XXXVII Международная математическая олимпиада

С 5 по 17 июля в Бомбее (Индия) состоялась XXXVII Международная математическая олимпиада, ставшая рекордной по числу участников: 426 школьников из 75 стран мира. Ещё 3 страны прислали своих официальных наблюдателей, а это значит, что в следующем году команды этих стран станут полноправными участниками состязаний.

В команду России в этом году вошли:

Николай Дуров — девятиклассник ФМЛ 239 из Санкт-Петербурга,

Вероника Есаулова — выпускница ФМЛ 239 из Санкт-Петербурга,

Юрий Макарычев — выпускник с.ш. 57 из Москвы,

Сергей Норин — выпускник ФМЛ 239 из Санкт-Петербурга,

Елена Рудо — выпускница ФМЛ 239 из Санкт-Петербурга,

Константин Салихов — выпускник СУНЦ МГУ из Казани.

Запасным участником был выпускник ФМЛ 239 *Дмитрий Запорожец*. Все участники команды получили право поступления в избранные ими вузы без вступительных экзаменов.

Команда была сформирована по итогам заключительного этапа Российской олимпиады, а с целью проверки её боеготовности в Санкт-Петербурге с 14 по 28 июня были проведены учебно-тренировочные сборы.

Олимпиада проводилась, как обычно, в два дня, в течение которых участникам предлагалось решить по три задачи (на это отводилось 4,5 часа в каждый из этих дней), полное решение каждой задачи оценивалось семью баллами. Задачи олимпиады включены в «Задачник «Кванта» этого номера, за исключением задачи 3 первого дня.

Пусть S — множество неотрицательных целых чисел. Найдите все функции f, определенные на S и принимающие свои значения в S, такие, что

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$$

для всех m, n из S.

(Румыния)

Олимпиада этого года оказалась одной из самых трудных за последние несколько лет. Золотая медаль присуждалась участникам, набравшим 28 и более очков из 42 возможных, серебряная - набравшим от 20 до 27 очков, бронзовая - набравшим от 12 до 19 очков. Не слишком высокие результаты объясняются ещё и тяжёлыми климатическими условиями, в которых проходила олимпиада (сильная жара и почти 100-процентная влажность).

Результаты команды России приведены в таблице 1, а таблица 2 содержит результаты выступления стран в неофициальном командном зачёте (напомним, что, согласно положению, олимпиада представляет собой личное первенство).

Хочется отметить успешное выступление Сергея Норина, получившего золотую медаль в третий раз подряд, а также результат самого молодого участника нашей команды Николая Дурова.

В третий раз получил золотую медаль *Юлий Санников* (Украина). Золотыми медалями были награждены *Сергей Чих* (Белоруссия), *Давид Чхаидзе* (Грузия) и *Лев Буховский* (Израиль) - воспитанник ФМЛ 239 Санкт-Петербурга.

Следующая международная математическая олимпиада состоится в июле 1997 года в городе Мардель-Плата (Аргентина).

Таблица 1: Результаты участников команды России

	Задача						
Участник	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Николай Дуров	7	7	7	7	7	2	37
Вероника Есаулова	4	7	3	7	1	3	25
Юрий Макарычев	6	7	5	1	0	0	19
Сергей Норин	7	7	7	7	7	1	36
Елена Рудо	2	1	6	7	0	7	23
Константин Салихов	2	7	5	7	1	0	22

Таблица 2: Неофициальный командный зачёт по результатам стран

Страна	Очки	Медали (з + с + б)
1. Румыния	187	4 + 2 + 0
2. США	185	4 + 2 + 0
3. Венгрия	167	3 + 2 + 1
4. Россия	167	3 + 2 + 1
5. Великобритания	162	2 + 3 + 1
6. Китай	160	3 + 3 + 0
7. Вьетнам	155	3 + 1 + 1
8. Корея	151	2 + 3 + 0
9. Иран	143	1 + 4 + 1
10. Германия	137	3 + 1 + 1
11-12. Япония	136	1 + 3 + 1
11-12. Болгария	136	1 + 4 + 1
13. Польша	122	0 + 3 + 3

Страна	Очки	Медали (з + с + б)
14. Индия	118	1 + 3 + 1
15. Израиль	114	1 + 2 + 2
...18. Украина	105	1 + 0 + 5
...21. Белоруссия	99	1 + 1 + 2
...30. Грузия	78	1 + 0 + 2
...32. Литва	68	0 + 1 + 2
33. Латвия	66	0 + 0 + 3
34-35. Армения	63	0 + 0 + 1
...41. Молдавия	55	0 + 0 + 2

Задачи олимпиады

6 класс

1. Выразите числа 5, 26, 30 и 55, используя четыре цифры 5, знаки арифметических действий и скобки. Например: $3 = (5+5+5):5$.

2. Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 5 дает остаток 4, при делении на 7 - остаток 6, при делении на 9 - остаток 8.

3. В сказочном озере плавает сказочная лилия. Эта лилия за сутки вдвое увеличивает свои размеры и полностью заполняет озеро за 137 суток. За какое время заполнят озеро две сказочные лилии?

4. Вова, Петя и Коля сварили уху и съели её поровну. Для ухи Вова дал 5 рыб, Петя - 3 рыбы. Коля рыбу не поймал и отдал за уху 2400 рублей. Как Вова и Петя должны разделить между собой эти деньги, чтобы дележ оказался справедливым?

5. Лист бумаги разрезали на 4 части. Затем некоторые или все из этих частей опять разрезали на 4 части и т.д. Можно ли в результате получить 50 листочков бумаги любого размера?

6. Найдите сумму 100 дробей:
$$\frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}+\frac{1}{3*4}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{98*99}+\frac{1}{99*100}+\frac{1}{100*101}.$$

7 класс

1. В комнате стоят стулья и табуретки. У каждой табуретки 3 ножки, у каждого стула - 4 ножки. Когда на всех стульях сидят люди, в комнате 39 «ног». Сколько стульев и табуреток в комнате?

2. Постройте график функции
$$\frac{x+3y}{x+2y+1}=1$$

3. Разложите на множители выражение x^4+x^2+1.

4. У Пети есть 44 монеты и 10 карманов. Сможет ли он разложить свои монеты по карманам так, чтобы количество монет было различным? Ответ объясните.

5. Найдите натуральные x, которые являются решениями уравнения
$$(x+3)(x+4)(x+5)=4735.$$

6. Докажите, что сумма длин медиан треугольника больше 3/4 его периметра.

8 класс

1. Решите систему уравнений
$$\begin{cases}\frac{4}{x+y-1}-\frac{5}{2x-y+3}+\frac{5}{2}=0,\\ \frac{3}{x+y-1}+\frac{1}{2x-y+3}+\frac{7}{5}=0\end{cases}$$

2. Постройте график функции
$$y=-2x+\frac{1}{\sqrt{x+3}}+3-$$
$$-\frac{1}{\sqrt{x+3}}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{\sqrt{4-x}}+$$
$$+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\sqrt{4-x}}$$

3. Является ли число
$$\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}$$
рациональным?

4. Есть только два двузначных числа, каждое из которых равно неполному квадрату разности своих цифр. Найдите эти числа, если одно число на 11 больше другого числа.

5. Найдите сумму 99 дробей:
$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{98}}+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}.$$

6. Даны отрезки длиной a и b. Постройте с помощью циркуля и линейки отрезок длиной
$$\sqrt{a^2-2ab+2b^2}$$

9 класс

1. Найдите все целые числа m и n, удовлетворяющие равенству

$$m(m-2n)=4n^2,$$

и докажите, что других таких целых чисел не существует.

2. Докажите, что при любых действительных числах x и y имеет место неравенство

$$x^2+2xy+3y^2+2x+6y+4\geq 1.$$

3. Постройте график уравнения

$$|y|+\tfrac{1}{|y|}=|x|+\tfrac{1}{|x|}.$$

4. Докажите, что число

$$\underset{\text{2n цифр}}{11...1}-\underset{\text{n цифр}}{222...2}$$

является квадратом натурального числа (например: $11-2=9=3^2$, $1111-22=1089=33^2$ и т.д.).

5. Решите уравнение

$$x\tfrac{50-x}{x+1}(x+\tfrac{50-x}{x+1})=576.$$

6. Периметр треугольника ABC равен a. Прямая A_1C_1, параллельная основанию AC, отсекает от треугольника ABC треугольник A_1BC_1, периметр которого равен b. Найдите длину основания AC, если известно, что в трапецию AA_1C_1C можно вписать окружность.

10 класс

1. Докажите, что из равенства $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac$, где a,b,c - действительные числа, следует, что $a=b=c$.

2. Пусть $a<b<c$. Докажите, что уравнение

$$\tfrac{1}{x-a}+\tfrac{1}{x-b}+\tfrac{1}{x-c}=0$$

имеет ровно два корня x_1 и x_2, удовлетворяющие неравенствам

$$a<x_1<b<x_2<c$$

3. Решите уравнение

$$x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}.$$

4. В треугольнике взята произвольная точка, через которую проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. Площади трёх полученных при этом треугольников равны S_1, S_2, S_3. Найдите площадь исходного треугольника.

5. Упростите выражение

$$\tan\alpha+2\tan\alpha+4\tan 4\alpha+$$
$$+8\tan 8\alpha+16\tan 16\alpha+$$
$$+32\tan 32\alpha.$$

6. Постройте график функции $y=\log_{1/2}(x-\frac{1}{2})+$

$$+\log_2\sqrt{4x^2-4x+1}+0.5^{1-2x}.$$