Pembahasan Soal

SNMPTN 2012

SELEKSI NASIONAL MASUK PERGURUAN TINGGI NEGERI

Disertai TRIK SUPERKILAT dan LOGIKA PRAKTIS

Matematika IPA

Disusun Oleh :

Pak Anang

Kumpulan SMART SOLUTION dan TRIK SUPERKILAT
Pembahasan Soal SNMPTN 2012
Matematika IPA Kode Soal 634

By Pak Anang (http://pak-anang.blogspot.com)

1. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2 \tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}$

   A. $-\sqrt{3}$

   B. 0

   C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

   D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

   E. $\sqrt{3}$

TRIK SUPERKILAT:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2 \tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)} = \cancel{\frac{x^2}{x^2 \tan\frac{\pi}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Penyelesaian:

Ingat:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$1 = \sin^2 x + \cos^2 x$$

Substitusi $x = 0$ pada limit:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2 \tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1-1}{0^2\sqrt{3}} = \frac{0}{0} \text{ (bentuk tak tentu)}$$

Jadi limit tersebut diselesaikan menggunakan identitas trigonometri:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2 \tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)} &= \lim_{x\to 0} \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x) - \cos^2 x}{x^2 \tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2 \tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)} \quad \left(\text{Ingat } \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\right) \\
&= 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)} \\
&= \frac{1}{\tan\left(0+\frac{\pi}{3}\right)} \\
&= \frac{1}{\tan 60^\circ} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{(Ingat rasionalisasi bentuk akar)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}$$

2. Di dalam kotak terdapat 1 bola biru, 6 bola merah, dan 2 bola putih. Jika diambil 7 bola tanpa pengembalian, maka peluang banyak bola merah yang terambil dua kali banyak bola putih yang terambil adalah ....

TRIK SUPERKILAT:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\cancel{{}_2C_2}\times {}_6C_2\times \cancel{{}_1C_1}}{{}_9C_7}=\frac{6\times 5}{9\times 8}=\frac{5}{12}$$

A. $\frac{5}{9}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{5}{12}$

D. $\frac{7}{12}$

E. $\frac{20}{45}$

Penyelesaian:

Terdapat beberapa kemungkinan dengan syarat bola merah yang terambil dua kali bola putih yang terambil, yaitu:

- Kemungkinan pertama:

  Misal pada pengambilan sebanyak 7 bola di dalam kotak telah terambil 1 bola putih, maka untuk memenuhi syarat tersebut juga harus terambil 2 bola merah. Nah, akibatnya bola biru yang terambil harus sebanyak 4 bola biru. Jelas ini tidak mungkin, mengingat di dalam kotak hanya terdapat 1 bola biru saja.

- Kemungkinan kedua:

  Misal pada pengambilan sebanyak 7 bola di dalam kotak telah terambil 2 bola putih, maka untuk memenuhi syarat tersebut juga harus terambil 4 bola merah. Nah, akibatnya bola biru yang terambil harus sebanyak 1 bola biru. Kejadian inilah yang dimaksud dalam soal, mengingat di dalam kotak hanya terdapat 1 bola biru saja.

Jadi dari dua kemungkinan tersebut di atas, pilihan kejadian yang mungkin adalah kemungkinan kejadian kedua, yaitu dalam pengambilan 7 bola di dalam kotak terambil 2 bola putih, 4 bola merah dan 1 bola biru.

Sehingga peluangnya adalah:

$$\begin{aligned}
P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}\Rightarrow P(2P\cap 4M\cap 1B) &= \frac{{}_2C_2\times {}_6C_2\times {}_1C_1}{{}_9C_7}\\
&= \frac{\frac{2!}{(2-2)!\,2!}\times\frac{6!}{(6-2)!\,2!}\times\frac{1!}{(1-1)!\,1!}}{\frac{9!}{(9-7)!\,7!}}\\
&= \frac{\frac{\cancel{2!}}{0!\,\cancel{2!}}\times\frac{6!}{4!\,2!}\times\frac{\cancel{1!}}{0!\,\cancel{1!}}}{\frac{9!}{2!\,7!}}\\
&= \frac{\frac{1}{1}\times\frac{6\times 5\times\cancel{4!}}{\cancel{4!}\times 2\times 1}\times\frac{1}{1}}{\frac{9\times 8\times\cancel{7!}}{2\times 1\times\cancel{7!}}}\\
&= \frac{1\times 15\times 1}{36}\\
&= \frac{15}{36}\\
&= \frac{5}{12}
\end{aligned}$$

3. Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$, $y = 1$, dan $x = 2$ adalah ....

A. $\int_{-1}^{2}(1 - x^2)dx$

B. $\int_{-1}^{2}(x^2 - 1)dx$

C. $\int_{1}^{2}(x^2 - 1)dx$

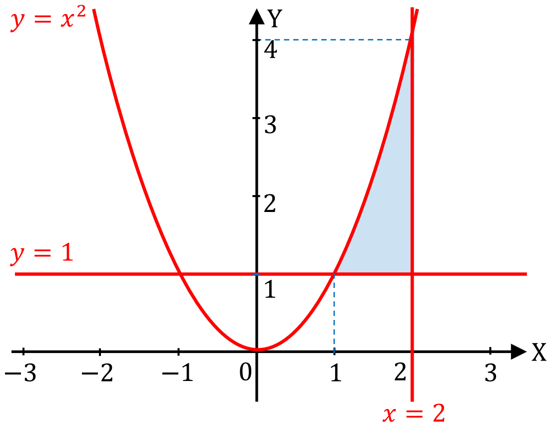
D. $\int_{-1}^{1}(1 - x^2)dx$

E. $\int_{0}^{2}(x^2 - 1)dx$

TRIK SUPERKILAT:
Gambar sketsa grafiknya dulu
Maka akan diperoleh
$L = \int_{1}^{2}(x^2 - 1)\,dx$

Penyelesaian:

Sekarang mari kita sketsa grafiknya.



Menentukan terlebih dahulu batas integrasi di sumbu X:

Batas kiri adalah perpotongan antara $y = x^2$ dengan $y = 1$, yaitu di $x = 1$.

Batas kanan adalah garis $x = 2$.

Jadi batas integrasi adalah dari $a = 1$ sampai $b = 2$.

Tentukan juga $f(x)$ dan $g(x)$ dalam selang interval $a < x < b$ yang memenuhi $f(x) > g(x)$.

Sehingga diperoleh $\begin{cases} f(x) \equiv y = x^2 \\ g(x) \equiv y = 1 \end{cases}$

Jadi luas daerah yang ditunjukkan oleh grafik di atas adalah:

$$L = \int_{a}^{b}[f(x) - g(x)]\,dx \;\;\Rightarrow\;\; L = \int_{1}^{2}(x^2 - 1)\,dx$$

4. $\frac{(\cos x+\sin x)^2}{(\cos x-\sin x)^2} = ...$

A. $\frac{1}{1-\cos 2x}$

B. $\frac{1}{1-\sin 2x}$

C. $\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}$

D. $\frac{1+2\sin x}{1-2\sin x}$

E. $\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}$

TRIK SUPERKILAT:
Substitusikan $x = 0°$ dan $x = 90°$ ke soal, maka jawabannya sama dengan 1.

Cek pada jawaban, yang hasilnya juga 1 hanya di jawaban E. Ya kan? ☺

Gampang kan?

Penyelesaian:

Ingat:

Identitas trigonometri
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Trigonometri sudut rangkap:
$\sin 2x = 2\sin x \cos x$

Perkalian istimewa
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$\begin{aligned}
\frac{(\cos x+\sin x)^2}{(\cos x-\sin x)^2} &= \frac{\cos^2 x + 2\sin x\cos x + \sin^2 x}{\cos^2 x - 2\sin x\cos x + \sin^2 x} \\
&= \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x) + 2\sin x\cos x}{(\cos^2 x + \sin^2 x) - 2\sin x\cos x} \quad (\text{Ingat } \cos^2 x + \sin^2 x = 1) \\
&= \frac{1 + 2\sin x\cos x}{1 - 2\sin x\cos x} \quad (\text{Ingat } 2\sin x\cos x = \sin 2x) \\
&= \frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}
\end{aligned}$$

5. Lingkaran $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$ memotong sumbu-x di titik A dan B. Jika P adalah titik pusat lingkaran tersebut, maka $\cos \angle APB = ...$

A. $\frac{7}{25}$

B. $\frac{8}{25}$

C. $\frac{12}{25}$

D. $\frac{16}{25}$

E. $\frac{18}{25}$

Penyelesaian:

Mencari pusat lingkaran dan panjang jari-jarinya.

Ingat:

$L \equiv (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ adalah lingkaran dengan pusat di (a, b) dan jari-jari r.

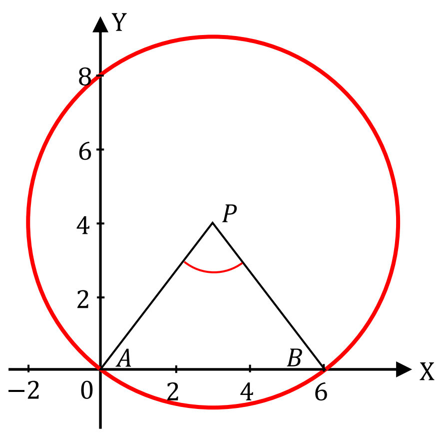
$L \equiv (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$ adalah lingkaran dengan pusat di $P(3, 4)$ dan jari-jari 5.

Mencari letak titik potong lingkaran pada sumbu X, substitusikan $y = 0$ ke persamaan lingkaran.

$$
\begin{aligned}
y = 0 \Rightarrow\ & (x-3)^2 + (0-4)^2 = 25 \\
\Leftrightarrow\ & (x-3)^2 + 16 = 25 \\
\Leftrightarrow\ & (x-3)^2 = 25 - 16 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 - 6x + 9 = 9 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 - 6x + 9 - 9 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 - 6x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x(x-6) = 0 \\
& \text{Pembuat nol} \\
\Rightarrow\ & x = 0 \text{ atau } x - 6 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x = 0 \quad \text{atau} \quad x = 6
\end{aligned}
$$

Jadi titik potong lingkaran pada sumbu X adalah di titik $A(0, 0)$ dan $B(6, 0)$.

Sehingga, gambar sketsa grafiknya pada bidang koordinat adalah sebagai berikut.



Panjang $AP = PB =$ jari-jari lingkaran $= 5$

Panjang $AB =$ jarak antara titik $(0, 0)$ke titik $(6, 0)$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{(6-0)^2 + (0-0)^2} \\
&= \sqrt{36 + 0} \\
&= \sqrt{36} \\
&= 6
\end{aligned}
$$

Sehingga besar $\angle APB$ bisa ditentukan dengan aturan kosinus sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
AB^2 = AP^2 + PB^2 - 2 \cdot AP \cdot PB \cdot \cos \angle APB \Rightarrow \cos \angle APB &= \frac{AP^2 + PB^2 - AB^2}{2 \cdot AP \cdot PB} \\
&= \frac{5^2 + 5^2 - 6^2}{2 \cdot 5 \cdot 5} \\
&= \frac{25 + 25 - 36}{50} \\
&= \frac{14}{50} \\
&= \frac{7}{25}
\end{aligned}
$$

6. Diberikan kubus $ABCD.EFGH$. Jika α adalah sudut antara bidang ACF dan alas $ABCD$, maka $\tan\alpha =$ ....

A. $\sqrt{2}$

B. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

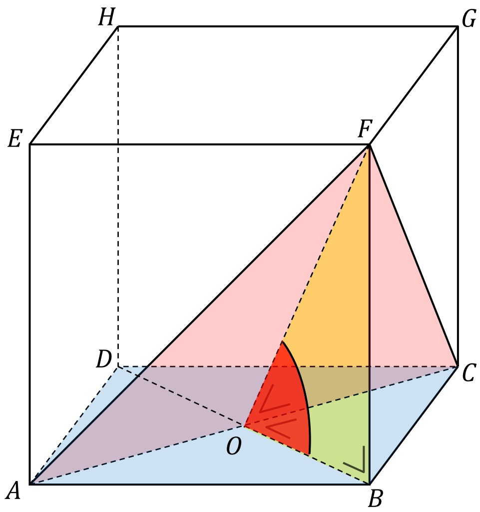
C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

E. $\sqrt{3}$

TRIK SUPERKILAT:
Logikanya, kita tahu panjang BF lebih panjang daripada BO.
Maka nilai tangen pasti lebih besar 1.
Jadi jawaban yang mungkin tinggal A dan E.
Dengan memisalkan rusuk kubus s, maka diperoleh nilai tangen adalah $\sqrt{2}$.

Penyelesaian:

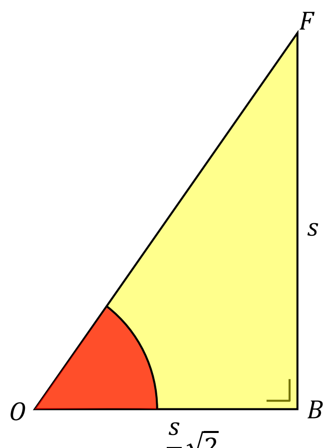


Sudut antara bidang ACF dan alas $ABCD$ adalah sudut yang dibentuk oleh ruas garis OF dan OB yaitu $\angle FOB$.

Misalkan panjang rusuk kubus tersebut adalah s, maka:

$$OB = \frac{1}{2}\text{diagonal bidang} \Rightarrow OB = \frac{1}{2} \times \left(s\sqrt{2}\right)$$
$$= \frac{s\sqrt{2}}{2}$$

Perhatikan ΔOBF, maka nilai tangen $\angle FOB$ adalah perbandingan sisi depan (FB) dibagi sisi samping (OB):



$$\tan\angle FOB = \frac{FB}{OB} \Rightarrow \tan\angle FOB = \frac{s}{\frac{s\sqrt{2}}{2}}$$
$$= s \times \frac{2}{\cancel{s}\sqrt{2}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \quad \text{(Rasionalisasi bentuk akar)}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$
$$= \sqrt{2}$$

7. Lingkaran $(x-4)^2+(y-2)^2=64$ menyinggung garis $x=-4$ di titik ....

A. $(-4,2)$
B. $(-4,-2)$
C. $(-4,4)$
D. $(-4,-4)$
E. $(-4,8)$

TRIK SUPERKILAT:
Substitusikan semua pilihan jawaban, mana yang memenuhi persamaan lingkaran.
Jelas $(-4,2)$ karena $(-4-4)^2+(2-2)^2=64$

Penyelesaian:

Untuk mencari letak titik singgung lingkaran terhadap garis $x=-4$, maka substitusikan $x=-4$ ke persamaan lingkaran, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} x=-4 \Rightarrow (-4-4)^2+(y-2)^2 &= 64 \\ \Leftrightarrow \quad 64+y^2-4y+4 &= 64 \\ \Leftrightarrow \quad y^2-4y+68 &= 64 \\ \Leftrightarrow \quad y^2-4y+68-64 &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad y^2-4y+4 &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad (y-2)(y-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad y_{1,2} &= 2 \end{aligned}$$

Jadi titik singgung lingkaran dengan garis $x=-4$ adalah $(-4,2)$.

8. Jika suku banyak $2x^3 - x^2 + 6x - 1$ dibagi $2x - 1$, maka sisanya adalah ....
   A. -10
   B. -1
   C. 1
   D. 2
   E. 23

TRIK SUPERKILAT:
Gunakan metode horner. Metode paling ampuh untuk mencari nilai sisa untuk tipe soal ini.

Penyelesaian:

Pembagian suku banyak dengan metode Horner:

$$\mathbf{2x - 1 = 0}$$

$$\begin{array}{c|cccc}
\boldsymbol{x = \frac{1}{2}} & 2 & -1 & 6 & -1 \\
 & & 1 & 0 & 3 \\
\hline
 & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{6} & \boxed{\mathbf{2}}
\end{array}$$

Jadi, sisa pembagian suku banyak $2x^3 - x^2 + 6x - 1$ oleh $2x - 1$ adalah 2.

Pembagian suku banyak dengan metode biasa:

$$\begin{array}{r|l}
 & \boldsymbol{x^2 + 3} \\
\hline
\mathbf{2x - 1} & 2x^3 - x^2 + 6x - 1 \\
 & 2x^3 - x^2 \qquad\qquad\quad - \\
\hline
 & \qquad\quad 6x - 1 \\
 & \qquad\quad 6x - 3 \quad - \\
\hline
 & \qquad\qquad\quad \boxed{\mathbf{2}}
\end{array}$$

Jadi, sisa pembagian suku banyak $2x^3 - x^2 + 6x - 1$ oleh $2x - 1$ adalah 2.

9. Grafik fungsi $f(x) = ax^3 + bx^2 - cx + 20$ turun, jika ....

A. $b^2 - 4ac < 0$ dan $a < 0$
B. $b^2 + 4ac < 0$ dan $a < 0$
C. $b^2 + 3ac < 0$ dan $a > 0$
D. $b^2 + 3ac < 0$ dan $a < 0$
E. $b^2 - 3ac < 0$ dan $a < 0$

Penyelesaian:

Ingat:

$y = ax^n \Rightarrow y' = nax^{n-1}$.

Suatu fungsi $f(x)$ akan turun jika $f'(x) < 0$.

$f(x) = ax^2 + bx + c$ akan definit negatif jika $D < 0$ dan $a < 0$.

Misal turunan pertama fungsi $f(x)$ adalah $f'(x)$, maka:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 - cx + 20 \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx - c$$

Fungsi $f(x)$ akan turun jika $f'(x) < 0$, sehingga:

$$f'(x) < 0 \Rightarrow 3ax^2 + 2bx - c < 0$$

Syarat fungsi $h(x) = 3ax^2 + 2bx - c$ akan bernilai negatif adalah:

$$\begin{aligned} D < 0 \Rightarrow \quad & B^2 - 4AC < 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (2b)^2 - 4(3a)(-c) < 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 4b^2 + 12ac < 0 \\ \Leftrightarrow \quad & b^2 + 3ac < 0 \end{aligned} \qquad \text{dan} \qquad \begin{aligned} A < 0 \Rightarrow \quad & 3a < 0 \\ \Leftrightarrow \quad & a < 0 \end{aligned}$$

Jadi fungsi $f(x) = ax^3 + bx^2 - cx + 20$ turun, jika $b^2 + 3ac < 0$ dan $a < 0$.

10. Diketahui segitiga dengan titik sudut $(-4, 0)$, $(4, 0)$, dan $(4\cos\theta, 4\sin\theta)$ untuk $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Banyak nilai θ yang mungkin agar luas segitiga tersebut 13 adalah ....

A. 8
B. 4
C. 3
D. 2
E. 1

Penyelesaian:

Luas segitiga dengan titik sudut (x_1, y_1), (x_2, y_2), dan (x_3, y_3) adalah:

$$L = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Sehingga, apabila titik sudut segitiga masing-masing adalah $(-4, 0)$, $(4, 0)$, dan $(4\cos\theta, 4\sin\theta)$ serta luas segitiga adalah 13, maka nilai luas harus diberi tanda mutlak (karena luas bernilai negatif apabila berada di bawah sumbu X):

$$L = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow |13| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4\cos\theta & 4\sin\theta & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow |13| = \frac{1}{2}(32\sin\theta)$$

$$\Leftrightarrow |13| = 16\sin\theta$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{13}{16}\right| = \sin\theta$$

Dalam interval $0 < \theta < 2\pi$, nilai $\sin\theta = \left|\frac{13}{16}\right|$ yang tentunya bisa bernilai positif dan bisa bernilai negatif ada 4 buah, yaitu masing-masing bernilai positif di kuadran I $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ dan kuadran II $\left(\frac{\pi}{2} < \theta < \pi\right)$, serta bernilai negatif pada kuadran II $\left(\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}\right)$ dan kuadran IV $\left(\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi\right)$.

11. Vektor $\vec{x}$ dicerminkan terhadap garis $y = 0$. Kemudian hasilnya diputar terhadap titik asal O sebesar $\theta > 0$ searah jarum jam, menghasilkan vektor $\vec{y}$. Jika $\vec{y} = A\vec{x}$, maka matriks $A =$ ....

A. $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

E. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

Ingat!

Matriks transformasi pencerminan terhadap $y = 0$ (sumbu X) adalah:

$$M_{sbX} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Matriks transformasi rotasi terhadap titik asal O sebesar θ berlawanan jarum jam adalah:

$$M_{R(O,\theta)} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Dengan menggunakan konsep komposisi transformasi, jika vektor $\vec{x}$ secara berturut-turut ditransformasikan oleh matriks transformasi T_1 lalu dilanjutkan transformasi oleh matriks transformasi T_2 maka:

$$\begin{aligned} \vec{y} = (T_2 \circ T_1)\vec{x} \Rightarrow \vec{y} &= \left(M_{R(O,-\theta)} \circ M_{M_{sbX}}\right)\vec{x} \\ \Leftrightarrow \vec{y} &= \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\vec{x} \quad \left(\text{Ingat } \begin{matrix} \sin(-\theta) = -\sin\theta \\ \cos(-\theta) = \cos\theta \end{matrix}\right) \\ \Leftrightarrow \vec{y} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\vec{x} \end{aligned}$$

Karena $\vec{y} = A\vec{x}$, maka jelas matriks A adalah:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

12. Himpunan A memenuhi hubungan
$\{1\} \subset A \subset \{1,2,3,4,5,6\}$.
Jika 6 adalah anggota A, maka banyak himpunan A yang mungkin adalah ....

A. 4
B. 8
C. 16
D. 24
E. 32

TRIK SUPERKILAT:
Kita akan mencari himpunan bagian dari 4 anggota yang lain yaitu $\{2,3,4,5\}$, jadi banyaknya himpunan bagian adalah $2^4 = 16$.

Penyelesaian:

Karena $\{1\} \subset A$ dan 6 adalah anggota A, maka jelas $\{1,6\} \subset A$.

Sehingga banyaknya anggota A yang mungkin adalah sebagai berikut:

Dua anggota:
Hanya terdapat satu kemungkinan saja yaitu $\{1,6\} \subset A$

Tiga anggota:
Terdapat sebanyak ${}_4C_1 = 4$ kemungkinan yaitu $\{1,2,6\} \subset A$
$\{1,3,6\} \subset A$
$\{1,4,6\} \subset A$
$\{1,5,6\} \subset A$

Empat anggota:
Terdapat sebanyak ${}_4C_2 = 6$ kemungkinan yaitu $\{1,2,3,6\} \subset A$
$\{1,2,4,6\} \subset A$
$\{1,2,5,6\} \subset A$
$\{1,3,4,6\} \subset A$
$\{1,3,5,6\} \subset A$
$\{1,4,5,6\} \subset A$

Lima anggota:
Terdapat sebanyak ${}_4C_3 = 4$ kemungkinan yaitu $\{1,2,3,4,6\} \subset A$
$\{1,2,3,5,6\} \subset A$
$\{1,2,4,5\ 6\} \subset A$
$\{1,3,4,5,6\} \subset A$

Enam anggota:
Terdapat sebanyak ${}_4C_4 = 1$ kemungkinan yaitu $\{1,2,3,4,5,6\} \subset A$

Sehingga banyaknya himpunan bagian dari A yang mungkin adalah:

$$1 + {}_4C_1 + {}_4C_2 + {}_4C_3 + {}_4C_4 = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$$

13. Diberikan suku banyak $p(x) = x^2 + bx + c$. Jika b dan c dipilih secara acak dari selang $[0, 2]$, maka peluang suku banyak tersebut tidak mempunyai akar adalah ....

A. 0

B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{3}{4}$

E. $\frac{5}{6}$

Penyelesaian:

Ingat!

Diskriminan persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ adalah $D = b^2 - 4ac$.

Sifat-sifat diskriminan $\begin{cases} D > 0 \Rightarrow \text{memiliki dua akar real berbeda} \\ D = 0 \Rightarrow \text{memiliki dua akar real kembar} \\ D < 0 \Rightarrow \text{tidak memiliki akar real (akar-akar imajiner)} \end{cases}$

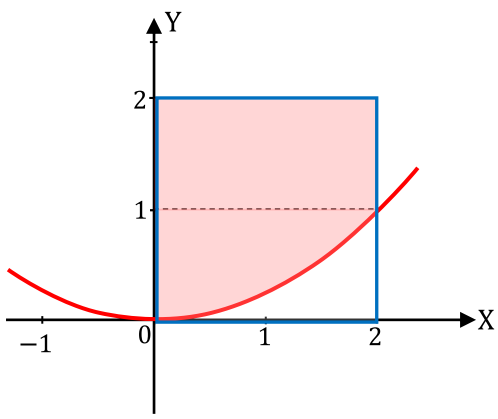
Syarat $p(x) = x^2 + bx + c$ tidak mempunyai akar adalah nilai $D < 0$.

$$\begin{aligned} D < 0 \Rightarrow b^2 - 4c &< 0 \\ \Leftrightarrow \quad b^2 &< 4c \\ \Leftrightarrow \quad \frac{b^2}{4} &< c \end{aligned}$$

Jika a dan b berada dalam selang $[0, 2]$ dimisalkan $x = b$ dan $y = c$ sehingga persamaan di atas menjadi:

$$\frac{b^2}{4} < c \Rightarrow y > \frac{x^2}{4}$$

Fungsi $y > \frac{x^2}{4}$ dengan batas $0 \leq a \leq 2$ dan $0 \leq b \leq 2$ bisa digambar pada sketsa grafik berikut:



Perhatikan gambar, daerah hasil dari a dan b adalah daerah persegi bergaris tepi berwarna biru dengan ukuran 2×2, sehingga jumlah ruang sampelnya adalah:

$$n(S) = \text{Luas persegi} = 2 \times 2 = 4$$

Sedangkan, kejadian yang dimaksudkan pada soal adalah peluang suku banyak tersebut tidak memiliki akar berada pada daerah arsir berwarna merah, sehingga jumlah kejadiannya adalah:

$$\begin{aligned} n(A) &= \text{Luas daerah arsir} \\ &= \int_0^2 \left(2 - \frac{x^2}{4}\right) dx \\ &= \left[2x - \frac{x^3}{12}\right]_0^2 \\ &= \left(2(2) - \frac{(2)^3}{12}\right) - \left(2(0) - \frac{(0)^3}{12}\right) \\ &= \left(4 - \frac{8}{12}\right) - (0) \\ &= \frac{48 - 8}{12} \\ &= \frac{40}{12} \\ &= \frac{10}{3} \end{aligned}$$

Jadi peluang suku banyak tersebut tidak memiliki akar adalah:

$$\begin{aligned} P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} &= \frac{\frac{10}{3}}{4} \\ &= \frac{10}{3} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{10}{12} \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

14. Nilai $\sqrt{3}\sin x - \cos x < 0$, jika ....

A. $\frac{7\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{7}$

B. $\frac{5\pi}{6} < x < \frac{7\pi}{6}$

C. $\frac{5\pi}{7} < x < \frac{10\pi}{7}$

D. $\frac{\pi}{6} < x < \frac{9\pi}{6}$

E. $\frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{4}$

Penyelesaian:

Ingat bentuk $a\sin x + b\cos x = r\cos(x-\theta)$

dimana

$$r = \sqrt{a^2+b^2} \text{ dan } \tan\theta = \frac{a}{b}$$

Perhatikan $\sqrt{3}\sin x - \cos x < 0$ berarti $a = \sqrt{3}$ dan $b = -1$.

Sehingga, $r = \sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow r = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

Dan $\tan\theta = \frac{a}{b} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{a}{b}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = \arctan\left(-\sqrt{3}\right) = 120° = \frac{2\pi}{3}$

Sehingga,

$$\sqrt{3}\sin x - \cos x < 0$$

$$\Rightarrow \quad 2\cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) < 0$$

Persamaan trigonometri sederhana

$$\cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = 0 = \cos\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad x_1 - \frac{2\pi}{3} &= \frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi \\
\Leftrightarrow \quad x_1 &= \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) + n\cdot 2\pi \\
\Leftrightarrow \quad x_1 &= \left(\frac{3\pi}{6} + \frac{4\pi}{6}\right) + n\cdot 2\pi \\
\Leftrightarrow \quad x_1 &= \frac{7\pi}{6} + n\cdot 2\pi
\end{aligned}$$

$n = -1 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{6}$

$n = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{7\pi}{6}$

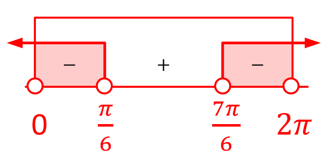
$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad x_2 - \frac{2\pi}{3} &= \left(-\frac{\pi}{2}\right) + n\cdot 2\pi \\
\Leftrightarrow \quad x_2 &= \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) + n\cdot 2\pi \\
\Leftrightarrow \quad x_2 &= \left(-\frac{3\pi}{6} + \frac{4\pi}{6}\right) + n\cdot 2\pi \\
\Leftrightarrow \quad x_2 &= \frac{\pi}{6} + n\cdot 2\pi
\end{aligned}$$

$n = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{6}$

$n = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{7\pi}{6}$

Jadi himpunan penyelesaian yang memenuhi $2\cos(x - \frac{2\pi}{3}) = 0$ adalah $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$

Daerah penyelesaian pertidaksamaan $2\cos(x - \frac{2\pi}{3}) < 0$ bisa digambarkan pada garis bilangan berikut:



Jadi daerah penyelesaiannya adalah $0 < x < \frac{\pi}{6}$ atau $\frac{7\pi}{6} < x < 2\pi$.

Jadi daerah yang memenuhi pada jawaban adalah jawaban A yaitu $\frac{7\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{7}$.

15. Diketahui $\|\vec{u}\| = 1$ dan $\|\vec{v}\| = 2$. Jika $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ membentuk sudut $30°$, maka $(\vec{u} + \vec{v}) \circ \vec{v} = ...$

A. $\sqrt{3} + 4$
B. $\sqrt{3} + 2$
C. $2\sqrt{3} + 4$
D. 3
E. 5

Penyelesaian:

Ingat!

$\vec{a} \circ \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$

Sifat operasi aljabar vektor:

Distributif: $(\vec{a} + \vec{b}) \circ \vec{c} = \vec{a} \circ \vec{c} + \vec{b} \circ \vec{c}$

$$\begin{aligned}
(\vec{u} + \vec{v}) \circ \vec{v} &= \vec{u} \circ \vec{v} + \vec{v} \circ \vec{v} \\
&= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) + \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \angle(\vec{v}, \vec{v}) \\
&= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos 30° + \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos 0° \\
&= 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + 2 \cdot 2 \cdot 1 \\
&= \sqrt{3} + 4
\end{aligned}$$

Untuk download rangkuman materi, kumpulan SMART SOLUTION dan TRIK SUPERKILAT dalam menghadapi SNMPTN serta kumpulan pembahasan soal SNMPTN yang lainnya jangan lupa untuk selalu mengunjungi http://pak-anang.blogspot.com.

Terimakasih,

Pak Anang.