5 POSET & LATTICE

5.1. HIMPUNAN URUT PARSIAL

Suatu relasi R pada himpunan S dikatakan urut Parsial pada S, jika R bersifat:

(1) Refleksif, yaitu a R a, untuk setiap $a \in s$

(2) Anti simetris, yaitu a R b dan b R a maka a = b

(3) Transitif, yaitu jika a R b dan b R c maka a R c Himpunan S berikut dengan urut parsial pada S dikatakan himpunan urut parsial atau POSET (Singkatan dari partially ordered set).

Contoh 5.1.

(a) Misal δ adalah sebarang kelas dari himpunan. Relasi antara himpunan "mengandung" atau "C" merupakan suatu urutan partial pada S karena

(1) ACA, untuk setiap $A \in S$

(2) Jika ACB dan BCA maka A = B

(3) Jika ACB dan BCC maka ACC

(b) Misal N himpunan bilangan-bilangan positif. Sebut "a membagi b" ditulis a|b, jika terdapat sebuah bilangan bulat c sedemikian sehingga ac = b.

Contoh : 2|4, 3|12, 7|21 dan sebagainya.

Relasi dapat dibagi tersebut adalah suatu urut parsial pada N.

(c) Relasi "≤" juga suatu urut parsial pada bilangan positif N (jelas ≤ adalah suatu urut parsial pada sebarang sub himpunan bilangan riil).

Relasi tersebut kadang-kadang disebut urut biasa pada N. Biasanya dinotasikan

Relasi urut partial dengan $\underline{\alpha}$, dengan "a $\underline{\alpha}$ b" dibaca "a mendahului b".

Berhubungan dengan notasi ini, digunakan notasi tambahan sebagai berikut :

a < b artinya a ≤ b dan a ≠ b baca "a benar-benar mendahului b"

b ≥ a artinya a ≤ b dibaca "b sesudah a".

b > a artinya a < b dibaca "b benar-benar sesudah a".

$\nleq$, <, $\ngeq$, dan $\ngtr$ jelas dapat dijelaskan sendiri.

kita akan imbang gunakan simbol ≤, <, > dan ≥ sebagai pengganti masing-masing dari α, $\underline{\alpha}$, ɒ dan $\underline{ɒ}$

Kita juga menyatakan bahwa jika $\underline{\alpha}$ adalah suatu urutan parsial pada himpunan S maka relasi invers adalah $\underline{\alpha}$ yang merupakan suatu urutan parsial juga, disebut urutan invers.

Dua elemen a dan b dalam POSET dikatakan "dapat dibandingkan" jika a $\underline{\alpha}$ b atau b $\underline{\alpha}$ a jadi jika satu mendahului yang lainnya, jika tidak a dan b dikatakan "tidak dapat dibandingkan" sebagai contoh: bilangan bulat 3 dan 5 pada contoh 5.1.(b) adalah "tidak dapat dibandingkan satu dengan lainnya.

Kata "urutan" digunakan dalam mendefinisikan himpunan urut parsial pada A karena beberapa elemen dalam A tidak perlu "dapat dibandingkan". Dalam hal jika setiap pasangan elemen dalam POSET A adalah dapat dibandingkan maka A dikatakan "urut total" atau "urut linier" dan A dikatakan suatu chain sebagai contoh, bilangan-bilangan bulat positif N dengan urut $\leq$ adalah himpunan urut Linier.

Jika S dan T adalah himpunan-himpunan urut Linier maka himpunan perkalian S x T dapat menjadi himpunan urutan linier jika dipenuhi :

(a,b) α (a',b') jika a α a' atau jika a ' a' dan b α b' urut tersebut dikatakan urut Lexico Graphical pada S x T karena urut similar dengan cara menyusun kata-kata dalam kamus.

Sebarang sub himpunan A dari suatu POSET S adalah urut Parsial dengan urut pada S karena untuk sebarang a, b, $\in$ A misal a $\leq$ b sebagai elemen dari A sama halnya sebagai a $\leq$ b elemen S. Dengan catatan bahwa sub himpunan S dapat merupakan urutan Linier walaupun S bukan merupakan urutan Linier. Sebagai contoh [2,4,16,64] adalah suatu sub himpunan urut Linier dari himpunan urutan bukan Linier pada N (kumpulan bilangan-bilangan bulat positif) dengan urutan "dapat dibagi".

5.2. DIAGRAM POSET

Misal S adalah suatu himpunan urut parsial. Sebut a dalam S adalah suatu yang mendahului dari b atau b sesudah a ditulis a $\leq$ b jika a < b tetapi tidak ada elemen dari S yang terletak di antara a dan b, jadi tidak ada X dalam S sedemikian sehingga a < X < b.

Misal S adalah suatu POSET yang hingga. Maka urut pada S adalah diketahui secara lengkap jika kita mengetahui semua pasangan a, b dalam S sedemikian sehingga $a \leq b$ jadi relasi $\leq$ pada S. Sehingga $x < y$ jika dan hanya jika terdapat elemen $x = a_o, a_i, \ldots a_m = y$ sedemikian sehingga $a_{i-1} \leq a_i$ untuk $i = 1, \ldots, m$.

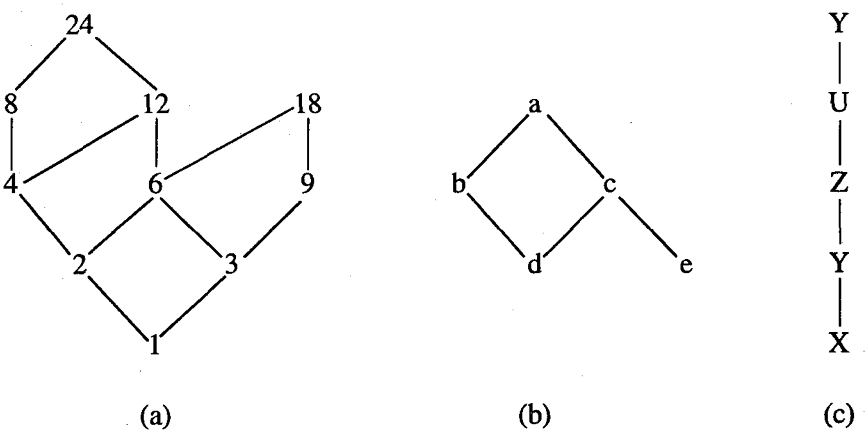
Menurut diagram dari suatu POSET S yang hingga kita artikan suatu graph berarah dimana vertex adalah merupakan elemen dari S dan akan terdapat busur yang menghubungkan a dan b jika $a \leq b$ dalam S (dalam menggambarkan suatu arah panah dari a ke b, kita kadang-kadang menempatkan b lebih tinggi daripada a dalam diagram dan garis dari a ke b mengarah ke atas). Pada diagram S, terdapat suatu path berarah dari suatu vertex x ke vertex y jika dan hanya jika $x < y$. Juga tidak terdapat sebarang cycle dalam diagram S karena urut relasinya adalah anti simetris.

Contoh 5.2.

(a) Misal A = [1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24] dalam urut dengan relasi "x membagi y". Diagram diberikan pada gambar 5.1(a).

(b) Misal B = [a, b, c, d, e]. Diagram pada gambar 5.1(b) didefinisikan suatu urut parsial pada B dengan cara alfabetis. Jadi $d \leq b$, $d \leq a$ dan $e \leq c$ dan seterusnya.

(c) Diagram dari suatu himpunan urut linier yang hingga yaitu suatu chain hingga yang terdiri dari sebuah path yang sederhana. Seperti contoh pada gambar 5.1(c) menunjukkan diagram dari suatu chain dengan 5 elemen.



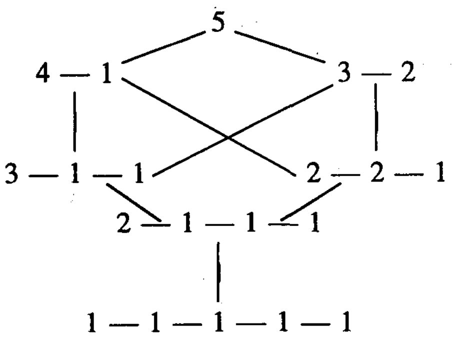
Gambar 5.1.

Contoh 5.3. Suatu partisi dari bilangan bulat positif m adalah suatu himpunan dari bilangan bulat positif yang mempunyai jumlah m. Sebagai contoh terdapat 7 partisi dari m = 5 :

5, 3-2, 2-2-1, 1-1-1-1-1, 4-1, 3-1-1. 2-1-1-1

Kita urutkan partisi dari bilangan bulat m sebagai berikut. Suatu partisi P_1 mendahului partisi P_2 jika bilangan bulat P_1 dapat ditambahkan untuk memperoleh bilangan bulat pada P_2 atau jika bilangan bulat P_2 dapat digambarkan mempunyai sub bagian bilangan bulat P_1. Sebagai contoh 2-2-1 mendahului 3-2

Karena 2 + 1 = 3. Dengan perkataan lain 3-1-1 dan 2-2-1 tidak dapat dibandingkan. Gambar 5.2. adalah diagram dari partisi bilangan bulat m = 5.



Gambar 5.2

Kita dapat menunjukkan bilangan bulat positif elemen dari himpunan urutan parsial pada S yang hingga sehingga urut dalam S dipenuhi jadi, kita dapat mencari fungsi f : S → N sedemikian sehingga jika a ≤ b maka f(a) ≤ f(b). Fungsi tersebut dikatakan suatu enumerasi konsisten dari S. Hal ini dituliskan dalam teorema sebagai berikut :

Teorema 5.1. : terdapat suatu enumerasi konsisten untuk POSET'S yang hingga.

Suatu enumerasi konsisten tidak perlu unik.

Sebagai contoh, 2 buah enumerasi konsisten untuk Poset pada gambar 5.1.(b).

(i) f(d) = 1, f(1) = 2, f(b) = 3, f(c) = 4. f(a) = 5

(ii) g(e) = 1, g(d) = 2, g(c) = 3, g(b) = 4, g(a) = 5

Tetapi chain pada gambar 5.1.(c) tidak terdapat enumerasi konsisten yang lain (unik) jika kita petakan himpunan dengan [1,2,3,4,5]

Maka ditunjukkan dengan :

$$h(x) = 1,\ h(y) = 2,\ h(z) = 3,\ h(u) = 4,\ h(v) = 5.$$

Sebuah elemen a dalam Poset S dikatakan Maximal jika tidak ada elemen yang sesudah a, jadi jika $a \leq x$ maka $x = a$. Dan sebuah elemen b adalah Poset S dikatakan minimal jika tidak ada elemen yang mendahului b, jadi jika $y \leq b$ maka $y = b$. Ada kemungkinan terdapat lebih dari satu maximal ataupun elemen minimal. Pada gambar 5.1(b) d dan e adalah elemen minimal tetapi hanya sebuah elemen maximal yaitu a.

Gambar 5.1.(c), 18 dan 24 adalah elemen maximal tetapi hanya satu dan 21 adalah elemen minimal. Gambar 3.1 (c), x adalah elemen minimal dan v adalah elemen maximal.

Suatu Poset yang tidak hingga mungkin tidak mempunyai elemen nimimal atau maximal. Sebagai contoh himpunan bilangan bulat z = [. . . , -2, -1, 0, 1, 2, . . .] dengan urut biasa tidak mempunyai elemen maximal dan elemen minimal. Tetapi pada teorema 5.1. ditunjukkan bahwa suatu poset S yang hingga pasti sedikitnya mempunyai satu elemen minimal dan elemen maximal. Jika a dalam S adalah dinyatakan sebagai bilangan bulat terbesar (terkecil) untuk sebarang enumerasi yang konsisten maka a adalah suatu elemen maximal (minimal).

5.3. SUPREMUM & INFIMUM

Misal A adalah sub himpunan dari Poset S sebuah elemen M pada S dikatakan batas atas dari A jika M didahului setiap elemen dari A jadi jika setiap $x \in A$, diperoleh

$$x \leq M$$

Jika suatu batas atas dari A mendahului setiap batas atas yang lain dari A makan dikatakan SUPREMUM dari A dinotasikan dengan

$$\text{Sup }(A).$$

kita juga dapat menuliskan sup ($a_1, \ldots, a_n$) sebagai pengganti sup (A) jika A terdiri dari elemen-elemen $a_1, \ldots, a_n$. Selanjutnya kita dapat mempunyai sup (A) paling banyak satu, tetapi sup (A) mungkin juga tidak ada sebagai contoh gambar 5.2. partisi 4-1, 3-2 dan 5 adalah batas-batas dari 3-1-1 dan 2-2-1 tetapi sup (3-1-1, 2-2-1) tidak ada, karena tidak ada batas atas yang mendahului kedua batas atas lainnya.

Dengan cara yang sama, sebuah elemen m dalam Poset S dikatakan batas bawah dari suatu sub himpunan A dari S jika m mendahului setiap elemen dari A jadi jika y dalam A, maka $m \leq y$ jika batas bawah dari A didahului setiap batas batas bawah dari A maka dikatakan INFIMUM dari A dan dinotasikan dengan

$$\inf (A) \text{ atau } \inf (a_1, \ldots, a_n)$$

Jika A terdiri dari elemen-elemen $a_1, \ldots, a_n$. Terdapat paling banyak satu inf (A) atau mungkin tidak terdapat infimum dari A.

Sebagai contoh gambar 5.2, partisi 4-1 dan 3-2 mempunyai 4 batas bawah tetapi inf (4-1, 3-2) tidak ada karena tidak ada batas bawah yang didahului 3 batas bawah lainnya.

Beberapa buku menggunakan istilah batas atas terkecil sebagai pengganti supremum dan batas bawah terbesar sebagai pengganti infimum dan dituliskan dengan Lub (A) untuk sup (A) dan glb (A) untuk inf (A).

Akan diberikan beberapa contoh penting dari Poset dimana sup (a, b) dan inf (a, b) ada untuk setiap pasangan elemen andan b.

Contoh 5.4.

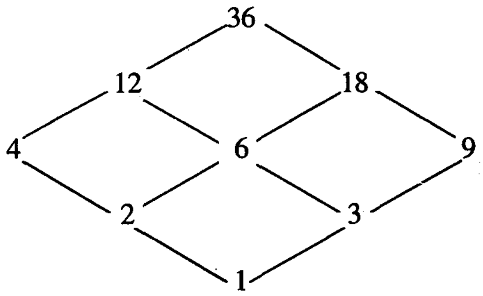
(a) Misal bilangan-bilangan positip N adalah urut parsial dengan relasi dapat dibagi, dan misal a, b, terdapat dalam N pembagi terbesar dari a dan b dinotasikan dengan gcd (a, b) adalah bilangan bulat terbesar yang membagi a dan b. Perkalian terkecil dari a dan b dinotasikan dengan lcm (a, b) adalah bilangan bulat terkecil yang membaca a dan b.

Suatu teorema terpenting dalam teori disebutkan bahwa setiap pembagi dari a dan b membagi gcd (a, b). Satu lagi yang dapat dibuktikan bahwa lcm (a, b) membagi setiap perkalian dari a dan b. Jadi

$$\gcd (a, b) = \inf (a, b) \text{ dan } \mathrm{Lcm} (a, b) = \sup (a, b)$$

Dengan perkataan lain, inf(a, b) dan sup (a, b) ada untuk setiap pasangan elemen dari N urutan dengan relasi dapat dibagi.

(b) Untuk sebarang bilangan bulat positip m, kita dapat memisalkan Om menyatakan himpunan pembagi dari m urutan dengan relasi dapat dibagi. Diagram dari D_{36} = [1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36] diberikan pada gambar 5.3. Sehingga inf (a, b) = gcd (a, b) dan sup (a, b) = Lcm (a, b) ada



Gambar 5.3.

5.4. LATTICE

Misal L adalah suatu himpunan yang tidak kosong tertutup terhadap 2 buah operasi binary disebut meet dan join yang biasa dinyatakan dengan Λ dan V. Maka L dikatakan suatu LATTICE jika axioma-axioma berikut dipenuhi, dimana a, b, c adalah sebarang elemen dalam L :

[L1] Hukum Komutatif :

(1a) $a \Lambda b = b \Lambda a$ (1b) $a V b = b V a$

[L2) Hukum Assosiatif :

(2a) $(a \Lambda b) \Lambda c = a \Lambda (b \Lambda c)$ (2b) $(a V b) V c = a V (b V c)$

[L3] Hukum Absorpsi :

(3a) $a \Lambda (a V b) = a$ (3b) $a V (a \Lambda b) = a$

Kadang-kadang kita menyatakan Lattice dengan notasi (L, Λ, V), dimana kita akan menunjukkan operasi-operasi mana yang memenuhi.

Dual dari sebarang pernyataan dalam Lattice (L, Λ , V) didefinisikan sebagaia pernyataan yang diperoleh dengan menukar Λ dan V. Sebagai contoh, dual dari a Λ (b V a) = a V a adalah a V (b Λ a) = a Λ a.

Catatan :

Dual dari setiap axioma dari suatu Lattice juga merupakan axioma sehingga prinsip dualitas dipenuhi. Teorema 5.2 (prinsif duality) : Dual dari sebarang teorema dalam suatu lattice juga merupakan suatu teorema.

Hal ini diikuti berdasarkan kenyataan bahwa Dual suatu teorema dapat dibuktikan dengan menggunakan dual dari masing-masing langkah dari pembuktian teorema awal. Suatu sifat terpenting dari Lattice secara langsung dari Hukum absorpsi. Teorema 5.3 (Hukum Idempoten) :

(i) a Λ a = a

(ii) a V a = a

Bukti dari (i) diperoleh hanya 2 baris :

a Λ a = a Λ (a V (a Λ b)) (menggunakan (3b))

= a (menggunakan (3a))

Bukti dari (ii) sama dengan bukti dari (i) dengan menggunakan prinsip dualitas.

Diberikan suatu Lattice L, kita dapat mendefinisikan suatu urutan parsial pada L sebagai berikut :

a α b jika a Λ b = a

Dengan cara yang sama kita dapat mendefinisikan

a α b jika a V b = b

kita nyatakan hasil-hasil tersebut dalam suatu teorema-teorema 5.4 : misal L suatu Lattice, maka :

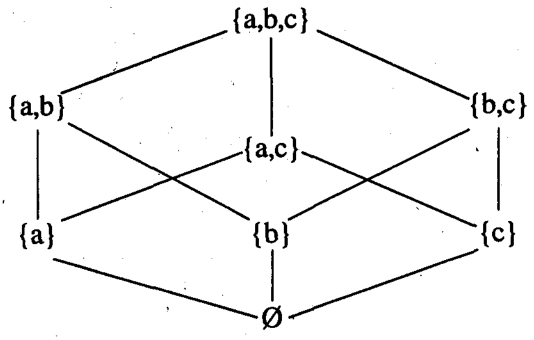
(i) a Λ b = a jika dan hanya jika a V b = b

(ii) relasi a $\underline{\alpha}$ b (didefinisikan dengan a Λ b = a atau a V b = b adalah suatu urutan parsial pada L.

Sekarang kita mempunyai suatu urutan parsial pada sebarang Lattice L, kita dapat menggambarkan L dengan suatu diagram sebagaimana poset-poset secara umum.

Contoh 5.5.

Misal C koleksi dari himpunan-himpunan yang tertutup terhadap operasi/risan dan gabungan. Maka (C, N, U) adalah suatu Lattice. Dalam Lattice, relasi urutan parsial adalah sama dengan relasi himpunan "mengandung". Gambar 5.4. menunjukkan diagram dari Lattice L dari semua sub-sub himpunan dari [a, b, c]



Gambar 5.4

Kita akan tunjukkan bagaimana mendefinisikan suatu urutan parsial pada suatu Lattice L. Teorena berikut menyatakan dimana kita dapat mendefinisikan suatu Lattice pada suatu poset P sedemikian sehingga Lattice akan kembali pada urutan awal pada P.

Teorema 5.5 :

Misal P suatu Poset sedemikian sehingga inf (a, b) dan sup (a, b) ada bentuk sebarang a, b $\in$ P. Dengan memisalkan

$$a \wedge b = \inf(a, b) \text{ dan } a \vee b = \sup(a, b)$$

sehingga kita mempunyai (P, $\wedge$, $\vee$) suatu Lattice selanjutnya urut parsial pada P yang dihasilkan oleh Lattice adalah sama dengan urut parsial awal pada P.

Kebalikan dari teorema di atas juga benar jadi, misal L suatu Lattice dan $\leq$ adalah urut parsial pada L. Makan inf (a, b) dan sup (a, b) ada untuk sebarang pasangan a, b $\in$ L dan Lattice diperoleh dari Poset (L, $\underline{\alpha}$) adalah Lattice awal. Berdasarkan hal tersebut diperoleh :

Definisi Alternatif : Suatu Lattice adalah Poset dimana

$$a \wedge b = \inf(a, b) \text{ dan}$$

$$a \vee b = \sup(a, b)$$

ada untuk sebarang pasangan elemen a dan b.

Pertama-tama kita nyatakan bahwa sebarang himpunan urut Linier adalah suatu Lattice karena inf (a, b) = a dan sup (a, b) = b, dimana a $\leq$ b. Menurut Contoh 5.4. Bilangan-bilangan bulat pos. N dan himpunan Dm (pembagi-pembagi dari m) adalah Lattice dengan relasi dapat dibagi.

Misal M adalah sebarang sub himpunan yang tidak kosong dari suatu lattice L. Sebut M adalah sub lattice dari L jika M itu sendiri merupakan Lattice (dengan operasi sesuai dengan operasi dari L). Kita menyatakan M adalah Sub Lattice dari L jika dan hanya jika M tertutup terhadap operasi $\wedge$ dan $\vee$ dari L. Sebagai contoh himpunan D_m (pembagi-pembagi dari m) adalah sub lattice dari bilangan-bilangan bulat positip N dengan relasi dapat dibagi.

Dua buah Lattice L dan L' dikatakan isomorfis jika terdapat suatu korespondensi satu saru f : L $\rightarrow$ L' sedemikian sehingga f (a $\wedge$ b) = f(a) $\wedge$ f(b) dan f(a $\vee$ b) = f (a) $\vee$ f (b) untuk sebarang elemen a, b dalam L.

5.5. LATTICE YANG TERBATAS

Suatu Lattice L dikatakan mempunyai batas bawah 0 jika untuk sebarang elemen x dalam L berlaku $0 \leq x$. Dengan cara yang sama, L dikatakan mempunyai batas atas I jika untuk sebarang x dalam L, berlaku $x \leq I$. Maka L dikatakan terbatas jika L mempunyai batas bawah 0 & batas atas I sehingga suatu Lattice mempunyai identitas :

$$a \vee I = I, \quad a \wedge I = a, \quad a \vee 0 = a, \; a \wedge 0 = 0$$

untuk sebarang elemen a dalam L.

Bilangan-bilangan bulat non negatif dengan urut

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < \ldots$$

mempunyai batas bawah 0 tetapi tidak mempunyai batas atas. Dengan perkataan lain Lattice P ($\cup$) dari semua sub himpunan-himpunan dari sebarang himpunan semesta $\cup$ adalah suatu Lattice yang terbatas dengan $\cup$ sebagai batas atas & himpunan kosong $\emptyset$ sebagai batas bawah.

Misal L = ($a_1, a_2, \ldots, a_n$) adalah Lattice yang hingga. Maka $a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n$ dan $a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n$ adalah batas atas & bawah dari L, sehingga :

Teorema 5.6.:

Setiap Lattice hingga L adalah terbatas.

5.6. LATTICE DISTRIBUTIF

Suatu Lattice L dikatakan distributif jika untuk sebarang elemen a, b, c dalam L memenuhi [L_4] Hukum distributif :

(4a) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ (4b) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

Jika tidak L dikatakan tidak distributif.

Kita nyatakan prinsip duality pada (4a) dipenuhi jika & hanya jika (4b) dipenuhi. Gambar 5.5 (a) adalah suatu Lattice yang tidak distributif karena

$$a \vee (b \wedge c) = a \vee (0) = a$$

tetapi

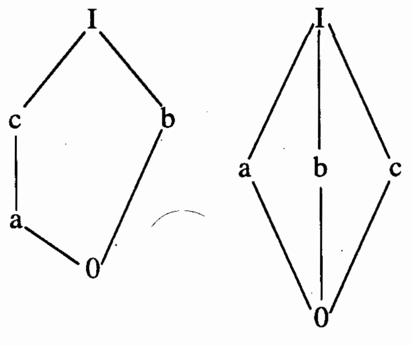
$$((a \vee b) \wedge (a \vee c) = I \wedge c = c.$$

Gambar 5.5 (b) juga Lattice yang tidak distributif. Jelas, kita mempunyai ciri-ciri untuk Lattice tersebut sebagai berikut :

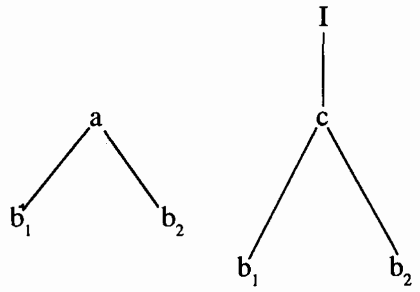
Teorema 5.7 :

Suatu Lattice L adalah tidak distributif jika & hanya jika Lattice tersebut mengandung suatu sub lattice yang isomorfis dengan gambar 5.5 (a) atau (b).

Bukti dari teorema tersebut sudah tercakup dalam buku ini.



Gambar 5.5



Gambar 5.6

Misal L adalah Lattice dengan batas bawah 0 sebuah elemen a dalam L dikatakan join irreducible jika a = xvy berakibat a = x atau a = y. (Bilangan-bilangan prima di bawah operasi perkalian mempunyai sifat seperti itu, jadi jika p = ab maka p = a punya sedikitnya 2 elemen sebelumnya, sebut b_1 & b_2 seperti pada gambar 5.6(a) maka a = b_1 V b_2 dan a bukan join irreducible. Dengan perkataan lain jika a mempunyai sebuah elemen yang sebelumnya unik c, maka a $\neq$ sup $(a_1, b_2) = b_1$ V b_2 untuk sebarang elemen lain b_1 & b_2, karena (akan terletak di antara b & a seperti pada gambar 6.6(b) dengan perkataan lain, a $\neq$ 0 adalah join irreducible jika & hanya jika mempunyai sebuah elemen unik sebelumnya. Elemen-elemen tersebut yang didahului 0, dikatakan Atom adalah join irreducible yang lain. Sebagai contoh, elemen c pada gambar 5.6 (b) adalah bukan suatu atom tetapi join irreducible karena a adalah hanya sebuah elemen sebelumnya.

Jika sebuah elemen a dalam Lattice L yang hingga a adalah bukan join irreducible maka kita dapat menuliskan $a = b_1$ V b_2. Maka kita dapat menulis b_1 & b_2 sebagai gabungan dari elemen-elemen lain jika elemen-elemen bukan join irreducible dan seterusnya. Karena L hingga maka dapat dituliskan.

$$a = d_1 \vee d_2 \vee \ldots \vee d_n$$

dimana d_i adalah join irreducible.

Jika d_i mendahului d_j maka d_i V $d_j = d_j$; sehingga kita dapat menghilangkan di dari pernyataan tersebut. Dengan perkataan lain, kita dapat mengasumsikan bahwa d tersebut adalah irredundant yaitu tidak ada d mendahului d lainnya. Dalam pernyataan tidak perlu unik, contoh I = a V b dan I = b V c pada kedua lattice pada gambar 5.5. Sekarang kita nyatakan teorema utama pada bab ini (dibuktikan pada soal 5.15).

Teorema 5.8 :

Misal L suatu Lattice distributif maka setiap a dalam L dapat dituliskan secara unik (kecuali untuk urutan) sebagai gabungan dari elemen irredundant join irreducible. Sebenarnya teorema tersebut dapat diperluas untuk Lattice dengan panjang hingga, yaitu dimana sub-sub himpunan terurut Linier adalah hingga (soal 5.10 diberikan Lattice yang tak hingga dengan panjang hingga).

5.7. LATTICE BERKOMPLEMEN

Misal L adalah Lattice yang terbatas dengan batas bawah 0 & batas atas I. Misal a sebarang elemen dr L. Sebuah elemen x dalam L dikatakan Komplemen dari a jika

$$a \vee x = I \text{ dan } a \wedge x = O$$

Komplemen tidak perlu ada & tidak perlu unik. Sebagai contoh elemen a & c keduanya adalah komplemen dari b pada gambar 5.5 (a), juga elemen y, z & u dalam chain pada gambar 5.1. tidak mempunyai komplemen sehingga diperoleh akibat sebagai berikut :

Teorema 5.9. :

Misal L adalah Lattice distributif maka komplemen ada & unik.

Bukti :

Misal x & y adalah komplemen dari sebarang elemen a dalam L maka

$$a \vee x = I,\ a \vee y = I,\ a \wedge x = O,\ a \wedge y = O$$

Dengan menggunakan sifat distributif,

$$x = x \vee O = y \vee (a \wedge y) = (x \vee a) \wedge (a \wedge y) = I \wedge (x \vee y) = x \vee y$$

Dengan cara yang sama

$$\begin{aligned} y = y \vee O &= y \vee (a \wedge x) = (y \vee a) \wedge (y \vee x) \\ &= I \wedge (y \vee x) = y \vee x \end{aligned}$$

Jadi

$$x = x \vee y = y \vee x = y$$

teorema terbukti.

Suatu Lattice L dikatakan berkomplemen tidak L terbatas & setiap elemen dalam L mempunyai Komplemen. Gambar 5.5.(b) menunjukkan suatu Lattice berkomplemen dimana komplemen-komplemennya adalah uni. Dengan perkataan lain, Lattice P ($\cup$) dari semua sub-sub himpunan dari himpunan semesta $\cup$ adalah berkomplemen & setiap sub himpunan A dan $\cup$ mempunyai komplemen yang unik $A^c = \cup \backslash A$.

Teorema 5.10 :

Misal L adalah suatu Lattice berkomplemen dengan unik komplement. Maka elemen join Irreducibel dari L selain O adalah Atom-atomnya.

Gabungan teorema tersebut dengan teorema 5.8 & 5.9. akan diperoleh akibat yang penting.

Teorema 5.11 :

Misal L adalah Lattice distributif berkomplemen & hingga. Maka setiap elemen a dalam L adalah gabungan dari himpunan atom-atom yang unik.

Catatan :

Beberapa buku mendefinisikan suatu Lattice L berkomplemen jika setiap a dalam L mempunyai sebuah komplemen yang unik. Teorema 5.10 dinyatakan secara berbeda.

PENYELESAIAN SOAL-SOAL

Himpunan-himpunan terurut & sub-sub himpunan.

5.1. Misal bilangan-bilangan bulat positif N = [1, 2, 3, . . .] diurutkan dengan relasi dapat dibagi (lihat contoh 5.1(b).

(1) Isilah simbol yang tepat, <, > atau || (tidak dapat dibandingkan) antara setiap pasangan dari bilangan-bilangan :

(a) 2 . . . 8 (b) 18 . . . 24 (c) 9 . . . 3 (d) 5 . . . 15

(2) Nyatakan apakah masing-masing sub-sub himpunan dari N adalah terurut secara linier.

(a) [24, 2, 6] (b) [3,, 15, 5] (c) 15, 5, 30]

(d) [2, 8, 32, 4] (e) [1, 2, 3, . . .] (f) [7].

Jawab :

(1) (a) karena 2 membagi 8, 2 mendahului 8, jadi $2 < 8$

(b) 18 bukan membagi 24 & 24 tidak membagi 18, jadi $18 \parallel 24$

(c) karena 9 dapat dibagi oleh 3, $9 > 3$

(d) karena 5 membagi 15, $5 < 15$.

(2) (a) karena 2 membagi 6 yang juga membagi 24, maka himpunan [24, 2, 6] adalah terurut linier.

(b) karena 3 & 5 tidak dapat dibandingkan, maka himpunan [3, 15, 5] bukan terurut linier.

(c) Himpunan [15, 5, 30] adalah terurut Linier karena 5 membagi 15 yang membagi 30.

(d) Himpunan [2, 8, 32, 4] adalah terurut linier karena $2 < 4 < 8 < 32$.

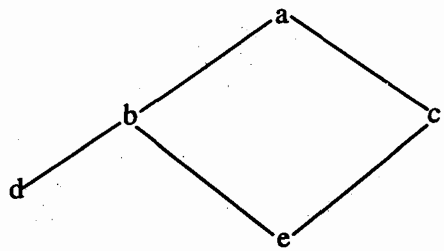
(e) Himpunan [1, 2, 3, . . .] bukan terurut linier karena 2 & 3 tidak dapat dibandingkan.

(f) Sebarang himpunan yang terdiri dari satu elemen adalah terurut linier.

5.2. Misal V = [a, b, c, d, e] terurut menurut diagram pada gambar 5.7. Sisipkan simbol yang tepat, <, > atau ‖(tidak dapat dibandingkan) antara setiap pasangan dari elemen-elemen :

(a) a . . . c (b) d . . . a

(b) b . . . c (c) c . . . d



Gambar 5.7

Jawab :

(a) karena terdapat suatu path antara e ke c ke a : e mendahului a
jadi a > e

(b) tidak ada path dari b ke c
atau sebaliknya, jadi b || c

(c) Ada sebuah path dari d ke b ke a; jadi d < a

(d) Baik d < c maupun c < d keduanya tidak dipenuhi, jadi c || d.

5.3. Misal N x N terurut secara Lexiocographical. Sisipkan simbol yang tepat, <atau>, antara setiap pasangan elemen dari N x N sebagai berikut :

(a) (5, 78) . . . (7, 1)
(b) (4, 6) . . . (4, 2)
(c) (5, 5) . . . (4, 23)
(d) (1, 3) . . . (1, 2)

Catatan : Menurut urutan secara Lexicographical (a, b) < (a', b') jika a < a' atau jika a = a' tetapi b < b'

Jawab :

(a) (5, 78) < (7, 1) karena 5 < 7
(b) (4, 6) > (4, 2) karena 4 = 4 tetapi 6 > 2
(c) (5, 5) < (4, 23) karena 5 > 4
(d) (1, 3) > (1, 2) karena 1 = 1 tetapi 3 > 2

5.4. Misal A = [2, 3, 4, . . .] = N\[1] terurut dengan "x membagi y"

(a) Carilah semua elemen minimal
(b) Carilah semua elemen maximal

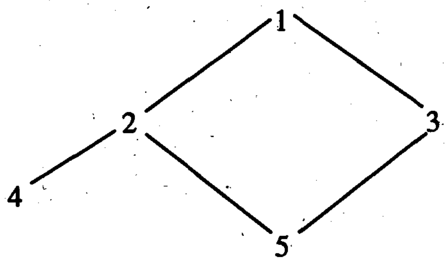
Jawab :

(a) Jika p adalah bilangan prima, maka hanya p membagi p (karena $1 \notin A$): Jadi semua bilangan-bilangan prima adalah elemen minimal selanjutnya jika $a \in A$ bukan bilangan prima maka terdapat bilangan bulat $b \in A$ lainnya dimana a membagi b.

Jadi hanya bilangan prima yang merupakan elemen minimal

(b) Tidak terdapat elemen maximal dalam a karena untuk sebarang elemen a $\in$ A, a membagi b sebagai contoh (a)

5.5. Misal B = [1, 2, 3, 4, 5] terurut dengan diagram seperti pada gambar 5.8
(a) Carilah semua elemen minimal dari B
(b) Carilah semua elemen maximal dari B.

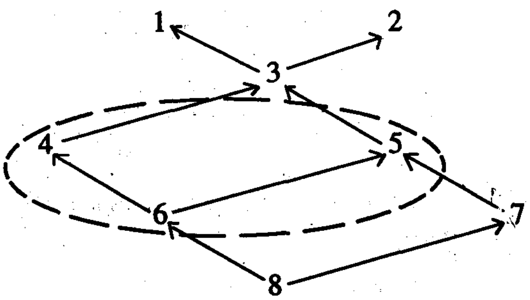


Gambar 5.8

Jawab :

(a) Tidak terdapat elemen yang benar-benar sesudah 4 & 5 jadi 4 & 5 adalah elemen minimal dari B
(b) Elemen Maximal dari B adalah 1.

5.6. Misal W = [1, 2, . . . , 7, 9] terurut seperti pada gambar 5.9. Misal sub himpunan V = [4, 5, 6] dari W.
(a) Carilah himpunan dari batas atas V
(b) Carilah himpunan batas bawah dari V
(c) Apakah sup (V) ada
(d) Apakah Inf (V) ada.



Gambar 5.9

Jawab :

(a) Setiap elemen dalam [1, 2, 3] & hanya elemen-elemen tersebut yang didahului setiap elemen dalam V jadi [1, 2, 3] merupakan himpunan batas atas dari V.

(b) Hanya 6 & 8 mendahului setiap elemen dari V jadi [6, 8] adalah himpunan batas bawah dari V. Perlu dicatat bahwa 7 bukan batas bawah dari V karena dari V, maka Inf (V) = 6. Dalam hal ini 6 elemen dari V,

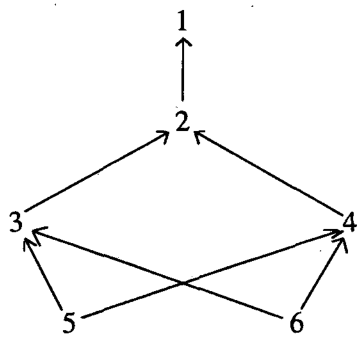
5.7. Misal D = [1, 2, 3, 4, 5, 6] terurut seperti pada gambar 5.10. Misal sub himpunan E = [2, 3, 4] dari D.

(a) Carilah batas atas dari E

(b) Carilah batas bawah dari E

(c) Apakah sup (E) ada ?

(d) Apakah Inf (E) ada ?



Gambat 5.10

Jawab :

(a) 1 & 2 dan tidak ada elemen yang lain yang didahului setiap elemen dari E. Jadi 1 & 2 adalah batas atas dari E.

(b) Hanya 5 & 6 mendahului setiap elemen dari E jadi 5 & 6 adalah batas bawah dari E.

(c) Karena 2 mendahului batas atas dari E, maka Sup (E) = 2 tidak terdapat batas bawah yang didahului semua batas bawah : Jadi Inf (E) tidak ada.

5.8. Buktikan Teorema 5.1 : Terdapat suatu enumerasi Konsisten untuk sebarang poset yang hingga.

Buktinya dengan induksi banyaknya elemen dalam S. Jika S = [a] hanya terdiri dari satu elemen maka jelas $f : S \to N$ didefinisikan dengan $f(s) = 1$ adalah suatu enumerasi konsisten dari S. Sekarang misal S mempunyai elemen $n > 1$ dan teorema dipenuhi untuk poset-poset dengan banyak elemen lebih kecil dari n. Misal $b \in S$ & misal sub himpunan T = S/[b] dari S. Karena T mempunyai n - 1 elemen. Maka terdapat suatu enumerasi konsisten $g : T \to N$ dari T. Maka fungsi $h : T \to N$ didefinisikan dengan $h(x) = 2\,g(x)$ juga suatu enumerasi konsisten. (Buktikan !). Perlu dicatat : image dari h hanya mengandung bilangan genap. Misal $f : S \to N$

$$f(x) = h(x) \text{ jika } x \neq b$$

$$f(b) = \begin{cases} f(a) + 1 & \text{Jika } a < b \\ 1 & \text{Jika tidak ada elemen yang mendahului } b. \end{cases}$$

Maka f adalah suatu enumerasi konsisten dari S.

LATTICE

5.9. Tuliskan dual dari pernyataan-pernyataan berikut :

(a) $(a \wedge b) \vee c = (b \vee c) \wedge (c \vee a)$

(b) $(a \wedge b) \vee a = a \wedge (b \vee a)$

Jawab :

Ganti tanda V dan Λ & tanda Λ dengan V untuk setiap pernyataan sehingga diperoleh dual dari pernyataan :

(a) $(a \vee b) \wedge c = (b \wedge c) \vee (c \wedge a)$

(b) $(a \vee b) \wedge a = a \vee (b \wedge a)$.

5.10. Diberikan sebuah contoh dari Lattice L yang tak hingga dengan panjang hingga.

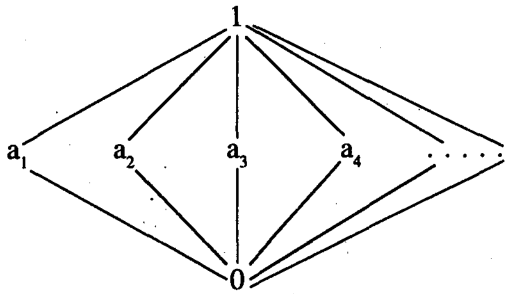
Misal $L = [0, 1, a_1, a_2, a_3, \ldots]$

dan misal urutan seperti pada Gambar 5.11 jadi untuk setiap $n \in N$

$O < a_n < 1$

Maka L mempunyai panjang hingga

Karena L tidak mempunyai sub himpunan terurut Linier yang tak hingga.



Gambar 5.11

5.11. Buktikan Teorema 5.4. : Misal L suatu Lattice maka

(i) $a \wedge b = a$ jika & hanya jika $a \vee b = b$

(ii) relasi $a \leq b$ (didefinisikan dengan $a \wedge b = a$ atau $a \vee b = b$) adalah suatu urutan parsial pada L.

Bukti :

(i) Misal $a \wedge b = a$. Menggunakan hukum absorpsi pada langkah pertama :
$b = b \vee (b \wedge a) = b \vee (a \wedge b) = b \vee a = a \vee b$.

Sekarang misal $a \vee b = b$.
Dengan menggunakan hukum absorpsi pada langkah pertama.

$a = a \wedge (a \vee b) = a \wedge b$

Jadi $a \wedge b = a$ Jika & hanya jika $a \vee b = b$

(ii) Misal sebarang a dalam L, dengan hukum idempoten $a \wedge a = a$. Jadi $a \ \underline{\alpha}\ a$ dan relasi $\underline{\alpha}$ adalah refleksif.

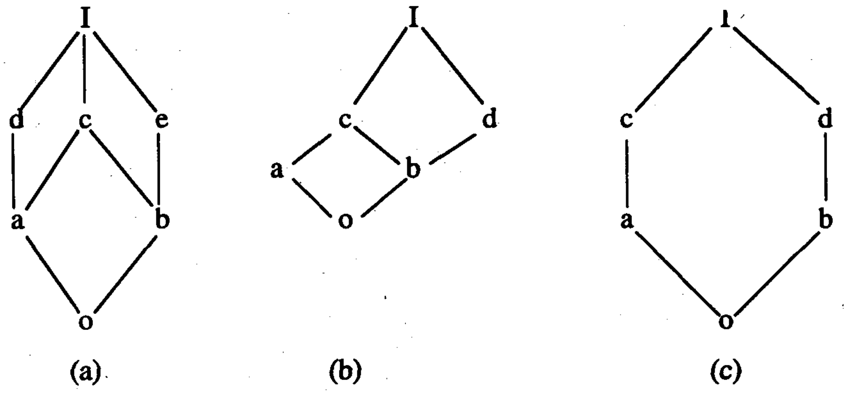
Misal a $\underline{\alpha}$ b dan b $\underline{\alpha}$ a maka a Λ b = a & b Λ a = b, oleh karena itu a = a $\underline{\alpha}$ b = b Λ a = b. Jadi relasi $\underline{\alpha}$ adalah anti simetris.

Terakhir, Misal a $\underline{\alpha}$ b & b $\underline{\alpha}$ c maka a Λ a = b, a & b Λ c = b. Jadi a Λ c = (a Λ b) Λ c = a Λ (b Λ c) = a Λ b = a.

sehingga a $\underline{\alpha}$ c jadi relasi $\underline{\alpha}$ adalah transitif.

Berdasarkan ke 3 hal tersebut, relasi $\underline{\alpha}$ adalah urut parsial pada L.

5.12. Mana dari poset-poset pada gambar 5.12 yang merupakan Lattice ?



Gambar 5.12

Suatu Poset merupakan Lattice jika hanya jika sup (x, y) & Inf (x, y) ada untuk setiap pasangan x, y dalam himpunan tersebut. Hanya (c) yang bukan Lattice karena [a, b] mempunyai 3 batas atas c, & I, dan tidak ada satupun dari ke 3 batas atas tersebut yang mendahului 2 lainnya, jadi sup (a, b) tidak ada.

5.13. Misal Lattice L pada gambar 5.12 (a)

(a) Manakah Elemen-elemen yang tidak nol yang merupakan join irreducable?

(b) Elemen-elemen mana yang merupakan atom ?

(c) Tentukan yang merupakan sub lattice

dari L : L_1 = [0, a, b, I] L_3 = [a, c, d, I]

L : L_2 = [0, a, e, I] L_4 = [0, c, d, I]

(d) Apakah L distributif ?

(e) Carilah komplemen-komplemen jika ada untuk elemen-elemen a, b & c

(f) Apakah L Lattice berkomplemen ?

Jawab :

(a) Elemen-elemen yang tidak nol dengan sebuah elemen sebelumnya yang unik adalah join irreducible. Jadi a, b dan e adalah join irrreducible.

(b) Elemen-elemen yang didahului 0 adalah Atom. Jadi a & b adalah atom

(c) Sub himpunan L adalah suatu sub Lattice jika tertutup terhadap operasi $\wedge$ & V. L_1 bukan sub lattice karena a V b = c, dimana c bukan elemen L_1.

Himpunan L_4 bukan sub lattice karena c $\wedge$ d = a, tetapi a bukan elemen L_4.

Dua himpunan lainnya L_2 & L_3 adalah sub lattice.

(d) L bukan distributif karena M = [o, a, d, e, I] adalah suatu sub lattice yang isomorfis dengan lattice tidk distributif pada gambar 5.5(a)

(e) Karena a $\wedge$ e = 0 dan a V e = I, jadi a & e adalah komplemen. Demikian pula b & d adalah komplemen. Tetapi c tidak mempunyai komplemen.

(f) L bukan lattice berkomplemen karena c tidak mempunyai komplemen.

5.14. Misal M lattice pada gambar 5.12 (b)

(a) Carilah elemen join irreducible yang tidak nol dan atom dari M

(b) Apakah M distributif ?

(c) Apakah M berkomplemen ?

Jawab :

(a) Elemen-elemen yang tidak nol dengan sebuah elemen sebelumnya yang unik adalah a & b dan juga karena elemen yang unik sebelumnya adalah nol maka a & b juga merupakan atom.

(b) M distributif karena M tak mempunyai sub lattice yang isomorfis dengan salah satu lattice pada gambar 5.5.

(c) M tidak berkomplemen karena b tidak mempunyai komplemen, perlu diketahui a hanya memenuhi untuk $b \Lambda a = 0$ tetapi $b V a = c \neq 1$.

5.15. Buktikan teorema 5.8. : Misal L lattice distributif yang hingga, maka setiap a dalam L dapat dituliskan secara unik (kecuali untuk urutan sebagai gabungan dari elemen-elemen irredundant join irreducible.

Bukti :

Karena L hingga kita dapat menuliskan a sebagai gabungan dari elemen-elemen irredundant joint irreducible seperti yang dibicarakan pada bagian 5.6. Jika kita perlu membuktikan keunikannya.

Misal $a = b_1 V b_2 V \ldots V br = c_1 V c_2 V \ldots V c_s$ dimana bi adalah irredundant dan join irreducible dan ci adalah irredundant join irreducible untuk sebarang i berlaku.

$bi \ \underline{\alpha}\ (b_1 V b_2 V \ldots v\ br) = (c_1 V c_2 V \ldots V c_s)$

Jadi

$bi = bi \Lambda (c_1 V c_2 V \ldots Vc_s) = (bi \Lambda c_1) V (bi \Lambda c_2) V \ldots (bi \Lambda c_s)$

Karena bi adalah joint irreducible, maka terdapat j sedemikian sehingga $bi = bi \Lambda cj$, dan juga $bi \ \underline{\alpha}\ cj$. Menurut pernyataan similar, untuk cj terdapat bk sedemikian sehingga $cj \ \underline{\alpha}\ bk$. Sehingga $bi \ \underline{\alpha}\ cj \ \underline{\alpha}\ bk$ dengan $bi = cj = bk$ karena bi adalah irredundant. Berdasarkan di atas, bi & ci mungkin berpasangan jadi pernyataan untuk a secara unik kecuali untuk urutan.

5.16. Buktikan teorema 5.10 : Misal L lattice berkoplemen dengan komplemen yang unik. Maka elemen-elemen join irreducible dari L selain daripada 0 adalah atom.

Bukti :

Misal a adalah joint irreducible dan bukan atom maka a mempunyai sebuah elemen sebelumnya yang unik $b \neq 0$. Misal b' adalah komplemen dari b. Karena $b \neq 0$ maka $b' \neq I$. Jika a mendahului b', maka b $\underline{\alpha}$ a $\underline{\alpha}$ b' dan juga $b \wedge b' = b'$, hal tersebut mungkin karena $b \wedge b1 = I$, jadi a tidak mendahului b' dan juga $a \wedge b'$ pasti benar-benar mendahului a. Karena b adalah elemen unik sebelum a demikian pula $a \wedge b'$ mendahului b seperti pada gambar 5.13. Tetapi $a \wedge b'$ mendahului b'.

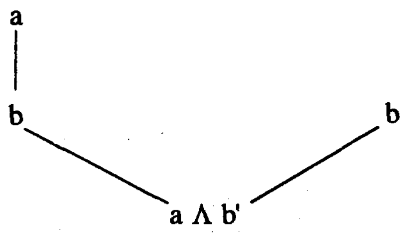
Sehingga $\qquad a \wedge b' \leq \text{Inf}\,(b, b') = b \wedge b' = 0$

Jadi $a \wedge b' = 0$. Karena $a \vee b = a$,

demikian juga

$a \vee b' = (a \vee b) \vee b' = a \vee (b \vee b') = a \vee I = I$

Akibatnya b' adalah komplemen dari a karena komplemen-komplemennya unik, a = b. Hal ini berlawanan dengan asumsi bahwa b adalah sebuah elemen sebelum a. Jadi join irreducible dari L adalah atom

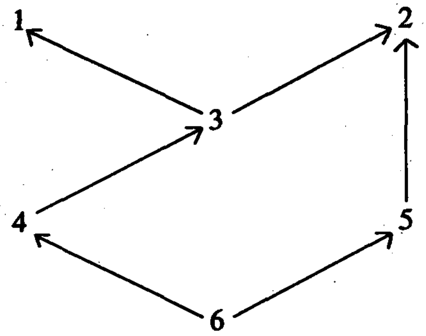


Gambar 5.13

SOAL LATIHAN

Himpunan-himpunan terurut & Sub Himpunan

5.17. Misal V = [1, 2, 3, 4, 5, 6] terurut seperti pad gambar 5.14.



Gambar 5.14

(a) Carilah semua elemen minimal dan maximal dari V.

(b) Carilah semua sub-sub himpunan dari Vnya terurut secara linier, yang masing-masing mengandung paling sedikit 3 elemen.

5.18. Misal M = [2, 3, 4, . . .] dan misal M x M terurut sebagai berikut :

$(a, b) \leq (c, d)$

Jika a membagi c dan jika b lebih kecil atau sama dengan d. Carilah semua elemen minimal dan maximal dari M ?

5.19. Misal A = (N, ≤) bilangan bulat positif dengan urutan seperti biasa, misal B = (N, ≥). Bilangan bulat positif dengan urutan invers dan Misal A x B terurut secara Lexicagraphical. Sisipkan simbol yang tepat, α atau ɒ, antara setiap pasangan elemen-elemen A x B sebagai berikut :

(a) (1, 3) . . . . (1, 5) (b) (4, 1) . . . . (2, 18)

(c) (4, 30) . . . (4, 4) (d) (2, 2) . . . . (15, 15)

5.20. Misal W = [1, 2, . . . , 7, 8] terurut seperti gambar 5.15

(1) Misal sub himpunan A = [4, 5, 7] dari W

(a) Carilah himpunan batas atas dari A

(b) Carilah himpunan batas bawah dari A

(c) Apakah sup (A) ada ?

(d) Apakah Inf (A) ada ?

(2) Misal sub himpunan B = [2, 3, 6] dari W

(a) Carilah himpunan batas atas dari B

(b) Carilah himpunan batas bawah dari B

(c) Apakah sup (B) ada ?

(d) Apakah Inf (B) ada ?

(3) Misal sub himpunan C = [1, 2, 4, 7] dari W

(a) Carilah himpunan batas atas dari C

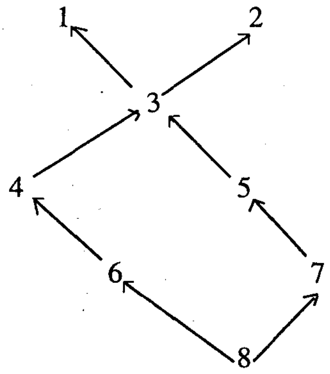
(b) Carilah himpunan batas bawah dari C

(c) Apakah Sup (c) ada ?

(d) Apakah Inf (c) ada ?

(4) Carilah banyaknya sub himpunan dari W yang terurut secara linier dengan

(a) 5 elemen (b) 6 elemen



Gambar 5.15.

5.21. Gambarkan diagram partisi dari m (lihat contoh 5.3) dimana (a) m = 4 (b) m = 6

5.22. Misal Dm menyatakan pembagi positif dari m terurut dengan relasi dapat dibagi. Gambarkan diagram dari

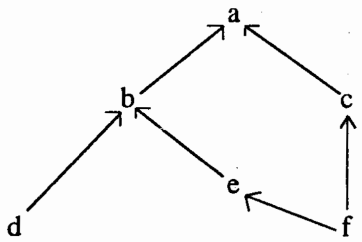
(a) D_{12} (b) D_{15}

(c) D_{16} (d) D_{17}

5.23. Misal B = [a, b, c, d, e, f] terurut seperti pada gambar 5.16.

(a) Carilah elemen minimal dan maximal dari B.

(b) Tuliskan dua buah dan carilah banyaknya enumerasi konsisten dari B ke himpunan [1, 2, 3, 4, 5, 6]



Gambar 5.16.

5.24. Misal S = [a, b, c, d, e, f] adalah poset dan misal ada 6 pasangan dari elemen sedemikian sehingga elemen pertama yang mendahului elemen ke 2 :

$f \ll a,\ f \ll d,\ e \ll b,\ c \ll f,\ e \ll c,\ b \ll f$

(a) Carilah semua elemen maximal dari S

(b) Carilah semua elemen minimal dari S

(c) Carilah semua pasangan dari elemen-elemen jika ada, mana yang tidak dapat dibandingkan.

LATTICE

5.25. Misal Lattice L pada gambar 5.17

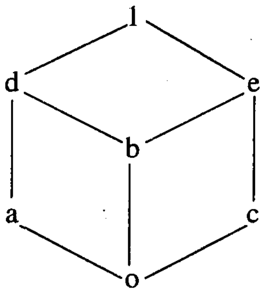
(a) Carilah semua sub Lattice dengan 5 elemen

(b) Carilah semua (i) elemen join irreducible (ii) atom-atom

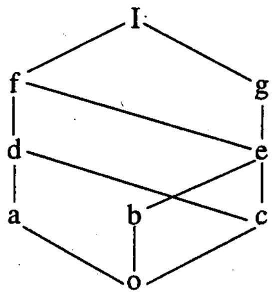
(c) Carilah komplemen dari a dan b jika ada

(d) Apakah L distributif

(e) Apakah L berkomplemen



Gambar 5.17



Gambar 5.18

5.26. Misal M Lattice pada gambar 5.18.

(a) Carilah elemen join irreducible

(b) Carilah atom-atom

(c) Carilah komplemen dari a dan b jika ada

(d) Nyatakan setiap x dalam M sebagai gabungan darielemen-elemen irredundant & join irreducible

(e) Apakah M distributif dan berkomplen ?

5.27. Misal Lattice D_{60} = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12 ,15, 20, 30, 60] pembagi dari 60 terurut dengan relasi dapat dibagi

(a) Gambarkan diagram D_{60}

(b) Mana elemen yang join irreducible ? Atom ?

(c) Carilah komplemen dari 2 dan 10 jika ada

(d) Nyatakan setiap banyaknya x sebagai gabungan dari minimum banyaknya elemen-elemen irredundant join irreducible.

5.28. Misal N Lattice dari bilangan bulat positif terurut dengan relasi dapat dibagi

(a) elemen-elemen mana yang merupakan join irreducible

(b) elemen-elemen mana yang merupakan atom ?

5.29. Tunjukkan bahwa hukum distributif lemah (kurang kuat) untuk sebarang lattice :

(a) $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

(b) $a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

5.30. Gunakan Teorema 5.7. untuk membuktikan

(a) Setiap himpunan terurut secara linier adalah suatu Lattice distributif

(b) Setiap sub Lattice dari suatu Lattice distributif adalah distributif pula.

5.31. Suatu Lattice N dikatakan modular jika $a \leq c$ berlaku hukum $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$

(a) Buktikan setiap Lattice distributif adalah modular

(b) Jelaskan bahwa Lattice yang tidak distributif pada gambar 5.5. (b) adalah modular; sehingga kebalikan dari (a) adalah tidak benar.

(c) Buktikan bahwa Lattice yang tidak distributif pada gambar 5.5. (a) adalah tidak modular. (sebenarnya dapat dibuktikan bahwa setiap Lattice yang tidak modular mengandung suatu sub Lattice yang isomorfis dengan gambar 5.5. (a)

5.32. Sebuah elemen a dalam Lattice L dikatakan meet irreducible jika $a = x \wedge y$ berakibat $a = x$ atau $a = y$. Carilah semua elemen meet irreducible pada

(a) Gambar 5.17 (b) Gambar 5.18 (c) D_{60} (lihat soal 5.27)

5.33. Misal R suatu ring. Misal L kumpulan dari semua ideal 2 dari R. Untuk sebarang ideal J & K dari R didefinisikan

$J \vee K = J + K$ dan $J \wedge K = J \wedge K$

Buktikan bahwa L adalah Lattice yang terbatas

5.34. Misal S = [1, 2, 3, 4] 3 partisi dari S adalah :

$P_1 = (1, 2, 3, 4) = [[1, 2], [3], [4]]$, $P_2 = [1, 2, 3, 4]$

$P_3 = [1, 3, 2, 4]$

(a) Carilah 9 partisi yang lain dari S.

(b) Misal L koleksi dari 12 partisi dari S diurutkan secara refine ment yaitu $P_i \underline{\alpha} P_j$ jika setiap cell dari P_i adalah sub himpunan dari suatu cell P_j. Contoh $P_1 \underline{\alpha} P_2$ tetapi P_2 & P_3 tidak dapat dibandingkan. Tunjukkan bahwa L adalah Lattice yang terbatas dan gambarkan diagramnya.

SOAL-SOAL PROGRAM KOMPUTER

Misal S = [1. 2. 3. 4. 5. 6] adalah terurut secara partial dengan relasi mendahului $\ll$ dimana $\ll$ mengandung 6 elemen. Misal $\ll$ adalah dipunch pada suatu bungkus dari 6 kartu dimana setiap kartu mengandung sebuah elemen dari $\ll$

5.35. Tuliskan program untuk mencetak

(a) Semua elemen maximal dari S.

(b) Semua elemen minimal dari S.

5.36. Tuliskan program yang menentukan apakah $m \alpha n$ atau tidak untuk sebarang m, n dalam S.

5.37. Tuliskan program untuk mencetak suatu enumerasi yang konsisten dari S ke [1, 2, . . . , 6]. Ujilah ke 3 program di atas dengan data sebagai berikut :

(i) $3 \ll 2, 6 \ll 4, 2 \ll 5, 3 \ll 1, 4 \ll 5, 6 \ll 1$

(ii) $2 \ll 5, 3 \ll 6, 5 \ll 4, 5 \ll 1, 2 \ll 3, 5 \ll 6$

(iii) $6 \ll 1, 6 \ll 4, 5 \ll 2, 3 \ll 6, 5 \ll 3, 2 \ll 6$

5.38. Tuliskan sub program LGCD sedemikian sehingga LGCD (M; N) dapat menentukan pembagi terbesar M dan N, dan sub program L CM sedemikian sehingga LCM (M, N) dapat menentukan perkalian terkecil dari M dan N.

JAWABAN DARI SOAL-SOAL

5.17. (a) 6 adalah minimal dan 1 & 2 adalah maximal.

(b) [1, 3, 4], [1, 3, 6], [2, 3, 4], [2, 3, 6], [2, 5, 6].

5.18. Sebarang pasangan (p,2) dimana p adalah bilangan prima adalah elemen minimal. Tidak ada elemen maximal.

5.19. (a) (1, 3) ɒ (1, 5) (b) (4, 1) ɒ (2, 18)

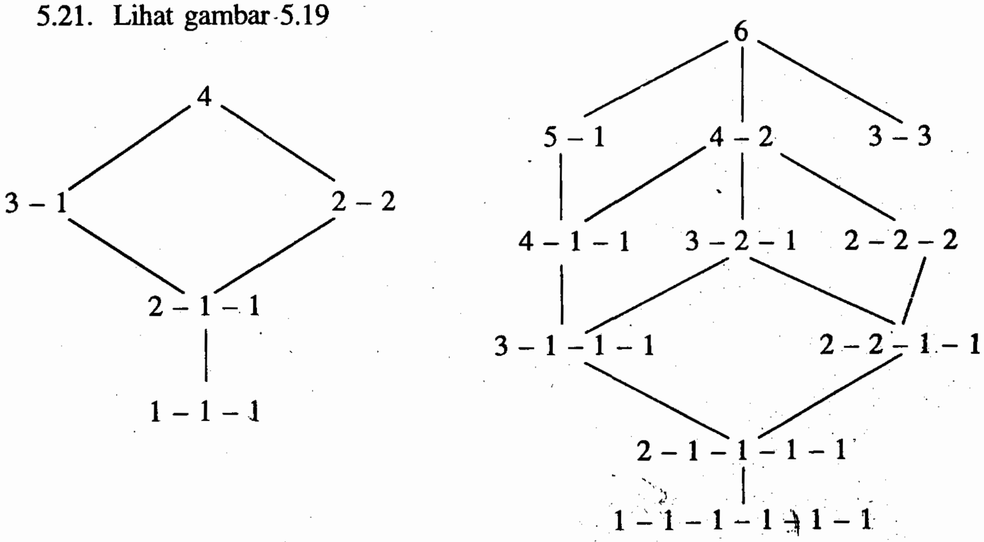
(c) (4, 30) α (4, 4) (d) (2, 2) α (15, 15)

5.20. (1) (a) [1, 2, 3] (b) [8] (c) sup (A) = 3 (d) Inf (A) = 8

(2) (a) [2] (b) [6, 8] (c) sup (B) = 2 (d) Inf (B) = 6

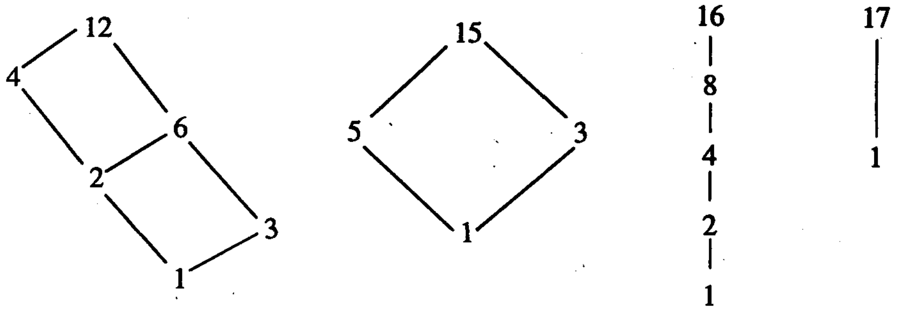
(3) (a) ø, tidak ada batas atas, (b) [8] (c) Tidak (d) Inf (C) = 8

5.21. Lihat gambar 5.19



Gambar 5.19

5.22. Lihat gambar 5.20



(a) (b) (c) (d)

5.23. (a) a adalah maximal dan d & f minimal

(b) Ada 11, yaitu : dfebca, dfecba, dfceba, fdebca, fdecba. fdceba, fedbca, fedcba,fcdeba. fecdba, fcedba.

5.24. (a) A & d (b) e (c) (b,c), (a, d)

5.25. (a) Ada 6 : OabdI, OacdI, OadeI, ObceI, OaceI, OcdeI.

(b) (i) a, b, c, O. (ii) (a, b, c)

(c) c & e adalah komplemen dari a

b tidak mempunyai komplemen

(d) Tidak. Tidak.

5.26. (a) a, b, c, g, O

(b) a, b, c

(c) g adalah komplemen yang unik dari a. Tidak ada komplemen dari b.

(d) I = a V g, f = a V b = a V c, e = b V c, d = a V c

Elemen-elemen lain adalah join irreducible

(e) Tidak. Tidak.

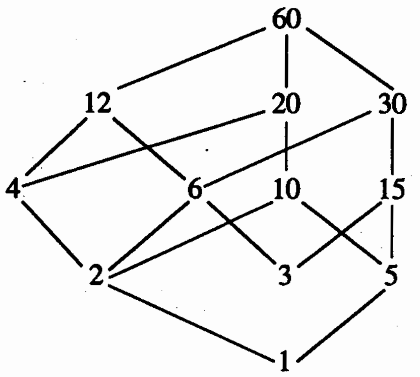
5.27. (a) Lihat gambar 5.21.

(b) 1, 2, 3, 4, 5. Atom-atomnya adalah 2, 3, dan 5

(c) 2 tidak mempunyai komplemen, 3 adalah komplemen dari 10

(d) $60 = 4 \vee 3 \vee 5$, $30 = 2 \vee 3 \vee 5$, $20 = 4 \vee 5$,

$15 = 3 \vee 5$, $12 = 3 \vee 4$, $10 = 2 \vee 5$, $6 = 2 \vee 3$



Gambar 5.21

5.28. (a) Power dari bilangan-bilangan prima dan 1

(b) Bilangan prima

5.31. (a) Jika $a \leq c$ maka $a \vee c = c$,

Jadi $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) = (a \vee b) \wedge c$

(b) $a \leq c$, Tetapi $a \vee (b \wedge c) = a \vee O = a$ dan

$(a \vee b) \wedge c = I \wedge C = c$; Jadi $a \vee (b \wedge c) \neq (a \vee b) \wedge c$

5.32. Secara geometris elemen $a \neq 1$ adalah meet irreducible jika & hanya jika a mempunyai hanya sebuah elemen sesudahnya.

(a) a, c, d, e, I (b) a, b, d, f, g, (c) 4, 6, 10, 12, 15, 60

5.33. (a) [1, 2, 3, 4], (1, 4, 2, 3], [1, 3, 2, 4], [1, 4, 2, 3],

[1, 2, 3, 4], [1, 2, 4, 3], [1, 3, 4, 2], [2, 3, 4, 1], [1, 2, 3, 4].

CONTOH PROGRAM

```
10 REM PROGRAM relasi parsial order
20 DIM A$(50),B$(50),D$(50)
30 CLS:PRINT"MASUKKAN ANGGOTA RELASI BERUPA
   PASANGAN x, y"
40 PRINT"KALAU SELESAI,TEKAN space,space enter"
50 N1=1
60 INPUT A$(N1),B$(N1)
70 IF A$(N1)=""THEN N1=N1:GOTO 90
80 N1=N1+1:GOTO 60
90 REM memeriksa refleksif
100 ND=0
110 FOR K=1 TO N1
120 FOR L=K+1 TO N1
130 IF A$(K)=A$(L) THEN 160
140 NEXT L
150 ND=ND+1:D$(ND)=A$(K)
160 NEXT K
170 FOR K= 1 TO ND
180 FOR L=1 TO N1
190 IF A$(L)<>D$(K) THEN 210
200 IF A$(L)=B$(L) THEN 230
210 NEXT L
220 RF=0:GOTO 250
230 NEXT K
240 RF=1
250 REM memeriksa antisimetris
260 FOR K= 1 TO N1
270 FOR L= 1 TO N1
280 IF A$(L)=B$(K) AND B$(L)=A$(K) THEN 310
290 NEXT L
300 ASI=1:GOTO 340
310 IF A$(K)<>B$(K) THEN 330
320 NEXT K
330 ASI=0
340 REM memeriksa transitif
350 FOR K=1 TO N1
360 FOR L=1 TO N1
```

```
[illegible] IF AS[illegible] THEN 420
[illegible] FOR M=1 TO [illegible]
[illegible] IF AS(M)=A[illegible] THEN 430
400 NEXT M
410 TR=0:GOTO [illegible]
420 NEXT L
430 NEXT K
440 TR=1
450 CLS:IF RF=1 THEN PRINT"REFLEKSIF"ELSE PRINT"TIDAK
    REFLEKSIF"
460 IF ASI=1 THEN PRINT"ANTISIMETRIS" ELSE PRINT"TIDAK
    ANTISIMETRIS"
470 IF TR=1 THEN PRINT"TRANSITIF"ELSE PRINT"TIDAK
    TRANSITIF"
480 IF RF=1 AND ASI=1 AND TR=1 THEN PRINT" Jadi relasi adalah
    parsial order" ELSE PRINT" Jadi relasi bukan relasi parsial order"
490 END
```