : Setelah mempelajari sub bab ini mahasiswa dapat :
- menjelaskan pengertian lattice dan contohnya
- Menggambar Diagram Hasse suatu lattice
- Membuktikan sifat-sifat lattice

Definisi 3.2.1

Misalkan $(P, \leq)$ adalah poset. $(P, \leq)$ dinamakan lattice jika untuk setiap $a, b \in P$ terdapat $a * b$ dan $a \oplus b$. Lattice biasanya dilambangkan dengan $(L, \leq, *, \oplus)$ atau secara singkat dilambangkan dengan L.

Contoh 1

Misalkan P adalah himpunan semua factor dari 24. Definisikan $a \leq b$ sebagai b habis dibagi a, $a * b$ adalah pembagi persekutuan terbesar dari {a,b} dan $a \oplus b$ adalah kelipatan persekutuan terbesar dari {a,b}. Tunjukkan bahwa $(P, \leq, *, \oplus)$ adalah lattice.

Penyelesaian

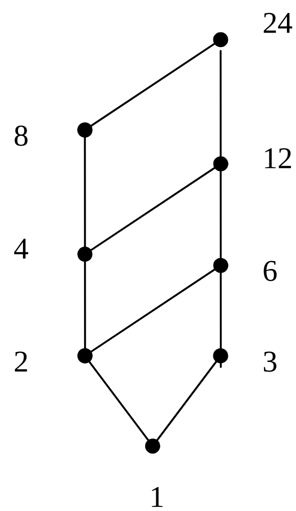
Untuk menunjukkan bahwa $(P, \leq, *, \oplus)$ sebuah lattice, terlebih dahulu harus ditunjukkan bahwa $(P, \leq)$ adalah sebuah poset.

a. Karena untuk setiap $x \in P$ berlaku $x \leq x$, maka sifat refleksif dipenuhi.

b. Sifat antisimetris dipenuhi sebab untuk setiap $x, y \in P$ dengan $x \leq y$ dan $y \leq x$, berlaku $x = y$.

c. Sifat transitif dipenuhi sebab untuk setiap $x, y, z \in P$ dengan $x \leq y$ dan $y \leq z$, berlaku $x \leq z$.

Dengan demikian $(P, \leq)$ adalah sebuah poset. Untuk lebih jelasnya perhatikan diagram Hasse dari $(P, \leq)$.



Gambar 1

Melalui diagram ini dapat diteliti bahwa untuk setiap a, b $\in$ P terdapat a * b dan a $\oplus$ b. Dengan demikian (P, $\leq$,*, $\oplus$) merupakan sebuah lattice.

Diagram Hasse sebuah Lattice

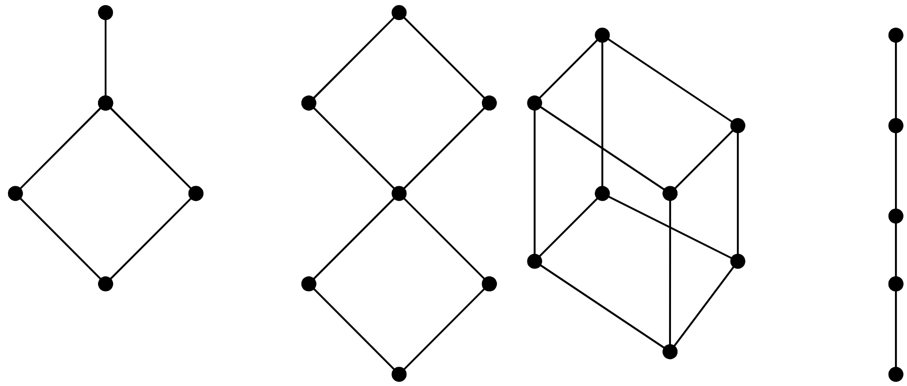
Seperti halnya poset, lattice pun dapat dinyatakan dalam bentuk diagram yang disebut diagram Hasse lattice.

Contoh 2

Karena (P, $\leq$,*, $\oplus$) pada contoh 1 merupakan sebuah lattice, maka diagram Hasse pada gambar 1 merupakan diagram Hasse dari lattice (P, $\leq$,*, $\oplus$).

Contoh 3.

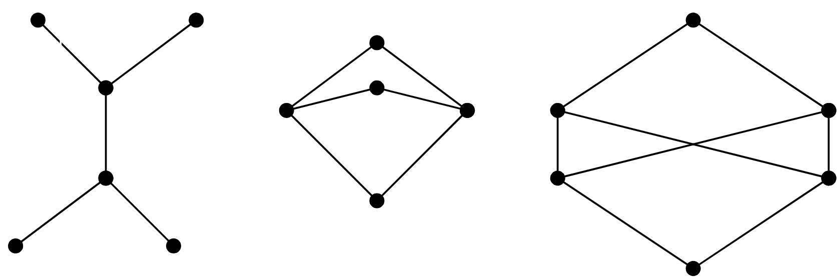
Gambar di bawah ini merupakan beberapa diagram Hasse dari suatu lattice.



Gambar 2

Contoh 4

Gambar di bawah ini memuat tiga contoh diagram Hasse bukan lattice.



Gambar 3

Beberapa sifat dasar lattice

Berikut ini beberapa teorema tentang lattice

Teorema 3.2.2

Misalkan $(L, \leq, *, \oplus)$ adalah lattice. Untuk setiap $a, b, c \in L$ berlaku

i. $a * a = a$ dan $a \oplus a = a$ (idempotent)

ii. $a * b = b * a$ dan $a \oplus b = b \oplus a$ (komutatif)

iii. $(a * b) * c = a * (b * c)$ dan $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ (asosiatif)

iv. $a * (a \oplus b) = a$ dan $a \oplus (a * b) = a$ (absorbsi)

Sebagai gambaran cara pembuktian Teorema 3.2.2., akan kita buktikan sifat idempotent yang pertama.

Bukti (i)

Dari sifat refleksif $\leq$ diperoleh $a \leq a$. $a \leq a$, berarti bahwa a merupakan batas bawah dari $\{a,a\}$. Karena a merupakan batas bawah dari $\{a,a\}$, maka $a \leq a * a$. Selanjutnya, dari definisi infimum diperoleh $a * a \leq a$. Karena $a \leq a * a$ dan $a * a \leq a$, maka dapat disimpulkan bahwa $a * a = a$ (sifat antisimetris).

Teorema 3.2.3.

Misalkan L adalah lattice. Untuk setiap $a, b \in L$ berlaku

$$a \leq b \Leftrightarrow a * b = a \Leftrightarrow a \oplus b = b.$$

Teorema 3.2.4.

Misalkan L adalah lattice. Untuk setiap $a, b, c \in L$ berlaku

$$b \leq c \Rightarrow (a * b \leq a * c) \wedge (a \oplus b \leq a \oplus c)$$

Misalkan L adalah lattice dan $a, b, c \in L$. Dari definisi operasi $*$ dan $\oplus$, diperoleh beberapa implikasi sebagai berikut :

i. $a \leq b \wedge a \leq c \Rightarrow a \leq b \oplus c$

ii. $a \leq b \wedge a \leq c \Rightarrow a \leq b * c$

iii. $a \geq b \wedge a \geq c \Rightarrow a \geq b * c$

iv. $a \geq b \wedge a \geq c \Rightarrow a \geq b \oplus c$

Implikasi-implikasi tersebut seringkali dapat digunakan dalam pembuktian teorema.

Teorema 3.2.5.

Misalkan L adalah lattice. Untuk setiap $a, b, c \in L$ berlaku

i. $a \oplus (b * c) \leq (a \oplus b) * (a \oplus c)$

ii. $(a * b) \oplus (a * c) \leq a * (b \oplus c)$

Teorema 3.2.6.

Misalkan L adalah lattice. Untuk setiap a, b, c $\in$ L berlaku

$$a \le c \Leftrightarrow a \oplus (b * c) \le (a \oplus b) * c$$

Sublattice dan Hasilkali Lattice

Definisi 3.2.7.

Misalkan $(L,\le,*,\oplus)$ adalah lattice dan $S \subseteq L$.

S disebut Sublattice dari L jika $(S,\le,*,\oplus)$ lattice.

Catatan

Syarat perlu dan cukup agar S sublattice adalah $a * b \in S$ dan $a \oplus b \in S$ untuk setiap $a, b \in S$.

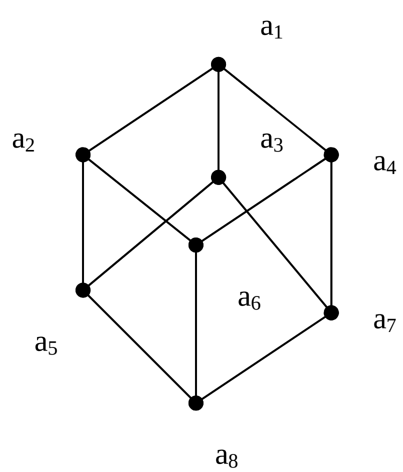
Contoh 5:

Misalkan $(L,\le)$ adalah lattice dengan $L = \{a_1, a_2, \dots, a_8\}$

S_1, S_2, dan S_3 merupakan subset-subset dari L yaitu

$S_1 = \{a_1, a_2, a_4, a_6\}$, $S_2 = \{a_3, a_5, a_7, a_8\}$, dan $S_3 = \{a_1, a_2, a_4, a_8\}$.

Diagram Hasse dari $(L,\le)$ adalah sebagai berikut



Gambar 4

Dapat diteliti bahwa $(S_1,\le)$ dan $(S_2,\le)$ merupakan sublattice dari $(L,\le)$, sedangkan $(S_3,\le)$ bukan sublattice, sebab $a_2, a_4 \in S_3$ dan $a_2 * a_4 \notin S_3$. Dengan demikian $(S_3,\le)$ bukan lattice.

Definisi 3.2.8.

Misalkan $(L_1, \leq_1, *_1, \oplus_1)$ dan $(L_2, \leq_2, *_2, \oplus_2)$ adalah lattice. Hasilkali lattice dari L_1 dan L_2 yang dilambangkan $(L_1 \times L_2, \leq, *, \oplus)$ adalah hasil kali Cartes $L_1 \times L_2$ dengan relasi dan operasi-operasi yang didefinisikan sebagai berikut :

$(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 \leq a_2 \wedge b_1 \leq b_2$.

$(a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1 *_1 a_2 , b_1 *_2 b_2)$

$(a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2) \Leftrightarrow (a_1 \oplus_1 a_2 , b_1 \oplus_2 b_2)$

Dapat diperlihatkan bahwa $(L_1 \times L_2, \leq, *, \oplus)$ adalah lattice.

Khusus jika $L_1 = L_2 = L$, lattice $L_1 \times L_2$ dilambangkan L^2.

Contoh 6:

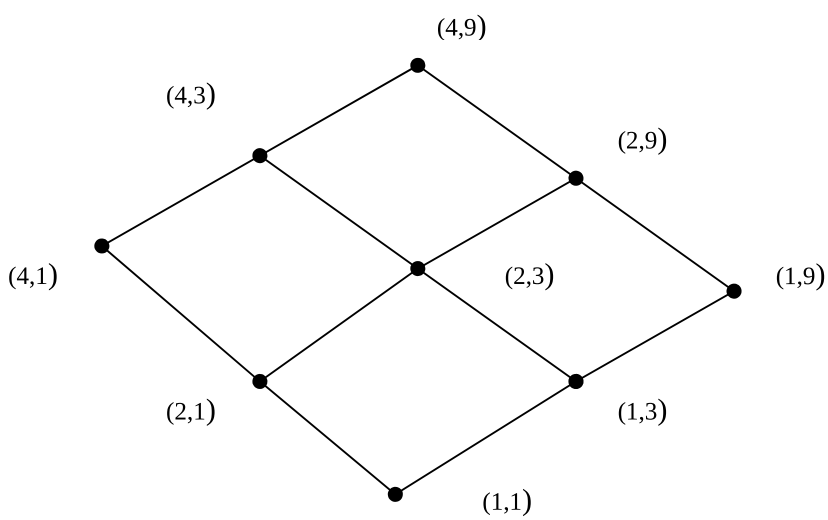
Misalkan $L_1 = \{1,2,4\}$ dan $L_2 = \{1,3,9\}$

$a \leq_1 b \Leftrightarrow b$ habis dibagi a.

$a \leq_2 b \Leftrightarrow b$ habis dibagi a

$L_1 \times L_2 = \{(1,1), (1,3), 1,9), (2,1), (2,3), (2,9), (4,1), (4,3), (4,9)\}$

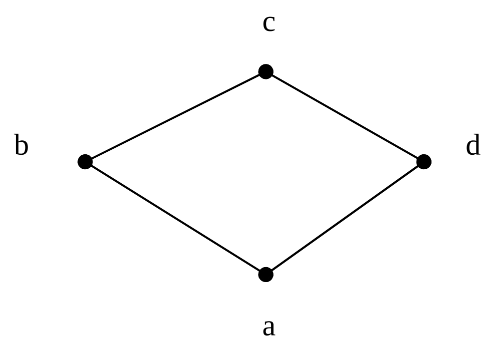
Dapat diperiksa bahwa $L_1 \times L_2$ adalah lattice. Berikut adalah diagram Hasse dari lattice $L_1 \times L_2$.



Gambar 5

Latihan Soal

1. Misalkan P = {1, 2, 4, 5, 10, 20}. Definisikan $a \leq b$ sebagai b habis dibagi a. Periksa apakah $(P, \leq, *, \oplus)$ lattice atau bukan.
2. Gambarlah diagram Hasse $(P, \leq, *, \oplus)$ dari soal nomor 1.
3. Apakah diagram Hasse di bawah ini merupakan lattice atau bukan?



4. Misalkan L adalah lattice. Buktikan bahwa untuk setiap $a, b, c \in L$ berlaku :

$$(a * b) \oplus (a * c) \leq a * (b \oplus c)$$

5. Misalkan L adalah lattice dengan L = {1, 2, 4, 5, 10, 20}.
   Jika S_1 = {1, 2, 4, 20}dan S_2 = {2, 5, 4, 20}. Periksa apakah S_1 dan S_2 merupakan sublattice atau bukan.