Пусть существует система:

$$x_{s,t+1} = f(x_{s,t}, \theta_k): \quad T \in Z; \quad t = 0, 1, \cdots, T; \quad S \in Z \tag{1}$$

где $\theta := \{\theta_t : t = 0 \cdots T-1\}$ является неким парамертом, зависимым от f_t . Рассмотрим задачу оптимального управления, которая заключается в нахождении такой системы $x_{s,t+1} = f*(x_s, t, \theta_k)$, что функция потерь $\Phi(f*(x_{s,t}, \theta_k), f(x_{s,t}, \theta_k))$ будет минимальна. Введем дополнительную функция регурялизации $L_t(x_s, t, \theta_k)$ для коррекции (уменьшения) ошибки работы алгоритма.

$$\Phi(f'(x_{s,t}, \theta_k), f(x_{s,t}, \theta_k)) \to min \tag{2}$$

Минимизируммый, в рамках данной задачи, функционал $J(\theta) \to min$ можно предавить в виде:

$$J(\theta) := \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S} \Phi_s(x_{s,T}) + \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}\sum_{t=1}^{T-1} L_t(x_{s,t}, \theta_t) \tag{3}$$

Данную задачу оптимального управления будем решать с помощью принципа максимума Понтрягина (далее ПМП) и метод последовательных приблежений. Первый обеспечет существование оптимального допустимого управления. Для этого введем функцию Гамильтона

$$H_t(x, p, \theta) := p * f_t(x, \theta) + \frac{1}{S} L_t(x, \theta) \tag{4}$$

Использование ПМП накладывает следующее ограничения:

- система $f_t(x_{s,t}, \theta_t)$ дифференцируема по θ для $t = 0, \cdots, T$
- $H_t(x, p, \theta)$ выпукла на множестве θ
- $\nabla_\theta \sum H_t = 0$ для $t = 0, \cdots, T$

При выполнении этих требований, мы можем предпологать что существует сопряженный процесс $p* = p^*_t : t = 0, \cdots, T$ и число $\beta : \beta \in R$ такие, что p^*, β не равны нулю и имеют место следующее утверждения

$$x^*_{s,t+1} = \nabla_p H_t(x^*_t, p^*_{t+1}, \theta^*_t), \quad x^*_0 = x_0 \tag{5}$$

$$p^*_{s,t} = \nabla_p H_t(x^*_t, p^*_{t+1}, \theta^*_t), \quad p^*_T = -\beta \nabla\Phi(x^*_T) \tag{6}$$

$$H_t(x^*_t, p^*_t, \theta^*_t) \geq H_t(x^*_t, p^*_t, \theta) \tag{7}$$

где $\theta^* := \theta^*_t : t = 0, \cdots, T-1$ - оптимальное решение, а $x^* := x^*_t : t = 0, \cdots, T$

Выполнение равенства (7) предпологает, что справедливо

$$\nabla_\theta \sum_S H_t = 0 \tag{8}$$

для всех t, для которых имеет место равенство

$$\nabla_\theta J = 0 \tag{9}$$

Таким образом, канонический вид задачи минимизации функционала $J(\theta) \to min$ будут определять равенства (8) и (9).

Метод последовательных приблежений определяет итерационный процесс, целью которого является оптимизация параметра θ.

$$x^{\theta^0}_{s,t+1} = f_t(x^{\theta^0}_{s,t}, \theta^0_t), \quad x^{\theta^0}_{s,t+1} = x_s, 0 \tag{10}$$

$$p^{\theta^0}_{s,t} = \nabla_x(x^{\theta^0}_{s,t}, p^{\theta^0}_{s,t+1}, \theta^0_t), \quad p^{\theta^0}_{s,T} = -\frac{1}{S}\nabla\Phi_s(x^{\theta^0}_{s,T}) \tag{11}$$

$$\theta_t = argmax \sum_{s=1}^{S} \quad H_t(x^{\theta^0}_{s,t}, p^{\theta^0}_{s,t+1}, \theta^0_t), t = 0, \cdots, T-1 \tag{12}$$

Ограничения для использования метода последовательных приблежений:

- Φ_s дважды неприрывно дифференциируема, а отображение Φ_s в $\nabla\Phi_s$ является Липшицевым.
- $f_t(*, \theta)$ и $L_t(*, \theta)$ дважды неприрывно дифференцирумыми по x, при этом $f_t, \nabla_x f_t, L_t, \nabla_x L_t$ удволетворяют условиям Липшица по x, t и θ