

Aspectos Teóricos da Computação

Prof. Rodrigo Martins

rodrigo.martins@francomontoro.com.br

Cronograma da Aula

- Gramáticas Regulares: dispositivos geradores das Linguagens Regulares
- Expressões Regulares
- Autômatos Finitos – Dispositivos Reconhedores de Linguagens Regulares
- Exemplos no Jflap
- Exercícios

Gramáticas Regulares: dispositivos geradores das Linguagens Regulares

- As Linguagens regulares são geradas pelas Gramáticas Regulares.
- Seja $G = (V, \Sigma, P, S)$ uma gramática e sejam A e B símbolos não terminais e w uma cadeia de Σ^* .
 - a) G é uma gramática linear à direita, se todas as produções são da forma:
 - $A \rightarrow wB$ ou $A \rightarrow w$
 - b) G é uma gramática linear à esquerda, se todas as produções são da forma:
 - $A \rightarrow Bw$ ou $A \rightarrow w$

Gramáticas Regulares: dispositivos geradores das Linguagens Regulares

- Uma Gramática Regular é qualquer Gramática Linear.
- **Exemplo:** A gramática G_1 é Linear à direita.

$G_1 = (V, \Sigma, P, S)$, onde:

$V = \{S, T\}$

$\Sigma = \{x, y\}$

$P = \{ S \rightarrow xyT$

$T \rightarrow xyT \mid xy \}$

Gramáticas Regulares: dispositivos geradores das Linguagens Regulares

- **Exemplo:** A gramática G_2 é Linear à esquerda.

$G_2 = (V, \Sigma, P, S)$, onde:

$V = \{S\}$

$\Sigma = \{x, y\}$

$P = \{ S \rightarrow Sxy \mid xy \}$

S é o símbolo inicial.

Gramáticas Regulares: dispositivos geradores das Linguagens Regulares

- Os seguintes teoremas mostram que a Classe das Gramáticas Regulares denota exatamente a Classe das Linguagens Regulares.
- **Teorema 1:** Se L é uma linguagem gerada por uma Gramática Regular, então L é uma Linguagem Regular.
- **Teorema 2:** Se L é uma Linguagem Regular, então existe G , Gramática Regular que gera L .

Gramáticas Regulares: dispositivos geradores das Linguagens Regulares

- Exemplo: Considere-se a **Gramática G_3 Linear à Direita**:

$G_3 = (V, \Sigma, P, S)$, onde:

$V = \{S, A, B\}$

$\Sigma = \{x, y\}$

$P = \{ S \rightarrow xA$

$A \rightarrow yB$

$B \rightarrow xA \mid \varepsilon \}$

S é o símbolo inicial.

$S \rightarrow xA \rightarrow xyB \rightarrow xy\varepsilon = xy$

$S \rightarrow xA \rightarrow xyB \rightarrow xyxA \rightarrow xyxyB \rightarrow xyxy\varepsilon = xyxy$

$S \rightarrow xA \rightarrow xyB \rightarrow xyxA \rightarrow xyxyB \rightarrow xyxyxA \rightarrow xyxyxyB \rightarrow xyxyxy\varepsilon = xyxyxy$

Uma vez que G_3 é regular, a linguagem $L(G_3)$ é regular.

Esta gramática gera a seguinte linguagem.

$L(G_3) = \{xy, xyxy, xyxyxy, xyxyxyxy, \dots\}$

Gramáticas Regulares: dispositivos geradores das Linguagens Regulares

- Exemplo: Considere-se a **Gramática G_4 Linear à Esquerda**:

$G_4 = (V, \Sigma, P, S)$, onde:

$V = \{S, A, B\}$

$\Sigma = \{x, y\}$

$P = \{S \rightarrow Ay$

$A \rightarrow Bx$

$B \rightarrow Ay \mid \varepsilon\}$

S é o símbolo inicial.

$S \rightarrow Ay \rightarrow Bxy \rightarrow \varepsilon xy = xy$

$S \rightarrow Ay \rightarrow Bxy \rightarrow Ayxy \rightarrow Bxyxy \rightarrow \varepsilon xyxy = xyxy$

$S \rightarrow Ay \rightarrow Bxy \rightarrow Ayxy \rightarrow Bxyxy \rightarrow Ayxyxy \rightarrow Bxyxyxy \rightarrow \varepsilon xyxyxy = xyxyxy$

A gramática G_4 é equivalente a G_3 e também gera a linguagem regular $L(G_4) = \{xy, xyxy, xyxyxy, xyxyxyxy, \dots\}$

Expressões Regulares

- As expressões regulares, notação desenvolvida por Kleene na década de 50, constituem-se em uma alternativa para representar as linguagens regulares.
- Uma expressão regular sobre um alfabeto Σ é indutivamente definida como se segue:
 - a) O conjunto vazio \emptyset , que é uma Linguagem vazia, é uma expressão regular;
 - b) A cadeia vazia ε é uma expressão regular e portanto, a linguagem $L = \{\varepsilon\}$ é regular.
 - c) Qualquer símbolo $x \in \Sigma$ é uma expressão regular e portanto, a linguagem $L = \{x\}$ é regular.
 - d) Se r e s são expressões regulares e consequentemente as linguagens R e S são regulares, então:
 1. $(r \mid s)$ é uma expressão regular e a linguagem $R \cup S$ é regular.
 2. (rs) é uma expressão regular e a linguagem $RS = \{xy \mid x \in R \text{ e } y \in S\}$ é regular.
 3. (r^*) é uma expressão regular.

Expressões Regulares

Exemplo 1: A expressão regular x^* representa a linguagem:

$$L_1 = \{\varepsilon, x, xx, xxx, \dots\}$$

Exemplo 2: A expressão regular $(x|y^*)$ representa a linguagem :

$$L_2 = \{\varepsilon, x, y, yy, yyy, \dots\}$$

Exemplo 3: A expressão regular (xy^*) representa a linguagem:

$$L_3 = \{\varepsilon, x, xy, xyy, xyxy, xyxyy, \dots\}$$

Exemplo 4: A expressão regular $(x | xy^+)$ representa a linguagem:

$$L_4 = \{x, xy, xyy, xyxy \dots\}$$

Autômatos Finitos – Dispositivos Reconhecedores de Linguagens Regulares

- Os autômatos finitos são formalismos de aceitação das sentenças das Linguagens Regulares, ou seja, o autômato finito aceita toda e qualquer cadeia pertencente à linguagem para o qual foi projetado e rejeita todas as cadeias não pertencentes à mesma.

Autômatos Finitos – Dispositivos Reconhecedores de Linguagens Regulares

- Os autômatos finitos apresentam os seguintes componentes:
 - **Fita de entrada.** Trata-se de um dispositivo de armazenamento, uma memória, que contém a cadeia a ser analisada pelo reconhecedor. A fita é finita, dividida em células, e cada célula armazena um símbolo da cadeia de entrada. O comprimento da fita de entrada, portanto, é igual ao comprimento da cadeia de entrada. A leitura dos símbolos gravados na fita de entrada é efetuada mediante o uso de um cursor, o qual sempre aponta o próximo símbolo da cadeia a ser processado. Não há operações de escrita sobre a fita. O cursor movimenta-se exclusivamente da esquerda para a direita.

Autômatos Finitos – Dispositivos Reconhecedores de Linguagens Regulares

- **Unidade de controle finito ou máquina de estados:** Trata-se de um controlador central do reconhecedor. A unidade de controle dispõe da especificação de movimentações possíveis do cursor, descritas por um conjunto finito de estados e transições. O conceito de estado diz respeito ao registro de informações capturadas no passado e relevantes para o posterior processamento da cadeia de entrada. Inicialmente, o cursor aponta para o símbolo mais à esquerda da cadeia. Nesta configuração, em que a cadeia completa ainda será analisada, o controlador se encontra no estado inicial, que deve ser único. Uma transição em um autômato finito é definida pela tripla (estado corrente, símbolo corrente, próximo estado).

Autômatos Finitos – Dispositivos Reconhecedores de Linguagens Regulares

- O símbolo pode ser cadeia vazia ε , ou qualquer elemento do alfabeto da cadeia de entrada sobre o qual Linguagem é definida.
- Os autômatos finitos podem ser **determinísticos** ou **não determinísticos**.

Autômatos Finitos – Dispositivos Reconhecedores de Linguagens Regulares

- Um Autômato Finito Determinístico (AFD) ou simplesmente um Autômato Finito (AF) M é uma quintupla:

$$M = (Q, \Sigma, g, q_0, F)$$

Q é um conjunto finito de estados;

Σ é um alfabeto (finito e não-vazio) de entrada;

g é uma função de transição;

q_0 é o estado inicial;

F é um conjunto de estados finais.

Autômatos Finitos – Dispositivos Reconhecedores de Linguagens Regulares

- Seja M um autômato finito determinístico (Q, Σ, g, q_0, F) , onde:

$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$

$\Sigma = \{a, b, c\}$

q_0 é o estado inicial

$F = \{q_2\}$

e a função g pode ser apresentada como a tabela abaixo:

g	x	y	z
q_0	q_1	-	-
q_1	-	q_2	-
q_2	-	-	q_2

Autômatos Finitos – Dispositivos Reconhecedores de Linguagens Regulares

- Pode-se também denotar a função g , como:

$$g = \{((q_0, x), q_1), ((q_1, y), q_2), ((q_2, z), q_2)\}$$

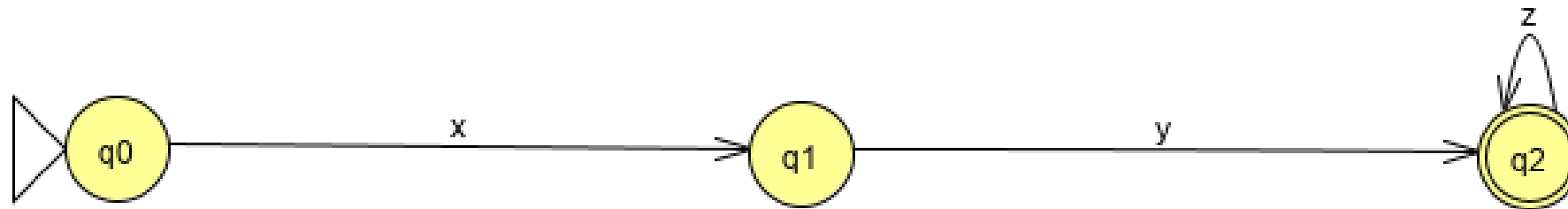
- Ainda, a função g , pode ser especificada como:

$$g(q_0, x) = q_1; g(q_1, y) = q_2; g(q_2, z) = q_2.$$

g	x	y	z
q_0	q_1	-	-
q_1	-	q_2	-
q_2	-	-	q_2

Autômatos Finitos – Dispositivos Reconhecedores de Linguagens Regulares

- M pode ser representado como na figura seguinte.

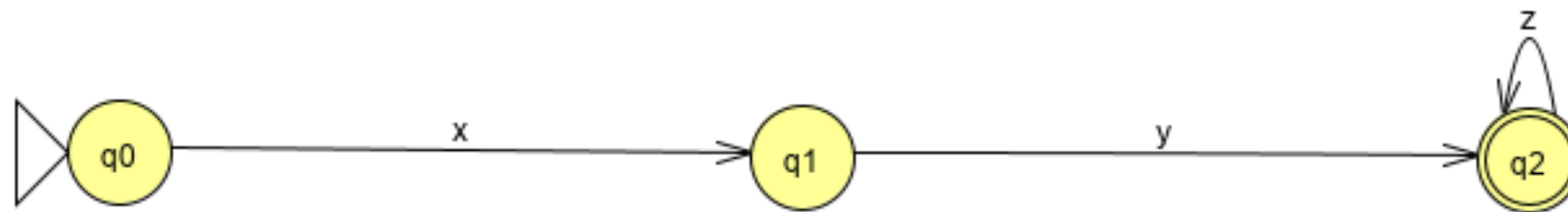


Autômato Finito Reconhecedor da Linguagem
 $L_1 = \{w \mid w = xyz^*\}$

g	x	y	z
q0	q1	-	-
q1	-	q2	-
q2	-	-	q2

Autômatos Finitos – Dispositivos Reconhecedores de Linguagens Regulares

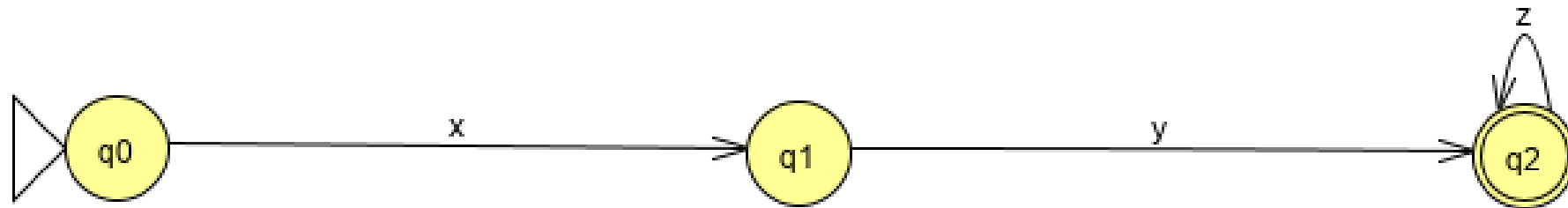
$w_1 = xyzz \in L1?$



Nesta configuração diz-se que o autômato finito, **aceita** a cadeia de entrada, ou seja, a cadeia de entrada pertence à Linguagem reconhecida pelo autômato.

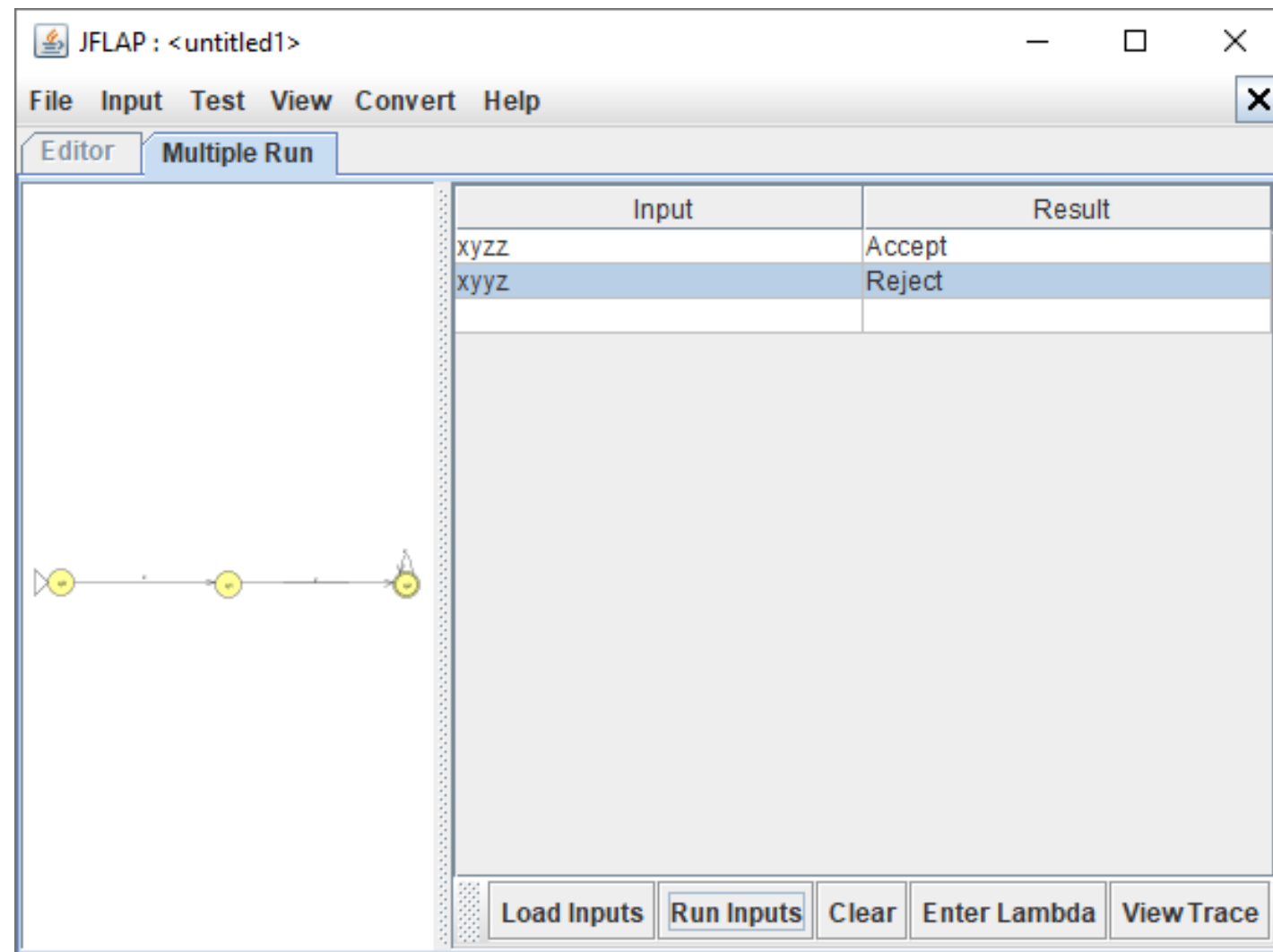
Autômatos Finitos – Dispositivos Reconhecedores de Linguagens Regulares

$w_1 = xy yz \in L_1?$



Nesta configuração diz-se que o diz-se que o autômato M **rejeita** a cadeia de entrada $xy yz$

Autômatos Finitos – Dispositivos Reconhecedores de Linguagens Regulares



Uma Linguagem aceita por um autômato finito determinístico é uma **Linguagem Regular** ou do **tipo 3**.

Autômatos Finitos – Dispositivos Reconhecedores de Linguagens Regulares

Exemplo: Sejam $\Sigma = \{x, y\}$ e L , uma linguagem definida sobre o alfabeto Σ , tal que:

$$L = \{ w \mid w \text{ apresenta a sub-cadeia } xyxy \}$$

A representação algébrica para o autômato finito é:

$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$$

$$\Sigma = \{x, y\}$$

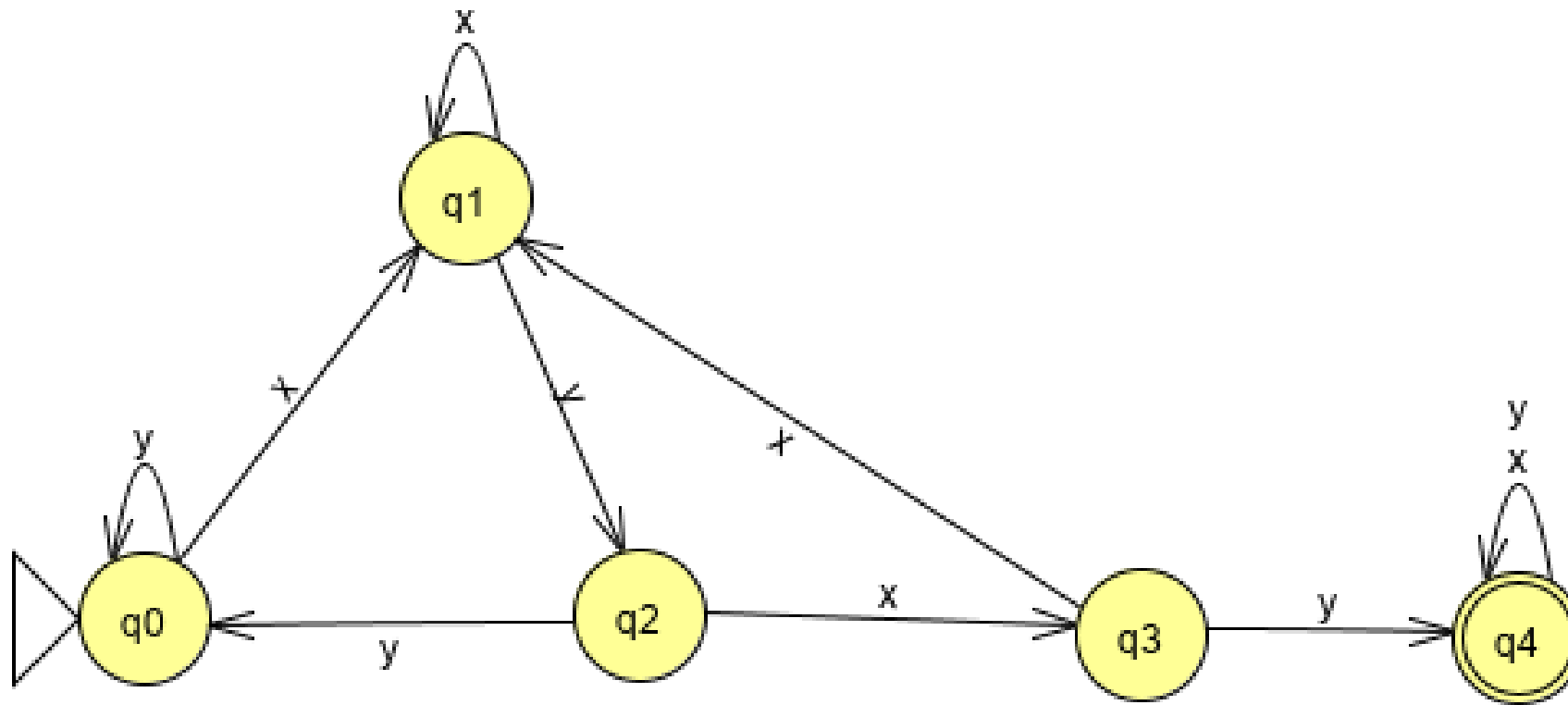
$$g = \{((q_0, x), q_1), ((q_0, y), q_0), ((q_1, x), q_1), ((q_1, y), q_2), ((q_2, x), q_3), ((q_2, y), q_0), ((q_3, x), q_1), ((q_3, y), q_4), ((q_4, x), q_4), ((q_4, y), q_4)\}$$

q_0 é o estado inicial.

$$F = \{q_4\}$$

Autômatos Finitos – Dispositivos Reconhecedores de Linguagens Regulares

A representação gráfica do autômato é como se ilustra na figura seguinte:



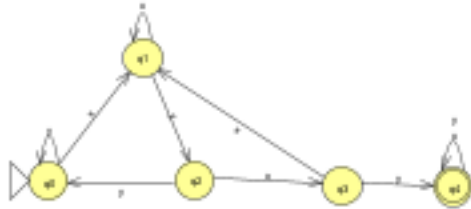
Autômato Finito para reconhecimento de
 $L = \{ w \mid w \text{ apresenta a sub-cadeia } xyxy \}$

Autômatos Finitos – Dispositivos Reconhecedores de Linguagens Regulares

JFLAP : <untitled2>

File Input Test View Convert Help

Editor Multiple Run



The diagram shows a finite automaton with five states: q0, q1, q2, q3, and q4. q0 is the start state and q4 is the final state. Transitions are as follows: q0 to q1 on 'x', q1 to q0 on 'y', q1 to q2 on 'x', q2 to q1 on 'y', q2 to q3 on 'x', q3 to q2 on 'y', q3 to q4 on 'x', and q4 to q3 on 'y'.

Input	Result
xy	Reject
xyxy	Accept
xyxyxyxy	Accept
x	Reject
y	Reject
xyx	Reject
xyyy	Reject
xyy	Reject
xyxyxyxyxyxyxy	Accept

Load Inputs Run Inputs Clear Enter Lambda View Trace

Autômatos Finitos – Dispositivos Reconhecedores de Linguagens Regulares

Exemplo: Considere-se o autômato M , representado em sua forma algébrica como: $M = (Q, \Sigma, g, q_0, F)$

Onde $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

q_0 é o estado inicial e $F = \{q_2\}$

Tem-se que:

$g(q_0, a) = q_1$

$g(q_0, b) = q_0$

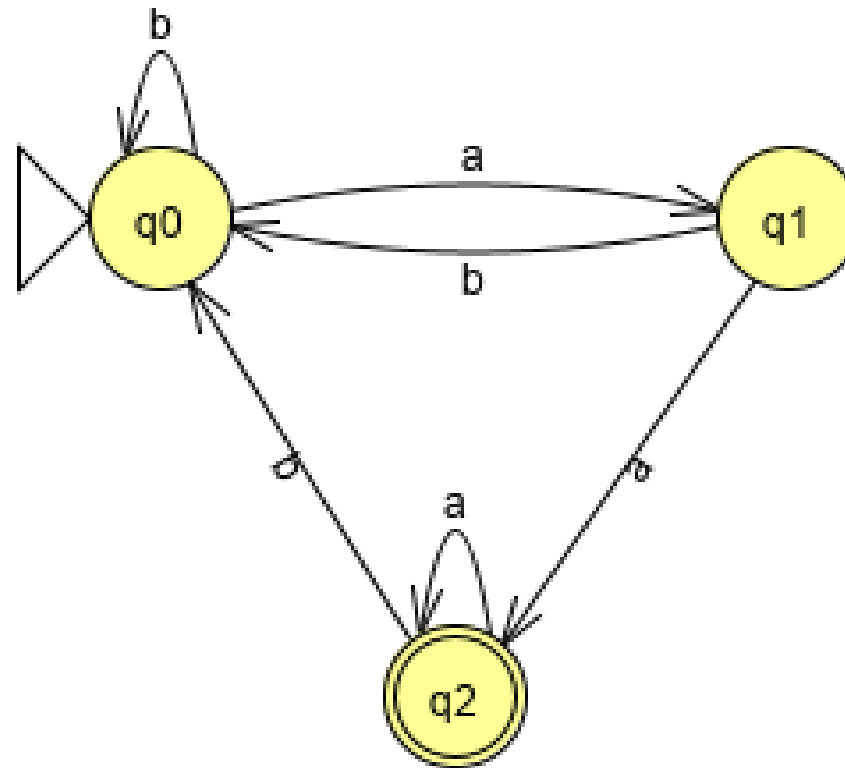
$g(q_1, a) = q_2$

$g(q_1, b) = q_0$

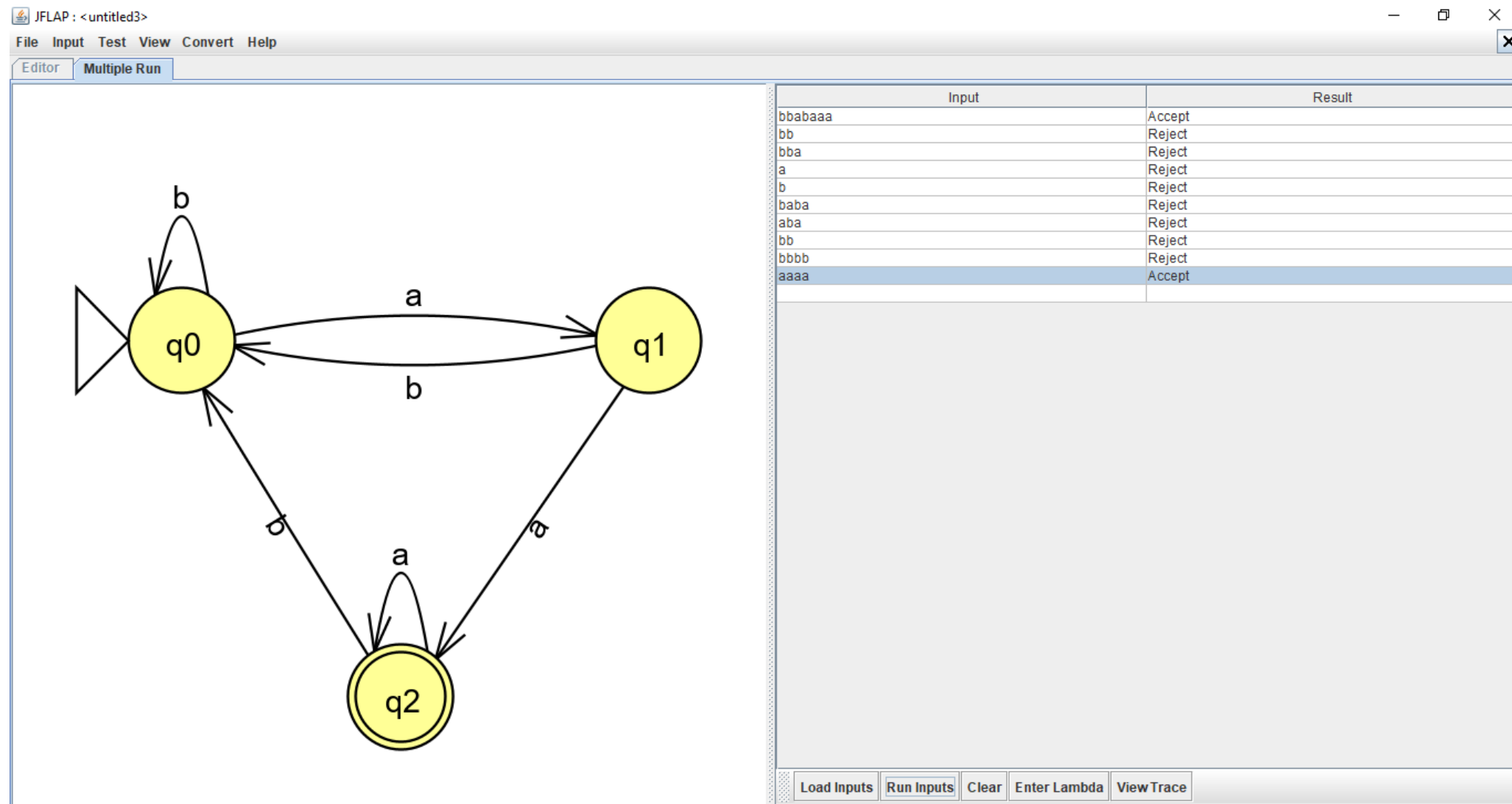
$g(q_2, a) = q_2$

$g(q_2, b) = q_0$

Autômatos Finitos – Dispositivos Reconhecedores de Linguagens Regulares



Autômatos Finitos – Dispositivos Reconhecedores de Linguagens Regulares



Exercícios

1) Considere a seguinte linguagem definida sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$ e: $L(w) = \{w \mid a(a \mid b)^+c^*\}$

O Autômato M reconhecedor de $L(w)$ é $M = (Q, q_0, \Sigma, g, F)$ com:

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$

q_0 é o estado inicial;

$\Sigma = \{a, b, c\}$

$F = \{q_2, q_3\}$

A função g é dada por:

$g = \{((q_0, a), q_1), ((q_1, a), q_2), ((q_1, b), q_2), ((q_2, a), q_2), ((q_2, b), q_2), ((q_2, c), q_3), ((q_3, c), q_3)\}$

Faça o grafo no JFlap

Exercícios

2) Faça a gramática regular $G = (V, T, P, Q_0)$ que gere a linguagem.

$$G = (V, T, P, S)$$

$$V = \{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3\}$$

$$T = \{a, b, c\}$$

$$P = \{Q_0 \rightarrow aQ_1;$$

$$Q_1 \rightarrow aQ_2 \mid bQ_2$$

$$Q_2 \rightarrow aQ_2 \mid bQ_2 \mid cQ_3 \mid \varepsilon$$

$$Q_3 \rightarrow cQ_3 \mid \varepsilon$$

Referências desta aula

- AHO, Alfred V. Compiladores: princípios, técnicas e ferramentas. Rio de Janeiro, LTC, 1995
- MENEZES, P. B. Linguagens Formais e Autômatos. Editora SagraLuzzato, 2000.
- DIVERIO, Tiaraju Asnuz; MENEZES, Paulo Blauth. Teoria da computação: máquinas universais e computabilidade. Sagra Luzzatto, 2003.
- EAD UNIP - Módulo3 - Ling. Reg -Parte I

FIM

OBRIGADO

RODRIGO