

Laboratorul 6

1. Simulați de $n \in \{500, 1000, 2000\}$ ori valoarea înălțimii unei persoane alese aleator folosind distribuția normală cu parametrii $m = 165$ (cm) și $\sigma = 10$ (cm).

i) Afișați histograma frecvențelor absolute cu 10 bare pentru vectorul X dat de cele n simulări.

ii) Afișați histograma frecvențelor relative cu 10 bare pentru vectorul X dat de cele n simulări astfel încât suma ariilor barelor să fie 1. Comparați această histogramă cu graficul funcției de densitate corespunzătoare.

iii) Afișați valoarea medie, deviația standard și proporția de valori în intervalul $[160, 170]$ pentru cele n simulări. Comparați rezultatele obținute cu rezultatele corespunzătoare exacte.

În rezolvarea cerințelor de mai sus, folosiți funcțiile: `hist`, `normrnd`, `normpdf`, `normcdf`.

Metode Monte Carlo pentru integrare numerică

Fie $g : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ o funcție continuă și $M > 0$ astfel încât $g(x) \leq M$, oricare ar fi $x \in [a, b]$.

Considerăm următoarele metode pentru aproximarea integralei $\int_a^b g(x) dx$ folosind valori aleatoare.

Metoda 1:

- Fie (X, Y) un vector aleator care are distribuția uniformă pe $[a, b] \times [0, M]$.
- Folosind probabilitatea geometrică (a se revedea Laboratorul 2), avem:

$$P((X, Y) \text{ este sub graficul lui } g) = \frac{\text{aria subgraficului lui } g}{\text{aria dreptunghiului } [a, b] \times [0, M]} = \frac{1}{(b-a)M} \int_a^b g(t) dt.$$

- În simulări:

$$\int_a^b g(t) dt \approx \frac{\#\{k \in \{1, \dots, n\} : y_k \leq g(x_k)\}}{n} (b-a)M, \text{ pentru } n \text{ suficient de mare},$$

unde $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ sunt perechi de numere aleatoare generate independent conform distribuției uniforme pe dreptunghiul $[a, b] \times [0, M]$.

Metoda 2:

- Considerăm $(U_n)_n$ șir de v.a. independente uniform distribuite pe $[a, b]$ și notăm $X_n = g(U_n)$.
- $(X_n)_n$ satisface LTNM, adică

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{a.s.} E(X_1) = \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt.$$

- În simulări:

$$\int_a^b g(t) dt \approx (b-a) \frac{1}{n} (g(u_1) + \dots + g(u_n)), \text{ pentru } n \text{ suficient de mare},$$

unde u_1, \dots, u_n sunt valori aleatoare generate independent conform distribuției uniforme pe intervalul $[a, b]$.

2. Considerați următoarele funcții:

i) $g_1 : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $g_1(x) = e^{-x^2}$, $x \in [-2, 2]$;

ii) $g_2 : [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $g_2(x) = |\sin(e^x)|$, $x \in [-1, 3]$.

iii) $g_3 : [-1, 2] \rightarrow [0, \infty)$, $g_3(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{1+x^2}, & x \in [-1, 0] \\ \sqrt{2x-x^2}, & x \in (0, 2]. \end{cases}$

a) Scrieți un program care pentru inputurile: g (funcție pozitivă dată ca “function handle”), a , b ($a < b$), M (astfel încât M este mai mare sau egal decât maximul lui g pe intervalul $[a, b]$) și n , generează aleator n puncte uniforme distribuite în dreptunghiul $[a, b] \times [0, M]$ și desenează, cu o anumită culoare, pe cele care aparțin subgraficului funcției g . Desenați și graficul funcției g pe intervalul $[a, b]$. Testați programul cu funcțiile de mai sus.

b) Implementați în Matlab cele două metode Monte Carlo pentru integrarea numerică a unei funcții continue $g : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$. Testați programele realizate cu funcțiile de mai sus. Comparați rezultatele obținute cu rezultatele date de funcția `integral`.

3. Un computer este conectat la două imprimante: I_1 și I_2 . Calculatorul trimite printarea unui document lui I_1 cu probabilitatea 0,4, respectiv lui I_2 cu probabilitatea 0,6. I_1 printează un poster A2 în T_1 secunde, unde T_1 are distribuția $Exp(\frac{1}{5})$, iar I_2 printează un poster A2 în T_2 secunde, unde T_2 are distribuția uniformă $Unif[4, 6]$. Un inginer solicită printarea unui poster A2 de pe computer. Estimați:

- a)** valoarea medie și deviația standard pentru timpul (în secunde) de printare a posterului;
- b)** probabilitatea ca timpul de printare a posterului să fie mai mare decât 5 secunde.
- c)** probabilitatea ca printarea să fie efectuată de imprimanta I_2 , știind că timpul de printare a posterului este mai mare decât 5 secunde.