БАНК ЗАДАЧ
для вступительных испытаний в магистратуру
(базовая часть)

Задания билета	**1,2,3**	**4**	**5**
Разделы	**1, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 14**	**2, 3, 8, 9, 12, 13, 15, 19**	**16, 17, 18, 20**
Количество баллов	**5 б.**	**10 б.**	**15 б.**

Содержание

Раздел 1. Производная, частная производная, дифференциал.

Таблица производных

1. $c' = 0,\ c = \mathrm{const}$
2. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$
3. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$
4. $\left(e^x\right)' = e^x$
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
10. $(\mathrm{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
11. $(\mathrm{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
12. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(\mathrm{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
15. $(\mathrm{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
16. $(\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x$
17. $(\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x$
18. $(\mathrm{th}\, x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$
19. $(\mathrm{th}\, x)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$

Найти $f'(x)$, если:

1) $f(x) = 3^{log_5(x+1)}$;
2) $f(x) = \frac{1}{arcsin\sqrt{x}}$;
3) $f(x) = \sqrt[3]{2 - tg^3 x}$;
4) $f(x) = sin^2(x^3 + 5x)$;
5) $f(x) = x^{\frac{1}{ln^2 x}}$;
6) $f(x) = log_3(\sqrt{x} + \sqrt{1+x})$;
7) $f(x) = \frac{3\, tg \sqrt[4]{x}+2}{4\, tg \sqrt[4]{x}-1}$;
8) $f(x) = \frac{arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$;
9) $f(x) = \frac{1}{\left(arctg\frac{1}{x}\right)^2}$;
10) $f(x) = ln\left(e^{\sqrt{x}} + \sqrt{e^{2\sqrt{x}} + 1}\right)$;
11) $f(x) = sin^3(\sqrt{x} + 2)$;
12) $f(x) = \sqrt[3]{2 - arcsin\, x^2}$;
13) $f(x) = \frac{1}{th^3(\sqrt{x})}$;
14) $f(x) = (sh\, x)^{th\, x}$;
15) $f(x) = \frac{\sqrt[5]{2x+1}}{(x+2)^2}$;
16) $f(x) = (x+1)^3 e^{\frac{x}{x+1}}$;
17) $f(x) = \frac{1}{log_5(arcsin\sqrt{x})}$;
18) $f(x) = \frac{xe^{\sqrt{x}}+1}{2xe^{\sqrt{x}}+3}$;
19) $f(x) = ch^2(sh\sqrt{x})$;
20) $f(x) = sh^3(xe^x + 1)$.
21) $f(x) = \frac{2}{x-1} + sin\, x^2$.
22) $f(x) = (x+1)\, cos^2 x$.
23) $f(x) = (2x-1)\, ln(x+1)$.
24) $f(x) = 2\sqrt{x^2+1} - 3\, sin\frac{x}{3}$.
25) $f(x) = (\sqrt[4]{x^4+1} + 5)(x^3 - 1)$.
26) $f(x) = 2e^{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$.
27) $f(x) = \sqrt[3]{ln(x-1)}$.

28) Найти $(arctg\,x)''$.

29) Найти $(x\,sin\,x)^{(3)}$.

30) Найти $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, если $f = arctg\,\frac{y}{x}$.

31) Найти df, если $f = x^y$.

32) Найти $d^2 f$, если $f = \frac{cos(xy)}{x}$.

33) Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, если функция $z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.

34) Найти $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$, если $u = e^{x^2+y^2+z^2}$.

35) Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, если функция $z = ln(\,x + xy - x^2)$.

Раздел 2. Исследование функции.

Провести полное исследование функции и построить эскиз ее графика:

1) $y = \frac{x^3-1}{x}$;

2) $y = x^2(x+1)^2$;

3) $y = \frac{x^2+1}{x+1}$;

4) $y = \left(\frac{x+1}{x}\right)^2$;

5) $y = x^2 e^x$;

6) $y = \frac{12x}{9+x^2}$;

7) $y = \frac{4x^2}{3+x^2}$;

8) $y = ln\frac{x}{x+5} - 1$;

9) $y = \frac{x^2-1}{x}$;

10) $y = \frac{e^{x+3}}{x+3}$;

11) $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2$;

12) $y = \frac{3x^4+1}{x^3}$;

Построить график функции с помощью первой производной.

13) $y = x^3 - 3x^2$.

14) $y = 2x^3 - 6x$.

15) $y = x^4 - 2x^3 - 3$.

16) $y = x^3 - 27x$.

17) $y = 12x - x^3$.

18) $y = 1 - 2x^2 - \frac{x^3}{3}$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на указанном отрезке.

19) $y = 2x^2 - x^4 + 1, \quad [-1; 2]$.

20) $y = x^3 - 3x^2 + 4, \quad [0; 3]$.

21) $y = x^3 + \frac{3}{x}, \quad [1/2; 2]$.

Найти наименьшее значение функции на указанном отрезке

22) $y = ln\,x + \frac{1}{x}, \quad [1/2; e]$.

Раздел 3. Матрица и определители.

1) Пусть $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Найти определитель $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$.

2) Найти матрицу, обратную к матрице $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. Сделать проверку.

3) Решить матричное уравнение (с неизвестной матрицей **X**):

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}-1&0\\2&1\end{pmatrix}.$$

4) Найти определитель матрицы $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\2&-1&1&1\\3&0&1&2\\6&-1&3&4\end{pmatrix}$.

5) Приведя матрицу к ступенчатому виду, найти ее определитель:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&3&7\\2&4&6\\3&7&12\end{pmatrix}.$$

6) Определить ранг матрицы $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&2&3&5\\4&3&1&2&0\\3&-1&0&2&1\\8&2&3&7&6\end{pmatrix}$.

7) Пусть $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. Найти $\boldsymbol{A}^3-3\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}$.

8) Приведя матрицу **A** к ступенчатому виду, определить ее ранг:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&2&0&7\\0&1&2&0&4\\1&1&5&4&12\\1&1&5&4&15\end{pmatrix}.$$

9) Найти определитель $det(\boldsymbol{A}^{-1})$ матрицы, обратной матрице **A**, если

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1&2\\1&0&4\\4&1&6\end{pmatrix}.$$

10) Найти $det(\boldsymbol{AB})$, если $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&-1&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\0&2\end{pmatrix}$.

11) Пусть $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\\1&2\end{pmatrix}$. Имеет ли матрица $\boldsymbol{AB}$ обратную?

12) Найти собственные числа матрицы $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&0\\1&4&0\end{pmatrix}$.

Раздел 4. Неоднородная система линейных алгебраических уравнений.

Решить систему линейных уравнений, сделать проверку:

1) $\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + 2x_4 = 16, \\ x_1 + 2x_3 + 3x_4 = -2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 8, \\ 3x_1 - 6x_2 + 7x_3 + 13x_4 = -2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + 2x_3 + 3x_4 = -2, \\ -3x_1 + x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 9; \end{cases}$

4)
$\begin{cases} -2x_1 + 7x_2 + 9x_3 - 11x_4 = -18, \\ -3x_1 + 5x_2 + 8x_3 - 11x_4 = -16; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1 + 2x_3 + 3x_4 = -2, \\ -3x_1 + x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 9; \end{cases}$

6) $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = -7, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -2; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x_2 + x_3 - x_4 = -3, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 5; \end{cases}$

8)
$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -6, \\ -2x_1 + 7x_2 + 9x_3 - 11x_4 = -18; \end{cases}$

9) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 5; \end{cases}$

10) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_5 = 2, \\ x_1 + x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5. \end{cases}$

Раздел 5. Прямая и плоскость в пространстве.

1) Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1;1;0)$ и параллельной плоскости $3x - 4y + z = 1$.

2) Написать уравнение плоскости, содержащей точку $A(1;1;1)$ и ось Ox.

3) Найти угол между плоскостями π_1 и π_2, где $\pi_1\colon 2x - y + z = 0$, $\pi_2\colon x + y - z = 1$.

4) Написать каноническое уравнение прямой, проходящей через точки $A(1;2;3)$ и $B(0;-1;3)$.

5) Найти угол между прямой l и плоскостью π, где $l\colon \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -z, \\ z = 2 + t, \end{cases}$

$\pi\colon \quad x + y + z = 3$.

6) Написать параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;0;2)$ и перпендикулярной плоскости $\pi\colon \quad x - y + z = 1$.

7) Написать каноническое уравнение прямой l, которая является линией пересечения плоскостей π_1 и π_2, где $\pi_1\colon 2x - y + z = 0$, $\pi_2\colon x + y - z = 1$.

8) Найти угол между прямыми l_1 и l_2, где $l_1\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z$, $l_2\colon \begin{cases} x = 2 + t, \\ y = -t, \\ z = 3t. \end{cases}$

Найти точку M, симметричную точки N относительно данной плоскости:

9) $M(-1,0,-1)$, $4x + 6y + 4z - 25 = 0$;

10) $M(1,0,1)$, $2x + 6y - 2z + 11 = 0$.

11) Лежат ли точки $A_1(1;0;2)$, $A_2(2;-1;0)$, $A_3(0;0;0)$, $A_4(1;-1;1)$ в одной плоскости?

Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

12) $A(1,\ -2,\ 3)$, $B(0,\ -1,\ 2)$, $C(3,\ -4,\ 5)$;

13) $A(0,\ -3,\ 6)$, $B(-12,\ -3,\ -3)$, $C(-9,\ -3,\ -6)$;

14) $A(3,\ 3,\ -1),\quad B(5,\ 5,\ -2),\quad C(4,\ 1,\ 1);$
15) $A(-1,\ 2,\ -3),\quad B(3,\ 4,\ -6),\quad C(1,\ 1,\ -1);$
16) $A(-4,\ -2,\ 0),\quad B(-1,\ -2,\ 4),\quad C(3,\ -2,\ 4)$

Раздел 6. Кривые второго порядка.

Определить вид кривой и сделать ее эскиз:

1) $(x+5)^2+y^2=3;$
2) $x^2-\frac{y^2}{9}=1;$
3) $(x-5)^2+\frac{y^2}{4}=1;$
4) $y^2=2x+2;$
5) $x^2-y^2+2x+2y=0;$
6) Написать (в декартовой системе координат) уравнение окружности с центром в точке $A(2;-4)$, проходящей через точку $B(-1;0)$.

Привести уравнение кривой второго порядка $f(x,y)=0$ к каноническому виду и найти точки пересечения ее с данной прямой. Построить кривую и прямую на плоскости:

7) $2x^2+y^2-12x+10=0,\ x+y-2=0;$
8) $y^2+x+4y+3=0,\ x+2y+2=0.$

Раздел 7. Неопределенный интеграл.

Таблица интегралов

1. $\int 0\cdot dx=C$
2. $\int dx=\int 1\cdot dx=x+C$
3. $\int x^n\cdot dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C,$ $n\neq -1,\ x>0$
4. $\int \frac{dx}{x}=\ln|x|+C$
5. $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$
6. $\int e^x dx=e^x+C$
7. $\int \sin x dx=-\cos x+C$
8. $\int \cos x dx=\sin x+C$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x}=-\mathrm{ctg}x+C$
10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\mathrm{tg}x+C$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C,\ |x|<|a|$
12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a}+C$
13. «Высокий» логарифм: $\int \frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C,\ |x|\neq a$
14. «Длинный» логарифм: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$

1) $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$;
2) $\int \frac{8^x \cdot 10^{2x}}{e^{3x}} dx$;
3) $\int x^2 \sin x^3 \, dx$;
4) $\int x^2 e^{2x^3} dx$;
5) $\int \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^3 \cdot \frac{dx}{(x+2)^2}$;
6) $\int \frac{x^3 dx}{x^2-4}$;
7) $\int \ln x \, dx$;
8) $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx$;
9) $\int \operatorname{arctg} x \, dx$;
10) $\int \frac{x dx}{x^2+4}$.
11) $\int \frac{2x^3-\sqrt{x^5}+5}{x^2} dx$
12) $\int \frac{3x^4-\sqrt[3]{x^2}+1}{x^2} dx$
13) $\int \sqrt{5-4x} dx$
14) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-4x)^5}}$
15) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$
16) $\int \cos^7 2x \sin 2x dx$
17) $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{tg^3 x}}$
18) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \, ctg^3 x}$

Раздел 8. Интегрирование рациональных и тригонометрических функций.

1) $\int \frac{dx}{x^3+3x^2+2x}$;
2) $\int \frac{dx}{x^3+x}$;
3) $\int \frac{(x+3)dx}{x(x+1)(x+2)}$;
4) $\int \frac{x^4 dx}{x^2+1}$;
5) $\int \frac{x^3 dx}{(x^2+2x-3)(x+1)}$;
6) $\int \sin^2 x \cos x \, dx$;
7) $\int \sin^2 x \, dx$;
8) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$;
9) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$;
10) $\int \frac{dx}{\sin x+2\cos x}$;
11) $\int \frac{(\cos x-3\sin x)dx}{\sin x+3\cos x}$.

Раздел 9. Определенный интеграл. Замена переменных.

1) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+\cos x}$;
2) $\int_0^1 (2x+1)e^{x+2} dx$;
3) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+2}$;
4) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln^3 x}$;
5) $\int_1^{e^2} \frac{\ln^3 x+3\ln x}{x} dx$;
6) $\int_0^{2\pi} \sin^4 x \, dx$;
7) $\int_0^1 \frac{e^{\frac{x}{x+1}}}{(x+1)^2} dx$;
8) $\int_0^{\pi/4} tg^2 x \, dx$;
9) $\int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x^4+3}}$;
10) $\int_0^1 e^{(x+e^x)} dx$.
11) $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2} dx$.
12) $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1} dx$.
13) $\int_{-3}^0 \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$.
14) $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx$.
15) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{1-\cos^2 x}$.
16) $\int_0^1 x^3\sqrt{4+5x^4} dx$.
17) $\int_0^1 3(x^2+x^2e^{x^3})dx$
18) $\int_3^8 \sqrt{x+1} dx$.

19) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} cos\, x\, sin^3\, x\, dx.$ 20) $\int_0^{\sqrt{\pi/4}} \frac{x}{cos^2 x^2} dx.$

Раздел 10. Вычисление площадей плоских фигур.

1) Область ограничена кривыми: $y = x, y = 2x, y = 3$. Найти ее площадь.

2) Область ограничена кривыми: $y = 4 - x^2, y = x^2$. Найти ее площадь.

3) Область ограничена кривыми: $y = x^2, x + y = 4, y = 0$. Найти ее площадь.

4) Область ограничена кривыми: $y^2 = x, x^2 = y$. Найти ее площадь.

5) Найти площадь фигуры, если ее границей является кривая
$$\begin{cases} x = 1 + cos\, t \\ y = sin\, t \\ t \in [0; 2\pi]. \end{cases}$$

6) Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $\begin{cases} x = 2\, sin\, t \\ y = 3\, cos\, t \\ t \in [0; 2\pi]. \end{cases}$

7) Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $\begin{cases} x = t + sin\, t \\ y = 1 - cos\, t \\ t \in [0; 2\pi]. \end{cases}$

8) Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в полярных координатах как $\rho = cos\, \varphi$.

9) Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в полярных координатах как $\begin{cases} \rho = \varphi \\ \varphi \in [0; 2\pi]. \end{cases}$

10) Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = x, y = \sqrt{3}x$, $x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 9$.

11) Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $x^2 + y^2 = 2y$, $x^2 + y^2 = 4y$.

Раздел 11. Числовые ряды.

Исследовать ряд на сходимость:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+4}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{n^2+n+7}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+3}}{(n+1)!}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\frac{n^2}{3n+1}}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+3)!}$; 6) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\, ln^2\, n}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+2}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+5}$.

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+2)!}$;

Раздел 12. Дифференциальные уравнения.

1) Решить уравнение $y' = xy + x$.
2) Решить уравнение $(x+1)^2 y' = y$.
3) Решить задачу Коши: $y' = 1 + 2\frac{y}{x}$, $y(1) = 1$.
4) Найти общий интеграл уравнения $(x+y)y' = x - y + \frac{xy+y^2}{x}$.
5) Решить задачу Коши: $y' = 2y + 2$, $y(0) = 0$.
6) Решить задачу Коши: $2yy' = y^2 + 1$, $y(ln\,2) = 1$.
7) Найти общее решение уравнения $xy' + y = xy + 1$.
8) Решить задачу Коши: $y' = y - x + 1$, $y(0) = 1$.
9) Найти общее решение уравнения $y'\,tg\,x = y$.
7) Найти общее решение уравнения $\frac{y'}{y} = ln\,y - x + 1$.

Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения.

8) $e^{x+3y}dy = xdx$.
9) $y' = (2y+1)\,tg\,x$.
10) $e^x \sin y\,dx + tg\,y\,dy = 0$.
11) $(x^2+x)ydx + (y^2+1)dy = 0$.
12) $y'\sqrt{1+y^2} = \frac{x^2}{y}$.
13) $(xy - x)^2 dy = y(x-1)dx$.

Решить задачу Коши:

14) $y''' = \frac{6}{x^3}$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 5$, $y''(1) = 1$.
15) $y'' = \frac{tg\,x}{\cos^2 x}$, $y(0) = 1/2$, $y'(0) = 0$.
16) $y'' = \sin^2 3x$, $y(0) = -\pi^2/16$, $y'(0) = 0$.
17) $y''' = \cos 4x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 15/16$, $y''(0) = 0$.

Показать, что функция y удовлетворяет данному уравнению:

18) $y = xe^{-x^2/2}$, $xy' = (1-x^2)y$;
19) $y = \frac{\sin x}{x}$, $xy' + y = \cos x$;
20) $y = 5e^{-2x} + \frac{e^x}{3}$, $y' + 2y = e^x$;
21) $y = x\sqrt{1-x^2}$, $yy' = x - 2x^3$;
22) $y = -\frac{1}{3x+c}$, $y' = 3y^2$.

Раздел 13. Однородные и неоднородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

1) Найти общее решение уравнения $y''' - 3y'' + 2y' = 0$.
2) Найти общее решение уравнения $y''' + 2y'' + y = 0$.
3) Найти общее решение уравнения $y''' - 2y'' + 17y' = 0$.
4) Решить задачу Коши: $y'' - 5y' + 6y = 3e^x$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$
5) Решить задачу Коши: $y'' - 4y = x$, $y(0) = 1, y'(0) = 1$
6) Найти общее решение уравнения $y''' - 9y' = x$.
7) Найти общее решение уравнения $y''' + y' = 1$.

8) Найти общее решение уравнения $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$.

9) Найти общее решение уравнения $y'' - y = \frac{1}{ch\, x}$.

10) Решить задачу Коши: $y''' = 1, y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 1$.

Найти частное решение линейного однородного дифференциального уравнения.

11) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1;$

12) $y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0, \quad y(0) = -2{,}5, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0;$

13) $y''' + 9y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 9, \quad y''(0) = -18;$

14) $y''' - 13y'' + 12y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y''(0) = 133.$

Раздел 14. Комплексные числа.

1) Записать в алгебраической форме число $I = \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right)^2$.

2) Записать в алгебраической форме число $I = (1 - \sqrt{3}i)^{2018}$.

3) Для числа $z = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$ найти $|z|^{2018}$ и $Arg(\, z^{2018})$.

4) Записать в алгебраической форме число $I = \frac{\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}}{\cos\frac{5\pi}{18} + i\sin\frac{5\pi}{18}}$.

5) Нарисовать на комплексной плоскости область, заданную неравенствами: $\begin{cases} |z-1| \leq 1, \\ 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

6) Нарисовать на комплексной плоскости область, заданную неравенством $|z| \geq |z+1|$.

7) Решить уравнение $\frac{2+3i}{\overline{(2-i)}} z - i = 0$. Ответ записать в алгебраической форме.

8) Решить уравнение $(2+i)z - (1+i)\bar{z} = i$. Ответ записать в алгебраической форме.

9) Найти все решения уравнения $z^3 - 2z^2 + 5z = 0$, лежащие в области $\begin{cases} |z| \leq 2, \\ Re\, z \geq 1. \end{cases}$

10) Найти все решения уравнения $z^2 + 2z + 10 = 0$, лежащие в области $Im(\,\bar{z}) \geq Re\, z$.

Изобразить на комплексной плоскости область, заданную неравенствами.

11) $|z-1| \leq 1, \quad |z+1| > 2.$

12) $|z+i| \leq 2, \quad |z-i| > 2.$

13) $|z+i| < 2, \quad 0 \leq Re\, z \leq 1.$

Представить в алгебраической форме.

14) $\frac{(2+i)i^3}{\sqrt{3}-i}$.

15) $\frac{3-i}{(i+1)i^5}$.

16) $\frac{(3i-1)(2+i)}{i^{10}}$.

17) $(i - \sqrt{3})^3$.

18) $\frac{2+i}{\overline{1-i}}$.

19) $(-i)^i$.

20) $(1+i)^i$.

Раздел 15. Элементарные функции комплексного переменного, их свойства.

1) Решить уравнение $z^3 = -i$. Ответы записать в алгебраической форме.

2) Найти все значения $\sqrt[4]{i^4}$. Ответы записать а алгебраической форме.

3) Решить уравнение $\cos z = 2$. Ответы записать в алгебраической форме.

4) Записать в алгебраической форме i^i.

5) Найти $Re(\,e^{iz^2})$.

6) Может ли функция $u = x^2 + y^2 - xy$ быть действительной частью некоторой аналитической в $\mathbb{C}$ функции?

7) Найти аналитическую в $\mathbb{C}$ функцию $f(z)$, такую, что $Im\, f = x^2 - y^2 + y$, $f(0) = 0$.

8) Записать в алгебраической форме $\sin(\,1 + i)$.

9) Решить уравнение $e^z = e^{2018\pi i}$.

Раздел 16. Изолированные особые точки и их классификация.

Определить особые точки и их типы для функции и вычислить вычеты в этих точках:

1) $f(z) = \frac{z}{\sin z}$;

2) $f(z) = (z-1)e^{\frac{1}{z-1}}$;

3) $f(z) = \frac{e^z - 1 - z}{1 - \cos z}$;

4) $f(z) = \frac{e^{1/z} + 1}{e^{1/z} - 1}$;

5) $f(z) = z^3 \sin\frac{1}{z}$;

6) $f(z) = \frac{z(\operatorname{sh} z - z)}{(1 - \cos z)^2}$;

7) $f(z) = e^z e^{\frac{1}{z-2}}$;

8) $f(z) = \frac{1}{\left(\sin z - \frac{1}{2}\right)^2}$;

9) $f(z) = \frac{1}{\sin(z-1)} e^{\frac{1}{z}}$;

10) $f(z) = \frac{\operatorname{tg} z}{z^3}$.

Определить тип особой точки $z = 0$ для данной функции.

11) $\frac{e^{9z} - 1}{\sin z - z + z^3/6}$

12) $z^3 e^{7/z^2}$

13) $\frac{\sin 8z - 6z}{\cos z - 1 + z^2/2}$

14) $\frac{\cos 7z - 1}{\operatorname{sh} z - z - z^3/6}$

15) $\frac{\operatorname{sh} 6z - 6z}{\operatorname{ch} z - 1 - z^2/2}$

16) $\frac{\operatorname{ch} 5z - 1}{e^z - 1 - z}$

17) $z \sin\frac{6}{z^2}$

18) $\frac{e^z - 1}{\sin z - z + z^3/6}$

19) $\frac{\sin z^2 - z^2}{\cos z - 1 + z^2/2}$

20) $\frac{\cos z^2 - 1}{\operatorname{sh} z - z - z^3/6}$

Раздел 17. Вычеты. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

Вычислить:

1) $\int_{|z|=1} z^3 \sin\frac{1}{z}\, dz$; 2) $\int_{|z-1|=3} \frac{dz}{\sin z}$;

3) $\int_{|z-2|=5} \frac{\sin z - z}{z^4}\, dz$; 4) $\int_{|z|=1} z^3 e^{1/z}\, dz$;

5) $\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z \cos z}\, dz$; 6) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2}$;

7) $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2+9}\, dx$; 8) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos x + 2}$;

9) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$; 10) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2+1}\, dx$.

Вычислить интеграл.

11) $\int_{|z|=1} \frac{\cos 2z - 1}{z^2} dz$. 12) $\int_{|z|=1} \frac{\sin(1/z)}{z^3} dz$.

13) $\int_{|z|=1} \frac{\sin z^2 - z^2}{z^5} dz$. 14) $\int_{|z|=1} z e^{2/z} dz$.

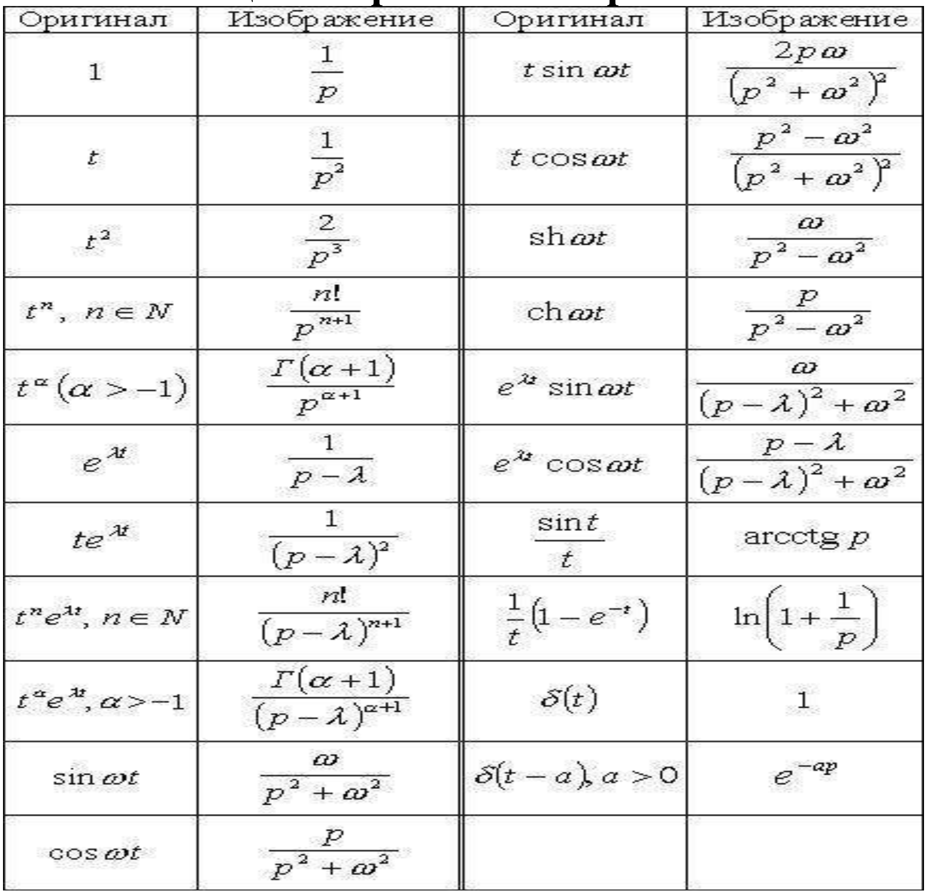
15) $\int_{|z|=1} z^3 \cos\frac{1}{z^2} dz$. 16) $\int_{|z|=1} \frac{1+z-e^z}{2z^3} dz$.

17) $\int_{|z|=1} \frac{1-\cos z}{z^3} dz$ 18) $\int_{|z|=1} \frac{\sin^2 z - \frac{1}{2}}{z} dz$.

19) $\int_{|z|=1} z^5 \cos\frac{1}{z^3} dz$. 20) $\int_{|z|=1} \frac{\sin 3z}{z - \pi} dz$.

Раздел 18. Функция-оригинал и ее изображение по Лапласу.

Таблица изображений и оригиналов



Оригинал	Изображение	Оригинал	Изображение
1	$\frac{1}{p}$	$t \sin \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
t	$\frac{1}{p^2}$	$t \cos \omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
t^2	$\frac{2}{p^3}$	$\operatorname{sh} \omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$t^n,\ n \in N$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
$t^\alpha\ (\alpha > -1)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$	$e^{\lambda t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p-\lambda}$	$e^{\lambda t} \cos \omega t$	$\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
$te^{\lambda t}$	$\frac{1}{(p-\lambda)^2}$	$\frac{\sin t}{t}$	$\operatorname{arcctg} p$
$t^n e^{\lambda t},\ n \in N$	$\frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$	$\frac{1}{t}(1-e^{-t})$	$\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$
$t^\alpha e^{\lambda t}, \alpha > -1$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(p-\lambda)^{\alpha+1}}$	$\delta(t)$	1
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\delta(t-a), a > 0$	e^{-ap}
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$		

1) Найти изображение функции $f(t) = t^2 e^{-3t}$.

2) Найти изображение функции $f(t) = te^{-3t} \sin 2\, t$.

3) Найти изображение функции $f(t) = t\, ch\, 2\, t - sh\, t$.

4) Найти изображение функции $f(t) = \int_0^t e^{-x} \cos(t - x)\ dx$.

5) Пусть $f(t) = e^{-2t} \sin 3\, t$. Найти изображение функции $f''(t)$.

6) Найти изображение функции $f(t) = \int_0^t x^3 e^{-3x} dx$.

7) Пусть $f(t) = \begin{cases} 3, & t \in [0;1], \\ 0, & t \notin [0;1]. \end{cases}$ Найти изображение $f(t)$.

8) Пусть $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ t, & t \in [0;1], \\ 1, & t \in [1;2], \\ 0, & t > 2. \end{cases}$. Найти изображение $f(t)$.

9) Пусть $\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$ Найти изображение функции $f(t) = (t - 1)e^{(t-1)}\eta(t-1)$.

10) Пусть $\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$ Найти изображение $f(t) = \sin 2\,(t - 2)e^{-2}\eta(t-2)$.

11) Найти изображение функции $f(t) = t \sin^2 2\, t$.

Раздел 19. Восстановление оригинала по изображению.

Найти (непрерывную на $[0; +\infty)$) функцию-оригинал, если ее изображение $F(p)$ равно:

1) $F(p) = \frac{p^2}{(p^2+1)(p^2+2)}$;

2) $F(p) = \frac{p-3}{p^2-6p+10}$;

3) $F(p) = \left(\frac{p-2}{p^2-4p+5}\right)''$;

4) $F(p) = \left(\frac{p}{p^2+9}\right)''$;

5) $F(p) = \int_p^{+\infty} \frac{dq}{q^2+4}$;

6) $F(p) = \frac{e^{-2p}}{p+1}$;

7) $F(p) = (e^{-2p} + 3e^{-p})\frac{1}{p}$;

8) $F(p) = \int_p^{+\infty} \frac{dq}{q(q^2+1)}$;

9) $F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{k+1}}$;

10) $F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2p)^{k+1}}$;

Раздел 20. Операционные методы решения дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.

Решить операционным методом задачу Коши:

1) $x' + x = e^{-t}, \quad x(0) = 1$.

2) $x' - x = 1, \quad x(0) = -1$.

3) $x'' = 1, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1$.

4) $x'' - 4x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1$.

5) $x' + 2x = 2, \quad x(0) = 1$.

6) $x' + 3x = e^{-3t}, \quad x(0) = 0.$

7) $x'' + x = 2t + 3, x(0) = 1, x'(0) = 1.$

8) $x'' + x' = t, x(0) = 1, x'(0) = 0.$

9) $x'' + x = 2e^{t}, x(0) = 0, x'(0) = 1.$

10) $x'' + x = 2\cos t, x(0) = x'(0) = 0.$

Операционным методом найти решение системы уравнений

11) $\begin{cases} x' - y = 0 \\ y' - x = -1, \end{cases}$ удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 2$, $y(0) = 1$

12) $\begin{cases} x' - 2y = 2t \\ y' = \frac{1}{2}x - 1, \end{cases}$ удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 2$, $y(0) = 1$

13) $\begin{cases} x' - 2y = 0 \\ y' + x = 3e^{2t} + 1, \end{cases}$ удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 2$, $y(0) = 1.$

Решения

§1.

3) $f'(x) = \frac{1}{3}(2 - tg^3\,x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-3\,tg^2\,x)\frac{1}{cos^2\,x} = -\frac{tg^2\,x}{\sqrt[3]{(2-tg^3\,x)^2}\;cos^2\,x}.$

§2.

1) $y = \frac{x^3-1}{x}.$

1. ОДЗ: $x \neq 0$.

2. $\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = +\infty \end{matrix}\right\} \Rightarrow \; x = 0$ – вертикальная асимптота.

3. $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$, периода нет, т.е. функция общего вида.

4. $y = 0 \Rightarrow x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$; точка $(1; 0)$ – точка пересечения с осью Ox.

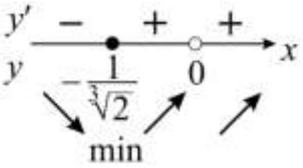
5. Найдем наклонные (горизонтальные) асимптоты:

$k = \lim\limits_{x=\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x=\pm\infty} \frac{x^3-1}{x^2} = +\infty$, т.е. наклонных и горизонтальных асимптот нет.

6. $y' = \left(\frac{x^3-1}{x}\right)' = \frac{3x^2x-(x^3-1)}{x^2} = \frac{2x^3+1}{x^2}$;

$$y' = 0 \Rightarrow 2x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}};$$

$$y' \nexists \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0.$$

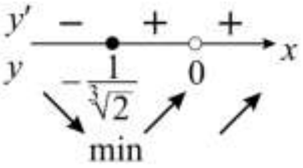


$y\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{-\frac{1}{2}-1}{-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$, т.е. $\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; \frac{3}{\sqrt[3]{4}}\right)$ – точка минимума.

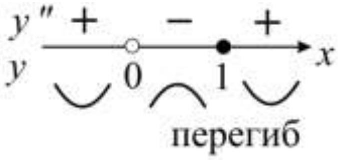
7. $y''' = \left(\frac{2x^3+1}{x^2}\right)' = \frac{6x^2x^2-(2x^3+1)2x}{x^4} = \frac{2x^4-2x}{x^4} = \frac{2(x^3-1)}{x^3}.$

$$y'' = 0 \Rightarrow x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1.$$

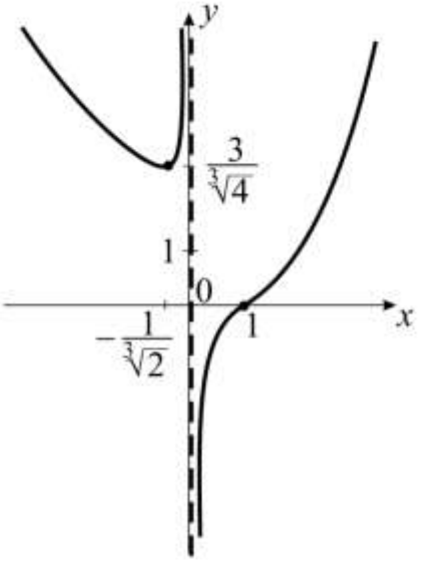
$$y'' \nexists \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0.$$



$y\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{-\frac{1}{2}-1}{-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$, т.е. $\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; \frac{3}{\sqrt[3]{4}}\right)$ – точка минимума.



$y(1) = 0$, т.е. точка $(1; 0)$ – точка перегиба.



§3.

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. $|A| \ = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists!\, A^{-1}$.

$$\begin{matrix} & A_{11} = 1 & A_{21} = 0 & A_{31} = -1 \\ 2. & A_{12} = 0 & A_{22} = 1 & A_{32} = -1 \\ & A_{13} = 0 & A_{23} = 0 & A_{33} = 1 \end{matrix}$$

3. $\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Проверка: $AA^{-1} = A^{-1}A = E \ (?)$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1}A = E.$$

§4.

1) $\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + 2x_4 = 16, \\ \ x_1 + 2x_3 + 3x_4 = -2. \end{cases}$

$$A|B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 2 & 16 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \langle \cdot\, 1/2 \rangle \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \langle \downarrow + \rangle \sim$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \langle \cdot -1 \rangle \\ \langle \cdot\, 1/2 \rangle \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \langle \cdot\, 2 \uparrow \rangle$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$Rg\, A = Rg\, A\,|B = 2$; $dim\, L = 2 \Rightarrow$ФСР: $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$.

2 баз. переменные: x_1, x_2, 2 своб. переменные: x_3, x_4.

$$\begin{cases} x_1 = -2 - 2x_3 - 3x_4, \\ x_2 = 3 - x_3 - 2x_4. \end{cases}$$

$$\vec{x}_{\text{о.н.}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 - 2x_3 - 3x_4 \\ 3 - x_3 - 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_{\text{ч.н.}}} + C_1 \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_1} + C_2 \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_2}.$$

Проверки: $\vec{x}_{\text{ч.н.}}: -2 \cdot (-2) + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 0 = 16;$

$\vec{e}_1: -2 \cdot (-2) + 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = 0;$

$\vec{e}_2: -2 \cdot (-3) + 4 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = 0.$

§5.

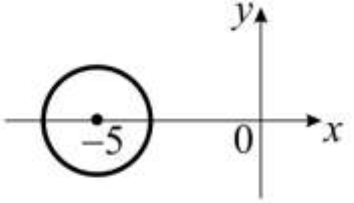
1) $A(1;1;0)$, $\alpha: 3x - 4y + z = 1$, $A \in \beta$ и $\alpha \parallel \beta$. Так как $\alpha \parallel \beta$, то $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$, $\vec{n}_1 = \{3; -4; 1\}$ – нормальный вектор плоскости α, который можно взять за нормальный вектор к плоскости β, точка $A \in \beta$, тогда уравнение плоскости β:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

т.е. $3(x - 1) - 4(y - 1) + 1(z - 0) = 0$, $\beta: \ 3x - 4y + z + 1 = 0.$

§6.

1) $(x + 5)^2 + y^2 = 3$– окружность с центром в точке $(-5; 0)$ и радиусом $\sqrt{3}$.



§7.

7) $\int ln\,x\,dx = ?$

Интегрирование по частям:

$$\int udv = uv - \int vdu = \left\langle \begin{matrix} u = ln\,x\,, & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx, & v = x \end{matrix} \right\rangle = x\,ln\,x - \int dx$$
$$= x(ln\,x - 1) + C.$$

§8.

6) $\int sin^2 x\,cos\,x\,dx = \int sin^2 x\,d(sin\,x) = \frac{sin^3 x}{3} + C$ (метод подведения под знак дифференциала).

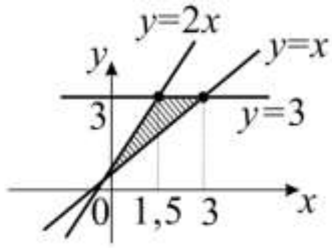
§9.

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

4) $\int_2^e \frac{dx}{x\,ln^3 x} = \int_2^e \frac{d(ln\,x)}{ln^3 x} = -\frac{1}{2\,ln^2 x}\Big|_2^e = -\frac{1}{2\,ln^2 2} + \frac{1}{2\,ln^2 e} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{ln^2 2}\right).$

§10.

1) $y = x; \quad y = 2x; \quad y = 3.$



$$\boldsymbol{S}_{\text{фигуры}} = \int\limits_0^{3/2} (\boldsymbol{2x - x})\boldsymbol{dx} + \int\limits_{3/2}^{3} (\boldsymbol{3 - x})\boldsymbol{dx} \Rightarrow \frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{2}}\Bigg|_0^{3/2} + \left(\boldsymbol{3x} - \frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{2}}\right)\Bigg|_{3/2}^{3} =$$

$$= \frac{\boldsymbol{9}}{\boldsymbol{8}} + \boldsymbol{9} - \frac{\boldsymbol{9}}{\boldsymbol{2}} - \frac{\boldsymbol{9}}{\boldsymbol{2}} + \frac{\boldsymbol{9}}{\boldsymbol{8}} = \frac{\boldsymbol{9}}{\boldsymbol{4}} = \boldsymbol{2}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4}}.$$

§11.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+4}.$

1. Проверить необходимое условие сходимости: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3n+4} = 0.$
2. По второй теореме сравнения $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится; так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3n+4} \cdot \frac{n}{1} = \frac{1}{3}$, то оба ряда ведут себя одинаково, т.е. исходный ряд расходится.

§12.

1) $y' = xy + x,$

$$\frac{dy}{dx} = x(y+1) \quad |: \quad y + 1 \neq 0,$$

$\frac{dy}{y+1} = xdx,$

$\int \frac{dy}{y+1} = xdx$; $ln\,|\,y+1|\ = \frac{x^2}{2} + C$; $y + 1 = e^{x^2/2}C$; $y = e^{x^2/2}C - 1$; так как при $C = 0$ $y = -1$, то ответ: $y = e^{x^2/2}C - 1.$

§13.

1) $y''' - 3y'' + 2y' = 0.$

Составим характеристическое уравнение:

$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = 0$, $\lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$ – все корни кратности 1.

$$y1_2{}^{x}{}_3{}^{2x}{}_{o.o.}$$

§14.

4) 5б: $\frac{cos\frac{\pi}{9}+i\,sin\frac{\pi}{9}}{cos\frac{5\pi}{18}+i\,sin\frac{5\pi}{18}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{9}}}{e^{i\frac{5\pi}{18}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{9}-\frac{5\pi}{18}\right)} = e^{-i\frac{\pi}{6}} = cos\frac{\pi}{6} - i\,sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$

§15.

$z^3 = -i \Rightarrow z = \ |z|e^{i\varphi};\ -i = e^{i\frac{3\pi}{2}};$

$$|z|^3 e^{i3\varphi} = 1 \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}} \Rightarrow \begin{cases} |z|^3 = 1, \\ 3\varphi = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| \ = 1 \\ \varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi k}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$k = 0 \quad z = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = cos\frac{\pi}{2} + i\,sin\frac{\pi}{2} = i;$$

$$k = 1 \quad z = 1 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)} = cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right) + i\,sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2};$$

$$k = 2 \quad z = 1 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}\right)} = cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}\right) + i\,sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}.$$

§16.

$$\boldsymbol{\frac{z}{sin\,z}}.$$

$z = 0$ – устранимая точка, $\lim\limits_{z\to 0} \frac{z}{sin\,z} = 0$; $z = k\pi$ при $k = \pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \ldots$ – полюса 1-го порядка, так как $\frac{1}{f} = \frac{sin\,z}{z}$ имеет в этих точках нуль первого порядка ($\sin k\pi = 0$, $cos\,k\,\pi \neq 0$).

§17.

$\int_{|z|\ =1} z^3\,sin\frac{1}{z}dz = 0$, так как разложение в ряд Лорана этой функции имеет вид: $z^3\,sin\frac{1}{z} = z^3\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{z^5} + \cdots\right) = z^2 - \frac{1}{6} + \frac{1}{5!}z^2 + \cdots$, т.е. коэффициент при степени $\frac{1}{z}$ равен 0.

§18.

1) 5б: так как $e^{-3t} \doteq \frac{1}{p+3}$, а домножение оригинала на $(-t)$ соответствует дифференцированию изображения, то $t^2e^{-3t} \doteq \left(\frac{1}{p+3}\right)'' = \left((p+3)^{-1}\right)'' = \frac{2}{(p+3)^3}$.

§19.

$\boldsymbol{F(p) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p^{k+1}}}$. Так как $\boldsymbol{\frac{1}{p^{k+1}} = \frac{t^k}{k!}}$, то $\boldsymbol{F(p) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!} = e^t}$.

§20.

$\boldsymbol{x'' + x = 2e^t,\quad x(0) = 0;\quad x'(0) = 1.}$

Пусть $x(t) = F(p)$. Тогда $x''(t) = p(pF(p) - x(0)) - x'(0) = p^2F(p) - 1;$

$$e^t = \frac{1}{p-1} \Rightarrow p^2F(p) - 1 + F(p) = 2\frac{1}{p-1} \Rightarrow (p^2+1)F(p) = \frac{2}{p-1} + 1 \Rightarrow$$
$F(p) = \frac{p+1}{(p-1)(p^2+1)} = \frac{1}{p-1} - \frac{p}{p^2+1}$.
Так как $F(p) = e^t - cos\, t$, то ответ $x(t) = e^t - cos\, t$.

Справочные материалы

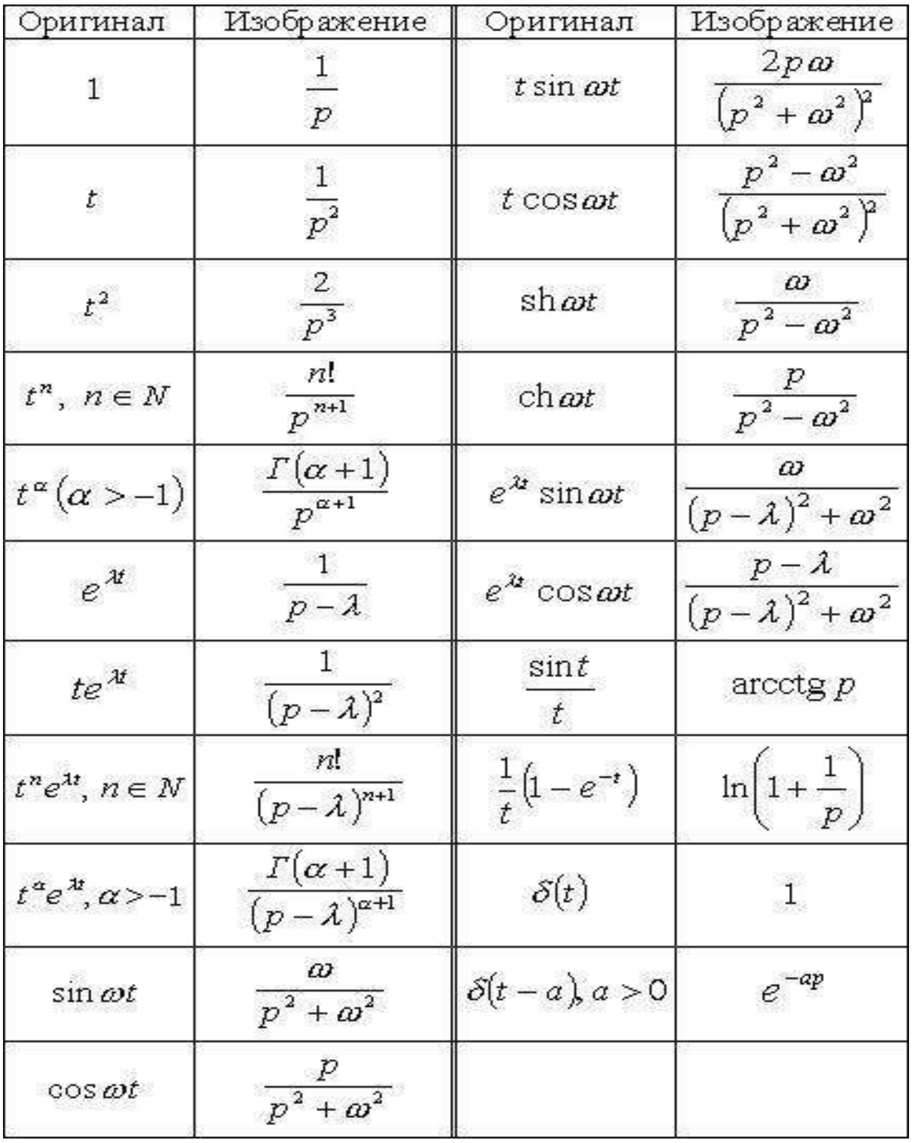
А. Таблица производных

1. $c' = 0,\ c = \mathrm{const}$
2. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$
3. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$
4. $\left(e^x\right)' = e^x$
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
10. $(\mathrm{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
11. $(\mathrm{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
12. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(\mathrm{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
15. $(\mathrm{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
16. $(\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x$
17. $(\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x$
18. $(\mathrm{th}\, x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$
19. $(\mathrm{cth}\, x)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$

Б. Таблица интегралов

1. $\int 0 \cdot dx = C$
2. $\int dx = \int 1 \cdot dx = x + C$
3. $\int x^n \cdot dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,$
   $n \neq -1,\ x > 0$
4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$
5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int e^x dx = e^x + C$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$
9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$
10. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$
11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C,\ |x| < |a|$
12. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} \mathrm{arctg} \dfrac{x}{a} + C$
13. «Высокий» логарифм:
    $$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C,\ |x| \neq a$$
14. «Длинный» логарифм:
    $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

В. Таблица изображений и оригиналов



Оригинал	Изображение	Оригинал	Изображение
1	$\frac{1}{p}$	$t\sin\omega t$	$\frac{2p\omega}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$
t	$\frac{1}{p^2}$	$t\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$
t^2	$\frac{2}{p^3}$	$\mathrm{sh}\,\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$t^n,\ n\in N$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\mathrm{ch}\,\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
$t^\alpha(\alpha>-1)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$	$e^{\lambda t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p-\lambda}$	$e^{\lambda t}\cos\omega t$	$\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
$te^{\lambda t}$	$\frac{1}{(p-\lambda)^2}$	$\frac{\sin t}{t}$	$\mathrm{arcctg}\,p$
$t^n e^{\lambda t},\ n\in N$	$\frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$	$\frac{1}{t}\left(1-e^{-t}\right)$	$\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$
$t^\alpha e^{\lambda t}, \alpha>-1$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(p-\lambda)^{\alpha+1}}$	$\delta(t)$	1
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\delta(t-a), a>0$	e^{-ap}
$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$		