



Рис. 1: IMMO 1996

## XXXVII Международная математическая олимпиада

С 5 по 17 июля в Бомбее (Индия) состоялась XXXVII Международная математическая олимпиада, ставшая рекордной по числу участников: 426 школьников из 75 стран мира. Ещё 3 страны прислали своих официальных наблюдателей, а это значит, что в следующем году команды этих стран станут полноправными участниками состязаний.

В команду России в этом году вошли:

*Николай Дуров* — девятиклассник ФМЛ 239 из Санкт-Петербурга,

*Вероника Есаулова* — выпускница ФМЛ 239 из Санкт-Петербурга,

*Юрий Макарычев* — выпускник с.ш. 57 из Москвы,

*Сергей Норин* — выпускник ФМЛ 239 из Санкт-Петербурга,

*Елена Рудо* — выпускница ФМЛ 239 из Санкт-Петербурга,

*Константин Салихов* — выпускник СУНЦ МГУ из Казани.

Запасным участником был выпускник ФМЛ 239 *Дмитрий Запорожцев*. Все участники команды получили право поступления в избранные ими вузы без вступительных экзаменов.

Команда была сформирована по итогам заключительного этапа Российской олимпиады, а с целью проверки её боеготовности в Санкт-Петербурге с 14 по 28 июня были проведены учебно-тренировочные сборы.

Олимпиада проводилась, как обычно, в два дня, в течение которых участникам предлагалось решить по три задачи (на это отводилось 4,5 часа в каждый из этих дней), полное решение каждой задачи оценивалось семью баллами. Задачи олимпиады включены в «Задачник «Кванта» этого номера, за исключением задачи 3 первого дня.

Пусть  $S$  — множество неотрицательных целых чисел. Найдите все функции  $f$ , определенные на  $S$  и принимающие свои значения в  $S$ , такие, что

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$$

для всех  $m, n$  из  $S$ .

(Румыния)

Олимпиада этого года оказалась одной из самых трудных за последние несколько лет. Золотая медаль присуждалась участникам, набравшим 28 и более очков из 42 возможных, серебряная — набрав-

шим от 20 до 27 очков, бронзовая — набравшим от 12 до 19 очков. Не слишком высокие результаты объясняются ещё и тяжёлыми климатическими условиями, в которых проходила олимпиада (сильная жара и почти 100-процентная влажность).

Результаты команды России приведены в таблице 1, а таблица 2 содержит результаты выступления стран в неофициальном командном зачёте (напомним, что, согласно положению, олимпиада представляет собой личное первенство).

Хочется отметить успешное выступление Сергея Норина, получившего золотую медаль в третий раз подряд, а также результат самого молодого участника нашей команды Николая Дурова.

В третий раз получил золотую медаль *Юлий Санников* (Украина). Золотыми медалями были награждены *Сергей Чих* (Белоруссия), *Давид Чхаидзе* (Грузия) и *Лев Буховский* (Израиль) — воспитанник ФМЛ 239 Санкт-Петербурга.

Следующая международная математическая олимпиада состоится в июле 1997 года в городе Мардель-Плата (Аргентина).

Таблица 1: Результаты участников команды России

Участник	Задача						
	1	2	3	4	5	6	$\Sigma$
Николай Дуров	7	7	7	7	7	2	37
Вероника Есаулова	4	7	3	7	1	3	25
Юрий Макарычев	6	7	5	1	0	0	19
Сергей Норин	7	7	7	7	7	1	36
Елена Рудо	2	1	6	7	0	7	23
Константин Салихов	2	7	5	7	1	0	22

Таблица 2: Неофициальный командный зачёт по результатам стран

Страна	Очки	Медали (з + с + б)
1. Румыния	187	4 + 2 + 0
2. США	185	4 + 2 + 0
3. Венгрия	167	3 + 2 + 1
4. Россия	167	3 + 2 + 1
5. Великобритания	162	2 + 3 + 1
6. Китай	160	3 + 3 + 0
7. Вьетнам	155	3 + 1 + 1
8. Корея	151	2 + 3 + 0
9. Иран	143	1 + 4 + 1
10. Германия	137	3 + 1 + 1
11-12. Япония	136	1 + 3 + 1
11-12. Болгария	136	1 + 4 + 1
13. Польша	122	0 + 3 + 3

Страна	Очки	Медали (з + с + б)
14. Индия	118	1 + 3 + 1
15. Израиль	114	1 + 2 + 2
...18. Украина	105	1 + 0 + 5
...21. Белоруссия	99	1 + 1 + 2
...30. Грузия	78	1 + 0 + 2
...32. Литва	68	0 + 1 + 2
33. Латвия	66	0 + 0 + 3
34-35. Армения	63	0 + 0 + 1
...41. Молдавия	55	0 + 0 + 2

## Задачи олимпиады

### 6 класс

- Выразите числа 5, 26, 30 и 55, используя четыре цифры 5, знаки арифметических действий и скобки. Например:  $3 = (5 + 5 + 5) : 5$ .
- Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 5 дает остаток 4, при делении на 7 - остаток 6, при делении на 9 - остаток 8.
- В сказочном озере плавает сказочная лилия. Эта лилия за сутки вдвое увеличивает свои размеры и полностью заполняет озеро за 137 суток. За какое время заполнят озеро две сказочные лилии?
- Вова, Петя и Коля сварили уху и съели её поровну. Для ухи Вова дал 5 рыб, Петя - 3 рыбы. Коля рыбу не поймал и отдал за уху 2400 рублей. Как

Вова и Петя должны разделить между собой эти деньги, чтобы дележ оказался справедливым?

- Лист бумаги разрезали на 4 части. Затем некоторые или все из этих частей опять разрезали на 4 части и т.д. Можно ли в результате получить 50 листочков бумаги любого размера?

- Найдите сумму 100 дробей:

$$\frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} + \dots + \frac{1}{98*99} + \frac{1}{99*100} + \frac{1}{100*101}.$$

### 7 класс

- В комнате стоят стулья и табуретки. У каждой табуретки 3 ножки, у каждого стула - 4 ножки. Когда на всех стульях сидят люди, в комнате 39 «ног». Сколько стульев и табуреток в комнате?

- Постройте график функции

$$\frac{x+3y}{x+2y+1} = 1$$

- Разложите на множители выражение  $x^4 + x^2 + 1$ .
- У Пети есть 44 монеты и 10 карманов. Сможет ли он разложить свои монеты по карманам так, чтобы количество монет было различным? Ответ объясните.

- Найдите натуральные  $x$ , которые являются решениями уравнения

$$(x+3)(x+4)(x+5) = 4735.$$

- Докажите, что сумма длин медиан треугольника больше  $3/4$  его периметра.

### 8 класс

- Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{4}{x+y-1} - \frac{5}{2x-y+3} + \frac{5}{2} = 0, \\ \frac{3}{x+y-1} + \frac{1}{2x-y+3} + \frac{7}{5} = 0 \end{cases}$$

2. Постройте график функции

$$y = -2x + \frac{1}{\sqrt{x+3}} + 3 - \frac{1}{\sqrt{x+3}} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{\sqrt{4-x}} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\sqrt{4-x}}$$

3. Является ли число

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{6-4\sqrt{2}}$$

рациональным?

4. Есть только два двузначных числа, каждое из которых равно неполному квадрату разности своих цифр. Найдите эти числа, если одно число на 11 больше другого числа.

5. Найдите сумму 99 дробей:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{98}} + \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}.$$

6. Даны отрезки длиной  $a$  и  $b$ . Постройте с помощью циркуля и линейки отрезок длиной

$$\sqrt{a^2 - 2ab + 2b^2}$$

## 9 класс

1. Найдите все целые числа  $m$  и  $n$ , удовлетворяющие равенству

$$m(m-2n) = 4n^2,$$

и докажите, что других таких целых чисел не существует.

2. Докажите, что при любых действительных числах  $x$  и  $y$  имеет место неравенство

$$x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 6y + 4 \geq 1.$$

3. Постройте график уравнения

$$|y| + \frac{1}{|y|} = |x| + \frac{1}{|x|}.$$

4. Докажите, что число

$$\frac{11\dots1}{2n \text{ цифр}} - \frac{22\dots2}{n \text{ цифр}}$$

является квадратом натурального числа (например:  $11 - 2 = 9 = 3^2$ ,  $1111 - 22 = 1089 = 33^2$  и т.д.).

5. Решите уравнение

$$x \frac{50-x}{x+1} \left( x + \frac{50-x}{x+1} \right) = 576.$$

6. Периметр треугольника  $ABC$  равен  $a$ . Прямая  $A_1C_1$ , параллельная основанию  $AC$ , отсекает от треугольника  $ABC$  треугольник  $A_1BC_1$ , периметр которого равен  $b$ . Найдите длину основания  $AC$ , если известно, что в трапецию  $AA_1C_1C$  можно вписать окружность.

## 10 класс

1. Докажите, что из равенства  $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$ , где  $a, b, c$  - действительные числа, следует, что  $a = b = c$ .

2. Пусть  $a < b < c$ . Докажите, что уравнение

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$$

имеет ровно два корня  $x_1$  и  $x_2$ , удовлетворяющие неравенствам

$$a < x_1 < b < x_2 < c$$

3. Решите уравнение

$$x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}.$$

4. В треугольнике взята произвольная точка, через которую проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. Площади трёх полученных при этом треугольников равны  $S_1, S_2, S_3$ . Найдите площадь исходного треугольника.

5. Упростите выражение

$$\tan \alpha + 2 \tan \alpha + 4 \tan 4\alpha + 8 \tan 8\alpha + 16 \tan 16\alpha + 32 \tan 32\alpha.$$

6. Постройте график функции  $y = \log_{1/2}(x - \frac{1}{2}) +$

$$+ \log_2 \sqrt{4x^2 - 4x + 1} + 0.5^{1-2x}.$$