

Geometrie liniară

Cu un ochi către grafica pe calculator

Paul A. Blaga

I	Elemente de geometrie analitică în plan și în spațiu	13
1	Vectori, puncte și coordonate	15
1.1	Noțiunea de vector	15
1.1.1	Segmente orientate (vectori legați)	15
1.1.2	Vectori liberi	16
1.2	Adunarea vectorilor	19
1.3	Înmulțirea unui vector cu un număr real (cu un scalar)	22
1.4	Proiecțiile vectorilor pe axe sau plane	24
1.4.1	Axe	24
1.4.2	Proiecția pe o axă în spațiu	25
1.4.3	Proiecția pe o axă într-un plan	25
1.4.4	Proiecția pe un plan	26
1.4.5	Proiecția sumei vectorilor	26
1.4.6	Proiecția produsului unui vector cu un scalar	26
1.4.7	Proiecția unei combinații liniare de vectori	27
1.5	Dependența liniară a vectorilor	27
1.6	Orientarea sistemelor de doi și trei vectori liniar independenți	33
1.7	Puncte și vectori. Rudimente de geometrie afină	34
1.8	Coordonate pe dreaptă	40
1.9	Coordonate în plan	42
1.9.1	Coordonate afine	42
1.9.2	Împărțirea unui segment într-un raport dat	44

1.9.3	Coordonate rectangulare	46
1.9.4	Coordonate polare	46
1.10	Coordonate în spațiu	48
1.10.1	Coordonate afine și rectangulare	48
1.10.2	Coordonate cilindrice	49
1.10.3	Coordonate sferice	50
1.11	Transformări de coordonate	51
1.11.1	Coordonate afine	51
1.11.2	Coordonate rectangulare în plan	53
1.12	Aplicații în geometrie ale operațiilor elementare cu vectori	55
1.12.1	Ecuția vectorială a dreptei determinate de două puncte dis- tincte	55
1.12.2	Condiția de coliniaritate a trei puncte	55
1.12.3	Ecuția vectorială a planului determinat de trei puncte neco- liniare	56
1.12.4	Condiția de coplanaritate a patru puncte	57
1.12.5	Concurența medianelor unui triunghi	58
	Prima demonstrație	58
	A doua soluție	60
1.12.6	Concurența bisectoarelor interioare ale unui triunghi	61
1.12.7	Centrele cercurilor exînscrie unui triunghi ABC	63
1.12.8	Teorema lui Ceva	65
1.13	Produsul scalar al vectorilor	68
1.13.1	Definiție și proprietăți fundamentale	68
1.13.2	Exprimarea produsului scalar în coordonate	72
1.13.3	Probleme rezolvate	73
1.14	Produsul vectorial al vectorilor	80
1.14.1	Definiție și proprietăți fundamentale	80
1.14.2	Expresia produsului vectorial în funcție de componentele fac- torilor	83
1.14.3	Dublul produs vectorial	85
1.14.4	Probleme rezolvate	87
1.15	Produsul mixt al vectorilor	90
1.15.1	Definiție și proprietăți fundamentale	90
1.15.2	Liniaritatea produsului mixt	92
1.15.3	Expresia produsului mixt în coordonate	93
1.15.4	Probleme rezolvate	94

1.16	Probleme	96
2	Dreapta în plan	101
2.1	Ecuția dreptei scrisă cu ajutorul coeficientului unghiular (al pantei)	101
2.2	Ecuția generală a dreptei. Ecuția dreptei prin tăieturi	103
2.3	Ecuția vectorială	106
2.4	Poziția reciprocă a două drepte în plan	109
2.5	Fascicule de drepte	112
2.6	Distanța de la un punct la o dreaptă	116
2.7	Distanța dintre două drepte paralele	120
2.8	Unghiul dintre două drepte	121
2.9	Bisectoarele unghiurilor făcute de două drepte	122
2.9.1	Cazul când dreptele sunt date prin ecuația generală	122
	Bisectoarea unghiului ascuțit	123
2.9.2	Cazul când dreptele sunt date prin ecuația normală	125
	Bisectoarea unghiului ascuțit	125
2.9.3	Cazul dreptelor date prin ecuații explicite	126
2.10	Simetricul unui punct față de o dreaptă	127
2.11	Probleme	128
3	Dreapta și planul în spațiu	133
3.1	Planul	133
3.1.1	Ecuția vectorială a planului	133
3.1.2	Ecuția generală a planului	135
	Cazuri particulare ale ecuației generale a planului	136
3.1.3	Altă formă a ecuației vectoriale a planului	137
3.1.4	Ecuția planului determinat de trei puncte necoliniare	137
3.1.5	Condiția de coplanaritate a patru puncte	138
3.1.6	Ecuția planului prin tăieturi	138
3.1.7	Ecuția normală a unui plan	139
3.1.8	Distanța de la un punct la un plan	140
3.1.9	Unghiul a două plane	141
3.2	Dreapta în spațiu	142
3.2.1	Ecuția vectorială și ecuațiile parametrice ale dreptei	142
3.2.2	Ecuțiile canonice ale unei drepte în spațiu	143
3.2.3	Dreapta ca intersecție de două plane	144
3.2.4	Ecuțiile dreptei care trece prin două puncte	145
3.2.5	Unghiul a două drepte în spațiu	145

3.3	Probleme diverse referitoare la drepte și plane în spațiu	146
3.3.1	Pozițiile relative a două plane	146
3.3.2	Pozițiile relative a trei plane	148
3.3.3	Fascicule de plane. Snopuri de plane	149
3.3.4	Poziția relativă a unei drepte față de un plan	152
3.3.5	Ecuția unui plan determinat de două drepte concurente . . .	153
3.3.6	Ecuția planului determinat de o dreaptă și un punct	154
3.3.7	Ecuția planului determinat de două drepte paralele	154
3.3.8	Proiecția unei drepte pe un plan	155
3.3.9	Proiecția unui punct pe o dreaptă în spațiu	155
3.3.10	Poziția relativă a două drepte în spațiu	156
3.3.11	Distanța de la un punct la o dreaptă în spațiu	157
3.3.12	Perpendiculara comună a două drepte strâmbe	158
3.3.13	Lungimea perpendicularei comune a două drepte necoplanare	159
3.3.14	Unghiul dintre o dreaptă și un plan	160
3.4	Probleme	161
4	Conice pe ecuația canonică	167
4.1	Elipsa	167
4.2	Hiperbola	178
4.3	Parabola	187
4.4	Probleme	195
5	Conice pe ecuația generală	199
5.1	Introducere	199
5.2	Transformarea coeficienților ecuației conice la o schimbare de coordonate	200
6	Cuadrice pe ecuații reduse	203
6.1	Cuadrice pe ecuații reduse	203
6.2	Elipsoidul	204
	Planul tangent într-un punct al unui elipsoid	209
6.3	Conul de gradul al doilea	211
	Intersecții cu plane paralele cu planele de coordonate	212
6.4	Hiperboloidul cu o pânză.	214
6.4.1	Forma și simetriile	214
6.4.2	Generatoarele rectilinii ale hiperboloidului cu o pânză. . . .	217

6.4.3	Proprietăți ale generatoarelor rectilinii ale hiperboloidului cu o pânză	221
6.5	Hiperboloidul cu două pânze	221
6.6	Paraboloidul eliptic	224
6.7	Paraboloidul hiperbolic	228
6.8	Cilindrul eliptic	232
6.9	Cilindrul hiperbolic	236
6.10	Cilindrul parabolic	238
6.11	Probleme	241
7	Generări de suprafețe	247
7.1	Suprafețe cilindrice	247
7.2	Suprafețe conice	252
7.3	Suprafețe conoide (Conoidul drept cu plan director)	255
7.4	Suprafețe de rotație	258
7.5	Probleme	261
II	Transformări geometrice	267
8	Transformări de coordonate	269
8.1	Introducere	269
8.2	Transformări de coordonate scrise în coordonate afine	270
8.2.1	Schimbarea originii	270
8.2.2	Schimbarea axelor	271
8.2.3	Cazul general	273
8.3	Schimbări de coordonate ortogonale. Matrici ortogonale	274
8.3.1	Transformări de coordonate ortogonale în plan	275
	Translația axelor de coordonate	275
	Schimbarea axelor de coordonate	275
8.4	Spațiul proiectiv n -dimensional	276
8.5	Transformări de coordonate în coordonate omogene	278
8.5.1	Operații cu matrici extinse	280
9	Transformări geometrice în plan	281
9.1	Generalități despre transformări afine	281
9.2	Transformări plane	282
9.2.1	Translația	282

	Forma vectorială	282
	Forma matricială	284
9.2.2	Rotația în jurul unui punct	284
	Forma vectorială	284
	Forma matricială	286
9.2.3	Scalarea simplă uniformă	287
	Forma vectorială	288
	Forma matricială	290
9.2.4	Scalarea simplă neuniformă	290
	Produsul tensorial	290
	Forma vectorială	291
	Forma matricială	292
9.2.5	Scalarea neuniformă generală (Goldman)	292
	O altă metodă	293
	Forma matricială	294
9.2.6	Reflexia față de o dreaptă	295
	Forma vectorială	296
	Forma matricială	296
9.2.7	Forfecarea	298
	Forma vectorială	298
	Forma matricială	299
	Exemple	300
9.3	Grupurile de transformări fundamentale ale planului	302
9.3.1	Grupul translațiilor	302
9.3.2	Grupul scalărilor uniforme	303
9.3.3	Grupul scalărilor neuniforme	304
10	Transformări geometrice (afine) în spațiu	307
10.1	Translația	307
10.1.1	Forma vectorială	307
10.1.2	Forma matricială	308
10.2	Rotația în jurul unei axe	308
10.2.1	Forma vectorială	308
10.2.2	Forma matricială	310
10.3	Scalarea simplă uniformă	313
10.3.1	Forma vectorială	313
10.3.2	Forma matricială	313

10.4	Scalarea simplă neuniformă	314
10.4.1	Forma vectorială	314
	Forma matricială	315
10.5	Scalarea neuniformă generală (Goldman)	316
10.5.1	Forma vectorială	316
10.5.2	Forma matricială	317
10.6	Reflexia față de un plan	318
10.6.1	Forma vectorială	318
10.6.2	Forma matricială	319
10.6.3	Cazul în care planul este dat sub forma generală	320
10.7	Forfecarea în spațiu	321
10.7.1	Forma vectorială	321
10.7.2	Forma matricială	322
11	Proiecții	325
11.1	Geometrie analitică plană în coordonate omogene	325
11.2	Geometrie analitică în spațiu în coordonate omogene	327
11.3	Proiecții	329
11.3.1	Proiecția pe o dreaptă	329
11.3.2	Proiecția pe un plan	332
11.4	Clasificarea proiecțiilor paralele	334
11.4.1	Proiecții ortografice	334
	Proiecții ortografice multiple (multiview)	334
	Proiecții axonometrice	339
11.4.2	Proiecții oblice	340
	Proiecția cavalier (cavalier)	341
	Proiecția cabinet	343
11.4.3	Clasificarea proiecțiilor perspective	344

Partea I

Elemente de geometrie analitică în plan și în spațiu

CAPITOLUL 1

Vectori, puncte și coordonate

1.1 Noțiunea de vector

1.1.1 Segmente orientate (vectori legați)

Un segment de dreaptă pentru care s-a precizat care dintre capetele sale este originea și care extremitatea, se numește *segment orientat*. Un segment orientat cu originea în punctul A și extremitatea în punctul B se notează, de regulă, cu \overrightarrow{AB} . Din punct de vedere grafic, un segment de dreaptă orientat se reprezintă sub forma unei săgeți, cu originea în originea segmentului și cu vârful în extremitatea sa (vezi figura 1.1).



Figura 1.1: Segment orientat

Un segment orientat este definit, în mod unic, de capetele sale și de ordinea acestor capete. Cu alte cuvinte, un segment orientat este unic determinat dacă se indică originea și extremitatea sa. Dacă cumva cele două puncte coincid, atunci se spune că avem de-a face cu un *segment orientat nul* și se scrie¹ $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

¹Notăția pentru vectorul nul este incompletă, pentru că ea nu scoate în evidență faptul că este vorba

Dacă s-a ales o unitate de lungime, atunci putem defini lungimea segmentului orientat \overline{AB} ca fiind lungimea segmentului neorientat AB și scriem:

$$\|\overline{AB}\| = |AB|$$

sau, pur și simplu,

$$\|\overline{AB}\| = AB.$$

Lungimea unui segment orientat se mai numește și *modulul* său sau *norma* sa.

Spunem că două segmente orientate \overline{AB} și \overline{CD} sunt *egale* dacă $A = C$ și $B = D$, cu alte cuvinte, dacă ele au aceeași origine și aceeași extremitate.

Despre un segment orientat \overline{AB} se mai spune și că este un *vector legat* cu originea în punctul A și extremitatea în punctul B . Fixând punctul A , putem defini operația de adunare și cea de înmulțire cu scalari pentru toți vectorii legați cu originea în A și se poate demonstra că această mulțime este un spațiu vectorial real. Totuși, dacă avem în vedere aplicații reale în geometrie, noțiunea de vector legat este de un interes limitat, deoarece în geometrie avem, de regulă, vectori cu originile în puncte diferite și avem nevoie de niște reguli cu care să putem opera cu acești vectori. În acest scop, vom modifica puțin noțiunea de vector în așa fel încât originea (sau punctul de aplicare, cum se mai numește) să nu mai joace nici un rol.

1.1.2 Vectori liberi

După cum spuneam mai devreme, vrem să dezvoltăm o teorie a vectorilor care să ne permită să comparăm vectori care nu au neapărat aceeași origine.

Începem cu niște definiții. Vom spune, înainte de toate, că două segmente orientate *nenule* \overline{AB} și \overline{CD} au *aceeași direcție* dacă dreptele AB și CD sunt paralele. Un segment legat nul se consideră, prin convenție, că are aceeași direcție cu orice alt segment orientat.

Presupunem acum că cele două segmente orientate (nenule) au aceeași direcție, dar dreptele lor suport nu coincid. Vom spune că ele au *același sens* dacă segmentele (neorientate) AC și BD nu se intersectează (vezi figura 1.2). Dacă, însă, aceste două segmente se intersectează, vom spune că segmentele orientate \overline{AB} și \overline{CD} au *sensuri opuse* (vezi figura 1.3). Dacă segmentele orientate nenule \overline{AB} și \overline{CD} au aceeași dreaptă suport: $AB = CD$ (ca drepte), atunci vom spune că ele au același sens dacă există un al treilea segment orientat, \overline{EF} , având aceeași direcție (dar nu și aceeași dreaptă suport) cu \overline{AB} și \overline{CD} , și care are același sens cu ambele segmente. În caz contrar, vom spune că segmentele \overline{AB} și \overline{CD} au sensuri opuse.

de vectorul nul în punctul A . Practic, un vector nul într-un punct se reduce la punctul însuși.

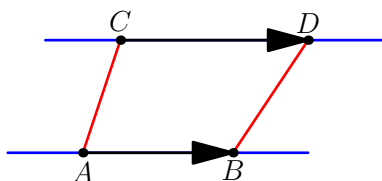


Figura 1.2: Segmente orientate de același sens

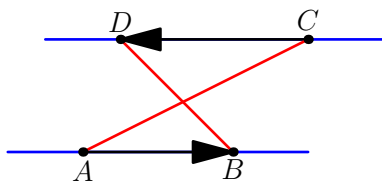


Figura 1.3: Segmente orientate de sens opus

Se consideră, prin convenție, că vectorul nul are același sens cu orice alt vector².



De fiecare dată când spunem că două segmente orientate au același sens, subînțelegem, chiar dacă nu o spunem în mod explicit, că segmentele au aceeași direcție. Relația “același sens” nu este definită pentru perechi de segmente orientate care nu au aceeași direcție. Mai spunem, uneori, despre două segmente orientate care au aceeași direcție și același sens, că au *aceeași orientare*.

Definiția 1.1. Spunem că două segmente orientate \overline{AB} și \overline{CD} sunt *echipolente* și scriem $\overline{AB} \sim \overline{CD}$, dacă fie ambele sunt nule, fie ambele sunt nenule și ele au aceeași direcție, același sens și același modul.

Este ușor de constatat că relația de echipolență este o relație de echivalență (adică este reflexivă, simetrică și tranzitivă).

Definiția 1.2. Se numește *vector liber* o clasă de echivalență de segmente orientate, în raport cu relația de echipolență. Vectorul liber determinat de segmentul orientat \overline{AB} se notează cu \overrightarrow{AB} . Astfel,

$$\overrightarrow{AB} = \{\overline{CD} \mid \overline{CD} - \text{segment orientat a.î. } \overline{CD} \sim \overline{AB}\}$$

²Aceasta înseamnă, până la urmă, că noțiunea de *sens* nu are o semnificație bine definită pentru vectorul nul.

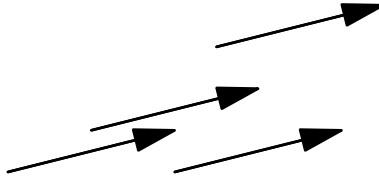


Figura 1.4: Vector liber

Așadar, un vector liber este, de fapt, o familie de vectori legați, toți echipolenți între ei. Există o interpretare cinematică a vectorului liber, care sugerează, de fapt, denumirea: un vector liber poate fi privit ca un segment orientat a cărui origine nu a fost fixată. El poate fi mutat în orice punct al spațiului, cu condiția să nu-i schimbăm modulul, direcția și sensul. Firește, semnificația riguroasă a acestei afirmații este aceea că *dacă \vec{AB} este un vector liber, atunci, pentru orice punct C din spațiu există un vector legat \overrightarrow{CD} cu originea în C astfel încât $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$* (vezi figura 1.4). Doi vectori liberi se numesc *egali* dacă ei sunt egali ca și clasă de echivalență, adică sunt alcătuiți din aceleași segmente orientate. Altfel spus,

$$\vec{AB} = \vec{CD} \iff \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}.$$

De regulă, dacă nu vrem să scoatem în evidență un reprezentant al unui vector liber, vom utiliza pentru notarea acestor obiecte litere mici îngroșate, de obicei din prima parte a alfabetului, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$. Vectorul nul se notează cu $\mathbf{0}$ ³. Pentru reprezentarea unui vector liber se utilizează unul dintre segmentele orientate care îl formează.

Să presupunem că se dă un vector liber \mathbf{a} și un punct A . În mod evident, există un singur punct B din spațiu astfel încât să avem

$$\vec{AB} = \mathbf{a}.$$

Vom spune că, prin construirea punctului B pentru care e verificată relația de mai sus, am *atașat* vectorul liber \mathbf{a} punctului A .

Se numește *modul* al vectorului liber \mathbf{a} modulul oricăruia dintre segmentele orientate care îl alcătuiesc. Modulul lui \mathbf{a} se notează cu $\|\mathbf{a}\|$.

Să presupunem că se dau doi vectori \mathbf{a} și \mathbf{b} . Îi atașăm unui punct O (construim punctele A și B astfel încât să avem $\vec{OA} = \mathbf{a}$ și $\vec{OB} = \mathbf{b}$). Atunci *unghiul dintre vectorii \mathbf{a} și \mathbf{b}* este, prin definiție, unghiul (cuprins între 0 și π) dintre segmentele

³O notație alternativă este să punem o sâgeată deasupra literei, fără să o îngroșăm: \vec{a}, \vec{b}, \dots

orientate \overrightarrow{OA} și \overrightarrow{OB} . În mod evident, acest unghi nu depinde de alegerea punctului O .

Spunem că un segment orientat \overrightarrow{AB} este paralel cu o dreaptă Δ (cu un plan Π) dacă dreapta sa suport este paralelă cu dreapta Δ (cu planul Π). Segmentul nu se consideră, prin convenție, că este paralel cu orice dreaptă sau plan. Spunem că vectorii liberi $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ sunt *coliniari* (*coplanari*) dacă segmentele care îi alcătuiesc sunt paralele cu o aceeași dreaptă (respectiv cu același plan).

Mai dăm, în sfârșit, încă o interpretare vectorilor liberi. Fie vectorul liber \overrightarrow{AB} (adică mulțimea tuturor segmentelor orientate echipolente cu segmentul orientat \overrightarrow{AB}). Considerăm transformarea spațiului care duce un punct C oarecare într-un punct D astfel încât să avem $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$. O astfel de transformare se numește *transport paralel* sau *translație de vector \overrightarrow{AB}* . Se stabilește, pe această cale, o bijecție între mulțimea tuturor vectorilor liberi și mulțimea tuturor translațiilor. Datorită acestei identificări, uneori și translațiile se numesc *vectori*.

Dacă în spațiu se fixează un plan Π și se consideră numai acele puncte care aparțin acestui plan, atunci prin vector (liber) vom înțelege o clasă de echivalență de segmente orientate situate în acel plan. Analog se definesc și vectorii de pe dreaptă.

1.2 Adunarea vectorilor

Considerăm doi vectori \mathbf{a} și \mathbf{b} . Alegem un punct O oarecare din spațiu și construim un punct A astfel încât $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ și un punct B astfel încât $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$.

Definiția 1.3. Vectorul \overrightarrow{OB} se numește *suma vectorilor \mathbf{a} și \mathbf{b}* și se notează cu $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

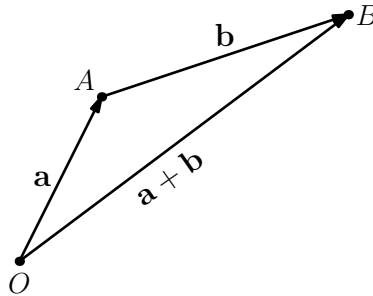


Figura 1.5: Regula triunghiului

Este clar, din rațiuni geometrice elementare, că suma $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ nu depinde de alegerea punctului O . Modalitatea de construcție a sumei a doi vectori descrisă mai sus se numește *regula triunghiului* (sau a *închiderii*, pentru că suma celor doi vectori este determinată de segmentul orientat care închide triunghiul care are ca celelalte două laturi segmentele orientate care determină cei doi vectori liberi care se însumează).

Dacă vectorii \mathbf{a} și \mathbf{b} nu sunt coliniari, atunci avem și o altă metodă de a determina suma a doi vectori, care, firește, dă același rezultat ca și regula triunghiului. Fie, prin urmare, \mathbf{a} și \mathbf{b} doi vectori necoliniari. Alegem un punct O și atașăm cei doi vectori de punctul O , cu alte cuvinte, determinăm punctele A și B astfel încât $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ și $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$. Cum vectorii \mathbf{a} și \mathbf{b} nu sunt coliniari, de aici rezultă că nici punctele O , A și B nu sunt coliniare, deci ele determină un plan. În acest plan, construim paralelogramul $OACB$. Cum se constată cu ușurință că $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$ și $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$, rezultă, pe baza regulii triunghiului, menționată mai sus, că au loc egalitățile:

$$\overrightarrow{OC} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}. \quad (1.2.1)$$

Avem două egalități, pentru că avem două situații în care putem aplica regula triunghiului, și de fiecare dată vectorul care închide triunghiul este \overrightarrow{OC} .

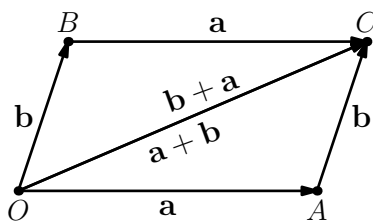


Figura 1.6: Regula paralelogramului

Rezultă, prin urmare, noua regulă de calcul a sumei a doi vectori (*regula paralelogramului*): pentru a găsi suma a doi vectori necoliniari, se atașează acești doi vectori unui punct O și se construiește pe segmentele orientate obținute, ca laturi, un paralelogram. Diagonala paralelogramului care pleacă din punctul O va fi atunci segmentul orientat care determină suma celor doi vectori.

Regula paralelogramului permite (vezi formula (1.2.1)) demonstrarea foarte simplă a *comutativității* adunării vectorilor liberi, pentru cazul vectorilor *necoliniari*. Pentru cazul vectorilor coliniari, comutativitatea se poate verifica foarte ușor cu ajutorul regulii închiderii, atât pentru vectorii orientați în același sens, cât și pentru cei având sensuri opuse. Așadar, operația de adunare a vectorilor liberi este comutativă.

Considerăm acum trei vectori $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Atașăm vectorul \mathbf{a} unui punct O , construind, astfel, punctul A astfel încât $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$. Construim, mai departe, punctul B astfel încât $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$. Conform definiției sumei, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Adunăm acum la acest vector vectorul \mathbf{c} . Pentru aceasta construim punctul C astfel încât $\overrightarrow{BC} = \mathbf{c}$. Avem, atunci

$$\overrightarrow{OC} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}. \quad (1.2.2)$$

Pe de altă parte, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$, prin urmare

$$\overrightarrow{OC} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}). \quad (1.2.3)$$

Combinând (1.2.2) cu (1.2.3) obținem

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}),$$

adică adunarea vectorilor este *asociativă*.

Operația de adunare a vectorilor liberi admite și *element neutru*, care este, firește, vectorul nul, $\mathbf{0}$, deoarece este evident că pentru orice vector \mathbf{a} avem:

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a}.$$

Remarcăm, în sfârșit, că fiecare vector admite un opus relativ la operația de adunare. Astfel, dacă vectorul liber \mathbf{a} este reprezentat de segmentul orientat \overrightarrow{AB} , atunci vom nota cu $-\mathbf{a}$ vectorul liber reprezentat de segmentul orientat \overrightarrow{BA} și se constată imediat că avem:

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}.$$

Acestea fiind spuse, putem afirma că *mulțimea tuturor vectorilor liberi din spațiu formează un grup abelian în raport cu operația de adunare a vectorilor*.

Așa cum se întâmplă în orice grup abelian (aditiv), odată cu adunarea vectorilor putem defini și scăderea lor, punând, prin definiție:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} := \mathbf{a} + (-\mathbf{b}).$$

Dacă atașăm vectorul \mathbf{a} unui punct O și alegem A și B astfel încât $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ și $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, atunci, după cum se constată cu ușurință, $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \overrightarrow{BA}$ sau

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}.$$

Regula paralelogramului se poate aplica fără dificultate și pentru determinarea diferenței a doi vectori, nu doar pentru determinarea sumei. Astfel, după cum am văzut mai sus,

pentru a determina suma a doi vectori, se consideră, mai întâi, câte un reprezentant al fiecărui vector, având originile în același punct. Se completează paralelogramul, ducându-se paralelele la dreptele suport ale celor două segmente orientate, prin extremitățile lor. Atunci suma celor doi vectori este vectorul reprezentat de segmentul orientat asociat diagonalei ce are originea în punctul de aplicare al celor doi vectori. Diferența celor doi vectori, în schimb, este determinată de cea de-a doua diagonală, orientarea fiind aleasă în așa fel încât originea să fie situată în extremitatea scăzătorului, iar extremitatea în extremitatea descăzătorului.

1.3 Înmulțirea unui vector cu un număr real (cu un scalar)

Scopul nostru este să înzestram mulțimea vectorilor liberi din spațiu cu o structură de spațiu vectorial. Am văzut, până acum, că această mulțime, împreună cu adunarea vectorilor, este un grup abelian. Ne-a mai rămas de definit înmulțirea exterioară (înmulțirea cu scalari) și verificarea compatibilității acestei operații cu adunarea vectorilor.

Definiția 1.4. Fie \mathbf{a} un vector și $\lambda \in \mathbb{R}$ un număr real. *Produsul vectorului \mathbf{a} cu scalarul λ* este, prin definiție, un vector, notat $\lambda\mathbf{a}$ caracterizat în modul următor:

(i) modulul lui $\lambda\mathbf{a}$ este dat de

$$\|\lambda\mathbf{a}\| := |\lambda| \cdot \|\mathbf{a}\|,$$

unde produsul din membrul drept este produsul de numere reale;

(ii) direcția lui $\lambda\mathbf{a}$ coincide cu direcția lui \mathbf{a} ;

(iii) sensul lui $\lambda\mathbf{a}$ coincide cu sensul lui \mathbf{a} dacă $\lambda > 0$ sau cu sensul opus sensului lui \mathbf{a} dacă $\lambda < 0$.

Vom enumera acum o serie de proprietăți fundamentale pe care le are operația de înmulțire a vectorilor cu scalari.

1) $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$.

2) $(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$.

3) $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$, pentru orice scalari $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ și orice vector \mathbf{a} .

Aceste trei proprietăți sunt evidente, ele rezultând în mod direct din definiția înmulțirii cu scalari.

4) $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$, pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$ și pentru orice doi vectori liberi \mathbf{a}, \mathbf{b} .

Proprietatea 4) este evidentă în anumite cazuri speciale: dacă scalarul λ se anulează, dacă suma $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ se anulează sau dacă cel puțin unul dintre vectori este egal cu zero.

Lăsăm deoparte aceste situații și presupunem că $\lambda > 0$, iar vectorii \mathbf{a} și \mathbf{b} nu sunt coliniari. Alegem un punct O oarecare și construim punctele A și B astfel încât să avem $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ și $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ și, prin urmare, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Mai construim punctele A' și B' astfel încât

$$\overrightarrow{OA'} = \lambda \mathbf{a}, \quad \overrightarrow{OB'} = \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}). \quad (1.3.1)$$

Triunghiurile OAB și $OA'B'$ sunt asemenea, deoarece ele au un unghi comun, iar laturile corespunzătoare unghiului comun sunt proporționale. De aici rezultă că $|A'B'| = |\lambda| \cdot |AB| = \lambda \cdot |AB|$. Cum, în plus, vectorii \overrightarrow{AB} și $\overrightarrow{A'B'}$ au, în plus, aceeași direcție și același sens, rezultă că

$$\overrightarrow{A'B'} = \lambda \mathbf{b}. \quad (1.3.2)$$

Proprietatea 4) rezultă acum din relațiile (1.3.1) și (1.3.2).

Presupunem acum, în continuare, că $\lambda > 0$, dar vectorii \mathbf{a} și \mathbf{b} sunt, de data aceasta, coliniari. Alegem un punct O arbitrar și construim punctele A și B astfel încât $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ și $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$.

Alegem un punct S , care nu aparține dreptei OAB și construim semidreptele SO , SA și SB . Alegem pe semidreapta SO punctul O' astfel încât $|SO'| = \lambda \cdot |SO|$. Prin O' ducem o dreaptă δ , paralelă cu dreapta OAB și notăm cu A' , respectiv B' intersecțiile acestei drepte cu semidreptele SA , respectiv SB . Obținem, pe această cale, trei perechi de triunghiuri asemenea:

$$\triangle OAS \simeq \triangle O'A'S, \quad \triangle ABS \simeq \triangle A'B'S, \quad \triangle OBS \simeq \triangle O'B'S.$$

De aici rezultă imediat că

$$\overrightarrow{O'A'} = \lambda \mathbf{a}, \quad \overrightarrow{A'B'} = \lambda \mathbf{b}, \quad \overrightarrow{O'B'} = \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}),$$

din care rezultă imediat proprietatea 4). Cazul $\lambda < 0$ se tratează similar.

5) $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$, pentru orice scalari λ și μ și pentru orice vector \mathbf{a} .

Ca și în cazul proprietății 4), și aici egalitatea este evidentă pentru anumite situații particulare: dacă $\mathbf{a} = 0$, dacă $\lambda + \mu = 0$ sau dacă cel puțin unul dintre scalari este egal cu zero.

Lăsăm, din nou, deoparte aceste situații. Presupunem, mai întâi, că λ și μ au același semn. Este clar, de la bun început, că vectorii din ambii membri ai relației 5)

au aceeași direcție și același sens. Pentru a demonstra că relația are loc, este suficient, prin urmare, să demonstrăm că ei au și același modul. Avem, ținând cont de ipotezele făcute:

$$\begin{aligned}\|\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{a}\| &= \|\lambda \mathbf{a}\| + \|\mu \mathbf{a}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{a}\| + |\mu| \cdot \|\mathbf{a}\| = (|\lambda| + |\mu|) \cdot \|\mathbf{a}\| = \\ &= |\lambda + \mu| \cdot \|\mathbf{a}\| = \|(\lambda + \mu)\mathbf{a}\|.\end{aligned}$$

Să presupunem acum că λ și μ au semne opuse și, pentru fixarea ideilor, mai admitem că $|\lambda| > \mu$. Atunci numerele $\lambda + \mu$ și $-\mu$ vor avea același semn și, pe baza celor demonstrate mai sus, avem

$$(\lambda + \mu)\mathbf{a} + (-\mu)\mathbf{a} = (\lambda + \mu - \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a},$$

relație echivalentă cu proprietatea 5).

Proprietățile 1)–5), împreună cu faptul că mulțimea \mathcal{V} este un grup abelian (ceea ce am demonstrat în secțiunea precedentă), înseamnă că această mulțime este un *spațiu vectorial* peste mulțimea numerelor reale.

Observație. Proprietățile 4) și 5) pot fi extinse, prin inducție, la orice număr finit de sumanzi, cu alte cuvinte, se poate demonstra cu ușurință că:

$$\begin{aligned}\lambda(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{a}_k) &= \lambda\mathbf{a}_1 + \lambda\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda\mathbf{a}_k, \\ (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k)\mathbf{a} &= \lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{a} + \cdots + \lambda_k\mathbf{a},\end{aligned}$$

pentru orice k natural, cel puțin egal cu 2, orice numere reale, $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ și orice vectori $\mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$.

1.4 Proiecțiile vectorilor pe axe sau plane

1.4.1 Axe

Alegem o dreaptă oarecare în spațiu. Vom numi unul dintre cele două sensuri de pe această dreaptă *pozitiv* și îl vom nota pe desen cu o săgeată. Sensul opus va fi numit *negativ*. O dreaptă pe care s-a ales un sens pozitiv se numește *axă* sau *dreaptă orientată*.

Alegem acum o axă Δ și pe ea alegem un segment nenul ca unitate de lungime. Vom numi *magnitudine* a unui segment orientat \overline{AB} de pe axă și-l vom nota cu simbolul (AB) numărul dat de

$$(AB) = \begin{cases} \|\overline{AB}\| & \text{dacă } \overline{AB} \text{ are același sens cu } \Delta \\ -\|\overline{AB}\| & \text{dacă } \overline{AB} \text{ și } \Delta \text{ au sensuri opuse} \end{cases} \quad (1.4.1)$$

Numărul (AB) se mai numește și *lungimea cu semn* sau *lungimea orientată* a segmentului orientat \overline{AB} . Avem, în mod evident, $(AB) = -(BA)$.

Teorema 1.1 (Chasles). *Pentru orice trei puncte A, B, C situate pe o axă pe care s-a ales o unitate de lungime, are loc următoarea relație:*

$$(AB) + (BC) = (AC). \quad (1.4.2)$$

Demonstrație Verificare directă, după diferitele poziții reciproce ale punctelor A, B, C . □

1.4.2 Proiecția pe o axă în spațiu

Fie Δ o axă în spațiu și Π un plan care nu este paralel cu Δ . Printr-un punct oarecare A din spațiu ducem un plan Π_1 , paralel cu planul Π . Acest plan intersectează axa Δ într-un punct A' . Punctul A' se numește *proiecția punctului A pe axa Δ , paralelă cu planul Π* . Dacă planul Π este perpendicular pe axa Δ , atunci proiecția se numește *ortogonală*. În acest caz, A' este piciorul perpendicularei coborâte din punctul A pe axa Δ .

Alegem acum un segment orientat oarecare \overline{AB} . Dacă proiectăm punctele A și B pe axa Δ , paralel cu planul Π , obținem un segment orientat $\overline{A'B'}$, care se numește *proiecția segmentului orientat \overline{AB} pe axa Δ , paralelă cu planul Π* . Presupunem acum că pe axa Δ s-a ales și o unitate de lungime (o scală). Atunci putem vorbi și despre mărimea proiecției unui segment pe axă, mărime pe care o vom nota cu $\text{pr}_\Delta \overline{AB}$ ($\parallel \Pi$).

Este clar că două segmente orientate echivalente vor avea ca proiecții pe orice axă segmente orientate echivalente, iar mărimea acestor proiecții vor fi egale.

Considerăm acum un vector liber \mathbf{a} , adică o clasă de echivalență de segmente orientate. Proiecțiile acestor segmente pe axa Δ , paralel cu planul Π , formează, după cum am menționat mai sus, o familie de segmente orientate echipolente între ele, adică formează *un vector liber pe dreaptă*. Acest vector se numește *proiecția vectorului \mathbf{a} pe axa Δ , paralel cu planul Π* și se notează cu $\text{pr}_\Delta \mathbf{a}$ ($\parallel \Pi$).

1.4.3 Proiecția pe o axă într-un plan

Presupunem acum că atât axa Δ , cât și figura care se proiectează sunt situate într-un același plan Π . Vom reformula definiția proiecției în modul următor. Fie Δ_1 o dreaptă din planul Π , care nu este paralelă cu axa Δ . Ducem, printr-un punct A al planului, o dreaptă paralelă cu dreapta Δ_1 , care intersectează axa într-un punct A' ,

care se numește *proiecția punctului A pe axa Δ , paralelă cu dreapta Δ_1* . Celelalte noțiuni din paragraful precedent se definesc în mod analog și se bucură de aceleași proprietăți.

1.4.4 Proiecția pe un plan

Fie Π un plan și Δ o dreaptă care nu este paralelă cu planul. Ducem printr-un punct A al spațiului o dreaptă Δ_1 , paralelă cu dreapta Δ . Dreaptă Δ_1 intersectează planul într-un punct A' , care se numește *proiecția punctului A pe planul Π , paralelă cu dreapta Δ* . Dacă dreapta Δ este perpendiculară pe planul Π , proiecția se numește *ortogonală*.

1.4.5 Proiecția sumei vectorilor

Presupunem că pe axa Δ se proiectează doi vectori \mathbf{a} și \mathbf{b} . Proiecția se face paralel cu un plan Π sau paralel cu o dreaptă Δ_1 , dacă atât vectorii, cât și axa se află într-un același plan.

Alegem un punct O și construim punctele A și B astfel încât $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ și $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$ și, prin urmare, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$.

Dacă O' , A' , B' sunt proiecțiile punctelor O , A , B pe axa Δ , atunci vectorii $\overrightarrow{O'A'}$, $\overrightarrow{A'B'}$ și $\overrightarrow{O'B'}$ sunt, respectiv, proiecțiile vectorilor \mathbf{a} , \mathbf{b} și $\mathbf{a} + \mathbf{b}$. De aici rezultă că *proiecția sumei vectorilor este egală cu suma proiecțiilor termenilor*. Este clar că această proprietate se poate extinde, fără dificultate, și la sume de mai mult de doi vectori. Mai mult, dacă pe axă s-a ales și o unitate de lungime, atunci, în virtutea egalității (1.4.2), avem și

$$(O'B') = (O'A') + (A'B')$$

sau, utilizând notația introdusă mai devreme,

$$\text{pr}_\Delta(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \text{pr}_\Delta \mathbf{a} + \text{pr}_\Delta \mathbf{b}, \quad (1.4.3)$$

adică magnitudinea proiecției sumei vectorilor pe o axă este egală cu suma magnitudinilor proiecțiilor termenilor.

1.4.6 Proiecția produsului unui vector cu un scalar

Vom demonstra că prin înmulțirea unui vector \mathbf{a} cu un scalar λ , proiecția acestui vector pe orice axă Δ , ca și magnitudinea acestei proiecții se înmulțesc cu același scalar.

Dacă $\mathbf{a} = 0$ sau $\lambda = 0$, este clar că nu avem ce demonstra. Presupunem, prin urmare, că $\mathbf{a} \neq 0$ și $\lambda \neq 0$. Alegem o axă Δ , fixăm un punct O pe ea și determinăm punctele A și B din spațiu astfel încât să avem $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ și $\overrightarrow{OB} = \lambda \mathbf{a}$. Cei doi vectori, după cum se știe, au aceeași direcție, iar sensurile coincid pentru $\lambda > 0$ și sunt opuse pentru $\lambda < 0$.

Proiectând punctele A și B pe axa Δ în punctele A' și B' , obținem două triunghiuri asemenea, OAA' și OBB' . Din proprietățile asemănării afirmația noastră rezultă imediat, prin urmare avem:

$$\text{pr}_{\Delta}(\lambda \mathbf{a}) = \lambda \text{pr}_{\Delta} \mathbf{a}. \quad (1.4.4)$$

1.4.7 Proiecția unei combinații liniare de vectori

Fie $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ un sistem oarecare de vectori (nu neapărat distincți), și $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ un sistem oarecare de k numere reale. Atunci vectorul

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k$$

se numește *combinație liniară* a vectorilor considerați.

Din egalitățile (1.4.3) și (1.4.4) rezultă următoarea egalitate:

$$\text{pr}_{\Delta}(\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k) = \lambda_1 \text{pr}_{\Delta} \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \text{pr}_{\Delta} \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \text{pr}_{\Delta} \mathbf{a}_k,$$

adică *magnitudinea proiecției unei combinații liniare de vectori pe o axă este egală cu combinația liniară a proiecțiilor vectorilor (cu aceeași coeficienți).*

1.5 Dependența liniară a vectorilor

Definiția 1.5. Vectorii

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k \quad (1.5.1)$$

se numesc *liniar dependenți* dacă există numerele reale

$$\lambda_1, \dots, \lambda_k, \quad (1.5.2)$$

nu toate nule, astfel încât

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}. \quad (1.5.3)$$

În caz contrar, vectorii se numesc *liniar independenți*.

Este clar că vectorii sunt liniar independenți dacă și numai dacă din egalitatea (1.5.3) rezultă că

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0.$$

Se mai spune, de asemenea, că vectorii (1.5.1) formează un *sistem liniar dependent*, respectiv un *sistem liniar independent*.

Dacă un vector \mathbf{a} se poate scrie în funcție de vectorii (1.5.1) sub forma

$$\mathbf{a} = \mu_1 \mathbf{a}_1 + \mu_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \mu_k \mathbf{a}_k,$$

atunci vom spune că \mathbf{a} este o *combinație liniară a acestor vectori*.

Teorema 1.2. Pentru ca vectorii (1.5.1) (cu $k > 1$) să fie liniar dependenți, este necesar și suficient ca cel puțin unul dintre acești vectori să poată fi scris ca o combinație liniară a celorlalți.

Demonstrație Să presupunem că vectorii (1.5.1) verifică o relație de forma (1.5.3), în care cel puțin unul dintre coeficienți este diferit de zero. Este clar că nu reducem generalitatea dacă presupunem că ultimul coeficient este nenul: $\lambda_k \neq 0$. Atunci, din egalitatea (1.5.3) se obține

$$\mathbf{a}_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k} \mathbf{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_k} \mathbf{a}_2 \cdots - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k} \mathbf{a}_{k-1},$$

adică \mathbf{a}_k este o combinație liniară a celorlalți $k - 1$ vectori.

Invers, să presupunem că unul dintre vectorii (1.5.1), de exemplu, din nou, ultimul, este o combinație liniară a celorlalți $k - 1$ vectori:

$$\mathbf{a}_k = \beta_1 \mathbf{a}_1 + \beta_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \beta_{k-1} \mathbf{a}_{k-1}.$$

Dacă trecem toți termenii în membrul stâng, obținem

$$-\beta_1 \mathbf{a}_1 - \beta_2 \mathbf{a}_2 - \cdots - \beta_{k-1} \mathbf{a}_{k-1} + 1 \cdot \mathbf{a}_k = 0,$$

egalitate care este de forma (1.5.3) și există cel puțin un coeficient nenul (întrucât coeficientul lui \mathbf{a}_k este 1), ceea ce înseamnă că vectorii sunt, într-adevăr, liniar dependenți. \square

Consecința 1.1. Dacă vectorii (1.5.1) sunt liniar independenți, atunci nici unul nu poate fi scris ca o combinație liniară a celorlalți. În particular, nici unul dintre vectori nu poate fi egal cu zero.

În cadrul acestui curs, vom avea de-a face, de regulă, cu sisteme formate din cel mult trei vectori. De aceea este interesant să evidențiem sensul geometric al dependenței liniare sau al independenței liniare pentru sisteme formate din 1, 2 sau trei vectori.

Este evident că un sistem format dintr-un singur vector este liniar dependent dacă și numai dacă vectorul este nul.

Pentru cazul a doi vectori, avem următorul rezultat:

Teorema 1.3. *Doi vectori sunt liniar dependenți dacă și numai dacă sunt coliniari.*

Demonstrație Fie \mathbf{a}_1 și \mathbf{a}_2 doi vectori liniar dependenți. În virtutea teoremei precedente, există un scalar nenul λ astfel încât $\mathbf{a}_2 = \lambda \mathbf{a}_1$, adică vectorii sunt coliniari.

Invers, să presupunem acum că vectorii \mathbf{a}_1 și \mathbf{a}_2 sunt coliniari. Dacă cel puțin unul dintre vectori este nul, de exemplu $\mathbf{a}_2 = 0$, atunci putem scrie

$$0\mathbf{a}_1 + 1\mathbf{a}_2 = 0,$$

adică vectorii sunt liniar dependenți. Presupunem acum că ambii vectori sunt nenuli. Alegem un punct O și construim punctele A_1 și A_2 astfel încât $\overrightarrow{OA_1} + \mathbf{a}_1$ și $\overrightarrow{OA_2} = \mathbf{a}_2$. Datorită coliniarității vectorilor \mathbf{a}_1 și \mathbf{a}_2 , punctele O , A_1 și A_2 sunt pe o aceeași dreaptă, Δ . Dacă $A_1 = A_2$, atunci, firește, vectorii \mathbf{a}_1 și \mathbf{a}_2 sunt egali, deci sunt liniar dependenți, deoarece unul dintre ei este o combinație liniară a celuilalt. Dacă $A_1 \neq A_2$, atunci fie $\lambda = \|\mathbf{a}_2\|/\|\mathbf{a}_1\|$. Dacă segmentele orientate $\overrightarrow{OA_1}$ și $\overrightarrow{OA_2}$ au același sens, atunci $\mathbf{a}_2 = \lambda \mathbf{a}_1$, în timp ce dacă ele au sensuri opuse, atunci $\mathbf{a}_2 = -\lambda \mathbf{a}_1$. \square

Consecința 1.2. *Doi vectori sunt liniar independenți dacă și numai dacă ei nu sunt coliniari.*

Vectorii liniar independenți vor juca un rol esențial. În particular, ei ne furnizează descompuneri ale altor vectori. Un prototip de astfel de descompunere este dat de următoarea teoremă:

Teorema 1.4. *Să presupunem că într-un plan Π sunt dați doi vectori necoliniari \mathbf{e}_1 și \mathbf{e}_2 . Atunci orice alt vector \mathbf{a} din plan se poate descompune în funcție de vectorii \mathbf{e}_1 și \mathbf{e}_2 , cu alte cuvinte există două numere reale (unic determinate) x și y astfel încât*

$$\mathbf{a} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2. \quad (1.5.4)$$

Demonstrație Faptul că vectorii aparțin planului Π înseamnă că direcțiile lor sunt paralele cu planul sau, altfel spus, că dacă îi atașăm unui punct din plan, segmentele

orientate care se obțin sunt conținute în plan. Fie, prin urmare, O un punct oarecare al planului. Aunci există (și sunt unice!) trei puncte E_1, E_2 și M din plan în așa fel încât

$$\overrightarrow{OE_1} = \mathbf{e}_1, \overrightarrow{OE_2} = \mathbf{e}_2, \overrightarrow{OM} = \mathbf{a}.$$

Proiectând punctul M pe dreapta OE_1 , paralel cu dreapta OE_2 , obținem un punct M_1 . Fie, pe de altă parte, M_2 punctul ce se obține proiectând punctul M pe dreapta OE_2 , paralel cu dreapta OE_1 . Întrucât vectorii $\overrightarrow{OE_1}$ și $\overrightarrow{OM_1}$ sunt coliniari, iar $\overrightarrow{OE_1} \neq 0$, rezultă că există un număr real x astfel încât $\overrightarrow{OM_1} = x\overrightarrow{OE_1}$. În mod analog, există un y real astfel încât $\overrightarrow{OM_2} = y\overrightarrow{OE_2}$. Cum $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$, egalitatea (1.5.4) este verificată.

Mai rămâne să demonstrăm unicitatea numerelor reale x și y . Să presupunem că ar exista alte două numere reale, x' și y' astfel încât să avem

$$\mathbf{a} = x'\mathbf{e}_1 + y'\mathbf{e}_2. \quad (1.5.5)$$

Dacă scădem egalitatea (1.5.5) din egalitatea (1.5.4), obținem

$$(x - x')\mathbf{e}_1 + (y - y')\mathbf{e}_2 = 0. \quad (1.5.6)$$

Cum vectorii \mathbf{e}_1 și \mathbf{e}_2 sunt liniar independenți, obținem că $x - x' = 0$ și $y - y' = 0$, adică $x = x'$ și $y = y'$. \square

Să vedem acum ce se întâmplă în cazul în care avem *trei* vectori. Avem următorul rezultat:

Teorema 1.5. *Pentru ca trei vectori să fie liniar dependenți este necesar și suficient ca ei să fie coplanari.*

Demonstrație Presupunem că vectorii

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \quad (1.5.7)$$

sunt liniar dependenți. Atunci cel puțin unul dintre ei se poate scrie ca o combinație liniară a celorlalți doi. Putem presupune, fără a reduce generalitatea, că acesta este cel de-al treilea vector. Prin urmare, există două numere reale λ_1 și λ_2 astfel încât să avem

$$\mathbf{a}_3 = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2. \quad (1.5.8)$$

Dacă atașăm vectorii unui punct O , obținem trei puncte M_1, M_2, M_3 astfel încât

$$\overrightarrow{OM_1} = \mathbf{a}_1, \overrightarrow{OM_2} = \mathbf{a}_2, \overrightarrow{OM_3} = \mathbf{a}_3.$$

Dacă vectorii $\overrightarrow{OM_1}$ și $\overrightarrow{OM_2}$ sunt necoliniari, atunci punctele O, M_1, M_2 sunt necoliniare, deci ele determină un plan Π . Datorită relației (1.5.8), vectorul $\overrightarrow{OM_3}$ aparține, de asemenea, planului Π , prin urmare cei trei vectori sunt coplanari. Dacă vectorii $\overrightarrow{OM_1}$ și $\overrightarrow{OM_2}$ sunt coliniari, atunci din relația (1.5.8) rezultă că vectorul $\overrightarrow{OM_3}$ este, de asemenea, colinar cu ceilalți doi vectori, prin urmare, cu atât mai mult, cei trei vectori sunt coplanari.

Invers, să presupunem că vectorii (1.5.7) sunt coplanari. Să admitem, pentru început, că doi dintre vectori, de exemplu vectorii \mathbf{a}_1 și \mathbf{a}_2 nu sunt coliniari. Atunci, în virtutea teoremei 1.4, există două constante λ_1 și λ_2 astfel încât să avem

$$\mathbf{a}_3 = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2$$

și, prin urmare, vectorii (1.5.7) sunt liniar dependenți.

Dacă toți trei vectorii sunt coliniari, atunci avem, de exemplu, $\mathbf{a}_1 = \lambda \mathbf{a}_2$, relație care se poate rescrie sub forma

$$\mathbf{a}_1 = \lambda \mathbf{a}_2 + 0\mathbf{a}_3,$$

adică, din nou, conchidem că cei trei vectori sunt coplanari. \square

Drept consecință a acestei teoreme, putem conchide că *în spațiu există triplete de vectori liniar independenți*.

Și în spațiu avem un rezultat similar teoremei 1.4, adică:

Teorema 1.6. *Dacă vectorii*

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \tag{1.5.9}$$

sunt liniar independenți și \mathbf{a} este un vector oarecare, atunci există trei numere reale, x, y, z astfel încât

$$\mathbf{a} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3. \tag{1.5.10}$$

Această descompunere a lui \mathbf{a} este unică.

Demonstrație Alegem un punct oarecare O din spațiu și determinăm punctele E_1, E_2, E_3 și M astfel încât să avem

$$\overrightarrow{OE_1} = \mathbf{e}_1, \overrightarrow{OE_2} = \mathbf{e}_2, \overrightarrow{OE_3} = \mathbf{e}_3, \overrightarrow{OM} = \mathbf{a}.$$

Notăm cu M_1, M_2, M_3 proiecțiile punctului M pe dreptele OE_1, OE_2, OE_3 , paralele cu planele OE_2E_3, OE_1E_3 , respectiv OE_1E_2 . Se constată cu ușurință că

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}. \tag{1.5.11}$$

Cum vectorii $\overrightarrow{OE_1}$ și $\overrightarrow{OM_1}$ sunt coliniari și $\overrightarrow{OE_1} \neq 0$, rezultă că există un număr real x astfel încât $\overrightarrow{OM_1} = x\overrightarrow{OE_1}$. În mod analog, există numerele reale y și z astfel încât $\overrightarrow{OM_2} = y\overrightarrow{OE_2}$ și $\overrightarrow{OM_3} = z\overrightarrow{OE_3}$. Unicitatea numerelor x, y, z se demonstrează ca și

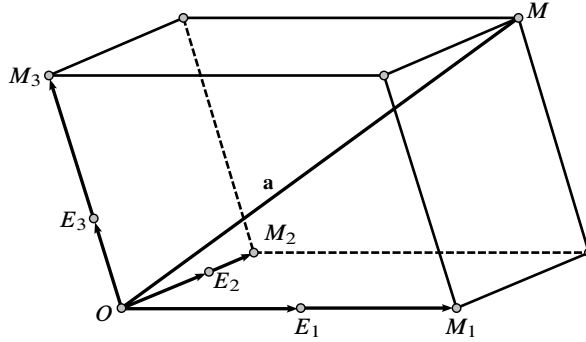


Figura 1.7:

în cazul teoremei 1.4. □

Întrebarea naturală care se pune este: ce se întâmplă dacă avem mai mult de trei vectori? Răspunsul este dat de teorema care urmează.

Teorema 1.7. *Orice patru vectori sunt liniar dependenți.*

Demonstrație Presupunem că dintre cei patru vectori

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a} \quad (1.5.12)$$

trei sunt liniar independenți, de exemplu

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3. \quad (1.5.13)$$

Atunci, în virtutea teoremei 1.6, există trei numere reale $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ astfel încât

$$\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3,$$

adică cei patru vectori sunt, într-adevăr, liniar dependenți.

Dacă vectorii (1.5.13) sunt liniar dependenți, adică între ei există o relație de forma

$$\mu_1 \mathbf{a}_1 + \mu_2 \mathbf{a}_2 + \mu_3 \mathbf{a}_3 = 0, \quad (1.5.14)$$

unde nu toți coeficienții se anulează, această relație se poate rescrie sub forma

$$\mu_1 \mathbf{a}_1 + \mu_2 \mathbf{a}_2 + \mu_3 \mathbf{a}_3 + 0\mathbf{a} = 0,$$

adică vectorii (1.5.12) sunt liniar dependenți. □

1.6 Orientarea sistemelor de doi și trei vectori linear independenți

Definiția 1.6. Un sistem (ordonat) de vectori linear independenți $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ într-un plan se numește un sistem *drept* dacă atunci când atașăm cei doi vectori punctului O din plan, adică alegem două puncte A_1 și A_2 din plan astfel încât $\mathbf{a}_1 = \overrightarrow{OA_1}$ și $\mathbf{a}_2 = \overrightarrow{OA_2}$, când rotim vectorul \mathbf{a}_1 în jurul punctului O pentru a-l aplica peste vectorul \mathbf{a}_2 (ca direcție și sens), pe drumul cel mai scurt, rotația se face în sens trigonometric (invers sensului acelor de ceasornic).

Același sistem se numește *stâng* dacă rotația menționată mai sus se face în sensul acelor de ceasornic.

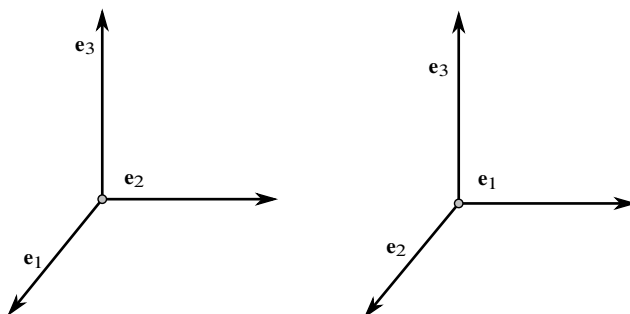


Figura 1.8:

Observație. Este clar că dacă sistemul $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ este drept, atunci sistemul $\{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1\}$ este stâng și viceversa.

Definiția 1.7. Fie $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ un sistem ordonat de trei vectori linear independenți din spațiu. Fixăm, ca și mai sus, un punct O și alegem trei puncte A_1, A_2, A_3 astfel încât să avem $\mathbf{a}_i = \overrightarrow{OA_i}$, $i = 1, 2, 3$. Sistemul $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ se numește *drept* dacă în planul OA_1A_2 , văzut din punctul A_3 , rotația în jurul punctului O care aplică A_1 peste A_2 pe cel mai scurt drum, se face în sens trigonometric. În caz contrar, adică dacă rotația se face în sensul acelor de ceasornic, sistemul se numește *stâng*.

Observație. Se poate constata imediat că dacă sistemul $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ este drept, atunci tot drepte sunt și sistemele $\{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1\}$ și $\{\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$, în timp ce sistemele $\{\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1\}$, $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_2\}$ și $\{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\}$ sunt stângi.

1.7 Puncte și vectori. Rudimente de geometrie afină

După cum am văzut, mulțimea vectorilor liberi din plan (respectiv din spațiu) formează un spațiu vectorial real bidimensional (respectiv tridimensional). Pe de altă parte, dacă fixăm un punct O (fie în plan, fie în spațiu, nu contează), atunci fiecărui punct M putem să-i asociem, în mod unic, vectorul \overrightarrow{OM} , pe care îl vom numi *vectorul de poziție* al lui M (relativ la originea O) sau *raza vectoare* a lui M . Dacă punctul O este subînțeles, atunci vom folosi, pur și simplu, notația $\overrightarrow{OM} \equiv \mathbf{r}_M$ sau chiar $\overrightarrow{OM} \equiv \mathbf{r}$. Punctul O odată fixat, obținem o bijecție între mulțimea vectorilor liberi din plan (sau spațiu) și mulțimea punctelor din plan (sau spațiu).

În aparență, folosind această bijecție, putem transfera structura de spațiu vectorial de pe mulțimea vectorilor liberi pe mulțimea punctelor. Asta ar însemna să fim capabili să adunăm, de exemplu, punctele sau să le înmulțim cu scalari reali oarecare. Din păcate, acest lucru nu este posibil și vom explica, în cele ce urmează, de ce.

Într-adevăr, să alegem o origine O relativ la care să construim vectorii de poziție \overrightarrow{OA} și \overrightarrow{OB} a două puncte A și B și să definim punctul $A + B$ ca fiind punctul C , care are ca vector de poziție vectorul $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Acest punct există, desigur, și este bine definit. Pe de altă parte, dacă alegem o altă origine, fie ea O' , diferită de O , atunci punctul C' , care are, față de O' , vectorul de poziție $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$, în general nu coincide cu punctul C și, astfel, practic, nu putem defini suma celor două puncte pe această cale, deoarece definiția depinde de originea relativ la care considerăm vectorii de poziție. Situația este ilustrată în figura 1.9. Din aceeași figură remarcăm că vectorul

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O'A} - \overrightarrow{O'B} = \overrightarrow{BA}$$

nu depinde de alegerea originii, ceea ce înseamnă că are sens să definim diferența $A - B$ a celor două puncte, dar, atenție, diferența nu este un punct, ci un vector.

Adunarea dintre un punct și un vector. Operații cu puncte

Fie $O \in \mathbb{R}^3$ un punct dat. Considerăm alte două puncte, P și Q . Atunci are loc relația

$$\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{PQ}$$

sau

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}. \quad (1.7.1)$$

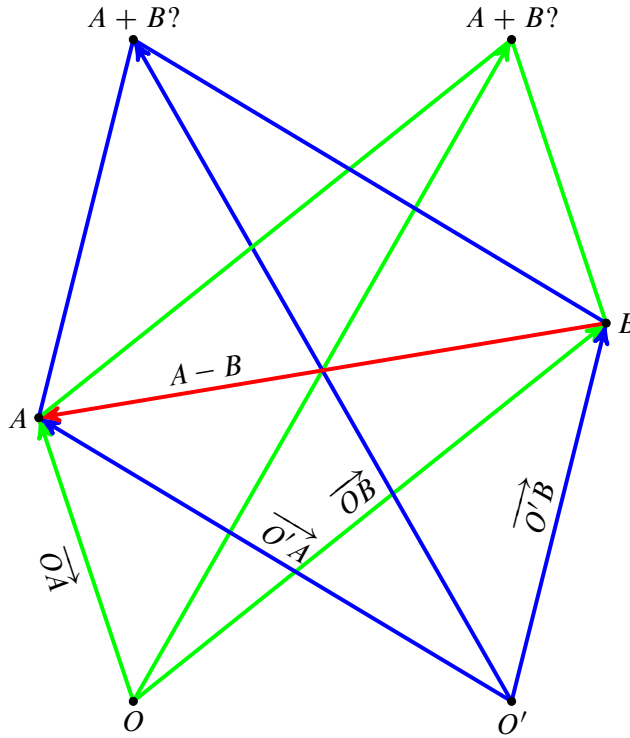


Figura 1.9: “Adunarea” punctelor

Rescriem ecuația (9.1.1) sub forma

$$Q = P + \overrightarrow{PQ} \quad (1.7.2)$$

(“reducem” punctul O). Avem voie să utilizăm o astfel de notație, pentru că vectorul \overrightarrow{PQ} nu depinde de alegerea punctului O .

Dăm, mai general, următoarea definiție:

Definiția 1.8. Suma dintre un punct P și un vector \mathbf{v} este un *punct* Q (unic determinat!) astfel încât $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{v}$. Vom scrie

$$Q = P + \mathbf{v}. \quad (1.7.3)$$

Această relație se poate interpreta și spunând că vectorul \mathbf{v} este *diferența* $Q - P$ a punctelor Q și P .

Este natural să ne întrebăm dacă nu putem defini combinații mai generale de puncte care să aibă sens, în afară de diferența a două puncte. Un răspuns este dat de următorul rezultat:

Propoziția 1.1. Fie A_1, \dots, A_n n puncte din spațiu și $\alpha_1, \dots, \alpha_n - n$ numere reale astfel încât să avem

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0.$$

Atunci vectorul

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{OA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{OA_n}$$

nu depinde de alegerea punctului O .

Demonstrație Avem

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= -(\alpha_2 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{OA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{OA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{OA_n} = \\ &= \alpha_2 (\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}) + \alpha_3 (\overrightarrow{OA_3} - \overrightarrow{OA_1}) + \dots + \alpha_n (\overrightarrow{OA_n} - \overrightarrow{OA_1}) = \\ &= \alpha_2 \overrightarrow{A_1 A_2} + \alpha_3 \overrightarrow{A_1 A_3} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{A_1 A_n}. \end{aligned}$$

□

Vectorul \mathbf{v} de mai sus se va scrie ca o combinație a punctelor A_1, \dots, A_n :

$$\mathbf{v} = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_n A_n, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0.$$

O a doua variantă de combinare a punctelor este sugerată de rezultatul care urmează.

Propoziția 1.2. Fie A_1, \dots, A_n n puncte din spațiu și $\alpha_1, \dots, \alpha_n - n$ numere reale astfel încât să avem

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1.$$

Atunci punctul P , dat de

$$\overrightarrow{OP} = \alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{OA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{OA_n}$$

nu depinde de alegerea punctului O .

Demonstrație Avem

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= (1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \dots - \alpha_n) \overrightarrow{OA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{OA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{OA_n} = \\ &= \overrightarrow{OA_1} + \alpha_2 (\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}) + \dots + \alpha_n (\overrightarrow{OA_n} - \overrightarrow{OA_1}) = \\ &= \overrightarrow{OA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{A_1 A_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{A_1 A_n}, \end{aligned}$$

ceea ce înseamnă că punctul P se poate scrie, după regula de adunare dintre un punct și un vector, sub forma

$$\begin{aligned} P &= A_1 + \alpha_2 \overrightarrow{A_1 A_2} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{A_1 A_n} = \\ &= A_1 + \alpha_2(A_2 - A_1) + \alpha_3(A_3 - A_1) + \cdots + \alpha_n(A_n - A_1) = \\ &= (1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \cdots - \alpha_n)A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_n A_n = \\ &= \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_n A_n. \end{aligned}$$

□

Definiția 1.9. O combinație de puncte de forma

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_n A_n,$$

cu $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$. Se numește *combinație afină* sau *combinație baricentrică* a punctelor A_1, \dots, A_n .

O combinație afină în care toți coeficienții sunt pozitivi se numește *combinație convexă*.

Definiția 1.10. Fie S o mulțime de puncte din spațiu.

Mulțimea tuturor combinațiilor afine ale unui număr finit de puncte din S se numește *înfășurătoarea afină* a mulțimii S și se notează cu $\text{aff}(S)$.

Mulțimea tuturor combinațiilor convexe ale unui număr finit de puncte din S se numește *înfășurătoarea convexă* a mulțimii S și se notează cu $\text{conv}(S)$.

Definiția 1.11. Se numește *subspațiu afin al lui \mathbb{R}^3* o submulțime $S \subset \mathbb{R}^3$ pentru care există un punct P și un subspațiu vectorial \mathcal{D} al spațiului vectorilor liberi astfel încât să avem

$$S = P + \mathcal{D} = \{P + \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in \mathcal{D}\}.$$

Dimensiunea subspațiului afin S este, prin definiție, dimensiunea subspațiului vectorial \mathcal{D} . Dacă dimensiunea este zero, subspațiul afin se reduce la punctul P . Dacă dimensiunea este 1, atunci subspațiul este o dreaptă care trece prin P și are direcția dată de orice vector nenul din \mathcal{D} . Dacă dimensiunea este 2, atunci subspațiul este un plan care trece prin P și este paralel cu doi vectori necoliniari din \mathcal{D} . În sfârșit, dacă dimensiunea este 3, atunci subspațiul afin coincide cu întregul \mathbb{R}^3 .

O altă noțiune fundamentală, care este legată de combinațiile convexe este cea de *mulțime convexă*, care joacă un rol foarte important în matematică.

Definiția 1.12. O mulțime $S \subset \mathbb{R}^3$ se numește *convexă* dacă, de fiecare dată când două puncte distincte A și B sunt în S , avem $[AB] \subset S$, cu alte cuvinte *dacă două puncte distincte aparțin lui S , atunci întregul segment care le unește este inclus în S .*

Exemplele de mulțimi convexe abundă în matematică. Orice poligon convex este o mulțime convexă (prin poligon, înțelegem linia poligonală închisă reunită cu interiorul, adică așa-numitul *poligon plin*). La fel, orice poliedru convex (plin) este o mulțime convexă. Este clar că orice subspațiu afin este, de asemenea o mulțime convexă.

Exemple. 1. Înfășurătoarea afină a unei perechi de puncte distincte A, B este dreapta AB .

Într-adevăr, fie M un punct din $\text{aff}(A, B)$. Atunci există două numere reale, α și β , cu $\alpha + \beta = 1$, astfel încât să avem

$$M = \alpha A + \beta B$$

sau

$$M = \alpha A + (1 - \alpha)B,$$

ceea ce înseamnă că

$$\overrightarrow{OM} = \alpha \overrightarrow{OA} + (1 - \alpha) \overrightarrow{OB},$$

de unde

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB} = \alpha(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}),$$

adică

$$\overrightarrow{BM} = \alpha \overrightarrow{BA},$$

ceea ce înseamnă că vectorii \overrightarrow{BM} și \overrightarrow{BA} sunt coliniari, așadar punctul M aparține dreptei AB .

Invers, să presupunem acum că punctul M se află pe dreapta AB , Această înseamnă că vectorii \overrightarrow{AM} și \overrightarrow{AB} sunt coliniari, adică există un număr real α astfel încât să avem

$$\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB},$$

adică

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \alpha (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$$

sau

$$\overrightarrow{OM} = (1 - \alpha) \overrightarrow{OA} + \alpha \overrightarrow{OB},$$

adică

$$M = (1 - \alpha)A + \alpha B,$$

deci M este o combinație afină a punctelor A și B sau, ceea ce este același lucru, $M \in \text{aff}(A, B)$.

2. Înfășurătoarea afină a trei puncte necoliniare, A, B, C este planul determinat de aceste trei puncte.

Într-adevăr, fie $M \in \text{aff}(A, B, C)$. Atunci există două numere reale α și β astfel încât să avem

$$M = (1 - \alpha - \beta)A + \alpha B + \beta C$$

sau, ceea ce este același lucru,

$$\overrightarrow{OM} = (1 - \alpha - \beta)\overrightarrow{OA} + \alpha\overrightarrow{OB} + \beta\overrightarrow{OC},$$

de unde deducem, ca mai sus, că

$$\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC},$$

ceea ce demonstrează că punctul M aparține planului determinat de cele trei puncte.

Invers, fie M un punct din planul determinat de punctele A, B și C , Atunci este clar că vectorul \overrightarrow{AM} aparține acestui plan. Punctele A, B și C fiind necoliniare, vectorii \overrightarrow{AB} și \overrightarrow{AC} formează o bază a spațiului vectorilor paraleli cu acest plan, deci există două numere reale α și β , unic determinate, astfel încât să avem

$$\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}.$$

Dar de aici deducem imediat că

$$\overrightarrow{OM} = (1 - \alpha - \beta)\overrightarrow{OA} + \alpha\overrightarrow{OB} + \beta\overrightarrow{OC},$$

adică $M \in \text{aff}(A, B, C)$.

3. Înfășurătoarea afină a patru puncte necoplanare, A, B, C, D este întregul spațiu.

Demonstrația este analoagă cu cea din cazul a trei puncte necoliniare.

4. Înfașurătoarea convexă a unei perechi de puncte distincte A, B este segmentul de dreaptă $[AB]$.

Într-adevăr, fie $M \in \text{conv}(A, B)$. Asta înseamnă că există un număr real $\alpha \in [0, 1]$ astfel încât să avem

$$M = (1 - \alpha)A + \alpha B$$

sau

$$\overrightarrow{OM} = (1 - \alpha)\overrightarrow{OA} + \alpha\overrightarrow{OB},$$

de unde obținem

$$\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}.$$

Relația de mai sus ne spune că vectorii \overrightarrow{AM} și \overrightarrow{AB} au aceeași direcție și același sens (deoarece $\alpha \geq 0$), ceea ce înseamnă că punctele M și B sunt, ambele, pe semidreapta $[AB]$. De altă parte, $\alpha \leq 1$, ceea ce înseamnă că punctul M se află între punctele A și B , adică se află pe segmentul (închis) $[AB]$.

Demonstrația incluziunii inverse este la fel de simplă. Dacă punctul M aparține segmentului $[AB]$, atunci există un $\alpha \in [0, 1]$ astfel încât să avem

$$\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}$$

și de aici deducem că

$$M = (1 - \alpha)A + \alpha B,$$

deci $M \in \text{conv}(A, B)$

5. Înfașurătoarea convexă a trei puncte necoliniare, A, B, C este triunghiul (plin) determinat de aceste trei puncte.
6. Înfașurătoarea afină a patru puncte necoplanare, A, B, C, D este tetraedrul (plin) $ABCD$.

1.8 Coordonate pe dreaptă

Fie Δ o dreaptă oarecare. Alegem pe ea un vector nenul oarecare, \mathbf{e} , pe care îl vom numi *vector unitar* sau *versor*.

Dacă acum \mathbf{a} este un vector oarecare de pe dreaptă, atunci, conform secțiunii precedente, există un singur număr real x astfel încât $\mathbf{a} = x\mathbf{e}$. Numărul x se numește *componenta* vectorului \mathbf{a} , relativ la dreapta Δ , înzestrată cu versorul \mathbf{e} .

Alegem pe dreapta Δ , înzestrată cu versorul \mathbf{e} , un punct O , pe care îl vom numi *originea coordonatelor*. Dreapta Δ se va numi de-acum *axă de coordonate*. Dacă M este un punct oarecare al dreptei, vectorul \overrightarrow{OM} se va numi *rază vectorie* sau *vector de poziție* al punctului M , iar componenta acestui vector se numește *coordanata punctului M* .

Alegem, mai departe, punctul E pe dreaptă astfel încât să avem $\overrightarrow{OE} = \mathbf{e}$. Segmentul OE va fi ales ca scară a lungimilor pe dreapta Δ . Prin urmare, coordonata unui punct M de pe dreaptă nu este altceva decât mărimea (numărul) a segmentului orientat \overrightarrow{OM} . Pentru a scoate în evidență că numărul real x este coordonata punctului M , vom scrie, de regulă, $M(x)$. Trebuie remarcat că există o infinitate de

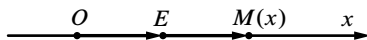


Figura 1.10:

moduri de a asocia coordonate punctelor de pe dreaptă. Coordonata unui punct este unic determinată doar în momentul în care s-au ales:

- versorul drepte;
- originea drepte.

Datorită introducerii coordonatelor, fiecărui punct M de pe axa de coordonate Δ i se pune în corespondență un singur număr real – coordonata sa x . Invers, pentru fiecare număr real x există un singur punct M de pe axa Δ a cărui coordonată este x . Astfel, poziția fiecărui punct de pe axa de coordonate este unic determinată prin prescrierea coordonatei acelui punct.

Notăm cu $\rho(M_1, M_2)$ distanța dintre punctele M_1 și M_2 , adică lungimea segmentului M_1M_2 . Această distanță se poate exprima cu ajutorul coordonatelor. Mai precis, avem următoarea teoremă:

Teorema 1.8. *Pentru orice puncte $M_1(x_1)$ și $M_2(x_2)$ de pe axa de coordonate au loc egalitățile:*

$$(M_1M_2) = x_2 - x_1, \quad (1.8.1)$$

$$\rho(M_1, M_2) = |x_2 - x_1|. \quad (1.8.2)$$

Demonstrație Din teorema lui Chasles rezultă că

$$(OM_1) + (M_1M_2) = (OM_2) \implies (M_1M_2) = (OM_2) - (OM_1).$$

Utilizând definiția coordonatelor, obținem egalitatea (1.8.1). Formula (1.8.2) rezultă imediat din formula (1.8.1). \square

1.9 Coordonate în plan

1.9.1 Coordonate afine

Peste tot în această secțiune vom considera că toate punctele și toți vectorii se află într-un plan Π .

Definiția 1.13. Fie O un punct și $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ – doi vectori liniar independenți (necoliniari) din planul Π . Tripletul $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ se numește *reper afin* sau *sistem de coordonate afin* în planul Π .

Atașăm vectorii \mathbf{e}_1 și \mathbf{e}_2 punctului O , construind punctele E_1 și E_2 astfel încât $\overrightarrow{OE_1} = \mathbf{e}_1$ și $\overrightarrow{OE_2} = \mathbf{e}_2$. Segmentele orientate $\overline{OE_1}$ și $\overline{OE_2}$ definesc două axe de coordonate, Ox și Oy . Punctul O se numește *originea coordonatelor*, iar vectorii \mathbf{e}_1 și \mathbf{e}_2 – *vectorii bazei*.

Fie acum \mathbf{a} un vector oarecare din planul Π . Din teorema 1.4 rezultă că \mathbf{a} se poate reprezenta în mod unic sub forma

$$\mathbf{a} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2. \quad (1.9.1)$$

Definiția 1.14. Coeficienții x și y din descompunerea (1.9.1) se numesc *componentele* vectorului \mathbf{a} relativ la sistemul de coordonate $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

După cum s-a văzut în secțiunea 1.4, x și y sunt, de fapt, magnitudinile proiecțiilor vectorului \mathbf{a} pe axele Ox și Oy , paralel cu axele OY , respectiv Ox . Pentru a scoate în evidență faptul că x și y sunt componentele vectorului \mathbf{a} vom scrie $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y)$ sau, pur și simplu, $\mathbf{a}(x, y)$.

Fie, acum, M un punct oarecare al planului Π , în care s-a fixat un sistem de coordonate afine $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Vectorul \overrightarrow{OM} se numește *raza vectoare* sau *vectorul de poziție* al punctului M .

Definiția 1.15. Componentele x și y ale vectorului \overrightarrow{OM} se numesc *coordoanate afine* ale punctului M relativ la reperul $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. De regulă, x se numește *abscisă*, în timp ce y se numește *ordonată*.

Un sistem de coordonate afine se mai notează și cu Oxy , dacă vectorii bazei sunt subînțeleși. Dacă x și y sunt coordonatele unui punct M , vom utiliza în mod frecvent notația $M(x, y)$.

Introducerea componentelor vectorilor permite înlocuirea diferitelor relații dintre vectori cu relații între componentele lor. Avem, de exemplu:

Teorema 1.9. *Componentele unei combinații liniare de vectori sunt egale cu aceeași combinație liniară a componentelor vectorilor. Mai precis, dacă*

$$\mathbf{a}(X, Y) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{a}_i(X_i, Y_i),$$

atunci

$$X = \sum_{i=1}^k \lambda_i X_i, \quad Y = \sum_{j=1}^k \lambda_j Y_j.$$

Demonstrație Cum componentele vectorilor nu sunt altceva decât magnitudinile proiecțiilor acestor vectori pe axele de coordonate, teorema rezultă direct din proprietățile proiecțiilor. \square

Consecința 1.3. *Dacă $X(x_1, y_1)$ și $B(x_2, y_2)$ sunt două puncte din plan, atunci*

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1),$$

adică pentru a obține componentele vectorului definit de segmentul orientat \overrightarrow{AB} , trebuie să scădem din coordonatele extremității sale coordonatele originii.

Demonstrație Rezultă imediat din teorema precedentă și din relația

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$

\square

Consecința 1.4. *Pentru ca doi vectori $\mathbf{a}(x_1, y_1)$ și $\mathbf{b}(x_2, y_2)$ să fie coliniari, este necesar și suficient ca ei să aibă componentele corespunzătoare proporționale.*

Demonstrație După cum am văzut în secțiunea 1.5, vectorii \mathbf{a} și \mathbf{b} sunt coliniari dacă și numai dacă între ei există o relație de forma

$$\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}, \tag{1.9.2}$$

cu λ real. Din teorema 1.9 rezultă că egalitatea (1.9.2) este echivalentă cu două egalități numerice:

$$x_2 = \lambda x_1, \quad y_2 = \lambda y_1, \quad (1.9.3)$$

ceea ce încheie demonstrația. Remarcăm că egalitățile (1.9.3) implică și egalitatea

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1},$$

cu condiția ca ambii numitori să fie diferiți de zero. Menționăm, pe de altă parte, că se poate utiliza convenția că de fiecare dată când un numitor este zero, se admite că și numărătorul care îi corespunde este zero, ceea ce înseamnă că, formal, putem scrie egalitatea precedentă și când unul dintre numitori se anulează. \square

Consecința 1.5. *Coordonatele mijlocului A al unui segment de dreaptă cu capetele în punctele $A_1(x_1, y_1)$ și $A_2(x_2, y_2)$ sunt*

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

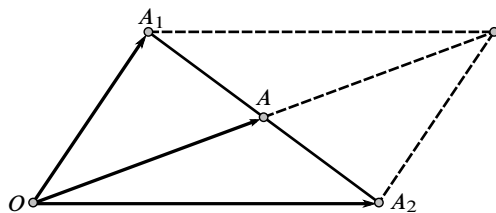


Figura 1.11:

Demonstrație Rezultă imediat din egalitatea

$$\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2})$$

(vezi figura 1.11) și din teoremă. \square

1.9.2 Împărțirea unui segment într-un raport dat

Fie Δ o dreaptă oarecare și A și B două puncte de pe ea, iar k un număr real. Alegem pe Δ un sens de parcurgere oarecare. Spunem că un punct M de pe dreaptă *împarte*

segmentul AB în raportul k dacă avem

$$\frac{(MA)}{(MB)} = k. \quad (1.9.4)$$

Este clar că definiția nu depinde de alegerea orientării dreptei Δ . Este, de asemenea, clar că raportul k este negativ dacă punctul M se află în interiorul segmentului AB și este pozitiv atunci când punctul se află în exteriorul acestuia. Se observă, de asemenea, că relația (1.9.4) este echivalentă cu relația vectorială

$$\overrightarrow{MA} = k \overrightarrow{MB}. \quad (1.9.5)$$

Fie, acum, \mathbf{r}_1 și \mathbf{r}_2 vectorii de poziție ai punctelor A , respectiv B , și \mathbf{r} – vectorul de poziție al punctului M . Atunci relația (1.9.5) se poate rescrie sub forma

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r} = k(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r})$$

sau

$$(1 - k)\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - k\mathbf{r}_2,$$

adică

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}_1 - k\mathbf{r}_2}{1 - k}. \quad (1.9.6)$$

Observații. (1) În formula (1.9.6) nu putem avea $k = 1$, pentru că asta ar însemna $(MA) = (MB)$, ceea ce ne-ar conduce la $A = B$, ori noi am presupus că cele două puncte sunt distincte.

(2) Relația (1.9.6) se poate scrie sub forma

$$\mathbf{r} = \frac{1}{1 - k}\mathbf{r}_1 + \left(1 - \frac{1}{1 - k}\right)\mathbf{r}_2. \quad (1.9.7)$$

Asta înseamnă că punctul M este o combinație afină a punctelor A și B , iar când k ia toate valorile reale (mai puțin 1), punctul M va parcurge întreaga axă reală.

(3) Dacă avem $k \leq 0$, atunci este clar din definiție că punctul M aparține segmentului AB . Remarcăm, în plus, că atunci când k este negativ, cei doi coeficienți din relația (1.9.7) sunt, ambii, pozitivi, adică punctul M este, de data aceasta, o combinație *convexă* a punctelor A și B , iar segmentul AB este mulțimea tuturor combinațiilor convexe a celor două puncte (înfășurătoarea convexă a celor două puncte). Se observă că punctul A corespunde valorii $k = 0$ a raportului, în timp ce punctul B se obține dacă facem $k \rightarrow -\infty$.

(4) Pentru $k = -1$, regăsim expresia pentru vectorul de poziție al mijlocului segmentului AB :

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2.)$$

1.9.3 Coordonate rectangulare

Presupunem că în planul Π a fost aleasă o unitate de măsură pentru lungime. Alegem un punct O și doi vectori de lungime 1, perpendiculari unul pe celălalt, \mathbf{i} și \mathbf{j} . Sistemul afin de coordonate $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ se numește *sistem de coordonate rectangular* sau *cartezian*. Despre baza $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ vom spune că este *ortonormată* (ceea ce înseamnă că vectorii sunt *ortogonali*, adică perpendiculari și “normați”, adică de lungime 1).

Toate proprietățile valabile într-un sistem de coordonate afin oarecare rămân adevărate și într-un sistem rectangular, dar, de regulă, expresiile care intervin sunt mult mai simple atunci când sunt scrise în coordonate carteziane.

1.9.4 Coordonate polare

Alegem în planul Π un punct O , pe care îl numim *pol* și o semidreaptă OA , pe care o vom numi *axă polară*. Mai alegem o unitate de măsură pentru lungime și, în fine, un sens pozitiv de rotație în jurul polului O . De regulă, sensul pozitiv este sensul invers mersului acelor de ceasornic. Unghiurile se măsoară în radiani.

Fie acum M un punct oarecare al planului. Vom nota cu ρ distanța de la M la polul O și cu φ mărimea unghiului dintre semidreptele OM și OA . Mărimile ρ și φ se numesc *coordonele polare* ale punctului M . Mai precis, ρ se numește *rază polară*, în timp ce φ se numește *unghi polar*. Fiecărui punct din plan i se poate atașa, în mod unic, o rază polară $\rho \geq 0$. Valorile lui φ , în schimb, pentru puncte diferite de pol, sunt definite până la un termen $2k\pi$, unde k este un număr întreg. Pentru ca fiecărui punct din plan, diferit de pol, să i se asocieze un singur unghi polar, este suficient să considerăm că $-\pi < \varphi \leq \pi$. Aceste valori ale lui φ se numesc *principale*. Vom spune acum că am introdus în plan *un sistem de coordonate polare*.

Considerăm în plan, simultan, un sistem de coordonate carteziane Oxy și un sistem de coordonate polare astfel încât polul să coincidă cu originea coordonatelor carteziane, iar axa polară să coincidă cu direcția pozitivă a axei Ox . În sfârșit, vom considera ca sens pozitiv de rotație în jurul polului acel sens în care trebuie să rotim direcția pozitivă a axei Ox , pentru a o suprapune, pe drumul cel mai scurt, peste direcția pozitivă a axei Oy .

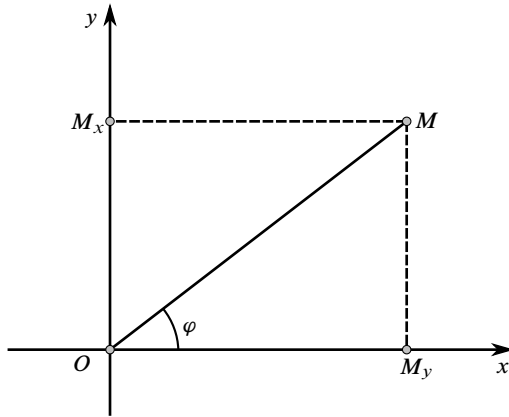


Figura 1.12:

Fie M un punct oarecare din plan (diferit de origine), x, y – coordonatele sale carteziene, iar ρ, φ – coordonatele sale polare. Avem, în mod evident:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi. \quad (1.9.8)$$

Formulele (1.9.8) exprimă coordonatele carteziene ale punctului M în funcție de coordonatele sale polare. Pentru exprimarea coordonatelor polare în funcție de cele carteziene, din nou, în ipoteza că punctul M nu coincide cu polul, se pot folosi formulele următoare, care rezultă imediat din (1.9.8):

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Dacă $x \neq 0$ (adică dacă M nu este situat pe axa Oy , atunci putem scrie

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

Din această ecuație noi trebuie să obținem unghiul φ . După cum se știe din trigonometrie, soluția generală a ecuației de mai sus este

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

unde $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Vom alege numărul întreg k astfel încât unghiul φ să fie în intervalul $(-\pi, \pi)$. Distingem patru cazuri, în funcție de cadranul în care se află punctul M .

- (1) Dacă M se află în primul cadran, atunci $x > 0, y \geq 0$, prin urmare $\arctg(y/x) \in [0, \frac{\pi}{2})$. Cum φ trebuie să se afle în același interval, putem alege $k = 0$, deci

$$\varphi = \arctg \frac{y}{x}.$$

- (2) Dacă M se află în cel de-al doilea cadran, adică $x < 0, y \geq 0$, atunci $\arctg(y/x) \in (-\frac{\pi}{2}, 0]$. Cum φ trebuie să fie în intervalul $(\pi/2, \pi]$, k trebuie să fie egal cu 1, deci

$$\varphi = \arctg \frac{y}{x} + \pi.$$

- (3) Dacă M se află în cel de-al treilea cadran, adică $x < 0, y \leq 0$, atunci $\arctg(y/x) \in [0, \frac{\pi}{2})$. Cum φ trebuie să fie în intervalul $[-\pi, -\pi/2)$, k trebuie să fie egal cu -1, deci

$$\varphi = \arctg \frac{y}{x} - \pi.$$

- (4) Dacă M se află în cel de-al patrulea cadran, adică $x > 0, y \leq 0$, atunci $\arctg(y/x) \in (-\frac{\pi}{2}, 0]$. Cum φ trebuie să fie în intervalul $(-\pi/2, 0]$, k trebuie să fie egal cu 0, deci

$$\varphi = \arctg \frac{y}{x}.$$

1.10 Coordonate în spațiu

1.10.1 Coordonate afine și rectangulare

Fie O un punct oarecare al spațiului și $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ – trei vectori liniar independenți (adică necoplanari).

Definiția 1.16. Cuadrupletul $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ se numește *reper afin* sau *sistem de coordonate afine* în spațiu. Punctul O se numește *originea coordonatelor*, iar vectorii $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ se numesc *vectorii bazei*.

Definiția 1.17. Se numesc *componente* ale unui vector \mathbf{a} relativ la reperul $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ coeficienții x, y, z ai descompunerii:

$$\mathbf{a} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3.$$

Coordonatele unui punct M , relativ la același reper sunt, prin definiție, componentele x, y, z ale vectorului său de poziție, \overrightarrow{OM} . Coordonata x se numește *abscisă*, coordonata y – *ordonată*, iar coordonata z – *cotă*.

Un sistem de coordonate afin se mai notează cu $Oxyz$, dacă vectorii bazei sunt subînțeleși. Construim punctele E_1, E_2, E_3 astfel încât

$$\overrightarrow{OE_1} = \mathbf{e}_1, \overrightarrow{OE_2} = \mathbf{e}_2, \overrightarrow{OE_3} = \mathbf{e}_3. \quad (1.10.1)$$

Segmentele orientate $\overrightarrow{OE_1}, \overrightarrow{OE_2}$ și $\overrightarrow{OE_3}$ determină cele trei *axe de coordonate*, Ox, Oy și Oz . Cele trei plane determinate de câte două axe de coordonate se numesc *plane de coordonate*. Aceste plane împart spațiul în opt zone, care se numesc *octanți de coordonate*.

Ca și în cazul reperelor plane, distingem sisteme de coordonate *drepte* și *stângi*. Considerăm un triplet de vectori necoplanari $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Atașăm acești vectori unui punct O , adică determinăm punctele E_1, E_2, E_3 , astfel încât să fie verificate relațiile (1.10.1). Rotim segmentul orientat $\overrightarrow{OE_1}$, în planul OE_1E_2 , în jurul lui O , pe cel mai scurt drum, până când el coincide, ca direcție și sens, cu segmentul orientat $\overrightarrow{OE_2}$. Dacă această rotație, privită din extremitatea segmentului orientat $\overrightarrow{OE_3}$ (cu alte cuvinte, din punctul E_3) se produce în sensul invers mersului acelor de ceasornic, vom spune că tripletul de vectori $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ este *drept*, altfel vom spune că este *stâng*.

Un sistem de coordonate $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ se numește *drept* sau *stâng*, după cum tripletul $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ este drept sau stâng. Peste tot, în cele ce urmează, sistemele de coordonate vor fi totdeauna drepte, dacă nu se menționează altfel.

Cel mai simplu dintre sistemele de coordonate afine în spațiu este sistemul de coordonate rectangular sau cartezian. Presupunem că în spațiu s-a ales o unitate de măsură pentru lungime. Atunci un sistem de coordonate rectangular sau cartezian în spațiu este determinat de alegerea unui punct O și a trei vectori de lungime 1, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, perpendiculari între ei.

Teorema 1.9 și consecințele sale se pot adapta fără probleme la cazul spațiului, singura diferență fiind faptul că se mai adaugă încă o coordonată.

1.10.2 Coordonate cilindrice

Alegem o unitate de măsură pentru lungime în spațiu. Alegem un plan oarecare, Π și în acest plan alegem un punct O și o semidreaptă Ox , care pleacă din acest punct. Alegem un sens de rotație pozitiv în planul Π , în jurul punctului O . Atunci în planul Π este definit un sistem de coordonate polar, în care polul este O , iar axa polară este Ox . În sfârșit, alegem o axă OZ , perpendiculară pe planul Π și orientată astfel încât rotația pozitivă din planul Π , privită din direcția pozitivă a axei Oz să se producă în sens invers mersului acelor de ceasornic.

Fie, acum, M un punct oarecare din spațiu, M_1 – proiecția sa ortogonală pe planul Π și M_z – proiecția ortogonală a punctului M pe axa Oz .

Coordonatele cilindrice ale punctului M sunt trei numere ρ, φ, z , unde ρ, φ sunt coordonatele polare ale punctului M_1 în planul Π , iar $z = (OM)$. Denumirea de “coordoanate cilindrice” este legată de faptul că suprafața ce conține toate punctele corespunzând aceleiași valori a coordonatei ρ este un cilindru. Fiecărui punct din spațiu i se pot asocia coordonate ρ și z unice, iar ρ este întotdeauna pozitivă. Valoarea lui φ este definită doar pentru puncte ce nu se află pe axa Oz și, ca și în cazul coordonatelor polare, este definită până la un multiplu întreg de π . Dacă în spațiu este dat și un sistem de coordonate cartezian, cu originea în O și astfel încât axele Ox și Oz să coincidă cu axele cu același nume ale sistemului cilindric, atunci coordonatele carteziene se pot exprima în funcție de cele cilindrice prin relațiile:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z.$$

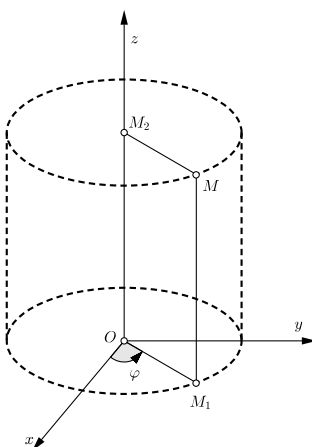


Figura 1.13:

1.10.3 Coordonate sferice

Pentru introducerea coordonatelor sferice este necesar, ca și în cazul coordonatelor cilindrice, să alegem o unitate de măsură pentru lungime, un plan Π , cu un punct O și o axă Ox , precum și a unei axe Oz .

Fie M un punct oarecare din spațiu, iar M_1 – proiecția sa ortogonală pe planul Π . Fie, mai departe, ρ – distanța de la punctul M la punctul O ; θ – unghiul dintre

axa Oz și segmentul orientat \overline{OM} și, în fine, φ – unghiul cu care trebuie rotită axa Ox în așa fel încât să coincidă cu semidreapta OM_1 . Numerele ρ, θ, φ se numesc *coordonate sferice* ale punctului M . Unghiul φ se numește *longitudine*, iar unghiul θ – *latitudine*.

Denumirea de “coordonate sferice” provine din faptul că suprafața ce conține toate punctele cu o aceeași valoare a coordonatei ρ este o sferă. Fiecărui punct al spațiului, diferit de O , îi corespund valori bine definite ale coordonatelor ρ și θ . ρ este întotdeauna strict pozitivă, iar unghiul θ se consideră a varia în intervalul $[0, \pi]$. Valoarea lui φ nu este definită pentru punctele de pe axa Oz . Acolo unde este definită, ca și în cazul coordonatelor polare, această valoare este definită doar până la un multiplu întreg de π . Ca și în cazul coordonatelor cilindrice, dacă alegem și un sistem de coordonate cartezian în așa fel încât originile celor două sisteme să coincidă, ca și axele Ox și Oz , atunci coordonatele carteziene se exprimă în funcție de cele sferice prin relațiile:

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta.$$

1.11 Transformări de coordonate

1.11.1 Coordonate afine

Considerăm, în plan, două sisteme de coordonate afine, $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ și $(O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$. Primul sistem îl vom numi *sistemul vechi*, iar cel de-al doilea – *sistemul nou*. Presupunem că se cunosc coordonatele punctului O' , precum și componentele vectorilor \mathbf{e}'_1 și \mathbf{e}'_2 relativ la sistemul vechi:

$$O'(\alpha_1, \alpha_2), \quad \mathbf{e}'_1(\alpha_{11}, \alpha_{21}), \quad \mathbf{e}'_2(\alpha_{12}, \alpha_{22}).$$

Presupunem acum că un punct oarecare M din plan are coordonatele vechi x și y și coordonatele noi x' și y' . Vrem să găsim o relație între cele două perechi de coordonate ale acestui punct. Avem, înainte de toate,

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \alpha_{11}\mathbf{e}_1 + \alpha_{21}\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}'_2 = \alpha_{12}\mathbf{e}_1 + \alpha_{22}\mathbf{e}_2 \\ \overrightarrow{OO'} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2, & \overrightarrow{OM} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2, \quad \overrightarrow{O'M} = x'\mathbf{e}'_1 + y'\mathbf{e}'_2 \end{cases} \quad (1.11.1)$$

Mai departe,

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}.$$

Din această egalitate, utilizând formulele (1.11.1), obținem

$$\begin{aligned} x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 &= \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + x'(\alpha_{11}\mathbf{e}_1 + \alpha_{21}\mathbf{e}_2) + y'(\alpha_{12}\mathbf{e}_1 + \alpha_{22}\mathbf{e}_2) \\ &= (\alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + \alpha_1)\mathbf{e}_1 + (\alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_2)\mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

În virtutea teoremei 1.4, obținem atunci formulele de transformare

$$\begin{cases} x = \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + \alpha_1 \\ y = \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_2 \end{cases} \quad (1.11.2)$$

Dacă în raționamentele precedente schimbăm între ele coordonatele vechi și cele noi, obținem formulele de transformare

$$\begin{cases} x' = \beta_{11}x + \beta_{12}y + \beta_1 \\ y' = \beta_{21}x + \beta_{22}y + \beta_2 \end{cases}, \quad (1.11.3)$$

unde

$$O(\beta_1, \beta_2), \mathbf{e}_1(\beta_{11}, \beta_{21}), \mathbf{e}_2(\beta_{12}, \beta_{22}).$$

Se poate constata cu ușurință că $\alpha_i = -\beta_i, i = 1, 2$ și că matricea

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

este inversa matricii

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}.$$

Considerăm acum, alături de punctul M , încă un punct, N , ale cărui coordonate vechi și noi le vom nota, respectiv, cu x_1, y_1 și x'_1, y'_1 . Atunci, din formulele (1.11.2), obținem

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}x'_1 + \alpha_{12}y'_1 + \alpha_1 \\ y_1 = \alpha_{21}x'_1 + \alpha_{22}y'_1 + \alpha_2 \end{cases} \quad (1.11.4)$$

După cum se știe, componentele (vechi și noi) ale vectorului \overrightarrow{MN} vor fi date de

$$\begin{aligned} X &= x_1 - x, \quad Y = y_1 - y \\ X' &= x'_1 - x', \quad Y' = y'_1 - y'. \end{aligned}$$

Utilizând formulele (1.11.2) și (1.11.4), obținem formulele de transformare pentru componentele unui vector:

$$\begin{aligned} X &= \alpha_{11}X' + \alpha_{12}Y', \\ Y &= \alpha_{21}X' + \alpha_{22}Y'. \end{aligned}$$

Transformările de coordonate în spațiu se scriu în mod absolut analog. Fie $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ și $(O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ două sisteme de coordonate afine în spațiu (cel vechi și cel nou). Presupunem, de asemenea, ca și mai înainte, că se cunosc coordonatele noii origini și componentele vectorilor noii baze relativ la vechea bază:

$$\begin{aligned} O'(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \mathbf{e}'_1(\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}), \\ \mathbf{e}'_2(\alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{32}), \quad \mathbf{e}'_3(\alpha_{13}, \alpha_{23}, \alpha_{33}). \end{aligned}$$

Atunci vechile coordonate se exprimă în funcțiile de cele noi prin formulele:

$$\begin{cases} x = \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + \alpha_{13}z' + \alpha_1 \\ y = \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{23}z' + \alpha_2 \\ z = \alpha_{31}x' + \alpha_{32}y' + \alpha_{33}z' + \alpha_3 \end{cases}.$$

Cu ajutorul unor formule analoage se exprimă și coordonatele noi în funcție de coordonatele vechi. În ceea ce privește regulile de transformare a componentelor vectorilor, se obține:

$$\begin{aligned} X &= \alpha_{11}X' + \alpha_{12}Y' + \alpha_{13}Z', \\ Y &= \alpha_{21}X' + \alpha_{22}Y' + \alpha_{23}Z', \\ Z &= \alpha_{31}X' + \alpha_{32}Y' + \alpha_{33}Z'. \end{aligned}$$

1.11.2 Coordonate rectangulare în plan

Considerăm acum cazul particular al transformărilor de coordonate în plan, când ambele sisteme de coordonate, atât cel vechi cât și cel nou, sunt ortogonale. Vom nota sistemul de coordonate vechi cu $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$, iar cel nou – cu $(O', \mathbf{i}', \mathbf{j}')$.

Vom distinge două cazuri, după cum rotațiile pe drumul cel mai scurt de la \mathbf{i} la \mathbf{j} și de la \mathbf{i}' la \mathbf{j}' se fac:

- în aceeași direcție (fie ambele în sensul acelor de ceasornic, fie ambele în sens opus mersului acelor de ceasornic);

b) în direcții opuse.

În ambele cazuri vom nota cu φ unghiul dintre vectorii \mathbf{i} și \mathbf{i}' , în sensul celei mai scurte rotații de la \mathbf{i} la \mathbf{j} . Dacă notăm cu ψ unghiul dintre vectorii \mathbf{i} și \mathbf{j}' , atunci în primul caz avem

$$\psi = \varphi + \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

în timp ce în cel de-al doilea caz avem

$$\psi = \varphi - \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

În ambele cazuri, avem următoarele expresii pentru componentele vectorilor \mathbf{i}' și \mathbf{j}' :

$$\alpha_{11} = \cos \varphi, \alpha_{21} = \sin \varphi, \alpha_{12} = \cos \psi, \alpha_{22} = \sin \psi.$$

În primul caz, formulele (1.11.2) capătă forma

$$\begin{cases} x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi + \alpha_1, \\ y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi + \alpha_2, \end{cases} \quad (1.11.5)$$

în timp ce în al doilea caz, avem:

$$\begin{cases} x = x' \cos \varphi + y' \sin \varphi + \alpha_1, \\ y = x' \sin \varphi - y' \cos \varphi + \alpha_2. \end{cases}$$

Sunt interesante următoarele două cazuri particulare importante ale formulelor (1.11.5):

1. Presupunem că $\mathbf{i} = \mathbf{i}'$ și $\mathbf{j} = \mathbf{j}'$. Atunci formulele (1.11.5) capătă forma:

$$\begin{cases} x = x' + \alpha_1, \\ y = y' + \alpha_2 \end{cases}$$

și se numesc *formulele de transformare a coordonatelor prin transportul paralel (translația) axelor de coordonate cu vectorul $\mathbf{a}(\alpha_1, \alpha_2)$* .

2. Dacă $O' = O$, atunci formulele (1.11.5) capătă forma:

$$\begin{cases} x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \\ y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi, \end{cases}$$

și se numesc *formulele de transformare a coordonatelor prin rotația sistemului în jurul originii cu unghiul φ* .

1.12 Aplicații în geometrie ale operațiilor elementare cu vectori

1.12.1 Ecuația vectorială a dreptei determinate de două puncte distincte

Fie A și B două puncte distincte și $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$ – vectorii lor de poziție față de o origine oarecare. Este clar că vectorul

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A \quad (1.12.1)$$

este colinbiar cu dreapta AB . Fie M un punct de pe dreaptă și \mathbf{r} vectorul său de poziție. Atunci vectorul

$$\overrightarrow{AM} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_A \quad (1.12.2)$$

este, de asemenea, colinbiar cu dreapta, deci este colinbiar și cu \overrightarrow{AB} , deci există un număr real λ astfel încât să avem

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} \quad (1.12.3)$$

sau

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_A = \lambda (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A)$$

sau, în fine,

$$\mathbf{r} = (1 - \lambda)\mathbf{r}_A + \lambda\mathbf{r}_B. \quad (1.12.4)$$

Ecuația (1.12.4) se numește *ecuația vectorială a dreptei* când se dau două puncte distincte ale sale.

1.12.2 Condiția de coliniaritate a trei puncte

Considerăm trei puncte distincte, A, B, C , date prin intermediul vectorilor de poziție, $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$ și \mathbf{r}_C . Așa cum am văzut în paragraful precedent, ecuația vectorială a dreptei AB este dată de

$$\mathbf{r} = (1 - \lambda)\mathbf{r}_A + \lambda\mathbf{r}_B. \quad (1.12.5)$$

Punctele A, B, C sunt coliniare dacă și numai dacă punctul C aparține dreptei AB , cu alte cuvinte dacă și numai dacă există un λ real, astfel încât să avem

$$\mathbf{r}_C = (1 - \lambda)\mathbf{r}_A + \lambda\mathbf{r}_B \quad (1.12.6)$$

sau

$$(1 - \lambda)\mathbf{r}_A + \lambda\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C = 0. \quad (1.12.7)$$

Înmulțim această ecuație cu scalarul nenul $-\gamma$, obținem egalitatea

$$-\gamma(1 - \lambda)\mathbf{r}_A - \gamma\lambda\mathbf{r}_B + \gamma\mathbf{r}_C = 0$$

sau, dacă notăm $\alpha = -\gamma(1 - \lambda)$ și $\beta = -\gamma\lambda$,

$$\alpha\mathbf{r}_A + \beta\mathbf{r}_B + \gamma\mathbf{r}_C = 0, \quad (1.12.8)$$

în care suma coeficienților se anulează:

$$\alpha + \beta + \gamma = -\gamma(1 - \lambda) - \gamma\lambda + \gamma = 0.$$

Avem, așadar, următorul rezultat:

Teorema 1.10. *Trei puncte A, B, C sunt coliniare dacă și numai dacă între vectorii lor de poziție există o relație de forma*

$$\alpha\mathbf{r}_A + \beta\mathbf{r}_B + \gamma\mathbf{r}_C = 0,$$

în care coeficienții verifică relația

$$\alpha + \beta + \gamma = 0.$$

1.12.3 Ecuația vectorială a planului determinat de trei puncte necoliniare

Considerăm trei puncte necoliniare A, B, C și O un punct exterior planului. Notăm cu $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C$ – vectorii de poziție ai punctelor A, B, C relativ la punctul O .

Punctele A, B și C fiind necoliniare, rezultă că vectorii \overrightarrow{AB} și \overrightarrow{AC} sunt vectori din planul determinat de cele trei puncte, liniar independenți.

Fie, acum, M un punct oarecare din plan. Atunci vectorul \overrightarrow{AM} este situat, și el, în planul celor trei puncte, deci se poate scrie (în mod unic!) ca o combinație liniară a vectorilor \overrightarrow{AB} și \overrightarrow{AC} , adică există două numere reale λ și μ astfel încât să avem

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} \quad (1.12.9)$$

sau

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_A = \lambda(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) + \mu(\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_A),$$

adică

$$\mathbf{r} = (1 - \lambda - \mu)\mathbf{r}_A + \lambda\mathbf{r}_B + \mu\mathbf{r}_C. \quad (1.12.10)$$

Ecuația (1.12.10) se numește *ecuația vectorială a planului determinat de trei puncte necoliniare, date prin vectorii lor de poziție relativ la un punct exterior planului*.

1.12.4 Condiția de coplanaritate a patru puncte

Considerăm patru puncte distincte, A, B, C, D , date prin vectorii lor de poziție $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C, \mathbf{r}_D$. Dacă punctele sunt coliniare, atunci ele sunt, evident coplanare. Presupunem că A, B, C sunt necoliniare și ele determină un plan Π și alegem originea relativ la care construim vectorii de poziție astfel încât să fie situată în afara planului Π .

După cum am văzut în paragraful precedent, ecuația planului Π se poate scrie sub forma

$$\mathbf{r} = (1 - \lambda - \mu)\mathbf{r}_A + \lambda\mathbf{r}_B + \mu\mathbf{r}_C. \quad (1.12.11)$$

Punctul D aparține planului Π dacă și numai dacă vectorul său de poziție verifică ecuația planului, adică

$$\mathbf{r}_D = (1 - \lambda - \mu)\mathbf{r}_A + \lambda\mathbf{r}_B + \mu\mathbf{r}_C$$

sau

$$(1 - \lambda - \mu)\mathbf{r}_A + \lambda\mathbf{r}_B + \mu\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_D = 0.$$

Înmulțim această relație cu un număr real nenul oarecare $-\delta$ și obținem

$$-\delta(1 - \lambda - \mu)\mathbf{r}_A - \delta\lambda\mathbf{r}_B - \delta\mu\mathbf{r}_C + \delta\mathbf{r}_D = 0$$

sau, după ce punem $\alpha = -\delta(1 - \lambda - \mu)$, $\beta = -\delta\lambda$ și $\gamma = -\delta\mu$,

$$\alpha\mathbf{r}_A + \beta\mathbf{r}_B + \gamma\mathbf{r}_C + \delta\mathbf{r}_D = 0, \quad (1.12.12)$$

unde, după cum se poate verifica ușor,

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0. \quad (1.12.13)$$

Avem, deci,

Teorema 1.11. *Patru puncte sunt A, B, C, D sunt coplanare dacă și numai dacă între vectorii lor de poziție există o relație de forma*

$$\alpha\mathbf{r}_A + \beta\mathbf{r}_B + \gamma\mathbf{r}_C + \delta\mathbf{r}_D = 0,$$

în care coeficienții nu sunt toți nuli și verifică relația

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0.$$

1.12.5 Concurența medianelor unui triunghi

Vom demonstra că cele trei mediane ale unui triunghi oarecare se intersectează într-un punct G , iar acest punct împarte fiecare mediană în același raport.

Prima demonstrație

Considerăm rriunghiul ABC și notăm cu A' , B' , respectiv C' mijloacele laturilor BC , CA , respectiv AB . Alegem un punct O , siruat în afara planului triunghiului și fie $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$, respectiv \mathbf{r}_3 vectorii de poziție ai punctelor A, B , respectiv C față de punctul O și $\mathbf{r}_{11}, \mathbf{r}_{21}$, respectiv \mathbf{r}_{31} – vectorii de poziție ai punctelor A', B' , respectiv C' relativ la același punct.

După cum am văzut deja, avem

$$\mathbf{r}_{11} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3), \quad \mathbf{r}_{21} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1), \quad \mathbf{r}_{31} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2).$$

Vectorul de poziție al unui punct oarecare de pe mediana AA' trebuie să fie o combinație afină a vectorilor de poziție ale punctelor A și A' , adică avem

$$AA' : \mathbf{r} = (1 - \lambda)\mathbf{r}_1 + \lambda\mathbf{r}_{11} = (1 - \lambda)\mathbf{r}_1 + \frac{\lambda}{2}(\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3).$$

În exact același mod, vectorul de poziție al unui punct oarecare de pe mediana BB' se va scrie sub forma

$$BB' : \mathbf{r} = (1 - \mu)\mathbf{r}_2 + \mu\mathbf{r}_{21} = (1 - \mu)\mathbf{r}_2 + \frac{\mu}{2}(\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1).$$

Dreptele AA' și BB' se intersectează, în mod evident, și fie G punctul lor de intersecție. Acest punct se află pe ambele drepte, ceea ce înseamnă că trebuie să existe o pereche de numere reale λ și μ astfel încât să avem

$$(1 - \lambda)\mathbf{r}_1 + \frac{\lambda}{2}(\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3) = (1 - \mu)\mathbf{r}_2 + \frac{\mu}{2}(\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1).$$

Ecuția de mai sus este echivalentă cu ecuația

$$\left(1 - \lambda - \frac{\mu}{2}\right)\mathbf{r}_1 + \left(\frac{\lambda}{2} + \mu - 1\right)\mathbf{r}_2 + \frac{\lambda - \mu}{2}\mathbf{r}_3 = \mathbf{0}. \quad (1.12.14)$$

Întrucât punctele A, B și C sunt necoliniare, iar punctul O e în afara planului triunghiului, vectorii $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ și \mathbf{r}_3 sunt liniari independenți, de unde rezultă că relația (1.12.14)

poate avea loc doar dacă toți coeficienții celor trei vectori sunt egali cu zero, adică dacă și numai dacă avem

$$1 - \lambda - \frac{\mu}{2} = 0, \quad \frac{\lambda}{2} + \mu - 1 = 0, \quad \frac{\lambda - \mu}{2} \mathbf{r}_3 = 0. \quad (1.12.15)$$

Se constată imediat că sistemul este compatibil și determinat și are soluția unică

$$\lambda = \mu = \frac{2}{3}.$$

Considerăm acum ce-a de-a treia mediană, CC' . Din aceleași considerente ca și în cazul celorlalte două mediane, un punct de pe ea va avea vectorul de poziție dat de

$$CC' : \mathbf{r} = (1 - \nu)\mathbf{r}_2 + \nu\mathbf{r}_3 = (1 - \nu)\mathbf{r}_3 + \frac{\nu}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2).$$

Dacă vrem să găsim punctul de intersecție dintre AA' și CC' , obținem un sistem analog cu sistemul (1.12.15), cu soluția

$$\lambda = \nu = \frac{2}{3}.$$

Astfel, punctul de intersecție dintre dreptele AA' și CC' coincide cu punctul de intersecție dintre AA' și BB' (deci și cu punctul de intersecție dintre dreptele BB' și CC').

Înlocuind, de exemplu, în expresia vectorului de poziție al unui punct de pe AA' , $\lambda = 2/3$, obținem vectorul de poziție al punctului G de intersecție a medianelor (centrul de greutate):

$$\mathbf{r} = \frac{1}{3}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3). \quad (1.12.16)$$

Vom vedea acum care este raportul în care împarte centrul de greutate o mediană. Fie, de exemplu,

$$k = \frac{(GA)}{(GA')}.$$

După cum am văzut, vectorul de poziție al lui G se exprimă, cu ajutorul lui k , sub forma

$$\mathbf{r} = \frac{1}{1 - k}\mathbf{r}_1 - \frac{k}{1 - k}\mathbf{r}_{11}.$$

Pe de altă parte, tocmai am demonstrat că

$$\mathbf{r} = \frac{1}{3}\mathbf{r}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{r}_{11}.$$

Comparând cele două relații, obținem $k = -2$, deci

$$\frac{(GA)}{(GA')} = -2. \quad (1.12.17)$$

Formule analoage au loc și pentru celelalte două mediane. Astfel, *segmentul de mediană cuprins între centrul de greutate și un vârf al triunghiului este de două ori mai lung decât segmentul cuprins între centrul de greutate și mijlocul laturii opuse*.

A doua soluție

Cu aceleași notații pentru puncte ca și în prima soluție, alegem, de data asta, ca origine punctul G de intersecție dintre medianele AA' și BB' . Notăm cu \mathbf{a} , \mathbf{b} , respectiv \mathbf{c} vectorii de poziție ai vârfurilor A , B , respectiv C ale triunghiului relativ la această origine.

Atunci, în mod evident, vectorii de poziție ai mijloacelor laturilor față de G vor fi

$$\begin{aligned} \mathbf{a}' &= \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}), \\ \mathbf{b}' &= \frac{1}{2}(\mathbf{c} + \mathbf{a}), \\ \mathbf{c}' &= \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}). \end{aligned}$$

Cum punctul A' se află pe dreapta GA , vectorii \mathbf{a}' și \mathbf{a} sunt coliniari și, analog rezultă că vectorii \mathbf{b}' și \mathbf{b} sunt coliniari. Aadar, există două numere reale α și β astfel încât să avem

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \alpha \mathbf{a}, \\ \frac{1}{2}(\mathbf{c} + \mathbf{a}) = \beta \mathbf{b}. \end{cases} \quad (1.12.18)$$

Eliminând vectorul \mathbf{c} între cele două ecuații, obținem că

$$(2\alpha + 1)\mathbf{a} - (2\beta + 1)\mathbf{b}.$$

Cum vectorii \mathbf{a} și \mathbf{b} sunt necoliniari, coeficienții lor din relația de mai sus trebuie să fie ambii egali cu zero, deci obținem

$$\alpha = \beta = -\frac{1}{2}.$$

Dacă înlocuim aceste valori în ecuațiile (1.12.18) și le adunăm, obținem

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0,$$

de unde

$$\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = -\frac{1}{2}\mathbf{c}. \quad (1.12.19)$$

Ecuția (1.12.19) ne spune, în fapt, că vectorii $\overrightarrow{GC'}$ și \overrightarrow{GC} sunt coliniari, adică punctul G aparține dreptei CC' , ceea ce trebuia să demonstrăm.

1.12.6 Concurența bisectoarelor interioare ale unui triunghi

Considerăm un triunghi ABC și alegem o origine O , situată în afara planului triunghiului. Notăm cu A' , B' și C' picioarele bisectoarelor interioare ale unghiurilor A , B , respectiv C ale triunghiului.

Ca și în cazul precedent, notăm cu \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 și \mathbf{r}_3 vectorii de poziție relativ la O ai vârfurilor A , B , respectiv C . Mai notăm cu \mathbf{r}_{11} , \mathbf{r}_{21} , \mathbf{r}_{31} vectorii de poziție relativ la O ai punctelor A' , B' , respectiv C' . În sfârșit, notăm cu a , b , c lungimile laturilor BC , CA , respectiv AB ale triunghiului.

Vectorul de poziție al unui punct oarecare al bisectoarei AA' este o combinație afină a vectorilor de poziției ai punctelor A și A' , adică există un λ real astfel încât să avem

$$\mathbf{r} = (1 - \lambda)\mathbf{r}_1 + \lambda\mathbf{r}_{11}. \quad (1.12.20)$$

Conform teoremei bisectoarei, aplicată unghiului A , punctul A' împarte latura BC în raportul

$$k_1 = \frac{(A'B)}{(A'C)} = -\frac{c}{b}.$$

Atunci vectorul de poziție al punctului A' va fi

$$\mathbf{r}_{11} = \frac{\mathbf{r}_2 - k_1\mathbf{r}_3}{1 - k_1} = \frac{\mathbf{r}_2 + \frac{c}{b}\mathbf{r}_3}{1 + \frac{c}{b}}$$

sau

$$\mathbf{r}_{11} = \frac{b\mathbf{r}_2 + c\mathbf{r}_3}{b + c}. \quad (1.12.21)$$

Astfel, ecuația vectorială a dreptei AA' se scrie

$$AA' : \mathbf{r} = (1 - \lambda)\mathbf{r}_1 + \lambda \frac{b\mathbf{r}_2 + c\mathbf{r}_3}{b + c}. \quad (1.12.22)$$

În același mod se obțin ecuațiile celorlalte două bisectoare:

$$BB' : \mathbf{r} = (1 - \mu)\mathbf{r}_2 + \mu \frac{c\mathbf{r}_3 + a\mathbf{r}_1}{c + a} \quad (1.12.23)$$

și

$$CC' : \mathbf{r} = (1 - \nu)\mathbf{r}_3 + \nu \frac{a\mathbf{r}_1 + b\mathbf{r}_2}{a + b}. \quad (1.12.24)$$

Fie acum I punctul de intersecție a dreptelor AA' și BB' . Cum I se află pe ambele drepte, vectorul său de poziție ca punct al primei drepte trebuie să coincidă cu vectorul de poziție ca punct al celei de-a doua drepte. Astfel, din ecuațiile (1.12.22) și (1.12.23) obținem egalitatea

$$(1 - \lambda)\mathbf{r}_1 + \lambda \frac{b\mathbf{r}_2 + c\mathbf{r}_3}{b + c} = (1 - \mu)\mathbf{r}_2 + \mu \frac{c\mathbf{r}_3 + a\mathbf{r}_1}{c + a}$$

sau

$$\left(1 - \lambda - \frac{\mu a}{c + a}\right)\mathbf{r}_1 + \left(-1 + \mu + \frac{\lambda b}{b + c}\right)\mathbf{r}_2 + \left(\frac{\lambda c}{b + c} - \frac{\mu c}{c + a}\right)\mathbf{r}_3 = 0. \quad (1.12.25)$$

Cum vârfurile triunghiului nu sunt coliniare, iar originea O este situată în afara planului triunghiului, rezultă că vectorii \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 și \mathbf{r}_3 sunt liniar independenți, ceea ce înseamnă că, în ecuația (1.12.25), coeficienții lor trebuie să se anuleze, adică obținem sistemul de ecuații liniare (în λ și μ)

$$1 - \lambda - \frac{\mu a}{c + a} = 0, \quad -1 + \mu + \frac{\lambda b}{b + c} = 0, \quad \frac{\lambda c}{b + c} - \frac{\mu c}{c + a} = 0. \quad (1.12.26)$$

Acesta este un sistem de trei ecuații cu două necunoscute. Se verifică ușor că sistemul este compatibil, iar soluția sa este

$$\lambda = \frac{b + c}{a + b + c}, \quad \mu = \frac{c + a}{a + b + c}. \quad (1.12.27)$$

Fie, acum, I' punctul de intersecție al bisectoarelor AA' și CC' . Prin exact aceeași tehnică se găsește că punctul I' corespunde pentru valorile parametrilor

$$\lambda = \frac{b + c}{a + b + c}, \quad \nu = \frac{a + b}{a + b + c}. \quad (1.12.28)$$

Cum punctele I și I' corespund aceleiași valori a parametrului λ pe dreapta AA' , rezultă că cele două puncte coincid, prin urmare bisectoarele interioare ale triunghiului ABC se intersectează. Dacă înlocuim valoarea găsită a lui λ în ecuația dreptei

AA' , găsim vectorul de poziție al punctului I (centrul cercului înscris în triunghiul ABC):

$$\mathbf{r} = \frac{1}{a+b+c} (a\mathbf{r}_1 + b\mathbf{r}_2 + c\mathbf{r}_3). \quad (1.12.29)$$

1.12.7 Centrele cercurilor exînscrise unui triunghi ABC

Vom demonstra, în acest paragraf, că bisectoarele *exterioare* a două dintre unghiurile unui triunghi și bisectoarea interioară a celui de-al treilea unghi se intersectează într-un punct. Există trei astfel de puncte, care se numesc *centre ale cercurilor exînscrise* triunghiului dat.

Păstrăm notațiile din paragraful precedent și mai introducem altele noi. Astfel, notăm cu A'', B'', C'' picioarele bisectoarelor exterioare ale unghiurilor A, B , respectiv C ale triunghiului ABC . Notăm cu $\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{22}, \mathbf{r}_{32}$ vectorii de poziție ai acestor puncte.

Conform teoremei bisectoarei, punctul A'' împarte segmentul BC în raportul

$$k_1 = \frac{(A''B)}{(A''C)} = \frac{c}{b}$$

(raportul este, de data aceasta, pozitiv, pentru că punctul A'' este în exteriorul segmentului BC).

Atunci vectorul său de poziție este

$$\mathbf{r}_{12} = \frac{\mathbf{r}_2 - k_1\mathbf{r}_3}{1 - k_1} = \frac{\mathbf{r}_2 - \frac{c}{b}\mathbf{r}_3}{1 - \frac{c}{b}}$$

sau

$$\mathbf{r}_{12} = \frac{b\mathbf{r}_2 - c\mathbf{r}_3}{b - c}. \quad (1.12.30)$$

Astfel, ecuația vectorială a dreptei AA'' se scrie

$$AA'' : \mathbf{r} = (1 - \alpha)\mathbf{r}_1 + \alpha \frac{b\mathbf{r}_2 - c\mathbf{r}_3}{b - c}. \quad (1.12.31)$$

În același mod se obțin ecuațiile celorlalte două bisectoare:

$$BB'' : \mathbf{r} = (1 - \beta)\mathbf{r}_2 + \beta \frac{c\mathbf{r}_3 - a\mathbf{r}_1}{c - a} \quad (1.12.32)$$

și

$$CC'' : \mathbf{r} = (1 - \gamma)\mathbf{r}_3 + \gamma \frac{a\mathbf{r}_1 - b\mathbf{r}_2}{a - b}. \quad (1.12.33)$$

Fie I_a punctul de intersecție dintre bisectoarele exterioare ale unghiurilor B și C . Atunci, în conformitate cu ecuațiile (1.12.32) și (1.12.33), trebuie să avem

$$(1 - \beta)\mathbf{r}_2 + \beta \frac{c\mathbf{r}_3 - a\mathbf{r}_1}{c - a} = (1 - \gamma)\mathbf{r}_3 + \gamma \frac{a\mathbf{r}_1 - b\mathbf{r}_2}{a - b}$$

sau

$$\left(\frac{\beta a}{c - a} + \frac{\gamma a}{a - b} \right) \mathbf{r}_1 + \left(-1 + \beta - \frac{\gamma b}{a - b} \right) \mathbf{r}_2 + \left(1 - \gamma - \frac{\beta c}{c - a} \right) \mathbf{r}_3 = 0. \quad (1.12.34)$$

Din nou, pentru că vectorii sunt linear independenți, coeficienții combinației liniare din stânga egalității de mai sus trebuie să se anuleze și, astfel, obținem sistemul de ecuații

$$\frac{\beta a}{c - a} + \frac{\gamma a}{a - b} = 0, \quad 1 + \beta - \frac{\gamma b}{a - b} = 0, \quad 1 - \gamma - \frac{\beta c}{c - a} = 0. \quad (1.12.35)$$

Se constată ușor că sistemul linear (1.12.35) este compatibil determinat și soluția sa este

$$\beta = \frac{c - a}{-a + b + c}, \quad \frac{b - a}{-a + b + c}. \quad (1.12.36)$$

Fie, acum, I'_a punctul de intersecție dintre bisectoarea interioară AA' și bisectoarea exterioară BB'' . Atunci, procedând ca mai sus, din ecuațiile (1.12.22) și (1.12.32) obținem condiția

$$(1 - \lambda)\mathbf{r}_1 + \lambda \frac{b\mathbf{r}_2 + c\mathbf{r}_3}{b + c} = (1 - \beta)\mathbf{r}_2 + \beta \frac{c\mathbf{r}_3 - a\mathbf{r}_1}{c - a}$$

sau

$$\left(1 - \lambda + \frac{\beta a}{c - a} \right) \mathbf{r}_1 + \left(-1 + \beta + \frac{\lambda b}{b + c} \right) \mathbf{r}_2 + \left(\frac{\lambda c}{b + c} - \frac{\beta c}{c - a} \right) \mathbf{r}_3 = 0. \quad (1.12.37)$$

Încă o dată, din linear independența vectorilor $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ și \mathbf{r}_3 , din (1.12.37) deducem sistemul de ecuații

$$1 - \lambda + \frac{\beta a}{c - a} = 0, \quad -1 + \beta + \frac{\lambda b}{b + c} = 0, \quad \frac{\lambda c}{b + c} - \frac{\beta c}{c - a} = 0, \quad (1.12.38)$$

sistem compatibil și determinat, cu soluția

$$\lambda = \frac{b+c}{-a+b+c}, \quad \beta = \frac{c-a}{-a+b+c}. \quad (1.12.39)$$

Cum I_a și I'_a corespund aceleași valori a parametrului de-a lungul dreptei BB'' , rezultă că cele două puncte coincid, adică bisectoarele exterioare ale unghiurilor B și C și bisectoarea interioară a unghiului A se intersectează. Vectorul de poziție al punctului de intersecție I_a se obține, de exemplu, înlocuind valoarea găsită a lui λ în ecuația vectorială a dreptei AA' .

Se obține

$$(I_a) \quad \mathbf{r} = \frac{1}{-a+b+c}(-a\mathbf{r}_1 + b\mathbf{r}_2 + c\mathbf{r}_3). \quad (1.12.40)$$

Exact la fel se obține că bisectoarea interioară BB' și bisectoarele exterioare AA'' și CC'' se intersectează în punctul I_b dat de

$$(I_b) \quad \mathbf{r} = \frac{1}{a-b+c}(a\mathbf{r}_1 - b\mathbf{r}_2 + c\mathbf{r}_3), \quad (1.12.41)$$

în timp ce bisectoarea interioară CC' și bisectoarele exterioare AA'' și BB'' se intersectează în punctul I_c dat de

$$(I_c) \quad \mathbf{r} = \frac{1}{a+b-c}(a\mathbf{r}_1 + b\mathbf{r}_2 - c\mathbf{r}_3). \quad (1.12.42)$$

1.12.8 Teorema lui Ceva

Rezultatul pe care îl vom obține în acest paragraf este o generalizare a rezultatelor demonstrate până acum în această secțiune. În loc să folosim mediane sau bisectoare, luăm niște drepte oarecare care trec prin vârfurile triunghiului. Astfel de drepte se numesc *ceviene*. Întrebarea pe care ne-o punem (și la care vom răspunde!) este: în ce rapoarte trebuie să împartă picioarele a trei ceviane date (câte una pentru fiecare vârf) laturile opuse în așa fel încât ele să fie concurente?

Considerăm, astfel, triunghiul ABC , dat prin vectorii de poziție $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$ și \mathbf{r}_C ai vârfurilor, relativ la un punct O situat în afara planului triunghiului. Considerăm trei ceviane ale triunghiului, fie ele AM, BN, CP , unde punctele M, N, P sunt situate pe laturile opuse vârfurilor A, B, C ale triunghiului sau pe prelungirile lor. Presupunem că aceste trei puncte împart laturile BC, CA, AB ale triunghiului în rapoartele λ, μ , respectiv ν :

$$\frac{(MB)}{(MC)} = \lambda, \quad \frac{(NC)}{(NA)} = \mu, \quad \frac{(PA)}{(PB)} = \nu. \quad (1.12.43)$$

Menționăm, încă o dată că, deși cantitățile (MB) , ... sunt *lungimi cu semn*, deci depind de alegerea câte unei orientări pe dreptele respective, rapoartele considerate de noi nu depind de alegerea orientărilor, așa că nu este necesar să le precizăm.

După cum știm de la împărțirea unui segment într-un raport dat (vezi (1.9.6)), vectorii de poziție ai picioarelor cevienelor vor fi dați de

$$\mathbf{r}_M = \frac{\mathbf{r}_B - \lambda \mathbf{r}_C}{1 - \lambda}, \quad \mathbf{r}_N = \frac{\mathbf{r}_C - \mu \mathbf{r}_A}{1 - \mu}, \quad \mathbf{r}_P = \frac{\mathbf{r}_A - \nu \mathbf{r}_B}{1 - \nu}. \quad (1.12.44)$$

Putem scrie, prin urmare, ecuațiile vectoriale ale celor trei ceviane sub forma

$$AM : \mathbf{r} = (1 - k)\mathbf{r}_A + \frac{k}{1 - \lambda} (\mathbf{r}_B - \lambda \mathbf{r}_C), \quad (1.12.45)$$

$$BN : \mathbf{r} = (1 - \ell)\mathbf{r}_B + \frac{\ell}{1 - \mu} (\mathbf{r}_C - \mu \mathbf{r}_A), \quad (1.12.46)$$

$$CP : \mathbf{r} = (1 - m)\mathbf{r}_C + \frac{m}{1 - \nu} (\mathbf{r}_A - \nu \mathbf{r}_B). \quad (1.12.47)$$

Să presupunem că cele trei ceviane se intersectează în același punct, fie el Q și să stabilim care este relația dintre cele trei rapoarte, λ, μ și ν . Pentru ca ele să se intersecteze, este necesar ca punctul de intersecție a dreptelor AM și BN să coincidă cu punctul de intersecție a dreptelor AM și CP . Vom începe, deci, prin a determina valorile parametrilor k, ℓ și m pentru cele două puncte de intersecție.

Relația care determină vectorul de poziție al punctului de intersecție a dreptelor AM și BN este

$$(1 - k)\mathbf{r}_A + \frac{k}{1 - \lambda} (\mathbf{r}_B - \lambda \mathbf{r}_C) = (1 - \ell)\mathbf{r}_B + \frac{\ell}{1 - \mu} (\mathbf{r}_C - \mu \mathbf{r}_A)$$

sau

$$\left(1 - k + \frac{\ell\mu}{1 - \mu}\right)\mathbf{r}_A + \left(-1 + \ell + \frac{k}{1 - \lambda}\right)\mathbf{r}_B + \left(-\frac{k\lambda}{1 - \lambda} - \frac{\ell}{1 - \mu}\right)\mathbf{r}_C = 0. \quad (1.12.48)$$

Din ecuația (1.12.48) rezultă că toți coeficienții vectorilor trebuie să fie egali cu zero, deoarece vectorii sunt liniar independenți (întrucât punctele A, B, C sunt necoliniare, iar originea relativ la care se consideră vectorii de poziție este în afara planului triunghiului). Obținem, pe această cale, sistemul de ecuații

$$1 - k + \frac{\ell\mu}{1 - \mu} = 0, \quad -1 + \ell + \frac{k}{1 - \lambda} = 0, \quad -\frac{k\lambda}{1 - \lambda} - \frac{\ell}{1 - \mu}, \quad (1.12.49)$$

care este un sistem liniar în raport cu necunoscutele k și ℓ .

Sistemul este compatibil și determinat și are soluția

$$k = \frac{1 - \lambda}{\lambda\mu - \lambda + 1}, \quad \ell = \frac{\lambda(\mu - 1)}{\lambda\mu - \lambda + 1}. \quad (1.12.50)$$

Pe de altă parte, condiția care determină vectorul de poziție al punctului de intersecție a dreptelor AM și CP este

$$(1 - k)\mathbf{r}_A + \frac{k}{1 - \lambda}(\mathbf{r}_B - \lambda\mathbf{r}_C) = (1 - m)\mathbf{r}_C + \frac{m}{1 - \nu}(\mathbf{r}_A - \nu\mathbf{r}_B)$$

sau

$$\left(1 - k - \frac{m}{1 - \nu}\right)\mathbf{r}_A + \left(\frac{k}{1 - \lambda} + \frac{m\nu}{1 - \nu}\right)\mathbf{r}_B + \left(-1 + m - \frac{k\lambda}{1 - \lambda}\right)\mathbf{r}_C = 0, \quad (1.12.51)$$

de unde obținem, ca mai sus, sistemul liniar (în raport cu k și m)

$$1 - k - \frac{m}{1 - \nu} = 0, \quad \frac{k}{1 - \lambda} + \frac{m\nu}{1 - \nu} = 0, \quad -1 + m - \frac{k\lambda}{1 - \lambda} = 0, \quad (1.12.52)$$

sistem compatibil și determinat, cu soluția

$$k = \frac{\nu(\lambda - 1)}{\lambda\nu - \nu + 1}, \quad m = \frac{1 - \nu}{\lambda\nu - \nu + 1}. \quad (1.12.53)$$

Pentru ca cele două puncte de intersecție să coincidă, este necesar ca ele să aibă același vector de poziție, deci, în particular, valorile lui k obținute în (1.12.50) și în (1.12.53) trebuie să coincidă. Obținem, prin urmare, relația

$$\frac{1 - \lambda}{\lambda\mu - \lambda + 1} = \frac{\nu(\lambda - 1)}{\lambda\nu - \nu + 1}. \quad (1.12.54)$$

Am văzut atunci când am discutat împărțirea unui segment într-un raport dat că acest raport nu poate fi egal cu 1, ceea ce înseamnă, în particular, în cazul nostru concret, că $\lambda \neq 1$, deci relația de mai sus se poate împărți, membru cu membru, cu $1 - \lambda$ și obținem

$$\frac{1}{\lambda\mu - \lambda + 1} = \frac{-\nu}{\lambda\nu - \nu + 1}. \quad (1.12.55)$$

Se observă, imediat că relația (1.12.55) este echivalentă cu relația

$$\lambda\mu\nu = -1. \quad (1.12.56)$$

Invers, dacă relația (1.12.56) este satisfăcută, rezultă imediat că valoarea lui k corespunzătoare punctului de pe AM se intersectează cu BN coincide cu valoarea lui k corespunzătoare punctului de pe AM în care această dreaptă se intersectează cu dreapta CP , deci cele trei drepte sunt concurente. Am obținut, astfel,

Teorema 1.12 (Ceva). *Fie ABC un triunghi și M, N, P – trei puncte situate, respectiv pe laturile BC, CA, AB ale triunghiului sau pe prelungirile lor. Fie*

$$\frac{(MB)}{(MC)} = \lambda, \quad \frac{(NC)}{(NA)} = \mu, \quad \frac{(PA)}{(PB)} = \nu \quad (1.12.57)$$

rapoartele în care aceste puncte împart laturile. Atunci cevienele AM, BN și CP sunt concurente dacă și numai dacă

$$\lambda\mu\nu = -1 \quad (1.12.58)$$

sau, ceea ce este același lucru,

$$\frac{(MB)}{(MC)} \cdot \frac{(NC)}{(NA)} \cdot \frac{(PA)}{(PB)} = -1. \quad (1.12.59)$$

Observație. Teorema lui Ceva ne spune, în particular, că dacă AM, BN și CP sunt trei ceviane concurente, picioarele lor, adică punctele M, N și P nu pot fi, toate, pe prelungirile laturilor, pentru că atunci toate rapoartele în care ele împart laturile ar fi pozitive. Singurele cazuri posibile sunt cele în care două ceviane au picioarele pe prelungirile laturilor, iar cea de-a treia are piciorul în interiorul laturii și cele în care toate picioarele sunt puncte interioare laturilor.

1.13 Produsul scalar al vectorilor

1.13.1 Definiție și proprietăți fundamentale

Definiția 1.18. Fie \mathbf{a} și \mathbf{b} doi vectori. Se numește *produs scalar* al celor doi vectori numărul real, notat $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, egal cu produsul dintre normele celor doi vectori și al cosinusului unghiului dintre ei, adică:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cos \varphi, \quad (1.13.1)$$

unde φ este unghiul dintre cei doi vectori.

Alegem un punct oarecare O în spațiu și construim un segment orientat \overrightarrow{OA} astfel încât

$$\overrightarrow{OA} = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}.$$

Notăm cu Δ axa definită de segmentul orientat \overrightarrow{OA} . Atunci

$$\|\mathbf{b}\| \cos \varphi = \text{pr}_{\Delta} \mathbf{b},$$

unde proiecția este ortogonală. Prin urmare, formula (1.13.1) se poate rescrie sub forma

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \text{pr}_{\Delta} \mathbf{b}. \quad (1.13.2)$$

Denumirea de “produs scalar” este legată atât de faptul că rezultatul produsului scalar este un număr, cât și de faptul că acest tip de produs are anumite proprietăți comune cu produsul numerelor reale, deși, după cum vom vedea mai jos, există diferențe esențiale între cele două tipuri de produse.

Vom enumera, în cele ce urmează, principalele proprietăți ale produsului scalar și le vom demonstra pe cele care nu sunt chiar evidente.

1) comutativitatea:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}. \quad (1.13.3)$$

Această proprietate rezultă direct din definiția produsului scalar;

2) compatibilitatea cu înmulțirea vectorilor cu scalari:

$$(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \quad (1.13.4)$$

$$\mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \quad (1.13.5)$$

Este clar că, datorită comutativității produsului scalar, dacă una dintre cele două relații are loc, atunci are loc și cealaltă, așa că este suficient să demonstrăm una dintre ele, de exemplu (1.13.5). Utilizând formula (1.13.2) și proprietățile proiecției, obținem succesiv:

$$\mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b}) = \|\mathbf{a}\| \text{pr}_{\Delta} (\lambda \mathbf{b}) = \lambda \|\mathbf{a}\| \text{pr}_{\Delta} \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

3) distributivitatea față de adunarea vectorilor:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}, \quad (1.13.6)$$

$$(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}. \quad (1.13.7)$$

Din nou, datorită comutativității, este suficient să demonstrăm prima afirmație. Vom utiliza, și de data aceasta, reprezentarea (1.13.2) a produsului scalar, precum și proprietățile proiecției. Avem, așadar,

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \|\mathbf{a}\| \operatorname{pr}_{\Delta}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \|\mathbf{a}\| \operatorname{pr}_{\Delta} \mathbf{b} + \|\mathbf{a}\| \operatorname{pr}_{\Delta} \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}.$$

Pe baza acestor trei proprietăți, putem trage concluzia că înmulțirea combinațiilor liniare de vectori se poate face termen cu termen, ca în exemplul următor:

$$(2\mathbf{a} + 3\mathbf{b})(4\mathbf{c} - 5\mathbf{d}) = 8\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} - 10\mathbf{a} \cdot \mathbf{d} + 12\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} - 15\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}.$$

Putem demonstra, cu ușurință, această proprietate a produsului scalar și pornind direct de la definiție. Astfel, să alegem un punct O și fie A astfel încât să avem $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, B astfel încât $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ și C astfel încât să avem $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$. Atunci, evident, conform

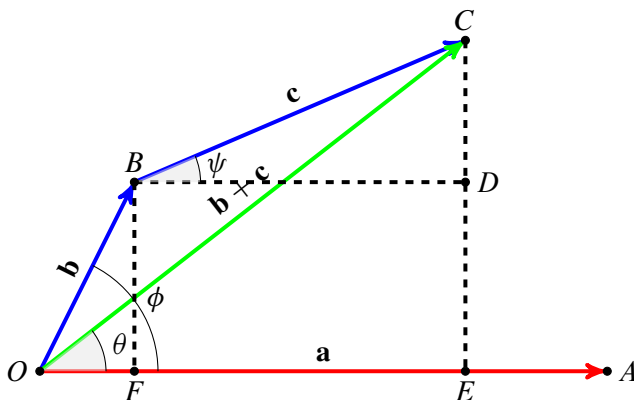


Figura 1.14: Distributivitatea produsului scalar

reguli triunghiului, $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$. Fie θ unghiul dintre \mathbf{a} și $\mathbf{b} + \mathbf{c}$, ϕ – unghiul dintre \mathbf{a} și \mathbf{b} și ψ – unghiul dintre \mathbf{a} și \mathbf{c} . Mai notăm cu E și F proiecțiile lui C , respectiv B pe dreapta OA și cu D – proiecția lui B pe dreapta CE . Atunci, în mod evident, θ este măsura unghiului \widehat{AOC} , ϕ este măsura unghiului \widehat{AOB} , iar ψ – măsura unghiului \widehat{DOC} .

Avem

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \mathbf{a} \cdot \overrightarrow{OC} = \|\mathbf{a}\| \|\overrightarrow{OC}\| \cos \theta = \|\mathbf{a}\| \cdot (OE) = \\
 &= \|\mathbf{a}\| \cdot [(OF) + (FE)] = \|\mathbf{a}\| \cdot (OF) + \|\mathbf{a}\| \cdot (BD) = \\
 &= \|\mathbf{a}\| \cdot \|\overrightarrow{OB}\| \cos \phi + \|\mathbf{a}\| \cdot \|\overrightarrow{BC}\| \cos \psi = \\
 &= \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cos \phi + \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{c}\| \cos \psi = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c},
 \end{aligned}$$

adică ceea ce trebuia să demonstrăm.

Ultimele două proprietăți au un caracter oarecum mai “geometric”.

4) Doi vectori \mathbf{a} și \mathbf{b} sunt perpendiculari dacă și numai dacă produsul lor scalar este egal cu zero:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0. \quad (1.13.8)$$

Într-adevăr, începem prin a scrie relația (1.13.8) sub forma

$$\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \varphi = 0. \quad (1.13.9)$$

Dacă vectorii sunt perpendiculari, atunci $\varphi = \pi/2$, deci $\cos \varphi = 0$, de unde $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Invers, să presupunem acum că vectorii verifică relația (1.13.9). Dacă unul dintre vectori este egal zero, atunci el poate fi considerat pe orice alt vector, deci condiția este îndeplinită. Dacă ambii vectori sunt nenuli, atunci și normele lor sunt nenule, deci relația (1.13.9) poate fi îndeplinită doar dacă $\cos \varphi = 0$, adică dacă cei doi vectori sunt perpendiculari.

Remarcăm că proprietatea 4) marchează o diferență esențială dintre produsul scalar al vectorilor și produsul numerelor reale. Astfel, produsul a două numere reale poate fi egal cu zero dacă și numai dacă cel puțin unul dintre numere este egal cu zero. Produsul scalar a doi vectori, în schimb, poate fi egal cu zero și dacă ambii vectori sunt diferiți de zero.

5) Produsul scalar a unui vector cu el însuși este egal cu pătratul normei acestui vector:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2. \quad (1.13.10)$$

Afirmația rezultă imediat din definiția produsului scalar a doi vectori (în acest caz, firește, $\varphi = 0$).

Observație. Trebuie să remarcăm, pentru evitarea confuziilor, că nu are sens să vorbim de produse scalare de mai mult de doi factori. Produsul scalar a doi vectori este un scalar, prin urmare acest produs nu mai poate fi înmulțit scalar, la rândul său, cu un al treilea vector. Acesta este motivul pentru care nu are sens să ne punem măcar problema asociativității produsului scalar al vectorilor liberi.

1.13.2 Expriarea produsului scalar în coordonate

Alegem, în spațiu, un sistem de coordonate rectangular, cu originea într-un punct O . Fie $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ baza ortonormată care generează acest sistem de coordonate. Faptul că baza este ortonormată înseamnă, reamintim, că toți vectorii au lungime 1, iar vectorii sunt perpendiculari unii pe alții. Din proprietățile produsului scalar, descrise mai sus, se constată imediat că produsele scalare dintre vectorii bazei sunt date de următoarea tablă de multiplicare:

\cdot	\mathbf{i}	\mathbf{j}	\mathbf{k}
\mathbf{i}	1	0	0
\mathbf{j}	0	1	0
\mathbf{k}	0	0	1

(1.13.11)

Presupunem acum că se dau doi vectori \mathbf{a} și \mathbf{b} , care au următoarele expresii în raport cu baza de coordonate:

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}.$$

Utilizând tabla de înmulțire scalară (1.13.11) a vectorilor bazei, produsul scalar dintre \mathbf{a} și \mathbf{b} va fi

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \cdot (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) = a_1b_1\mathbf{i}^2 + a_1b_2\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + \\ &+ a_1b_3\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} + a_2b_1\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + a_2b_2\mathbf{j}^2 + a_2b_3\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} + a_3b_1\mathbf{k} \cdot \mathbf{i} + a_3b_3\mathbf{k}^2 = \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \end{aligned}$$

Așadar, produsul scalar a doi vectori, dați prin componentele lor relativ la un sistem de coordonate rectangular $Oxyz$, se exprimă prin formula

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \quad (1.13.12)$$

Cu această expresie, condiția de ortogonalitate a vectorilor \mathbf{a} și \mathbf{b} se va scrie, prin urmare,

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0. \quad (1.13.13)$$

De asemenea, combinând formulele (1.13.10) și (1.13.12), obținem pentru lungimea vectorului \mathbf{a} formula

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}. \quad (1.13.14)$$

Să presupunem acum că se dau două puncte din spațiu prin coordonatele lor carteziene ortogonale, $M(x, y, z)$ și $M'(x', y', z')$. După cum se știe, distanța $d(M, M')$

dintre cele două puncte este egală cu lungimea vectorului $\overrightarrow{MM'}(x' - x, y' - y, z' - z)$, adică este dată de formula

$$d(M, M') = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}.$$

În sfârșit, utilizând formulele (1.13.1), (1.13.12) și (1.13.14), putem stabili o formulă pentru calculul cosinusului unghiului format de vectorii $\mathbf{a}(X, Y, Z)$ și $\mathbf{b}(X', Y', Z')$, dați prin componentele lor relativ la o bază ortonormată:

$$\cos \varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

1.13.3 Probleme rezolvate

Problema 1.13.1. Determinați unghiul ω dintre vectorii $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ și $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{k}$.

Soluție După cum știm,

$$\cos \omega = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|} = \frac{2 \cdot 4 + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot (-3)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{4^2 + 0^2 + (-3)^2}} = \frac{2}{15}.$$

□

Problema 1.13.2. Deduceți teorema lui Pitagora generalizată folosind produsul scalar.

Soluție Considerăm triunghiul ABC . Introducem notațiile:

$$\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}, \mathbf{c} = \overrightarrow{AC}, \mathbf{a} = \overrightarrow{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b}, a = \|\mathbf{a}\|, b = \|\mathbf{b}\|, c = \|\mathbf{c}\|,$$

(vezi figura (1.15)). Atunci avem

$$a^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{b}) = \mathbf{c}^2 - 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b}^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

□

Problema 1.13.3. Un vector \mathbf{a} face unghiuri egale cu vectorii \mathbf{i} , \mathbf{j} și \mathbf{k} și are lungimea egală cu 3. Determinați valorile posibile ale unghiului pe care îl face \mathbf{a} cu versorii bazei.

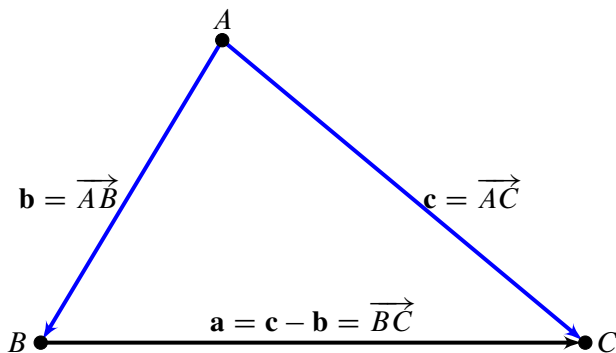


Figura 1.15: Teorema lui Pitagora generalizată

Soluție Fie $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ descompunerea lui \mathbf{a} față de baza canonică. Atunci, dacă θ este unghiul pe care îl face vectorul cu cei trei versori ai bazei, avem

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{i} = a_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{j} = a_2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = 3 \cos \theta.$$

Pe de altă parte, avem

$$3 = \|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{27 \cos^2 \theta} = \pm 3\sqrt{3} \cos \theta.$$

Astfel,

$$\cos \theta = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

□

Problema 1.13.4. Determinați componentele relativ la $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ale versorilor perpendiculari pe vectorii $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ și $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

Demonstrație Fie $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ un versor perpendicular pe vectorii \mathbf{a} și \mathbf{b} . \mathbf{u} fiind un versor, avem

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1. \quad (1.13.15)$$

\mathbf{u} fiind perpendicular pe \mathbf{a} , avem $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = 0$, adică

$$u_1 + 2u_2 - u_3 = 0. \quad (1.13.16)$$

În fine, deoarece \mathbf{u} este perpendicular pe \mathbf{b} , avem $\mathbf{b} \cdot \mathbf{u} = 0$, adică

$$3u_1 - u_2 + 2u_3 = 0. \quad (1.13.17)$$

Prin urmare, componentele unui versor care este perpendicular pe vectorii \mathbf{a} și \mathbf{b} trebuie să verifice sistemul format din ecuațiile (1.13.15) – (1.13.17).

Se obțin, așa cum ne așteptam din punct de vedere geometric, două soluții (doi versori opuși):

$$\mathbf{u}_1 = \left(\frac{3}{\sqrt{83}}, -\frac{5}{\sqrt{83}}, -\frac{7}{\sqrt{83}} \right)$$

și

$$\mathbf{u}_2 = \left(-\frac{3}{\sqrt{83}}, \frac{5}{\sqrt{83}}, \frac{7}{\sqrt{83}} \right).$$

□



Vom reveni asupra acestei probleme după ce vom studia produsul vectorial și vom vedea că se poate obține o soluție directă, care nu presupune rezolvarea unui sistem de ecuații.

Problema 1.13.5. Un versor \mathbf{a} face unghiuri de $\pi/4$ cu \mathbf{i} și de $\pi/3$ cu \mathbf{j} . Dacă unghiul θ dintre \mathbf{a} și \mathbf{k} este ascuțit, determinați componentele lui \mathbf{a} relativ la baza $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Determinați, de asemenea, valoarea unghiului θ .

Soluție Presupunem că, relativ la baza $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ vectorul dat se poate scrie ca

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3).$$

Cum atât \mathbf{a} , cât și \mathbf{i} și \mathbf{j} sunt versori, avem

$$a_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$a_2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{j} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Mai departe, din nou pentru că \mathbf{a} este un versor, avem

$$a_3^2 = 1 - a_1^2 - a_2^2 = \frac{1}{4},$$

prin urmare

$$a_3 = \pm \frac{1}{2}.$$

Pe de altă parte,

$$a_3 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = \cos \theta,$$

deci

$$\cos \theta = \pm \frac{1}{2}.$$

Dar, conform ipotezei, unghiul θ este ascuțit, ceea ce înseamnă că trebuie să avem $\cos \theta > 0$. Concluzia, este, așadar,

$$\cos \theta = \frac{1}{2},$$

deci $\theta = \pi/3$. □

Problema 1.13.6. Fie $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ trei vectori de lungimi egale cu 1,2, respectiv 3. Presupunem că \mathbf{q} este perpendicular pe \mathbf{r} , că unghiul dintre \mathbf{r} și \mathbf{p} este egal cu $\pi/3$, iar unghiul dintre \mathbf{p} și \mathbf{q} este, de asemenea, egal cu $\pi/3$.

- (i) Demonstrați că vectorii $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ formează o bază.
- (ii) Dacă \mathbf{a} este un versor coplanar cu \mathbf{q} și \mathbf{r} și care formează un unghi de $\pi/4$ cu fiecare dintre ei, demonstrați că

$$\mathbf{a} = \frac{\sqrt{2}}{12}(3\mathbf{q} + 2\mathbf{r}).$$

- (iii) Determinați componentele relativ la baza $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}\}$ ai versorilor perpendiculari atât pe \mathbf{q} , cât și pe \mathbf{r} .

Soluție (i) Pentru a demonstra că cei trei vectori formează o bază a spațiului vectorilor liberi este suficient să demonstrăm că ei sunt necoplanari. Pornim cu vectorii \mathbf{q} și \mathbf{r} care, în mod evident, nu sunt coliniari (sunt perpendiculari și nenuli), deci formează o bază a planului. Să presupunem că vectorul \mathbf{p} este coplanar cu ceilalți doi. Vectorul \mathbf{p} formează un unghi de $\pi/3$ cu vectorul \mathbf{r} . Cum \mathbf{q} este perpendicular pe \mathbf{r} , unghiul dintre \mathbf{p} și \mathbf{q} ar trebui să fie sau $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$ sau $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$, după cum vectorul \mathbf{p} este în interiorul sau în exteriorul unghiului drept format de vectorii \mathbf{q} și \mathbf{r} . Dar ambele valori sunt în contradicție cu ipoteza, care ne spune că unghiul trebuie să fie de $\pi/3$. În concluzie, cei trei vectori sunt necoplanari, deci formează o bază a spațiului vectorilor liberi.

(ii) Versorul \mathbf{a} fiind coplanar cu vectorii \mathbf{q} și \mathbf{r} , care formează o bază a planului lor, rezultă că există doi scalari α_2 și α_3 astfel încât să avem

$$\mathbf{a} = \alpha_2\mathbf{q} + \alpha_3\mathbf{r}. \quad (1.13.18)$$

Întrucât cunoaștem unghiurile pe care le face versorul \mathbf{a} cu vectorii \mathbf{q} și \mathbf{r} , putem calcula produsele scalare:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{q} = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{q}\| \cos \frac{\pi}{4} = 1 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \quad (1.13.19)$$

și

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{r}\| \cos \frac{\pi}{4} = 1 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}. \quad (1.13.20)$$

Pe de altă parte, putem calcula aceleași produse scalare plecând de la relația (1.13.18):

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{q} &= \alpha_2 \cdot \underbrace{\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}}_{=4} + \alpha_3 \cdot \underbrace{\mathbf{r} \cdot \mathbf{q}}_{=0} = 4\alpha_2, \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{r} &= \alpha_2 \cdot \underbrace{\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}_{=0} + \alpha_3 \cdot \underbrace{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}_{=9} = 9\alpha_3, \end{aligned}$$

unde am utilizat faptul că vectorii \mathbf{q} și \mathbf{r} sunt perpendiculari, $\|\mathbf{q}\| = 2$ și $\|\mathbf{r}\| = 3$.

Comparând rezultatele găsite cu cele din formulele (1.13.19) și (1.13.20), obținem că

$$\alpha_2 = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \text{și} \quad \alpha_3 = \frac{\sqrt{2}}{6},$$

de unde

$$\mathbf{a} = \frac{\sqrt{2}}{12}(3\mathbf{q} + 2\mathbf{r}),$$

adică ceea ce trebuia să demonstrăm.

(iii) Fie \mathbf{u} un versor perpendicular atât pe \mathbf{q} , cât și pe \mathbf{r} . Presupunem că el are, relativ la baza $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}\}$, descompunerea

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{p} + u_2\mathbf{q} + u_3\mathbf{r}. \quad (1.13.21)$$

Deoarece \mathbf{u} este un versor, el verifică relația $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1$ sau

$$u_1^2\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} + u_2^2\mathbf{q} \cdot \mathbf{q} + u_3^2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} + 2u_1u_2\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + 2u_1u_3\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} + 2u_2u_3\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} = 1.$$

Dar

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = 1, \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = 4, \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = 9, \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 1, \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = \frac{3}{2}, \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{r} = 0,$$

deci relația de mai sus devine

$$u_1^2 + 4u_2^2 + 9u_3^2 + 2u_1u_2 + 3u_1u_3 = 1. \quad (1.13.22)$$

Mai departe, deoarece \mathbf{u} este perpendicular pe \mathbf{q} , avem $\mathbf{u} \cdot \mathbf{q} = 0$, adică

$$u_1 \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + u_2 \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} + u_3 \mathbf{r} \cdot \mathbf{q} = 0$$

sau

$$u_1 + 4u_2 = 0. \quad (1.13.23)$$

În fine, deoarece \mathbf{u} este perpendicular pe \mathbf{r} , avem $\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} = 0$, adică

$$u_1 \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} + u_2 \mathbf{q} \cdot \mathbf{r} + u_3 \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = 0$$

sau

$$\frac{3}{2}u_1 + 9u_3 = 0$$

sau, încă,

$$u_1 + 6u_3 = 0. \quad (1.13.24)$$

Rezolvând sistemul format din ecuațiile (1.13.22) – (1.13.24), obținem versorii

$$\mathbf{u}_1 = \left(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{6} \right) \quad \text{și} \quad \mathbf{u}_2 = \left(-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{6} \right).$$

□



Baza formată din vectorii \mathbf{p}, \mathbf{q} și \mathbf{r} din problema de mai sus nu este ortonormată, de aceea matricea produsului scalar nu este diagonală. Drept consecință, la punctul (iii), versorii pe care i-am obținut nu au, în aparență, lungimea 1 (adică suma pătratelor componentelor lor nu este egală cu 1). Trebuie să ținem cont, însă, că aceste componente sunt relativ la o bază care nu este ortonormată și, în raport cu această bază, după cum am văzut, pătratul lungimii unui vector nu este egal cu suma pătratelor componentelor sale.

Problema 1.13.7. Demonstrați că înălțimile unui triunghi sunt concurente.

Soluție Fie H punctul de intersecție a înălțimilor AK și BL . Fie $\mathbf{a} = \overrightarrow{AH}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{BH}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{CH}$. AK și BL fiind înălțimi, avem

$$\mathbf{a} \perp \overrightarrow{BC} \quad \text{și} \quad \mathbf{b} \perp \overrightarrow{AC}. \quad (1.13.25)$$

Pe de altă parte,

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB} = \mathbf{b} - \mathbf{c} \quad \text{și} \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HA} = \mathbf{a} - \mathbf{c},$$

deci relațiile (1.13.25) ne conduc la

$$\begin{cases} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 0, \\ \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{c}) = 0 \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}, \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}, \end{cases}$$

de unde deducem că

$$\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 0,$$

ceea ce înseamnă că $\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB}$, adică CH este înălțimea perpendiculară pe latura AB , deci, în final, cele trei înălțimi ale triunghiului se intersectează în punctul H , ortocentrul triunghiului ABC . \square

Problema 1.13.8. Fie \mathbf{p} , \mathbf{q} și \mathbf{r} trei vectori de lungimi 2,2, respectiv 3. Presupunem că unghiul dintre \mathbf{q} și \mathbf{r} este egal cu $\pi/3$, iar unghiurile dintre \mathbf{r} și \mathbf{p} , respectiv \mathbf{p} și \mathbf{q} sunt ambele egale cu $2\pi/3$.

- (i) Calculați produsele scalare $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}$, $\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}$, $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$, $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$, $\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}$ și $\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}$.
- (ii) Determinați versorii care sunt coplanari cu vectorii $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ și \mathbf{r} și formează un unghi de $\pi/4$ cu $\mathbf{p} + \mathbf{q}$.

Demonstrație (i) Avem

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = \|\mathbf{p}\|^2 = 4, \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = \|\mathbf{q}\|^2 = 4, \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = 9,$$

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 2 \cdot 2 \cos \frac{2\pi}{3} = -2, \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = 2 \cdot 3 \cos \frac{2\pi}{3} = -3, \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{r} = 2 \cdot 3 \cos \frac{\pi}{3} = 3.$$

(ii) Fie \mathbf{u} un versor care îndeplinește condițiile cerute. Atunci trebuie să existe doi scalari reali α și β astfel încât să avem

$$\mathbf{u} = \alpha(\mathbf{p} + \mathbf{q}) + \beta\mathbf{r} = \alpha\mathbf{p} + \alpha\mathbf{q} + \beta\mathbf{r}. \quad (1.13.26)$$

Cum \mathbf{u} este un versor, trebuie să avem

$$\alpha^2 \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} + \alpha^2 \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} + \beta^2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} + 2\alpha^2 \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + 2\alpha\beta \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} + 2\alpha\beta \mathbf{q} \cdot \mathbf{r} = 1$$

sau

$$\alpha^2(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} + 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) + \beta^2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} + 2\alpha\beta(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) = 1.$$

Folosind expresiile produselor scalare calculate la punctul precedent, această formulă devine

$$4\alpha^2 + 9\beta^2 = 1. \quad (1.13.27)$$

Cea de-a doua ecuație pentru determinarea parametrilor α și β o obținem impunând condiția ca versorul \mathbf{u} să facă un unghi de $\pi/4$ cu vectorul $\mathbf{p} + \mathbf{q}$. Calculăm, mai întâi, produsul scalar dintre cei doi vectori, precum și norma vectorului $\mathbf{p} + \mathbf{q}$. Avem

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{p} + \mathbf{q}) &= (\alpha(\mathbf{p} + \mathbf{q}) + \beta\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{p} + \mathbf{q}) = \\ &= \alpha(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} + 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}) + \beta(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) = 4\alpha. \end{aligned}$$

Pe de altă parte,

$$\|\mathbf{p} + \mathbf{q}\| = \sqrt{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} + 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}} = \sqrt{4} = 2.$$

Astfel, trebuie să avem

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{p} + \mathbf{q})}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|} = \frac{4\alpha}{2} = 2\alpha,$$

de unde deducem că

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}. \quad (1.13.28)$$

Dacă înlocuim această valoare în ecuația (1.13.27) găsim pentru β valorile

$$\beta = \pm \frac{\sqrt{2}}{6}. \quad (1.13.29)$$

Înlocuind valorile găsite pentru α și β în (1.13.26), obținem cei doi versori care alcătuiesc soluția problemei noastre:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) + \frac{\sqrt{2}}{6}\mathbf{r} \quad \text{și} \quad \mathbf{u}_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) - \frac{\sqrt{2}}{6}\mathbf{r}.$$

□

1.14 Produsul vectorial al vectorilor

1.14.1 Definiție și proprietăți fundamentale

Definiția 1.19. Produsul vectorial dintre vectorul \mathbf{a} și vectorul \mathbf{b} este, prin definiție, vectorul, notat prin $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, determinat prin următoarele condiții:

- 1) dacă vectorii \mathbf{a} și \mathbf{b} sunt coliniari, atunci, prin definiție, produsul lor vectorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ este egal cu zero.
- 2) dacă cei doi vectori nu sunt coliniari, adică fac între ei un unghi φ , cu $0 < \varphi < \pi$, atunci produsul lor vectorial se definește prin următoarele trei condiții:
 - (i) lungimea vectorului $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ este egală cu $\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \sin \varphi$;
 - (ii) vectorul $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ este perpendicular pe ambii vectori \mathbf{a} și \mathbf{b} ;
 - (iii) tripletul de vectori $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ este direct.

Vom enumera, mai întâi, proprietățile fundamentale ale produsului vectorial a doi vectori.

1) Prima proprietate exprimă un fapt de natură geometrică: dacă vectorii \mathbf{a} și \mathbf{b} nu sunt coliniari, atunci norma vectorului $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ este egală cu aria paralelogramului construit pe segmentele OA și OB , unde O este un punct arbitrar din spațiu, iar $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ și $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$. De asemenea, este clar că aria triunghiului OAB este egală cu jumătate din norma produsului vectorial a vectorilor \overrightarrow{OA} și \overrightarrow{OB} .

Această proprietate rezultă imediat din chiar definiția produsului vectorial.

2) Produsul vectorial este *anticomutativ*:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}. \quad (1.14.1)$$

Demonstrația rezultă, din nou, direct din definiție.

3) Produsul vectorial este compatibil cu înmulțirea cu scalari a vectorilor:

$$(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \quad (1.14.2)$$

$$\mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}). \quad (1.14.3)$$

Datorită anticomutativității produsului vectorial, este suficient să demonstrăm una dintre cele două proprietăți. Vom demonstra, prin urmare, relația (1.14.2). Dacă $\lambda = 0$, sau dacă cei doi vectori sunt coliniari, atunci ambii membri ai relației sunt egali cu zero, prin urmare proprietatea are loc. Dacă presupunem acum că nu suntem în nici una dintre aceste două situații. Lungimea vectorului $\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ este egală cu $|\lambda| \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \varphi$, unde φ este unghiul dintre cei doi vectori. Să evaluăm acum lungimea vectorului din membrul drept. Dacă $\lambda > 0$, atunci vectorii \mathbf{a} și $\lambda \mathbf{a}$ au același sens, prin urmare unghiul dintre $\lambda \mathbf{a}$ și \mathbf{b} este tot φ . Așadar,

$$\|(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b}\| = \|\lambda \mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \varphi = |\lambda| \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \varphi.$$

Dacă $\lambda < 0$, atunci vectorii $\lambda \mathbf{a}$ și \mathbf{a} au sensuri opuse, prin urmare unghiul dintre vectorii $\lambda \mathbf{a}$ și \mathbf{b} este egal cu $\pi - \varphi$. Prin urmare, în acest caz, avem:

$$\|(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b}\| = \|\lambda \mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin(\pi - \varphi) = |\lambda| \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \varphi.$$

Astfel, vectorii din cei doi membri ai relației (1.14.2) au aceeași normă, atât pentru valori pozitive, cât și pentru valori negative ale scalarului λ . Este clar că acești doi vectori sunt coliniari, întrucât ambii sunt perpendiculari pe vectorii \mathbf{a} și \mathbf{b} . Mai trebuie să demonstrăm, prin urmare, că acești vectori au și același sens. Se observă, însă, imediat, că pentru $\lambda > 0$ acești doi vectori au, ambii, același sens cu vectorul $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, în timp ce pentru $\lambda < 0$ ei au, ambii, sens opus vectorului $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

4) Produsul vectorial este distributiv față de adunarea vectorilor:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \quad (1.14.4)$$

$$\mathbf{c} \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{c} \times \mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{b}. \quad (1.14.5)$$

Din nou, este suficient să demonstrăm prima egalitate, cea de-a doua rezultând, pe urmă, din anticomutativitate.

Egalitatea are loc, în mod evident, dacă unul dintre cei trei vectori este nul sau dacă suma $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ este nulă. Presupunem că nu suntem în nici una dintre aceste situații.

Vom demonstra mai întâi egalitatea

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c}_0 = \mathbf{a} \times \mathbf{c}_0 + \mathbf{b} \times \mathbf{c}_0, \quad (1.14.6)$$

unde $\mathbf{c}_0 = \mathbf{c}/\|\mathbf{c}\|$ este un vector unitar.

Vom arăta, mai întâi, cum anume se poate construi produsul vectorial al unui vector oarecare \mathbf{a} cu un vector unitar \mathbf{c}_0 . Atașăm vectorii \mathbf{a} și \mathbf{c}_0 unui punct O oarecare, deci construim punctele A și C astfel încât $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ și $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}_0$. Ducem acum prin punctul O un plan Π , perpendicular pe dreapta OC și proiectăm ortogonal pe el segmentul orientat \overrightarrow{OA} . Segmentul orientat $\overrightarrow{OA'}$, proiecția ortogonală pe Π a lui \overrightarrow{OA} , îl rotim, în planul Π , în jurul lui O , cu un unghi de $\pi/2$, în sensul mersului acelor de ceasornic, dacă privim din punctul C . Segmentul orientat $\overrightarrow{OA''}$, obținut în urma rotației, va fi un reprezentant al produsului vectorial al vectorilor \mathbf{a} și \mathbf{c}_0 . Într-adevăr, dacă notăm cu φ unghiul dintre vectorii \mathbf{a} și \mathbf{c}_0 , atunci putem scrie:

$$\|\overrightarrow{OA''}\| = \|\overrightarrow{OA'}\| = \|\overrightarrow{OA}\| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{c}_0\| \sin \varphi.$$

În plus, se constată cu ușurință că vectorii $\overrightarrow{OA''}$ și $\mathbf{a} \times \mathbf{c}_0$ au aceeași direcție și același sens.

Trecem acum la demonstrarea relației (1.14.6). Pentru aceasta, fixăm un punct O și construim punctele A, B, C astfel încât $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}_0$, $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Construim, mai departe, planul Π , care trece prin punctul O și este perpendicular pe segmentul orientat \overrightarrow{OC} . Notăm cu A' și B' proiecțiile ortogonale ale punctelor A și B pe planul Π . Rotim triunghiul $OA'B'$ în planul Π , în jurul punctului O , cu un unghi de $\pi/2$, în sensul mersului acelor de ceasornic, dacă privim din punctul C . Se obține, ca rezultat al rotației, triunghiul $OA''B''$. Avem:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB''} &= \overrightarrow{OA''} + \overrightarrow{A''B''}, \\ \overrightarrow{OB''} &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c}_0, \quad \overrightarrow{OA''} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}_0, \quad \overrightarrow{A''B''} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}_0.\end{aligned}\tag{1.14.7}$$

Așadar, din (1.14.7) rezultă egalitatea (1.14.6). Pentru a obține acum (1.14.4), este suficient să înmulțim relația (1.14.6) cu scalarul $\|\mathbf{c}\|$.

Proprietățile produsului vectorial descrise mai sus permit formularea unei reguli pentru calculul produsului vectorial a două combinații liniare de vectori liberi: pur și simplu se calculează produsul fiecărui termen din prima combinație cu fiecare termen din a doua combinație și apoi se însumează rezultatele. De exemplu,

$$(\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) \times (2\mathbf{c} - 3\mathbf{d}) = 2\mathbf{a} \times \mathbf{c} - 3\mathbf{a} \times \mathbf{d} + 4\mathbf{b} \times \mathbf{c} - 6\mathbf{b} \times \mathbf{d}.$$

Observație. Produsul vectorial are o serie de similarități cu produsul scalar al vectorilor. Sunt, totuși, o serie de diferențe care trebuie ținute minte:

- 1) Produsul vectorial *nu* este comutativ – ordinea factorilor contează.
- 2) Produsul vectorial a doi vectori este un vector, nu un scalar. Ca urmare, de data aceasta are sens să considerăm produse de mai mulți factori. Totuși, așa cum vom vedea ceva mai târziu, produsul vectorial *nu* este asociativ.

1.14.2 Expresia produsului vectorial în funcție de componentele factorilor

Considerăm un sistem de coordonate ortogonal $Oxyz$ și fie $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ baza ortonormată de coordonate. Este ușor de verificat că vectorii bazei se înmulțesc vectorial după regulile descrise în următoarea tabelă:

\times	\mathbf{i}	\mathbf{j}	\mathbf{k}
\mathbf{i}	$\mathbf{0}$	\mathbf{k}	$-\mathbf{j}$
\mathbf{j}	$-\mathbf{k}$	$\mathbf{0}$	\mathbf{i}
\mathbf{k}	\mathbf{j}	$-\mathbf{i}$	$\mathbf{0}$

Fie, acum, \mathbf{a} și \mathbf{b} doi vectori dați prin componentele lor:

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}.$$

Utilizând distributivitatea produsului vectorial în raport cu adunarea vectorilor, obținem

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})(b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + \\ &+ (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}, \end{aligned}$$

deci

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}. \quad (1.14.8)$$

Ținând cont de regula de dezvoltare a unui determinant de ordinul al treilea după prima linie, formula precedentă se mai poate scrie sub următoarea formă, mult mai ușor de reținut:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \quad (1.14.9)$$

Observație. Din expresia analitică (1.14.9) rezultă imediat formule analitice pentru aria paralelogramului și aria triunghiului determinate de cei doi vectori. Astfel, din formula menționată rezultă imediat că

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

adică

$$\text{Aria}_{par} \equiv \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}. \quad (1.14.10)$$

Prin urmare, aria triunghiului determinat de cei doi vectori este

$$\text{Aria}_{triun} = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}. \quad (1.14.11)$$

Să considerăm acum cazul în care avem trei puncte oarecare din planul xOy : $A(x_A, y_A, 0)$, $B(x_B, y_B, 0)$, $C(x_C, y_C, 0)$. Ele determină doi vectori: $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ și

$\mathbf{b} = \overrightarrow{AC}$. Este clar că $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x_B - x_A, y_B - y_A, 0)$ și $\mathbf{b} = \mathbf{b}(x_C - x_A, y_C - y_A, 0)$. Prin urmare,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_B - x_A & y_B - y_A & 0 \\ x_C - x_A & y_C - y_A & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k} \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix} = \mathbf{k} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix},$$

de unde rezultă că

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \pm \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}.$$

Așadar, aria triunghiului ABC din planul xOy este dată de formula

$$Aria_{ABC} = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}. \quad (1.14.12)$$

Firește, semnul se alege astfel încât membrul drept să fie pozitiv. Este, de asemenea, de remarcat, că formula de mai sus ne dă un criteriu de coliniaritate pentru punctele A, B, C . Cum ele sunt coliniare exact atunci când aria triunghiului determinat de ele este zero, adică atunci când triunghiul este degenerat, înseamnă că cele trei puncte sunt coliniare exact atunci când determinantul din membrul drept al ecuației (1.14.12) se anulează.

1.14.3 Dublul produs vectorial

După cum am putut constata până acum, produsul vectorial a doi vectori este, din nou, un vector, de aceea are sens să înmulțim acest vector cu un al treilea vector. Rezultatul acestei operații este ceea ce se numește *dublul produs vectorial*. Menționăm că *produsul vectorial nu este asociativ*, de aceea nu se poate renunța la paranteze așa cum se face, de exemplu, în cazul produsului numerelor reale sau complexe sau în cazul produsului matricilor. De acest fapt ne putem convinge cu ușurință, studiind produsele elementelor bazei canonice a spațiului tridimensional. Avem, de exemplu:

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i},$$

în timp ce

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) = 0.$$

Fie, prin urmare, \mathbf{a} , \mathbf{b} și \mathbf{c} trei vectori din spațiu. După cum am spus mai devreme, *dublul produs vectorial* al celor trei vectori este, prin definiție, vectorul $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$. Vom demonstra, în cele ce urmează, că are loc următoarea relație:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}. \quad (1.14.13)$$

Dacă unul dintre vectori este nul, atunci, desigur, ambii membri ai egalității de mai sus sunt egali cu zero, prin urmare nu avem ce demonstra. Același lucru se întâmplă, după cum ne putem convinge imediat, dacă vectorii \mathbf{a} și \mathbf{b} sunt coliniari. Vom presupune, prin urmare, că toți cei trei vectori sunt nenuli, iar vectorii \mathbf{a} și \mathbf{b} sunt necoliniari. Considerăm vectorul $\mathbf{x} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a}$.

Alegem o origine O arbitrară a spațiului și fie X, A, B, C patru puncte din spațiu astfel încât să avem $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$, $\overrightarrow{OX} = \mathbf{x}$. Avem, prin urmare,

$$\overrightarrow{OX} = (\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \times \overrightarrow{OA}.$$

Din definiția produsului vectorial, deducem imediat că \overrightarrow{OX} este perpendicular pe \overrightarrow{OA} și se află în planul OAB . Pe de altă parte, deoarece tripletul de vectori

$$\{(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}), \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OX}\}$$

este drept, rezultă că vectorii \overrightarrow{OB} și \overrightarrow{OX} se află de aceeași parte a planului care conține vectorii \overrightarrow{OA} și $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$. În plus, avem

$$\|\overrightarrow{OX}\| = \|\overrightarrow{OA}\|^2 \|\overrightarrow{OB}\| \sin \theta,$$

unde θ este unghiul $\angle AOB$. Aceste proprietăți ale vectorului \overrightarrow{OX} definesc acest unghi în mod unic. Pe de altă parte, ne putem convinge cu ușurință că proprietățile sunt verificate de vectorul

$$(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA})\overrightarrow{OB} - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})\overrightarrow{OA}.$$

Așadar,

$$\overrightarrow{OX} = (\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \times \overrightarrow{OA} = (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA})\overrightarrow{OB} - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})\overrightarrow{OA}.$$

Analog se demonstrează că

$$(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \times \overrightarrow{OB} = (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})\overrightarrow{OB} - (\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB})\overrightarrow{OA}.$$

Reperul $\{\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OA} \times \vec{OB}\}$ este o bază a lui \mathbb{R}^3 , așadar există trei numere reale u, v, w astfel încât

$$\vec{OC} = u\vec{OA} + v\vec{OB} + w(\vec{OA} \times \vec{OB}).$$

Dezvoltând $(\vec{OA} \times \vec{OB}) \times \vec{OC}$ și ținând cont de faptul că $\vec{OA} \times \vec{OB}$ este perpendicular pe \vec{OA} și pe \vec{OB} , obținem

$$\begin{aligned} (\vec{OA} \times \vec{OB}) \times \vec{OC} &= u(\vec{OA} \cdot \vec{OA})\vec{OB} - u(\vec{OA} \cdot \vec{OB})\vec{OA} + v(\vec{OA} \cdot \vec{OB})\vec{OB} - \\ &\quad - v(\vec{OB} \cdot \vec{OB})\vec{OA} = \\ &= \left[(-u\vec{OA} - v\vec{OB} - w(\vec{OA} \times \vec{OB})) \cdot \vec{OB} \right] \vec{OA} + \\ &\quad + \left[(u\vec{OA} + v\vec{OB} + w(\vec{OA} \times \vec{OB})) \cdot \vec{OA} \right] \vec{OB} = \\ &= (\vec{OA} \cdot \vec{OC})\vec{OB} - (\vec{OB} \cdot \vec{OC})\vec{OA} = \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}. \end{aligned}$$

Observație. Firește, are sens să calculăm și produsul $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$. Din anticomutativitatea produsului vectorial, obținem, utilizând relația (1.14.13), stabilită mai devreme:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\mathbf{c} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}.$$

Comparând vectorii $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ și $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ ajungem la concluzia că ei pot fi egali doar dacă

$$-(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} = 0.$$

Astfel, o condiție necesară pentru ca cele două produse vectoriale duble să fie egale este ca cei trei vectori să fie coplanari. Această condiție nu este, însă, și suficientă, întrucât, după cum se vede din egalitatea de mai sus, coeficienții celor trei vectori nu sunt arbitrari.

Se poate demonstra cu ușurință, utilizând relația (1.14.13) că pentru orice trei vectori \mathbf{a}, \mathbf{b} și \mathbf{c} are loc următoarea identitate (*identitatea lui Jacobi*):

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = 0. \quad (1.14.14)$$

1.14.4 Probleme rezolvate

Problema 1.14.1. Se consideră vectorii $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ și $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

Soluție Am văzut în secțiunea dedicată produsului scalar cum se poate rezolva o astfel de problemă. Înarmați cu produsul vectorial, putem utiliza o altă abordare. Cei doi versori care se caută se pot obține, pur și simplu, calculând produsul vectorial al celor doi vectori (într-o ordine oarecare) și împărțind apoi produsul vectorial la norma sa, pentru a obține vectori de lungime 1. Vectorii fiind, în cazul nostru, necoliniari, toți vectorii perpendiculari pe ambii vectori vor fi coliniari, ceea ce înseamnă că, printre ei se găsesc doar doi versori, construți ca mai sus.

Începem prin a calcula produsul vectorial al vectorilor \mathbf{a} și \mathbf{b} . Avem

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k},$$

prin urmare

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \sqrt{35}.$$

Astfel, cei doi versori pe care îi căutăm sunt

$$\mathbf{u}_{1,2} = \pm \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|} = \pm \frac{1}{\sqrt{35}} (-\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}).$$

□

Problema 1.14.2. Fie $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ și $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. Determinați un vector \mathbf{d} care să fie perpendicular atât pe \mathbf{a} , cât și pe \mathbf{b} , astfel încât să avem $\mathbf{c} \cdot \mathbf{d} = 15$.

Soluție. Orice vector care este perpendicular atât pe \mathbf{a} , cât și pe \mathbf{b} trebuie să fie coliniar cu produsul vectorial al acestor doi vectori. Calculăm, mai întâi, acest produs vectorial. Avem

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 32\mathbf{i} - \mathbf{j} - 14\mathbf{k}.$$

Astfel, vectorul \mathbf{d} va fi de forma

$$\mathbf{d} = \lambda (32\mathbf{i} - \mathbf{j} - 14\mathbf{k}),$$

unde λ se va determina din cea de-a doua condiție din ipoteză, adică

$$15 = \mathbf{c} \cdot \mathbf{d} = \lambda (64 + 1 - 56) = 9\lambda.$$

Obținem $\lambda = 5/3$, deci

$$\mathbf{d} = \frac{1}{3} (160\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 70\mathbf{k}).$$

□

Problema 1.14.3. Fie ABC un triunghi, cu laturile $BC = a$, $CA = b$ și $AB = c$. Demonstrați, folosind produsul vectorial, că avem

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad (1.14.15)$$

(teorema sinusurilor în triunghiul ABC).

Demonstrație Considerăm vectorii $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{CA} = \mathbf{b}$ și $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$. Atunci se observă imediat că

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}. \quad (1.14.16)$$

Înmulțim vectorial, la stânga, relația (1.14.16) cu \mathbf{a} și obținem

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{0},$$

de unde rezultă că

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}. \quad (1.14.17)$$

Unghiul dintre vectorii $\mathbf{a} = \overrightarrow{BC}$ și $\mathbf{b} = \overrightarrow{CA}$ este egal cu $\pi - C$, iar unghiul dintre $\mathbf{c} = \overrightarrow{AB}$ și \mathbf{a} este egal cu $\pi - B$. De aceea, din relația (1.14.17), trecând la norme, obținem egalitatea

$$ab \sin(\pi - C) = ca \sin(\pi - B)$$

sau

$$ab \sin C = ca \sin B.$$

Împărțind ambii membri ai acestei relații cu ABC , obținem

$$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin B}{b}$$

sau

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}. \quad (1.14.18)$$

Exact la fel, dacă înmulțim relația (1.14.16) cu \mathbf{b} , obținem că

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}. \quad (1.14.19)$$

Combinând relațiile (1.14.18) și (1.14.19), obținem egalitatea (1.14.15), pe care trebuia să o demonstrăm. □

Problema 1.14.4. Dacă \mathbf{a} , \mathbf{b} și \mathbf{c} sunt trei vectori astfel încât $\mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$, $\mathbf{b} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$, iar \mathbf{a} este un versor, demonstrați că cei trei vectori formează o bază ortonormată.

Demonstrație Remarcăm, înainte de toate, că nici unul dintre vectorii \mathbf{a} , \mathbf{b} și \mathbf{c} nu se poate anula, întrucât vectorul \mathbf{a} are lungime 1.

Deoarece $\mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ și $\mathbf{b} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$, deducem că

$$\mathbf{a} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{c}.$$

Pe de altă parte, \mathbf{a} este perpendicular pe \mathbf{c} , deci $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0$. Astfel, obținem că $\mathbf{a} = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a}$, ceea ce înseamnă că $\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = 1$, adică vectorul \mathbf{c} este un versor.

Pe de altă parte, cum $\mathbf{b} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$, iar vectorii \mathbf{c} și \mathbf{a} sunt perpendiculari, avem

$$\|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{c}\| \cdot \|\mathbf{a}\| \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

Așadar, vectorii \mathbf{a} , \mathbf{b} și \mathbf{c} au lungime 1 și sunt, doi câte doi, perpendiculari, deci $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ este o bază ortonormată. Această bază este orientată direct, deoarece $\mathbf{b} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$. □

1.15 Produsul mixt al vectorilor

1.15.1 Definiție și proprietăți fundamentale

Fie \mathbf{a} , \mathbf{b} și \mathbf{c} trei vectori. Se numește *produs mixt* al celor trei vectori numărul

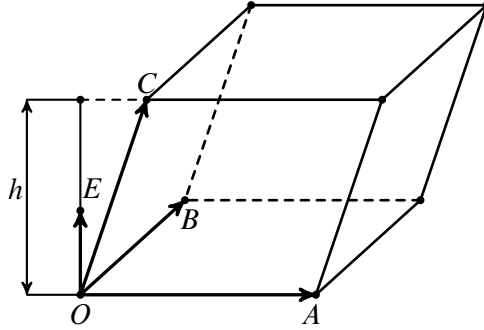
$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) := (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}. \quad (1.15.1)$$

Produsul mixt al vectorilor are o interpretare geometrică remarcabilă, exprimată de următoarea teoremă.

Teorema 1.13. Fie \mathbf{a} , \mathbf{b} și \mathbf{c} trei vectori necoplanari. Îi atașăm unui punct O și fie A, B, C punctele pentru care

$$\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \overrightarrow{OB} = \mathbf{b}, \overrightarrow{OC} = \mathbf{c}.$$

Atunci produsul mixt $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ este egal cu volumul paralelipipedului construit pe segmentele OA, OB, OC , luat cu semnul plus dacă tripletul $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ este direct și cu semnul minus dacă tripletul este stâng.



Demonstrație Fie V volumul paralelipipedului construit pe segmentele OA , OB și OC , S – aria paralelogramului construit pe segmentele OA și OB și h – înălțimea paralelipipedului. Atunci $V = Sh$.

Atașăm acum punctului O un vector unitar \overrightarrow{OE} , perpendicular pe segmentele OA și OB și orientat astfel încât tripletul format din vectorii \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} și $\mathbf{e} = \overrightarrow{OE}$ să fie direct. Atunci, în mod evident, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = S\mathbf{e}$. Prin urmare,

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = S(\mathbf{e} \cdot \mathbf{c}) = S \operatorname{pr}_{\mathbf{e}} \mathbf{c} = \pm Sh = \pm V,$$

unde se ia semnul plus dacă tripletul $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ este direct și semnul minus dacă tripletul este stâng. \square

Consecința 1.6. Volumul tetraedrului $OABC$ este dat de formula

$$\operatorname{Vol}_{OABC} = \pm \frac{1}{6}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}),$$

unde $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$.

Consecința 1.7. Un sistem de trei vectori liniar independenți $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ este drept dacă $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) > 0$ și stâng dacă $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) < 0$.

Consecința 1.8. Un sistem ortonormat de trei vectori liniar independenți $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ este drept dacă $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 1$ și stâng dacă $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -1$.

Produsul mixt al vectorilor ne permite, de asemenea, să stabilim un criteriu de coplanaritate a trei vectori, cuprins în teorema care urmează.

Teorema 1.14. Pentru ca trei vectori \mathbf{a} , \mathbf{b} și \mathbf{c} să fie coplanari este necesar și suficient ca produsul lor mixt să fie egal cu zero:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0. \quad (1.15.2)$$

Demonstrație Dacă vectorii $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ sunt coplanari, atunci vectorul $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ fie este egal cu zero (dacă vectorii \mathbf{a} și \mathbf{b} sunt coliniari), fie este perpendicular pe vectorul \mathbf{c} . În ambele cazuri egalitatea (1.15.2) are loc.

Invers, să presupunem că egalitatea (1.15.2) are loc. Dacă vectorii nu ar fi coplanari, atunci ei ar determina, ca în teorema precedentă, un paralelipiped de volum

$$0 \neq V = \pm(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}),$$

ceea ce contrazice egalitatea (1.15.2). \square

1.15.2 Liniaritatea produsului mixt

Din proprietățile produsului vectorial și cele ale produsului scalar, rezultă următoarea teoremă:

Teorema 1.15. *Produsul mixt al vectorilor este multiliniar, adică este variabil în fiecare variabilă:*

(i) Pentru orice vectori $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}$ și \mathbf{c} și orice scalari $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, avem

$$(\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \lambda_1 (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + \lambda_2 (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}); \quad (1.15.3)$$

(ii) Pentru orice vectori $\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ și \mathbf{c} și orice scalari $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, avem

$$(\mathbf{a}, \lambda_1 \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \mathbf{b}_2, \mathbf{c}) = \lambda_1 (\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}) + \lambda_2 (\mathbf{a}, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}); \quad (1.15.4)$$

(iii) Pentru orice vectori $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_1$ și \mathbf{c}_2 și orice scalari $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, avem

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \lambda_1 \mathbf{c}_1 + \lambda_2 \mathbf{c}_2) = \lambda_1 (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_1) + \lambda_2 (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_2). \quad (1.15.5)$$

Demonstrație (i) Avem, din definiție,

$$\begin{aligned} (\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &= ((\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2) \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \\ &= (\lambda_1 (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}) + \lambda_2 (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b})) \cdot \mathbf{c} = \\ &= \lambda_1 (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} + \lambda_2 (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \lambda_1 (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + \\ &+ \lambda_2 (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}). \end{aligned}$$

(ii) Proprietatea rezultă imediat din proprietatea precedentă, folosind anticomutativitatea produsului vectorial.

(iii) Avem, din nou, din definiția produsului mixt:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \lambda_1 \mathbf{c}_1 + \lambda_2 \mathbf{c}_2) &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\lambda_1 \mathbf{c}_1 + \lambda_2 \mathbf{c}_2) = \lambda_1 ((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}_1) + \\ &+ \lambda_2 ((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}_2) = \lambda_1 (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_1) + \lambda_2 (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_2). \end{aligned}$$

\square

1.15.3 Expresia produsului mixt în coordonate

Presupunem că, relativ la o bază ortonormată, vectorii $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ sunt dați prin componentele lor:

$$\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3), \mathbf{b}(b_1, b_2, b_3), \mathbf{c}(c_1, c_2, c_3). \quad (1.15.6)$$

Utilizând expresiile în coordonate pentru produsul vectorial și produsul scalar, obținem:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 + \\ &+ (a_1b_2 - a_2b_1)c_3 = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - \\ &- a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1. \end{aligned}$$

Este ușor de constatat că această relație se poate rescrie cu ajutorul unui determinant de ordinul al treilea:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (1.15.7)$$

Din proprietățile determinantilor se obțin imediat următoarele relații între produsele mixte a trei vectori, luați în diferite ordini:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}).$$

Prin urmare:

- dacă facem o permutare circulară a factorilor într-un produs mixt, valoarea produsului nu se schimbă;
- dacă se schimbă ordinea a doi factori (nu neapărat vecini), *semnul* produsului se schimbă (dar valoarea absolută nu!).

Se constată, de asemenea, fie din definiție, fie din proprietățile determinantilor, că *dacă doi factori dintr-un produs mixt sunt liniar dependenți, produsul se anulează*. În particular, din (1.15.7) rezultă că putem rescrie condiția necesară și suficientă (1.15.2) pentru ca vectorii (1.15.6) să fie coplanari sub forma

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.15.8)$$

1.15.4 Probleme rezolvate

Problema 1.15.1. Fie \mathbf{a} , \mathbf{b} și \mathbf{c} trei vectori necoplanari. Determinați valorile parametrului real λ pentru care vectorii $\mathbf{u} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$, $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{b} + 4\mathbf{c}$ și $\mathbf{w} = (2\lambda - 1)\mathbf{c}$ sunt coplanari.

Soluție. Știm că trei vectori sunt coplanari dacă și numai dacă produsul lor mixt este egal cu zero. Calculăm, deci, produsul mixt al vectorilor \mathbf{u} , \mathbf{v} și \mathbf{w} , în funcție de vectorii \mathbf{a} , \mathbf{b} și \mathbf{c} , folosind multilinearitya produsului mixt:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= (\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}, \lambda\mathbf{b} + 4\mathbf{c}, (2\lambda - 1)\mathbf{c}) = \lambda(2\lambda - 1)(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + \\ &\quad + 4(2\lambda - 1) \underbrace{(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{c})}_{=0} + 2\lambda(2\lambda - 1) \underbrace{(\mathbf{b}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}_{=0} + 8(2\lambda - 1) \underbrace{(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{c})}_{=0} + \\ &\quad + 3\lambda(2\lambda - 1) \underbrace{(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}_{=0} + 12(2\lambda - 1) \underbrace{(\mathbf{c}, \mathbf{c}, \mathbf{c})}_{=0} = \lambda(2\lambda - 1)(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}), \end{aligned}$$

unde produsele mixte indicate se anulează pentru că (cel puțin) doi dintre factori sunt coliniari (de fapt chiar egali).

Astfel, produsul mixt $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ se anulează dacă și numai dacă avem

$$\lambda(2\lambda - 1)(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0.$$

Dar, cum vectorii \mathbf{a} , \mathbf{b} și \mathbf{c} sunt liniar independenți, produsul lor mixt nu se anulează, așa că suntem conduși la ecuația

$$\lambda(2\lambda - 1) = 0,$$

deci $\lambda = 0$ sau $\lambda = \frac{1}{2}$. □

Problema 1.15.2. Fie \mathbf{a} , \mathbf{b} și \mathbf{c} trei vectori. Demonstrați că vectorii $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{b} - \mathbf{c}$ și $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ sunt coplanari dacă și numai dacă vectorii \mathbf{a} , \mathbf{b} și \mathbf{c} sunt coplanari.

Demonstrație Vom demonstra că produsul mixt al acestor trei vectori este egal cu zero dacă și numai dacă produsul mixt al vectorilor \mathbf{a} , \mathbf{b} și \mathbf{c} se anulează. Într-adevăr, avem:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{b} - \mathbf{c}, \mathbf{c} - \mathbf{a}) &= (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) - (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}) - (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{c}) + (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) - \\ &\quad - (\mathbf{b}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{b}, \mathbf{a}) - (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = 2(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}), \end{aligned}$$

unde am utilizat multiliniaritatea produsului mixt, faptul că produsul se anulează dacă doi factori sunt coliniari și faptul că produsul nu se modifică dacă se face o permutare ciclică a factorilor. Astfel,

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{b} - \mathbf{c}, \mathbf{c} - \mathbf{a}) = 0 \quad \text{dacă și numai dacă} \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0,$$

adică ceea ce trebuia demonstrat. \square

Problema 1.15.3. Fie \mathbf{a} , \mathbf{b} și \mathbf{c} trei vectori. Demonstrați că are loc formula

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})^2 = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} & \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} & \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} \end{vmatrix}.$$

Soluție. Plecând de la definiția produsului mixt, avem

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})^2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \\ &= \det \left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \det \left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \begin{vmatrix} a_1a_1 + a_2a_2 + a_3a_3 & a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 & a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 \\ b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3 & b_1b_1 + b_2b_2 + c_2c_2 & b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 \\ c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 & c_1b_1 + c_2b_2 + c_3b_3 & c_1c_1 + c_2c_2 + c_3c_3 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} & \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} & \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

\square

Problema 1.15.4. Fie $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ și $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$. Determinați un versor \mathbf{a} astfel încât produsul $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ să fie maxim.

1.16 Probleme

Problema 1.1. Un vector \mathbf{v} face un unghi de 45° cu axa Ox , un unghi de 60° cu axa Oy , iar componenta sa pe Ox este $v_x = 3\sqrt{2}$. Să se determine modulul vectorului, unghiul pe care îl face cu axa Oz și celelalte două componente.

Soluție Fie v modulul vectorului. Atunci componentele vectorului sunt:

$$v_x = v \cdot \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}v,$$

$$v_y = v \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}v,$$

$$v_z = v \cdot \cos \gamma.$$

Dar pe v_x îl cunoaștem și obținem, prin urmare,

$$\frac{\sqrt{2}}{2}v = 3\sqrt{2},$$

de unde obținem că $v = 6$, așadar $v_y = 3$. Pe de altă parte, $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2 = 36$, adică

$$18 + 9 + 36 \cos^2 \gamma = 36,$$

de unde

$$\cos^2 \gamma = \frac{1}{4}$$

sau

$$\cos \gamma = \pm \frac{1}{2}.$$

□

Problema 1.2. Să se determine un vector care face unghiuri egale cu cele trei axe ale unui reper ortonormat direct, știind că modulul vectorului este egal cu unitatea.

Problema 1.3. Ce relații trebuie să îndeplinească vectorii $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ astfel încât ei să formeze un triunghi?

Problema 1.4. Punctele $A'(1, 2, 1)$, $B'(2, 0, 0)$, $C'(0, 1, 3)$ sunt mijloacele laturilor unui triunghi. Să se determine coordonatele vârfurilor triunghiului.

Problema 1.5. Pe laturile triunghiului ABC se construiesc paralelogramele arbitrare $ABB'A''$, $BCC'B''$, $CAA'C''$. Să se arate că se poate construi un triunghi având laturile egale și paralele cu $\overrightarrow{A'A''}$, $\overrightarrow{B'B''}$, $\overrightarrow{C'C''}$.

Problema 1.6. Se dă o piramidă cu vârful în S și baza un paralelogram $ABCD$ ale cărui diagonale se intersectează în punctul O . Să se demonstreze egalitatea vectorială:

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}.$$

Problema 1.7. Verificați că vectorii $\mathbf{a}(4, 1, -1)$, $\mathbf{b}(1, 2, -5)$, $\mathbf{c}(-1, 1, 1)$ formează o bază în spațiu. Determinați componentele vectorilor $\mathbf{l}(4, 4, -5)$, $\mathbf{m}(2, 4, -10)$, $\mathbf{n}(0, 3, -4)$ în această bază.

Problema 1.8. Se dau vectorii necoplanari \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} . Stabiliți dacă vectorii \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} sunt coplanari în fiecare dintre cazurile de mai jos. În caz afirmativ, indicați o relație de dependență liniară dintre ei.

1) $\mathbf{l} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$, $\mathbf{m} = 2\mathbf{b} - \mathbf{c} - \mathbf{a}$, $\mathbf{n} = 2\mathbf{c} - \mathbf{a} - \mathbf{b}$;

2) $\mathbf{l} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{m} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{n} = -\mathbf{a} + \mathbf{c}$;

3) $\mathbf{l} = \mathbf{c}$, $\mathbf{m} = \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$, $\mathbf{n} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$.

Problema 1.9. În paralelogramul $ABCD$ punctul K este mijlocul segmentului CD , iar punctul O este punctul de intersecție a diagonalelor. Considerând baza formată din vectorii \overrightarrow{AB} și \overrightarrow{AD} , determinați, în această bază, componentele vectorilor \overrightarrow{AM} , \overrightarrow{AO} , \overrightarrow{MO} .

Problema 1.10. În trapezul $ABCD$ lungimile bazelor AD și BC sunt în raportul 3 : 2. Luând ca bază vectorii \overrightarrow{AC} și \overrightarrow{BD} , să se determine, în această bază, componentele vectorilor \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{CD} , \overrightarrow{DA} .

Problema 1.11. În trapezul $ABCD$, lungimile bazelor AD și BC sunt în raportul 3 : 1. O este punctul de intersecție a diagonalelor trapezului, în timp ce S este punctul de intersecție al prelungirilor laturilor neparalele. Luând ca bază vectorii \overrightarrow{AD} și \overrightarrow{AB} , determinați componentele vectorilor \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{AO} , \overrightarrow{AS} .

Problema 1.12. Trei puncte, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, necoliniare, sunt vârfuri consecutive ale unui paralelogram. Determinați coordonatele celui de-al patrulea punct, D , al paralelogramului.

Problema 1.13. Se dau două puncte distincte $A(x_1, y_1, z_1)$ și $B(x_2, y_2, z_2)$. Determinați coordonatele:

1) punctului M , situat pe segmentul AB , astfel încât $AM : BM = m : n$;

- 2) punctului M , situat în exteriorul segmentului AB , astfel încât $AM : BM = m : n$.

Problema 1.14. Se dau punctele $A(3, -2)$ și $B(1, 4)$. Punctul M se află pe dreapta AB , iar $AM = 3AB$. Determinați coordonatele punctului M dacă:

- 1) M se află de aceeași parte a punctelor A și B ;
- 2) punctele M și B se află de-o parte și de cealaltă a punctului A .

Problema 1.15. Se dau vectorii necoliniari \mathbf{a} și \mathbf{b} . Demonstrați că sistemul de vectori $\mathbf{m} = 3\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{n} = 2\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{p} = \mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ este liniar dependent, iar vectorii \mathbf{n} , \mathbf{p} sunt necoliniari. Exprimați vectorul \mathbf{m} în funcție de vectorii \mathbf{n} , \mathbf{p} .

Problema 1.16. Punctul M este centrul de greutate al triunghiului ABC . Exprimați:

- 1) vectorul \overrightarrow{MA} în funcție de vectorii \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{CA} ;
- 2) vectorul \overrightarrow{AB} în funcție de vectorii \overrightarrow{MB} , \overrightarrow{MC} ;
- 3) vectorul \overrightarrow{OA} în funcție de vectorii \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OC} , \overrightarrow{OM} , unde O este un punct oarecare din spațiu.

Problema 1.17. Determinați coordonatele vârfurilor unui tetraedru $OABC$ în sistemul de coordonate cu originea în vârful O , în care baza de coordonate este formată din medianele \overrightarrow{OD} , \overrightarrow{OE} , \overrightarrow{OF} ale fețelor BOC , COA , AOB .

Problema 1.18. Să se determine coordonatele vârfurilor tetraedrului $ABCD$ într-un sistem de coordonate în care originea este centrul de greutate P al feței BCD , iar baza este formată din vectorii \overrightarrow{BQ} , \overrightarrow{CR} , \overrightarrow{DS} , unde Q , R , S sunt, respectiv, centrele de greutate ale fețelor ACD , ABD și ABC .

Problema 1.19. a) Determinați unghiurile dintre vectorii \mathbf{a} și \mathbf{b} , dați prin intermediul componentelor lor, față de un reper ortonormat.

- 1) $\mathbf{a}(1, -1, 1)$, $\mathbf{b}(5, 1, 1)$;
- 2) $\mathbf{a}(1, -1, 1)$, $\mathbf{b}(-2, 2, -2)$;
- 3) $\mathbf{a}(1, -1, 1)$, $\mathbf{b}(3, 1, -2)$.

Problema 1.20. Să se determine distanța dintre punctele A și B , date prin intermediul coordonatelor lor față de o bază ortonormată.

- 1) $A(4, -2, 3), B(4, 5, 2);$
- 2) $A(-3, 1, -1), B(-1, 1, -1);$
- 3) $A(3, -3, -7), B(1, -4, -5).$

Problema 1.21. Se dau trei vectori: $\mathbf{a}(-1, 2), \mathbf{b}(5, 1), \mathbf{c}(4, -2)$. Calculați:

- 1) $\mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b});$
- 2) $\|\mathbf{a}\|^2 - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c};$
- 3) $\|\mathbf{b}\|^2 + \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} + 3\mathbf{c});$

Problema 1.22. Se dau trei vectori: $\mathbf{a}(1, -1, 1), \mathbf{b}(5, 1, 1), \mathbf{c}(0, 3, -2)$. Calculați:

- 1) $\mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b});$
- 2) $\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{c}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c});$
- 3) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) - \|\mathbf{a}\|^2(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}).$

Problema 1.23. Demonstrați că vectorii \mathbf{a} și $\mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ sunt perpendiculari.

Problema 1.24. Este adevărat că, pentru orice vectori $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ este îndeplinită egalitatea

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})?$$

Problema 1.25. Se știe că $\mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{b} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}, \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Determinați lungimile vectorilor $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ și unghiurile dintre ei.

Problema 1.26. Pe vectorii $\mathbf{a}(2, 3, 1)$ și $\mathbf{b}(-1, 1, 2)$ (atașați unui punct) se construiește un triunghi. Determinați aria acestui triunghi, precum și lungimile celor trei înălțimi ale sale.

Problema 1.27. Unui punct i se atașează patru vectori $\mathbf{a}(-1, 1, -1), \mathbf{b}(-1, 1, 1), \mathbf{c}(5, -1, -1)$ și \mathbf{d} . Vectorul \mathbf{d} are lungimea 1 și formează cu vectorii $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ unghiuri ascuțite egale. Determinați componentele vectorului \mathbf{d} .

Problema 1.28. Stabiliți dacă următoarele triplete de vectori sunt formate din vectori coplanari:

- 1) $\mathbf{a}(2, 3, 5), \mathbf{b}(7, 1, -1), \mathbf{c}(3, -5, -11);$

2) $\mathbf{a}(2, 0, 1)$, $\mathbf{b}(5, 3, -3)$, $\mathbf{c}(3, 3, 10)$.

Problema 1.29. Vectorii $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ sunt necoplanari. Pentru ce valori ale lui λ sunt coplanari vectorii $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \lambda\mathbf{c}$, $4\mathbf{a} + 5\mathbf{b} + 6\mathbf{c}$, $7\mathbf{a} + 8\mathbf{b} + \lambda^2\mathbf{c}$?

Problema 1.30. Se dau vectorii necoliniari \mathbf{a}, \mathbf{b} și scalarul p . Găsiți un vector \mathbf{x} , care verifică egalitatea $(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = p$.

Problema 1.31. Diagonalele unui trapez isoscel sunt perpendiculare. Determinați aria trapezului, știind că înălțimea lui este egală cu h .

Problema 1.32. Aria unui trapez $ABCD$ este egală cu S , iar raportul bazelor este $AD : BC = 3 : 1$. Segmentul MN este paralel cu latura BC și intersectează latura AB , astfel încât $AM : BN = 3 : 2$, $MN : CD = 1 : 3$. Segmentul AM este paralel cu segmentul BN . Determinați aria triunghiului BNC .

Problema 1.33. Măsura, în radiani, a unghiului dintre vectorii \mathbf{u} și \mathbf{v} este de $\frac{\pi}{6}$. Dacă

$$\|\mathbf{u}\| = 1, \|\mathbf{v}\| = 7, \text{ calculați } \mathbf{u} \times \mathbf{v} \text{ și } \left\| \frac{1}{3}\mathbf{u} \times \frac{3}{4}\mathbf{v} \right\|.$$

Problema 1.34. Dacă $ABCD$ este un tetraedru regulat de latură 1, calculați $\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|$.

Problema 1.35. Calculați aria paralelogramului $ABCD$, dacă $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -1)$, în timp ce $\overrightarrow{AD} = (2, 1, 4)$.

Problema 1.36. Calculați aria triunghiului ABC dacă $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0)$, iar $\overrightarrow{AC} = (0, 1, 3)$.

Problema 1.37. Determinați un vector de lungime 1 care să fie perpendicular pe vectorii $\mathbf{u} = (1, -3, 1)$ și $\mathbf{v} = (-3, 3, 3)$.

Problema 1.38. Se dau vectorii $\mathbf{u}(1, 1, 1)$ și $\mathbf{v}(0, 1, 2)$. Să se determine o bază ortonormată pozitivă $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ a lui \mathbb{R}^3 astfel încât:

(i) \mathbf{a} să aibă aceeași direcție și sens cu \mathbf{u} ;

(ii) \mathbf{b} să fie o combinație liniară a lui \mathbf{u} și \mathbf{v} , iar prima sa componentă să fie pozitivă.

Problema 1.39. Demonstrați că dacă $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = 0$, atunci

(a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{w} \times \mathbf{u}$;

(b) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{w} + \mathbf{w} \times \mathbf{u} = 3(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$.

CAPITOLUL 2

Dreapta în plan

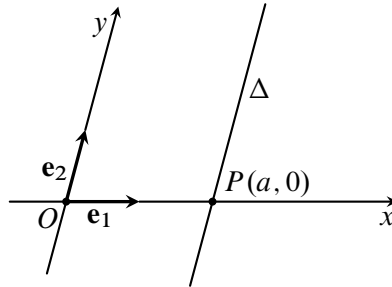
2.1 Ecuația dreptei scrisă cu ajutorul coeficientului unghiular (al pantei)

Fie Δ o dreaptă situată într-un plan. Se numește *vector director* al dreptei orice vector nenul a cărui direcție coincide cu direcția dreptei. Se înțelege că o aceeași dreaptă are o infinitate de vectori directori, dar toți aceștia sunt coliniari între ei.

Presupunem că s-a ales un sistem de coordonate afin Oxy . Vom stabili acum ecuația dreptei Δ . Presupunem, mai întâi, că dreapta este paralelă cu axa Oy și intersectează axa Ox într-un punct $P(a, 0)$. Atunci este clar că pentru toate punctele $M(x, y)$ de pe dreapta Δ și numai pentru ele avem

$$x = a. \quad (2.1.1)$$

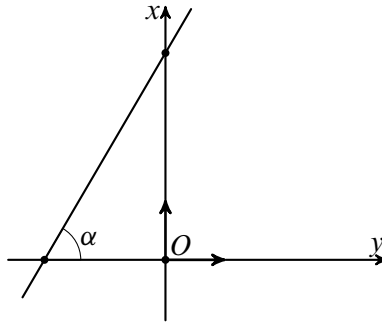
Așadar, (2.1.1) este ecuația unei drepte paralele cu axa Oy (adică o dreaptă verticală) și care intersectează axa Ox în punctul $P(a, 0)$. Este clar că toate dreptele de acest tip au vectori directori de componente $(0, m)$, unde m este un număr real nenul oarecare. Să presupunem acum că dreapta Δ nu este paralelă cu axa Oy . Atunci pentru orice vector director $\mathbf{a}(l, m)$ al acestei drepte avem $l \neq 0$, iar raportul $m : l$ are aceeași valoare constantă k , numită *coeficient unghiular* al dreptei Δ relativ la sistemul de coordonate ales.



Dacă, în particular, se consideră un sistem de coordonate ortogonal $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$, atunci pentru coeficientul unghiular avem, în mod evident,

$$k = \operatorname{tg} \alpha,$$

unde α este unghiul dintre \mathbf{i} și orice vector director al dreptei Δ . Unghiul α se numește *unghiul de înclinare* sau *panta* dreptei Δ relativ la axa Ox . Deoarece vom considera în cele ce urmează vom utiliza în exclusivitate înclinarea relativ la axa Ox , pe viitor nu vom mai scoate în evidență în mod explicit acest fapt și vom vorbi, în general, pur și simplu despre panta dreptei.



În cele ce urmează, dacă nu se precizează altfel, vom utiliza în exclusivitate un sistem de coordonate rectangular, fixat odată pentru totdeauna și nu ne vom mai referi la el.

Vom arăta acum cum se poate obține ecuația unei drepte dacă se cunoaște panta ei și un punct de pe dreaptă. Fie, așadar, o dreaptă Δ , de coeficient unghiular k . Fie, de asemenea, un punct $P(a, b)$ de pe dreaptă. Fie, acum $M(x, y)$ un punct de pe dreaptă, diferit de punctul P . Atunci vectorul $\overrightarrow{PM}(x - a, y - b)$ este un vector

director al dreptei Δ , prin urmare

$$\frac{y-b}{x-a} = k. \quad (2.1.2)$$

De aici rezultă că

$$y-b = k(x-a). \quad (2.1.3)$$

Această ecuație este verificată de orice punct de pe dreaptă, inclusiv punctul P . Demonstrăm acum că, invers, dacă un punct verifică această ecuație, atunci el aparține dreptei. Fie, așadar, un punct $M_1(x_1, y_1) \neq P$, care verifică ecuația (2.1.3), adică

$$y_1-b = k(x_1-a). \quad (2.1.4)$$

Cum $M_1 \neq P$, $x_1-a \neq 0$, prin urmare, din (2.1.2) și (2.1.4), obținem că

$$\frac{y-b}{x-a} = \frac{y_1-b}{x_1-a}.$$

Așadar, vectorii directori ai dreptelor Δ și PM_1 sunt coliniari. Cum ambele drepte trec prin punctul P , ele coincid, deci $M_1 \in \Delta$. Astfel, ecuația (2.1.3) descrie o dreaptă care trece prin punctul P și are coeficientul unghiular Δ .

Dacă, în particular, punctul P se află pe axa Oy (ceea ce este posibil, deoarece am presupus că dreapta noastră nu este paralelă cu această axă), adică dacă P are coordonatele $(0, b)$, atunci ecuația (2.1.3) capătă forma mai simplă:

$$y = kx + b.$$

Dacă dreapta este paralelă cu axa Oy , atunci panta sa este egală cu zero și, dacă trece prin punctul $P(0, b)$, atunci ecuația ei este

$$y = b.$$

2.2 Ecuația generală a dreptei. Ecuația dreptei prin tăieturi

Definiția 2.1. Se numește *ecuație de gradul întâi* sau *ecuație liniară* relativ la necunoscutele x și y o ecuație de forma

$$Ax + By + C = 0, \quad (2.2.1)$$

unde $A, B, C \in \mathbb{R}$, iar coeficienții A și B nu se anulează simultan.

Teorema 2.1. *Orice dreaptă în plan poate fi descrisă printr-o ecuație de forma (2.2.1). Invers, orice ecuație de forma (2.2.1) reprezintă o dreaptă.*

Demonstrație Dacă avem o dreaptă Δ care nu este paralelă cu axa Oy , atunci, după cum am văzut în secțiunea precedentă, ea poate fi descrisă prin ecuația liniară

$$y - kx - b = 0. \quad (2.2.2)$$

Dacă dreapta Δ este paralelă cu axa Oy , atunci ea este, din nou, dată printr-o ecuație liniară

$$x - a = 0. \quad (2.2.3)$$

Considerăm acum o ecuație de forma (2.2.1) oarecare. Dacă $B \neq 0$, atunci, împărțind ambii membri ai ecuației cu B și introducând notațiile $k = -A/B$, $b = -C/B$, putem aduce ecuația la forma (2.2.2). Dar ecuația (2.2.2) reprezintă o dreaptă, de coeficient unghiular k și care trece prin punctul $P(0, b)$. Dacă în ecuația (2.2.1) $B = 0$, atunci această ecuație se poate aduce la forma (2.2.3) și, prin urmare, reprezintă o dreaptă paralelă cu axa Oy . \square

Ecuația (2.2.1) se numește *ecuația generală a dreptei în plan*. Vom evidenția acum câteva cazuri particulare, în care unul sau doi coeficienți ai ecuației generale se anulează.

1. $C = 0$. În acest caz ecuația (2.2.1) se reduce la

$$Ax + By = 0. \quad (2.2.4)$$

Dreapta care se obține trece prin originea coordonatelor, după cum se poate observa cu ușurință, înlocuind $x = 0$ și $y = 0$ în ecuația de mai sus. Invers, dacă o dreaptă trece prin originea coordonatelor, atunci, înlocuind în ecuația (2.2.1) $x = 0$ și $y = 0$ obținem $C = 0$, prin urmare: *o condiție necesară și suficientă pentru ca o dreaptă dată prin ecuația sa generală să treacă prin origine este ca $C = 0$.*

2. $B = 0, C \neq 0$. În acest caz, ecuația (2.2.1) capătă forma

$$Ax + C = 0. \quad (2.2.5)$$

Dreapta dată de această ecuație este paralelă cu axa Oy , dar nu intersectează această axă. Se constată imediat că această dreaptă intersectează axa Ox în punctul de coordonate $\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$ și toate punctele sale au coordonata x egală cu $-C/A$.

Așadar, un vector director al drepte este, de exemplu, $(0, 1)$, ceea ce confirmă faptul că dreapta este, într-adevăr, paralelă cu axa Oy . Invers, este ușor de văzut că orice dreaptă paralelă cu axa Oy și care nu trece prin origine se poate scrie sub forma (2.2.5).

3. $B = 0, C = 0$. De data aceasta ecuația se reduce la

$$x = 0,$$

iar dreapta este chiar axa Oy .

4. $A = 0, C \neq 0$. Acest caz este analog cu cazul 2) și conduce la o dreaptă paralelă cu axa Ox , dar care nu coincide cu această axă.
5. $A = 0, C = 0$. Acest caz este analog cu cazul 3), iar dreapta în chestiune este axa Ox .

Scoatem în evidență acum următoarele fapte: *fie Δ dreapta dată prin ecuația sa generală (2.2.1). Atunci vectorul $\mathbf{n}(A, B)$ este perpendicular pe dreaptă, în timp ce vectorul $\mathbf{a}(-B, A)$ este un vector director al drepte.*

Într-adevăr, să alegem pe dreapta Δ două puncte distincte $M_1(x_1, y_1)$ și $M_2(x_2, y_2)$. Avem, prin urmare,

$$Ax_1 + By_1 + C = 0,$$

$$Ax_2 + By_2 + C = 0.$$

Scăzând aceste ecuații membru cu membru, obținem

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) = 0.$$

Această egalitate înseamnă că vectorul $\mathbf{n}(A, B)$ este perpendicular pe vectorul $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, prin urmare este perpendicular și pe dreapta Δ . Cum vectorul $\mathbf{a}(-B, A)$ este, în mod evident, și el perpendicular pe vectorul \mathbf{n} , rezultă că \mathbf{a} este un vector director al drepte Δ .

Observație. Fie \mathbf{r} vectorul de poziție al unui punct curent M de pe dreaptă, \mathbf{n} – vectorul normal la dreaptă și \mathbf{r}_0 vectorul de poziție al punctului dat, M_0 , prin care trece dreapta. Atunci, conform celor spuse mai sus, ecuația drepte se poate scrie sub forma

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0. \quad (2.2.6)$$

Aceasta este o formă a ecuației drepte pe care o vom folosi destul de mult, de fiecare dată când dreapta este dată printr-un punct prin care trece și un vector normal la dreaptă.

Să presupunem acum că în ecuația (2.2.1) toți coeficienții A, B, C sunt nenuli. Împărțim ecuația cu $-C$ și notăm $a = -C/A$ și $b = -C/B$. Atunci ecuația va deveni

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (2.2.7)$$

În mod evident, a și b sunt lungimile cu semn ale segmentelor pe care dreapta Δ le taie pe axele de coordonate Ox și Oy (e vorba de segmentele cuprinse între originea coordonatelor și punctele de intersecție a dreptei cu axele). Aceste lungimi se numesc *tăieturi* ale dreptei pe axă, de aceea, ecuația (2.2.7) se numește *ecuația dreptei Δ prin tăieturi*.

Exemplul 2.1. Fie Δ dreapta dată prin ecuația sa generală

$$\Delta: 2x + 3y - 5 = 0.$$

împărțim ecuația prin 5, astfel încât termenul liber să fie egal cu -1 . Obținem

$$\frac{2}{5}x + \frac{3}{5}y - 1 = 0,$$

ecuație care se poate rescrie sub forma

$$\frac{x}{\frac{5}{2}} + \frac{y}{\frac{5}{3}} - 1 = 0,$$

care este ecuația prin tăieturi a dreptei Δ , tăieturile fiind

$$a = \frac{5}{2} \quad \text{și} \quad b = \frac{5}{3}.$$

2.3 Ecuația vectorială și ecuațiile parametrice ale dreptei. Dreapta care trece prin două puncte

Orice punct M al planului este unic identificat prin vectorul său de poziție \overrightarrow{OM} , relativ la originea coordonatelor. Fie Δ o dreaptă din plan, $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$ vectorul de poziție al unui punct de pe dreaptă și \mathbf{a} vectorul director al dreptei. Notăm cu \mathbf{r} vectorul de poziție al unui punct M oarecare din plan. Dacă M aparține dreptei, atunci

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \overrightarrow{M_0M},$$

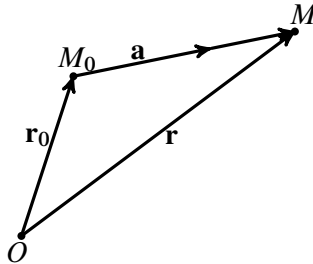
deci $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ este un vector director al drepte, așadar este coliniar cu vectorul \mathbf{a} . De aici rezultă că există un număr real t astfel încât să avem

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{a}. \quad (2.3.1)$$

Invers, dacă t este un număr real oarecare, este clar că punctul M din plan, al cărui vector de poziție \mathbf{r} verifică ecuația (2.3.1) este un punct de pe dreaptă. Ecuația (2.3.1) sau ecuația echivalentă cu ea

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}, \quad (2.3.2)$$

se numește *ecuația vectorială a drepte*. Să presupunem acum că vectorii sunt dați



prin componentele lor, $\mathbf{a}(l, m)$, $\mathbf{r}_0(x_0, y_0)$ și $\mathbf{r}(x, y)$. Atunci ecuația vectorială (2.3.2) este echivalentă cu sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}. \quad (2.3.3)$$

Ecuațiile (2.3.3) se numesc *ecuațiile parametrice ale drepte* Δ .

Dacă dreapta Δ nu este paralelă cu nici una dintre axele de coordonate, atunci avem, în mod evident, $l \neq 0$ și $m \neq 0$ și atunci sistemul (2.3.3) este echivalent cu ecuația

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}, \quad (2.3.4)$$

care se numește *ecuația canonică a drepte în plan*.

Remarcăm că, în general, în geometria analitică, se utilizează o anumită convenție, care ne permite să scriem ecuația canonică și pentru cazul în care dreapta este paralelă cu una dintre axele de coordonate. Convenția este următoarea: *de fiecare dată când unul dintre numitorii din ecuația canonică a drepte se anulează, se consideră*

că numărătorul acelei fracții este identic nul. Să presupunem, prin urmare, că avem o ecuație de forma:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0}.$$

Atunci, conform convenției, această ecuație este, de fapt, echivalentă cu ecuația $y = 2$, adică reprezintă ecuația unei drepte paralele cu axa Ox .

Fie acum două puncte $M_0(x_0, y_0)$ și $M_1(x_1, y_1)$ de pe dreapta Δ . Atunci $\overrightarrow{M_0M_1}(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ este un vector director al drepte și, prin urmare,

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \quad (2.3.5)$$

este ecuația drepte care trece prin punctele M_0 și M_1 . Precizăm că, în conformitate cu convenția făcută, punctele M_0 și M_1 pot să se afle și pe o dreaptă paralelă cu una dintre axele de coordonate (ceea ce are ca efect faptul că una dintre coordonatele celor două puncte va fi aceeași pentru ambele).

Exemple. 1. Considerăm punctul $M_0(1, 2)$ și vectorul $\mathbf{a}(1, 4)$. Atunci ecuația vectorială a drepte care trece prin punctul M_0 și are direcția dată de vectorul \mathbf{a} este

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{M_0} + t\mathbf{a}$$

sau

$$(x, y) = (1, 2) + t(1, 4).$$

Dacă proiectăm această ecuație pe componente, obținem ecuațiile parametrice ale drepte, adică

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 + 4t. \end{cases}$$

Eliminând parametrul t între cele două ecuații parametrice, obținem ecuația canonică a drepte,

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{4}.$$

De aici, dacă dorim, putem deduce ecuația generală,

$$4x - y - 2 = 0$$

sau, întrucât panta drepte este, în mod evident, nenulă, ecuația explicită

$$y = 4x - 2.$$

2. Vrem să determinăm ecuația canonică a dreptei care trece prin punctele $M_1(2, 3)$ și $M_2(5, 7)$. Obținem imediat vectorul director al dreptei, $\overrightarrow{M_1M_2}(3, 4)$. Privind dreapta ca fiind dreapta care trece prin punctul M_1 și are vectorul director $\overrightarrow{M_1M_2}$, obținem ecuația

$$\frac{x - 2}{3} = \frac{y - 3}{4}.$$

Este de remarcat că aceeași dreaptă poate fi privită ca fiind dreapta care trece prin M_2 și are vectorul director $\overrightarrow{M_1M_2}$. Ecuația canonică va fi atunci

$$\frac{x - 5}{3} = \frac{y - 7}{4},$$

dar ne putem convinge cu ușurință că cele două ecuații canonice ne conduc la aceeași ecuație generală,

$$4x - 3y + 1 = 0.$$

2.4 Poziția reciprocă a două drepte în plan

Considerăm două drepte Δ_1 și Δ_2 , date prin ecuațiile lor generale

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases} \quad (2.4.1)$$

A studia poziția reciprocă a acestor două drepte înseamnă să stabilim numărul punctelor comune ale celor două drepte. Este evident că ne putem afla, în exclusivitate, în una dintre următoarele trei situații:

- (i) dreptele se intersectează într-un punct;
- (ii) dreptele coincid (ceea ce înseamnă că au o infinitate de puncte comune);
- (iii) dreptele sunt paralele (deci nu au nici un punct comun).

Este clar că a studia poziția reciprocă a dreptelor Δ_1 și Δ_2 revine la investigarea sistemului de ecuații liniare (2.4.1), alcătuit din ecuațiile generale ale dreptelor. Astfel, cele trei cazuri de mai sus corespund (în aceeași ordine), următoarelor cazuri posibile în analiza sistemului de ecuații:

- (i) Sistemul de ecuații are soluție unică. După cum se știe din algebra liniară, această condiție este echivalentă cu condiția ca sistemul să fie un sistem Cramer, adică

$$\det \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad (2.4.2)$$

- (ii) Sistemul de ecuații este compatibil, dar nedeterminat. Asta înseamnă că

$$\det \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0, \quad (2.4.3)$$

dar rangul matricii sistemului coincide cu rangul matricii extinse sau, ceea ce, în cazul nostru, când sunt doar două ecuații, este echivalent cu

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}, \quad (2.4.4)$$

adică cele două ecuații (2.4.1) descriu aceeași dreaptă.

- (iii) Sistemul de ecuații este incompatibil, ceea ce înseamnă că este verificată, din nou, ecuația (2.4.3) dar, de data aceasta,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}, \quad (2.4.5)$$

altfel spus, rangul matricii sistemului este egal cu 1, în timp ce rangul matricii extinse este egal cu 2. Egalitatea din (2.4.5) înseamnă că cele două drepte au vectori directori coliniari, în timp ce neegalitatea înseamnă că cele două drepte nu coincid, prin urmare ele sunt paralele.

Exemplul 2.2. 1. Pentru dreptele

$$\Delta_1: 2x + 3y + 7 = 0$$

și

$$\Delta_2: 3x - 5y + 3 = 0$$

avem

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -24 \neq 0,$$

adică dreptele sunt concurente.

2. Pentru dreptele

$$\Delta_1: 2x + 3y + 7 = 0$$

și

$$\Delta_2: 4x + 6y + 14 = 0$$

avem

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

iar

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{7}{14},$$

adică dreptele coincid.

3. Pentru dreptele

$$\Delta_1: 2x + 3y + 7 = 0$$

și

$$\Delta_2: 4x + 6y + 10 = 0$$

avem

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

iar

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} \neq \frac{7}{10},$$

adică sunt paralele, dar nu coincid.

Observație. Dacă

$$\Delta_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

și

$$\Delta_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

sunt paralele (eventual, chiar egale), atunci ecuațiile lor pot fi modificate în așa fel încât să difere doar prin termenul liber.

Într-adevăr, dreptele fiind paralele, vectorii lor normali sunt coliniari, ceea ce înseamnă că există un număr real nenul λ astfel încât să avem $(A_2, B_2) = \lambda(A_1, B_1)$. Astfel, ecuația celei de-a doua drepte se poate scrie

$$\Delta_2: \lambda A_1x + \lambda B_1y + C_2 = 0$$

sau, după împărțirea cu λ ,

$$\Delta_2: A_1x + B_1y + \frac{C_2}{\lambda} = 0.$$

2.5 Fascicule de drepte

Definiția 2.2. Se numește *fascicol de drepte* mulțimea tuturor dreptelor dintr-un plan care trec printr-un punct S al planului, care se numește *centrul fascicolului*.

Pentru a specifica un fascicol de drepte în plan este suficient să specificăm centrul fascicolului și două dintre dreptele sale.

Fie, prin urmare, în plan, două drepte distincte care trec prin punctul $S(x_0, y_0)$, date prin ecuațiile lor generale,

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad (2.5.1)$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0. \quad (2.5.2)$$

Considerăm acum ecuația

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \quad (2.5.3)$$

unde α și β sunt numere reale oarecare, care nu se anulează simultan. Vom demonstra că această ecuație determină o dreaptă care trece prin punctul S . Rescriem ecuația sub forma

$$(\alpha A_1 + \beta A_2)x + (\alpha B_1 + \beta B_2)y + \alpha C_1 + \beta C_2 = 0. \quad (2.5.4)$$

Aici coeficienții necunoscutelor nu se pot anula simultan. Într-adevăr, să presupunem că

$$\alpha A_1 + \beta A_2 = 0, \quad \alpha B_1 + \beta B_2 = 0 \quad (2.5.5)$$

și, de exemplu, $\alpha \neq 0$. Atunci și $A_2 \neq 0$, pentru că dacă A_2 ar fi zero ar trebui să avem și $A_1 = 0$, ceea ce ar contrazice ipoteza că dreptele (2.5.1) și (2.5.2) se intersectează într-un punct. Analog se demonstrează că $B_2 \neq 0$, iar egalitățile (2.5.5) se pot scrie sub forma

$$A_1/A_2 = -\beta/\alpha, \quad B_1/B_2 = -\beta/\alpha \quad \Leftrightarrow \quad A_1/A_2 = B_1/B_2,$$

ceea ce nu este posibil, deoarece dreptele (2.5.1) și (2.5.2) nu sunt paralele, ci se intersectează într-un punct. Astfel, coeficienții necunoscutelor din ecuația (2.5.4) nu se pot anula simultan, de aceea, pentru orice α și β ce nu se anulează simultan, această ecuație reprezintă o dreaptă. Este evident că dreapta (2.5.3) trece, într-adevăr, prin punctul $S(x_0, y_0)$.

Vom arăta acum, invers, că orice dreaptă din fascicol are o ecuație de forma (2.5.3), cu alte cuvinte, vom demonstra că oricum am alege o dreaptă din fascicolul de drepte

din plan care trec prin punctul $S(x_0, y_0)$, putem alege două constante α și β , cel puțin una nenulă, astfel încât ecuația (2.5.3) să fie ecuația dreptei alese. Fie $M_1(X_1, y_1)$ un punct oarecare din plan, astfel încât $M_1 \neq S$. Este suficient să demonstrăm că putem alege constantele α, β astfel încât dreapta (2.5.3) să coincidă cu dreapta SM_1 . Această afirmație se reduce la cerința ca x_1 și y_1 , coordonatele lui M_1 , să verifice egalitatea

$$\alpha(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1) + \beta(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2) = 0. \quad (2.5.6)$$

Cum punctul M_1 nu coincide cu centrul fascicolului, cel puțin una dintre cantitățile din paranteze este diferită de zero. Dacă

$$A_1x_1 + B_1y_1 + C_1 \neq 0,$$

atunci egalitatea (2.5.6) se poate rescrie sub forma:

$$\alpha = -\frac{A_2x_1 + B_2y_1 + C_2}{A_1x_1 + B_1y_1 + C_1}\beta.$$

Dacă îi dăm lui β o valoare nenulă arbitrară, obținem valoarea corespunzătoare a lui α .

Prin urmare, pentru orice α și β care nu se anulează simultan, ecuația (2.5.3) reprezintă ecuația unei drepte din fascicolul determinat de dreptele (2.5.1) și (2.5.2) și, invers, orice dreaptă a fascicolului se poate scrie sub forma (2.5.3). Ecuația (2.5.3) se numește *ecuația fascicolului de drepte* determinat de dreptele (2.5.1) și (2.5.2). Remarcăm că ecuația dreptei (2.5.1) se obține din ecuația (2.5.3) pentru $\beta = 0$ și un $\alpha \neq 0$ arbitrar, în timp ce ecuația dreptei (2.5.2) se obține din ecuația (2.5.3) pentru $\alpha = 0$ și un $\beta \neq 0$ arbitrar.

Împărțind ambii membri ai ecuației (2.5.3) la α și notând $\beta/\alpha = \lambda$, ecuația obținută se scrie

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0. \quad (2.5.7)$$

Pentru orice λ , această ecuație corespunde unei drepte din fascicolul de drepte determinat de dreptele (2.5.1) și (2.5.2). Invers, orice dreaptă a acestui fascicol, cu excepția dreptei (2.5.2) se poate scrie sub forma (2.5.7) pentru un anumit λ .

Dacă se cunosc coordonatele centrului $S(x_0, y_0)$ al fascicolului, atunci ecuația fascicolului se poate scrie sub forma foarte simplă

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) = 0. \quad (2.5.8)$$

Exemple. Vom da mai multe exemple de probleme care se pot rezolva convenabil utilizând noțiunea de fascicol de drepte.

(a) Se consideră un triunghi ABC , ale cărui laturi au ecuațiile

$$AB: 2x - 3y + 1 = 0,$$

$$BC: 3x + y - 5 = 0,$$

$$CA: x + y - 2 = 0.$$

Ne propunem să scriem ecuația înălțimii din A , fără a determina coordonatele punctului A .

Scriem, mai întâi, ecuația unei drepte oarecare care trece prin vârful A , cu alte cuvinte care aparține fascicolului de drepte determinat de dreptele concurente AB și CA . Fie AA' această dreaptă. Ecuația ei va fi, prin urmare, de forma

$$\lambda(2x - 3y + 1) + \mu(x + y - 2) = 0$$

sau

$$AA': (2\lambda + \mu)x + (-3\lambda + \mu)y + \lambda - 2\mu = 0.$$

Un vector normal la această dreaptă este vectorul $\mathbf{n}(2\lambda + \mu, -3\lambda + \mu)$. Această dreaptă trebuie să fie perpendiculară pe latura BC , care are ca vector normal vectorul $\mathbf{n}_a(3, 1)$. Pentru ca dreptele să fie perpendiculare este necesar și suficient ca vectorii lor normali să fie perpendiculari, adică trebuie să avem

$$0 = \mathbf{n}_a \cdot \mathbf{n} = 3(2\lambda + \mu) - 3\lambda + \mu = 3\lambda + 4\mu.$$

Astfel, trebuie să avem

$$\mu = -\frac{3}{4}\lambda.$$

Dacă alegem $\lambda = 4$, obținem $\mu = -3$, deci ecuația înălțimii AA' devine

$$AA': 5x - 15y + 10 = 0$$

sau

$$AA': x - 3y + 2 = 0.$$

(b) Fie A punctul de intersecție a dreptelor

$$\Delta_1: x + 2y - 3 = 0$$

și

$$\Delta_2: 2x - 3y + 1 = 0.$$

Prin A să se ducă o dreaptă paralelă cu dreapta

$$\Delta_3: 4x + 3y - 5 = 0.$$

Fie Δ dreapta căutată. Ea trebuie să facă parte din fascicolul de drepte determinat de dreptele Δ_1 și Δ_2 , ceea ce înseamnă că ecuația sa trebuie să fie de forma

$$\Delta: \alpha(x + 2y - 3) + \beta(2x - 3y + 1) = 0$$

sau

$$\Delta: (\alpha + 2\beta)x + (2\alpha - 3\beta)y - 3\alpha + \beta = 0.$$

Pentru ca dreapta Δ să fie paralelă cu dreapta Δ_3 , vectorul său normal $\mathbf{n}(\alpha + 2\beta, 2\alpha - 3\beta)$, trebuie să fie coliniar cu vectorul normal al dreptei Δ_3 , adică $\mathbf{n}(4, 3)$. Astfel, trebuie să avem

$$\frac{\alpha + 2\beta}{4} = \frac{2\alpha - 3\beta}{3}.$$

Obținem imediat că $\beta = \frac{5}{18}\alpha$. Dacă punem $\alpha = 18$, obținem $\beta = 5$. Astfel, ecuația dreptei Δ devine

$$\Delta: 28x + 21y - 49 = 0$$

sau

$$\Delta: 4x + 3y - 7 = 0.$$

(c) Fie A punctul de intersecție a dreptelor

$$\Delta_1: x + y - 11 = 0$$

și

$$\Delta_2: x - 5y + 2 = 0.$$

Să se scrie ecuația dreptei AM , unde M este punctul de coordonate $(10, 5)$.

Ca și mai sus, scriem ecuația dreptei AM ca dreaptă aparținând fascicolului de drepte determinat de dreptele Δ_1 și Δ_2 :

$$AM: \alpha(x + y - 11) + \beta(x - 5y + 2) = 0$$

sau

$$AM: (\alpha + \beta)x + (\alpha - 5\beta)y - 11\alpha + 2\beta = 0.$$

Coordonatele punctului M trebuie să verifice ecuația de mai sus și din această condiție obținem că

$$\beta = \frac{4}{13}\alpha.$$

Dacă punem $\alpha = 13$, obținem $\beta = 4$. Înlocuind în ecuație, obținem

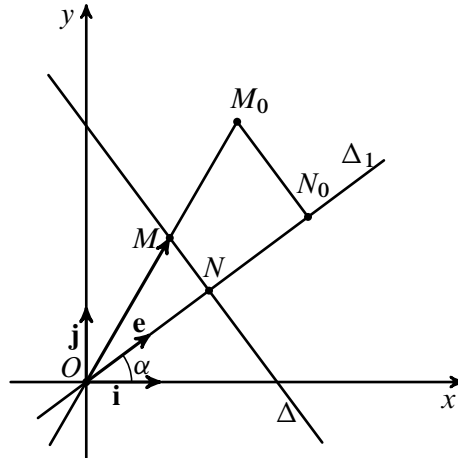
$$AM: 17x - 7y - 135 = 0.$$

2.6 Distanța de la un punct la o dreaptă

Fie Δ o dreaptă oarecare din plan.

Definiția 2.3. Se numește *distanță* de la un punct M_0 din plan până la dreapta Δ lungimea perpendicularei coborâte din punctul M_0 pe dreapta Δ .

Considerăm acum un versor \mathbf{e} perpendicular pe dreapta Δ . Dacă Δ trece prin originea coordonatelor, atunci în calitate de \mathbf{e} putem lua oricare dintre cei doi versori (opuși) care sunt perpendiculari pe dreaptă. Dacă dreapta nu trece prin origine, atunci alegem acel versor \mathbf{e} , perpendicular pe dreapta Δ , care este orientat dinspre originea coordonatelor către dreaptă. Notăm cu α unghiul dintre vectorii \mathbf{i} și \mathbf{e} . Atunci



$$\mathbf{e} = \mathbf{e}(\cos \alpha, \sin \alpha).$$

Fie Δ_1 dreapta care trece prin origine și care este perpendiculară pe dreapta Δ . Notăm cu N intersecția celor două drepte. Notăm, de asemenea, cu p distanța de la origine până la dreapta Δ , adică lungimea segmentului ON . Desigur, dacă dreapta Δ trece prin origine, atunci $N = O$ și $p = 0$.

Un punct $M(x, y)$ din plan aparține dreptei Δ dacă și numai dacă proiecția sa ortogonală pe dreapta Δ_1 coincide cu N . Această condiție este echivalentă cu condiția:

$$\overrightarrow{OM} \cdot \mathbf{e} = p.$$

Exprimând produsul scalar utilizând componentele vectorilor, obținem, prin urmare

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0. \quad (2.6.1)$$

Această ecuație se numește *ecuația normală* sau *ecuația normală Hesse* a dreptei.

Dreapta Δ împarte mulțimea tuturor punctelor din plan care nu îi aparțin în două submulțimi, numite *semiplane* (*deschise*). Semiplanul care conține versorul \mathbf{e} , atunci când acesta este atașat punctului N , se numește *pozitiv*, iar celălalt semiplan se numește *negativ*. Remarcăm că originea coordonatelor se găsește totdeauna fie în semiplanul negativ, fie pe dreapta Δ .

Definiția 2.4. Fie d distanța de la punctul M_0 până la dreapta Δ . Se numește *abatere* a punctului M_0 de la dreapta Δ numărul δ definit prin următoarele condiții:

- 1) $\delta = d$ dacă punctul M_0 se află în semiplanul pozitiv;
- 2) $\delta = -d$ dacă M_0 se află în semiplanul negativ;
- 3) $\delta = d = 0$ dacă M_0 se află pe dreapta Δ .

Teorema 2.2. Să presupunem că în plan se dă o dreaptă Δ , prin ecuația ei normală (2.6.1). Atunci abaterea δ a unui punct oarecare $M_0(x_0, y_0)$ față de dreapta Δ și distanța d de la punct până la dreaptă sunt date de formulele:

$$\delta = x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p, \quad (2.6.2)$$

$$d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p|. \quad (2.6.3)$$

Demonstrație Fie N_0 piciorul perpendicularei coborâte din M_0 pe dreapta Δ_1 . Din formula lui Chasles obținem că

$$\delta = (NN_0) = (ON_0) - (ON) = \overrightarrow{OM} \cdot \mathbf{e} - p = x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p.$$

Formula (2.6.3) rezultă din formula (2.6.2), întrucât $d = |\delta|$. □

Formula (2.6.2) conduce la următoarea regulă: *pentru a obține abaterea unui punct oarecare M_0 față de o dreaptă, este suficient să înlocuim coordonatele punctului în membrul stâng al ecuației normale a dreptei. Numărul obținut pe această cale este abaterea căutată.*

Să presupunem acum că dreapta este dată prin ecuația sa generală,

$$Ax + By + C = 0, \quad (2.6.4)$$

și vrem să găsim ecuația sa normală (2.6.1). Cum ecuațiile (2.6.1) și (2.6.4) reprezintă aceeași dreaptă, coeficienții lor trebuie să fie proporționali, prin urmare:

$$\cos \alpha = \lambda A, \quad \sin \alpha = \lambda B, \quad -p = \lambda C. \quad (2.6.5)$$

Din primele două relații din (2.6.5) obținem

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Potrivit celei de-a treia egalități din (2.6.5), rezultă că semnul lui λ trebuie să fie opus semnului termenului liber C din ecuația (2.6.4), dacă $C \neq 0$. Dacă $C = 0$, atunci λ poate să aibă orice semn. O schimbare de semn la λ aduce după sine schimbarea între ele a semiplanului pozitiv și a celui negativ. Numărul λ se numește *factor normalizator* pentru ecuația (2.6.4), pentru că, după înmulțirea cu el, ecuația devine normală.

Pe baza celor remarcate, formulele pentru abaterea și distanța de la un punct $M_0(x_0, y_0)$ până la dreapta (2.6.4) se pot scrie

$$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}, \quad d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (2.6.6)$$

Să presupunem că se dă ecuația (2.6.4). Notăm

$$\delta' = \delta'(x_0, y_0) = Ax_0 + By_0 + C.$$

Teorema 2.3. *Pentru toate punctele din același semiplan determinat de dreapta (2.6.4), δ' are același semn, iar pentru punctele din semiplanul opus are semn contrar.*

Demonstrație Afirmația acestei teoreme pentru ecuația normală

$$\frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}(Ax + By + C)$$

sau, cu alte cuvinte, pentru mărimea

$$\delta(x_0, y_0) = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} \delta'(x_0, y_0)$$

rezultă din teorema 2.2. Cum mărimile $\delta(x_0, y_0)$ și $\delta'(x_0, y_0)$ diferă doar printr-un factor constant strict pozitiv, care nu depinde de punctul $M_0(x_0, y_0)$, rezultă că afirmația rămâne adevărată și pentru mărimea $\delta'(x_0, y_0)$. \square

Teorema 2.3 permite stabilirea semnificației geometrice a inegalităților

$$Ax + By + C > 0, \quad (2.6.7)$$

$$Ax + By + C < 0, \quad (2.6.8)$$

care leagă variabilele x și y . Dacă x și y sunt coordonatele carteziane ale unui punct din plan, atunci inegalitatea (2.6.7) este verificată doar de coordonatele punctele planului situate într-unul dintre semiplanele deschise determinate de dreapta

$$Ax + By + C = 0.$$

Inegalitatea (2.6.8) este verificată de coordonatele punctelor situate în cel de-al doilea semiplan deschis și numai de ele. În mod corespunzător, inegalitățile

$$Ax + By + C \geq 0,$$

$$Ax + By + C \leq 0,$$

descriu câte un semiplan împreună cu semidreapta care îl mărginește (sau, cum se mai spune, câte un semiplan *închis*).

Observație. Dacă avem două drepte,

$$\Delta_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

și

$$\Delta_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

atunci cele două drepte împart planul în patru regiuni unghiulare (patru “unghiuri”), descrise de inegalitățile

$$1^\circ \quad \delta'_{\Delta_1} \geq 0 \text{ și } \delta'_{\Delta_2} \geq 0;$$

$$2^\circ \quad \delta'_{\Delta_1} \leq 0 \text{ și } \delta'_{\Delta_2} \geq 0;$$

$$3^\circ \delta'_{\Delta_1} \leq 0 \text{ și } \delta'_{\Delta_2} \leq 0;$$

$$4^\circ \delta'_{\Delta_1} \geq 0 \text{ și } \delta'_{\Delta_2} \leq 0.$$

Dacă inegalitățile sunt stricte, atunci obținem interioarele acestor regiuni (unghiurile deschise).

2.7 Distanța dintre două drepte paralele

Considerăm două drepte paralele, date prin ecuațiile lor generale

$$\Delta_1 : Ax + By + C_1 = 0 \quad (2.7.1)$$

și

$$\Delta_2 : Ax + By + C_2 = 0. \quad (2.7.2)$$

Am folosit faptul că, dreptele fiind paralele, putem presupune că ele au același vector normal, deci ecuațiile lor diferă doar prin termenul liber.

Atunci *distanța dintre dreptele* Δ_1 *și* Δ_2 *este, prin definiție, distanța de la un punct al dreptei* Δ_1 *la dreapta* Δ_2 . Dreptele fiind paralele, distanța nu depinde de alegerea punctului.

Fie, prin urmare $M(x_M, y_M) \in \Delta_1$. Atunci coordonatele lui M verifică ecuația dreptei, deci trebuie să avem

$$Ax_M + By_M + C_1 = 0,$$

de unde deducem că $Ax_M + By_M = -C_1$. Atunci

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = d(M, \Delta_2) = \frac{|Ax_M + By_M + C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-C_1 + C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Astfel, *distanța dintre dreptele paralele* (2.7.1) *și* (2.7.2) *este dată de*

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (2.7.3)$$

Să presupunem, acum, că prima dreaptă este dată prin ecuația ei normală

$$\Delta_1 : x \cos \alpha + y \sin \alpha - p_1 = 0. \quad (2.7.4)$$

Atunci o dreaptă paralelă cu ea va avea ecuația e forma

$$\Delta_2 : x \cos \alpha + y \sin \alpha - p_2 = 0, \quad (2.7.5)$$

dacă e situată de aceeași parte a originii sau

$$\Delta_2 : -x \cos \alpha - y \sin \alpha - p_2 = 0 \quad (2.7.6)$$

dacă originea se află între cele două drepte.

Astfel, folosind formula (2.7.3) putem spune că *distanța dintre două drepte paralele, date prin ecuațiile lor normale, este dată de*

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = |p_1 - p_2|, \quad (2.7.7)$$

dacă dreptele sunt situate de aceeași parte a originii sau

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = p_1 + p_2, \quad (2.7.8)$$

dacă originea este între cele două drepte.

În sfârșit, să presupunem că cele două drepte sunt date prin ecuațiile lor explicite,

$$y = mx + n_1, \quad (2.7.9)$$

respectiv

$$y = mx + n_2. \quad (2.7.10)$$

Atunci, aducând aceste ecuații la forma generală, deducem imediat, folosind din nou formula (2.7.3), că *distanța dintre două drepte paralele, date prin ecuațiile lor explicite este*

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|n_1 - n_2|}{\sqrt{1 + m^2}}. \quad (2.7.11)$$

2.8 Unghiul dintre două drepte

Să presupunem că se dau, în plan, două drepte, Δ_1 și Δ_2 , prin intermediul ecuațiilor lor generale:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad (2.8.1)$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0. \quad (2.8.2)$$

După cum s-a văzut, în calitate de vectori directori ai acestor drepte pot fi luați vectorii $\mathbf{a}_1(-B_1, A_1)$ și $\mathbf{a}_2(-B_2, A_2)$. Prin urmare,

$$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \quad (2.8.3)$$

Aici cu φ se notează unul dintre cele două unghiuri formate de cele două drepte. Dacă dreptele sunt paralele, atunci, prin convenție, se consideră că dreptele fac între ele un unghi egal cu zero.

Din formula (2.8.3) rezultă, în particular, condiția necesară și suficientă pentru ca dreptele (2.8.1) și (2.8.2) să fie perpendiculare:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0. \quad (2.8.4)$$

Să presupunem acum că dreptele (neverticale) Δ_1 și Δ_2 sunt date nu prin ecuațiile generale ci cu ajutorul coeficienților unghiulari:

$$y = k_1 x + b_1, \quad (2.8.5)$$

$$y = k_2 x + b_2. \quad (2.8.6)$$

Notăm cu φ unghiul cu care trebuie rotită dreapta Δ_1 în jurul punctului de intersecție a dreptelor, pentru a se suprapune peste dreapta Δ_2 . Dacă dreptele sunt paralele, atunci vom considera că $\varphi = 0$. Fie α_1 și α_2 unghiurile pe care le fac cele două drepte cu axa Ox , adică avem $k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$, $\alpha_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$. Atunci $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ și avem:

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Astfel,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \quad (2.8.7)$$

Din formula (2.8.7) se poate obține cu ușurință condiția de perpendicularitate a dreptelor (2.8.5) și (2.8.6). Ea corespunde cazului în care $\operatorname{tg} \varphi$ nu există, adică, în formula (2.8.7), se anulează numitorul:

$$1 + k_1 k_2 = 0.$$

Astfel, condiția necesară și suficientă pentru ca dreptele (2.8.5) și (2.8.6) să fie perpendiculare este ca

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}. \quad (2.8.8)$$

2.9 Bisectoarele unghiurilor făcute de două drepte

2.9.1 Cazul când dreptele sunt date prin ecuația generală

Considerăm două drepte, date prin ecuațiile

$$L_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \quad (2.9.1)$$

respectiv

$$L_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0. \quad (2.9.2)$$

Presupunem că cele două drepte sunt concurente. Asta înseamnă, desigur, că sistemul format din ecuațiile lor este compatibil și determinat, adică

$$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0. \quad (2.9.3)$$

După cum se știe din geometria elementară, bisectoarele unghiurilor formate de două drepte în plan se definesc ca fiind *locul geometric al punctelor din plan care sunt egal depărtate de laturile unghiului*.

Ecuațiile celor două bisectoare rezultă imediat din a doua formulă din (2.6.6):

$$L_{\pm} : \frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \quad (2.9.4)$$

sau, dacă explicităm modulul,

$$L_{\pm} : \frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}. \quad (2.9.5)$$

Bisectoarea unghiului ascuțit

Dacă cele două drepte nu sunt perpendiculare, atunci unul dintre unghiurile pe care le formează este ascuțit, iar celălalt este obtuz. În multe aplicații este important să putem identifica bisectoarea acestui unghi, folosind coeficienții ecuațiilor celor două drepte.

Să presupunem că vrem ca L_+ să fie bisectoarea unghiului ascuțit. Asta înseamnă că ea este bisectoarea unghiului dintre L_1 și L_2 care este mai mic de $\pi/2$, deci unghiul ascuțit pe care îl face dreapta L_1 , să zicem, cu L_+ trebuie să fie mai mic de $\pi/4$. Fie θ acest din urmă unghi. El este unghiul ascuțit dintre dreptele normale la cele două drepte. Vectorul normal la prima dreaptă este

$$\mathbf{n}_1 = (a_1, b_1).$$

Pentru a determina vectorul normal la L_+ , rescriem ecuația acestei drepte sub forma

$$\begin{aligned} L_+ : & \left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} - \frac{a_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \right) x + \left(\frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} - \frac{b_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \right) y + \\ & + \frac{c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} - \frac{c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = 0, \end{aligned}$$

prin urmare vectorul normal la L_+ este

$$\mathbf{n}_+ = \left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} - \frac{a_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}, \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} - \frac{b_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \right).$$

Cosinusul unghiului ascuțit format de cele două normale (deci al unghiului ascuțit format de L_1 și L_+) este dat de

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_+|}{\|\mathbf{n}_1\| \cdot \|\mathbf{n}_+\|} = \\ &= \frac{\left| a_1 \left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} - \frac{a_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \right) + b_1 \left(\frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} - \frac{b_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \right) \right|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{\left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} - \frac{a_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \right)^2 + \left(\frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} - \frac{b_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \right)^2}} = \\ &= \frac{\left| 1 - \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \right|}{\sqrt{2 - 2 \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}} \end{aligned}$$

Astfel,

$$\cos \theta = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_+|}{\|\mathbf{n}_1\| \cdot \|\mathbf{n}_+\|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}}. \quad (2.9.6)$$

L_+ este bisectoarea unghiului ascuțit dacă θ este mai mic de $\pi/4$. Cum pe intervalul $[0, 2\pi]$ funcția cosinus este descrescătoare, din formula (2.9.6) tragem următoarele concluzii:

- Dacă $a_1 a_2 + b_1 b_2 > 0$, atunci L_+ este bisectoarea unghiului ascuțit (deci L_- este bisectoarea unghiului obtuz).
- Dacă $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$, atunci dreptele sunt perpendiculare, deci bisectoarele joacă același rol.
- Dacă $a_1 a_2 + b_1 b_2 < 0$, atunci L_+ este bisectoarea unghiului obtuz (deci L_- este bisectoarea unghiului ascuțit).

2.9.2 Cazul când dreptele sunt date prin ecuația normală

Să presupunem, din nou, că se dau două drepte neparalele, date prin ecuațiile lor normale:

$$L_1 : x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1 = 0, \quad (2.9.7)$$

$$L_2 : x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2 = 0. \quad (2.9.8)$$

Presupunem că $\alpha_1 \neq \alpha_2$, ca să ne asigurăm că dreptele nu sunt paralele.

Aplicăm, din nou, definiția bisectoarei ca loc geometric al punctelor egal depărtate de cele două drepte date, definiție care ne conduce la

$$L_{\pm} : |x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1| = |x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2| \quad (2.9.9)$$

sau

$$L_{\pm} : x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1 = \pm(x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2). \quad (2.9.10)$$

Astfel, ecuațiile celor două bisectoare sunt:

$$L_+ : x(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) + y(\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) - p_1 + p_2 = 0, \quad (2.9.11)$$

respectiv

$$L_- : x(\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) + y(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) - p_1 - p_2 = 0. \quad (2.9.12)$$

Bisectoarea unghiului ascuțit

Pentru a determina care dinbtre cele două bisectoare este bisectoarea unghiului ascuțit format de cele două drepte și care este bisectoarea unghiului obtuz, procedăm ca mai sus și calculăm, mai întâi, cosinusul unghiului ascuțit format de L_1 și bisectoarea L_+ .

Vectorul normal la dreapta L_1 este $\mathbf{n}_1(\cos \alpha_1, \sin \alpha_1)$, în timp ce vectorul normal la dreapta L_+ este

$$\mathbf{n}_+(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2, \sin \alpha_1 - \sin \alpha_2).$$

Avem, de aceea,

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_+|}{\|\mathbf{n}_1\| \cdot \|\mathbf{n}_+\|} = \\ &= \frac{|\cos \alpha_1 \cdot (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) + \sin \alpha_1 \cdot (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2)|}{1 \cdot \sqrt{(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)^2 + (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2)^2}} = \\ &= \frac{1 - \cos(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sqrt{2(1 - \cos(\alpha_1 - \alpha_2))}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \cos(\alpha_1 - \alpha_2)}. \end{aligned}$$

Repetând raționamentul din cazul ecuațiilor generale, tragem următoarele concluzii:

- Dacă avem $\cos(\alpha_1 - \alpha_2) > 0$ (adică unghiul $\alpha_1 - \alpha_2$ este ascuțit), atunci L_+ este bisectoarea unghiului ascuțit, deci L_- este bisectoarea unghiului obtuz.
- Dacă avem $\cos(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$, cele două drepte sunt perpendiculare și cele două bisectoare joacă același rol.
- Dacă avem $\cos(\alpha_1 - \alpha_2) < 0$ (adică unghiul $\alpha_1 - \alpha_2$ este obtuz), atunci L_+ este bisectoarea unghiului obtuz, deci L_- este bisectoarea unghiului ascuțit.

2.9.3 Cazul dreptelor date prin ecuații explicite

Considerăm dreptele

$$L_1 : y = m_1x + n_1 \quad (2.9.13)$$

și

$$L_2 : y = m_2x + n_2 \quad (2.9.14)$$

unde presupunem că $m_1 \neq m_2$, adică dreptele nu sunt paralele.

Vom reduce acest caz la cazul dreptelor date prin ecuațiile generale. În acest scop, rescriem ecuațiile dreptelor sub forma

$$L_1 : m_1x - y + n_1 = 0 \quad (2.9.15)$$

și

$$L_2 : m_2x - y + n_2 = 0 \quad (2.9.16)$$

și aplicăm discuția din cazul general, în care, de data aceasta, $a_1 = m_1, b_1 = -1, c_1 = n_1$, respectiv $a_2 = m_2, b_2 = -1, c_2 = n_2$. Atunci ecuațiile bisectoarelor vor fi

$$L_+ : \frac{m_1x - y + n_1}{m_1^2 + 1} = \frac{m_2x - y + n_2}{m_2^2 + 1}, \quad (2.9.17)$$

respectiv

$$L_- : \frac{m_1x - y + n_1}{m_1^2 + 1} = -\frac{m_2x - y + n_2}{m_2^2 + 1}, \quad (2.9.18)$$

iar

$$a_1a_2 + b_1b_2 = m_1m_2 + 1. \quad (2.9.19)$$

Atunci, adaptând concluziile din cazul ecuațiilor generale, putem afirma următoarele:

1. Dacă $m_1 m_2 + 1 > 0$, atunci L_+ este bisectoarea unghiului ascuțit, iar L_- este bisectoarea unghiului obtuz.
2. Dacă $m_1 m_2 + 1 = 0$, atunci cele două drepte sunt perpendiculare, iar bisectoarele joacă același rol.
3. Dacă $m_1 m_2 + 1 < 0$, atunci L_+ este bisectoarea unghiului obtuz, iar L_- este bisectoarea unghiului ascuțit.

2.10 Simetricul unui punct față de o dreaptă

Ne vom limita la discuția cazului în care dreapta este dată prin ecuația generală, celelalte cazuri se pot adapta cu ușurință.

Definiția 2.5. Fie

$$L : ax + by + c = 0 \quad (2.10.1)$$

o dreaptă și $M(x_0, y_0)$ un punct din plan. *Simetricul* său față de dreapta L este fie punctul M însuși dacă $M \in L$, fie un punct $M'(x'_0, y'_0)$ din plan, astfel încât dreapta L să fie mediatoarea segmentului MM' . Mijlocul M_1 al segmentului MM' este *proiecția ortogonală* a lui M pe L .

Definiția ne sugerează și algoritmul de determinare a simetricului:

1. Verificăm dacă $M \in L$. Dacă da, atunci $M' = M$.
2. Dacă $M \notin L$, atunci construim dreapta L' , care trece prin M și este perpendiculară pe L .
3. Determinăm punctul $M_1 = L \cap L'$.
4. Determinăm punctul M' astfel încât

$$M_1 = \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}M'. \quad (2.10.2)$$

Presupunem că $M \notin L$. Vectorul director al dreptei L' , care trece prin M și este perpendiculară pe L este vectorul normal la dreapta L , $\mathbf{n}(a, b)$, ceea ce înseamnă că ecuația acestei drepte este

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}. \quad (2.10.3)$$

Coordonatele punctului M_1 se obțin rezolvând sistemul format din ecuațiile (2.10.1) și (2.10.3). Găsim

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b^2}{a^2 + b^2}x_0 - \frac{ab}{a^2 + b^2}y_0 - \frac{ac}{a^2 + b^2}, \\ y_1 = -\frac{ab}{a^2 + b^2}x_0 + \frac{a^2}{a^2 + b^2}y_0 - \frac{bc}{a^2 + b^2}. \end{cases} \quad (2.10.4)$$

Relația (2.10.2) înseamnă, când este scrisă în coordonate, că avem

$$(x_1, y_1) = \frac{1}{2}(x_0, y_0) + \frac{1}{2}(x'_0, y'_0),$$

de unde deducem, imediat, relațiile

$$\begin{cases} x'_0 = 2x_1 - x_0, \\ y'_0 = 2y_1 - y_0. \end{cases} \quad (2.10.5)$$

Dacă înlocuim relațiile (2.10.4) în (2.10.5), obținem coordonatele simetricului:

$$\begin{cases} x'_0 = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}x_0 - \frac{2ab}{a^2 + b^2}y_0 - \frac{2ac}{a^2 + b^2}, \\ y'_0 = -\frac{2ab}{a^2 + b^2}x_0 + \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}y_0 - \frac{2bc}{a^2 + b^2}. \end{cases} \quad (2.10.6)$$

2.11 Probleme

Problema 2.1. Determinați ecuația dreptei care trece prin $(2, -3)$ și este paralelă cu dreapta care trece prin $(4, 1)$ și $(-2, 2)$.

Problema 2.2. Determinați ecuația dreptei care trece prin $(-2, 3)$ și este perpendiculară pe dreapta $2x - 3y + 6 = 0$.

Problema 2.3. Determinați ecuația mediatoarei segmentului care unește punctele $(7, 4)$ și $(-1, -2)$.

Problema 2.4. Stabiliți ecuația dreptei care trece prin $(2, -3)$ și face un unghi de 60° cu direcția pozitivă a axei Ox .

Problema 2.5. Stabiliți ecuațiile dreptelor care au panta $-3/4$ și formează cu axele de coordonate un triunghi de arie 24.

Problema 2.6. Determinați forma normală Hesse a dreptei $3x - 4y - 6 = 0$.

Problema 2.7. Stabiliți ecuația dreptelor care trec prin $(4, -2)$ și sunt la o distanță 2 față de origine.

Problema 2.8. Determinați ecuațiile bisectoarelor unghiurilor formate de dreptele

$$(L_1) 3x - 4y + 8 = 0$$

și

$$(L_2) 5x + 12y - 15 = 0.$$

Problema 2.9. Determinați ecuațiile dreptelor paralele cu dreapta $12x - 5y - 15 = 0$, situate la distanța 4 față de aceasta.

Problema 2.10. Determinați valoarea lui k astfel încât distanța de la punctul $(2, 3)$ la dreapta $8x + 15y + k = 0$ să fie egală cu 5.

Problema 2.11. Două mediane ale unui triunghi sunt situate pe dreptele $x + y = 2$ și $2x + 3y = 1$, iar punctul $A(1, 1)$ este un vârf al triunghiului. Scrieți ecuațiile laturilor acestui triunghi.

Problema 2.12. Punctele $K(1, -1)$, $L(3, 4)$ și $M(5, 0)$ sunt, respectiv, mijloacele laturilor AD , AB și CD ale patrulaterului $ABCD$, ale cărui diagonale se intersectează în $O(2, 2)$. Determinați coordonatele vârfurilor patrulaterului.

Problema 2.13. Stabiliți ecuațiile dreptelor care trec prin punctul $A(-1, 5)$ și sunt egal depărtate de punctele $B(3, 7)$ și $C(1, -1)$.

Problema 2.14. Stabiliți ecuațiile dreptelor egal depărtate de punctele $A(3, -1)$, $B(9, 1)$ și $C(-5, 5)$.

Problema 2.15. Punctele $K(1, -1)$, $L(3, 4)$ și $M(5, 0)$ sunt, respectiv, mijloacele laturilor AD , AB și CD ale patrulaterului $ABCD$, ale cărui diagonale se intersectează în $O(2, 2)$. Determinați coordonatele vârfurilor patrulaterului.

Problema 2.16. Stabiliți ecuațiile dreptelor care trec prin punctul $A(-1, 5)$ și sunt egal depărtate de punctele $B(3, 7)$ și $C(1, -1)$.

Problema 2.17. Stabiliți ecuațiile dreptelor egal depărtate de punctele $A(3, -1)$, $B(9, 1)$ și $C(-5, 5)$.

Problema 2.18. Punctul $A(3, -2)$ este un vârf al unui pătrat, iar $M(1, 1)$ este punctul de intersecție a diagonalelor sale. Stabiliți ecuațiile laturilor pătratului.

Problema 2.19. Lungimea laturii unui romb cu unghiul ascuțit de 60° este egală cu 2. Diagonalele rombului se intersectează în punctul $M(1, 2)$, iar diagonala cea mai lungă este paralelă cu axa Ox . Stabiliți ecuațiile laturilor rombului.

Problema 2.20. Determinați un punct de pe dreapta $5x - 4y - 4 = 0$ egal depărtat de punctele $A(1, 0)$ și $B(-2, 1)$.

Problema 2.21. Determinați coordonatele unui punct A de pe dreapta $x + y = 8$, care este egal depărtat de punctul $B(2, 8)$ și de dreapta $x - 3y + 2 = 0$.

Problema 2.22. Determinați coordonatele tuturor punctelor egal depărtate de punctul $A(-1, 1)$ și de dreptele $y = -x$ și $y = x + 1$.

Problema 2.23. În triunghiul ABC punctele $M_1(2, 3)$, $M_2(0, 7)$ și $M_3(-2, 5)$ sunt mijloacele laturilor BC , CA și AB . Stabiliți ecuația dreptei AB . Găsiți unghiul dintre medianele AM_1 și BM_2 .

Problema 2.24. În paralelogramul $ABCD$ vârfurile A și C au coordonatele $(1, 2)$, respectiv $(7, 10)$, iar $H(3, 0)$ este piciorul perpendicularei coborâte din vârful B pe latura AD . Stabiliți ecuația dreptei AD . Găsiți unghiul dintre dreptele AD și AB .

Problema 2.25. În paralelogramul $ABCD$ punctele $K(-1, 2)$, $L(3, 4)$ și $M(5, 6)$ sunt mijloacele laturilor AB , BC , respectiv CD . Stabiliți ecuația dreptei BC . Găsiți unghiul dintre dreptele AL și AM .

Problema 2.26. În trapezul $ABCD$ cu bazele AD și BC latura CD este perpendiculară pe baze, punctele A și C au coordonatele $(5, 2)$, respectiv $(-2, 3)$, iar prelungirile laturilor neparalele se intersectează în punctul $P(-3, 6)$. Stabiliți ecuația dreptei AD . Găsiți unghiul dintre dreptele AD și AB .

Problema 2.27. Punctele $K(1, 3)$ și $L(-1, 1)$ sunt mijloacele bazelor unui trapez isoscel, iar punctele $P(3, 0)$ și $Q(-3, 5)$ se află pe laturile neparalele. Stabiliți ecuațiile laturilor trapezului.

Problema 2.28. Stabiliți ecuația dreptei care trece prin $A(3, 1)$ și face un unghi de 45° cu dreapta $3x - y - 2 = 0$.

Problema 2.29. Punctul $A(2, 0)$ este un vârf al unui triunghi echilateral, iar latura opusă se află pe dreapta $x + y - 1 = 0$. Stabiliți ecuațiile celorlalte două laturi ale triunghiului.

Problema 2.30. Baza unui triunghi isoscel se află pe dreapta $x + 2y = 2$, iar una dintre laturile egale se află pe dreapta $y + 2x = 1$. Stabiliți ecuația celei de-a treia laturi, știind că distanța de la punctul de intersecție a dreptelor date până la această latură este egală cu $1/\sqrt{5}$.

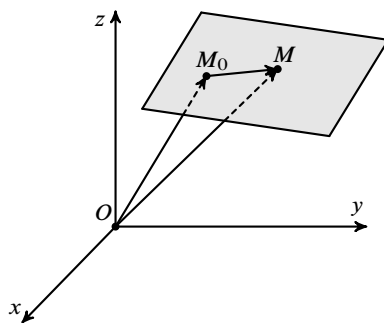
Problema 2.31. Se consideră acel unghi format de dreptele $y = x + 1$ și $y = 7x + 1$ în interiorul căruia se află punctul $A(1, 3)$. Determinați coordonatele punctului B , situat în interiorul aceluiași unghi, situat la distanța $4\sqrt{2}$ față de prima dreaptă și $\sqrt{2}$ față de cea de-a doua dreaptă.

Problema 2.32. Stabiliți ecuația bisectoarei acelui unghi format de dreptele $x - 7y = 1$ și $x + y = -7$, înăuntru căruia se află punctul $A(1, 1)$.

3.1 Planul

3.1.1 Ecuația vectorială a planului

Fie \mathbf{v} și \mathbf{w} doi vectori necoliniari din spațiu și M_0 un punct oarecare. Dacă atașăm vectorii punctului M_0 , atunci există două puncte, unic determinate, P și Q , astfel încât $\mathbf{v} = \overrightarrow{M_0P}$ și $\mathbf{w} = \overrightarrow{M_0Q}$. Cum vectorii \mathbf{v} și \mathbf{w} sunt necoliniari, punctele M_0 , P și Q , la rândul lor, sunt necoliniare, deci determină un plan Π . Intenționăm să descriem punctele acestui plan cu ajutorul punctului M_0 și al vectorilor \mathbf{v} și \mathbf{w} .



Fie M un punct din spațiu. Notăm cu \mathbf{r}_0 vectorul de poziție al punctului M_0 și

cu \mathbf{r} vectorul de poziție al punctului M . Punctul M , în mod clar, aparține planului dacă și numai dacă vectorul $\overrightarrow{M_0M}$ este coplanar cu vectorii $\overrightarrow{M_0P}$ și $\overrightarrow{M_0Q}$, adică cu vectorii \mathbf{v} și \mathbf{w} . Să presupunem că M aparține planului Π . Aceasta înseamnă, întrucât vectorii \mathbf{v} și \mathbf{w} sunt liniar independenți, că $\overrightarrow{M_0M}$ are o descompunere (unică) sub forma unei combinații liniare a vectorilor \mathbf{v} și \mathbf{w} , cu alte cuvinte, există (și sunt unice) două numere reale s și t astfel încât să avem

$$\overrightarrow{M_0M} = s\mathbf{v} + t\mathbf{w}. \quad (3.1.1)$$

Pe de altă parte, $\overrightarrow{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, deci ecuația precedentă se poate scrie

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{v} + t\mathbf{w}, \quad (3.1.2)$$

ecuație care se numește *ecuația vectorială a planului Π* .

Să presupunem acum că punctul M are coordonatele (x, y, z) , M_0 are coordonatele (x_0, y_0, z_0) , iar vectorii \mathbf{v} și \mathbf{w} au componentele (v_x, v_y, v_z) , respectiv (w_x, w_y, w_z) . Atunci ecuația vectorială (3.1.2) este echivalentă cu sistemul de ecuații scalare

$$\begin{cases} x = x_0 + sv_x + tw_x \\ y = y_0 + sv_y + tw_y \\ z = z_0 + sv_z + tw_z \end{cases}, \quad (3.1.3)$$

ecuații care se numesc *ecuațiile parametrice ale planului Π* .

Ecuația planului se poate reprezenta sub formă vectorială și fără a utiliza parametrii. Într-adevăr, avem următorul rezultat:

Teorema 3.1. *Ecuația vectorială a unui plan care trece printr-un punct M_0 și este perpendiculară pe un vector \mathbf{n} dat este*

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (3.1.4)$$

Demonstrație Fie Π planul determinat de punct și de vectorul normal. Dacă M este un punct oarecare al planului, atunci $\overrightarrow{M_0M} \perp \mathbf{n}$, de unde rezultă că

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (3.1.5)$$

sau

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0.$$

□

3.1.2 Ecuația generală a planului

Definiția 3.1. Se numește *ecuație liniară (generală) relativ la necunoscutele x, y, z* o ecuație de forma

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (3.1.6)$$

unde cel puțin unul dintre coeficienții A, B, C ai necunoscutelor este diferit de zero.

Teorema 3.2. Într-un sistem de coordonate carteziene rectangulare, un plan este definit de o ecuație liniară generală de forma (3.1.6).

Demonstrație Considerăm un plan care trece prin punctul M_0 și are vectorul normal $\mathbf{n}(A, B, C)$. Atunci, pentru orice punct $M(x, y, z)$ din plan, avem

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0$$

sau

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

sau, încă,

$$Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0,$$

care este o ecuație liniară generală în x, y, z .

Invers, fie $M(x, y, z)$ un punct din spațiu care verifică o ecuație de forma

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

cu $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Să presupunem, de exemplu, că în ecuația de mai sus $A \neq 0$. Atunci, în mod evident, punctul $M_0(-D/A, 0, 0)$ verifică, de asemenea, această ecuație. Notăm cu \mathbf{n} vectorul de componente (A, B, C) . Cum

$$\overrightarrow{M_0M} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (x + D/A, y, z),$$

ecuația planului care trece prin M_0 și are vectorul normal \mathbf{n} este

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0$$

sau

$$A(x + D/A) + By + Cz = 0 \text{ sau } Ax + By + Cz + D = 0,$$

prin urmare, punctul M este situat în planul care trece prin M_0 și are pe \mathbf{n} ca vector normal. \square

Cazuri particulare ale ecuației generale a planului

a) Ecuația unui plan care trece prin origine este:

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Într-adevăr, se observă imediat că ecuația de mai sus este verificată de originea $O(0, 0, 0)$.

b) Ecuațiile planelor paralele cu axele de coordonate sunt

$$Ax + By + D = 0 \quad (\text{paralele cu axa } Oz),$$

$$Ax + Cz + D = 0 \quad (\text{paralele cu axa } Oy),$$

$$By + Cz + D = 0 \quad (\text{paralele cu axa } Ox).$$

Într-adevăr, dacă în ecuația generală a planului punem $C = 0$, ea devine

$$Ax + By + D = 0.$$

În acest caz, vectorul normal la plan, $\mathbf{n}(A, B, 0)$ are proiecția ortogonală pe axa Oz nulă, așadar vectorul este perpendicular pe axă, deci planul este paralel cu axa Oz . La fel stau lucrurile și în celelalte două cazuri. Dacă, în particular, și $D = 0$, atunci planele *trec* prin axe, nu sunt doar paralele cu ele.

c) Ecuațiile planelor paralele cu planele de coordonate sunt

$$Ax + D = 0 \quad (\text{paralele cu planul } yOz),$$

$$By + D = 0 \quad (\text{paralele cu planul } xOz),$$

$$Cz + D = 0 \quad (\text{paralele cu planul } xOy).$$

Într-adevăr, dacă, de exemplu, punem în ecuația planului $B = C = 0$, ea se transformă în

$$Ax + D = 0.$$

Vectorul normal la acest plan este $\mathbf{n}(A, 0, 0)$. Acest vector este perpendicular pe planul yOz , deci planul care îl are ca vector normal este *paralel* cu planul yOz . La fel se raționează și în cazul celorlalte două plane de coordonate.

Și aici, ca și mai sus, dacă punem și $D = 0$, obținem plane care sunt paralele cu planele de coordonate și trec prin origine, adică obținem ecuațiile *planelor de coordonate*, $x = 0$, $y = 0$, respectiv $z = 0$.

3.1.3 Altă formă a ecuației vectoriale a planului

Plecăm de la ecuația vectorială a planului care trece printr-un punct și este paralel cu doi vectori necoliniari:

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = s\mathbf{v} + t\mathbf{w}.$$

Această ecuație este echivalentă cu cerința ca vectorii $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, \mathbf{v} și \mathbf{w} să fie liniar dependenți, adică, de asemenea, cu condiția ca

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0. \quad (3.1.7)$$

Această ecuație se numește, de regulă, pur și simplu, *ecuația planului care trece prin punctul M_0 și este paralel cu vectorii \mathbf{u} și \mathbf{v}* . Dacă dezvoltăm produsul mixt (3.1.7), se constată imediat că această ecuație este echivalentă cu ecuația

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.1.8)$$

sau cu ecuația

$$\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} (x - x_0) + \begin{vmatrix} v_3 & v_1 \\ w_3 & w_1 \end{vmatrix} (y - y_0) + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} (z - z_0) = 0. \quad (3.1.9)$$

3.1.4 Ecuația planului determinat de trei puncte necoliniare

Fie $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ trei puncte necoliniare din spațiu. Atunci cele trei puncte determină un plan. Pentru a obține ecuația sa, aplicăm metoda de la punctul precedent. Mai precis, fie

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &\equiv \overrightarrow{M_1 M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), \\ \mathbf{w} &\equiv \overrightarrow{M_1 M_3}(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1). \end{aligned}$$

Atunci acești doi vectori sunt, în mod evident, necoliniari și paraleli cu planul. Planul a cărui ecuație o căutăm este cel care trece prin M_1 și este paralel cu vectorii \mathbf{v} și \mathbf{w} . Prin urmare, ecuația sa este (vezi 3.1.8):

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.1.10)$$

Ecuția (3.1.10) se poate rescrie în forma de mai jos, mai ușor de memorat:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.1.11)$$

3.1.5 Condiția de coplanaritate a patru puncte

Din formula (3.1.11) rezultă imediat *condiția de coplanaritate a patru puncte*:

Patru puncte M_1, M_2, M_3, M_4 sunt coplanare dacă și numai dacă:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.1.12)$$

3.1.6 Ecuția planului prin tăieturi

Fie Π un plan care nu trece prin origine și prin nici una dintre axe. Atunci, după cum am văzut mai sus, ecuația sa generală este

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

unde nici unul dintre cei patru coeficienți nu se anulează. Fie P, Q, R cele trei puncte în care planul intersectează axele de coordonate. Atunci punctul de intersecție cu Ox , determinat de ecuațiile $y = 0, z = 0$, va fi $P(-D/A, 0, 0)$, punctul de intersecție cu axa Oy , de ecuații $x = 0, z = 0$, va fi $Q(0, -D/B, 0)$, în timp ce punctul de intersecție cu axa Oz , de ecuații $x = 0, y = 0$, va fi $R(0, 0, -D/C)$. Dacă introducem notațiile

$$a = -\frac{D}{A}, \quad b = -\frac{D}{B}, \quad c = -\frac{D}{C},$$

ecuția planului care trece prin punctele P, Q, R se va scrie

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dacă dezvoltăm ecuația de mai sus, obținem

$$bcx + cay + abz - abc = 0$$

sau, dacă împărțim cu abc ,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0. \quad (3.1.13)$$

Ecuația (3.1.13) se numește *ecuația planului prin tăieturi*. Motivul este legat de faptul că lungimile cu semn a, b, c se numesc *tăieturile* planului pe axele de coordonate. Ele sunt lungimile cu semn ale segmentelor determinate de origine și de punctele de intersecție ale planului cu cele trei axe de coordonate.

3.1.7 Ecuația normală a unui plan

Fie Π un plan și OP – perpendiculara din origine pe plan. Dacă planul trece prin origine, atunci punctul P coincide cu originea, deci lungimea vectorului \overrightarrow{OP} este egală cu zero. În cazul general, însă, fie

$$p \equiv \|\overrightarrow{OP}\|$$

lungimea acestui vector (egală, de fapt, cu distanța de la origine la planul Π).

Fie $\mathbf{n}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ versorul vectorului \overrightarrow{OP} (care este, în același timp, versorul normalei la plan). Atunci punctul P (piciorul perpendicularei pe plan din origine), va avea coordonatele

$$P(p \cos \alpha, p \cos \beta, p \cos \gamma),$$

prin urmare, dacă $M(x, y, z)$ este un punct oarecare din planul Π , atunci componentele sale vor fi

$$\overrightarrow{PM}(x - p \cos \alpha, y - p \cos \beta, z - p \cos \gamma).$$

Cum vectorii \overrightarrow{PM} și \mathbf{n} sunt perpendiculari, avem

$$\overrightarrow{PM} \cdot \mathbf{n} = 0$$

sau

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p \underbrace{(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)}_{=1} = 0$$

sau, în final,

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0. \quad (3.1.14)$$

Ecuția (3.1.14) se numește *forma normală Hesse* sau, pur și simplu, *forma normală* a ecuației planului.

Forma normală a ecuației unui plan este utilă în anumite situații, de aceea, vom arăta cum se poate obține. Plecăm cu un plan scris sub forma generală,

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Acest plan are și o ecuație normală,

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0.$$

Cum cele două ecuații trebuie să reprezinte același plan, coeficienții lor trebuie să fie proporționali:

$$\cos \alpha = \lambda A, \cos \beta = \lambda B, \cos \gamma = \lambda C, -p = \lambda D.$$

Dacă ridicăm la pătrat primele trei egalități și le însumăm, obținem

$$\lambda^2 (A^2 + B^2 + C^2) = 1,$$

unde am folosit, din nou, faptul că $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$. Așadar,

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (3.1.15)$$

Semnul din (3.1.15) se alege astfel încât să fie opus semnului termenului liber D din ecuația generală. Dacă $D = 0$, atunci semnul lui λ se poate alege oricum. λ se numește, din motive evidente, *factor normalizator* al ecuației generale a planului.

Planul Π împarte mulțimea tuturor punctelor din spațiu care nu aparțin lui Π în două submultimi, numite *semispații deschise*. Vom numi *semispațiu pozitiv* acel semispațiu înspre care este îndreptat vectorul \mathbf{n} . Celălalt se numește *semispațiu negativ*. Trebuie remarcat că originea spațiului se află întotdeauna fie în planul Π , fie în semispațiul negativ.

3.1.8 Distanța de la un punct la un plan

Definiția 3.2. Se numește *distanță* de la un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ la planul Π lungimea d a perpendicularei coborâte din punctul M_0 pe planul Π . Se numește *abatere* (sau *deviere*) a punctului M_0 relativ la planul Π numărul δ definit astfel încât:

- a) $\delta = d$ dacă M_0 este în semispațiul pozitiv determinat de Π ;
 b) $\delta = 0$ dacă $M_0 \in \Pi$;
 c) $\delta = -d$ dacă M_0 este în semispațiul negativ.

Teorema 3.3. *Dacă planul este dat prin ecuația normală*

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0,$$

atunci au loc formulele

$$\delta = x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p; \quad (3.1.16)$$

$$d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p|. \quad (3.1.17)$$

Dacă planul este dat prin ecuația sa generală,

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

atunci au loc formulele

$$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad (3.1.18)$$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (3.1.19)$$

Demonstrație Notăm cu P_0 proiecția ortogonală a lui M_0 pe dreapta OP . Atunci

$$\delta = (PP_0) = (OP_0) - (OP) = \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{OM_0} - p = x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p.$$

Așadar, formula (3.1.16) este demonstrată. (3.1.17) rezultă din (3.1.16), pentru că, în mod evident, $d = |\delta|$. \square

3.1.9 Unghiul a două plane

Prin *unghiul a două plane* înțelegem măsura unghiului plan asociat unghiului diedru format de cele două plane, adică măsura unghiului format de direcțiile normale la cele două plane.

Este de remarcat că cele două plane formează, în fapt, nu unul ci *patru* unghiuri, două câte două opuse și egale și adiacente suplimentare.

Considerăm două plane

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad (3.1.20)$$

și

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \quad (3.1.21)$$

Vectorii normali la cele două plane sunt $\mathbf{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ și $\mathbf{n}_2(A_2, B_2, C_2)$, prin urmare unghiurile sunt date de

$$\cos \alpha_{1,2} = \pm \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (3.1.22)$$

Dacă membrul drept este pozitiv, se obțin unghiurile ascuțite, dacă este negativ – unghiurile obtuze.

Din formula (3.1.22), rezultă că cele două plane sunt perpendiculare dacă și numai dacă

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \quad (3.1.23)$$

Pe de altă parte, planele sunt paralele exact atunci când cei doi vectori normali sunt paraleli, adică dacă și numai dacă

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (3.1.24)$$

3.2 Dreapta în spațiu

3.2.1 Ecuația vectorială și ecuațiile parametrice ale dreptei

Fie Δ o dreaptă în spațiu. Un vector nenul \mathbf{a} se numește *vector director* al dreptei Δ dacă orice segment orientat din clasa lui \mathbf{a} este paralel cu dreapta Δ . Dacă $\mathbf{a}(l, m, n)$ este un vector director al dreptei Δ , iar $M_0(x_0, y_0, z_0)$ este un punct oarecare al acestei drepte, atunci un punct arbitrar din spațiu, $M(x, y, z)$, aparține dreptei dacă și numai dacă vectorul $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ este coliniar cu vectorul \mathbf{a} . Notăm cu \mathbf{r}_0 , respectiv \mathbf{r} vectorii de poziție $\overrightarrow{OM_0}$, \overrightarrow{OM} ai punctelor M_0 , respectiv M . Atunci

$$\overrightarrow{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0,$$

prin urmare vectorii $\overrightarrow{M_0M}$ și \mathbf{a} sunt coliniari dacă și numai dacă există un număr real t astfel încât să avem

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{a},$$

sau

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}. \quad (3.2.1)$$

Ecuția (3.2.1) se numește *ecuația vectorială* a dreptei Δ , care trece prin punctul M_0 și are ca vector director vectorul \mathbf{a} . Această ecuație este echivalentă, în mod evident, cu un sistem de trei ecuații scalare,

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}, \quad (3.2.2)$$

ecuații care se numesc *ecuațiile parametrice* ale dreptei care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0)$ și are vectorul director $\mathbf{a}(l, m, n)$. Menționăm că dacă se trece la un alt sistem de coordonate, forma ecuațiilor parametrice ale dreptei se modifică (deoarece se schimbă atât coordonatele punctului M_0 , cât și componentele vectorului director), în timp ce ecuația vectorială are aceeași formă în orice sistem de coordonate afine (chiar dacă nu e vorba de o bază ortonormată).

3.2.2 Ecuațiile canonice ale unei drepte în spațiu

Dacă fiecare dintre componentele l, m, n ale vectorului director \mathbf{a} este diferită de zero, atunci ecuațiile (3.2.2) sunt echivalente cu sistemul

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}, \quad \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}, \quad \frac{z - z_0}{n} = \frac{x - x_0}{l}, \quad (3.2.3)$$

sistem pe care îl vom scrie, de regulă, sub forma

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \quad (3.2.4)$$

Ecuațiile (3.2.4) se numesc *ecuațiile canonice* ale dreptei care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și are vectorul director $\mathbf{a}(l, m, n)$.

Observație. Din moment ce vectorul director \mathbf{a} este diferit de zero, întotdeauna se poate găsi un sistem de coordonate în raport cu care toate componentele sale să fie nenule. Totuși, în anumite sisteme de coordonate, una sau două dintre componentele sale pot fi egale cu zero. Nu există nici un motiv pentru care să nu putem scrie ecuațiile canonice ale dreptei și în astfel de sisteme de coordonate. Vom face, de aceea, așa cum am procedat în cazul ecuației canonice a dreptei în plan, convenția că

$0/0 = 0$. Ca lucrurile să fie foarte clare, precizăm că, cu această convenție, un sistem de ecuații canonice de forma

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{0}$$

este echivalent cu sistemul de ecuații

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}, \quad z = z_0, \quad l \neq 0, m \neq 0,$$

în timp ce un sistem de ecuații de forma

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{0}, \quad l \neq 0,$$

este echivalent cu sistemul

$$y = y_0, \quad z = z_0.$$

3.2.3 Dreapta ca intersecție de două plane

O dreaptă în spațiu se poate reprezenta ca o intersecție de două plane distincte, care trec printr-o aceeași dreaptă. Prin urmare, ea poate fi dată cu ajutorul unui sistem de două ecuații liniare:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (3.2.5)$$

Cum planele care definesc dreapta nu sunt paralele, coeficienții necunoscutelor din cele două ecuații ale sistemului (3.2.5) nu sunt proporționali. Altfel spus, rangul matricii acestui sistem de ecuații liniare este maxim (adică este egal cu doi).

Ecuațiile sistemului (3.2.5) care definesc o dreaptă dată nu sunt unice. În mod clar, fiecare dintre ele se poate înlocui cu o ecuație de forma

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

unde α și β sunt numere reale care nu se anulează simultan, astfel încât, firește, sistemul să aibă, în continuare, rang maxim.

Este evident că și afirmația inversă este adevărată, adică orice sistem de ecuații de forma (3.2.5), de rang doi, descrie o dreaptă în spațiu.

De multe ori, trebuie să găsim vectorul director al unei drepte dată ca intersecție de două plane. Considerăm dreapta (3.2.5) și fie $\mathbf{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ și $\mathbf{n}_2(A_2, B_2, C_2)$

– vectorii normali la cele două plane care determină dreapta. Atunci produsul lor vectorial,

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$$

este, în mod evident, un vector director al dreptei, prin urmare

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}.$$

3.2.4 Ecuațiile drepte care trece prin două puncte

Să presupunem că se dau două puncte distincte $M_1(x_1, y_1, z_1)$ și $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ale unei drepte Δ . Atunci vectorul $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ este un vector director al dreptei, prin urmare dreapta Δ este dreapta care trece prin punctul M_1 și are ca vector director vectorul $\overrightarrow{M_1M_2}$. Așadar ecuațiile parametrice ale dreptei Δ (care trece prin punctul M_1 și are ca vector director pe $\overrightarrow{M_1M_2}$), vor fi

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t, \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)t. \end{cases} \quad (3.2.6)$$

Ecuațiile acestea se pot rescrie, firește, sub forma canonică:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (3.2.7)$$

3.2.5 Unghiul a două drepte în spațiu

Prin definiție, unghiul a două drepte în spațiu este unghiul pe care îl formează *vectorii lor directori*. Menționăm, de la bun început, că nu este necesar ca cele două drepte să fie coplanare. Vectorii lor directori fiind vectori liberi, ei pot fi plasați cu originea în același punct. Un alt lucru care trebuie menționat este că, folosind vectorii directori, unghiul dintre drepte nu este unic determinat. Mai precis, dacă schimbăm sensul unuia dintre vectorii directori, unghiul se transformă în suplementarul său. De aceea, dacă vrem să determinăm unghiul *ascuțit* dintre cele două drepte, trebuie să ne asigurăm că unghiul respectiv are un cosinus pozitiv.

Fie, prin urmare,

$$(D_1) : \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \quad (3.2.8)$$

și

$$(D_2) : \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}, \quad (3.2.9)$$

de vectori directori $\mathbf{v}_1(l_1, m_1, n_1)$, respectiv $\mathbf{v}_2(l_2, m_2, n_2)$. Atunci unghiul dintre cele două drepte este dat de

$$\cos \varphi_{1,2} = \pm \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_2\|} = \pm \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \quad (3.2.10)$$

Unghiul *ascuțit* dintre cele două drepte este dat de

$$\cos \varphi = \frac{|l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \quad (3.2.11)$$

Dreptele (3.2.8) și (3.2.9) sunt *perpendiculare* dacă vectorii lor directori sunt perpendiculari, adică dacă

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \equiv l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0. \quad (3.2.12)$$

Dreptele (3.2.8) și (3.2.9) sunt *paralele* dacă vectorii lor directori sunt coliniari, adică dacă există un scalar (nenul, în cazul nostru) $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât să avem

$$\mathbf{v}_1 = \lambda \mathbf{v}_2 \quad (3.2.13)$$

sau (cu aceeași convenție ca și la ecuațiile dreptei)

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (3.2.14)$$

3.3 Probleme diverse referitoare la drepte și plane în spațiu

3.3.1 Pozițiile relative a două plane

Presupunem că s-a fixat un sistem de coordonate afine $Oxyz$ și sunt date două plane, prin ecuațiile lor generale

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \quad (3.3.1)$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0. \quad (3.3.2)$$

Este clar, din considerente geometrice, că cele două plane se pot afla în următoarele situații:

- 1) se taie după o dreaptă;
- 2) sunt paralele, dar nu coincid;
- 3) coincid.

Scopul nostru este să stabilim relațiile care există între coeficienții celor două ecuații în fiecare caz.

Vom numi *urmă* a planului (3.3.1) pe planul de coordonate xOy intersecția dintre acest plan și planul de coordonate. Dacă planul (3.3.1) nu este paralel cu planul xOy , atunci această intersecție este o dreaptă care, privită ca dreaptă în planul de coordonate, va avea, în mod evident, ecuația

$$A_1x + B_1y + D_1 = 0.$$

Analog se obțin urmele planului pe planele de coordonate xOz și yOz , dacă planul nostru nu este paralel nici cu aceste plane de coordonate. Este clar că planul (3.3.2) coincide cu planul (3.3.1) dacă și numai dacă urmele lor pe planele de coordonate coincid. Din studiul poziției reciproce a două drepte în plan, știm deja că aceasta se întâmplă dacă și numai dacă toți coeficienții celor două plane sunt proporționali, adică dacă și numai dacă există un scalar nenul λ astfel încât să avem

$$A_1 = \lambda A_2, \quad B_1 = \lambda B_2, \quad C_1 = \lambda C_2, \quad D_1 = \lambda D_2 \quad (3.3.3)$$

sau

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2},$$

scriere care poate fi folosită dacă nici unul dintre coeficienții celui de-al doilea plan nu se anulează sau dacă facem convenția că în scrierea de mai sus, de fiecare dată când un coeficient al celui de-al doilea plan se anulează, la fel se întâmplă și cu coeficientul similar al primei ecuații.

Din punct de vedere algebric, la aceeași concluzie se poate ajunge și pe altă cale. Pentru ca planele (3.3.1) și (3.3.2) să coincidă, este necesar și suficient ca sistemul format din ecuațiile lor să fie compatibil, dublu nedeterminat, ceea ce înseamnă exact condiția (3.3.3).

Să presupunem acum, de exemplu, că primul plan este paralel cu planul xOy . Aceasta înseamnă, evident, că $A_1 = B_1 = 0$, iar raționamentul algebric de mai sus ne duce la aceeași concluzie ca pentru planele în poziție generală.

Dacă sistemul de ecuații (3.3.1)–(3.3.2) este incompatibil, atunci înseamnă că rangul sistemului trebuie să fie egal cu 1, în timp ce rangul matricei extinse trebuie să fie egal cu 2. Prin urmare, planele sunt paralele dacă și numai dacă

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}, \quad (3.3.4)$$

cu aceeași convenție ca mai sus asupra egalității cu zero a numitorilor.

Ultima situație posibilă este ca sistemul format din ecuațiile planelor să fie de rang maxim, ceea ce înseamnă că intersecția este o dreaptă. Aceasta înseamnă că primii trei coeficienți nu pot fi proporționali.

3.3.2 Pozițiile relative a trei plane

Considerăm trei plane, date prin ecuațiile lor generale:

$$\begin{cases} (P_1) A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ (P_2) A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ (P_3) A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \end{cases} \quad (3.3.5)$$

Pentru a stabili pozițiile relative ale celor trei plane, trebuie să studiem sistemul de ecuații (3.3.5). Fie Δ determinantul sistemului:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix},$$

m – matricea sistemului,

$$m = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$$

și M – matricea extinsă a sistemului,

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}.$$

Notăm, de asemenea, cu $\mathbf{n}_1(A_1, B_1, C_1)$, $\mathbf{n}_2(A_2, B_2, C_2)$, $\mathbf{n}_3(A_3, B_3, C_3)$ vectorii normali la cele trei plane. Avem următoarele situații:

- (a) Dacă $\Delta \neq 0$, atunci sistemul (3.3.5) este compatibil determinat, prin urmare, are o singură soluție: *planele se intersectează într-un punct*.
- (b) Să presupunem acum că $\Delta = 0$, $\operatorname{rg} m = 2$, $\operatorname{rg} M = 3$, iar vectorii normali la cele trei plane sunt, doi câte doi, necoliniari. Deoarece rangul matricei sistemului este strict mai mic decât rangul matricei extinse, sistemul este incompatibil, prin urmare cele trei plane nu au nici un punct comun. Cum vectorii normali sunt, doi câte doi, necoliniari, rezultă că planele sunt, două câte două, neparalele. Ele se intersectează după câte o dreaptă, iar cele trei dreapta care se obțin sunt paralele.
- (c) De data aceasta avem, de asemenea, $\operatorname{rg} m = 2$, $\operatorname{rg} M = 3$, dar acum doi dintre cei trei vectori normali la plane sunt coliniari¹. Două dintre cele trei plane (cele cu vectorii normali coliniari) sunt paralele între ele, iar cel de-al treilea le intersectează pe ambele.
- (d) Să presupunem acum că $\operatorname{rg} m = 2$, $\operatorname{rg} M = 2$ (deci sistemul este compatibil), iar vectorii normali sunt doi câte doi necoliniari. În acest caz, planele sunt două câte două distincte și trec prin aceeași dreaptă.
- (e) Dacă $\operatorname{rg} m = 2$, $\operatorname{rg} M = 2$, iar doi dintre cei trei vectori normali sunt coliniari, atunci, din nou, sistemul este compatibil, două dintre plane coincid (cele care au vectorii normali coliniari), iar cel de-al treilea le intersectează după o dreaptă.
- (f) Dacă $\operatorname{rg} m = 1$, $\operatorname{rg} M = 3$, atunci sistemul este incompatibil, așadar planele nu se intersectează, dar ele sunt paralele între ele.
- (g) Dacă $\operatorname{rg} m = 1$, $\operatorname{rg} M = 2$, atunci două dintre plane coincid, iar cel de-al treilea este paralel cu ele.
- (h) Dacă $\operatorname{rg} m = 1$, $\operatorname{rg} M = 1$, atunci sistemul este compatibil dublu, toate cele trei plane coincid.

3.3.3 Fascicule de plane. Snopuri de plane

Definiția 3.3. Se numește *fascicol de plane* mulțimea tuturor planelor care trec printr-o anumită dreaptă, care se numește *axa fascicolului*.

¹Nu pot fi toți trei coliniari, deoarece $\operatorname{rg} m = 2$!

Să presupunem că sunt date două plane distincte concurente

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad (3.3.6)$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \quad (3.3.7)$$

Teorema 3.4. *Dacă α și β sunt două numere reale care nu se anulează simultan, atunci ecuația*

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \quad (3.3.8)$$

este ecuația unui plan ce aparține fascicolului de plane determinat de planele (3.3.6) și (3.3.7). Invers, orice plan al acestui fascicol se poate reprezenta cu ajutorul unei ecuații (3.3.8), pentru o anumită alegere a constantelor α și β , care nu sunt ambele nule.

Demonstrația acestei teoreme este perfect analogă cu demonstrația teoremei similare pentru fascicole de drepte din plan, de aceea nu o vom mai reproduce aici.

Spre deosebire de cazul dreptelor din plan, unde am avut de considerat doar familiile de drepte care trec printr-un punct (adică fasciculele de drepte), în cazul planelor în spațiu, pe lângă fasciculele de plane (care trec printr-o dreaptă), putem considera alte familii remarcabile de plane, cele ce trec printr-un punct. Începem prin a da următoarea definiție:

Definiția 3.4. Se numește *snop de plane* mulțimea tuturor planelor care trec printr-un punct dat, numit *centrul snopului de plane*.

Să presupunem că centrul snopului de plane este dat prin intermediul coordonatelor sale, $S(x_0, y_0, z_0)$. Atunci, în mod evident, orice plan care trece prin centrul snopului (și, deci, aparține snopului), se poate scrie sub forma

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \quad (3.3.9)$$

unde constantele reale A, B, C nu sunt toate egale cu zero. Invers, pentru orice constante A, B, C care nu sunt toate egale cu zero, ecuația (3.3.9) este ecuația unui plan care trece prin centrul snopului.

Ca și în cazul fasciculelor, însă, de multe ori nu este dat în mod explicit centrul snopului de plane, ci acesta este descris cu ajutorul ecuațiilor unor plane care trec prin acest punct. Este util să avem o descriere a planelor snopului cu ajutorul unui număr redus de plane (mai precis, trei), care determină în mod unic centrul acestui snop. Avem următorul rezultat:

Teorema 3.5. *Fie*

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{cases} \quad (3.3.10)$$

ecuațiile a trei plane care trec prin punctul $S(x_0, y_0, z_0)$ astfel încât să fie îndeplinită condiția

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (3.3.11)$$

Atunci pentru orice numere reale α, β, γ care nu se anulează simultan, ecuația

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) + \gamma(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) = 0 \quad (3.3.12)$$

descrie un plan al snopului de plane cu centrul în punctul S . Invers, orice plan al acestui snop poate fi descris prin intermediul unei ecuații de acest tip, pentru o anumită alegere a constantelor α, β, γ .

Demonstrație Rescriem, mai întâi, ecuația (3.3.12) sub forma

$$(A_1\alpha + A_2\beta + A_3\gamma)x + (B_1\alpha + B_2\beta + B_3\gamma)y + (C_1\alpha + C_2\beta + C_3\gamma)z + D_1\alpha + D_2\beta + D_3\gamma = 0. \quad (3.3.13)$$

Pentru ca această ecuație să reprezinte, într-adevăr, ecuația unui plan, coeficienții săi nu trebuie să se anuleze simultan.

Presupunem că coeficienții lui x, y, z din această ecuație sunt egali cu zero:

$$\begin{cases} A_1\alpha + A_2\beta + A_3\gamma = 0, \\ B_1\alpha + B_2\beta + B_3\gamma = 0, \\ C_1\alpha + C_2\beta + C_3\gamma = 0. \end{cases} \quad (3.3.14)$$

În virtutea ecuației (3.3.11) sistemul de ecuații (3.3.14) cu necunoscutele α, β, γ , admite numai soluția trivială $\alpha = \beta = \gamma = 0$, ceea ce contrazice alegerea parametrilor α, β, γ . Prin urmare, ecuația (3.3.13) (deciși ecuația (3.3.12), care este echivalentă cu ea), este o ecuație liniară în raport cu x, y, z , așadar este ecuația unui plan. Cum punctul S aparține fiecăruia dintre planele (3.3.10), el verifică și ecuația (3.3.12), adică planul acesta aparține snopului.

Fie acum

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (3.3.15)$$

un plan oarecare al snopului.

Considerăm acum sistemul de ecuații

$$\begin{cases} A_1\alpha + A_2\beta + A_3\gamma = A, \\ B_1\alpha + B_2\beta + B_3\gamma = B, \\ C_1\alpha + C_2\beta + C_3\gamma = C, \end{cases} \quad (3.3.16)$$

în raport cu necunoscutele α, β, γ . În virtutea relației (3.3.11), sistemul acesta admite o soluție unică. Cum fiecare dintre planele (3.3.10), ca și planul (3.3.15) trec prin punctul $S(x_0, y_0, z_0)$, rezultă că

$$\begin{cases} D_1 = -A_1x_0 - B_1y_0 - C_1z_0, \\ D_2 = -A_2x_0 - B_2y_0 - C_2z_0, \\ D_3 = -A_3x_0 - B_3y_0 - C_3z_0, \\ D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0. \end{cases}$$

De aici și din egalitățile (3.3.16) obținem

$$D_1\alpha + D_2\beta + D_3\gamma = D.$$

Astfel, pentru valorile alese ale lui α, β, γ ecuațiile (3.3.12) și (3.3.15) coincid. \square

3.3.4 Poziția relativă a unei drepte față de un plan

Considerăm un plan Π , dat prin ecuația generală

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (3.3.17)$$

și o dreaptă Δ , dată prin ecuațiile sale parametrice

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases} \quad (3.3.18)$$

Trebuie să stabilim poziția dreptei Δ relativ la planul Π .

Este clar, din motive geometrice, că sunt posibile următoarele situații:

- (i) dreapta intersectează planul într-un punct;

(ii) dreapta este paralelă cu planul și nu este situată în el;

(iii) dreapta este inclusă în plan.

Vom stabili care trebuie să fie legătura dintre coeficienții planului și cei ai dreptei pentru fiecare dintre cele trei situații.

Dacă înlocuim expresiile lui x, y, z din ecuațiile dreptei Δ în ecuația planului Π , obținem:

$$(Al + Bm + Cn)t + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \quad (3.3.19)$$

Soluția acestei ecuații în t reprezintă valoarea parametrului de pe dreaptă care corespunde punctului (sau punctelor) de intersecție dintre dreaptă și plan. Este ușor de văzut că ecuația admite o soluție unică dacă și numai dacă coeficientul lui t este diferit de zero, adică

$$Al + Bm + Cn \neq 0.$$

Semnificația geometrică a acestei relații este clară: vectorul director al dreptei nu este perpendicular pe vectorul normal la plan, adică dreapta nu este paralelă cu planul. Prin urmare, condiția aceasta este condiția ca *dreapta și planul să se intersecteze într-un punct*.

Dacă este îndeplinită condiția

$$Al + Bm + Cn = 0, \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0,$$

atunci dreapta este paralelă cu planul, dar nu se intersectează cu el. Într-adevăr, prima condiție arată că dreapta este paralelă cu planul, în timp ce a doua condiție indică faptul că ecuația nu are soluție.

În sfârșit, dacă este îndeplinită condiția

$$Al + Bm + Cn = 0, \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0,$$

atunci dreapta este inclusă în plan, pentru că, în acest caz, ecuația de intersecție se transformă într-o identitate, care este verificată pentru orice t real.

3.3.5 Ecuația unui plan determinat de două drepte concurente

Considerăm dreptele

$$(D_1) : \frac{x - x_0}{l_1} = \frac{y - y_0}{m_1} = \frac{z - z_0}{n_1} \quad (3.3.20)$$

și

$$(D_2) : \frac{x - x_0}{l_2} = \frac{y - y_0}{m_2} = \frac{z - z_0}{n_2}, \quad (3.3.21)$$

care trec prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Atunci planul care trece prin cele două drepte este, în fapt, planul care trece prin punctul M_0 și este paralel cu vectorii $\mathbf{v}_1(l_1, m_1, n_1)$ și $\mathbf{v}_2(l_2, m_2, n_2)$, deci ecuația sa este

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.3.22)$$

3.3.6 Ecuația planului determinat de o dreaptă și un punct

Considerăm dreapta

$$(D) : \frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} \quad (3.3.23)$$

și punctul $M_2(x_2, y_2, z_2)$, care nu aparține dreptei. Planul pe care îl căutăm este cel care trece prin punctul $M_1(x_1, y_1, z_1)$ și este paralel cu vectorii $\mathbf{v}(l, m, n)$ și $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, deci ecuația lui va fi

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0. \quad (3.3.24)$$

3.3.7 Ecuația planului determinat de două drepte paralele

Considerăm dreptele paralele (și distincte!)

$$(D_1) : \frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} \quad (3.3.25)$$

și

$$(D_2) : \frac{x - x_2}{l} = \frac{y - y_2}{m} = \frac{z - z_2}{n}, \quad (3.3.26)$$

care trec prin punctele $M_1(x_1, y_1, z_1)$ și $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Planul pe care îl căutăm este cel care trece prin punctul $M_1(x_1, y_1, z_1)$ și este paralel cu vectorii $\mathbf{v}(l, m, n)$ și $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, deci ecuația lui va fi

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0. \quad (3.3.27)$$

3.3.8 Proiecția unei drepte pe un plan

Considerăm dreapta

$$(D) : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \quad (3.3.28)$$

și planul

$$(P) : Ax + By + Cz + D = 0. \quad (3.3.29)$$

Este ușor de constatat că dacă proiectăm ortogonal toate punctele dreptei (D) pe planul (P) obținem o dreaptă situată în plan, pe care o vom numi *proiecția dreptei (D) pe planul (P)* . Dacă dreapta este *perpendiculară* pe plan, atunci dreapta aceasta, de fapt, se reduce la un singur punct, cel în care dreapta înțeapă planul. De aceea, în cele ce urmează, vom admite că dreapta *nu* este perpendiculară pe plan.

Dreapta pe care o căutăm o vom scrie ca intersecție a două plane: planul (P) și planul (P') , care trece prin dreapta (D) și este perpendicular pe planul (P) . În practică, acest plan este planul care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ de pe dreaptă și este paralel cu cevtorul director al dreptei, $\mathbf{v}(l, m, n)$ și vectorul normal la planul (P) , $\mathbf{n}(A, B, C)$. Datorită ipotezei pe care am făcut-o mai sus, cei doi vectori sunt necoliniari, dei punctul și cei doi vectori determină, în mod unic, planul (P') .

După cum am văzut, ecuația planului (P') este

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0. \quad (3.3.30)$$

Așadar, ecuațiile proiecției dreptei pe plan sunt

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0, \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases} \quad (3.3.31)$$

3.3.9 Proiecția unui punct pe o dreaptă în spațiu

Fie

$$\Delta : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

o dreaptă și $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct din spațiu. Dacă $M_0 \in \Delta$, atunci *proiecția* lui M_0 pe Δ este chiar M_0 . În caz contrar, proiecția este piciorul perpendicularei coborâte din punctul M_0 pe dreapta Δ .

Să presupunem că suntem în cea de-a doua situație. Vom determina, mai întâi, ecuațiile perpendicularei din M_0 pe dreapta Δ .

3.3.10 Poziția relativă a două drepte în spațiu

Presupunem că se dau două drepte în spațiu, prin intermediul ecuațiilor lor parametrice

$$x = x_1 + l_1 t, \quad y = y_1 + m_1 t, \quad z = z_1 + n_1 t, \quad (3.3.32)$$

$$x = x_2 + l_2 s, \quad y = y_2 + m_2 s, \quad z = z_2 + n_2 s, \quad (3.3.33)$$

și vrem să stabilim poziția lor relativă.

Din considerente geometrice, este clar că putem avea următoarele situații:

- (a) dreptele sunt concurente;
- (b) dreptele coincid;
- (c) dreptele sunt paralele, dar nu coincid;
- (d) dreptele sunt necoplanare (strâmbe).

Vom stabili acum legăturile dintre coeficienții celor două drepte pentru fiecare situație.

Considerăm vectorii directori ai celor două drepte:

$$\mathbf{a}_1(l_1, m_1, n_1), \quad \mathbf{a}_2(l_2, m_2, n_2).$$

Presupunem că acești vectori sunt coliniari, adică

$$l_1 = \lambda l_2, \quad m_1 = \lambda m_2, \quad n_1 = \lambda n_2. \quad (3.3.34)$$

Atunci dreptele sunt paralele, adică fie coincid, fie sunt paralele și nu au nici un punct comun. Dreptele coincid dacă și numai dacă vectorul $\overrightarrow{M_1 M_2}$, unde $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, este paralel cu vectorii \mathbf{a}_1 și \mathbf{a}_2 , adică:

$$x_2 - x_1 = \mu l_1, \quad y_2 - y_1 = \mu m_1, \quad z_2 - z_1 = \mu n_1. \quad (3.3.35)$$

Astfel, egalitățile (3.3.34) și (3.3.35) reprezintă condițiile necesare și suficiente pentru ca dreptele (3.3.32) și (3.3.33) să coincidă. Pentru ca aceste drepte să fie paralele,

fără să coincidă, este necesar și suficient ca condiția (3.3.34) să fie verificată, iar condiția (3.3.35) – nu.

Să presupunem acum că vectorii \mathbf{a}_1 și \mathbf{a}_2 sunt necoliniari, adică nu este verificată condiția (3.3.34). Atunci dreptele (3.3.32) și (3.3.33) se intersectează într-un punct sau sunt necoplanare. Dacă se intersectează și, prin urmare, se află într-un același plan Π , atunci vectorii \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 și $\overrightarrow{M_1M_2}$ sunt coplanari. De aceea:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.3.36)$$

Invers, să presupunem că vectorii \mathbf{a}_1 și \mathbf{a}_2 sunt necoliniari și este verificată condiția (3.3.36).

Alegem punctele A_1 și A_2 astfel încât să avem $\overrightarrow{M_1A_1} = \mathbf{a}_1$ și $\overrightarrow{M_2A_2} = \mathbf{a}_2$. Atunci segmentele M_1M_2 , M_1A_1 și M_2A_2 determină un plan, în care sunt situate dreptele (3.3.32) și (3.3.33). Cum vectorii \mathbf{a}_1 și \mathbf{a}_2 sunt necoliniari, dreptele sunt concurente. Astfel, dreptele (3.3.32) și (3.3.33) sunt concurente dacă și numai dacă vectorii lor directori sunt necoliniari și este verificată egalitatea (3.3.36). Remarcăm că această egalitate are loc și dacă dreptele sunt paralele, pentru că în acest caz a doua și a treia linie a determinantului sunt proporționale. Prin urmare, condiția necesară pentru ca dreptele noastre să fie *necoplanare* este

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

În restul acestui capitol vom presupune că reperul cu care lucrăm este ortonormat.

3.3.11 Distanța de la un punct la o dreaptă în spațiu

Vom stabili, în cele ce urmează, o formulă care ne dă distanța d de la un punct M_1 , de vector de poziție \mathbf{r}_1 , în spațiu, la o dreaptă Δ , de ecuație vectorială $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}$. Alegem, mai întâi, un punct M_2 pe dreapta Δ astfel încât să avem $\overrightarrow{M_0M_2} = \mathbf{a}$.

Construim un paralelogram pe vectorii $\overrightarrow{M_0M_1}$ și $\overrightarrow{M_0M_2}$. Atunci distanța d căutată este egală cu lungimea perpendicularei M_1N , coborâte din vârful M_1 pe latura opusă a paralelogramului. Cum aria paralelogramului este egală cu

$$\|(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{a}\| = \|\mathbf{a}\|d,$$

formula

$$d = \frac{\|(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{a}\|}$$

ne dă distanța de la punctul M_1 , de vector de poziție \mathbf{r}_1 la dreapta Δ .

3.3.12 Perpendiculara comună a două drepte strâmbе

Considerăm două drepte în spațiu,

$$(\Delta_1) : \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \quad (3.3.37)$$

și

$$(\Delta_2) : \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}, \quad (3.3.38)$$

astfel încât cele două drepte să fie necoplanare, adică

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

După cum se știe din geometria elementară, există o singură dreaptă care intersectează ambele drepte date și este perpendiculară pe fiecare dintre ele. De aceea, ea se și numește *perpendiculara comună* a celor două drepte.

Metoda de construire a perpendiculararei comune este cât se poate de simplă. Mai întâi determinăm vectorul director al acestei perpendicularare. Fie $\mathbf{a}_1(l_1, m_1, n_1)$, respectiv $\mathbf{a}_2(l_2, m_2, n_2)$ vectorii directori ai dreptelor Δ_1 și Δ_2 . Atunci vectorul $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$ este, conform definiției, un vector care este perpendicular atât pe vectorul \mathbf{a}_1 , cât și pe vectorul \mathbf{a}_2 , prin urmare el este, în mod evident, un vector director al perpendiculararei comune. Cum

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix},$$

componentele acestui vector sunt

$$\beta_1 \equiv \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}, \quad \beta_2 \equiv \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}, \quad \beta_3 \equiv \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}. \quad (3.3.39)$$

Acum scriem ecuațiile perpendiculararei comune ca intersecție de două plane: unul care trece prin prima dreaptă și este perpendicular pe cea de-a doua și unul care trece prin a doua dreaptă și este perpendicular pe prima dreaptă.

Primul plan se va putea scrie, prin urmare:

$$\pi_1 : \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Într-adevăr, acest plan trece prin dreapta Δ_1 și este paralel cu perpendiculara comună, deci, în particular, este perpendicular pe dreapta Δ_2 . În același mod, cel de-al doilea plan se va scrie:

$$\pi_2 : \begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0,$$

prin urmare ecuațiile perpendicularei comune vor fi:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0. \end{cases}$$

3.3.13 Lungimea perpendicularei comune a două drepte necoplanare

Considerăm, din nou, dreptele necoplanare (3.3.37) și (3.3.38). Consideră, de asemenea, planul π care trece prin prima dreaptă și este paralel cu cea de-a doua, adică planul de ecuație

$$\pi : \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Vectorul normal la acest plan este, în mod evident, $\mathbf{n}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, unde $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ sunt date de (3.3.39).

Atunci lungimea perpendicularei comune (adică distanța dintre dreptele necoplanare date), va fi egală cu distanța de la un punct oarecare al dreptei Δ_2 (de exemplu punctul $M_2(x_2, y_2, z_2)$) până la planul π . Conform formulei pentru distanța de la un

punct la un plan, obținem:

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = d(M_2, \pi) = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}}.$$

3.3.14 Unghiul dintre o dreaptă și un plan

Presupunem că se dă dreapta

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt \quad (3.3.40)$$

și planul

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (3.3.41)$$

Vom nota cu φ unghiul dintre dreaptă și plan (mai precis, unghiul dintre dreaptă și proiecția sa pe plan). Dacă dreapta este perpendiculară pe plan vom pune $\varphi = \pi/2$. Vom considera că $0 \leq \varphi \leq \pi/2$. Cum vectorul $\mathbf{n}(A, B, C)$ este perpendicular pe planul (3.3.41), unghiul format de vectorul director $\mathbf{a}(l, m, n)$ al dreptei (3.3.40) cu vectorul \mathbf{n} este fie $\psi = \pi/2 - \varphi$, fie $\psi = \pi/2 + \varphi$. Prin urmare,

$$\sin \varphi = |\cos \psi| = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Condiția ca dreapta să fie paralelă cu planul este ca vectorul normal la plan să fie perpendicular pe vectorul director al drepte, adică

$$Al + Bm + Cn = 0,$$

în timp ce condiția ca dreapta să fie perpendiculară pe plan este ca vectorul normal la plan să fie paralel cu vectorul director al drepte, adică

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}.$$

3.4 Probleme

Problema 3.1. Stabiliți ecuația unui plan care trece prin $A(1, 3, 0)$ și este paralel cu dreptele

$$\begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ 2x - y + 5z + 1 = 0 \end{cases}$$

și

$$\begin{cases} -x + y = 1 \\ 5x + y - z + 2 = 0 \end{cases}.$$

Problema 3.2. Stabiliți ecuația unui plan care trece prin dreapta

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{2}$$

și este paralel cu dreapta

$$\frac{x}{5} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+1}{3}.$$

Problema 3.3. Stabiliți ecuația unui plan care trece prin dreapta

$$\begin{cases} x = 3 + t, \\ y = 2 + 5t, \\ z = -1 + 3t, \end{cases}$$

și este paralel cu dreapta

$$\begin{cases} x = 4 - 2t, \\ y = -8 + t, \\ z = 5 + 2t. \end{cases}$$

Problema 3.4. Determinați ecuația unui plan care trece prin punctul $A(-1, 1, 2)$ și prin dreapta de ecuații

$$\begin{cases} x = 1 + 5t, \\ y = -1 + t, \\ z = 2t. \end{cases}$$

Problema 3.5. Determinați ecuația unui plan care trece prin punctul $A(-1, 1, 2)$ și prin dreapta de ecuații

$$\begin{cases} x + 5y - 7z + 1 = 0, \\ 3x - y + 2z + 3 = 0. \end{cases}$$

Problema 3.6. Stabiliți ecuația planului care trece prin dreptele paralele

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{1} \quad \text{și} \quad \frac{x-2}{5} = \frac{y}{3} = \frac{z+3}{1}.$$

Problema 3.7. Demonstrați că următoarele două drepte sunt concurente și stabiliți ecuația planului determinat de ele:

$$\frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-5}{4} \quad \text{și} \quad \frac{x+5}{2} = \frac{y+8}{3} = \frac{z-4}{-1}.$$

Problema 3.8. Demonstrați că următoarele două drepte sunt concurente și stabiliți ecuația planului determinat de ele:

$$\begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = -1 + 4t, \\ z = 2 + 5t \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} x = 1 - t, \\ y = -1 + 2t, \\ z = 2 + 4t. \end{cases}$$

Problema 3.9. O dreaptă se proiectează pe planul yOz , paralel cu axa Ox . Stabiliți ecuația proiecției dacă dreapta este dată de ecuațiile:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 3t, \\ z = 1 - t. \end{cases}$$

Problema 3.10. Stabiliți ecuațiile unei drepte care trece prin $O(0, 0, 0)$ și intersectează dreptele

$$\begin{cases} x - y + z + 2 = 0, \\ x - 2y + 3z - 8 = 0 \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} y - z + 1 = 0, \\ x + y - 2z + 4 = 0. \end{cases}$$

Problema 3.11. Stabiliți ecuațiile unei drepte care trece prin $O(0, 0, 0)$ și intersectează dreptele

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 2 + 3t, \\ z = -t \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} x = 4t, \\ y = 5 - 5t, \\ z = 3 + 2t. \end{cases}$$

Problema 3.12. Stabiliți ecuațiile unei drepte care trece prin $A(-1, 1, -1)$ și intersectează dreptele

$$\begin{cases} x - y + z + 2 = 0, \\ x - 2y + 3z - 8 = 0 \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} y - z = 0, \\ x + y - 2z + 4 = 0. \end{cases}$$

Problema 3.13. În fascicolul de plane determinat de planele $x + 2y - 3z + 5 = 0$ și $4x - y + 3z + 5 = 0$ să se determine două plane perpendiculare, dintre care unul dintre care să treacă prin punctul $M(1, 3, 1)$.

Problema 3.14. Să se determine coordonatele unui punct A situat pe dreapta

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-1}$$

și este egal de părtat de punctele $B(3, 0, -2)$ și $C(-1, 1, 5)$.

Problema 3.15. Determinați coordonatele unui punct A , situat pe dreapta

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{1},$$

aflat la distanța $\sqrt{3}$ față de planul $x + y + z + 3 = 0$.

Problema 3.16. Determinați coordonatele unui punct A , situat pe dreapta

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+4}{-5},$$

egalo depărtat de punctul $B(0, 1, 1)$ și de planul $2x - y + 2z + 1 = 0$.

Problema 3.17. Punctele $A(1, -1, 2)$ și $B(3, 0, 4)$ sunt vârfuri ale cubului $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Vectorul \overrightarrow{AD} este perpendicular pe dreapta

$$\begin{cases} x = 0, \\ y - z = 0, \end{cases}$$

iar orientarea bazei $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1}\}$ este directă, în timp ce suma coordonatelor vectorului $\overrightarrow{AA_1}$ este negativă. Stabiliți ecuațiile fețelor cubului.

Problema 3.18. Stabiliți ecuațiile simetricei dreptei

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{4}$$

față de planul $5x - y + z - 4 = 0$.

Problema 3.19. Stabiliți ecuațiile proiecției ortogonale pe planul $x + 5y - z - 25 = 0$ ale dreptei

$$\begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0, \\ 3x - y + 2z = 0. \end{cases}$$

Problema 3.20. Stabiliți ecuațiile proiecției ortogonale pe planul $x + 5y - z - 25 = 0$ ale dreptei

$$\frac{x + 1}{1} = \frac{y}{5} = \frac{z - 1}{-1}.$$

Problema 3.21. Determinați unghiul dintre planul $4x + 4y - 7z + 1 = 0$ și dreapta

$$\begin{cases} x + y + z + 1 = 0, \\ 2x + y + 3z + 2 = 0. \end{cases}$$

Problema 3.22. Stabiliți ecuațiile dreptei care trece prin $A(1, 3, 2)$, este paralelă cu planul xOy și formează un unghi de 45° cu dreapta

$$\begin{cases} x = z, \\ z = 0. \end{cases}$$

Problema 3.23. Stabiliți ecuațiile dreptei care trece prin $A(1, 3, 2)$, este paralelă cu planul xOy și formează un unghi de $\arcsin(1/\sqrt{10})$ cu planul $x - y = 1$.

Problema 3.24. Stabiliți ecuația planului care trece prin $A(-1, 2, 1)$, este paralel cu dreapta

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{-1}$$

și formează un unghi de 60° cu dreapta

$$\begin{cases} x = z, \\ z = 0. \end{cases}$$

Problema 3.25. Laturile egale ale unui triunghi isoscel se intersectează în vârful $A(3, 4, 5)$. Celelalte două vârfuri sunt situate pe axele Ox și Oy , iar planul triunghiului este paralel cu axa Oz . Determinați unghiurile triunghiului și scrieți ecuația planului său.

Problema 3.26. Determinați coordonatele unui punct A de pe dreapta

$$\begin{cases} x - y - 3 = 0, \\ 2y + z = 0, \end{cases}$$

situat la distanța $\sqrt{6}$ față de dreapta $x = y = z$.

Problema 3.27. Determinați distanța dintre dreptele

$$\frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{6} = \frac{z-1}{-2} \quad \text{și} \quad \frac{x-5}{-6} = \frac{y}{-12} = \frac{z}{4}.$$

Problema 3.28. Punctele $A(-1, -3, 1)$, $B(5, 3, 8)$, $C(-1, -3, 5)$ și $D(2, 1, -4)$ sunt vârfurile unui tetraedru. Determinați înălțimea tetraedrului coborâtă din vârful D pe fața ABC .

Problema 3.29. Punctele $A(-1, -3, 1)$, $B(5, 3, 8)$, $C(-1, -3, 5)$ și $D(2, 1, -4)$ sunt vârfurile unui tetraedru. Determinați înălțimea feței ABC , coborâte din C pe latura AB .

Problema 3.30. Punctele $A(-1, -3, 1)$, $B(5, 3, 8)$, $C(-1, -3, 5)$ și $D(2, 1, -4)$ sunt vârfurile unui tetraedru. Determinați distanța dintre muchiile (strâmbe) AD și BC .

Problema 3.31. Lungimea muchiei cubului $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ este egală cu 1. Determinați distanța dintre vârful A și planul $B_1 C D_1$.

Problema 3.32. Fețele $ABCD$, $ABB_1 A_1$ și $ADD_1 A_1$ ale paralelipipedului $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ sunt situate în planele $2x + 3y + 4z + 8 = 0$, $x + 3y - 6 = 0$, respectiv $z + 5 = 0$. Vârful C_1 are coordonatele $(6, -5, 1)$. Determinați distanța de la vârful A_1 la planul $B_1 B D$.

Problema 3.33. Fețele $ABCD$, $ABB_1 A_1$ și $ADD_1 A_1$ ale paralelipipedului $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ sunt situate în planele $2x + 3y + 4z + 8 = 0$, $x + 3y - 6 = 0$, respectiv $z + 5 = 0$. Vârful C_1 are coordonatele $(6, -5, 1)$. Determinați distanța de la vârful D la dreapta AB .

Problema 3.34. Fețele $ABCD$, $ABB_1 A_1$ și $ADD_1 A_1$ ale paralelipipedului $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ sunt situate în planele $2x + 3y + 4z + 8 = 0$, $x + 3y - 6 = 0$, respectiv $z + 5 = 0$. Vârful C_1 are coordonatele $(6, -5, 1)$. Determinați distanța dintre dreptele AC și $A_1 C_1$.

CAPITOLUL 4

Conice pe ecuația canonică

4.1 Elipsa

Definiție și ecuație canonică

Definiția 4.1. Se numește *elipsă* locul geometric al punctelor din plan pentru care suma distanțelor de la ele până la două puncte fixe F_1 și F_2 , numite *focare* este constantă, egală cu $2a$, presupunându-se că distanța dintre cele două focare este $2c$, unde c este un număr real pozitiv sau nul, verificând inegalitatea $c < a$.

Desigur, dacă focarele sunt confundate, elipsa este un cerc.

Pentru a deduce ecuația elipsei, construim un sistem de coordonate ortonormat în plan în modul următor. Alegem ca origine mijlocul segmentului $F_1 F_2$ și alegem ca axă Ox dreapta $F_1 F_2$ orientată astfel încât F_2 să aibă abscisă pozitivă. Prin urmare, focarele vor avea coordonatele $F_1(-c, 0)$ și $F_2(c, 0)$. Axa Oy se alege astfel încât să se completeze un sistem ortonormat drept (deci, în particular, ca dreaptă, această axă nu este altceva decât mediatoarea segmentului $F_1 F_2$). Dacă cumva elipsa este un cerc (adică $c = 0$), atunci orice sistem de coordonate drept ortonormat, cu originea în centrul cercului, va satisface necesitățile noastre.

Fie $M(x, y)$ un punct oarecare al elipsei. Atunci avem, pe de-o parte,

$$F_1 M = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}, \quad F_2 M = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}. \quad (4.1.1)$$

Pe de altă parte, din definiția elipsei, trebuie să avem

$$F_1M + F_2M = 2a. \quad (4.1.2)$$

Combinând aceste două ecuații, obținem:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \quad (4.1.3)$$

Aceasta este, de fapt, ecuația elipsei, întrucât punctele elipsei, și numai ele, verifică această ecuație.

Vom stabili acum o altă formă, mai atractivă, pentru ecuația (4.1.3) a elipsei. Treccem ultimul termen din ecuație în membrul drept și ridicăm la pătrat. După reducerea termenilor asemenea, obținem:

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Ridicând din nou la pătrat și regroupând termenii, obținem:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

sau, încă,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \quad (4.1.4)$$

Introducem acum o nouă cantitate,

$$b = \sqrt{a^2 - c^2};$$

conform ipotezelor noastre, această cantitate este reală. Avem, prin urmare,

$$b^2 = a^2 - c^2, \quad (4.1.5)$$

prin urmare ecuația (4.1.4) devine

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4.1.6)$$

Am demonstrat până acum că fiecare punct al elipsei verifică ecuația (4.1.6). Vom arăta acum că și afirmația inversă este adevărată, în sensul că orice punct $M(x, y)$ ale cărui coordonate verifică ecuația (4.1.6), este un punct al elipsei, adică verifică ecuația (4.1.2). Din ecuația (4.1.6), obținem

$$y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right).$$

Utilizând această relație și egalitatea (4.1.5), obținem

$$\begin{aligned} F_1 M &= \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} = \\ &= \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx + a^2} + \sqrt{\left(\frac{c}{a} + a\right)^2} = \left|a + \frac{c}{a}x\right|. \end{aligned}$$

Cum, în virtutea relației (4.1.6), $|x| \leq a$ și, în plus, $c < a$, avem

$$F_1 M = a + \frac{c}{a}x. \quad (4.1.7)$$

Exact la fel se obține

$$F_2 M = a - \frac{c}{a}x. \quad (4.1.8)$$

Însumând ultimele două egalități, obținem egalitatea (4.1.2). Astfel, relația (4.1.6) este ecuația elipsei. Ea se numește *ecuația canonică a elipsei*.

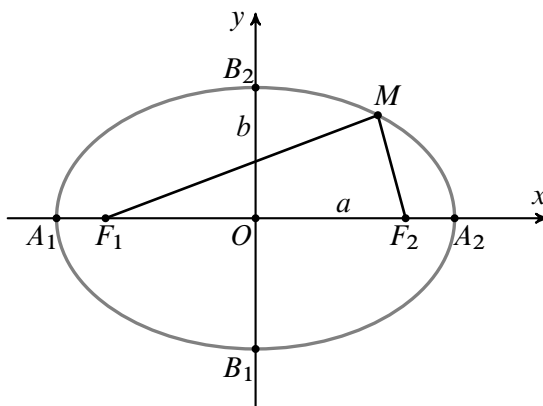


Figura 4.1: Elipsa

Studiul formei. Plecând de la ecuația (4.1.6), vom studia forma elipsei. Coordonatele punctelor de pe elipsă sunt supuse restricțiilor $|x| \leq a$ și $|y| \leq b$. Prin urmare, elipsa este mărginită de un dreptunghi de laturi $2a$ și $2b$, cu laturile paralele cu axele și cu centrul în origine. Mai departe, remarcăm că în ecuația (4.1.6) a elipsei apar numai puteri pare ale coordonatelor, de aceea elipsa este simetrică față de axe și, deci,

și față de origine. Aceasta înseamnă că dacă punctul $M(x, y)$ aparține elipsei, atunci același lucru este valabil pentru punctele $M(-x, y)$, $M(x, -y)$ și $M(-x, -y)$. Prin urmare, pentru a determina forma elipsei, este suficient să considerăm porțiunea ei cuprinsă în primul cadran al axelor de coordonate, iar în celelalte cadrane construcția ei se poate face prin simetrie. Pentru primul cadran, din ecuația (4.1.6) se obține:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}. \quad (4.1.9)$$

Prin urmare, avem de studiat graficul funcției

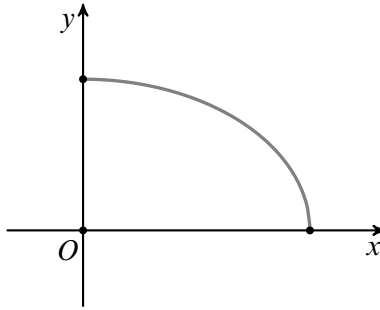


Figura 4.2: Porțiunea din elipsă cuprinsă în cadranul I

$$f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Este cât se poate de clar că nu avem de studiat limite la $\pm\infty$ sau asimptote, deci începem prin a calcula derivatele. Avem:

$$f'(x) = \frac{-bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$$

În ceea ce privește derivata a doua, se obține:

$$f''(x) = \frac{ab}{(x - a)(x + a)\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Se observă imediat că ambele derivate sunt negative, deci funcția este strict descrescătoare și concavă pe întreg domeniul de definiție, ceea ce înseamnă că graficul său este cel din figura 4.2.

Axele de simetrie ale elipsei (axele Ox și Oy), se numesc, pur și simplu, *axe*, iar centrul de simetrie (originea coordonatelor), se numește *centrul elipsei*. Punctele A_1, A_2, B_1 și B_2 , în care axele se intersectează cu elipsa, se numesc *vârfuri* ale elipsei. Termenul de *semiaxe* se folosește atât pentru segmentele OA_1, OA_2, OB_1 și OB_2 , cât și pentru lungimile lor, a și b . În ipotezele noastre, când focarele elipsei sunt pe axa Ox , din relația (4.1.5) rezultă că $a > b$. În acest caz, a se numește *semiaxă mare*, iar b – *semiaxă mică*. Totuși, ecuația (4.1.6) are sens și în cazul în care $a < b$; aceasta va fi, însă, ecuația unei elipse care are focarele pe axa Oy , în loc de Ox , iar semiaxa mare va fi egală cu b .

Un al treilea caz posibil este cel în care $a = b$. În acest caz, ecuația (4.1.6) se transformă în

$$x^2 + y^2 = a^2. \quad (4.1.10)$$

În cele ce urmează vom privi cercul ca un caz particular de elipsă, în care cele două semiaxe sunt egale, iar focarele coincid cu centrul cercului.

Excentricitatea. Se numește *excentricitate* a elipsei numărul real

$$\varepsilon = c/a. \quad (4.1.11)$$

Întrucât, din ipoteza făcută inițial, $c < a$, rezultă că $\varepsilon < 1$. În cazul cercului, focarele coincid, de aceea $c = 0$, iar excentricitatea este $\varepsilon = 0$.

Rescriem egalitatea (4.1.11) sub forma

$$\varepsilon = \sqrt{1 - (b/a)^2}.$$

De aici se observă că excentricitatea determină forma elipsei: cu cât ε este mai aproape de zero, cu atât elipsa este mai apropiată de un cerc; dacă excentricitatea elipsei crește, elipsa devine tot mai turtită.

Razele focale. Se numesc *raze focale* ale unui punct M al elipsei segmentele de dreaptă care unesc acest punct cu focarele F_1 și F_2 ale elipsei. Lungimile lor, r_1 și r_2 sunt date de formulele (4.1.7), respectiv (4.1.8), pe care le putem rescrie sub forma

$$\begin{aligned} r_1 &= a + \varepsilon x, \\ r_2 &= a - \varepsilon x. \end{aligned}$$

Intersecția cu o dreaptă. Tangenta la o elipsă. Vom studia numărul de puncte de intersecție pe care îl poate avea o dreaptă cu o elipsă. Vom presupune, mai întâi, că dreapta nu este paralelă cu axa Oy . Atunci ecuația sa se poate scrie cu ajutorul pantei:

$$y = kx + m. \quad (4.1.12)$$

Pentru a determina punctele de intersecție ale acestei drepte cu elipsa (4.1.6), înlocuim expresia lui y din formula (4.1.12) în ecuația (4.1.6). Obținem:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(kx + m)^2}{b^2} = 1$$

sau

$$(a^2k^2 + b^2)x^2 + 2a^2kmx + a^2(m^2 - b^2) = 0.$$

Această ecuație ne dă abscisele punctelor de intersecție. Întrucât este o ecuație de gradul doi, vor fi întotdeauna două puncte de intersecție (distincte, confundate sau imaginare). Discriminantul ecuației este:

$$\begin{aligned} \Delta &= 4a^4k^2m^2 - 4a^2(m^2 - b^2)(a^2k^2 + b^2) = 4a^4k^2m^2 - 4a^4k^2m^2 - \\ &\quad - 4a^2m^2b^2 + 4a^2b^2k^2 + 4a^2b^4 = 4a^2b^2(a^2k^2 + b^2 - m^2). \end{aligned}$$

Semnul discriminantului este dat de factorul $s = a^2k^2 + b^2 - m^2$. Putem avea, deci, următoarele situații:

1. dacă $-\sqrt{a^2k^2 + b^2} < m < \sqrt{a^2k^2 + b^2}$, atunci $\Delta > 0$, iar dreapta și elipsa au două puncte comune;
2. dacă $m = \pm\sqrt{a^2k^2 + b^2}$, atunci $\Delta = 0$, adică dreapta are un singur punct comun cu elipsa (dreapta este tangentă elipsei);
3. dacă $m \in (-\infty, -\sqrt{a^2k^2 + b^2}) \cup (\sqrt{a^2k^2 + b^2}, \infty)$, atunci $\Delta < 0$, iar dreapta și elipsa nu au puncte comune.

Prin urmare, pentru orice pantă k există două tangente la elipsă, având această pantă, anume

$$y = kx \pm \sqrt{a^2k^2 + b^2}. \quad (4.1.13)$$

Dacă dreapta este paralelă cu axa Oy , atunci ecuația sa este de forma $x = h$. Dacă înlocuim în ecuația elipsei, obținem

$$\frac{h^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

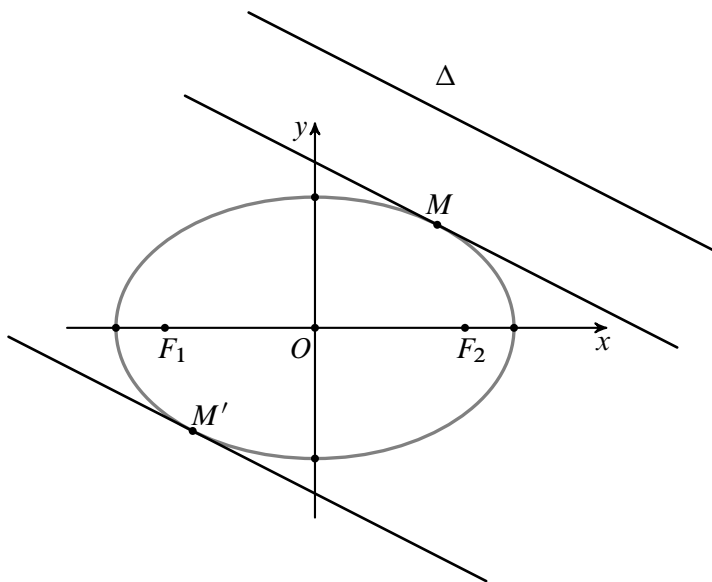


Figura 4.3: Tangentele la o elipsă paralele cu o dreaptă dată

de unde

$$y^2 = b^2 \left(1 - \frac{h^2}{a^2} \right).$$

De aici se observă imediat că dreapta $x = h$ intersectează elipsa în două puncte distincte dacă $h \in (-a, a)$, este tangentă elipsei dacă $h = \pm a$ și nu intersectează elipsa dacă $h \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$.

Problema tangentei la o elipsă se poate aborda și într-un alt mod. Anume, presupunem că vrem să determinăm ecuația tangentei într-un punct dat (x_0, y_0) al elipsei. Pentru a fixa ideile, presupunem că x_0 și y_0 sunt ambele pozitive. Atunci ele se află pe o ramură a elipsei care poate fi descrisă prin ecuația

$$y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Pentru a scrie ecuația tangentei, avem nevoie, mai întâi, de derivata lui y în x_0 :

$$y'(x_0) = b \frac{-\frac{x_0}{a^2}}{\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}}} = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0},$$

unde am ținut cont de faptul că punctul (x_0, y_0) verifică ecuația elipsei. Prin urmare, după cum se știe din analiză, ecuația tangentei este

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x_0}{y_0} x + \frac{b^2}{y_0} \frac{x_0^2}{a^2}.$$

Dacă înmulțim această ecuație cu $\frac{y_0}{b^2}$ obținem

$$\frac{y y_0}{b^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = -\frac{x x_0}{a^2} + \frac{x_0^2}{a^2}$$

sau, folosind din nou ecuația elipsei (pentru (x_0, y_0)),

$$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1,$$

adică ecuația tangentei într-un punct al unei elipse se poate scrie prin dedublare. Același rezultat se obține, fără dificultate, și dacă punctul de pe elipsă se află pe una dintre celelalte ramuri.

Vom descrie, în cele ce urmează, o altă metodă de a obține ecuația tangentei într-un punct al unei elipse. Fie, prin urmare, $M_0(x_0, y_0)$ un punct al elipsei

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ecuațiile parametrice ale unei drepte care trece prin M_0 vor fi:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt. \end{cases}$$

Dacă înlocuim în ecuația elipsei, obținem:

$$b^2(x_0^2 + 2tlx_0 + l^2t^2) + a^2(y_0^2 + 2tmy_0 + m^2t^2) - a^2b^2 = 0$$

sau, grupând după puterile lui t ,

$$t^2(b^2l^2 + a^2m^2) + 2t(a^2lx_0 + b^2my_0) + b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0.$$

Cum punctul M_0 este pe elipsă, termenul liber al ecuației trebuie să fie egal cu zero, deci ecuația se reduce la

$$t^2(b^2l^2 + a^2m^2) + 2t(b^2lx_0 + a^2my_0) = 0.$$

Pentru ca dreapta să fie tangentă elipsei, este necesar ca ecuația de mai sus să aibă rădăcină dublă. Aceasta se poate întâmpla dacă și numai dacă termenul de gradul întâi dispare, adică dacă avem

$$b^2lx_0 + a^2my_0 = 0.$$

Dacă vectorul director al dreptei este $\mathbf{v}(l, m)$, ecuația de mai sus înseamnă că vectorul $\mathbf{n}(b^2x_0, a^2y_0)$ este perpendicular pe dreaptă, adică acest vector este vectorul perpendicular pe tangentă. De aici rezultă că ecuația tangentei se poate scrie sub forma

$$b^2x_0(x - x_0) + a^2y_0(y - y_0) = 0$$

sau

$$b^2x_0x + a^2y_0y - b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = 0.$$

Cum, din nou, punctul M_0 este pe elipsă, termenul liber este $-a^2b^2$, deci ecuația tangentei se scrie

$$b^2x_0x + a^2y_0y - a^2b^2 = 0$$

sau

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1. \quad (4.1.14)$$

În fine, vom discuta cazul în care ni se cere să determinăm tangentele duse dintr-un punct la o elipsă. Plecăm, din nou, de la ecuația canonică a elipsei,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

După cum am văzut mai sus, ecuația unei tangente neverticale la această elipsă se poate scrie sub forma

$$y = kx + \sqrt{a^2k^2 + b^2}.$$

Cerem ca această tangentă să treacă printr-un punct $M(x_1, y_1)$. Asta înseamnă că

$$y_1 = kx_1 + \sqrt{a^2k^2 + b^2}$$

sau

$$(y_1 - kx_1)^2 - a^2k^2 - b^2 = 0$$

sau, încă,

$$k^2(x_1^2 - a^2) - 2kx_1y_1 + y_1^2 - b^2 = 0. \quad (4.1.15)$$

Discriminantul ecuației (4.1.15) este

$$\Delta = 4(b^2x_1^2 + a^2y_1^2 - a^2b^2). \quad (4.1.16)$$

Pentru a avea două tangente prin punctul M trebuie să avem $\Delta > 0$, adică

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 > 0. \quad (4.1.17)$$

Aceasta înseamnă că punctul M este exterior elipsei. Pantele celor două tangente vor fi

$$k_{1,2} = \frac{-x_1y_1 \pm \sqrt{b^2x_1^2 + a^2y_1^2 - a^2b^2}}{x_1^2 - a^2}.$$

Pentru a avea o singură tangentă, trebuie să avem $\Delta = 0$, adică

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 = 0. \quad (4.1.18)$$

De data asta, punctul trebuie să fie pe elipsă, iar panta unicei tangente va fi

$$k = \frac{-x_1y_1}{x_1^2 - a^2}.$$

Este ușor de constatat că, în acest caz, ecuația tangentei este chiar aceea care se obține prin dedublare, adică

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1 = 0.$$

În fine, nu avem tangente dacă $\Delta < 0$, adică dacă

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 < 0 \quad (4.1.19)$$

sau, ceea ce este același lucru, dacă punctul M este în interiorul elipsei. Examinăm acum cazul în care una dintre tangentele duse din punctul M este verticală. Este clar, atunci, că această tangentă trebuie să aibă ecuația

$$x = \pm a.$$

Așadar, vom avea $M = M(\pm a, y_1)$. Ce-a de-a doua tangentă din M nu poate să fie tot verticală, deci ecuația sa trebuie să fie de forma

$$y = kx \pm \sqrt{a^2k^2 + b^2}. \quad (4.1.20)$$

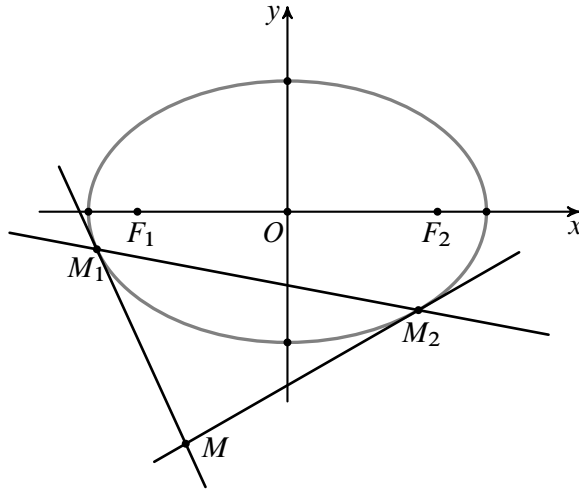


Figura 4.4: Tangente (neverticale) la elipsă dintr-un punct exterior

Pentru ca tangenta să treacă prin M , trebuie să avem

$$y_1 = \pm ka \pm \sqrt{a^2k^2 + b^2} \quad (4.1.21)$$

sau, ridicând la pătrat,

$$(y_1 \mp ka)^2 = a^2k^2 + b^2 \quad (4.1.22)$$

adică

$$y_1^2 \mp 2y_1ka + a^2k^2 = a^2k^2 + b^2$$

sau

$$\pm 2y_1ak = y_1^2 - b^2. \quad (4.1.23)$$

Dacă $y_1 = 0$, atunci ecuația de mai sus (în k) nu are soluție, ceea ce este normal, pentru că, în acest caz M este unul dintre vârfurile de pe Ox ale elipsei, deci nu există decât o singură tangentă, cea verticală. În caz contrar, din ecuația (4.1.23) rezultă că

$$k = \pm \frac{y_1^2 - b^2}{2ay_1}, \quad (4.1.24)$$

semnul alegându-se în funcție de vârful prin care trece tangenta verticală.

Exemplul 4.1. content...

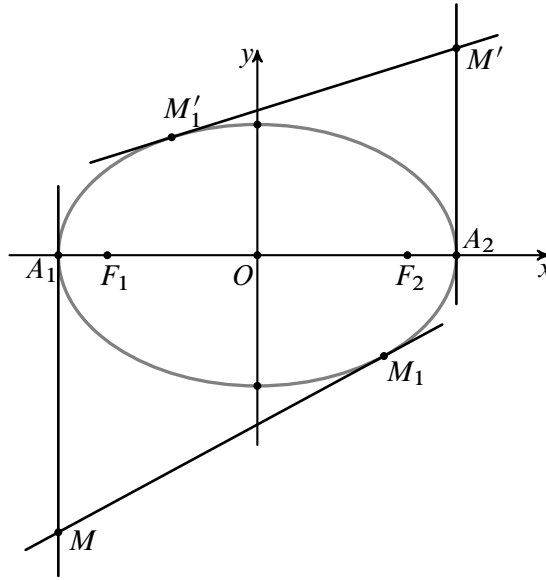


Figura 4.5: Tangente la elipsă, cu o tangentă verticală

4.2 Hiperbola

Definiția și deducerea formei canonice Considerăm că se dau, în plan, două puncte F_1 și F_2 , distanța dintre care este egală cu $2c$. Mai alegem un număr real a , care verifică inegalitatea

$$0 < a < c. \quad (4.2.1)$$

Definiția 4.2. Se numește *hiperbolă* figura geometrică formată din toate punctele din plan pentru care valoarea absolută a diferenței distanțelor până la punctele fixe F_1 și F_2 este constantă, egală cu $2a$. Punctele F_1 și F_2 se numesc *focare* ale hiperbolei.

Este clar acum de ce am impus dubla inegalitate (4.2.1): dacă $a = 0$, atunci figura este neinteresantă, întrucât ea se reduce la o dreaptă (mediatoarea segmentului $F_1 F_2$), în timp ce dacă $a > c$, figura este mulțimea vidă.

Vom stabili acum ecuația hiperbolei. În acest scop, alegem un reper cartezian în care axa Ox să coincidă cu dreapta $F_1 F_2$, cu sensul de la F_1 înspre F_2 . Originea o alegem în mijlocul segmentului $F_1 F_2$. Prin urmare, coordonatele focarelor vor fi $F_1(-c, 0)$ și $F_2(c, 0)$. Dacă $M(x, y)$ este un punct oarecare al hiperbolei, atunci, în

conformitate cu definiția, avem

$$|F_1M - F_2M| = 2a$$

sau

$$F_1M - F_2M = \pm 2a. \quad (4.2.2)$$

Dacă înlocuim în ecuația (4.2.2) expresiile

$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

obținem

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a. \quad (4.2.3)$$

Aceasta este ecuația hiperbolei. În cele ce urmează, vom obține o formă mai simplă a ei. Trecem al doilea radical în membrul drept și ridicăm ambii membri la pătrat și obținem

$$cx - a^2 = \pm a \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Dacă ridicăm din nou la pătrat și reducem termenii asemenea, obținem

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

sau

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1. \quad (4.2.4)$$

introducem acum mărimea

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

În virtutea inegalității (4.2.1), ea este reală. Atunci

$$b^2 = c^2 - a^2, \quad (4.2.5)$$

iar ecuația (4.2.4) capătă forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4.2.6)$$

Am demonstrat până acum că toate punctele hiperbolei, care verifică, deci, ecuația (4.2.3),

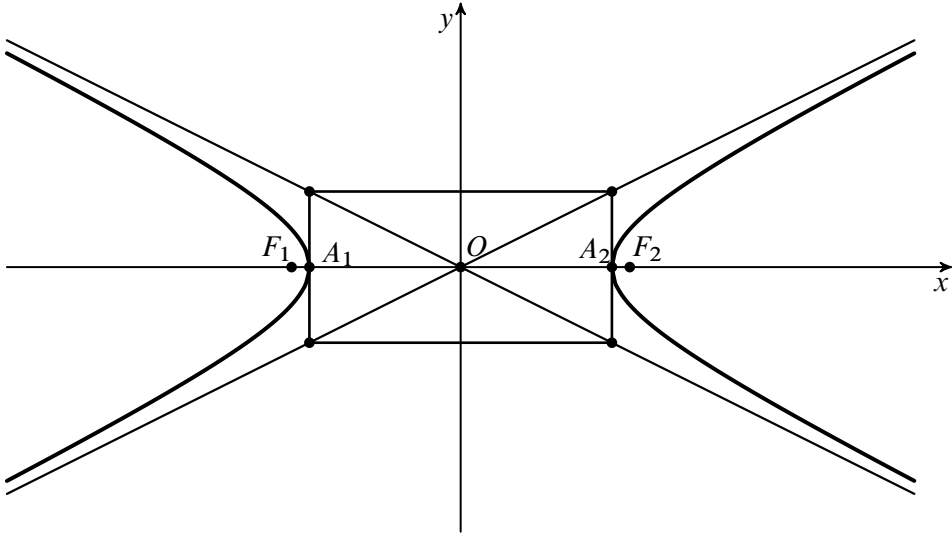


Figura 4.6: Hiperbola

verifică, de asemenea, ecuația (4.2.6). Vom demonstra, acum, că și afirmația inversă este adevărată. Fie, prin urmare, $M(x, y)$ un punct ce verifică ecuația (4.2.6). Atunci

$$y^2 = b^2 \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right).$$

Folosind această relație și egalitatea (4.2.5), obținem

$$\begin{aligned} F_1 M &= \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2} = \\ &= \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx + a^2} = \left| \frac{c}{a}x + a \right|. \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

În mod analog, se obține

$$F_2 M = \left| \frac{c}{a}x - a \right|. \quad (4.2.8)$$

Cum din egalitatea (4.2.6) rezultă că $|x| \geq a$, iar, în virtutea inegalității (4.2.1), $c > a$, rezultă că pentru $x \geq a$ formulele (4.2.7) și (4.2.8) ne conduc la

$$F_1 M = \frac{c}{a}x + a, \quad F_2 M = \frac{c}{a}x - a. \quad (4.2.9)$$

Prin urmare,

$$F_1 M - F_2 M = 2a.$$

Pentru $x \leq -a$ avem

$$F_1 M = -\frac{c}{a}x - a, \quad F_2 M = -\frac{c}{a}x + a. \quad (4.2.10)$$

Prin urmare,

$$F_1 M - F_2 M = -2a.$$

Așadar, orice punct care verifică ecuația (4.2.6) verifică, de asemenea, ecuația (4.2.2), deci și ecuația (4.2.3). Prin urmare, ecuația (4.2.6) este echivalentă cu ecuația hiperbolei. Ea se numește *ecuația canonică a hiperbolei*.

Studiul formei hiperbolei. Asimptote. Din ecuația (4.2.6) se vede imediat că $|x| \geq a$. Aceasta înseamnă că hiperbola este situată, în întregime, în afara benzii verticale delimitată de dreptele $x = -a$ și $x = a$.

Ca și în cazul elipsei, în ecuația canonică a hiperbolei intră numai puteri pare ale variabilelor x și y , ceea ce înseamnă că și hiperbola are două axe de simetrie (axele de coordonate) și un centru de simetrie (originea coordonatelor). De aceea, este suficient să studiem forma hiperbolei în primul cadran al axelor de coordonate, întrucât în celelalte trei se poate, apoi, deduce prin simetrie. În acest cadran, se obține, din ecuația (4.2.6):

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}, \quad x \geq a. \quad (4.2.11)$$

Graficul acestei funcții, care începe din punctul $A(a, 0)$ este nemărginit la dreapta și superior. Este ușor de constatat că dreapta

$$y = \frac{b}{a}x \quad (4.2.12)$$

este asimptotă oblică la $+\infty$ a acestui grafic. Este, de asemenea, clar, din motive de simetrie, că dreapta

$$y = \pm \frac{b}{a}x$$

sunt, ambele, asimptote oblice la graficul hiperbolei, atât la $+\infty$, cât și la $-\infty$.

În cazul elipsei, am văzut că există un dreptunghi, cu centrul în origine și de laturi $2a$, respectiv $2b$, cu laturile paralele cu axele de coordonate, care conține întreaga elipsă și care este, de asemenea, tangent elipsei. Un rol asemănător îl joacă în cazul hiperbolei același dreptunghi, atâta doar că:

- hiperbola se află în exteriorul dreptunghiului;
- doar două dintre laturile dreptunghiului sunt tangente la elipsă și
- diagonalele acestui dreptunghi (dreptele lor suport, de fapt) sunt chiar asimptotele hiperbolei.

Hiperbola este o figură alcătuită din două ramuri. Semnul “+” din egalitatea (4.2.2) corespunde ramurii din dreapta, în timp ce semnul “-” corespunde ramurii din stânga. Centrul de simetrie al hiperbolei se numește, pur și simplu, *centrul hiperbolei*. Axele sale de simetrie se numesc *axele hiperbolei*. Mai precis, axa care intersectează hiperbola se numește *axă reală*, în timp ce axa ce nu o intersectează se numește *axă imaginară*. Punctele A_1 și A_2 , în care axa reală intersectează hiperbola se numesc *vârfuri* ale hiperbolei. De asemenea, ca și în cazul elipsei, numerele a și b se numesc *semiaxe* ale hiperbolei. Dacă $a = b$, atunci hiperbola se numește *echilateră*. E ușor de constatat că în cazul unei hiperbole echilatre asimptotele formează un unghi de 45° cu axa Ox .

Alături de hiperbola (4.2.6), se poate considera și curba de ecuație

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4.2.13)$$

Se poate vedea cu ușurință că și această curbă este o hiperbolă, pentru care focarele sunt situate pe axa Oy . Vom spune despre cele două hiperbole (care au aceleași axe și aceleași asimptote) că sunt *conjugate*.

Excentricitatea. Se numește *excentricitate* a hiperbolei numărul

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

Este clar, din însăși definiția hiperbolei, că $\varepsilon > 1$. Excentricitatea determină forma dreptunghiului fundamental, deci, în ultimă instanță, forma hiperbolei. Astfel, cu cât excentricitatea este mai mare, cu atât cele două ramuri ale hiperbolei se apropie mai mult de axa Oy și, cu cât excentricitatea este mai apropiată de 1, cu atât hiperbola se apropie mai tare de axa Ox .

Intersecția hiperbolei cu o dreaptă. Tangenta la o hiperbolă. Analog cu ceea ce am făcut în cazul elipsei, ne vom ocupa acum de problema intersecției dintre o hiperbolă dată de ecuația implicită (4.2.6) și o dreaptă.

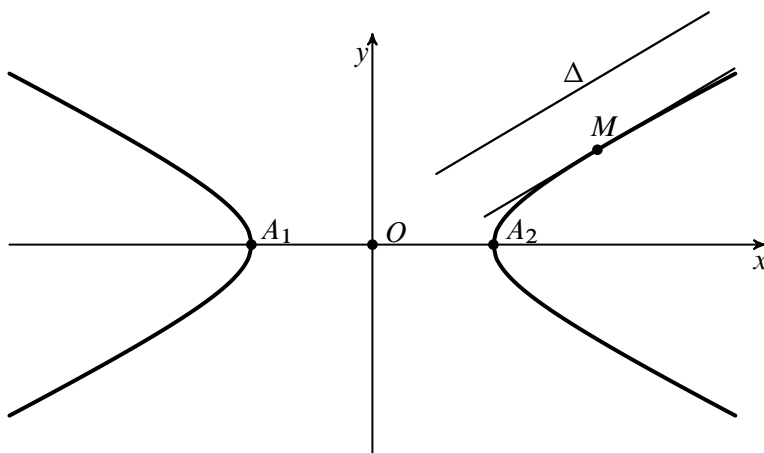


Figura 4.7: Tangenta la o hiperbolă, de direcție dată

Să presupunem, mai întâi, că dreapta nu este verticală. Atunci ecuația ei se poate scrie cu ajutorul pantei, adică

$$y = kx + m. \quad (4.2.14)$$

Dacă înlocuim pe y din formula de mai sus în ecuația (4.2.6) a hiperbolei, obținem ecuația care ne dă abscisa (sau abscisele) punctului (sau punctelor) de intersecție:

$$(b^2 - a^2k^2)x^2 - 2a^2kmx - a^2(b^2 + m^2) = 0. \quad (4.2.15)$$

Această ecuație se numește *ecuația de intersecție*. Dacă $b^2 - a^2k^2 \neq 0$, atunci ecuația (4.2.15) este de gradul doi, deci pentru a determina numărul rădăcinilor sale reale trebuie să facem apel la discriminantul ecuației. Avem

$$\Delta = -4a^2b^2(-b^2 + a^2k^2 - m^2). \quad (4.2.16)$$

Pentru ca dreapta să fie tangentă la hiperbolă, trebuie să avem $\Delta = 0$, adică

$$a^2k^2 = b^2 + m^2.$$

Este clar că, întrucât $b \neq 0$, vom avea, întotdeauna, două tangente, pentru un m dat. Dacă $\Delta > 0$, adică dacă

$$a^2k^2 < b^2 + m^2,$$

atunci dreapta și hiperbola vor avea două puncte în comun.

Dacă $\Delta < 0$, adică dacă

$$a^2k^2 > b^2 + m^2,$$

atunci dreapta și hiperbola nu vor avea în comun.

Dacă, pe de altă parte, $b^2 - a^2k^2 = 0$, atunci sunt posibile două situații:

1. $m = 0$;
2. $m \neq 0$.

În prima situație, avem două drepte, de pante $k = \pm b/a$, care trec prin origine. Este clar că aceste două drepte nu sunt altceva decât asimptotele hiperbolei, despre care știm, deja, că nu au puncte comune cu hiperbola.

În ce-a de-a doua situație, avem de-a face cu drepte care sunt paralele cu asimptotele hiperbolei, așadar ele intersectează hiperbola exact într-un punct.

Să considerăm acum intersecția dintre hiperbolă și o dreaptă verticală. O astfel de dreaptă are ecuația de forma $x = h$. Trebuie, deci, să rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ x = h, \end{cases}$$

care ne conduce la

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{a^2} - 1$$

sau

$$y^2 = \frac{b^2(h^2 - a^2)}{a^2}.$$

Este clar că avem trei situații posibile:

1. Dacă $|h| > a$, atunci hiperbola și dreapta se intersectează în două puncte, de abscisă $x = h$ și ordinate

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{h^2 - a^2}.$$

2. Dacă $h = \pm a$, atunci hiperbola și dreapta au două puncte confundate în comun, deci dreapta este tangenta la hiperbolă într-unul dintre cele două vârfuri ale sale.

3. Dacă $|h| < a$, atunci hiperbola și dreapta nu au puncte comune.

Ecuția tangentei la hiperbolă prin dedublare. Utilizând exact aceeași metodă ca și în cazul elipsei, se obține

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

pentru ecuația tangentei în punctul $M_0(x_0, y_0)$ al hiperbolei.

Tangente la hiperbolă duse dintr-un punct exterior. Procedăm exact ca și în cazul elipsei. Începem cu situația în care nici una dintre tangentele duse din $M(x_1, y_1)$ nu este verticală. Atunci, după cum am văzut, ecuația tangentei este de forma

$$y = kx \pm \sqrt{a^2k^2 - b^2}.$$

Pentru ca tangenta să treacă prin M , trebuie să avem

$$y_1 - kx_1 = \pm \sqrt{a^2k^2 - b^2}$$

sau, ridicând la pătrat,

$$(y_1 - kx_1)^2 = a^2k^2 - b^2.$$

Se obține, astfel, ecuația

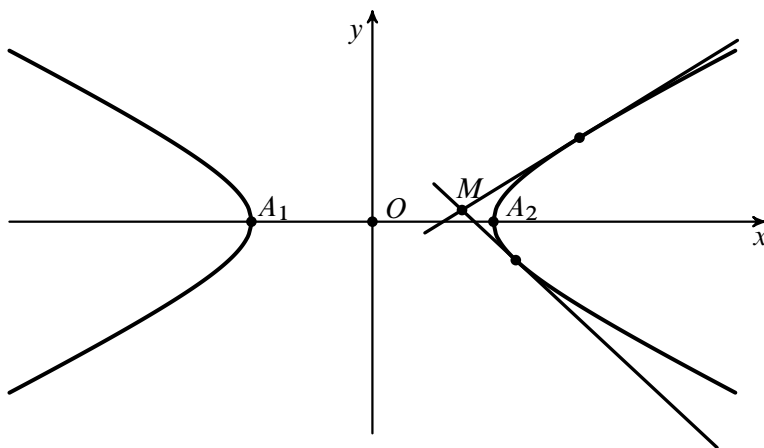


Figura 4.8: Tangente la hiperbolă dintr-un punct exterior (tangente neverticale)

$$(x_1^2 - a^2)k^2 - 2x_1y_1k + (y_1^2 + b^2) = 0.$$

Aceasta este ecuația care ne dă pantele celor două tangente. Discriminantul ei este:

$$\Delta = 4(a^2 y_1^2 - b^2 x_1^2 + a^2 b^2) = -4a^2 b^2 \left(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 1 \right).$$

Se observă imediat că:

- avem două tangente dacă

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 1 < 0,$$

adică punctul este între cele două ramuri ale hiperbolei;

- avem o singură tangentă dacă

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 1 = 0,$$

adică dacă punctul este pe hiperbolă;

- nu avem tangente dacă

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 1 > 0,$$

adică dacă punctul este în interiorul uneia dintre ramurile hiperbolei.

Examinăm acum cazul în care una dintre tangente este verticală, ceea ce înseamnă că are ecuația

$$x = \pm a.$$

Așadar, vom avea $M = M(\pm a, y_1)$. Ce-a de-a doua tangentă din M nu poate să fie tot verticală, deci ecuația sa trebuie să fie de forma

$$y = kx \pm \sqrt{a^2 k^2 - b^2}. \quad (4.2.17)$$

Pentru ca tangenta să treacă prin M , trebuie să avem

$$y_1 = \pm ka \pm \sqrt{a^2 k^2 - b^2} \quad (4.2.18)$$

sau, ridicând la pătrat,

$$(y_1 \mp ka)^2 = a^2 k^2 - b^2 \quad (4.2.19)$$

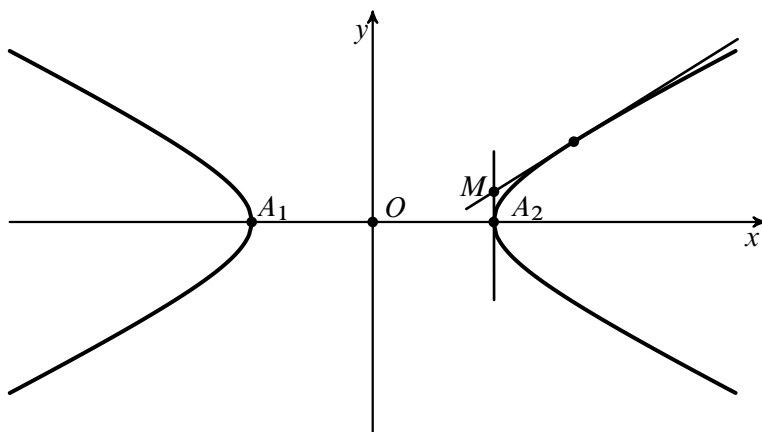


Figura 4.9: Tangente la hiperbolă dintr-un punct exterior (o tangentă verticală)

adică

$$y_1^2 \mp 2y_1ka + a^2k^2 = a^2k^2 - b^2$$

sau

$$\pm 2y_1ak = y_1^2 + b^2. \quad (4.2.20)$$

Dacă $y_1 = 0$, atunci ecuația de mai sus (în k) nu are soluție, ceea ce este normal, pentru că, în acest caz M este unul dintre vârfurile de pe Ox ale elipsei, deci nu există decât o singură tangentă, cea verticală. În caz contrar, din ecuația (4.1.23) rezultă că

$$k = \pm \frac{y_1^2 + b^2}{2ay_1}, \quad (4.2.21)$$

semnul alegându-se în funcție de vârful prin care trece tangentă verticală.

4.3 Parabola

Definiția și ecuația canonică

Definiția 4.3. Se numește *parabolă* locul geometric al punctelor din plan care sunt egal depărtate de o dreaptă fixă Δ , numită *directoare* și de un punct fix F , numit *focar*.

Fie p distanța de la punctul F la dreapta Δ . Construim un sistem rectangular de coordonate în plan în modul următor. În calitate de axă Ox alegem perpendiculara

coborâtă din punctul F pe dreapta Δ , cu sensul de la directoare înspre focar, în timp ce axa Oy va fi mediatoarea segmentului determinat de F și piciorul perpendicularei coborâte din F pe Δ , cu sensul ales astfel încât reperul xOy să fie drept, unde O este punctul de intersecție a celor două axe de coordonate. Aceasta înseamnă că punctul F are coordonatele $(p/2, 0)$, în timp ce ecuația dreptei Δ este $x = -p/2$. ' Fie,

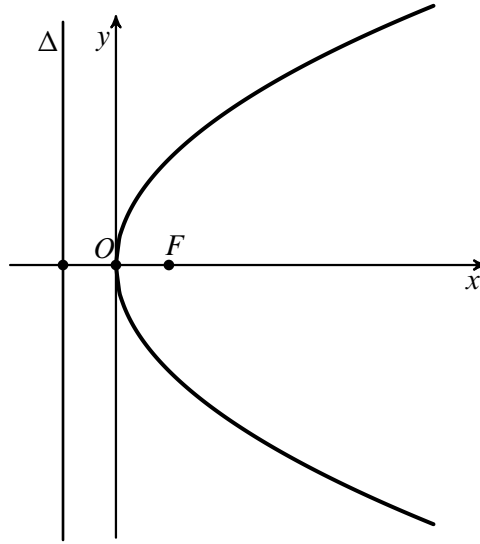


Figura 4.10: Parabola

acum, $M(x, y)$ un punct oarecare al parabolei. Atunci, distanța de la M la F este egală cu

$$d(M, F) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2},$$

în timp ce distanța de la M la Δ este

$$d(M, \Delta) = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Așadar, ecuația parabolei este, conform definiției,

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|. \quad (4.3.1)$$

Este ușor de constatat că egalitatea (4.3.1) poate avea loc doar dacă

$$\left|x + \frac{p}{2}\right| = x + \frac{p}{2},$$

adică dacă

$$x \geq -\frac{p}{2}.$$

ceea ce înseamnă că ecuația parabolei, (4.3.1) se poate rescrie sub forma

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}. \quad (4.3.2)$$

Prin ridicare la pătrat, această ecuație este echivalentă (în acest caz particular!!) cu ecuația

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

sau, după reducerea termenilor asemenea, cu ecuația

$$y^2 = 2px. \quad (4.3.3)$$

Ecuația (4.3.3) se numește *ecuația canonică a parabolei de parametru p* .

Forma parabolei. Remarcăm, înainte de toate, că din ecuația canonică (4.3.3) rezultă imediat că x poate lua doar valori nenegative, prin urmare parabola dată de această ecuație este situată de partea dreaptă a axei Oy .

Cum ecuația (4.3.3) conține variabila y doar la puterea a doua, rezultă că parabola este simetrică față de axa Ox și, deci, pentru studiul formei, este suficient să examinăm partea din parabolă situată în primul cadran. În acest cadran, ecuația parabolei se poate scrie sub forma

$$y = \sqrt{2px}. \quad (4.3.4)$$

Dacă se calculează primele două derivate ale lui y , se obține imediat că

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2px}}, \quad (4.3.5)$$

respectiv

$$y'' = -\frac{\sqrt{2}p^2}{4(px)^{3/2}}. \quad (4.3.6)$$

Așadar, pe intervalul $(0, \infty)$, $y' > 0$, în timp ce $y'' < 0$. Aceasta înseamnă că funcția y este strict crescătoare și concavă pe acest interval. Forma curbei în cadrantul al patrulea se obține din cea din cadrantul 1, printr-o reflexie față de axa Ox .

Axa de simetrie a parabolei (4.3.3), adică axa Ox , se numește *axa parabolei*, în timp ce punctul în care parabola intersectează axa (originea, în cazul nostru), se numește *vârful parabolei*.

Parametrul parabolei. Mărima p care apare în ecuația canonică (4.3.3) se numește *parametru focal* sau, pur și simplu, *parametru* al parabolei. Vom indica, în cele ce urmează, o altă interpretare geometrică a acestui parametru. Considerăm dreapta care trece prin focarul parabolei și este perpendiculară pe axa parabolei. Se observă, imediat, că ecuația acestei drepte este

$$x = \frac{p}{2}. \quad (4.3.7)$$

Fie M_1 și M_2 punctele de intersecție dintre această dreaptă și parabolă. Rezolvând sistemul de ecuații format de ecuațiile (4.3.3) și (4.3.7), obținem $y = \pm p$, prin urmare

$$p = FM_1. \quad (4.3.8)$$

Astfel, *parametrul p al parabolei este egal cu lungimea perpendicularei ridicate pe axa parabolei, între focarul parabolei și punctul în care perpendiculara intersectează parabola.*

Parametrul este cel care definește forma și dimensiunile parabolei.

Observație. Alături de ecuația (4.3.3), tot parabole definesc și următoarele trei ecuații (canonice!):

$$y^2 = -2px, \quad x^2 = 2py, \quad x^2 = -2py. \quad (4.3.9)$$

Astfel, prima ecuație ne dă o parabolă simetrică față de axa Oy în raport cu parabola (4.3.3), iar celelalte două parabole se obțin aplicând o rotație de 90° , respectiv -90° , parabolei (4.3.3), în jurul originii.

Intersecția parabolei cu o dreaptă. Tangenta la o parabolă. Considerăm parabola (4.3.3) și o dreaptă, pe care o considerăm, în prima instanță, neverticală. Pentru a determina punctele de intersecție, trebuie să rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} y^2 = 2px, \\ y = kx + b. \end{cases}$$

Înlocuind cea de-a doua ecuație în prima, obținem ecuația în x :

$$k^2x^2 + 2(kb - p)x + b^2 = 0. \quad (4.3.10)$$

Această ecuație se numește *ecuația de intersecție* dintre parabolă și dreaptă. Cum ea este o ecuație de gradul doi în x , înseamnă că parabola și dreapta pot avea în comun

două puncte distincte, un singur punct (sau două puncte confundate) sau niciun punct, în funcție de discriminantul ecuației (4.3.10).

Un calcul simplu ne arată că discriminantul este dat de

$$\Delta = 4p(p - 2bk). \quad (4.3.11)$$

Prin urmare,

(i) Parabola și dreapta au două puncte distincte în comun dacă

$$\Delta > 0, \quad \text{adică} \quad kb < \frac{p}{2}.$$

(ii) Parabola și dreapta au două puncte confundate în comun (adică, de fapt, un singur punct) dacă

$$\Delta = 0, \quad \text{adică} \quad kb = \frac{p}{2}.$$

În acest caz parabola și dreapta sunt tangente. De remarcat că, întrucât parametrul p al parabolei este strict pozitiv, rezultă că (de vreme ce $kb \neq 0$):

- tangenta la o parabolă nu poate fi orizontală (mai precis, în cazul general, nu poate fi paralelă cu axa parabolei);
- nu există tangente neverticale la o parabolă care să treacă prin vârful parabolei.

(iii) Parabola și dreapta nu puncte în comun dacă

$$\Delta < 0, \quad \text{adică} \quad kb > \frac{p}{2}.$$

În particular, orice dreaptă paralelă cu axa parabolei (adică orizontală) intersectează parabola în două puncte distincte; de asemenea, orice dreaptă (nevertică) care trece prin origine intersectează parabola în două puncte distincte.

Să analizăm, acum, intersecția dintre parabola (4.3.3) și o dreaptă verticală. În acest caz, avem de rezolvat sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} y^2 = 2px, \\ x = a, \end{cases}$$

care ne conduce la ecuația de intersecție (în y de data aceasta);

$$y^2 - 2ap = 0. \quad (4.3.12)$$

Cum, din nou, $p > 0$, intersecția este:

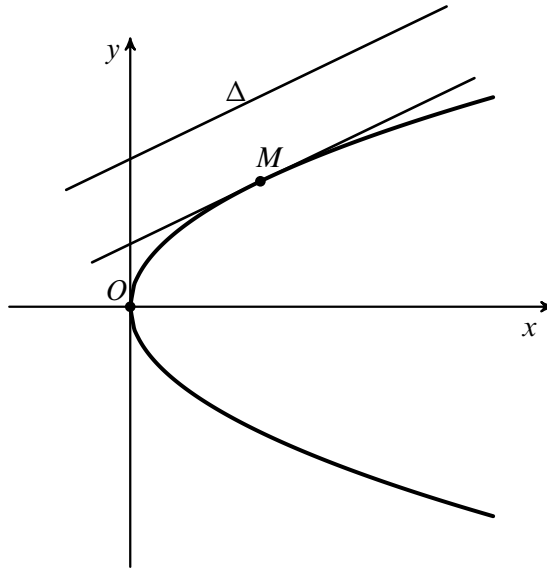


Figura 4.11: Tangenta la o parabolă, paralelă cu o direcție

- (i) o pereche de puncte distincte, dacă $a > 0$;
- (ii) o pereche de puncte confundate (adică un singur punct) dacă $a = 0$. Dreapta este, în acest caz tangetă parabolei. Ea coincide cu axa Oy .
- (iii) mulțimea vidă, dacă $a < 0$.

Ecuția tangentei într-un punct al parabolei. Plecăm, din nou, de la ecuația canonică a parabolei și considerăm o dreaptă care intersectează parabola într-un punct $M_0(x_0, y_0)$. Ecuțiile parametrice ale dreptei vor fi, deci

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt. \end{cases}$$

Înlocuind în ecuația parabolei, obținem

$$(y_0 + mt)^2 = 2p(x_0 + lt)$$

sau, după ce facem calculele,

$$m^2 t^2 + 2t(-pl + my_0) + y_0^2 - 2p_0 = 0.$$

Termenul liber se anulează, deoarece M_0 se află pe parabolă, deci ecuația se reduce

$$m^2 t^2 + 2t(-pl + my_0) = 0.$$

Condiția de tangență înseamnă, ca și în cazul celorlalte conice, că ecuația de intersecție trebuie să aibă soluție dublă, deci, în cazul nostru, coeficientul lui t trebuie să fie zero:

$$-pl + my_0 \equiv \mathbf{v}(l, m) \cdot \mathbf{n}(-p, y_0) = 0,$$

adică vectorul $\mathbf{n}(-p, y_0)$ este vectorul normal al tangentei. Prin urmare, ecuația tangentei este:

$$-p(x - x_0) + y_0(y - y_0) = 0$$

sau

$$yy_0 = p(x + x_0),$$

unde am utilizat, din nou, faptul că punctul M_0 aparține parabolei. Și de data aceasta, ca și în cazul conicelor cu centru, spunem că această formă a ecuației parabolei a fost obținută prin dedublare. E o mică diferență față de cazul celorlalte două conice, pentru că aici apare x la puterea întâi. De data asta, regula de dedublare înseamnă că:

- x se înlocuiește cu $(x + x_0)/2$;
- y^2 se înlocuiește cu yy_0 .

Tangente duse dintr-un punct exterior parabolei. Considerăm un punct $M(x_1, y_1)$. Începem, ca de obicei, cu cazul tangențelor neverticale. Am văzut că ele au ecuația de forma

$$y = kx + \frac{p}{2k}.$$

Pentru ca M să se afle pe tangentă, trebuie să avem

$$y_1 = kx_1 + \frac{p}{2k},$$

de unde

$$2x_1k^2 - 2y_1k + p = 0.$$

Discriminantul este

$$\Delta = 4(y_1^2 - 2px_1).$$

Prin urmare:

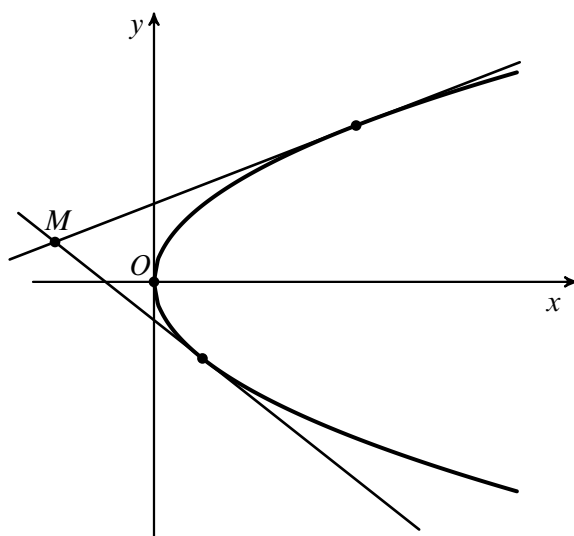


Figura 4.12: Tangente neverticale la o parabolă, dintr-un punct exterior

- avem două tangente dacă $y_1^2 - 2px_1 > 0$ (punctul e în afara parabolei);
- avem o singură tangentă dacă $y_1^2 - 2px_1 = 0$ (punctul este pe parabolă);
- nu avem tangente dacă $y_1^2 - 2px_1 < 0$ (punctul este în interiorul parabolei).

Ecuția tangentei este de forma

$$y - y_1 = k(x - x_1),$$

cu k dat de ecuația de gradul doi de mai sus.

Să vedem ce se întâmplă dacă una dintre tangente este verticală. Ea trebuie să aibă ecuația

$$x = 0.$$

Căutăm panta celei de-a doua tangente. Remarcăm, mai întâi, că $x_1 = 0$. Ecuția tangentei trebuie să fie

$$y = kx + \frac{p}{2k}.$$

Ca să treacă prin M ,

$$y_1 = \frac{p}{2k}.$$

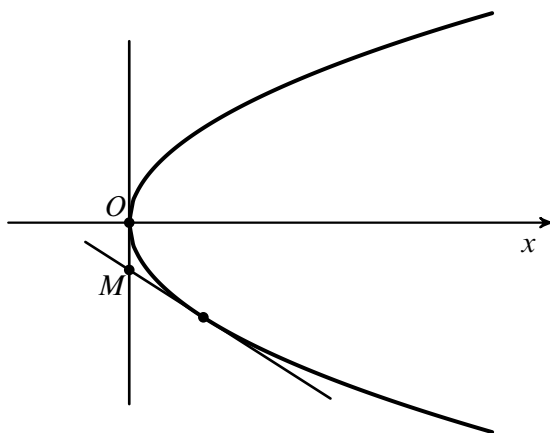


Figura 4.13: Tangente la parabolă dintr-un punct exterior (o tangentă verticală)

Figura 4.14: parabola4

Dacă $y_1 = 0$, atunci avem o singură tangentă (cea verticală). În caz contrar,

$$k = \frac{p}{2y_1},$$

adică ecuația tangentei este

$$y - y_1 = \frac{p}{2y_1}x.$$

4.4 Probleme

Problema 4.1. Determinați locul geometric al mijloacelor coardelor elipsei $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, care sunt paralele cu dreapta $x + 2y = 1$.

Problema 4.2. Se consideră elipsa $x^2 + 4y^2 = 25$. Să se determine coardele care trec prin $A(7/2, 7/4)$ pentru care punctul A este mijlocul lor.

Problema 4.3. Prin punctul $M(0, 3)$ să se ducă o dreaptă care să intersecteze elipsa $x^2 + 4y^2 = 20$ în două puncte A și B astfel încât $MA = MB$.

Problema 4.4. Se consideră elipsa $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. Să se găsească punctele M de pe elipsă pentru care unghiul $\widehat{F_1MF_2}$ este drept.

Problema 4.5. Se consideră elipsa $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. Să se găsească punctele M de pe elipsă pentru care unghiul $\widehat{F_1MF_2}$ este de 60° .

Problema 4.6. Se consideră elipsa $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. Să se găsească punctele M de pe elipsă pentru care unghiul $\widehat{F_1MF_2}$ este maxim.

Problema 4.7. Determinați tangentele la elipsa $\frac{x^2}{10} + \frac{2y^2}{5} = 1$ care sunt paralele cu dreapta

$$3x + 2y + 7 = 0.$$

Problema 4.8. Determinați tangentele la elipsa $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$ care sunt paralele cu dreapta

$$4x - 2y + 23 = 0$$

și calculați distanța dintre ele.

Problema 4.9. Determinați locul geometric al mijloacelor coardelor hiperbolei $x^2 - 2y^2 = 1$, care sunt paralele cu dreapta $2x - y = 0$.

Problema 4.10. Se consideră hiperbola $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$. Să se găsească punctele M de pe hiperbolă pentru care unghiul $\widehat{F_1MF_2}$ este drept.

Problema 4.11. Se consideră hiperbola $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$. Să se găsească punctele M de pe hiperbolă pentru care unghiul $\widehat{F_1MF_2}$ este de 60° .

Problema 4.12. Se consideră hiperbola $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$. Să se găsească punctele M de pe hiperbolă pentru care unghiul $\widehat{F_1MF_2}$ este maxim.

Problema 4.13. Calculați aria formată de asimptotele hiperbolei $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ și de dreapta

$$3x + 2y - 7 = 0.$$

Problema 4.14. Determinați tangentele la hiperbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{8} = 1$ care sunt paralele cu dreapta

$$4x + 2y - 5 = 0.$$

Problema 4.15. Determinați tangenta la parabola $y^2 = 16x$ care trece prin punctul $(-2, 2)$.

Problema 4.16. Determinați tangentele comune la elipsele

$$\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{și} \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{18} = 1.$$

Problema 4.17. Determinați relația dintre coordonatele punctului (x_0, y_0) astfel încât din el să nu se poată duce nici o tangentă la hiperbola

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Problema 4.18. Pe hiperbola $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{18} = 1$ determinați punctul M cel mai apropiat de dreapta

$$3x + 2y + 1 = 0$$

și determinați distanța de la acest punct la dreaptă.

Problema 4.19. Determinați ecuațiile tangentelor duse din punctul $A(-1, -7)$ la hiperbola $x^2 - y^2 = 16$.

Problema 4.20. Din punctul $P(1, -5)$ se duc tangente la hiperbola $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$. Determinați distanța de la punctul P la coarda hiperbolei care unește punctele de contact ale tangentelor cu hiperbola.

Problema 4.21. Determinați valorile pantei k pentru care dreapta $y = kx + 2$ este tangentă la parabola $y^2 = 4x$.

Problema 4.22. Scrieți ecuația tangentei la parabola $y^2 = 8x$ care este paralelă cu dreapta

$$3x + 2y - 3 = 0.$$

Problema 4.23. Scrieți ecuația tangentei la parabola $y^2 = 16x$ care este perpendiculară pe dreapta

$$4x + 2y + 7 = 0.$$

Problema 4.24. Scrieți ecuația tangentei la parabola $y^2 = 12x$ care este paralelă cu dreapta

$$3x - 2y + 30 = 0$$

și determinați distanța dintre tangentă și această dreaptă.

Problema 4.25. Scrieți ecuațiile tangentelor la parabola $y^2 = 36x$ duse din punctul $A(2, 9)$.

Problema 4.26. Din punctul $A(5, 12)$ se duc tangente la parabola $y^2 = 5x$. Scrieți ecuația dreptei care unește punctele de contact.

Problema 4.27. Din punctul $P(-3, 12)$ se duc tangente la parabola $y^2 = 10x$. Calculați distanța de la punctul P la coarda parabolei care unește punctele de contact.

CAPITOLUL 5

Conice pe ecuația generală

5.1 Introducere

Am studiat, în capitolul precedent, trei curbe de gradul al doilea. În cazul fiecăreia dintre ele am dedus ecuația utilizând un sistem de coordonate cartezian adaptat curbei respective. În acest capitol vom demonstra că orice ecuație de gradul al doilea în două variabile descrie una dintre aceste curbe (sau niște cazuri degenerate ale lor) și vom arăta cum, printr-o schimbare bine aleasă de coordonate, ecuația curbei se reduce la ecuația uneia dintre curbele pe care le-am studiat în capitolul precedent.

Definiția 5.1. Se numește *conică generală* sau, pur și simplu *conică* mulțimea punctelor din plan ale căror coordonate relativ la un sistem de coordonate ortonormat verifică ecuația

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \quad (5.1.1)$$

Coeficienții a_{ij} sunt numere reale, iar cel puțin unul dintre coeficienții termenilor de gradul al doilea trebuie să fie nenul.

Matricea

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (5.1.2)$$

și determinantul său se numesc *matricea asociată conicii*, respectiv *determinantul asociat conicii*.

O conică se numește *nedegenerată* dacă $\det A_1 \neq 0$ și *degenerată* în caz contrar.

Definiția 5.2. Forma pătratică

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \quad (5.1.3)$$

se numește *forma pătratică asociată conicii* (5.1.1), iar matricea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (5.1.4)$$

și determinantul său se numesc *matricea*, respectiv *determinantul* formei pătratice (5.2.2).

5.2 Transformarea coeficienților ecuației conice la o schimbare de coordonate

Plecăm de la sistemul de coordonate cartezian xOy , relativ la care ecuația conice este (5.1.1). Să presupunem că vrem ca noua origine a sistemului de coordonate să fie punctul O' , care are coordonatele (x_0, y_0) relativ la sistemul de coordonate xOy . Atunci coordonatele unui punct relativ la sistemul de coordonate xOy și coordonatele sale relativ la sistemul de coordonate $x'O'y'$, obținut prin translatarea axelor de coordonate cu vectorul $\overrightarrow{OO'}$ sunt date de relațiile:

$$\begin{cases} x = x' + x_0, \\ y = y' + y_0. \end{cases} \quad (5.2.1)$$

Dacă înlocuim aceste relații în ecuația (5.1.1), obținem

$$a_{11}(x' + x_0)^2 + 2a_{12}(x' + x_0)(y' + y_0) + a_{22}(y' + y_0)^2 + 2a_{13}(x' + x_0) + 2a_{23}(y' + y_0) + a_{33} = 0$$

sau

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y + a_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0, \quad (5.2.2)$$

unde

$$\begin{cases} a'_{13} = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}, \\ a'_{23} = a_{12}x_0 + a_{23}y_0 + a_{23}, \\ a'_{33} = a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33}. \end{cases} \quad (5.2.3)$$

Prin urmare, printr-o translație a axelor de coordonate

- coeficienții termenilor pătratici din ecuația conică nu se modifică;
- restul coeficienților se modifică după regulile (5.2.3).

CAPITOLUL 6

Cuadrice pe ecuații reduse

6.1 Cuadrice pe ecuații reduse

Se numește *cuadrică* în \mathbb{R}^3 mulțimea punctelor $P(x, y, z)$ ale căror coordonate verifică o ecuație de gradul al doilea, adică o ecuație de forma

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + a_{10}x + a_{20}y + a_{30}z + a_{00} = 0, \quad (6.1.1)$$

unde toți coeficienții sunt numere reale, iar coeficienții termenilor de gradul al doilea nu sunt toți nuli (adică, altfel spus, ecuația este, realmente, de gradul al doilea). În această secțiune nu vom aborda teoria generală a cuadricelor, ci ne vom mulțumi să studiem acele quadrice care sunt scrise sub forma canonică, adică, în esență, termenii de gradul al doilea micști nu sunt prezenți, iar termenii de gradul întâi, dacă este posibil, sunt absenți, de asemenea. Vom vedea ca aceasta nu este întotdeauna cazul. Urmează să vedem, mai târziu, că, printr-o schimbare de coordonate, orice cuadrică se reduce la una dintre aceste quadrice pe care le vom studia mai jos.

6.2 Elipsoidul

O submulțime $S \subset \mathbb{R}^3$ se numește *elipsoid* dacă există un sistem de coordonate cartezian și trei numere a, b, c , strict pozitive, astfel încât

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}. \quad (6.2.1)$$

Altfel spus, un elipsoid este o suprafață de ecuație

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (6.2.2)$$

Numerele a, b, c se numesc *semiaxe* ale elipsoidului. Dacă ele sunt distincte două câte două, atunci elipsoidul se numește *elipsoid triaxial*. Dacă două dintre ele sunt egale (de exemplu $a = b$), atunci elipsoidul nostru este ceea ce se numește un *elipsoid de rotație*:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

și se poate obține prin rotirea unei elipse în jurul unei axe (axa Oz), în cazul nostru). Dacă, în sfârșit, toate semiaxele sunt egale: $a = b = c$, elipsoidul nostru este o sferă de rază a .

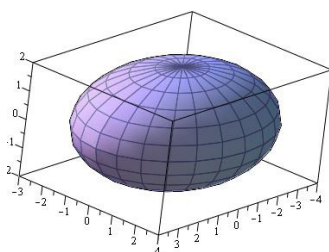


Figura 6.1: Elipsoidul

Vom enumera acum o serie de proprietăți ale elipsoidului care ne vor permite, în cele din urmă, să stabilim forma acestei suprafețe.

Proprietatea 1. *Elipsoidul (6.2.2) este mărginit de un paralelipiped dreptunghic, cu fețele paralele cu planele de coordonate, cu centrul în origine, de muchii egale,*

respectiv, cu $2a, 2b, 2c$ Așadar, în particular, elipsoidul, ca mulțime de puncte, este o mulțime mărginită.

Demonstrație Într-adevăr, ecuația (6.2.2) se poate rescrie sub forma

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}.$$

Cum membrul stâng al acestei ecuații este, în mod evident, pozitiv, același lucru trebuie să se întâmple și cu membrul drept, ceea ce ne conduce la inegalitatea

$$\frac{x^2}{a^2} \leq 1,$$

de unde $x \in [-a, a]$. Perfect analog rezultă că $y \in [-b, b]$ și $z \in [-c, c]$, adică tocmai ceea ce voiam să demonstrăm, că $(x, y, z) \in [-a, a] \times [-b, b] \times [-c, c]$. \square

Elipsoidul este o figură care are un grad destul de înalt de simetrie:

Proprietatea 2. *Elipsoidul are trei plane de simetrie: xOy, yOz, zOx , trei axe de simetrie: Ox, Oy, Oz , precum și un centru de simetrie, originea $O(0, 0, 0)$ a axelor de coordonate. În plus, dacă elipsoidul nu este triaxial, el poate avea și alte plane și axe de simetrie (nu și alte centre de simetrie, însă).*

Demonstrație Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct al elipsoidului. Atunci coordonatele sale verifică ecuația

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1.$$

Pentru a demonstra că, de exemplu, planul xOy este plan de simetrie, este suficient să demonstrăm că simetricul lui M_0 față de acest plan aparține, de asemenea, elipsoidului. Dar este evident că simetricul lui M_0 este punctul de coordonate $(x_0, y_0, -z_0)$, ale cărui coordonate, în mod evident, verifică ecuația elipsoidului, deci aparține elipsoidului. Raționamentul este analog pentru celelalte plane de coordonate. Planele de coordonate se mai numesc și *plane principale* ale elipsoidului, întrucât ele sunt plane de simetrie.

Faptul că axele de coordonate sunt axe de simetrie rezultă imediat din observațiile de mai sus, întrucât ele sunt intersecții de plane de simetrie. De asemenea, originea coordonatelor este centru de simetrie, deoarece este intersecția a două (de fapt chiar trei) axe de simetrie. Axele de coordonate, ca axe de simetrie ale elipsoidului, se mai numesc și *axe principale* ale acestuia.

Să presupunem acum că elipsoidul nostru este elipsoid de rotație, de exemplu, în jurul axei Oz . Afirmăm că orice plan care trece prin axa de rotație este plan de simetrie.

Am văzut că ecuația unui plan care trece prin axa Oz are o ecuație de forma $\Pi : Ax + By = 0$. Să presupunem, ca mai sus, că $M_0(x_0, y_0, z_0)$ este un punct de pe elipsoid, care acum este elipsoid de rotație în jurul axei Oz , deci coordonatele sale verifică ecuația:

$$\frac{x_0^2 + y_0^2}{a^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1.$$

Vom stabili coordonatele simetricului M'_0 al lui M_0 relativ la planul Π . Ecuațiile normalei la planul Π care trece prin M_0 sunt

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{0}.$$

Determinăm mai întâi punctul de intersecție M_1 dintre această normală și planul Π . Evident, coordonatele acestui punct sunt date de sistemul

$$\begin{cases} Bx - Ay = Bx_0 - Ay_0 \\ z = z_0 \\ Ax + By = 0 \end{cases}.$$

Obținem, prin urmare, $x_1 = \frac{B^2x_0 - AB y_0}{A^2 + B^2}$, $y_1 = \frac{A^2y_0 - AB x_0}{A^2 + B^2}$, $z_1 = z_0$. Punctul M_1 trebuie să fie mijlocul segmentului $M_0M'_0$, deci trebuie să avem

$$\begin{cases} x'_0 = 2x_1 - x_0 \\ y'_0 = 2y_1 - y_0 \\ z'_0 = 2z_1 - z_0. \end{cases}$$

Așadar,

$$\begin{aligned} x'_0 &= \frac{2B^2x_0 - 2AB y_0}{A^2 + B^2} - x_0 = \frac{(B^2 - A^2)x_0 - 2AB y_0}{A^2 + B^2}, \\ y'_0 &= \frac{2A^2y_0 - 2AB x_0}{A^2 + B^2} - y_0 = \frac{-2AB x_0 + (A^2 - B^2)y_0}{A^2 + B^2}, \\ z'_0 &= z_0. \end{aligned}$$

Avem, prin urmare,

$$\begin{aligned} \frac{x_0'^2 + y_0'^2}{a^2} + \frac{z_0'^2}{c^2} &= \frac{(B^2 - A^2)^2 x_0^2 + 4A^2 B^2 y_0^2 - 4AB(B^2 - A^2)x_0 y_0}{a^2(A^2 + B^2)^2} + \\ &+ \frac{(B^2 - A^2)^2 y_0^2 + 4A^2 B^2 x_0^2 + 4AB(B^2 - A^2)x_0 y_0}{a^2(A^2 + B^2)^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = \\ &= \frac{(A^2 + B^2)^2 x_0^2 + (A^2 + B^2)^2 y_0^2}{a^2(A^2 + B^2)^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = \frac{x_0^2 + y_0^2}{a^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1, \end{aligned}$$

deci punctul M'_0 aparține elipsoidului, ceea ce înseamnă că planul Π este plan de simetrie al elipsoidului.

În mod analog, în cazul sferei se demonstrează că orice plan care trece prin originea coordonatelor este plan de simetrie și, în mod implicit, orice dreaptă care trece prin originea coordonatelor este axă de simetrie. \square

În demersul nostru de a stabili forma elipsoidului, începem prin a determina curbele după care planele de simetrie îl intersectează:

Proprietatea 3. *Intersecțiile planelor de simetrie ale unui elipsoid cu elipsoidul sunt trei elipse reale.*

Demonstrație Intersecția elipsoidului cu planul xOy este dată de sistemul de ecuații

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Acestea sunt, în mod evident, ecuațiile unei elipse situate în planul xOy , de semiaxe a și b .

Intersecția elipsoidului cu planul yOz este dată de sistemul de ecuații

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Acestea sunt ecuațiile unei elipse situate în planul yOz , de semiaxe b și c .

Intersecția elipsoidului cu planul zOx este dată de sistemul de ecuații

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Acestea sunt ecuațiile unei elipse situate în planul zOx , de semiaxe a și c . □

- (1) Vom studia acum intersecțiile elipsoidului cu plane de ecuații $z = k$, unde k este un număr real (plane paralele cu planul xOy). Această intersecție este dată de ecuațiile

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ z = k \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2} \\ z = k \end{cases}.$$

Din același motiv ca la punctul (1), al doilea dintre sistemele de mai sus are soluție nevidă dacă și numai dacă $1 - \frac{k^2}{c^2} \geq 0$, adică dacă și numai dacă $-c \leq k \leq c$. Dacă $k = \pm c$, atunci intersecția se reduce la un punct. Este vorba de punctul $(0, 0, c)$, dacă avem $k = c$, respectiv punctul $(0, 0, -c)$, dacă avem $k = -c$. Remarcăm că aceste puncte sunt, de fapt, punctele în care axa Oz , de ecuații $x = 0, y = 0$, intersectează elipsoidul. Vom vedea că mai există patru puncte analoge, pe celelalte două axe de coordonate. Ele se numesc *vârfuri* ale elipsoidului.

Situația cu adevărat interesantă, care ne dă o primă idee relativ la forma elipsoidului (și care justifică denumirea) este cea în care $-c < k < c$. În acest caz,

intersecția este dată de sistemul de ecuații

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2 \left(1 - \frac{k^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{k^2}{c^2}\right)} = 1 \\ z = k \end{cases},$$

care, din moment ce numitorii sunt strict pozitivi, este, în mod evident, o elipsă, situată în planul $z = k$, de semiaxe egale, respectiv, cu $a \sqrt{\left(1 - \frac{k^2}{c^2}\right)}$ și $b \sqrt{\left(1 - \frac{k^2}{c^2}\right)}$.

Este clar că lungimile semiaxelor descresc pe măsură ce $|k|$ crește. În particular, ele au valoarea maximă pentru cazul în care $k = 0$, adică pentru cazul în care planul de intersecție este chiar planul de coordonate xOy . Atunci ecuațiile elipsei de intersecție sunt

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}.$$

- (2) Intersecțiile cu plane paralele cu planele de coordonate xOz și yOz sunt analoge și ne conduc la rezultate analoge.

Planul tangent într-un punct al unui elipsoid

Considerăm elipsoidul (6.2.2) și un punct $M(x_0, y_0, z_0)$ al său. Vom studia intersecția unei drepte oarecare ce trece prin M_0 cu elipsoidul. Ecuațiile parametrice ale unei astfel de drepte sunt:

$$(\Delta) : \begin{cases} x = x_0 + l \cdot t, \\ y = y_0 + m \cdot t, \\ z = z_0 + n \cdot t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}. \quad (6.2.3)$$

$\mathbf{v}(l, m, n)$ este, desigur, vectorul director al dreptei Δ . Pentru a determina punctele de intersecție dintre elipsoid și dreapta Δ , înlocuim x, y, z din ecuațiile dreptei (6.2.3) în ecuația elipsoidului. Se obține:

$$\frac{(x_0 + lt)^2}{a^2} + \frac{(y_0 + mt)^2}{b^2} + \frac{(z_0 + nt)^2}{c^2} - 1 = 0$$

sau, după ce facem calculele și grupăm după puterile lui t ,

$$t^2 (b^2 c^2 l^2 + a^2 c^2 m^2 + a^2 b^2 n^2) + 2t (b^2 c^2 x_0 l + a^2 c^2 y_0 m + a^2 b^2 z_0 n) + b^2 c^2 x_0^2 + a^2 c^2 y_0^2 + a^2 b^2 z_0^2 - a^2 b^2 c^2 = 0.$$

Termenul liber al ecuației de mai sus este egal cu zero, deoarece punctul coordonatele punctului M_0 verifică ecuația elipsoidului. Ca atare, ecuația se transformă în

$$t^2 (b^2 c^2 l^2 + a^2 c^2 m^2 + a^2 b^2 n^2) + 2t (b^2 c^2 x_0 l + a^2 c^2 y_0 m + a^2 b^2 z_0 n) = 0. \quad (6.2.4)$$

Această ecuație o vom numi *ecuație de intersecție* dintre elipsoid și dreapta Δ . Este clar că ecuația de intersecție este, întotdeauna, de gradul al doilea și ea va admite două soluții reale, care corespund punctului M_0 și celui de-al doilea punct de intersecție. Pentru ca dreapta să fie *tangentă* elipsoidului, este necesă (și suficient) ca ecuația de intersecție să admită o soluție dublă (evident, $t = 0$). Pentru aceasta, coeficientul termenului de gradul întâi în t din ecuația (6.2.4) trebuie să fie egal cu zero, adică

$$b^2 c^2 x_0 l + a^2 c^2 y_0 m + a^2 b^2 z_0 n = 0. \quad (6.2.5)$$

Ecuația (6.2.5) are o interpretare geometrică remarcabilă. Considerăm vectorul $\mathbf{n} (b^2 c^2 x_0, a^2 c^2 y_0, a^2 b^2 z_0)$. Atunci ecuația (6.2.5) se poate scrie

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (6.2.6)$$

Semnificația acestei ecuații este aceea că *fiecare dreaptă care trece prin M_0 și al cărui vector director verifică ecuația (6.2.5) este perpendiculară pe vectorul \mathbf{n}* . Prin urmare, mulțimea acestor drepte prin M_0 , tangente la elipsoid, formează un plan, *planul tangent la elipsoid în punctul M_0* , care are vectorul normal \mathbf{n} . Prin urmare, ecuația planului tangent în M_0 se scrie

$$b^2 c^2 x_0 (x - x_0) + a^2 c^2 y_0 (y - y_0) + a^2 b^2 z_0 (z - z_0) = 0$$

sau

$$b^2 c^2 x_0 x + a^2 c^2 y_0 y + a^2 b^2 z_0 z - b^2 c^2 x_0^2 - a^2 c^2 y_0^2 - a^2 b^2 z_0^2 = 0.$$

Din ecuația elipsei rezultă că termenul liber al ecuației de mai sus este egal cu $-a^2 b^2 c^2$, deci ecuația devine

$$b^2 c^2 x_0 x + a^2 c^2 y_0 y + a^2 b^2 z_0 z - a^2 b^2 c^2 = 0$$

sau, după ce împărțim la $a^2b^2c^2$,

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1. \quad (6.2.7)$$

Ecuția (6.2.7) se numește *ecuația planului tangent la elipsoid în punctul M_0 de pe elipsoid, obținută prin dedublare*, pentru că se obține din ecuația elipsoidului, înlocuind pe x^2 cu xx_0 , pe y^2 cu yy_0 și pe z^2 cu zz_0 .

6.3 Conul de gradul al doilea

Definiția 6.1. Se numește *con de gradul al doilea* mulțimea punctelor din spațiu ale căror coordonate relative la un sistem ortonormat verifică o ecuație de forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad (6.3.1)$$

unde a, b, c sunt numere reale strict pozitive.

Conul de gradul al doilea are aceleași simetrii ca și elipsoidul, ele fiind legate direct de faptul că în ecuația sa toate coordonatele apar exclusiv la puterea a doua:

- (1) trei plane de simetrie (planele de coordonate);
- (2) trei axe de simetrie (axele de coordonate);
- (3) un centru de simetrie (originea).

O proprietate remarcabilă a conului de gradul al doilea este aceea că *este o suprafață riglată*: prin fiecare punct al său trece o dreaptă (care se numește *generatoare* a conului).

Mai precis, *dacă $M_0(x_0, y_0, z_0)$ este un punct oarecare al conului, iar O este originea coordonatelor, atunci fiecare punct $M(x, y, z)$ al dreptei OM_0 se află pe con*. Demonstrația acestei afirmații este foarte simplă. Într-adevăr, este foarte ușor de constatat că ecuațiile parametrice ale dreptei OM_0 sunt:

$$\begin{cases} x = x_0 \cdot t, \\ y = y_0 \cdot t, \\ z = z_0 \cdot t. \end{cases}$$

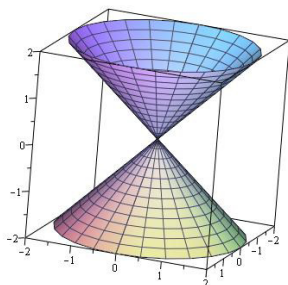


Figura 6.2: Conul de gradul al doilea

Dacă înlocuim în ecuația conului, obținem:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = t^2 \underbrace{\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} \right)}_{=0} = 0,$$

deci punctele dreptei verifică, într-adevăr, ecuația conului.

Datorită proprietății de mai sus se spune că O este *vârful conului*.

Intersecții cu plane paralele cu planele de coordonate

Utilizăm, și în cazul conului de gradul al doilea, această metodă de a identifica forma suprafeței.

- (1) *Plane paralele cu xOy .* Un astfel de plan are, în mod evident, ecuația de forma $z = k$, unde k este o constantă reală. O astfel de intersecție este dată de sistemul de ecuații

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \\ z = k \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2} \\ z = k \end{cases}.$$

În cazul în care $k \neq 0$, al doilea sistem de ecuații se poate rescrie sub forma

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2 k^2 / c^2} + \frac{y^2}{b^2 k^2 / c^2} = 1 \\ z = k \end{cases}.$$

Evident, aceste ecuații descriu o elipsă de semiaxe $\frac{a|k|}{c}$ și $\frac{b|k|}{c}$, situată în planul $z = k$.

Dacă, pe de altă parte, $k = 0$ (adică intersecția se face cu planul xOy), atunci sistemul de ecuații de intersecție se reduce la

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \\ z = 0 \end{cases},$$

iar acest sistem este verificat de un singur punct (originea, adică vârful conului).

- (2) *Intersecții cu plane paralele cu planul xOz .* În acest caz, sistemul de ecuații care ne dă punctele de intersecție se scrie

$$\begin{cases} y = h, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \end{cases}$$

ceea ce ne conduce la

$$\begin{cases} y = h, \\ \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{h^2}{b^2}. \end{cases} \quad (6.3.2)$$

Ecuațiile (6.3.2) reprezintă, dacă $h \neq 0$, ecuațiile unei hiperbole situate în planul $y = h$, de semiaxe $\frac{a|h|}{b}$ (pe axa paralelă cu Ox), respectiv $\frac{c|h|}{b}$ (pe axa paralelă cu Oz). Este de remarcat că axa paralelă cu Oz este cea care intersectează hiperbola, în timp ce axa paralelă cu Ox nu o intersectează.

Pe de altă parte, dacă $h = 0$, aceleași ecuații reprezintă o pereche de drepte (generatoare ale conului), de ecuații

$$\begin{cases} y = 0, \\ \frac{z}{c} - \frac{x}{a} = 0, \end{cases} \quad \text{respectiv} \quad \begin{cases} y = 0, \\ \frac{z}{c} + \frac{x}{a} = 0. \end{cases}$$

- (3) *Intersecția cu plane paralele cu planul yOz .* – Este perfect analoagă cu cazul precedent.

Observație. Se poate demonstra că, utilizând plane care nu sunt neapărat oarelele cu planele de coordonate, prin secțiunile plane ale conului de gradul al doilea se pot obține toate conicele. De fapt, acesta este motivul pentru care conicele se mai numesc și *secțiuni conice*.

Planul tangent într-un punct al conului de gradul al doilea. Ecuația planului tangent într-un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ al conului de gradul al doilea se obține prin dedublare, ca și în cazul elipsoidului, așa că nu vom mai repeta raționamentul. Prin urmare, ecuația planului tangent în M_0 este

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} = 0. \quad (6.3.3)$$

O proprietate remarcabilă a planului tangent într-un punct al conului este aceea că el conține generatoarea care trece prin acel punct. Într-adevăr, neneratoarea care trece prin $M_0(x_0, y_0, z_0)$ are ecuațiile parametrice

$$\begin{cases} x = x_0 t, \\ y = y_0 t, \\ z = z_0 t. \end{cases}$$

Dacă înlocuim în membrul stâng al ecuației planului tangent, obținem

$$\frac{x_0^2 t}{a^2} + \frac{y_0^2 t}{b^2} - \frac{z_0^2 t}{c^2} = t \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} \right) = 0,$$

ceea ce înseamnă că, într-adevăr, planul tangent conține generatoarea rectilinie a conului care trece prin punctul de tangență.

Con de rotație. În cazul în care $a = b$, ecuația conului devine

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

De data aceasta, secțiunile cu plane paralele cu planul xOy sunt cercuri. Conurile de acest tip se numesc *conuri de rotație*. Vom vedea mai târziu că suprafețele de acest tip se pot obține prin rotirea unei drepte care trece prin origine în jurul axei Oz .

6.4 Hiperboloidul cu o pânză.

6.4.1 Forma și simetriile

Definiția 6.2. Se numește *hiperboloid cu o pânză* locul geometric al punctelor din spațiu ale căror coordonate relativ la un sistem rectangular verifică ecuația

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (6.4.1)$$

une a, b, c sunt numere reale strict pozitive, care se numesc *semiaxele* hiperboloidului.

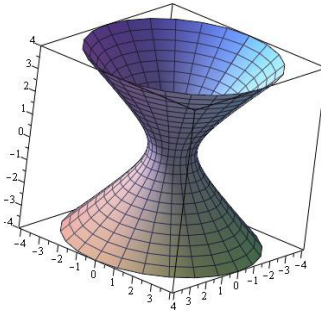


Figura 6.3: Hiperboloidul cu o pânză

Simetriile hiperboloidului cu o pânză sunt aceleași cu cele ale elipsoidului, prin urmare nu le vom mai descrie. Ne ocupăm, însă, de intersecțiile sale cu plane paralele cu planele de coordonate.

(1) *Plane paralele cu planul xOy .* În acest caz, avem de studiat sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} z = h, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \end{cases}$$

ceea ce ne conduce la

$$\begin{cases} z = h, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} + 1. \end{cases}$$

Cum membrul drept este întotdeauna strict pozitiv, ecuațiile se pot rescrie ca

$$\begin{cases} z = h, \\ \frac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} + 1}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} + 1}\right)^2} = 1. \end{cases}$$

Acestea sunt ecuațiile unei elipse de semiaxe $a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} + 1}$ și $b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} + 1}$, pentru orice valori ale lui h . Un caz particular important este cel în care $h = 0$ (adică

suntem în planul de coordonate xOy). Elipsa care se obține (de semiaxe minime!) se numește *elipsă de stricțiune* sau de *gâtuire*.

(2) *Plane paralele cu planul xOz* . În acest caz, curba de intersecție are ecuațiile

$$\begin{cases} y = h, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \end{cases}$$

adică

$$\begin{cases} y = h, \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}. \end{cases} \quad (6.4.2)$$

Aici avem trei situații de analizat:

(a) Dacă $1 - \frac{h^2}{b^2} < 0$, adică $h^2 > b^2$, atunci sistemul (6.4.2) se poate scrie sub forma

$$\begin{cases} y = h, \\ \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{h^2}{b^2} - 1 \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} y = h, \\ \frac{z^2}{\left(c\sqrt{\frac{h^2}{b^2} - 1}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{h^2}{b^2} - 1}\right)^2} = 1, \end{cases}$$

adică avem de-a face cu o hiperbolă de semiaxe $c\sqrt{\frac{h^2}{b^2} - 1}$ și $a\sqrt{\frac{h^2}{b^2} - 1}$, situată într-un plan paralel cu planul xOz , la care axa care intersectează hiperbola este paralelă cu axa Oz , iar cealaltă axă este paralelă cu axa Ox .

(b) Dacă $1 - \frac{h^2}{b^2} = 0$, adică $h = \pm b$, atunci sistemul (6.4.2) se poate scrie sub forma

$$\begin{cases} y = \pm b, \\ \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0 \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} y = \pm b, \\ \left(\frac{z}{c} - \frac{x}{a}\right)\left(\frac{z}{c} + \frac{x}{a}\right) = 0. \end{cases} \quad (6.4.3)$$

Pentru fiecare valoare a lui h (b sau $-b$) ecuația de mai sus reprezintă o pereche de drepte. Pentru $h = b$, obținem

$$\begin{cases} y = b, \\ \frac{z}{c} - \frac{x}{a} = 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} y = c, \\ \frac{z}{c} + \frac{x}{a} = 0, \end{cases}$$

în timp ce pentru $h = -b$, obținem

$$\begin{cases} y = -b, \\ \frac{z}{c} - \frac{x}{a} = 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} y = -c, \\ \frac{z}{c} + \frac{x}{a} = 0. \end{cases}$$

- (c) Dacă $1 - \frac{h^2}{b^2} > 0$, adică $h^2 < b^2$, atunci sistemul (6.4.2) se poate scrie sub forma

$$\begin{cases} y = h, \\ \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}}\right)^2} - \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}}\right)^2} = 1, \end{cases}$$

adică avem de-a face cu o hiperbolă de semiaxe $a\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}}$ și $c\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}}$, situată într-un plan paralel cu planul xOz , la care axa care intersectează hiperbola este paralelă cu axa Ox , iar cealaltă axă este paralelă cu axa Oz .

- (3) *Plane paralele cu planul yOz .* Acest caz este perfect analog cu cazul precedent.

6.4.2 Generatoarele rectilinii ale hiperboloidului cu o pânză.

După cum am văzut mai sus, pe hiperboloidul cu o pânză există linii drepte. Patru dintre ele au fost găsite mai devreme, ca intersecții dintre planele xOz și yOz cu suprafața. Pe suprafață, însă, există mult mai multe drepte. Practic, prin fiecare punct al suprafeței trece câte o pereche de drepte, conținute în întregime pe suprafață. Aceste drepte se numesc *generatoare rectilinii* ale hiperboloidului cu o pânză.

Pentru a ne convinge de acest fapt, rescriem ecuația hiperboloidului cu o pânză sub forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2},$$

ecuație care se mai poate scrie și sub forma

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right).$$

Considerăm acum sistemul de ecuații

$$\begin{cases} \lambda \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c} \right) = \mu \left(1 + \frac{y}{b} \right), \\ \mu \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c} \right) = \lambda \left(1 - \frac{y}{b} \right), \end{cases} \quad (6.4.4)$$

unde λ și μ sunt două numere reale care nu se anulează simultan.

Întrucât, după cum am spus, cei doi parametrii nu se anulează simultan, sistemul (6.4.4) reprezintă o dreaptă. Dacă înmulțim membru cu membru cele două ecuații ale sistemului obținem fie $0 = 0$, dacă unul dintre parametrii se anulează, fie ecuația hiperboloidului cu o pânză. Aceasta înseamnă că dreapta (6.4.4) se află pe hiperboloid. Dacă lăsăm cei doi parametrii să varieze, obținem o familie de drepte, care formează *prima familie de generatoare rectilinii ale hiperboloidului*.

Sistemul de ecuații (6.4.4) este, format, de fapt, din ecuațiile a două fascicule de plane. Dacă împărțim prima ecuație cu λ și cea de-a doua cu μ , obținem sistemul

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \frac{\mu}{\lambda} \left(1 + \frac{y}{b} \right), \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{\lambda}{\mu} \left(1 - \frac{y}{b} \right) \end{cases} \quad (6.4.5)$$

sau, renotând parametrul,

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = v \left(1 + \frac{y}{b} \right), \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{v} \left(1 - \frac{y}{b} \right), \end{cases} \quad (6.4.6)$$

unde, firește, $v \neq 0$.

Sistemul de ecuații (6.4.6) nu este întrutotul echivalent cu sistemul (6.4.4). Într-adevăr, din primul fascicul de plane lipsește planul $y + b = 0$, în timp ce din cel de-al doilea fascicul lipsește planul $y - b = 0$. Aceste două plane, însă, nu conțin generatoare rectilinii ale suprafeței. (Intersecțiile dintre aceste plane și hiperboloid sunt hiperbole nedegenerate). Astfel, sistemul de ecuații (6.4.6) descrie aceeași familie de generatoare rectilinii ca și sistemul (6.4.4), având avantajul că utilizează un singur parametru. Generatoarele din această familie le vom numi *v -generatoare*.

Cea de-a doua familie de generatoare rectilinii se obține în același mod, identi-

ficând în mod diferit factorii de gradul întâi. Ea are ecuațiile

$$\begin{cases} \alpha \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c} \right) = \beta \left(1 - \frac{y}{b} \right), \\ \beta \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c} \right) = \alpha \left(1 + \frac{y}{b} \right), \end{cases} \quad (6.4.7)$$

unde α și β sunt, din nou, parametri reali care nu se anulează simultan. Raționând ca mai sus, și acest sistem de ecuații se poate aduce la forma mai simplă

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \gamma \left(1 - \frac{y}{b} \right), \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{\gamma} \left(1 + \frac{y}{b} \right), \end{cases} \quad (6.4.8)$$

cu $\gamma \neq 0$. Generatoarele din cea de-a doua familie le vom numi γ -generatoare.

Exemple. 1. Considerăm hiperboloidul cu o pânză

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1.$$

Vom determina generatoarele rectilinii ale hiperboloidului care trec prin punctul $A(1, 4, 8)$ și vom determina unghiul dintre ele.

Remarcăm, mai întâi că, într-adevăr, punctul A este pe hiperboloid (coordonatele sale verifică ecuația hiperboloidului). Trecem termenul care conține y^2 în membrul drept și descompunem cei doi membri în factori de gradul întâi. Obținem

$$\left(x + \frac{z}{2} \right) \left(x - \frac{z}{2} \right) = (1 + y)(1 - y).$$

Determinăm, mai întâi, generatoarea din prima familie. Ecuațiile sale vor fi

$$\begin{cases} \lambda \left(x + \frac{z}{2} \right) = \mu(1 + y), \\ \mu \left(x - \frac{z}{2} \right) = \lambda(1 - y) \end{cases}$$

sau, după ce facem calculele,

$$\begin{cases} 2\lambda x - 2\mu y + \lambda z - 2\mu = 0, \\ 2\mu x + 2\lambda y - \mu z - 2\lambda = 0. \end{cases}$$

Dacă impunem condiția ca generatoarea să treacă prin punctul A , obținem sistemul

$$\begin{cases} 2\lambda - 8\mu + 8\lambda - 2\mu = 0, \\ 2\mu + 8\lambda - 8\mu - 2\lambda = 0, \end{cases}$$

sistem care se reduce la o singură ecuație, $\lambda - \mu = 0$. Cum unuia dintre parametri se poate atribui o valoare arbitrară (nenulă!), putem pune $\lambda = 1$ și atunci obținem și $\mu = 1$, deci ecuațiile generatoarei din prima familie devin

$$(\Delta_1) \begin{cases} 2x - 2y + z - 2 = 0, \\ 2x + 2y - z - 2 = 0. \end{cases}$$

Vom determina acum generatoarea din cea de-a doua familie. Ecuațiile unei generatoare oarecare din această familie sunt:

$$\begin{cases} \alpha \left(x + \frac{z}{2} \right) = \beta(1 - y), \\ \beta \left(x - \frac{z}{2} \right) = \alpha(1 + y) \end{cases}$$

sau, după ce facem calculele,

$$\begin{cases} 2\alpha x + 2\beta y + \alpha z - 2\beta = 0, \\ 2\beta x - 2\alpha y - \beta z - 2\alpha = 0. \end{cases}$$

Dacă punem condiția ca generatoarea să treacă prin punctul A obținem

$$\begin{cases} 2\alpha + 8\beta + 8\alpha - 2\beta = 0, \\ 2\beta - 8\alpha - 8\beta - 2\alpha = 0, \end{cases}$$

sistem care ne conduce la relația $\beta = -\frac{5}{3}\alpha$. Dacă punem $\alpha = 3$, obținem $\beta = -5$, deci ecuațiile generatoarei din cea de-a doua familie care trece prin A sunt

$$(\Delta_2) \begin{cases} 6x - 10y + 3z + 10 = 0, \\ 10x + 6y - 5z + 6 = 0. \end{cases}$$

Pentru a determina unghiul dintre cele două generatoare, determinăm, mai întâi, vectorii lor directori. Pentru prima generatoare, vectorii normali la cele

două plane care o determină sunt $\mathbf{n}_1(2, -2, 1)$, respectiv $\mathbf{n}_2(2, 2, -1)$, prin urmare avem

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (0, 4, 8),$$

deci putem lua, ca vector director al primei generatoare, vectorul $\mathbf{v}_1(0, 1, 2)$.

Analog, pentru cea de-a doua generatoare, vectorii normali la cele două plane care determină generatoarea sunt $\mathbf{n}_3(6, -10, 3)$, respectiv $\mathbf{n}_4(10, 6, -5)$, așadar

$$\mathbf{n}_3 \times \mathbf{n}_4 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & -10 & 3 \\ 10 & 6 & -5 \end{vmatrix} = (32, 60, 136),$$

deci putem lua, ca vector director al celei de-a doua generatoare, vectorul $\mathbf{v}_2(8, 15, 34)$. Astfel, cosinusul unghiului determinat de către cele două generatoare este

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_2\|} = \frac{83}{85}.$$

6.4.3 Proprietăți ale generatoarelor rectilinii ale hiperboloidului cu o pânză

6.5 Hiperboloidul cu două pânze

Definiția 6.3. Se numește *hiperboloid cu două pânze* locul geometric al punctelor din spațiu ale căror coordonate relativ la un sistem de coordonate ortonormat, verifică ecuația

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad (6.5.1)$$

unde a, b, c sunt constante reale strict pozitive.

Forma hiperboloidului cu două pânze. *Simetriile* sunt aceleași ca și în cazul elipsoidului, așa că trecem direct la studiul intersecțiilor cu plane paralele cu planele de coordonate.

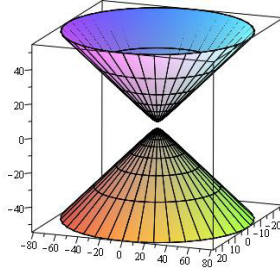


Figura 6.4: Hiperboloidul cu două pânze

- (1) *Intersecții cu plane paralele cu planul xOy .* Avem de studiat soluțiile sistemului de ecuații

$$\begin{cases} z = h, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} z = h, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1. \end{cases} \quad (6.5.2)$$

Avem de analizat trei cazuri:

- (a) Dacă $\frac{h^2}{c^2} - 1 < 0$, adică $-c < h < c$, atunci sistemul (6.5.2) nu admite soluții, deci planul și suprafața nu se intersectează.
- (b) Dacă $\frac{h^2}{c^2} - 1 = 0$, adică $h = \pm c$, sistemul are o singură soluție pentru fiecare valoare a lui h (c sau $-c$). În acest caz, planul este, de fapt, tangent la suprafață (în punctul $(0, 0, c)$, respectiv în punctul $(0, 0, -c)$).
- (c) Dacă $\frac{h^2}{c^2} - 1 > 0$, adică $|h| > c$, atunci sistemul (6.5.2) este echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} z = h, \\ \frac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}\right)^2} = 1, \end{cases}$$

care reprezintă ecuațiile unei elipse de semiaxe $a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}$ și $b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}$, situată în planul $z = h$.

- (2) *Intersecții cu plane paralele cu planul xOz .* De data aceasta avem de studiat soluțiile sistemului de ecuații

$$\begin{cases} y = h, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} y = h, \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 - \frac{h^2}{b^2}. \end{cases} \quad (6.5.3)$$

Acest sistem este echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} y = h, \\ \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{h^2}{b^2}, \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} y = h, \\ \frac{z^2}{\left(c\sqrt{\frac{h^2}{b^2} + 1}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{h^2}{b^2} + 1}\right)^2} = 1, \end{cases}$$

care reprezintă, indiferent de valoarea lui h , ecuațiile unei hiperbole de semiaxe $c\sqrt{\frac{h^2}{b^2} + 1}$ și $a\sqrt{\frac{h^2}{b^2} + 1}$, situată în planul $y = h$, astfel încât axa hiperbolei care intersectează curba este paralelă cu axa Oz , iar cealaltă axă este paralelă cu axa Ox .

- (3) *Intersecții cu plane paralele cu planul yOz .* Situația este perfect analoagă cu cea discutată la punctul precedent.

Hiperboloidul cu două pânze de rotație. Dacă $a = b$, ecuația hiperboloidului cu două pânze se scrie

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Acest tip particular de hiperboloid se numește *hiperboloid cu două pânze de rotație*, deoarece, după cum vom vedea în capitolul următor, el se poate obține prin rotirea

unei hiperbole în jurul axei Oz . Este de remarcă că, în cazul hiperboloizilor cu două pânze de rotație, *orice plan care trece prin axa Oz este plan de simetrie al hiperboloidului*.

Planul tangent într-un punct al hiperboloidului cu două pânze. Dacă $M_0(x_0, y_0, z_0)$ este un punct oarecare al hiperboloidului cu două pânze, se poate arăta, exact ca în cazul elipsoidului, că ecuația planului tangent în M_0 la hiperboloid va fi

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} = -1,$$

adică ea se poate obține prin dedublarea ecuației hiperboloidului cu două pânze.

6.6 Paraboloidul eliptic

Definiția 6.4. Se numește *paraboloid eliptic* mulțimea punctelor din spațiu ale căror coordonate relativ la un sistem cartezian de coordonate verifică o ecuație de forma

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad (6.6.1)$$

unde p și q sunt numere reale strict pozitive, care se numesc *parametrii paraboloidului eliptic*.

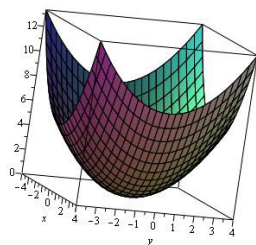


Figura 6.5: Paraboloidul eliptic

Forma paraboloidului eliptic. *Simetriile* paraboloidului eliptic nu sunt atât de numeroase ca în cazul cuadricele studiate până acum. Astfel, el are:

- (1) două plane de simetrie (yOz și xOz , deoarece coordonatele x și z apar doar la puterea a doua);
- (2) o axă de simetrie, axa Oz , ca intersecție a celor două plane de simetrie.

Mai departe, ca și mai înainte, vom studia intersecția dintre paraboloidul eliptic și plane paralele cu cele trei plane de coordonate.

- (1) *Intersecții cu plane paralele cu planul xOy .* Avem de studiat soluțiile sistemului

$$\begin{cases} z = h \\ \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} z = h \\ \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2h. \end{cases} \quad (6.6.2)$$

Avem trei situații de examinat:

- (a) Dacă $h < 0$, atunci sistemul (6.6.2) nu admite soluții, adică planul și suprafața nu au puncte comune.
- (b) Dacă $h = 0$, atunci sistemul (6.6.2) admite o soluție unică, $(0, 0, 0)$, adică originea. În fapt, aceasta înseamnă că planul de coordonate xOy este tangent la paraboloidul hiperbolic în originea coordonatelor.
- (c) Dacă $h > 0$, sistemul (6.6.2) se poate scrie

$$\begin{cases} z = h \\ \frac{x^2}{(\sqrt{2ph})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2qh})^2} = 1, \end{cases}$$

ceea ce reprezintă ecuațiile unei elipse, situată în planul $z = h$, de semiaxe $\sqrt{2ph}$ și $\sqrt{2qh}$.

(2) *Intersecții cu plane paralele cu planul xOz .* De data aceasta, avem de studiat sistemul

$$\begin{cases} y = h, \\ \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} y = h, \\ x^2 = 2pz - \frac{ph^2}{q}, \end{cases}$$

care sunt ecuațiile unei parabole de parametru p , situată în planul $y = h$.

(3) *Intersecții cu plane paralele cu planul yOz .* Avem de studiat soluțiile sistemului

$$\begin{cases} x = h, \\ \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} x = h, \\ y^2 = 2qz - \frac{qh^2}{p}, \end{cases}$$

care sunt ecuațiile unei parabole de parametru q , situată în planul $x = h$.

Paraboloidul eliptic de rotație. Dacă cei doi parametri ai paraboloidului sunt egali, $p = q$, atunci ecuația suprafeței devine

$$\frac{x^2 + y^2}{p} = 2z$$

sau

$$x^2 + y^2 = 2pz.$$

Acest paraboloid particular se numește *paraboloid eliptic de rotație*. Suprafața se poate obține, într-adevăr, prin rotirea unei parabole în jurul axei Oz , așa cum vom vedea mai târziu.

Planul tangent într-un punct al paraboloidului eliptic. Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct oarecare al paraboloidului eliptic (6.6.1). Studiem mai întâi intersecția dintre paraboloid și o dreaptă oarecare ce trece prin punctul M_0 . Ecuațiile parametrice ale unei astfel de drepte se pot scrie:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases}$$

Înlocuind în ecuația paraboloidului, obținem:

$$\frac{(x_0 + lt)^2}{p} + \frac{(y_0 + mt)^2}{q} = 2(z_0 + nt)$$

sau

$$q(x_0 + lt)^2 + p(y_0 + mt)^2 - 2pq(z_0 + nt) = 0.$$

După ce facem calculele și grupăm după puterile lui t , ecuația de mai sus se transformă în:

$$t^2(ql^2 + pm^2) + 2t(qx_0l + py_0m - pqn) + qx_0^2 + py_0^2 - 2pqz_0 = 0.$$

Termenul liber este egal cu zero, deoarece M_0 se află pe paraboloid, deci ecuația de intersecție devine

$$t^2(ql^2 + pm^2) + 2t(qx_0l + py_0m - pqn) = 0. \quad (6.6.3)$$

Pentru ca dreapta și paraboloidul să aibă un singur punct (dublu) în comun, ecuația de intersecție (6.6.3) trebuie să aibă soluție dublă. Dar o soluție este, întotdeauna, $t = 0$, prin urmare și a doua soluție trebuie să fie zero, ceea ce este posibil doar dacă termenul de gradul întâi în t dispăre, adică dacă avem

$$qx_0l + py_0m - pqn = 0. \quad (6.6.4)$$

Dacă punem \mathbf{n} este vectorul de componente $(qx_0, py_0, -pq)$, iar $\mathbf{v}(l, m, n)$ este vectorul director al dreptei, atunci ecuația (6.6.4) este echivalentă cu $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$, adică *orice dreaptă care trece prin M_0 , iar vectorul său director verifică ecuația (6.6.4) este perpendicular pe vectorul \mathbf{n}* . Dar aceasta nu înseamnă altceva decât că \mathbf{n} este vectorul normal la planul tangent la paraboloidul eliptic în punctul M_0 . Ca atare, ecuația planului tangent în M_0 este:

$$qx_0(x - x_0) + py_0(y - y_0) - pq(z - z_0) = 0$$

sau

$$qx_0x + py_0y - pqz - qx_0^2 - py_0^2 + pqz_0 = 0$$

sau, încă,

$$qx_0x + py_0y - pqz - pqz_0 - (qx_0^2 - py_0^2 + 2pqz_0) = 0.$$

Termenul din paranteză din ecuația de mai sus este egal cu zero, din nou, pentru că M_0 se află pe paraboloid, deci ecuația devine:

$$qx_0x + py_0y = pq(z + z_0)$$

sau, dacă împărțim prin pq ,

$$\frac{xx_0}{p} + \frac{yy_0}{q} = p(z + z_0). \quad (6.6.5)$$

Este de remarcat că, și în cazul paraboloidului eliptic, ca și în cazul celorlalte cuadrice studiate până acum ecuația planului tangent se obține din ecuația paraboloidului (6.6.1) prin *dedublare*. Diferența este că de data aceasta apar și termeni de gradul întâi. Regulile de dedublare sunt, deci:

- x^2 și y^2 se înlocuiesc cu xx_0 (respectiv yy_0);
- x se înlocuiește cu $(z + z_0)/2$.

6.7 Paraboloidul hiperbolic

Definiția 6.5. Se numește *paraboloid hiperbolic* mulțimea punctelor din spațiu ale căror coordonate relativ la un sistem cartezian de coordonate verifică o ecuație de forma

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad (6.7.1)$$

unde p și q sunt numere reale strict pozitive, care se numesc *parametrii paraboloidului hiperbolic*.

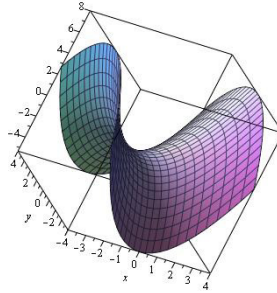


Figura 6.6: Paraboloidul hiperbolic

Forma paraboloidului hiperbolic. *Simetriile* paraboloidului hiperbolic sunt aceleași cu cele ale paraboloidului eliptic:

- (1) două plane de simetrie (yOz și xOz , deoarece coordonatele x și z apar doar la puterea a doua);
- (2) o axă de simetrie, axa Oz , ca intersecție a celor două plane de simetrie.

Mai departe, vom studia intersecția dintre paraboloidul hiperbolic și plane paralele cu cele trei plane de coordonate.

- (1) *Intersecții cu plane paralele cu planul xOy .* Avem de studiat soluțiile sistemului

$$\begin{cases} z = h \\ \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} z = h \\ \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2h. \end{cases} \quad (6.7.2)$$

Avem trei situații de examinat:

- (a) Dacă $h < 0$, atunci $-h > 0$, iar sistemul (6.7.2) se poate rescrie sub forma

$$\begin{cases} z = h \\ \frac{y^2}{\left(\sqrt{-2qh}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(\sqrt{-2ph}\right)^2} = 1, \end{cases}$$

ceea ce reprezintă ecuațiile unei hiperbole de semiaxe $\sqrt{-2qh}$ și $\sqrt{-2ph}$, situată în planul $z = h$, astfel încât semi-axa care intersectează hiperbola este paralelă cu axa Oy , iar cealaltă semieaxă este paralelă cu axa Ox .

(b) Dacă $h = 0$, atunci sistemul (6.7.2) devine

$$\begin{cases} z = 0 \\ \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0. \end{cases}$$

Acestea sunt ecuațiile unei perechi de drepte concurente, situate în planul xOy , care trec prin origine:

$$\begin{cases} z = 0, \\ \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0, \end{cases} \quad \text{respectiv} \quad \begin{cases} z = 0, \\ \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0. \end{cases}$$

(c) Dacă $h > 0$, sistemul (6.7.2) se poate scrie

$$\begin{cases} z = h \\ \frac{x^2}{(\sqrt{2ph})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{2qh})^2} = 1, \end{cases}$$

ceea ce reprezintă ecuațiile unei hiperbole de semiaxe $\sqrt{2ph}$ și $\sqrt{2qh}$, situată în planul $z = h$, astfel încât semi-axa care intersectează hiperbola este paralelă cu axa Ox , iar cealaltă semieaxă este paralelă cu axa Oy .

(2) *Intersecții cu plane paralele cu planul xOz .* De data aceasta, avem de studiat sistemul

$$\begin{cases} y = h, \\ \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} y = h, \\ x^2 = 2pz + \frac{ph^2}{q}, \end{cases}$$

care sunt ecuațiile unei parabole de parametru p , situată în planul $y = h$.

(3) *Intersecții cu plane paralele cu planul yOz .* Avem de studiat soluțiile sistemului

$$\begin{cases} x = h, \\ \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} x = h, \\ y^2 = -2qz + \frac{qh^2}{p}, \end{cases}$$

care sunt ecuațiile unei parabole de parametru q , situată în planul $x = h$.

Generatoarele rectilinii ale paraboloidului hiperbolic. Paraboloidul hiperbolic are o importantă trăsătură comună cu hiperboloidul cu o pânză: pe ambele există două familii de drepte, câte o pereche de drepte prin fiecare punct al paraboloidului. Pentru a determina ecuațiile acestor familii de drepte, numite *generatoare rectilinii ale paraboloidului hiperbolic*, procedăm ca și în cazul hiperboloidului cu o pânză.

Rescriem, mai întâi, ecuația paraboloidului hiperbolic sub forma

$$\left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} \right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} \right) = 2z \cdot 1.$$

Pornind de la această ecuație, putem obține o familie de drepte:

$$\begin{cases} \lambda \left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} \right) = 2\mu z, \\ \mu \left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} \right) = \lambda, \end{cases} \quad (6.7.3)$$

unde λ și μ sunt doi parametri reali, care nu se anulează simultan. Dacă înmulțim membru cu membru cele două ecuații din sistemul (6.7.3), obținem fie $0 = 0$, dacă unul dintre parametri se anulează, fie ecuația paraboloidului hiperbolic, ceea ce înseamnă că dreapta se află pe paraboloid, pentru orice valori acceptabile ale celor doi parametri¹.

Exact în același mod se demonstrează că dreptele

$$\begin{cases} \alpha \left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} \right) = 2\beta z, \\ \beta \left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} \right) = \alpha, \end{cases} \quad (6.7.4)$$

¹“acceptabil” înseamnă că $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$.

unde α și β sunt doi parametri reali, care nu se anulează simultan, sunt situate pe paraboloidul hiperbolic (6.7.1).

Se poate demonstra că prin fiecare punct al hiperboloidului trece exact o pereche de generatoare rectilinii, câte una din fiecare familie.

Planul tangent într-un punct al paraboloidului hiperbolic. Se poate arăta ușor, ca în cazul paraboloidului eliptic, că ecuația planului tangent la paraboloid într-un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ al său se poate obține prin dedublare, plecând de la ecuația suprafeței, adică ecuația planului tangent este

$$\frac{xx_0}{p} - \frac{yy_0}{q} = z + z_0. \quad (6.7.5)$$

6.8 Cilindrul eliptic

Definiția 6.6. Se numește *cilindru eliptic* locul geometric al punctelor din spațiu ale căror coordonate față de un sistem ortogonal de coordonate verifică ecuația

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (6.8.1)$$

unde a, b sunt două numere reale strict pozitive, numite *semiaxele cilindrului eliptic*.

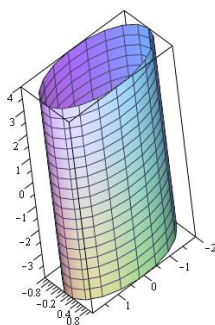


Figura 6.7: Cilindrul eliptic

Forma cilindrului eliptic. Începem prin a examina simetriile cilindrului. Este clar, înainte de toate, că cilindrul admitic admite toate simetriile elipsoidului și hiperbolizilor:

- trei plane de simetrie (planele de coordonate);
- trei axe de simetrie (axele de coordonate);
- un centru de simetrie (originea).

În plus, deoarece ecuația cilindrului nu conține coordonata z , cilindrul eliptic mai are o familie de plane de simetrie (toate planele paralele cu planul xOy) și două familii de axe de simetrie:

- orice dreaptă care este paralelă cu axa Ox și intersectează axa Oz ;
- orice dreaptă care este paralelă cu axa Oy și intersectează axa Oz .

Mai mult, orice punct de pe axa Oz este un centru de simetrie.

Ne ocupăm, acum, de intersecțiile cu plane paralele cu planele de coordonate.

(1) *Plane paralele cu planul xOz .* Avem de analizat sistemul

$$\begin{cases} z = h, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \end{cases}$$

ceea ce reprezintă, pentru orice h real, ecuațiile unei elipse situate în planul $z = h$, de semiaxe egale cu a și b .

(2) *Plane paralele cu planul xOz .* De data asta, sistemul de studiat este

$$\begin{cases} y = h, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} y = h, \\ x^2 = a^2 \left(1 - \frac{h^2}{b^2} \right). \end{cases} \quad (6.8.2)$$

Aici avem trei situații de examinat.

- (a) Dacă $1 - \frac{h^2}{c^2} < 0$, adică $h^2 > b^2$, atunci sistemul (6.8.2) nu admite soluții, ceea ce înseamnă că planul și cilindrul nu se intersectează.
- (b) Dacă $1 - \frac{h^2}{c^2} = 0$, adică $h = \pm b$, atunci sistemul (6.8.2) se reduce la

$$\begin{cases} y = \pm b, \\ x = 0, \end{cases}$$

care sunt ecuațiile unei drepte paralele cu Oz (e clar, câte o dreaptă pentru fiecare valoare a lui h (c sau $(-c)$)).

- (c) Dacă $1 - \frac{h^2}{c^2} > 0$, adică $h^2 < b^2$, atunci sistemul (6.8.2) se reduce la

$$\begin{cases} y = h, \\ x = \pm a \sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{b^2}\right)}, \end{cases}$$

adică obținem câte o pereche de drepte (paralele cu Oz și de data aceasta) pentru fiecare valoare admisibilă a lui h

- (3) *Plane paralele cu planul yOz .* Analiza este perfect analoagă cu cea de la punctul precedent.

Observație. Cilindrul eliptic este o așa numită *suprafață cilindrică*, generată de o familie de drepte paralele cu o dreaptă dată (axa Oz , în cazul nostru), numite *generatoare* și care intersectează o curbă dată. În cazul nostru, acea curbă dată poate fi aleasă să fie oricare dintre elipsele (egale) care se obțin prin intersecții cu planul xOy .

Cilindrul eliptic de rotație (cilindrul circular). Dacă cele două semiaxe ale cilindrului sunt egale, $a = b$, atunci ecuația cilindrului se poate scrie

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Această suprafață se numește *cilindru de rotație sau circular* de rază a și se poate obține prin rotirea oricăreia dintre generatoarele sale în jurul axei Oz .

Planul tangent într-un punct al cilindrului eliptic. Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct oarecare al cilindrului eliptic (6.8.1). Vom studia, ca de obicei, condiția ca o dreaptă care trece prin M_0 să fie tangentă cilindrului, Ne reamintim că ecuațiile unei drepte oarecare prin M_0 sunt:

$$(\Delta) \begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases}$$

Dacă înlocuim în ecuația cilindrului, obținem:

$$\frac{(x_0 + lt)^2}{a^2} + \frac{(y_0 + mt)^2}{b^2} = 1$$

sau

$$b^2(x_0 + lt)^2 + a^2(y_0 + mt)^2 - a^2b^2 = 0.$$

După efectuarea calculelor, obținem ecuația

$$t^2(b^2l^2 + a^2m^2) + 2t(b^2x_0l + a^2y_0m) + b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0.$$

Cum M_0 aparține cilindrului, termenul liber este egal cu zero, deci ecuația de intersecție se reduce la

$$t^2(b^2l^2 + a^2m^2) + 2t(b^2x_0l + a^2y_0m) = 0. \quad (6.8.3)$$

Pentru ca dreapta și cilindrul să aibă un singur punct (dublu) în comun, ecuația de intersecție (6.8.3) trebuie să aibă soluție dublă. Dar o soluție este, întotdeauna, $t = 0$, prin urmare și a doua soluție trebuie să fie zero, ceea ce este posibil doar dacă termenul de gradul întâi în t dispăre, adică dacă avem

$$b^2x_0l + a^2y_0m = 0. \quad (6.8.4)$$

Dacă \mathbf{n} este vectorul de componente $(b^2x_0, a^2y_0, 0)$, iar $\mathbf{v}(l, m, n)$ este vectorul director al dreptei, atunci ecuația (6.8.4) este echivalentă cu $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$, adică *orice dreaptă care trece prin M_0 , iar vectorul său director verifică ecuația (6.8.4) este perpendiculară pe vectorul \mathbf{n}* . Dar aceasta nu înseamnă altceva decât că \mathbf{n} este vectorul normal la planul tangent la cilindrul eliptic în punctul M_0 . Ca atare, ecuația planului tangent în M_0 este:

$$b^2x_0(x - x_0) + a^2y_0(y - y_0) = 0$$

sau, după ce facem calculele și ținem cont, încă o dată, de faptul că M_0 aparține cilindrului,

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1, \quad (6.8.5)$$

adică, și de data aceasta, ecuația planului tangent se poate obține prin dedublare, plecând de la ecuația cilindrului eliptic.

6.9 Cilindrul hiperbolic

Definiția 6.7. Se numește *cilindru hiperbolic* locul geometric al punctelor din spațiu ale căror coordonate față de un sistem ortogonal de coordonate verifică ecuația

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (6.9.1)$$

unde a, b sunt două numere reale strict pozitive, numite *semiaxele cilindrului hiperbolic*.

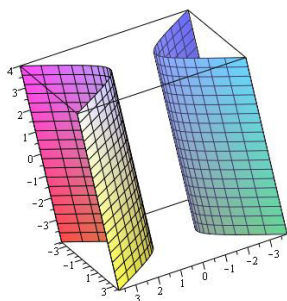


Figura 6.8: Cilindrul hiperbolic

Forma cilindrului . Simetriile cilindrului hiperbolic sunt aceleași cu simetriile cilindrului eliptic, așa că nu le vom mai discuta încă o dată.

Ne ocupăm, acum, de intersecțiile cu plane paralele cu planele de coordonate.

(1) *Plane paralele cu planul xOz .* Avem de analizat sistemul

$$\begin{cases} z = h, \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \end{cases}$$

ceea ce reprezintă, pentru orice h real, ecuațiile unei hiperbole situate în planul $z = h$, de semiaxe egale cu a și b .

(2) *Plane paralele cu planul xOz .* De data asta, sistemul de studiat este

$$\begin{cases} y = h, \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} y = h, \\ x^2 = a^2 \left(1 + \frac{h^2}{b^2} \right). \end{cases} \quad (6.9.2)$$

ceea ce reprezintă, pentru fiecare h real, o pereche de drepte distincte

$$\begin{cases} y = h, \\ x = \pm a \sqrt{1 + \frac{h^2}{b^2}}. \end{cases}$$

(3) *Plane paralele cu planul yOz .* Sistemul care ne dă intersecția este, acum,

$$\begin{cases} x = h, \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} x = h, \\ y^2 = b^2 \left(\frac{h^2}{a^2} - 1 \right). \end{cases} \quad (6.9.3)$$

Aici avem trei situații de examinat.

(a) Dacă $\frac{h^2}{a^2} - 1 < 0$, adică $h^2 < a^2$, atunci sistemul (6.9.3) nu admite soluții, ceea ce înseamnă că planul și cilindrul nu se intersectează.

(b) Dacă $\frac{h^2}{a^2} = 0$, adică $h = \pm a$, atunci sistemul (6.9.3) se reduce la

$$\begin{cases} x = \pm a, \\ y = 0, \end{cases}$$

care sunt ecuațiile unei drepte paralele cu Oz (e clar, câte o dreaptă pentru fiecare valoare a lui h (a sau $(-a)$)).

(c) Dacă $\frac{h^2}{a^2} - 1 > 0$, adică $h^2 > a^2$, atunci sistemul (6.9.3) se reduce la

$$\begin{cases} x = h, \\ y = \pm b \sqrt{\left(\frac{h^2}{a^2} - 1\right)}, \end{cases}$$

adică obținem câte o pereche de drepte (paralele cu Oz și de data aceasta) pentru fiecare valoare admisibilă a lui h

Observație. Cilindrul hiperbolic este, ca și cilindrul eliptic, o *suprafață cilindrică*, generată de o familie de drepte paralele cu o dreaptă dată (axa Oz , în cazul nostru), numite *generatoare* și care intersectează o curbă dată. În cazul nostru, acea curbă dată poate fi aleasă să fie oricare dintre hiperbolele (egale) care se obțin prin intersecții cu planul xOy .

Planul tangent într-un punct al cilindrului hiperbolic. Exact ca și în cazul cilindrului eliptic, se demonstrează că planul tangent într-un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ al cilindrului hiperbolic se poate obține plecând de la ecuația suprafeței, prin dedublare, adică ecuația planului tangent este

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1. \quad (6.9.4)$$

6.10 Cilindrul parabolic

Definiția 6.8. Se numește *cilindru parabolic* locul geometric al punctelor din spațiu ale căror coordonate față de un sistem ortogonal de coordonate verifică ecuația

$$y^2 = 2px, \quad (6.10.1)$$

unde p este un număr real strict pozitiv, numit *parametrul cilindrului parabolic*.

Forma cilindrului parabolic. Cilindrul parabolic (6.10.1) este simetric relativ la:

- planul yOz ;
- planul xOy și orice plan paralel cu el;

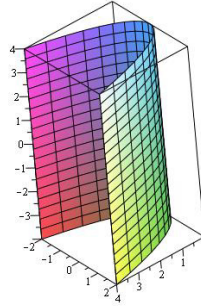


Figura 6.9: Cilindrul parabolic

- axa Oy și orice dreaptă paralelă cu ea care intersectează axa Oz .

Ne ocupăm, acum, de intersecțiile cu plane paralele cu planele de coordonate.

- (1) *Plane paralele cu planul xOy .* Avem de analizat sistemul

$$\begin{cases} z = h, \\ y^2 = 2px, \end{cases}$$

ceea ce reprezintă, pentru orice h real, ecuațiile unei parabole de parametru p , situată în planul $z = h$.

- (2) *Plane paralele cu planul xOz .* De data asta, sistemul de studiat este

$$\begin{cases} y = h, \\ y^2 = 2px \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} y = h, \\ x = \frac{h^2}{2p}. \end{cases} \quad (6.10.2)$$

Ecuația (6.10.2) reprezintă o dreaptă paralelă cu axa Oz , pentru orice valoare a lui h . *Plane paralele cu planul yOz .* Avem de investigat sistemul

$$\begin{cases} x = h, \\ y^2 = 2px \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} x = h, \\ y^2 = 2ph. \end{cases} \quad (6.10.3)$$

Aici avem trei situații de examinat.

- (a) Dacă $h < 0$, atunci sistemul (6.10.3) nu admite soluții, ceea ce înseamnă că planul și cilindrul nu se intersectează.
- (b) Dacă $h = 0$, atunci sistemul (6.10.3) se reduce la

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$$

care sunt ecuațiile axei Oz .

- (c) Dacă $h > 0$, atunci sistemul (6.10.3) se reduce la

$$\begin{cases} x = h, \\ y = \pm \sqrt{2ph}, \end{cases}$$

adică obținem câte o pereche de drepte (paralele cu Oz) pentru fiecare valoare admisibilă a lui h

Observație. Cilindrul parabolic este și el o *suprafață cilindrică*, generată de o familie de drepte paralele cu o dreaptă dată (axa Oz , în cazul nostru), numite *generatoare* și care intersectează o curbă dată. În cazul nostru, acea curbă dată poate fi aleasă să fie oricare dintre parabolele (egale) care se obțin prin intersecții cu planul xOy .

Planul tangent într-un punct al cilindrului parabolic. Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct oarecare al cilindrului parabolic (6.10.1). Vom studia, ca de obicei, condiția ca o dreaptă care trece prin M_0 să fie tangentă cilindrului. Ne reamintim că ecuațiile unei drepte oarecare prin M_0 sunt:

$$(\Delta) \begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases}$$

Dacă înlocuim în ecuația cilindrului, obținem:

$$(y_0 + mt)^2 = 2p(x_0 + lt).$$

După efectuarea calculelor, obținem ecuația

$$m^2 t^2 + 2t(-pl + y_0 m) + y_0^2 - 2px_0 = 0.$$

Cum M_0 aparține cilindrului, termenul liber este egal cu zero, deci ecuația de intersecție se reduce la

$$m^2 t^2 + 2t(-pl + y_0 m) = 0. \quad (6.10.4)$$

Pentru ca dreapta și cilindrul să aibă un singur punct (dublu) în comun, ecuația de intersecție (6.10.4) trebuie să aibă soluție dublă. Dar o soluție este, întotdeauna, $t = 0$, prin urmare și a doua soluție trebuie să fie zero, ceea ce este posibil doar dacă termenul de gradul întâi în t dispăre, adică dacă avem

$$-pl + y_0 m = 0. \quad (6.10.5)$$

Dacă \mathbf{n} este vectorul de componente $(-p, y_0, 0)$, iar $\mathbf{v}(l, m, n)$ este vectorul director al dreptei, atunci ecuația (6.10.5) este echivalentă cu $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$, adică *orice dreaptă care trece prin M_0 , iar vectorul său director verifică ecuația (6.10.5) este perpendiculară pe vectorul \mathbf{n}* . Dar aceasta nu înseamnă altceva decât că \mathbf{n} este vectorul normal la planul tangent la cilindrul parabolic în punctul M_0 . Ca atare, ecuația planului tangent în M_0 este:

$$-p(x - x_0) + y_0(y - y_0) = 0$$

sau, după ce facem calculele și ținem cont, încă o dată, de faptul că M_0 aparține cilindrului,

$$yy_0 = p(x + x_0), \quad (6.10.6)$$

adică, și de data aceasta, ecuația planului tangent se poate obține prin dedublare, plecând de la ecuația cilindrului parabolic și aplicând regulile de dedublare.

- y^2 se înlocuiește cu yy_0 ;
- x se înlocuiește cu $(x + x_0)/2$.

6.11 Probleme

Problema 6.1. Să se găsească punctele de intersecție ale elipsoidului

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{4} = 1$$

cu dreapta

$$x = 4 + 2t, \quad y = -6 + 3t, \quad z = -2 - 2t.$$

Problema 6.2. Să se determine curbele de intersecție ale elipsoidului

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$$

cu planele de coordonate.

Problema 6.3. Să se scrie ecuația planului tangent la elipsoidul

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{9} = 1$$

în punctele lui de intersecție cu planul $x = y = z$.

Problema 6.4. Să se scrie ecuațiile planelor tangente la elipsoidul

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{8} = 1,$$

paralele cu planul

$$3x - 2y + 5z + 1 = 0.$$

Problema 6.5. Determinați unghiul pe care îl formează generatoarele conului

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{6} = 0$$

cu axa Oz .

Problema 6.6. Determinați punctele de intersecție ale elipsoidului

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1$$

cu dreapta

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y+6}{-3} = \frac{z+2}{-2}.$$

Problema 6.7. Determinați punctele de intersecție ale hiperboloidului cu două pânze

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} - \frac{z^2}{9} = -1$$

cu dreapta

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{3}.$$

Problema 6.8. Determinați punctele de intersecție ale hiperboloidului cu o pânză

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{1} = 1$$

cu dreapta

$$\frac{x-4}{4} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-1}{1}.$$

Problema 6.9. Determinați punctele de intersecție ale paraboloidului hiperbolic

$$x^2 - 4y^2 = 4z$$

cu dreapta

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-2}.$$

Problema 6.10. Determinați o dreaptă care să treacă prin punctul $M(5, 1, 2)$ și care să aibă un singur punct comun cu suprafața

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{1} = 1.$$

Problema 6.11. Determinați generatoarele rectilinii ale suprafeței

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$$

care trec prin punctul $M(6, 2, 8)$.

Problema 6.12. Determinați generatoarele rectilinii ale suprafeței

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = z$$

care sunt paralele cu planul $3x + 2y - 4z = 0$.

Problema 6.13. Stabiliți ecuația planului tangent la suprafața

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} - \frac{z^2}{4} = -1$$

în punctul $M(-6, 2, 6)$.

Problema 6.14. Să se scrie ecuația planului tangent la hiperboloidul

$$-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{17} - 1 = 0$$

în punctul $M\left(2, -1, \frac{17}{3}\right)$.

Problema 6.15. Să se scrie ecuația planului tangent la hiperboloidul

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} - \frac{z^2}{5} + 1 = 0$$

în punctul $M\left(4, -\sqrt{15}, 10\right)$.

Problema 6.16. Să se scrie ecuația planului tangent la hiperboloidul

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{3} - 1 = 0,$$

paralel cu planul

$$2x + 3y - z + 11 = 0.$$

Problema 6.17. Să se scrie ecuația planului tangent la hiperboloidul

$$3x^2 - 12y^2 + z^2 - 3 = 0,$$

paralel cu planul

$$2x + 3y - z + 11 = 0.$$

Problema 6.18. Să se scrie ecuațiile dreptelor care trec prin punctul $M(6, 2, 8)$ și se află pe hiperboloidul

$$16x^2 + 36y^2 - 9z^2 - 144 = 0.$$

Problema 6.19. Să se găsească punctele de intersecție ale dreptei

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$$

cu paraboloidul eliptic

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 2z.$$

Problema 6.20. Să se găsească punctele de intersecție ale dreptei

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$$

cu paraboloidul hiperbolic

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 2z.$$

Problema 6.21. Să se scrie ecuațiile planelor tangente la paraboloidul eliptic

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 2z$$

în punctele de intersecție cu dreapta

$$x = y = z.$$

Problema 6.22. Să se scrie ecuațiile planelor tangente la paraboloidul hiperbolic

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 2z$$

în punctele de intersecție cu dreapta

$$x = y = z.$$

Problema 6.23. Să se scrie ecuația planului tangent la paraboloidul eliptic

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = z,$$

paralel cu planul

$$x - 3y + 2z - 1 = 0.$$

Problema 6.24. Să se scrie ecuația planului tangent la paraboloidul hiperbolic

$$x^2 - \frac{y^2}{4} = 3z,$$

paralel cu planul

$$x - 3y + 2z - 1 = 0.$$

Problema 6.25. Să se scrie ecuațiile generatoarelor rectilinii ale paraboloidului hiperbolic

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = z$$

care sunt paralele cu planul

$$3x + 2y - 4z = 0.$$

Problema 6.26. Să se scrie ecuațiile generatoarelor rectilinii ale paraboloidului hiperbolic

$$4x^2 - 9y^2 = 36z$$

care trec prin punctul $M(3\sqrt{2}, 2, 1)$.

Problema 6.27. Se dă paraboloidul hiperbolic

$$x^2 - \frac{y^2}{4} = z$$

și unul dintre planele sale tangente,

$$10x - 2y - z - 21 = 0.$$

Determinați ecuațiile celor două drepte de intersecție dintre paraboloid și plan.

Problema 6.28. Determinați planele tangente la paraboloidul

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = z$$

care sunt paralele cu planul

$$x - y - 2z = 0.$$

7.1 Suprafețe cilindrice

O *suprafață cilindrică* este o suprafață generată de o dreaptă care se mișcă paralel cu o direcție fixă și îndeplinește o condiție suplimentară. De regulă, această condiție suplimentară se exprimă prin cerința ca dreapta mobilă să intersecteze tot timpul o curbă dată, care se numește *curbă directoare a suprafeței cilindrice*. Totuși, în multe probleme concrete această condiție este înlocuită, în mod natural, cu alte condiții ce apar din însăși problema practică studiată: să rămână tot timpul tangentă unei suprafețe sau să rămână la o distanță fixată de o anumită dreaptă fixă.

Să presupunem că este dată o dreaptă fixă

$$(\Delta) \begin{cases} P_1(x, y, z) = 0 \\ P_2(x, y, z) = 0 \end{cases},$$

unde P_1 și P_2 sunt funcții de gradul întâi în variabilele x, y, z . Vom numi această dreaptă *directoare* a suprafeței cilindrice. Se consideră, de asemenea, o curbă, dată prin ecuațiile

$$(C) \begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases},$$

unde, de data aceasta, singura restricție asupra funcțiilor F_1 și F_2 este de netezime. Curba C se numește *curbă directoare* a suprafeței cilindrice. Pentru a stabili ecuația suprafeței, stabilim, înainte de toate, ecuațiile unei drepte oarecare care este paralelă cu directoarea Δ . Vom numi o astfel de dreaptă *generatoare*. Cum directoarea este dată ca o intersecție de două plane, o generatoare se va scrie ca intersecție a două plane care sunt paralele cu planele ce definesc directoarea, adică

$$(G_{\lambda, \mu}) \begin{cases} P_1(x, y, z) = \lambda \\ P_2(x, y, z) = \mu, \end{cases} \quad (7.1.1)$$

unde λ și μ sunt doi parametri reali, deocamdată arbitrari. Pentru ca generatoarele să intersecteze curbă directoare, următorul sistem de ecuații trebuie să fie compatibil

$$\begin{cases} P_1(x, y, z) = \lambda \\ P_2(x, y, z) = \mu \\ F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (7.1.2)$$

Sistemul de mai sus este un sistem de patru ecuații, cu trei necunoscute, x, y, z . În general, un astfel de sistem nu este compatibil. Dacă funcțiile F_1 și F_2 ar fi și ele funcții de gradul întâi, am avea la îndemână metodele generale ale algebrei pentru a studia compatibilitatea. În general, însă, lucrurile nu stau așa. În practică, se procedează în modul următor:

- i) Se aleg trei dintre cele patru ecuații. Evident, alegem ecuațiile cele mai simple. De regulă, alegem ecuațiile generatoarelor și una dintre ecuațiile curbei directoare. Dacă această curbă este plană, atunci se poate ca una dintre ecuațiile sale să fie de gradul întâi și, desigur, această ecuație este selectată.
- ii) Rezolvăm sistemul de la punctul precedent și obținem x, y, z , ca funcții de parametrii generatoarelor, λ și μ .
- iii) Pentru ca sistemul format din cele patru ecuații să fie compatibil, soluția obținută la punctul precedent trebuie să verifice și cea de-a patra ecuație. Impunând aceasta, obținem o condiție de tipul

$$\varphi(\lambda, \mu) = 0, \quad (7.1.3)$$

unde $\varphi(\lambda, \mu)$ este membrul stâng al ultimei ecuații, în care s-au înlocuit x, y, z cu expresiile lor în funcție de λ și μ .

iv) Se exprimă λ și μ în funcție de x, y, z din ecuațiile generatoarelor și se înlocuiesc în condiția de compatibilitate (7.1.3). Ecuația care se obține,

$$\varphi(P_1(x, y, z), P_2(x, y, z)) = 0, \quad (7.1.4)$$

este ecuația suprafeței cilindrice căutate.

Exemplul 7.1. Vom scrie ecuația suprafeței cilindrice ale cărei generatoare sunt paralele cu dreapta de ecuații

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$$

și se sprijină pe hiperbola echilateră

$$xy = a^2, \quad z = 0.$$

Începem prin a scrie directoarea ca intersecție de două plane. Un calcul simplu ne conduce la

$$\begin{cases} P_1(x, y, z) \equiv 3x - 2y - 3 = 0 \\ P_2(x, y, z) \equiv y + 3z + 3 = 0 \end{cases}.$$

Prin urmare, ecuațiile generatoarelor vor fi

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3 = \lambda \\ y + 3z + 3 = \mu \end{cases}.$$

Condiția ca generatoarele să intersecteze curba directoare se traduce, prin urmare, prin sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3 = \lambda \\ y + 3z + 3 = \mu \\ z = 0 \\ xy = a^2 \end{cases}.$$

Din primele trei ecuații, obținem imediat că

$$\begin{cases} x = \frac{\lambda + 2\mu - 3}{3} \\ y = \mu - 3 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Din cea de-a patra ecuație obținem, înlocuind,

$$\varphi(\lambda, \mu) \equiv \frac{1}{3}(\lambda + 2\mu - 3)(\mu - 3) - a^2 = 0. \quad (7.1.5)$$

Pe de altă parte, din ecuațiile generatoarelor,

$$\begin{cases} \lambda = 3x - 2y - 3 \\ \mu = y + 3z + 3 \end{cases}.$$

Înlocuind în condiția de compatibilitate de mai sus, obținem:

$$(x + 2z)(y + 3z) - a^2 = 0,$$

care este ecuația suprafeței cilindrice.

Exemplul 7.2. Pentru a ilustra și alte modalități de a descrie o suprafață cilindrică, vom determina ecuația suprafeței cilindrice circumscrise sferei

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 25,$$

având generatoarele paralele cu o dreaptă Δ de vector director $(-2, 4, 5)$.

Vom rezolva problema aceasta prin două metode diferite. Prima soluție se bazează pe reducerea problemei la o problemă de tipul celei precedente. În acest scop, trebuie să găsim, mai întâi, curba directoare a suprafeței. Din considerente geometrice, este clar că această curbă este un cerc mare al sferei, situat într-un plan perpendicular pe generatoare. Cum centrul sferei este punctul $C(1, 2, 3)$, ecuația acestui plan este

$$-2(x - 1) + 4(y - 2) + 5(z - 3) = 0,$$

sau

$$-2x + 4y + 5z - 21 = 0.$$

Putem considera, fără a reduce generalitatea, că directoarea Δ trece prin origine, deci are ecuațiile

$$\frac{x}{-2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$$

sau

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 5x + 2z = 0 \end{cases}.$$

Așadar, ecuațiile generatoarelor sunt

$$\begin{cases} 2x + y = \lambda \\ 5x + 2z = \mu \end{cases} \quad (7.1.6)$$

Condiția ca generatoarele să intersecteze curba directoare se scrie sub forma sistemului de ecuații

$$\begin{cases} 2x + y = \lambda \\ 5x + 2z = \mu \\ -2x + 4y + 5z - 21 = 0 \\ (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 25. \end{cases}$$

Rezolvând sistemul format din primele trei ecuații, obținem imediat soluția

$$\begin{cases} x = \frac{8\lambda + 5\mu - 42}{45} \\ y = \frac{29\lambda - 10\mu + 84}{45} \\ z = \frac{-4\lambda + 2\mu + 21}{9} \end{cases}$$

Înlocuind în ultima ecuație, rezultă condiția de compatibilitate

$$(8\lambda + 5\mu - 87)^2 + (29\lambda - 10\mu - 6)^2 + 25(-4\lambda + 2\mu - 6)^2 = 50625.$$

În fine, dacă în această ecuație punem (din ecuațiile generatoarelor) $\lambda = 2x + y$ și $\mu = 5x + 2z$, obținem ecuația suprafeței cilindrice,

$$(41x + 8y + 10z - 87)^2 + (58x + 29y - 20z - 6)^2 + 25(2x - 4y + 4z - 6)^2 = 50625.$$

Dacă dezvoltăm această ecuație, este ușor de văzut că ea este echivalentă cu

$$936 + 174x + 12y + 60z - 41x^2 - 16xy - 20xz - 29y^2 + 40yz - 20z^2 = 0. \quad (7.1.7)$$

Pentru cea de-a doua metodă, considerăm, din nou, ecuațiile (7.1.6) ale generatoarelor, obținute mai devreme. Condiția de tangență din enunțul problemei înseamnă, în fapt, că sfera și generatoarele trebuie să aibă în comun puncte duble. Altfel spus, sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 2x + y = \lambda \\ 5x + 2z = \mu \\ (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 25. \end{cases}$$

trebuie să aibă o soluție dublă. Ideea este să exprimăm din primele două ecuații două necunoscute în funcție de a treia și de parametrii, să înlocuim în ecuația sferei, pentru a obține o ecuație de gradul al doilea în raport cu cea de-a treia necunoscută. Condiția de tangență va însemna, pur și simplu, că această ecuație are rădăcină dublă, adică discriminantul său se anulează. În fine, vom înlocui, ca mai sus, parametrii din ecuațiile generatoarelor și vom obține, pe această cale, ecuația suprafeței cilindrice.

Din primele două ecuații, se obține imediat că

$$\begin{cases} y = \lambda - 2x \\ z = \frac{\mu - 5x}{2} \end{cases}.$$

Înlocuind în ecuația sferei, se obține

$$45x^2 + (-16\lambda + 84 - 10\mu)x - 44 + 4\lambda^2 - 16\lambda + \mu^2 - 12\mu = 0.$$

Egalând cu zero discriminantul acestei ecuații, obținem condiția de compatibilitate

$$-3744 - 48\lambda - 120\mu + 116\lambda^2 - 80\lambda\mu + 20\mu^2 = 0.$$

În fine, substituind în această ecuație, din ecuațiile generatoarelor, $\lambda = 2x + y$ și $\mu = 5x + 2z$, se obține, după un calcul simplu, din nou, ecuația (7.1.7).

7.2 Suprafețe conice

O *suprafață conică* este o suprafață generată de o familie de drepte (numite *generatoare*) care au un punct comun (numit *vârf*) și îndeplinește o condiție suplimentară. Această condiție suplimentară este, de regulă, aceea ca generatoarele să întâlnească o curbă dată, numită *curbă generatoare* a suprafeței conice. Din nou, ca și în cazul suprafețelor cilindrice, această condiție poate fi înlocuită cu alta (de exemplu ca generatoarele să fie tangente unei suprafețe).

Metoda de descriere a suprafețelor conice este, principal, cea folosită și în cazul suprafețelor cilindrice:

- se scriu, mai întâi, ecuațiile unor drepte care pot juca rolul generatoarelor (în cazul nostru, drepte care trec prin vârf). Ecuațiile acestea vor depinde de doi parametri, pe moment arbitrari.
- Se pune condiția ca aceste drepte să verifice condiția suplimentară, obținându-se, pe această cale, o relație între cei doi parametri.

- În relația obținută la punctul precedent se înlocuiesc parametrii cu expresiile lor în funcție de x, y, z , obținute din ecuațiile generatoarelor. Ecuația care se obține este ecuația suprafeței conice.

De regulă, vârful este dat fie prin coordonatele sale, fie ca intersecție de trei plane. Vom considera cel de-al doilea caz, întrucât primul se reduce cu ușurință la acesta. Să presupunem, prin urmare, că vârful conului este dat prin intersecția a trei plane, adică prin sistemul de ecuații

$$(V) \begin{cases} P_1 \equiv a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0 \\ P_2 \equiv a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0 \\ P_3 \equiv a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} = 0 \end{cases}, \quad (7.2.1)$$

unde, firește,

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \neq 0,$$

altminteri sistemul nu ar avea o soluție unică. Condiția ca o dreaptă să treacă prin vârful conului este ușor de descris geometric, plecând de la descrierea vârfului ca intersecție de trei plane: *O dreaptă trece prin vârful conului dacă și numai dacă ea face parte, simultan, din fascicolul de plane determinat de planele P_1 și P_3 și din cel determinat de planele P_2 și P_3 .* Prin urmare, ecuațiile generatoarelor se pot scrie sub forma

$$(G_{\lambda, \mu}) \begin{cases} P_1 = \lambda P_3 \\ P_2 = \mu P_3 \end{cases}, \quad (7.2.2)$$

unde λ și μ sunt doi parametri reali, deocamdată arbitrari.

Să presupunem, mai departe, că avem o condiție suplimentară tradusă prin cerința ca generatoarele să intersecteze o curbă directoare, dată ca intersecție de două suprafețe, prin ecuații de forma

$$(C) \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}. \quad (7.2.3)$$

Condiția ca generatoarele să intersecteze directoarea se traduce prin condiția ca sistemul format din ecuațiile generatoarelor și cele ale directoarei, adică sistemul

$$\begin{cases} P_1 = \lambda P_3 \\ P_2 = \mu P_3 \\ F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}, \quad (7.2.4)$$

să fie compatibil.

Strategia pe care o vom urma este similară cu cea din cazul suprafețelor cilindrice, anume vom adăuga, în prima instanță, ecuațiilor generatoarelor cea mai simplă dintre ecuațiile curbei directoare. Rezolvând sistemul rezultat, vom obține x, y, z ca funcții de parametrii λ și μ . Înlocuind în cea de-a patra ecuație, vom obține o relație de forma

$$\varphi(\lambda, \mu) = 0, \quad (7.2.5)$$

relație pe care o vom numi *condiția de compatibilitate*. Pe de altă parte, din ecuațiile generatoarelor obținem expresiile parametrilor λ și μ în funcție de variabilele x, y, z :

$$\begin{cases} \lambda = \frac{P_1}{P_3} \\ \mu = \frac{P_2}{P_3} \end{cases}.$$

Înlocuind aceste expresii în condiția de compatibilitate, obținem ecuația suprafeței conice:

$$\varphi\left(\frac{P_1(x, y, z)}{P_3(x, y, z)}, \frac{P_2(x, y, z)}{P_3(x, y, z)}\right) = 0 \quad (7.2.6)$$

sau, și mai explicit,

$$\varphi\left(\frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}}, \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}}\right) = 0. \quad (7.2.7)$$

Exemplul 7.3. Ca un prim exemplu, vom determina ecuația unei suprafețe conice cu vârful în $V(0, 0, 0)$ și ale cărei generatoare intersectează curba

$$\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x^2 - y = 0 \end{cases}.$$

Ecuațiile vârfului (ca intersecție de trei plane) sunt, în mod evident:

$$\begin{cases} P_1(x, y, z) \equiv x = 0 \\ P_2(x, y, z) \equiv y = 0 \\ P_3(x, y, z) \equiv z = 0 \end{cases},$$

prin urmare ecuațiile generatoarelor sunt

$$\begin{cases} x = \lambda z \\ y = \mu z \end{cases}.$$

Pentru a obține condiția de compatibilitate, adăugăm, mai întâi, ecuațiilor generatoarelor prima ecuație a curbei directoare și obținem sistemul

$$\begin{cases} x = \lambda z \\ y = \mu z \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}.$$

Se obține de aici imediat că

$$x = \frac{\lambda}{\lambda + \mu + 1}, \quad y = \frac{\mu}{\lambda + \mu + 1}, \quad z = \frac{1}{\lambda + \mu + 1}.$$

Înlocuind în a doua ecuație a curbei directoare, găsim relația de compatibilitate

$$\frac{\lambda^2}{(\lambda + \mu + 1)^2} - \frac{\mu}{\lambda + \mu + 1} = 0$$

sau

$$\varphi(\lambda, \mu) = \lambda^2 - \mu(\lambda + \mu + 1) = 0.$$

Înlocuind în această relație, din ecuațiile generatoarelor, $\lambda = x/z$, $\mu = y/z$, obținem

$$\frac{x^2}{z^2} - \frac{y}{z} \left(\frac{x}{z} + \frac{y}{z} + 1 \right) = 0$$

sau

$$x^2 - y(x + y + z) = 0.$$

7.3 Suprafețe conoide (Conoidul drept cu plan director)

Suprafețele conoide sunt niște suprafețe care au anumite caracteristici în comun cu suprafețele conice (de unde denumirea). Ele alcătuiesc, de fapt, o clasă mai largă de suprafețe. Noi ne vom ocupa doar de o subclasă specială. Întrucât, totuși, nu ne vom referi la suprafețe conoidale mai generale, vom păstra termenul.

Se numește *suprafață conoidală (conoid drept cu plan director)* o suprafață generată de o familie de drepte (numite *generatoare*) care se sprijină pe o dreaptă dată, rămân paralele cu un plan dat și îndeplinesc o condiție suplimentară (de regulă, ca și până acum, această condiție este ca generatoarele să intersecteze o curbă dată, *curba directoare* a suprafeței).

Metoda de determinare a ecuației suprafeței conoidale este, principial, aceeași de până acum: se scriu mai întâi generatoarele, care vor forma o familie de drepte, dependente de doi parametri, drepte care intersectează dreapta dată și sunt paralele cu planul dat. Odată scrise ecuațiile generatoarelor, restul procesului este absolut identic cu cel din cazul suprafețelor cilindrice și conice, așa că nu-l vom mai descrie încă o dată.

Prima problemă pe care trebuie să o înfruntăm este aceea a stabilirii ecuațiilor generatoarelor. Așa cum am spus, acestea intersectează dreapta dată și sunt paralele cu planul dat. Prin urmare, ecuațiile lor vor fi date ca intersecție dintre un plan paralel cu planul dat și un plan care trece prin dreapta dată.

Să presupunem că dreapta fixă (directoarea) este dată de ecuațiile

$$\begin{cases} P_1(x, y, z) \equiv a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0 \\ P_2(x, y, z) \equiv a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0 \end{cases}, \quad (7.3.1)$$

în timp ce planul director este dat de ecuația

$$P(x, y, z) \equiv ax + by + cz + d = 0. \quad (7.3.2)$$

Atunci ecuațiile generatoarelor vor fi de forma

$$\begin{cases} P_1 = \lambda P_2 \\ P = \mu \end{cases}. \quad (7.3.3)$$

Într-adevăr, primul plan trece prin dreapta directoare (întrucât este un plan din fascicolul de plane determinat de această dreaptă), în timp ce al doilea plan este paralel cu planul director.

Prin urmare, dacă ecuațiile curbei directoare sunt

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases},$$

atunci se formează un sistem de ecuații din ecuațiile generatoarelor și una dintre ecuațiile acestei curbe, se rezolvă și se găsesc neconoscutele în funcție de parametri λ și μ . Înlocuind în cea de-a doua ecuație a curbei, se obține condiția de compatibilitate, din nou, sub forma unei relații între parametri:

$$\varphi(\lambda, \mu) = 0.$$

Înlocuind parametrii acum, din ecuațiile generatoarelor, se obține ecuația suprafeței conoide sub forma

$$\varphi \left(\frac{P_1(x, y, z)}{P_2(x, y, z)}, P(x, y, z) \right) = 0 \quad (7.3.4)$$

sau, mai explicit,

$$\varphi \left(\frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}}{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}}, ax + by + cz + d \right) = 0. \quad (7.3.5)$$

Exemplul 7.4. Să se scrie ecuația suprafeței conoide cu plan director ale cărei generatoare sunt paralele cu planul xOy ,

$$z = 0, \quad (P)$$

se sprijină pe axa Oz

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad (D)$$

și pe curba

$$\begin{cases} y^2 - 2z + 1 = 0 \\ x^2 - 2z + 1 = 0. \end{cases} \quad (C)$$

Demonstrație Ecuațiile generatoarelor sunt

$$\begin{cases} x = \lambda y \\ z = \mu. \end{cases} \quad (G)$$

Deoarece ele trebuie să se sprijine pe curba directoare (C), sistemul

$$\begin{cases} x = \lambda y \\ z = \mu \\ y^2 - 2z + 1 = 0 \\ x^2 - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

trebuie să fie compatibil. Relația de compatibilitate între parametrii se obține eliminând pe x, y, z între ecuațiile sistemului. Se obține

$$2\lambda^2\mu - 2\lambda^2 - 2\mu + 1 = 0.$$

Ca să obținem ecuația suprafeței, trebuie să eliminăm pe λ și μ din sistemul format din ecuațiile generatoarelor și condiția de compatibilitate:

$$\begin{cases} x = \lambda y \\ z = \mu \\ 2\lambda^2\mu - 2\lambda^2 - 2\mu + 1 = 0. \end{cases}$$

Înlocuim $\lambda = \frac{x}{y}$ și $\mu = z$ în ecuația a treia și eliminăm numitorul. În final, obținem:

$$2x^2z - 2y^2z - 2x^2 + y^2 = 0.$$

□

7.4 Suprafețe de rotație

Definiția 7.1. Se numesc *suprafețe de rotație* suprafețele generate de o curbă C care se rotește, fără alunecare, în jurul unei axe fixe D .

În timpul rotației, un punct oarecare de pe curba C descrie un cerc cu centrul pe axa de rotație D , situat într-un plan perpendicular pe axa de rotație. Prin urmare, suprafața însăși poate fi privită ca fiind generată de aceste cercuri, numite *paralele*. Avem, mai precis, următoarea teoremă:

Teorema 7.1. *Fie*

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \quad (D)$$

ecuațiile axei D și fie

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (C)$$

ecuațiile curbei C . Ecuația suprafeței de rotație este

$$F(\sigma, P) = 0,$$

unde

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \\ P &= lx + my + nz. \end{aligned}$$

Demonstrație Presupunem, ca în enunț, că curba C este dată ca intersecție a două suprafețe:

$$(C) \begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases} \quad (7.4.1)$$

Axa de rotație, pe de altă parte, are ecuațiile:

$$(D) \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \quad (7.4.2)$$

Cercul generator Γ se obține ca intersecție dintre o sferă cu centrul pe axa de rotație și rază variabilă cu un plan variabil perpendicular pe axă. Prin urmare, ecuațiile sale vor fi:

$$(\Gamma) \begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \lambda^2 \\ lx + my + nz = \mu. \end{cases} \quad (7.4.3)$$

Pentru ca cercul Γ să se sprijine pe curba C , trebuie ca cele două curbe să cel puțin un punct comun, adică sistemul de ecuații format din ecuațiile lor:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \lambda^2 \\ lx + my + nz = \mu \end{cases} \quad (7.4.4)$$

să fie compatibil. Condiția de compatibilitate se obține eliminând x, y, z între cele patru ecuații de mai sus. Să presupunem că se obține relația:

$$F(\lambda, \mu) = 0. \quad (7.4.5)$$

Acum, ca și în cazul celorlalte suprafețe generate, ecuația suprafeței se obține eliminând parametrii λ și μ între ecuațiile cercului generator și condiția de compatibilitate:

$$\begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \lambda^2 \\ lx + my + nz = \mu \\ F(\lambda, \mu) = 0. \end{cases} \quad (7.4.6)$$

λ și μ se obțin, evident, din primele ecuații și obținem:

$$F\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}, lx + my + nz\right) = 0. \quad (7.4.7)$$

□

Exemplul 7.5. Să se determine ecuația suprafeței de rotație generată de curba

$$(C) \begin{cases} x^2 - 2y^2 + z^2 - 5 = 0 \\ x + z + 3 = 0 \end{cases}$$

în rotirea ei în jurul axei

$$x = y = z.$$

Demonstrație Ecuațiile cercului generator sunt

$$(\Gamma) \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2 \\ x + y + z = \mu. \end{cases}$$

Prin urmare, condiția de compatibilitate se obține eliminând x, y, z din sistemul

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 + z^2 - 5 = 0 \\ x + z + 3 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2 \\ x + y + z = \mu. \end{cases}$$

Se obține cu ușurință:

$$\lambda^2 - 3(\mu - 3)^2 - 5 = 0.$$

În fine, ecuația suprafeței se obține eliminând parametrii λ și μ din sistemul format din ecuațiile cercului generator și relația de legătură, adică:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2 \\ x + y + z = \mu \\ \lambda^2 - 3(\mu - 3)^2 - 5 = 0. \end{cases}$$

Se obține, imediat,

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3(x + y + z - 3)^2 - 5 = 0.$$

□

7.5 Probleme

Problema 7.1. Stabiliți ecuația unei suprafețe cilindrice care are ca și curbă directoare curba

$$(C) : \begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ z = 0, \end{cases}$$

iar generatoarele sunt paralele cu dreapta

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}.$$

Problema 7.2. Stabiliți ecuația unei suprafețe cilindrice care are ca și curbă directoare curba

$$(C) : \begin{cases} (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 25, \\ x + y - z + 2 = 0, \end{cases}$$

iar generatoarele sunt paralele cu axa Ox .

Problema 7.3. Stabiliți ecuația unei suprafețe cilindrice care are ca și curbă directoare curba

$$(C) : \begin{cases} (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 25, \\ x + y - z + 2 = 0, \end{cases}$$

iar generatoarele sunt paralele cu dreapta

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ z - c = 0, \end{cases}$$

unde c este o constantă.

Problema 7.4. Curba directoare a unei suprafețe cilindrice este

$$(C) : \begin{cases} x = y^2 + z^2, \\ x = 2z, \end{cases}$$

iar generatoarele sunt perpendiculare pe planul curbei directoare. Stabiliți ecuația suprafeței cilindrice.

Problema 7.5. Să se scrie ecuația suprafeței cilindrice care are drept curbă directoare elipsa

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0, \\ z = 0, \end{cases}$$

iar generatoarele sunt paralele cu dreapta

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}.$$

Problema 7.6. Să se scrie ecuația suprafeței cilindrice care are drept curbă directoare hiperbola

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} - 1 = 0, \\ z = 0, \end{cases}$$

iar generatoarele sunt paralele cu dreapta

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}.$$

Problema 7.7. Să se scrie ecuația suprafeței cilindrice care are drept curbă directoare parabola

$$\begin{cases} z^2 - x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$$

iar generatoarele sunt paralele cu dreapta

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}.$$

Problema 7.8. Să se determine ecuația suprafeței cilindrice ale cărei generatoare sunt paralele cu dreapta

$$x = -2y = z,$$

iar curba directoare este dată de ecuațiile

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ 4y^2 - 2z^2 + x - 8y - 8z - 2 = 0. \end{cases}$$

Problema 7.9. Să se determine ecuația suprafeței conice cu vârful în originea axelor și a cărei curbă directoare este curba

$$\begin{cases} y^2 - x = 0, \\ 4x + 3y + 2z - 1 = 0. \end{cases}$$

Problema 7.10. Să se determine ecuația suprafeței conice cu vârful $V(0, -1, 4)$ și a cărei curbă directoare este cercul

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 6y - 1 = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Problema 7.11. Să se scrie ecuația suprafeței conice cu vârful în punctul de intersecție a planelor

$$\begin{cases} x + 3z - 10 = 0, \\ y - 2 = 0, \\ x - z + 2 = 0 \end{cases}$$

și cu curba directoare

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 3z^2 + 6xz - 4 = 0, \\ 5x + y - 3z = 0. \end{cases}$$

Problema 7.12. Să se determine ecuația suprafeței conice cu vârful $V(0, -a, 0)$ și a cărei curbă directoare este cercul

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ y + z = 2. \end{cases}$$

Problema 7.13. Să se determine ecuația suprafeței conice cu vârful $V(0, b, 0)$ și a cărei curbă directoare este hiperbola

$$\begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

Problema 7.14. Să se determine ecuația suprafeței conice cu vârful $V(4, 0, -3)$ și a cărei curbă directoare este elipsa

$$\begin{cases} \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

Problema 7.15. Să se determine ecuația suprafeței conice cu vârful $V(-3, 0, 0)$ și a cărei curbă directoare este curba

$$\begin{cases} 3x^2 + 6y^2 - z = 0, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

Problema 7.16. Să se determine ecuația suprafeței conice cu vârful $V(2, 2, 2)$ și a cărei curbă directoare este curba

$$\begin{cases} y^2 - 4x + 1 = 0, \\ z + 1 = 0. \end{cases}$$

Problema 7.17. Să se determine ecuația suprafeței conoide generată de o dreaptă care se sprijină pe axa Oz , este paralelă cu planul xOy și întâlnește cercul

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = a^2, \\ x = b. \end{cases}$$

Problema 7.18. Să se determine ecuația suprafeței conoide generată de o dreaptă care se sprijină pe dreapta

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = 0, \end{cases}$$

este paralelă cu planul xOy și întâlnește hiperbola

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1, \\ y = 2. \end{cases}$$

Problema 7.19. Să se determine ecuația suprafeței conoide generată de o dreaptă care se sprijină pe axa Ox , este paralelă cu planul yOz și întâlnește curba

$$\begin{cases} z^2 - 2x = 0, \\ 9y^2 - 16xz = 0. \end{cases}$$

Problema 7.20. Să se determine ecuația suprafeței conoide generată de o dreaptă care se sprijină pe drepte

$$(D_1) : \begin{cases} 2x + z - 4 = 0, \\ 3y - 2z - 2 = 0, \end{cases}$$

$$(D_2) : \begin{cases} x - 2z = 0, \\ 2y - 3z + 4 = 0, \end{cases}$$

rămânând paralelă cu planul

$$(P) : x + 3y - z + 11 = 0.$$

Problema 7.21. Să se scrie ecuația suprafeței conoide generată de o dreaptă care întâlnește dreapta

$$x = y = z,$$

curba

$$\begin{cases} x^4 + y^4 - a^4 = 0, \\ z = 0 \end{cases}$$

și este paralelă cu planul $x + y + z - 1 = 0$.

Problema 7.22. Să se scrie ecuația unei suprafețe conoide generată de o dreaptă care se mișcă paralel cu planul xOy , se sprijină pe axa Oz și intersectează parabola

$$\begin{cases} z = ax^2 + bx + c, \\ y = p. \end{cases}$$

Problema 7.23. Să se determine ecuația suprafeței de rotație generate de hiperbola

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \\ x = 0, \end{cases}$$

care se rotește în jurul axei Oy .

Problema 7.24. Să se determine ecuația suprafeței de rotație generate de curba

$$\begin{cases} x^3 - x^2 - y^2 = 0, \\ z = 0, \end{cases}$$

care se rotește în jurul axei Ox .

Problema 7.25. Să se determine ecuația suprafeței de rotație generate de cercul

$$\begin{cases} (y - a)^2 + z^2 - r^2 = 0, \\ x = 0, \end{cases}$$

care se rotește în jurul axei Oz .

Problema 7.26. Să se determine ecuația suprafeței de rotație generate de curba

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z = 0, \\ x - 2y = 0, \end{cases}$$

care se rotește în jurul dreptei $x = y = z$.

Problema 7.27. Să se determine ecuația suprafeței ce se obține prin rotirea dreptei

$$\begin{cases} x + z = 2, \\ y = 0 \end{cases}$$

în jurul dreptei

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = 2. \end{cases}$$

Problema 7.28. Să se determine ecuația suprafeței ce se obține prin rotirea dreptei

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

în jurul dreptei

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6}.$$

Partea II

Transformări geometrice

CAPITOLUL 8

Transformări de coordonate

8.1 Introducere

Am văzut, în primul capitol, că a defini un sistem de coordonate este totuna cu a defini un reper afin, care constă dintr-un punct al spațiului afin (de dimensiune 1, 2, sau 3, după cum studiem geometria pe dreaptă, în plan sau în spațiu) și o bază a spațiului vectorial asociat spațiului afin. Această bază e formată dintr-un vector nenul, în cazul drepte, din doi vectori necoliniari în cazul planului și din trei vectori necoplanari, în cazul spațiului.

Prin urmare, a realiza o schimbare de coordonate înseamnă a realiza cel puțin una dintre următoarele operații:

- o schimbare a originii (adică înlocuirea originii cu un alt punct);
- schimbarea direcției axelor de coordonate (și a sensului, eventual), ceea ce înseamnă înlocuirea bazei spațiului vectorial asociat cu o altă bază.

Fiecare punct al spațiului cu care lucrăm, într-un caz concret, are un set de coordonate relativ la reperul afin ales. Atunci când aplicăm o transformare de coordonate, trebuie să găsim legătura dintre coordonatele punctului relativ la reperul inițial și coordonatele sale relativ la reperul transformat. Analog stau lucrurile și în cazul vectorilor, unde trebuie să găsim legătura dintre componentele vectorilor relativ la baza inițială și componentele lor relativ la baza transformată.

Există, în cazul graficii, cel puțin, mai multe motivații pentru care este important să fim în stare să trecem de la un sistem de coordonate la altul. Dăm, mai jos, câteva dintre ele.

8.2 Transformări de coordonate scrise în coordonate afine

8.2.1 Schimbarea originii

Considerăm un sistem de coordonate

$$S = (O; \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\})$$

și un sistem transformat, obținut din acesta prin mutarea originii, fără a schimba direcțiile și sensurile axelor de coordonate,

$$S' = (O'; \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}).$$

Presupunem că O' are, față de sistemul de coordonate vechi, coordonatele (w_1, \dots, w_n) .

Fie, acum, P un punct oarecare, ce are, relativ la sistemul de coordonate vechi, coordonatele (x_1, \dots, x_n) și, față de sistemul de coordonate nou, coordonatele (x'_1, \dots, x'_n) . Atunci, avem:

Teorema 8.1.

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 + w_1, \\ \vdots \\ x_n = x'_n + w_n \end{cases}$$

sau, matricial,

$$X = X' + W,$$

unde

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Observație. Facem convenția că vectorii (sau punctele) se reprezintă prin matricile *coloană* ale coordonatelor sau componentelor lor. Este una dintre cele două convenții posibile care se utilizează în grafică. Cealaltă convenție este că vectorii (sau punctele) se descriu prin matrici *linie*.

Demonstrația teoremei. Fie

$$O' = O + \sum_{i=1}^n w_i \mathbf{e}_i.$$

În sistemul de coordonate noi, putem scrie

$$P = O' + \sum_{i=1}^n x'_i \mathbf{e}_i = O + \sum_{i=1}^n w_i \mathbf{e}_i + \sum_{i=1}^n x'_i \mathbf{e}_i = O + \sum_{i=1}^n (x'_i + w_i) \mathbf{e}_i. \quad (8.2.1)$$

Cum, pe de altă parte,

$$P = O + \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i, \quad (8.2.2)$$

iar vectorii \mathbf{e}_i sunt liniar independenți, din (8.2.1) și (8.2.2) rezultă relația cerută. \square

Observație. Dacă se modifică doar originea sistemului de coordonate, atunci, în mod evident, componentele unui vector relativ la noul sistem de coordonate nu se modifică, deoarece baza în raport cu care se descompune vectorul rămâne aceeași.

8.2.2 Schimbarea axelor

De data asta, reperul vechi este același, adică

$$S = (O; \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}),$$

dar reperul nou este de forma

$$S = (O; \{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}),$$

adică originea rămâne aceeași, dar se schimbă baza de coordonate. Presupunem că

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} \mathbf{e}_j, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Fie

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Matricea A se numește *matrice de schimbare a bazei*. Numele e justificat de teorema de mai jos.

Observație. După cum se poate constata cu ușurință, elementele coloanelor matricei de schimbare a bazei sunt componentele elementelor noii baze față de vechea bază. Matricea de schimbare a bazei este, desigur, inversabilă, din moment ce coloanele sale sunt vectori liniar independenți.

Teorema 8.2. *Fie P un punct oarecare. Atunci coordonatele sale relativ la cele două repere sunt legate prin relația*

$$X = A \cdot X'. \quad (8.2.3)$$

Observație. De remarcat că, dacă am fi utilizat cealaltă convenție, relația (8.2.3) s-ar fi scris

$$X = X' \cdot A^t,$$

unde, de data aceasta, X și X' sunt matrici linie, nu coloană.

Demonstrația teoremei. Avem

$$P = O + \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{e}_j = O + \sum_{i=1}^n x'_i \mathbf{e}'_i,$$

prin urmare,

$$\sum_{j=1}^n x_j \mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^n x'_i \mathbf{e}'_i = \sum_{i=1}^n x'_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ji} \mathbf{e}_j \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ji} x'_i \right) \mathbf{e}_j.$$

De aici rezultă că

$$x_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} x'_i, \quad 1 \leq j \leq n,$$

sau, matricial,

$$X = A \cdot X'.$$

□

Este important să avem și regula după care se schimbă componentele unui vector relativ la un sistem de coordonate atunci când se modifică direcțiile axelor. Avem următorul rezultat:

Teorema 8.3. Fie \mathbf{v} un vector care are componentele v_1, \dots, v_n relativ la vechiul sistem de coordonate și componentele v'_1, \dots, v'_n relativ la noul sistem de coordonate. Atunci cele două seturi de componente sunt legate prin relația

$$V' = A \cdot V, \quad (8.2.4)$$

unde A este matricea de schimbare a bazei.

Demonstrație Avem

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v'_i \mathbf{e}'_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v'_i a_{ji} \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ji} v'_i \right) \mathbf{e}_j$$

□

8.2.3 Cazul general

Mai rămâne de discutat cazul în care se schimbă atât originea reperului, cât și baza de coordonate. Este ușor de constatat că atunci are loc

Teorema 8.4. Dacă se trece de la reperul

$$S = (O; \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\})$$

la reperul

$$S' = (O'; \{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}),$$

adică se schimbă atât originea, cât și baza, atunci legătura între coordonatele unui punct în vechea bază și coordonatele sale în noua bază sunt date de

$$X = A \cdot X' + W, \quad (8.2.5)$$

unde W este vectorul de poziție al noii origini relativ la originea vechiului sistem de coordonate, iar A este matricea schimbării de bază.

Faptul că relația (8.2.5) nu se reduce la o simplă înmulțire de matrici complică destul de mult lucrurile dacă, așa cum se întâmplă adesea, trebuie să facem mai multe schimbări de coordonate. Astfel, de exemplu, dacă, în (8.2.5)

$$X' = B \cdot X'' + W',$$

atunci relația citată se scrie

$$X = A \cdot (B \cdot X'' + W') + W = (A \cdot B) \cdot X'' + A \cdot W' + W.$$

Este ușor de imaginat cât de tare se poate complica transformarea dacă trebuie să compunem mai multe transformări. Ideal ar fi dacă am avea $W = 0$, tot timpul. Desigur, așa ceva nu este posibil, dar putem obține ceva aproape la fel de bun utilizând așa-numitele coordonate omogene, pe care le vom introduce ceva mai târziu.

8.3 Schimbări de coordonate ortogonale. Matrici ortogonale

De cele mai multe ori, în cadrul acestei cărți, coordonatele pe care le vom folosi vor fi coordonate ortogonale, în care baza de coordonate este o bază ortonormată. De aceea, merită să ne ocupăm, în mod special, de acele schimbări de coordonate care păstrează caracterul ortonormat al bazei de coordonate. Este clar că schimbarea originii nu modifică nici într-un fel caracterul ortonormat al bazei, așa că ne vom concentra, exclusiv, asupra schimbărilor care afectează axele de coordonate, prin modificarea bazei.

După cum am văzut, coloanele matricii de schimbare a coordonatelor nu sunt altceva decât componentele elementelor noii baze de coordonate relativ la vectorii vechii baze. Noi vrem ca vectorii din noua bază să continue să fie de lungime 1 și să fie ortogonali, doi câte doi, ceea ce înseamnă că trebuie ca între vectorii din noua bază să existe relațiile

$$\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i = j, \\ 0, & \text{dacă } i \neq j. \end{cases} \quad (8.3.1)$$

Ținând cont de formula de schimbare a bazei, relația (8.3.1) se poate rescrie sub forma

$$\begin{aligned} \delta_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j &= \left(\sum_{k=1}^n a_{ki} \mathbf{e}_k \right) \cdot \left(\sum_{l=1}^n a_{lj} \mathbf{e}_l \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ki} a_{lj} \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ki} a_{lj} \delta_{kl} = \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj}. \end{aligned}$$

Dar $\sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj}$ este elementul de pe poziția (i, j) al matricii $A \cdot A^t$. Astfel, transformarea de coordonate de la coordonatele ortogonale $(O; \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\})$ conduce la

un nou set de coordonate ortogonale $(O; \{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\})$ dacă și numai dacă matricea A de transformare a coordonatelor îndeplinește condiția

$$A \cdot A^t = I_n. \quad (8.3.2)$$

O matrice care îndeplinește condiția (8.3.2) se numește *matrice ortogonală*. Astfel, cum translația nu modifică baza de coordonate, putem spune că o transformare de ortogonală este ortogonală dacă și numai dacă matricea schimbării de bază este o matrice ortogonală.

Din relația (8.3.2) mai rezultă că, pentru o matrice ortogonală avem

$$\det A = \pm 1. \quad (8.3.3)$$

Dacă $\det A = 1$, atunci schimbarea de coordonate păstrează orientarea bazei, în caz contrar – o inversează.

8.3.1 Transformări de coordonate ortogonale în plan

Translația axelor de coordonate

Schimbarea axelor de coordonate

Vrem să vedem cum arată o matrice ortogonală 2×2 .

Fie

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

o astfel de matrice. Atunci avem

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1, \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1, \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0. \end{cases}$$

Este ușor de constatat că matricele ale căror elemente verifică acest sistem și au determinantul egal cu 1 sunt de forma

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

iar cele de determinant egal cu -1 sunt de forma

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

unde θ poate fi orice număr real. După cum ne vom convinge imediat, matricele din prima familie determină o rotație cu unghi θ a axelor de coordonate. Într-adevăr, fie $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ o bază ortonormată a planului. Imaginea sa printr-o transformare ortogonală de determinant 1 va fi formată din vectorii

$$\mathbf{i}' = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} \quad \text{și} \quad \mathbf{j}' = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}.$$

Atunci unghiul dintre \mathbf{i}' și \mathbf{i} este dat de

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{i}' \cdot \mathbf{i}}{\|\mathbf{i}'\| \cdot \|\mathbf{i}\|} = \cos \theta.$$

Unghiul pe care îl formează \mathbf{j}' cu \mathbf{i} este dat de

$$\cos \psi = \frac{\mathbf{j}' \cdot \mathbf{i}}{\|\mathbf{j}'\| \cdot \|\mathbf{i}\|} = -\sin \theta = \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right).$$

Astfel, baza formată din vectorii \mathbf{i}' și \mathbf{j}' (în această ordine) este o bază orientată directă, deoarece ambii vectori sunt de lungime 1, iar cel de-al doilea se obține prin rotirea primului, în sens pozitiv, cu un unghi de $\pi/2$.

Dacă mai adăugăm și o translație de vector (x_0, y_0) , cea mai generală transformare de coordonate ortogonale în plan, care nu schimbă orientarea spațiului, este de forma

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta + x_0, \\ y' = -x \sin \theta + y \cos \theta + y_0. \end{cases} \quad (8.3.4)$$

Trecem acum la cel de-al doilea tip de transformare, care inversează orientarea planului. De data aceasta avem

$$\mathbf{i}' = \cos \theta \mathbf{i} - \sin \theta \mathbf{j} \quad \text{și} \quad \mathbf{j}' = \sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}.$$

8.4 Spațiul proiectiv n -dimensional

Există o serie de probleme cărora geometria euclidiană nu le face față cu succes, dar care se pot descrie cu ușurință într-o geometrie mai generală, numită geometrie proiectivă. Un spațiu proiectiv se obține, până la urmă, din spațiul afin de aceeași dimensiune, adăugând o serie de puncte numite *puncte de la infinit* sau *puncte ideale*. Adăugarea acestor puncte elimină, de multe ori, cazurile speciale care trebuie luate în considerare atunci când se face o discuție. Astfel, de exemplu, în planul afin,

două drepte distincte pot să se intersecteze sau să fie paralele. În planul proiectiv, oricare două drepte se intersectează, dar unele dintre ele, care corespund dreptelor afine paralele, se intersectează într-un punct de la infinit.

Din punctul nostru de vedere, principalul avantaj al punctului de vedere proiectiv este că ne furnizează un sistem de coordonate foarte utile, *coordonatele omogene*, care permit descrierea foarte comodă a transformărilor geometrice.

Începem cu o definiție.

Definiția 8.1. Fie $u, v \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Spunem că punctele u și v sunt echivalente și scriem $x \sim y$ dacă există un număr real nenul t astfel încât $u = t \cdot v$. Este ușor de verificat că această relație este o relație de echivalență. Clasa de echivalență a lui u ,

$$[u] = \{t \cdot u \mid t \in \mathbb{R}^*\}$$

este dreapta care trece prin origine și punctul u , mai puțin originea, desigur. Mulțimea tuturor claselor de echivalență, adică *spațiul factor* $\mathbb{RP}^n \equiv \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$, se numește *spațiu proiectiv n -dimensional*. Dacă în \mathbb{R}^{n+1} alegem un sistem de coordonate $OX_1 \dots X_{n+1}$, atunci, pentru $[u] = [X_1, \dots, X_{n+1}]$, spunem că numerele X_1, \dots, X_{n+1} sunt *coordonatele omogene* ale punctului $[u]$. De remarcat că aceste coordonate nu sunt unice. Într-adevăr, dacă (X_1, \dots, X_{n+1}) sunt coordonate omogene ale lui $[u]$, atunci, pentru orice $t \neq 0$, (tX_1, \dots, tX_{n+1}) sunt, de asemenea, coordonate omogene ale aceluiași punct.

Pentru noi sunt importante cazurile $n = 2$ și $n = 3$.

Începem cu $n = 2$. Spațiul proiectiv \mathbb{RP}^2 se mai numește *plan proiectiv real*. Să presupunem că am ales, în \mathbb{R}^3 , un sistem de coordonate $WXYZ$. Atunci un punct din planul proiectiv se scrie

$$[X, Y, Z] = \{t(X, Y, Z) \mid t \in \mathbb{R}^*\}.$$

Să considerăm, mai întâi, cazul în care $Z \neq 0$. Un punct de acest tip are un reprezentant de forma $(x, y, 1)$, dacă alegem $t = 1/Z$ și notăm $x = X/Z$, $y = Y/Z$.

De remarcat că reprezentantul $(x, y, 1)$ este intersecția dintre dreapta care trece prin origine și prin punctul (X, Y, Z) și planul $Z = 1$. Dacă identificăm acest plan cu \mathbb{R}^2 , concluzia este că există o bijecție între punctele $[X, Y, Z]$, cu $Z \neq 0$, ale planului proiectiv și punctele planului euclidian. Dacă (X, Y, Z) sunt coordonate omogene ale unui punct din planul proiectiv, cu $Z \neq 0$, vom spune că ele sunt coordonatele omogene ale punctului $(x = X/Z, y = Y/Z)$ din planul euclidian. Invers, dacă (x, y) este un punct din planul euclidian, coordonatele sale omogene sunt $(x, y, 1)$ și orice triplet de numere reale obținut din acestea prin înmulțirea cu un scalar nenul.

Să vedem, acum, ce se întâmplă cu punctele din planul proiectiv pentru care ultima coordonată este zero. Fie (x_0, y_0) un punct din plan, diferit de origine. Coordonatele punctului pot fi privite ca fiind componentele unui vector care, fiind nenul, poate fi vectorul director al unei drepte. Fie (a, b) un punct oarecare din plan și dreapta

$$(x(t), y(t)) = (a + tx_0, b + ty_0)$$

de direcție (x_0, y_0) , care trece prin punctul (a, b) . Pentru fiecare t real, punctului $(x(t), y(t))$ îi putem asocia coordonatele omogene $(x(t), y(t), 1) = (a + tx_0, b + ty_0, 1)$. Același punct, dacă $t \neq 0$, are și coordonatele omogene $(a/t, x_0, b/t + y_0, 1/t)$. Dacă $t \rightarrow \infty$, atunci coordonatele omogene ale punctului considerat tind la $(x_0, y_0, 0)$. Interpretarea geometrică este că punctul de coordonate omogene $(x_0, y_0, 0)$ este punctul situat la infinit pe dreapta $(x(t), y(t))$. De remarcat că există *un singur* punct la infinit pe o dreaptă dată.

8.5 Transformări de coordonate în coordonate omogene

Considerăm transformarea de coordonate

$$X = A \cdot X + W.$$

Definim *matricea extinsă* sau *matricea omogenă* asociată acestei transformări prin

$$M_{A,W} = \begin{pmatrix} A & W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & w_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & w_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & w_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.5.1)$$

Dacă vectorul W se presupune subînțeles, vom nota $M_{A,W} \equiv \bar{A}$. Fie, acum, \bar{X} și \bar{X}' vectorii coordonatelor omogene asociate lui X și X' , adică

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad \bar{X}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Atunci transformarea de coordonate se poate scrie

$$\bar{X} = \bar{A} \cdot \bar{X}' \quad (8.5.2)$$

sau, explicit,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & w_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & w_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & w_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (8.5.3)$$

Afirmația este ușor de demonstrat în cazul general, dar preferăm să o verificăm în cele două cazuri particulare care ne interesează pe noi, anume $n = 2$ și $n = 3$.

În cazul $n = 2$, transformarea omogenă se scrie

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & w_1 \\ a_{21} & a_{22} & w_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (8.5.4)$$

Dacă facem înmulțirea de matrici, obținem

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + w_1 \\ x_2 = a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + w_2 \end{cases}$$

sau, matricial,

$$X = A \cdot X' + W,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

În cazul $n = 3$, transformarea omogenă se scrie

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & w_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & w_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & w_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (8.5.5)$$

de unde

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{13}x'_3 + w_1 \\ x_2 = a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{23}x'_3 + w_2 \\ x_3 = a_{31}x'_1 + a_{32}x'_2 + a_{33}x'_3 + w_3 \end{cases}$$

sau, matricial,

$$X = A \cdot X' + W,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

8.5.1 Operații cu matrici extinse

Dacă privim matricile extinse ca fiind niște matrici formate din blocuri, atunci ele se pot înmulți, după cum se poate verifica ușor, considerând că blocurile sunt, de fapt, componentele matricii. Astfel, dacă înmulțim matricile $M_{A,W}$ și $M_{B,V}$ obținem

$$\begin{pmatrix} A & W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B & V \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cdot B & A \cdot V + W \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Această relație demonstrează, în fapt, că $M_{A,W} \cdot M_{B,V}$ este matricea transformării compuse:

$$M_{A,W} \cdot M_{B,V} = M_{A \cdot B, A \cdot V + W},$$

după cum era de așteptat.

Matricea extinsă asociată transformării identice este matricea identică:

$$M_{I_n, 0} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{n+1}.$$

Inversa matricei $M_{A,W}$ este

$$M_{A,W}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}W \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Într-adevăr,

$$\begin{pmatrix} A & W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cdot A^{-1} & A \cdot (-A^{-1} \cdot W) + W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{n+1},$$

iar

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1} \cdot A & A^{-1} \cdot W - A^{-1} \cdot W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{n+1}.$$

Să presupunem, acum, că avem o transformare de coordonate de forma

$$X = A \cdot X' + W.$$

Vrem să exprimăm pe X' în funcție de X . Un calcul simplu ne conduce la

$$X' = A^{-1} \cdot X - A^{-1} \cdot W$$

sau, în limbaj de matrici extinse,

$$\begin{pmatrix} X' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = M_{A,W}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Transformări geometrice în plan

9.1 Generalități despre transformări afine

Fie \mathbb{E}^n spațiul afin n -dimensional. \mathbb{E}^n este, ca mulțime, \mathbb{R}^n , privită ca mulțime de puncte. Pentru a fi un spațiu afin, ea este însoțită de o aplicație care asociază fiecărei perechi de puncte vectorul care le unește, cu alte cuvinte,

$$\varphi : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \varphi(P, Q) = \overrightarrow{PQ}. \quad (9.1.1)$$

Aplicația φ se bucură de următoarele două proprietăți:

1. $\varphi(P, Q) + \varphi(Q, R) = \varphi(P, R)$ (regula triunghiului);
2. pentru orice punct $P \in \mathbb{E}^n$ și orice $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, există un singur punct $Q \in \mathbb{E}^n$ astfel încât $\varphi(P, Q) = \mathbf{v}$.

O aplicație bijectivă $T : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ se numește *transformare afină* dacă există $O \in \mathbb{E}^n$, aplicația $\vec{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, definită, pentru orice $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, prin

$$\vec{T}(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{T(O)T(P)},$$

unde $\overrightarrow{OP} = \mathbf{v}$, este liniară.

Se poate demonstra că, dacă în \mathbb{E}^n s-a fixat un reper $(O; \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\})$, o transformare afină se poate scrie

$$T(P) = A \cdot P + B,$$

unde A este matricea aplicației liniare \overrightarrow{T} , iar $B = T(O)$. Pentru a simplifica notația, în cele ce urmează vom renunța la săgeata care indică partea vectorială a transformării afine și ne vom da seama după argument dacă este vorba despre partea punctuală sau cea vectorială a aplicației afine. Astfel, dacă scriem

$$T(P + \mathbf{v}) = T(P) + T(\mathbf{v}),$$

al doilea termen din membrul drept este, de fapt, partea vectorială (liniară) a transformării afine. Dacă folosim coordonate omogene, matricea corespunzătoare unei transformări afine se va scrie

$$T = \begin{pmatrix} A & W \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dacă \mathbf{v} este un vector, atunci

$$T(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} A & W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cdot v \\ 0 \end{pmatrix},$$

deci aplicația A e liniară pe vectori. Pe de altă parte

$$T(P) = \begin{pmatrix} A & W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cdot P + W \\ 1 \end{pmatrix}.$$

În cele ce urmează, ne vom concentra, exclusiv, pe cazurile $n = 2$ și $n = 3$ și vom determina, pentru fiecare caz contra, matricea omogenă a transformării. Strategia va fi să determinăm, de fiecare dată, o formă vectorială a transformării, care să nu depindă de coordonate, și abia apoi să determinăm matricea (omogenă) a transformării.

9.2 Transformări plane

9.2.1 Translația

Forma vectorială

Translația este o transformare care mută toate punctele planului cu un același vector, constant. Prin urmare, dacă privim planul ca fiind un spațiu afin bidimensional, pe care îl vom nota cu \mathbb{E}^2 , atunci translația este o aplicație $T : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$,

$$T(P) = P + \mathbf{w}, \tag{9.2.1}$$

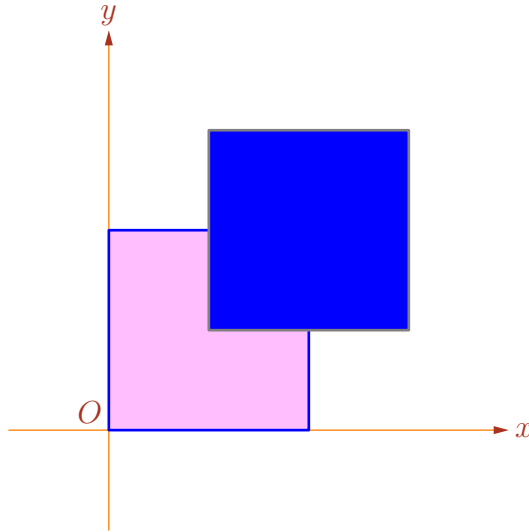


Figura 9.1: Translația aplicată unui păătrat

unde \mathbf{w} este un vector constant din plan. Transformarea se mai scrie și

$$P' = P + \mathbf{w}.$$

O tehnică generală, atunci când studiem transformările afine, ale planului sau ale spațiului, fără a utiliza coordonate, este aceea de a determina, separat, modul în care transformarea acționează pe puncte și pe vectori. Să aplicăm această metodă în cazul translației. Dacă Q este un al doilea punct, atunci

$$T(Q) = Q + \mathbf{w}. \quad (9.2.2)$$

Fie $\mathbf{v} = Q - P \left(\equiv \overrightarrow{PQ} \right)$. Atunci

$$T(\mathbf{v}) = T(Q - P) = T(Q) - T(P) = (P + \mathbf{v}) - P = (P - P) + \mathbf{v} = \mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v},$$

deci, când translația este aplicată unui vector, ea se reduce la aplicația identică.

Forma matricială

Cele două reguli de transformare, pentru vectori și puncte, se scriu, sub forma matricială, ca

$$[v'] = [v] = I_2 \cdot [v], \quad (9.2.3)$$

$$[P'] = [P] + [w] = I_2 \cdot [P] + [w], \quad (9.2.4)$$

ceea ce înseamnă că, dacă utilizăm blocuri matriciale, matricea translației se va scrie

$$[T_w] = \begin{bmatrix} I_2 & w \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.2.5)$$

sau, în formă extinsă,

$$[T_w] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & w_1 \\ 0 & 1 & w_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (9.2.6)$$

Dacă aplicăm transformarea unui punct P , de coordonate (x_1, y_1) , obținem

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & w_1 \\ 0 & 1 & w_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + w_1 \\ x_2 + w_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (9.2.7)$$

ceea ce corespunde, după cum ne așteptam, scrierii scalare

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + w_1, \\ x'_2 = x_2 + w_2 \end{cases}. \quad (9.2.8)$$

9.2.2 Rotația în jurul unui punct

Forma vectorială

Aplicăm aceeași metodă și în cazul rotației în plan relativ la un punct. Începem prin a determina rotația unui vector \mathbf{v} cu un unghi θ . Aceasta înseamnă să fixăm originea vectorului și să rotim extremitatea vectorului cu unghiul θ față de originea vectorului. E ușor de verificat că operația nu depinde de alegerea originii.

Introducem operatorul care rotește un vector, în sens direct, cu 90° . Pentru un vector \mathbf{v} , vom nota imaginea sa prin acest operator cu \mathbf{v}^\perp (se citește “perp de \mathbf{v} ”). Dacă am fixat un reper ortonormat direct în care $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, atunci $\mathbf{v}^\perp = (-v_2, v_1)$. Un raționament simplu ne arată că putem scrie rotația de unghi θ aplicată

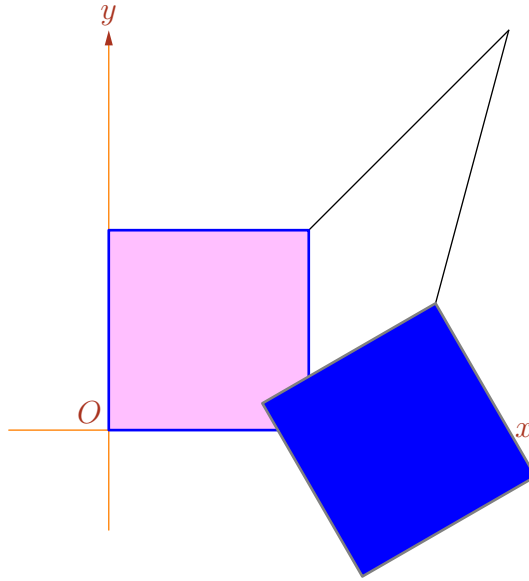


Figura 9.2: Rotația aplicată unui pătrat

vectorului sub forma:

$$\text{Rot}(\theta)(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cos \theta + \mathbf{v}^\perp \sin \theta. \quad (9.2.9)$$

Fie acum Q punctul fix în jurul căruia se face rotația și P un punct oarecare din plan, pe care vrem să-l rotim cu unghiul θ în jurul lui Q . Pentru a stabili formula pentru rotația punctului P , remarcăm că putem scrie

$$P = Q + P - Q = Q + \overrightarrow{QP}.$$

Prin urmare, rotația fiind o transformare afină, avem:

$$\text{Rot}(Q, \theta)(P) = \text{Rot}(Q, \theta)(Q) + \text{Rot}(Q, \theta)(\overrightarrow{QP}).$$

Cum Q este punctul în jurul căruia se face rotația, el este fix: $\text{Rot}(Q, \theta)(Q) = Q$. Pe de altă parte, transformarea vectorului $P - Q$ este dată de formula (9.2.9), adică

$$\text{Rot}(Q, \theta)(P - Q) = \overrightarrow{QP} \cos \theta + \overrightarrow{QP}^\perp \sin \theta,$$

deci, în final, pentru transformarea punctelor avem formula:

$$\text{Rot}(Q, \theta)(P) = Q + \overrightarrow{QP} \cos \theta + \overrightarrow{QP}^\perp \sin \theta. \quad (9.2.10)$$

Forma matricială

Dacă utilizăm componentele vectorilor, relația (9.2.9) se poate scrie

$$\begin{cases} v'_1 = v_1 \cos \theta - v_2 \sin \theta, \\ v'_2 = v_1 \sin \theta + v_2 \cos \theta. \end{cases} \quad (9.2.11)$$

Introducem matricea

$$\text{Rot}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (9.2.12)$$

Atunci, relațiile (9.2.11) capătă forma matricială

$$[v'] = \text{Rot}(\theta) \cdot [v]. \quad (9.2.13)$$

Prin urmare, folosind relația (9.2.10), obținem

$$[P'] = [Q] + \text{Rot}(\theta) \cdot (P - Q) = \text{Rot}(\theta) \cdot [P] + (I_2 - \text{Rot}(\theta)) \cdot [Q]$$

Dacă trecem la coordonate omogene, găsim matricea rotației de unghi θ în jurul lui Q sub forma

$$\text{Rot}(Q, \theta) = \begin{bmatrix} \text{Rot}(\theta) & (I_2 - \text{Rot}(\theta)) \cdot [Q] \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (9.2.14)$$

Dacă explicităm, matricea de mai sus se scrie

$$\text{Rot}(Q, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & q_1(1 - \cos \theta) + q_2 \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta & -q_1 \sin \theta + q_2(1 - \cos \theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (9.2.15)$$

Exemplul 9.1. Rotația față de origine. De data asta, Q este originea, deci coordonatele sale sunt $(0, 0)$. Așadar, matricea rotației de unghi θ relativ la origine este

$$\text{Rot}(\text{Origine}, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (9.2.16)$$

Problema 9.1. Determinați imaginea triunghiului ABC , de vârfuri $A(1, 2)$, $B(3, 1)$, $C(4, 4)$ printr-o rotație de unghi 30° în jurul originii. Desenați, pe același sistem de axe, triunghiul inițial și imaginea sa.

Soluție Conform formulei (9.2.16), matricea omogenă a transformării este

$$R = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ & 0 \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Prin urmare, avem:

$$\begin{aligned} [A' \ B' \ C'] &= R \cdot [A \ B \ C] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}-2}{2} & \frac{3\sqrt{3}-1}{2} & 2\sqrt{3}-2 \\ \frac{2\sqrt{3}+1}{2} & \frac{3+\sqrt{3}}{2} & 2\sqrt{3}+2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Așadar, punctele A' , B' , C' vor fi date de

$$A' = A' \left(\frac{\sqrt{3}-2}{2}, \frac{2\sqrt{3}+1}{2} \right), \quad B' = B' \left(\frac{3\sqrt{3}-1}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{2} \right), \quad C' = C' (2\sqrt{3}-2, 2\sqrt{3}+2)$$

□

Problema 9.2. Determinați imaginea triunghiului ABC , de vârfuri $A(1, 2)$, $B(3, 1)$, $C(4, 4)$ printr-o rotație de unghi 30° în jurul punctului $Q(1, 3)$. Desenați, pe același sistem de axe, triunghiul inițial și imaginea sa.

9.2.3 Scalarea simplă uniformă

Scalarea simplă este o transformare afină în care se scalează vectorii bazei, adică aceștia se înmulțesc cu un număr real diferit de zero. Dacă numărul este același, avem de-a face cu o scalare *uniformă* sau *izotropă*. Dacă factorii de scală nu sunt aceeași pentru toți vectorii bazei, atunci spunem că scalarea este *neuniformă* sau *anizotropă*. Începem cu studiul scalării simple uniforme. Ea se mai numește și *omotetie*.

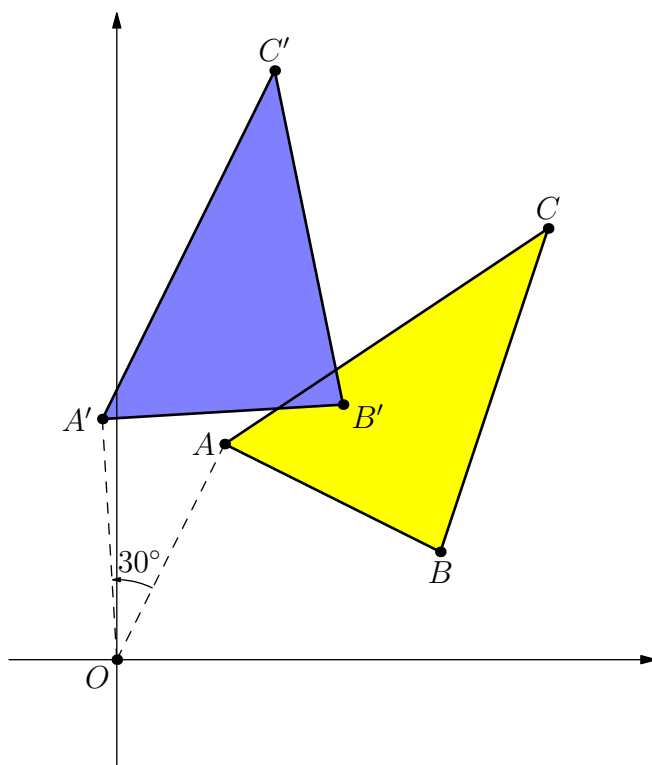


Figura 9.3:

Forma vectorială

Scalarea simplă omogenă de factor s , relativ la un punct Q din plan este transformarea geometrică ce asociază unui punct P din plan un punct P' astfel încât

$$\overrightarrow{QP'} = s \overrightarrow{QP}. \quad (9.2.17)$$

Este ușor de dedus forma transformării atunci când este aplicată vectorilor:

$$\text{Scale}(Q, s)(\mathbf{v}) = s \cdot \mathbf{v}. \quad (9.2.18)$$

Această “parte” a scalării nu depinde de punctul Q , ci doar de factorul de scală, s .

Pentru a determina modul în care scalarea se aplică punctelor, procedăm ca și în cazul rotației, adică aplicăm scalarea vectorială vectorului $\overrightarrow{QP} \equiv P - Q$. Din (9.2.18)

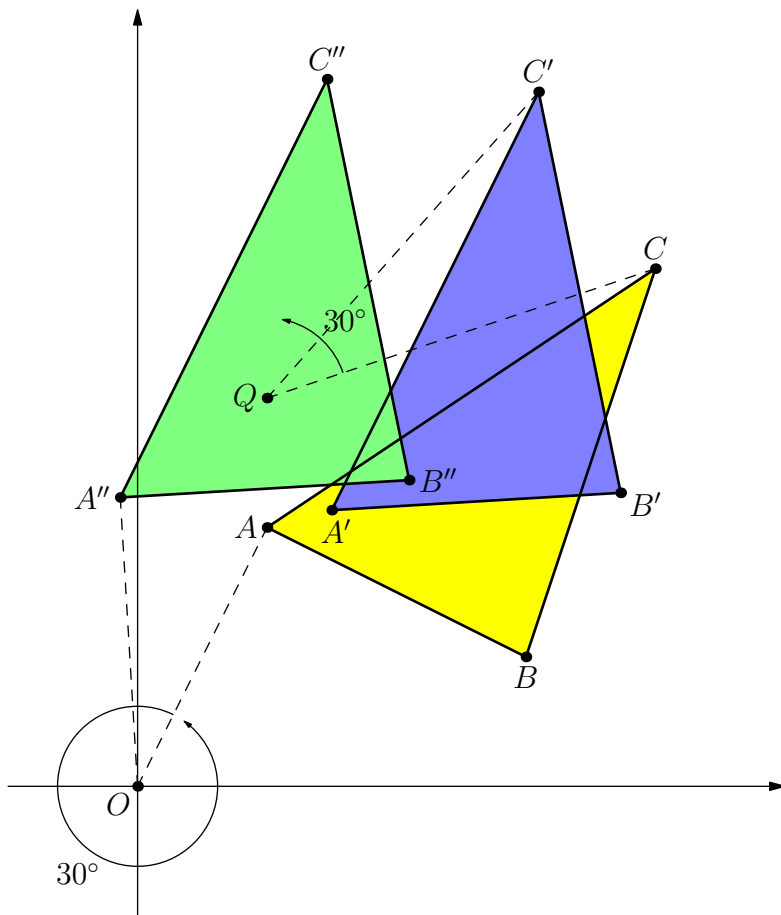


Figura 9.4:

rezultă

$$\text{Scale}(Q, s)(P - Q) = \text{Scale}(Q, s)(P) - \text{Scale}(Q, s)(Q) = s \cdot (P - Q)$$

Cum Q este punct fix al transformării, relația de mai sus se poate scrie

$$\text{Scale}(Q, s)(P) = Q + s \cdot \overrightarrow{QP}. \quad (9.2.19)$$

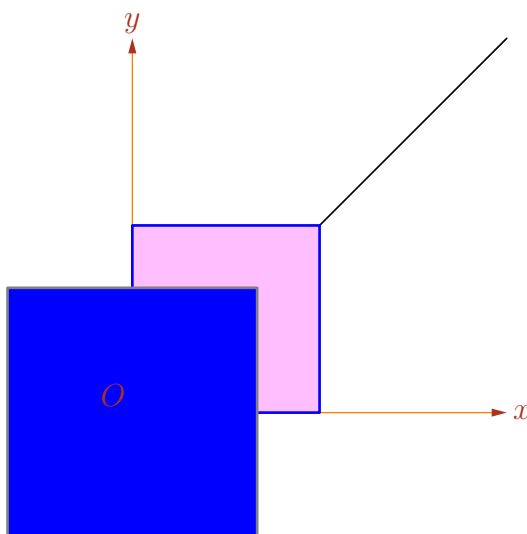


Figura 9.5: Rotația aplicată unui pătrat

Forma matricială

Relația (9.2.19) se poate scrie, matriceal

$$\text{Scale}(Q, s)(P) = [Q] + s(P - Q) = s[P] + (1-s)[Q] = (sI_2) \cdot [P] + (1-s)[Q].$$

Prin urmare, matricea scalării uniforme relativ la Q este

$$\text{Scale}(Q, s) = \begin{pmatrix} s \cdot I_2 & (1-s)Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.2.20)$$

sau, explicit,

$$\text{Scale}(Q, s) = \begin{pmatrix} s & 0 & (1-s)q_1 \\ 0 & s & (1-s)q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.2.21)$$

9.2.4 Scalarea simplă neuniformă

Produsul tensorial

Avem nevoie de un mic artificiu, bazat pe o operație cu vectori care se numește *produs tensorial*. Fie $\mathbf{a}(a_1, a_2)$ și $\mathbf{b}(b_1, b_2)$ doi vectori. *Produsul tensorial* al celor doi

vectori este aplicația biliniară care are, în baza considerată, matricea

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_2 b_1 \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \cdot (a_1 \ a_2) = [\mathbf{b}] \cdot [\mathbf{a}]^t. \quad (9.2.22)$$

În general, produsul tensorial nu este comutativ. În fapt, avem

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a})^t.$$

Pe noi, produsul tensorial ne interesează pentru reformularea anumitor egalități. De multe ori, de exemplu, apar expresii de forma

$$\mathbf{t} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}. \quad (9.2.23)$$

Remarcabil este, la relația de mai sus, că, atunci când \mathbf{a} și \mathbf{b} sunt vectori constanți, \mathbf{t} este o aplicație liniară de \mathbf{u} . Într-adevăr, un calcul simplu, pe care îl lăsăm în seama cititorului, demonstrează că

$$\mathbf{t} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{u}. \quad (9.2.24)$$

Prin urmare, atunci când se trece de la reprezentarea vectorială la reprezentarea matricială, formula (9.2.43) se transformă în formula (9.2.44).

Fie Q un punct din plan. O scalare simplă neuniformă a planului, relativ la punctul Q , este o transformare afină care asociază unui punct P , de vector de poziție \overrightarrow{QP} , relativ la punctul Q , un punct P' astfel încât

$$\begin{cases} \overrightarrow{QP'} \cdot \mathbf{i} = s_x \cdot (\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{i}), \\ \overrightarrow{QP'} \cdot \mathbf{j} = s_y \cdot (\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{i}). \end{cases} \quad (9.2.25)$$

Forma vectorială

Fie \mathbf{v} un vector din plan. Atunci el se poate scrie

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y,$$

unde $\mathbf{v}_x = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{i}) \cdot \mathbf{i}$, $\mathbf{v}_y = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{j}) \cdot \mathbf{j}$. Atunci,

$$\text{Scale}(s_x, s_y)(\mathbf{v}) = \text{Scale}(s_x, s_y)(\mathbf{v}_x) + \text{Scale}(s_x, s_y)(\mathbf{v}_y),$$

adică

$$\text{Scale}(s_x, s_y)(\mathbf{v}) = s_x \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{i}) \cdot \mathbf{i} + s_y \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{j}) \cdot \mathbf{j}. \quad (9.2.26)$$

Dacă P e un punct,

$$\text{Scale}(Q, s_x, s_y)(P) = \text{Scale}(Q, s_x, s_y)(Q + \overrightarrow{QP}),$$

adică

$$\text{Scale}(Q, s_x, s_y)(P) = Q + s_x \cdot (\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{i}) \cdot \mathbf{i} + s_y \cdot (\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{j}) \cdot \mathbf{j}. \quad (9.2.27)$$

Forma matricială

Din (9.2.27), obținem

$$\text{Scale}(Q, s_x, s_y)(P) = Q + s_x(\mathbf{i} \otimes \mathbf{i})(P - Q) + s_y(\mathbf{j} \otimes \mathbf{j})(P - Q)$$

sau

$$\begin{aligned} \text{Scale}(Q, s_x, s_y) &= (s_x(\mathbf{i} \otimes \mathbf{i}) + s_y(\mathbf{j} \otimes \mathbf{j})) \cdot P + \\ &+ (I_2 - s_x(\mathbf{i} \otimes \mathbf{i}) - s_y(\mathbf{j} \otimes \mathbf{j})) \cdot Q \end{aligned} \quad (9.2.28)$$

Matricea transformării este, deci

$$\text{Scale}(Q, s_x, s_y) = \begin{pmatrix} s_x(\mathbf{i} \otimes \mathbf{i}) + s_y(\mathbf{j} \otimes \mathbf{j}) & (I_2 - s_x(\mathbf{i} \otimes \mathbf{i}) - s_y(\mathbf{j} \otimes \mathbf{j})) \cdot Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.2.29)$$

Dar

$$\mathbf{i} \otimes \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} \otimes \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

deci matricea extinsă este

$$\text{Scale}(Q, s_x, s_y) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & (1 - s_x)q_1 \\ 0 & s_y & (1 - s_y)q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.2.30)$$

9.2.5 Scalarea neuniformă generală (Goldman)

Scalarea neuniformă generală nu este tocmai o generalizare a scalării neuniforme obișnuite. Ea este, în același timp, mai generală și mai particulară decât scalarea neuniformă simplă. Este mai particulară, deoarece avem un singur factor de scală, dar este mai generală pentru că vectorul \mathbf{i} este înlocuit cu un versor oarecare. În rest, “filozofia” transformării este aceeași.

Mai precis, considerăm un număr real nenul s , versor \mathbf{w} din plan și un punct din plan. *Scalarea neuniformă generală* de-a lungul lui \mathbf{w} , relativ la Q , de factor de scală s , este singura transformare afină a planului care transformă vectorul \mathbf{w} în vectorul $s\mathbf{w}$, vectorul \mathbf{w}^\perp – în el însuși și lasă pe loc punctul Q .

Așadar,

$$\text{Scale}(Q, \mathbf{w}, s) = \begin{pmatrix} s \cdot \mathbf{w} & \mathbf{w}^\perp & Q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{w} & \mathbf{w}^\perp & Q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \quad (9.2.31)$$

sau, extins,

$$\text{Scale}(Q, \mathbf{w}, s) = \begin{pmatrix} s \cdot w_1 & -w_2 & q_1 \\ s \cdot w_2 & w_1 & q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 & -w_2 & q_1 \\ w_2 & w_1 & q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}. \quad (9.2.32)$$

Cum

$$\begin{pmatrix} w_1 & -w_2 & q_1 \\ w_2 & w_1 & q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & -w_1 q_1 - q_2 w_2 \\ -w_2 & w_1 & w_2 q_1 - w_1 q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

rezultă că

$$\text{Scale}(Q, \mathbf{w}, s) = \begin{pmatrix} 1 + (s-1)w_1^2 & (s-1)w_1 w_2 & -(s-1)(q_1 w_1^2 + q_2 w_1 w_2) \\ (s-1)w_1 w_2 & 1 + (s-1)w_2^2 & -(s-1)(q_1 w_1 w_2 + q_2 w_2^2) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.2.33)$$

O altă metodă

De data aceasta, vom deduce, mai întâi, formula pentru vectori. Fie \mathbf{v} un vector oarecare din plan. Vom descompune acest vector după două direcții, una paralelă cu versorul \mathbf{w} și una perpendiculară pe el:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_\perp. \quad (9.2.34)$$

Este ușor de constatat că

$$\mathbf{v}_\parallel = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}, \quad (9.2.35)$$

de unde, desigur,

$$\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}. \quad (9.2.36)$$

Prin urmare,

$$\text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}) = \text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}_{\parallel}) + \text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}_{\perp}). \quad (9.2.37)$$

Cum scalarea se produce paralel cu vectorul \mathbf{w} , avem, evident

$$\text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}_{\parallel}) = s\mathbf{v}_{\parallel}. \quad (9.2.38)$$

Pe de altă parte, nici o scalare nu are loc în direcția perpendiculară la \mathbf{w} , deci

$$\text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}_{\perp}) = \mathbf{v}_{\perp}. \quad (9.2.39)$$

Prin urmare,

$$\text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}) = s\mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}$$

sau, dacă ținem cont de definițiile lui \mathbf{v}_{\parallel} și \mathbf{v}_{\perp} ,

$$\text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + (s - 1)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}. \quad (9.2.40)$$

Pentru a determina modul în care transformarea acționează asupra unui punct P , remarcăm, mai întâi, că:

$$\text{Scale}(\mathbf{w}, s)(P - Q) = \text{Scale}(Q, \mathbf{w}, s)(P) - \text{Scale}(Q, \mathbf{w}, s)(Q) = \text{Scale}(Q, \mathbf{w}, s)(P) - Q,$$

de unde

$$\text{Scale}(Q, \mathbf{w}, s)(P) = Q + \text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\overrightarrow{QP})$$

sau, folosind (9.2.40),

$$\text{Scale}(Q, \mathbf{w}, s)(P) = Q + \overrightarrow{QP} + (s - 1)(\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}. \quad (9.2.41)$$

Forma matricială

Pentru a descrie matricial transformarea, avem nevoie de un mic artificiu, bazat pe o operație cu vectori care se numește *produs tensorial*. Fie $\mathbf{a}(a_1, a_2)$ și $\mathbf{b}(b_1, b_2)$ doi vectori. *Produsul tensorial* al celor doi vectori este aplicația biliniară care are, în baza considerată, matricea

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_2 b_1 \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \cdot (a_1 \ a_2) = [\mathbf{b}] \cdot [\mathbf{a}]^t. \quad (9.2.42)$$

În general, produsul tensorial nu este comutativ. În fapt, avem

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a})^t.$$

Pe noi, produsul tensorial ne interesează pentru reformularea anumitor egalități. De multe ori, de exemplu, apar expresii de forma

$$\mathbf{t} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}. \quad (9.2.43)$$

Remarcabil este, la relația de mai sus, că, atunci când \mathbf{a} și \mathbf{b} sunt vectori constanți, \mathbf{t} este o aplicație liniară de \mathbf{u} . Într-adevăr, un calcul simplu, pe care îl lăsăm în seama cititorului, demonstrează că

$$\mathbf{t} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{u}. \quad (9.2.44)$$

Prin urmare, atunci când se trece de la reprezentarea vectorială la reprezentarea matricială, formula (9.2.43) se transformă în formula (9.2.44).

Deducem că din formula (9.2.40) rezultă expresia matricială pentru scalarea ne-uniformă a vectorilor:

$$\text{Scale}(\mathbf{w}, s)([\mathbf{v}]) = (I_2 + (s - 1)\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}) \cdot [\mathbf{v}]. \quad (9.2.45)$$

Pentru a determina matricea omogenă a transformării pentru puncte, plecăm de la (9.2.41) și obținem

$$\text{Scale}(Q, \mathbf{w}, s)(P) = Q + P - Q + (s - 1)\mathbf{w} \otimes \mathbf{w} \cdot (P - Q)$$

sau

$$\text{Scale}(Q, \mathbf{w}, s)(P) = (I_2 + (s - 1)\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}) \cdot P + (1 - s)\mathbf{w} \otimes \mathbf{w} \cdot Q. \quad (9.2.46)$$

Prin urmare, matricea omogenă a scalării generale neuniforme este

$$\text{Scale}(Q, \mathbf{w}, s) = \begin{pmatrix} I_2 + (s - 1)\mathbf{w} \otimes \mathbf{w} & (1 - s)\mathbf{w} \otimes \mathbf{w} \cdot Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.2.47)$$

Dacă facem calculele, ajungem, din nou, la formula (9.2.33).

9.2.6 Reflexia față de o dreaptă

Reflexia relativ la o dreaptă este transformarea care asociază unui punct simetricul punctului față de dreaptă.

Forma vectorială

Considerăm o dreaptă care trece printr-un punct Q și are versorul director \mathbf{w} . Începem, ca de obicei, prin a determina imaginea unui vector prin reflexie. Evident, imaginea vectorului nu depinde de punctul Q . Fie \mathbf{v} un vector oarecare din plan. După cum am văzut, \mathbf{v} se poate descompune ca o sumă dintr-un vector paralel cu vectorul \mathbf{w} și unul perpendicular pe acest vector,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}.$$

De data aceasta, însă, vom pune

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{\parallel} = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^{\perp}) \mathbf{w}^{\perp}, \\ \mathbf{v}_{\perp} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^{\perp}) \mathbf{w}^{\perp}. \end{cases}$$

Este clar că

$$\text{Mirror}(\mathbf{w})(\mathbf{v}_{\parallel}) = \mathbf{v}_{\parallel}, \quad (9.2.48)$$

în timp ce

$$\text{Mirror}(\mathbf{w})(\mathbf{v}_{\perp}) = -\mathbf{v}_{\perp}.$$

Așadar,

$$\text{Mirror}(\mathbf{w})(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_{\parallel} - \mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^{\perp}) \mathbf{w}^{\perp}. \quad (9.2.49)$$

Ca să determinăm imaginea unui punct oarecare, P , din plan, ținem cont de faptul că $P = Q + (P - Q)$ și, Q fiind un punct fix al transformării, obținem

$$\text{Mirror}(Q, \mathbf{w})(P) = Q + \text{Mirror}(\mathbf{w})(\overrightarrow{QP}),$$

deci

$$\text{Mirror}(Q, \mathbf{w})(P) = Q + \overrightarrow{QP} - 2(\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{w}^{\perp}) \mathbf{w}^{\perp}. \quad (9.2.50)$$

Forma matricială

Transcriem, mai întâi, matricial, formula de transformare pentru vectori (9.2.49), ținând cont de faptul că

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^{\perp}) \mathbf{w}^{\perp} = (\mathbf{w}^{\perp} \otimes \mathbf{w}^{\perp}) \mathbf{v}.$$

Obținem, prin urmare,

$$\text{Mirror}(\mathbf{w})(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - 2(\mathbf{w}^{\perp} \otimes \mathbf{w}^{\perp}) \mathbf{v}$$

sau

$$\text{Mirror}(\mathbf{w})(\mathbf{v}) = \left(I_2 - 2 \left(\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}^\perp \right) \right) \cdot \mathbf{v}. \quad (9.2.51)$$

Așadar, matricea părții liniare a reflexiei este

$$\text{Mirror}(\mathbf{w}) = I_2 - 2 \left(\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}^\perp \right). \quad (9.2.52)$$

Pentru determinarea matricei omogene, plecăm de la (9.2.50) și obținem

$$\text{Mirror}(Q, \mathbf{w})(P) = Q + P - Q - 2 \left(\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}^\perp \right) (P - Q),$$

adică

$$\text{Mirror}(Q, \mathbf{w})(P) = \left(I_2 - 2 \left(\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}^\perp \right) \right) \cdot P + 2 \left(\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}^\perp \right) \cdot Q, \quad (9.2.53)$$

ceea ce înseamnă că matricea omogenă a transformării este

$$\text{Mirror}(Q, \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} I_2 - 2 \left(\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}^\perp \right) & 2 \left(\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}^\perp \right) \cdot Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.2.54)$$

Dacă ținem cont că

$$\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}^\perp = \begin{pmatrix} w_2^2 & -w_1 w_2 \\ -w_1 w_2 & w_1^2 \end{pmatrix},$$

matricea de mai sus se scrie, în mod explicit, ca

$$\text{Mirror}(Q, \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 1 - 2w_2^2 & 2w_1 w_2 & 2(q_1 w_2^2 - q_2 w_1 w_2) \\ 2w_1 w_2 & 1 - 2w_1^2 & 2(-q_1 w_1 w_2 + q_2 w_1^2) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.2.55)$$

Observații. (i) Dacă examinăm formulele (9.2.47) și (9.2.55), ajungem imediat la concluzia că, de fapt, reflexia față de o dreaptă este o scalare generală neomogenă, de factor de scală -1 , în direcția perpendiculară pe dreaptă, deoarece avem

$$\text{Mirror}(Q, \mathbf{w}) = \text{Scale}(Q, \mathbf{w}^\perp, -1).$$

(ii) Dacă Q este originea, iar reflexia se face față de Ox , atunci avem $\mathbf{w} = (1, 0)$, deci

$$\text{Mirror}(\text{Origine}, \mathbf{i}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Analog, reflexia față de Oy este dată de matricea

$$\text{Mirror}(\text{Origine}, \mathbf{j}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Formula (9.2.55) a fost obținută în ipoteza că dreapta este dată sub forma vectorială:

$$P(t) = Q + t\mathbf{w}.$$

Dacă dreapta este dată sub forma generală,

$$\Delta : ax + by + c = 0,$$

atunci ca versor al vectorului director se poate lua vectorul

$$\mathbf{w} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(b, -a).$$

Dacă $a \neq 0$, putem lua $Q = (-c/a, 0)$. Dacă înlocuim în formula (9.2.55), obținem

$$\text{Mirror}(\Delta) = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} b^2 - a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & a^2 - b^2 & -2bc \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}. \quad (9.2.56)$$

Aceeași formulă se obține pentru orice alt punct al dreptei.

9.2.7 Forfecarea

Forfecarea este transformarea afină care transformă un pătrat unitate cu un vârf în punctul Q și de laturi \mathbf{w} și \mathbf{w}^\perp într-un paralelogram înclinând latura \mathbf{w}^\perp și transformând-o în $\mathbf{w}_{\text{new}}^\perp$, care face un unghi θ cu \mathbf{w}^\perp , fără să modifice punctul Q sau vectorul \mathbf{w} .

Forma vectorială

Începem, ca de obicei, prin a determina forfecarea aplicată unui vector. Fie, prin urmare, \mathbf{v} un vector oarecare din plan. Tot ca de obicei, îl descompunem în două

componente, una paralelă cu vectorul \mathbf{w} și una perpendiculară pe el sau, mai degrabă, una paralelă cu vectorul \mathbf{w}^\perp . Atunci, vom avea

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_\perp,$$

unde

$$\mathbf{v}_\perp = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^\perp) \cdot \mathbf{w}^\perp \text{ și } \mathbf{v}_\parallel = \mathbf{v} - \mathbf{v}_\perp.$$

Este clar că $\text{Shear}(\mathbf{w}, \theta)(\mathbf{v}_\parallel) = \mathbf{v}_\parallel$, în timp ce

$$\begin{aligned} \text{Shear}(\mathbf{v}, \theta)(\mathbf{v}_\perp) &= \text{Shear}(\mathbf{v}, \theta) \left((\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^\perp) \cdot \mathbf{w}^\perp \right) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^\perp) \text{Shear}(\mathbf{v}, \theta)(\mathbf{w}^\perp) = \\ &= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^\perp) (\text{tg } \theta \cdot \mathbf{w} + \mathbf{w}^\perp). \end{aligned}$$

Așadar,

$$\text{Shear}(\mathbf{w}, \theta)(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \mathbf{v}_\perp + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^\perp) (\text{tg } \theta \cdot \mathbf{w} + \mathbf{w}^\perp) = \mathbf{v} + \text{tg } \theta \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^\perp) \cdot \mathbf{w}$$

adică

$$\text{Shear}(\mathbf{w}, \theta)(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \text{tg } \theta \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^\perp) \cdot \mathbf{w}. \quad (9.2.57)$$

Pentru a determina imaginea prin forfecare a unui punct P , folosim, din nou, relația $P = Q + P - Q \equiv Q + \overrightarrow{QP}$ și obținem, folosind (9.2.57) și faptul că punctul Q este fix,

$$\text{Shear}(Q, \mathbf{w}, \theta) = Q + \overrightarrow{QP} + \text{tg } \theta (\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{w}^\perp) \cdot \mathbf{w}. \quad (9.2.58)$$

Forma matricială

Pentru a determina matricea transformării, mai întâi determinăm forma matricială a transformării vectorilor. Plecăm de la formula (9.2.57) și obținem

$$\text{Shear}(\mathbf{w}, \theta)(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \text{tg } \theta (\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v}$$

sau

$$\text{Shear}(\mathbf{w}, \theta)(\mathbf{v}) = \left(I_2 + \text{tg } \theta (\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}) \right) \cdot \mathbf{v}, \quad (9.2.59)$$

ceea ce înseamnă că matricea părții vectoriale a forfecării este

$$\text{Shear}(\mathbf{w}, \theta) = I_2 + \text{tg } \theta (\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}). \quad (9.2.60)$$

Pentru a obține matricea omogenă a transformării pentru puncte, combinăm (9.2.58) și (9.2.60) și obținem

$$\text{Shear}(Q, \mathbf{w}, \theta) = \begin{pmatrix} I_2 + \text{tg } \theta (\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}) & -\text{tg } \theta (\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}) \cdot Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.2.61)$$

Pentru a obține forma explicită a acestei matrici, remarcăm, înainte de toate, că

$$\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -w_2 & w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -w_1 w_2 & w_1^2 \\ -w_2^2 & w_1 w_2 \end{pmatrix},$$

prin urmare,

$$I_2 + \text{tg } \theta (\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 1 - w_1 w_2 \text{tg } \theta & w_1^2 \text{tg } \theta \\ -w_2^2 \text{tg } \theta & 1 + w_1 w_2 \text{tg } \theta \end{pmatrix},$$

iar

$$-\text{tg } \theta (\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}) \cdot Q = \begin{pmatrix} (q_1 w_1 w_2 - q_2 w_1^2) \text{tg } \theta \\ (q_1 w_2^2 - q_2 w_1 w_2) \text{tg } \theta \end{pmatrix}.$$

Așadar, în final,

$$\text{Shear}(Q, \mathbf{w}, \theta) = \begin{pmatrix} 1 - w_1 w_2 \text{tg } \theta & w_1^2 \text{tg } \theta & (q_1 w_1 w_2 - q_2 w_1^2) \text{tg } \theta \\ -w_2^2 \text{tg } \theta & 1 + w_1 w_2 \text{tg } \theta & (q_1 w_2^2 - q_2 w_1 w_2) \text{tg } \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.2.62)$$

Exemple

- Dacă punem $\mathbf{w} = \mathbf{i} = (1, 0)$, matricea forfecării devine:

$$\text{Shear}(Q, \mathbf{i}, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & \text{tg } \theta & -q_2 \text{tg } \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

În particular, forfecarea în direcția axei Ox relativ la origine este

$$\text{Shear}(\text{Origine}, \mathbf{i}, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & \text{tg } \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Forfecarea în direcția axei Oy este, în schimb,

$$\text{Shear}(Q, \mathbf{j}, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\tan \theta & 1 & q_1 \tan \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemplul 9.2. Vrem să rotim pătratul $ABCD$, de vârfuri $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(1, 1)$, $D(0, 1)$ cu 60° în jurul lui C . Plecând de la formula vectorială, avem

$$\text{Rot}(C, 60^\circ)(P) = C + \overrightarrow{CP} \cdot \frac{1}{2} + \overrightarrow{CP}^\perp \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

sau

$$\{x', y'\} = (x_C, y_C) + \frac{1}{2}\{x - x_C, y - y_C\} + \frac{\sqrt{3}}{2}\{-y + y_C, x - x_C\}$$

sau, încă,

$$\{x', y'\} = \left\{ \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2}x_C + \frac{\sqrt{3}}{2}y_C, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y_C - \frac{\sqrt{3}}{2}x_C \right\}.$$

Dacă scriem transformarea pe componente, obținem

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2}x_C + \frac{\sqrt{3}}{2}y_C, \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y_C - \frac{\sqrt{3}}{2}x_C. \end{cases}$$

Asta e formula pentru o rotație de 60° în jurul unui punct oarecare. În cazul nostru concret, obținem:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1-\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Se constată imediat că originea se duce în $A' \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2} \right)$, B se duce în $B' \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$, $C' = C$, iar D se duce în $D' \left(\frac{1}{2}, \frac{2-\sqrt{3}}{2} \right)$

9.3 Grupurile de transformări fundamentale ale planului

Dacă notăm cu \mathcal{A} mulțimea tuturor transformărilor afine ale planului, este ușor de verificat că această mulțime, împreună cu compunerea aplicațiilor, formează un grup (necomutativ). Nu același lucru se poate spune în ceea ce privește mulțimile de transformări fundamentale pe care le-am studiat (translații, rotații, scalări, etc.), cu excepția translațiilor. Compunerea a două rotații față de puncte diferite continuă să fie o transformare a planului, dar *nu este o rotație*. Vom vedea, însă, că dacă impunem niște restricții, obținem grupuri de transformări interesante.

9.3.1 Grupul translațiilor

Teorema 9.1. *Mulțimea \mathcal{T} a tuturor translațiilor planului formează un grup comutativ, care este un subgrup al grupului \mathcal{A} al tuturor transformărilor planului.*

Demonstrație Vom verifica, mai întâi, că \mathcal{T} este parte stabilă în raport cu compunerea aplicațiilor. După cum șim, în cazul aplicațiilor liniare, matricea aplicației compuse este produsul matricilor celor două aplicații. Fie T matricea aplicației obținute prin compunerea unei translații de vector \mathbf{v} cu o translație de vector \mathbf{w} . Atunci avem

$$\begin{aligned} T = \text{Trans}_{\mathbf{w}} \cdot \text{Trans}_{\mathbf{v}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & w_1 \\ 0 & 1 & w_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & w_1 + v_1 \\ 0 & 1 & w_2 + v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & v_1 + w_1 \\ 0 & 1 & v_2 + w_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Trans}_{\mathbf{w}+\mathbf{v}} = \text{Trans}_{\mathbf{v}+\mathbf{w}} = \text{Trans}_{\mathbf{v}} \cdot \text{Trans}_{\mathbf{w}}, \end{aligned}$$

așadar \mathcal{T} este parte stabilă în raport cu compunerea translațiilor (i.e. compunerea a două translații este tot o translație), iar operația internă este comutativă.

Operația este asociativă, întrucât, în general, compunerea aplicațiilor este comutativă.

Elementul neutru este aplicația identică a planului, care este translația de vector $\mathbf{0}$. Mai rămâne să verificăm că orice element admite un invers. Compunerea fiind comutativă, este suficient să verificăm existența unei inverte la stânga care va fi, în mod automat, și inversă la dreapta.

Afirmăm că inversa translației de vector \mathbf{w} este translația de vector $-\mathbf{w}$. Într-

adevăr, avem

$$\text{Trans}_{(-w_1, -w_2)} \cdot \text{Trans}_{(w_1, w_2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -w_1 \\ 0 & 1 & -w_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & w_1 \\ 0 & 1 & w_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ceea ce înseamnă că translația de vector \mathbf{w} are o inversă, care este tot o translație, de vector $-\mathbf{w}$:

$$(\text{Trans}_{\mathbf{w}})^{-1} = \text{Trans}_{-\mathbf{w}}.$$

□

Observație. Fie \mathbf{w} un vector și n un număr natural nenul. Atunci, după cum se poate constata cu ușurință,

$$(\text{Trans}_{\mathbf{w}})^n = \text{Trans}_{n\mathbf{w}}.$$

9.3.2 Grupul scalărilor uniforme

Spre deosebire de translații, toate celelalte transformări fundamentale ale planului se fac *relativ* la un punct sau la o direcție. Vom studia, prin urmare, scalările uniforme, de diferiți factori de scală, dar relativ la același punct. Punctul cu pricina este un punct fix al transformării (singurul punct fix).

Teorema 9.2. *Fie Q un punct dat din plan. Mulțimea \mathcal{S}_Q a tuturor scalărilor uniforme $\text{Scale}(Q, s)$, când s parcurge \mathbb{R}^* , împreună cu operația de compunere a aplicațiilor, formează un grup comutativ.*

Demonstrație Demonstrăm, mai întâi, că \mathcal{S}_Q este o parte stabilă a grupului tuturor transformărilor planului, în raport cu operația de compunere a aplicațiilor, cu alte cuvinte demonstrăm că rezultatul compunerii a două scalări relativ la Q este, de asemenea, o scalare relativ la Q . Într-adevăr, fie T transformarea care se obține compunând două scalări uniforme relativ la Q , de factori de scară s , respectiv t . Atunci avem

$$\begin{aligned} T &= \text{Scale}(Q, t) \cdot \text{Scale}(Q, s) = \begin{pmatrix} t & 0 & (1-t)q_1 \\ 0 & t & (1-t)q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s & 0 & (1-s)q_1 \\ 0 & s & (1-s)q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} ts & 0 & t(1-s)q_1 + (1-t)q_1 \\ 0 & ts & t(1-s)q_2 + (1-t)q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ts & 0 & (1-ts)q_1 \\ 0 & ts & (1-ts)q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \text{Scale}(Q, ts) = \text{Scale}(Q, st) = \text{Scale}(Q, s) \cdot \text{Scale}(Q, t). \end{aligned}$$

Am demonstrat, altfel, nu doar că mulțimea scalărilor uniforme față de Q este parte stabilă, dar și că operația de compunere, restrânsă la scalări uniforme, este comutativă.

Asociativitatea compunerii este o proprietate ereditară, aplicația identică este o scalare (de factor de scală 1) și joacă rolul elementului neutru și vom demonstra că orice scalare relativ la Q , de factor nenul s , este inversabilă, iar inversa este scalarea de factor $1/s$. Într-adevăr, la nivel matricial avem

$$\begin{aligned} \text{Scale}(Q, s) \cdot \text{Scale}(Q, 1/s) &= \begin{pmatrix} s & 0 & (1-s)q_1 \\ 0 & s & (1-s)q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & 0 & \left(1 - \frac{1}{s}\right)q_1 \\ 0 & \frac{1}{s} & \left(1 - \frac{1}{s}\right)q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & s\left(1 - \frac{1}{s}\right)q_1 + (1-s)q_1 \\ 0 & 1 & s\left(1 - \frac{1}{s}\right)q_2 + (1-s)q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Observație. Și de data aceasta putem calcula cu ușurință puterile transformării: dacă n este un număr natural nenul, atunci avem

$$(\text{Scale}(Q, s))^n = \text{Scale}(Q, s^n).$$

9.3.3 Grupul scalărilor neuniforme

Teorema 9.3. *Fie Q un punct din plan. Atunci mulțimea S'_Q tuturor scalărilor neuniforme relativ la Q , de factori de scală $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^*$ formează un grup comutativ, în raport cu compunerea aplicațiilor.*

Demonstrație Verificăm, întâi, că este parte stabilă și că operația este comutativă.

Avem:

$$\begin{aligned}
 \text{Scale}(Q, t_1, t_2) \cdot \text{Scale}(Q, s_1, s_2) &= \begin{pmatrix} t_1 & 0 & (1-t_1)q_1 \\ 0 & t_2 & (1-t_2)q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1 & 0 & (1-s_1)q_1 \\ 0 & s_2 & (1-s_2)q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} t_1 s_1 & 0 & (1-t_1 s_1)q_1 \\ 0 & t_2 s_2 & (1-t_2 s_2)q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Scale}(Q, t_1 s_1, t_2 s_2) = \text{Scale}(Q, s_1 t_1, s_2 t_2) = \\
 &= \text{Scale}(Q, s_1, s_2) \cdot \text{Scale}(Q, t_1, t_2).
 \end{aligned}$$

Ca și mai sus, asociativitatea este ereditară, iar elementul neutru este aplicația identică, adică scalarea de factori de scală $(1, 1)$.

Inversa scalării de factori (s_1, s_2) este scalarea de factori $(1/s_1, 1/s_2)$. Într-adevăr,

$$\begin{aligned}
 \text{Scale}(Q, s_1, s_2) \cdot \text{Scale}(Q, 1/s_1, 1/s_2) &= \begin{pmatrix} s_1 & 0 & (1-s_1)q_1 \\ 0 & s_2 & (1-s_2)q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \\
 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{s_1} & 0 & \left(1-\frac{1}{s_1}\right)q_1 \\ 0 & \frac{1}{s_2} & \left(1-\frac{1}{s_2}\right)q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & s_1 \left(1-\frac{1}{s_1}\right)q_1 + (1-s_1)q_1 \\ 0 & 1 & s_2 \left(1-\frac{1}{s_2}\right)q_2 + (1-s_2)q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

□

Probleme

În lista de probleme de mai jos, triunghiul ABC are vârfurile $A(1, 1)$, $B(4, 1)$, $C(2, 3)$. Reprezentați, de fiecare dată, pe aceeași figură, triunghiul inițial și imaginea sa.

Problema 9.1. Determinați imaginea triunghiului ABC printr-o rotație de unghi 30° în jurul punctului $Q(2, 2)$, urmată de o translație de vector $(1, 2)$. Aplicați apoi transformările în ordine inversă.

Problema 9.2. Determinați imaginea triunghiului ABC printr-o scalare uniformă de factor de scală 2 relativ la punctul $Q(2, 2)$.

Problema 9.3. Determinați imaginea triunghiului ABC printr-o scalare simplă neuniformă, de factori de scală $(2, 1, 2)$, relativ la punctul $Q(2, 2)$.

Problema 9.4. Determinați imaginea triunghiului ABC printr-o scalare neuniformă generală, de factor de scală 2, relativ la punctul $Q(2, 2)$, în direcția vectorului $\mathbf{v}(1, 2)$.

Problema 9.5. Determinați imaginea triunghiului ABC printr-o forfecare de unghi 45° , relativ la punctul $Q(2, 2)$, în direcția vectorului $\mathbf{v}(2, 1)$.

Problema 9.6. Determinați imaginea triunghiului ABC prin reflexia relativ la dreapta $2x + 3y - 5 = 0$.

Problema 9.7. Determinați imaginea triunghiului ABC prin reflexia relativ la dreapta AB .

Problema 9.8. Determinați imaginea triunghiului ABC prin reflexia relativ la dreapta BC , urmată de o forfecare, de unghi 60° , relativ la punctul A , în direcția vectorului $\mathbf{v}(1, 1)$.

Problema 9.9. Determinați imaginea triunghiului ABC prin rotația cu 90° în jurul punctului C , urmată de reflexia relativ la dreapta AB .

Problema 9.10. Determinați imaginea triunghiului ABC prin scalarea simplă neuniformă de factori $(1, 2, 1)$ relativ la punctul B , urmată de o rotație de 30° în jurul punctului $Q(1, 1)$.

CAPITOLUL 10

Transformări geometrice (afine) în spațiu

În acest capitol ne vom ocupa de variantele tridimensionale ale transformărilor afine descrise în capitolul precedent. Filozofia va fi, în esență, aceeași: vom stabili mai întâi, în limba vectorială, regula de transformare a vectorilor, apoi, în același limbaj, regula de transformare a punctelor, apoi vom deduce matricea transformării. Matricele (omogene) ale transformărilor spațiului sunt matrici de tip 4×4 .

10.1 Translația

Din punct de vedere vectorial, dacă nu folosim coordonate, nu există nici o diferență între translația în spațiu și translația în plan. De aceea, nu vom mai repeta raționamentul din cazul plan, atunci când vorbim despre forma vectorială a transformării.

10.1.1 Forma vectorială

Fie \mathbf{w} un vector constant. Atunci translația de vector \mathbf{w} acționează pe vectori astfel:

$$\text{Trans}(\mathbf{w})(\mathbf{v}) = \mathbf{v}, \quad (10.1.1)$$

adică se reduce la transformarea identică. În cazul punctelor, avem

$$\text{Trans}(\mathbf{w})(P) = P + \mathbf{w}. \quad (10.1.2)$$

10.1.2 Forma matricială

Ecuția (10.1.2) se transcrie matricial ca

$$\text{Trans}(\mathbf{w})(P) = I_3 \cdot P + \mathbf{w},$$

de unde rezultă matricea omogenă a transformării:

$$\text{Trans}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} I_3 & \mathbf{w} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10.1.3)$$

sau, în forma extinsă,

$$\text{Trans}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & w_1 \\ 0 & 1 & 0 & w_2 \\ 0 & 0 & 1 & w_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.1.4)$$

10.2 Rotația în jurul unei axe

Fie Q un punct din spațiu și \mathbf{u} un versor. Vrem să determinăm expresia pentru rotația de unghi θ unui punct oarecare în jurul axei Δ determinate de punctul Q și versorul \mathbf{u} .

10.2.1 Forma vectorială

Ca de obicei, vom stabili mai întâi formula de transformare pentru vectori. Fie \mathbf{v} un vector oarecare. Folosind o tehnică ce am mai utilizat-o, descompunem vectorul ca

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}, \quad (10.2.1)$$

unde \mathbf{v}_{\parallel} este componenta lui \mathbf{v} paralelă cu \mathbf{u} , în timp ce \mathbf{v}_{\perp} este componenta perpendiculară pe \mathbf{u} .

Dacă aplicăm rotația vectorului \mathbf{v} , componenta \mathbf{v}_{\parallel} rămâne nemodificată, deci putem să ne concentrăm asupra componente \mathbf{v}_{\perp} . Această componentă poate fi fixată într-un plan perpendicular pe \mathbf{u} , iar prin rotație, ea rămâne în acest plan. Prin urmare, rotația 3D a vectorului \mathbf{v} în jurul axei Δ se reduce la o rotație plană a vectorului \mathbf{v}_{\perp} .

Ne aducem aminte de formula pentru rotația de unghi θ a unui vector \mathbf{w} situat într-un plan:

$$\mathbf{w}' = \cos \theta \mathbf{w} + \sin \theta \mathbf{w}^{\perp}.$$

Vectorul \mathbf{w}^\perp este rotitul cu 90° al vectorului \mathbf{w} . E suficient, prin urmare, să identificăm rotitul cu 90° al vectorului \mathbf{v}_\perp , în planul perpendicular pe \mathbf{u} pe care l-am considerat. E ușor de constatat că acest vector este $\mathbf{u} \times \mathbf{v}_\perp$. Într-adevăr, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}_\perp$ este perpendicular atât pe \mathbf{u} , cât și pe \mathbf{v}_\perp , deci e situat în planul corespunzător. Cum \mathbf{u} și \mathbf{v}_\perp sunt perpendiculari, unghiul dintre ei este 90° , iar, \mathbf{u} fiind un versor, $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}_\perp\| = \|\mathbf{v}_\perp\|$, ceea ce înseamnă că $\mathbf{u} \times \mathbf{v}_\perp$ este, într-adevăr, rotitul cu 90° al lui \mathbf{v}_\perp .

Prin urmare,

$$\text{Rot}(\mathbf{u}, \theta)(\mathbf{v}_\perp) = \cos \theta \cdot \mathbf{v}_\perp + \sin \theta \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}_\perp),$$

iar

$$\text{Rot}(\mathbf{u}, \theta)(\mathbf{v}_\perp) = \mathbf{v}_\parallel + \cos \theta \cdot \mathbf{v}_\perp + \sin \theta \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}_\perp),$$

Pe de altă parte,

$$\begin{cases} \mathbf{v}_\parallel = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}, \\ \mathbf{v}_\perp = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}. \end{cases}$$

Așadar,

$$\text{Rot}(\mathbf{u}, \theta)(\mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} + \cos \theta \cdot (\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}) + \sin \theta \cdot [\mathbf{u} \times (\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u})]$$

sau

$$\text{Rot}(\mathbf{u}, \theta)(\mathbf{v}) = \cos \theta \cdot \mathbf{v} + (1 - \cos \theta) \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} + \sin \theta \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}), \quad (10.2.2)$$

unde am folosit faptul că $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = 0$.

Fie, acum, P un punct oarecare din spațiu. Ca de obicei, scriem $P = Q + (P - Q) = Q + \overrightarrow{QP}$. Atunci

$$\text{Rot}(Q, \mathbf{u}, \theta)(P) = Q + \text{Rot}(\mathbf{u}, \theta)(\overrightarrow{QP}), \quad (10.2.3)$$

de unde, folosind (10.2.2), obținem

$$\text{Rot}(Q, \mathbf{u}, \theta)(P) = Q + \cos \theta \cdot \overrightarrow{QP} + (1 - \cos \theta) \cdot (\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} + \sin \theta \cdot (\mathbf{u} \times \overrightarrow{QP}). \quad (10.2.4)$$

Formula (10.2.4) se numește *formula lui Rodrigues*, după numele matematicianului francez care a descoperit-o.

10.2.2 Forma matricială

Plecăm de la formula (10.2.2), pe care vrem să o scriem matricial. Singura parte care ne poate crea probleme este produsul vectorial $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Pentru un vector \mathbf{u} fixat, definim operatorul liniar de matrice

$$\mathbf{u} \times - = \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.2.5)$$

Un calcul simplu ne arată acum că

$$(\mathbf{u} \times -) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}. \quad (10.2.6)$$

Cu acest artificiu, obținem

$$\text{Rot}(\mathbf{u}, \theta)(\mathbf{v}) = [\cos \theta \cdot I_3 + (1 - \cos \theta)(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \sin \theta \cdot (\mathbf{u} \times -)] \cdot \mathbf{v},$$

de unde rezultă că matricea rotației vectorilor este

$$\text{Rot}(\mathbf{u}, \theta) = \cos \theta \cdot I_3 + (1 - \cos \theta)(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \sin \theta \cdot (\mathbf{u} \times -). \quad (10.2.7)$$

Din formula (10.2.3) rezultă acum că

$$\text{Rot}(\mathcal{Q}, \mathbf{u}, \theta)(P) = \text{Rot}(\mathbf{u}, \theta) \cdot \mathbf{P} + (I_3 - \text{Rot}(\mathbf{u}, \theta)) \cdot \mathbf{Q}. \quad (10.2.8)$$

Prin urmare, matricea omogenă a rotației este

$$\text{Rot}(\mathcal{Q}, \mathbf{u}, \theta) = \begin{pmatrix} \text{Rot}(\mathbf{u}, \theta) & (I_3 - \text{Rot}(\mathbf{u}, \theta)) \cdot \mathbf{Q} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.2.9)$$

Exemple. 1) O rotație relativ la origine va avea matricea

$$\text{Rot}(\text{Origine}, \mathbf{u}, \theta) = \begin{pmatrix} \text{Rot}(\mathbf{u}, \theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Rotația relativ la origine în jurul axei Ox este similară cu ceea ce se întâmplă în plan. Mai precis, în acest caz avem, înainte de toate,

$$\text{Rot}(\mathbf{i}, \theta) = \cos \theta \cdot I_3 + (1 - \cos \theta)(\mathbf{i} \otimes \mathbf{i}) + \sin \theta \cdot (\mathbf{i} \times -). \quad (10.2.10)$$

Dar

$$\mathbf{i} \otimes \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

în timp ce

$$\mathbf{i} \times - = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

deci formula (10.2.10) se transformă în

$$\begin{aligned} \text{Rot}(\mathbf{i}, \theta) &= \cos \theta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (1 - \cos \theta) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \sin \theta \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Prin urmare, matricea omogenă a rotației de unghi θ relativ la origine, în jurul axei Ox este:

$$\text{Rot}(\text{Origine}, \mathbf{i}, \theta) = \begin{pmatrix} \text{Rot}(\mathbf{i}, \theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.2.11)$$

3) **Rotația relativ la origine în jurul axei Oy .** Avem, mai întâi,

$$\text{Rot}(\mathbf{j}, \theta) = \cos \theta \cdot I_3 + (1 - \cos \theta)(\mathbf{j} \otimes \mathbf{j}) + \sin \theta \cdot (\mathbf{j} \times -). \quad (10.2.12)$$

Dar

$$\mathbf{j} \otimes \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

în timp ce

$$\mathbf{j} \times - = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

deci formula (10.2.12) se transformă în

$$\begin{aligned} \text{Rot}(\mathbf{j}, \theta) &= \cos \theta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (1 - \cos \theta) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \sin \theta \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Prin urmare, matricea omogenă a rotației de unghi θ relativ la origine, în jurul axei Oy este:

$$\text{Rot}(\text{Origine}, \mathbf{j}, \theta) = \begin{pmatrix} \text{Rot}(\mathbf{j}, \theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.2.13)$$

4) **Rotația relativ la origine în jurul axei Oz .** Avem, mai întâi,

$$\text{Rot}(\mathbf{k}, \theta) = \cos \theta \cdot I_3 + (1 - \cos \theta)(\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}) + \sin \theta \cdot (\mathbf{k} \times -). \quad (10.2.14)$$

Dar

$$\mathbf{k} \otimes \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (0 \ 0 \ 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

în timp ce

$$\mathbf{k} \times - = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

deci formula (10.2.14) se transformă în

$$\begin{aligned} \text{Rot}(\mathbf{j}, \theta) &= \cos \theta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (1 - \cos \theta) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin \theta \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Prin urmare, matricea omogenă a rotației de unghi θ relativ la origine, în jurul axei Oz este:

$$\text{Rot}(\text{Origine}, \mathbf{k}, \theta) = \begin{pmatrix} \text{Rot}(\mathbf{k}, \theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.2.15)$$

10.3 Scalarea simplă uniformă

Ne interesează scalarea de factor s , relativ la punctul Q .

10.3.1 Forma vectorială

Scalarea vectorilor se face foarte simplu:

$$\text{Scale}(s)(\mathbf{v}) = s \cdot \mathbf{v}. \quad (10.3.1)$$

Cum, dacă P este un punct arbitrar din spațiu, $P = Q + (Q - P) = Q + \overrightarrow{QP}$, avem

$$\text{Scale}(Q, s)(P) = Q + \text{Scale}(s)(\overrightarrow{QP}),$$

adică

$$\text{Scale}(Q, s) = Q + s \cdot \overrightarrow{QP}. \quad (10.3.2)$$

10.3.2 Forma matricială

Determinăm, mai întâi, ca de obicei, forma matricială a scalării vectorilor și obținem, din (10.3.1),

$$\text{Scale}(s)(v) = s \cdot I_3 \cdot v.$$

Prin urmare, matricea scalării uniforme a vectorilor, de factor s , este

$$\text{Scale}(s) = s \cdot I_3. \quad (10.3.3)$$

Prin urmare,

$$\text{Scale}(Q, s)(P) = Q + \text{Scale}(s) \cdot (P - Q)$$

sau

$$\text{Scale}(Q, s)(P) = \text{Scale}(s) \cdot P + (I_3 - \text{Scale}(s)) \cdot Q = s \cdot I_3 \cdot P + (1 - s) \cdot I_3 \cdot Q. \quad (10.3.4)$$

Așadar, matricea omogenă a scalării simple uniforme relativ la punctul Q , de factor s , este

$$\text{Scale}(Q, s) = \begin{pmatrix} s \cdot I_3 & (1 - s) \cdot I_3 \cdot Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10.3.5)$$

sau, explicit,

$$\text{Scale}(Q, s) = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 & (1 - s) \cdot q_x \\ 0 & s & 0 & (1 - s) \cdot q_y \\ 0 & 0 & s & (1 - s) \cdot q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.3.6)$$

10.4 Scalarea simplă neuniformă

Considerăm o scalare de factori s_x, s_y, s_z de-a lungul axelor de coordonate, relativ la un punct Q .

10.4.1 Forma vectorială

Fie \mathbf{v} un vector din spațiu. Atunci el se poate scrie

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y + \mathbf{v}_z,$$

unde $\mathbf{v}_x = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{i}) \cdot \mathbf{i}$, $\mathbf{v}_y = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{j}) \cdot \mathbf{j}$, $\mathbf{v}_z = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) \cdot \mathbf{k}$. Atunci,

$$\text{Scale}(s_x, s_y, s_z)(\mathbf{v}) = \text{Scale}(s_x, s_y, s_z)(\mathbf{v}_x) + \text{Scale}(s_x, s_y, s_z)(\mathbf{v}_y) + \text{Scale}(s_x, s_y, s_z)(\mathbf{v}_z),$$

adică

$$\text{Scale}(s_x, s_y, s_z)(\mathbf{v}) = s_x \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{i}) \cdot \mathbf{i} + s_y \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{j}) \cdot \mathbf{j} + s_z \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) \cdot \mathbf{k}. \quad (10.4.1)$$

Dacă P e un punct,

$$\text{Scale}(Q, s_x, s_y, s_z)(P) = \text{Scale}(Q, s_x, s_y, s_z)(Q + \overrightarrow{QP}),$$

adică

$$\text{Scale}(Q, s_x, s_y, s_z)(P) = Q + s_x \cdot (\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{i}) \cdot \mathbf{i} + s_y \cdot (\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{j}) \cdot \mathbf{j} + s_z \cdot (\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{k}) \cdot \mathbf{k}. \quad (10.4.2)$$

Forma matricială

Din (10.4.1) obținem forma matricială a transformării vectorilor

$$\text{Scale}(s_x, s_y, s_z)(\mathbf{v}) = s_x (\mathbf{i} \otimes \mathbf{i}) \cdot \mathbf{v} + s_y (\mathbf{j} \otimes \mathbf{j}) \cdot \mathbf{v} + s_z (\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}) \cdot \mathbf{v},$$

de unde rezultă matricea transformării:

$$\text{Scale}(s_x, s_y, s_z) = s_x (\mathbf{i} \otimes \mathbf{i}) + s_y (\mathbf{j} \otimes \mathbf{j}) + s_z (\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}). \quad (10.4.3)$$

După cum am văzut mai devreme,

$$\mathbf{i} \otimes \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} \otimes \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

deci formula (10.4.3) se poate rescrie ca

$$\text{Scale}(s_x, s_y, s_z) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{pmatrix}. \quad (10.4.4)$$

Ca să găsim matricea transformării punctelor, scriem $P = Q + (P - Q)$, deci

$$\text{Scale}(s_x, s_y, s_z)(P) = Q + \text{Scale}(s_x, s_y, s_z)(P - Q)$$

sau

$$\text{Scale}(Q, s_x, s_y, s_z)(P) = \text{Scale}(s_x, s_y, s_z) \cdot P + (I_3 - \text{Scale}(s_x, s_y, s_z)) \cdot Q, \quad (10.4.5)$$

prin urmare, matricea transformării va fi

$$\text{Scale}(Q, s_x, s_y, s_z) = \begin{pmatrix} \text{Scale}(s_x, s_y, s_z) & (I_3 - \text{Scale}(s_x, s_y, s_z)) \cdot Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10.4.6)$$

sau, în forma completă,

$$\text{Scale}(Q, s_x, s_y, s_z) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & (1 - s_x) \cdot q_x \\ 0 & s_y & 0 & (1 - s_y) \cdot q_y \\ 0 & 0 & s_z & (1 - s_z) \cdot q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.4.7)$$

10.5 Scalarea neuniformă generală (Goldman)

Suntem interesați de scalarea generală de factor s , în direcția versorului \mathbf{w} , relativ la punctul Q .

10.5.1 Forma vectorială

Fie \mathbf{v} un vector oarecare din spațiu. Vom descompune acest vector după două direcții, una paralelă cu versorul \mathbf{w} și una perpendiculară pe el:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}. \quad (10.5.1)$$

Este ușor de constatat că

$$\mathbf{v}_{\parallel} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}, \quad (10.5.2)$$

de unde, desigur,

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}. \quad (10.5.3)$$

Prin urmare,

$$\text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}) = \text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}_{\parallel}) + \text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}_{\perp}). \quad (10.5.4)$$

Cum scalarea se produce paralel cu vectorul \mathbf{w} , avem, evident

$$\text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}_{\parallel}) = s\mathbf{v}_{\parallel}. \quad (10.5.5)$$

Pe de altă parte, nici o scalare nu are loc în direcția perpendiculară la \mathbf{w} , deci

$$\text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}_{\perp}) = \mathbf{v}_{\perp}. \quad (10.5.6)$$

Prin urmare,

$$\text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}) = s\mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}$$

sau, dacă ținem cont de definițiile lui \mathbf{v}_{\parallel} și \mathbf{v}_{\perp} ,

$$\text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + (s - 1)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}. \quad (10.5.7)$$

Pentru a determina imaginea unui punct P , ținem cont de faptul că $P = Q + \overrightarrow{QP}$, deci

$$\text{Scale}(Q, \mathbf{w}, s)(P) = Q + \text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\overrightarrow{QP})$$

sau

$$\text{Scale}(Q, \mathbf{w}, s)(P) = Q + \overrightarrow{QP} + (s - 1)(\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}. \quad (10.5.8)$$

10.5.2 Forma matricială

Începem prin a determina forma matricială a transformării pentru vectori. Avem

$$\text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + (s - 1)(\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v},$$

deci matricea pentru transformarea vectorilor este

$$\text{Scale}(\mathbf{w}, s) = I_3 + (s - 1)(\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}). \quad (10.5.9)$$

Pe de altă parte, cum $P = Q + (P - Q)$,

$$\text{Scale}(Q, \mathbf{w}, s)(P) = Q + \text{Scale}(\mathbf{w}, s) \cdot (P - Q) = \text{Scale}(\mathbf{w}, s) \cdot P + (I_3 - \text{Scale}(\mathbf{w}, s)) \cdot Q$$

sau

$$\text{Scale}(Q, \mathbf{w}, s)(P) = \text{Scale}(\mathbf{w}, s) \cdot P + (1 - s)(\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}) \cdot Q. \quad (10.5.10)$$

Prin urmare, matricea omogenă a transformării este

$$\text{Scale}(Q, \mathbf{w}, s) = \begin{pmatrix} I_3 + (s - 1)(\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}) & (1 - s)(\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}) \cdot Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10.5.11)$$

sau, în formă extinsă,

$$\begin{aligned} \text{Scale}(Q, \mathbf{w}, s) &= \\ &= \begin{pmatrix} 1 + (s - 1)w_1^2 & (s - 1)w_1w_2 & (s - 1)w_1w_3 & (1 - s)(q_1w_1^2 + q_2w_1w_2 + q_3w_1w_3) \\ (s - 1)w_1w_2 & 1 + (s - 1)w_2^2 & (s - 1)w_2w_3 & (1 - s)(q_1w_1w_2 + q_2w_2^2 + q_3w_2w_3) \\ (s - 1)w_1w_3 & (s - 1)w_2w_3 & 1 + (s - 1)w_3^2 & (1 - s)(q_1w_1w_3 + q_2w_2w_3 + q_3w_3^2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (10.5.12)$$

Exemplul 10.1. Dacă Q este originea, iar $\mathbf{w} = \mathbf{i}$, adică scalarea generală se face de-a lungul axei Ox , atunci matricea de transformare se transformă în

$$\text{Scale}(\text{Origine}, \mathbf{i}, s) = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Scale}(\text{Origine}, s, 1, 1),$$

adică scalarea se reduce la o scalare simplă neomogenă, de-a lungul axei Ox .

10.6 Reflexia față de un plan

Reflexia față de un plan, în spațiu, este perfect analogă cu reflexia față de o dreaptă în plan și modalitatea de a obține expresia ei este similară. De data asta datele sunt: un punct Q și un plan Π care trece prin el, descris prin intermediul versorului planului normal, \mathbf{n} .

10.6.1 Forma vectorială

Fie \mathbf{v} un vector oarecare din spațiu. Descompunem vectorul

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}, \quad (10.6.1)$$

unde \mathbf{v}_{\parallel} este un vector paralel vectorului \mathbf{n} (adică perpendicular pe planul Π), în timp ce vectorul \mathbf{v}_{\perp} este perpendicular pe vectorul \mathbf{n} (adică este paralel cu planul Π).

Reflexia față de planul Π a vectorului \mathbf{v}_{\perp} coincide, evident, cu vectorul însuși:

$$\text{Mirror}(\mathbf{n})(\mathbf{v}_{\perp}) = \mathbf{v}_{\perp}.$$

Prin urmare, trebuie să de preocupăm doar de cealaltă componentă, perpendiculară pe plan. Dar, iarăși în mode evident,

$$\text{Mirror}(\mathbf{n})(\mathbf{v}_{\parallel}) = -\mathbf{v}_{\parallel}.$$

Ca urmare,

$$\text{Mirror}(\mathbf{n})(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_{\perp} - \mathbf{v}_{\parallel}.$$

Dar

$$\mathbf{v}_{\parallel} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel},$$

deci, în final,

$$\text{Mirror}(\mathbf{n})(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}. \quad (10.6.2)$$

Fie, acum, P un punct din spațiu. Atunci $P = Q + \overrightarrow{QP}$, deci

$$\text{Mirror}(Q, \mathbf{n})(P) = Q + \text{Mirror}(\mathbf{n})\left(\overrightarrow{QP}\right)$$

sau

$$\text{Mirror}(Q, \mathbf{n})(P) = Q + \overrightarrow{QP} - 2\left(\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{n}\right) \cdot \mathbf{n}. \quad (10.6.3)$$

10.6.2 Forma matricială

Scriem, mai întâi, matricial transformarea pentru vectori. Relația (10.6.2) se transformă, după cum se poate constata ușor, în

$$\text{Mirror}(\mathbf{n})(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - 2(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v},$$

prin urmare, matricea transformării vectorilor este

$$\text{Mirror}(\mathbf{n}) = I_3 - 2(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}). \quad (10.6.4)$$

Pentru a găsi matricea omogenă a transformării pentru puncte, scriem $P = Q + (P - Q)$ și obținem

$$\text{Mirror}(Q, \mathbf{n})(P) = Q + (P - Q) - 2(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot (P - Q)$$

sau

$$\text{Mirror}(Q, \mathbf{n})(P) = (I_3 - 2(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})) \cdot P + 2(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot Q.$$

Așadar, matricea omogenă a reflexiei față de planul Π este:

$$\text{Mirror}(Q, \mathbf{n}) = \begin{pmatrix} I_3 - 2(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) & 2(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10.6.5)$$

sau, în forma extinsă,

$$\text{Mirror}(Q, \mathbf{n}) = \begin{pmatrix} 1 - 2n_1^2 & -2n_1n_2 & -2n_1n_3 & 2(n_1n_3q_3 + n_1n_2q_2 + n_1^2q_1) \\ -2n_1n_2 & 1 - 2n_2^2 & -2n_2n_3 & 2(n_2n_3q_3 + n_2^2q_2 + n_1n_2q_1) \\ -2n_1n_3 & -2n_2n_3 & 1 - 2n_3^2 & 2(n_3^2q_3 + n_2n_3q_2 + n_1n_3q_1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.6.6)$$

Exemple. 1. **Simetria față de planul xOy .** În acest caz, $Q = O(0, 0, 0)$, $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ și obținem:

$$R_{xy} = \text{Mirror}(O, \mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.6.7)$$

2. **Simetria față de planul xOz .** De data aceasta, $Q = O(0, 0, 0)$, $\mathbf{n} = \mathbf{j}$ și obținem:

$$R_{xz} = \text{Mirror}(O, \mathbf{j}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.6.8)$$

3. **Simetria față de planul yOz .** Acum, $Q = O(0, 0, 0)$, $\mathbf{n} = \mathbf{i}$ și obținem:

$$R_{yz} = \text{Mirror}(O, \mathbf{i}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.6.9)$$

10.6.3 Cazul în care planul este dat sub forma generală

Să presupunem că ecuația planului este

$$\Pi : ax + by + cz + d = 0.$$

Să presupunem, pentru fixarea ideilor, că $a \neq 0$. Atunci planul Π este planul care are ca vector normal

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}(a, b, c),$$

și putem lua

$$Q = (-d/a, 0, 0).$$

Dacă înlocuim în formula (10.6.6), obținem

$$\text{Mirror}(Q, \mathbf{n}) = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} -a^2 + b^2 + c^2 & -2ab & -2ac & -2ad \\ -2ab & a^2 - b^2 + c^2 & -2bc & -2bd \\ -2ac & -2bc & a^2 + b^2 - c^2 & -2cd \\ 0 & 0 & 0 & a^2 + b^2 + c^2 \end{pmatrix} \quad (10.6.10)$$

10.7 Forfecarea în spațiu

Fie Π un plan în spațiu, $Q \in \Pi$ un punct dat, \mathbf{u} – un versor paralel cu planul Π și θ un unghi. Dacă P este un punct oarecare din spațiu, îl proiectăm ortogonal pe planul Π într-un punct $P' \in \Pi$. Acum mutăm punctul P paralel cu vectorul \mathbf{u} într-un punct P^{new} , astfel încât $\angle P^{\text{new}} P' P = \theta$. Vom spune că punctul P^{new} a fost obținut din punctul P printr-o *forfecare paralelă cu planul Π , relativ la punctul Q , în direcția versorului \mathbf{u} , de unghi θ* . Vom scrie

$$P^{\text{new}} = \text{Shear}(Q, \mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)(P),$$

unde \mathbf{n} este versorul normal la planul Π (prin urmare, Q și \mathbf{n} determină în mod unic planul Π).

10.7.1 Forma vectorială

Fie \mathbf{v} un vector oarecare din \mathbb{R}^3 . Îl descompunem ca

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp},$$

unde \mathbf{v}_{\parallel} este un vector paralel cu \mathbf{u} , în timp ce \mathbf{v}_{\perp} este un vector perpendicular pe \mathbf{u} , adică un vector paralel cu vectorul normal \mathbf{n} . Atunci

$$\text{Shear}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)(\mathbf{v}) = \text{Shear}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)(\mathbf{v}_{\parallel}) + \text{Shear}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)(\mathbf{v}_{\perp}) = \mathbf{v}_{\parallel} + \text{Shear}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)(\mathbf{v}_{\perp}).$$

Un raționament simplu ne arată că

$$\text{Shear}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)(\mathbf{v}_{\perp}) = \text{Shear}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)((\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \text{Shear}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)(\mathbf{n}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{n} + \text{tg } \theta \cdot \mathbf{u}).$$

Pe de altă parte,

$$\mathbf{v}_{\parallel} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}.$$

Prin urmare,

$$\text{Shear}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \text{tg } \theta \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}. \quad (10.7.1)$$

Dacă vrem să determinăm forma transformării pentru un punct P , scriem

$$\text{Shear}(Q, \mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)(P) = Q + \text{Shear}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)(\overrightarrow{QP})$$

sau

$$\text{Shear}(Q, \mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)(P) = Q + \overrightarrow{QP} + \text{tg } \theta \cdot (\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}. \quad (10.7.2)$$

10.7.2 Forma matricială

Pentru forma matricială a transformării pe vectori deducem imediat, cum am mai făcut-o înainte, că

$$\text{Shear}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \text{tg } \theta \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$$

sau

$$\text{Shear}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)(\mathbf{v}) = (I_3 + \text{tg } \theta \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{u})) \cdot \mathbf{v}, \quad (10.7.3)$$

ceea ce înseamnă că matricea părții vectoriale a forfecării este

$$\text{Shear}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta) = I_3 + \text{tg } \theta \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{u}). \quad (10.7.4)$$

Pentru a determina matricea omogenă de transformare a punctelor, plecăm de la relația

$$\text{Shear}(Q, \mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)(P) = Q + \text{Shear}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta) \cdot (P - Q) = \text{Shear}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta) \cdot P + (I_3 - \text{Shear}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)) \cdot Q$$

sau, dacă explicităm,

$$\text{Shear}(Q, \mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)(P) = (I_3 + \text{tg } \theta \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{u})) \cdot P - \text{tg } \theta \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{u}) \cdot Q. \quad (10.7.5)$$

De aici deducem că matricea omogenă a forfecării este

$$\text{Shear}(Q, \mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta) = \begin{pmatrix} I_3 + \text{tg } \theta \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{u}) & -\text{tg } \theta \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{u}) \cdot Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.7.6)$$

Matricea extinsă este

$$\text{Shear}(Q, \mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + n_1 u_1 \text{tg } \theta & n_2 u_1 \text{tg } \theta & n_3 u_1 \text{tg } \theta & -\text{tg } \theta (n_3 u_1 q_3 + n_2 u_1 q_2 + n_1 u_1 q_1) \\ n_1 u_2 \text{tg } \theta & 1 + n_2 u_2 \text{tg } \theta & n_3 u_2 \text{tg } \theta & -\text{tg } \theta (n_3 u_2 q_3 + n_2 u_2 q_2 + n_1 u_2 q_1) \\ n_1 u_3 \text{tg } \theta & n_2 u_3 \text{tg } \theta & 1 + n_3 u_3 \text{tg } \theta & -\text{tg } \theta (n_3 u_3 q_3 + n_2 u_3 q_2 + n_1 u_3 q_1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.7.7)$$

În particular, forfecarea de-a lungul axei Ox , paralel cu planul xOy este dată de matricea

$$\text{Shear}(O, \mathbf{k}, \mathbf{i}, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \text{tg } \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Forfecarea de-a lungul axei Oy , paralel cu planul xOy este dată de matricea

$$\text{Shear}(O, \mathbf{k}, \mathbf{j}, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \text{tg } \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Probleme

În această secțiune, ABC este triunghiul de vârfuri $A(1, 2, 2)$, $B(2, 4, 3)$, $C(4, 3, 2)$.

Problema 10.1. Determinați imaginea triunghiului ABC printr-o rotație de 45° în jurul drepte care trece prin punctele $P(2, 2, 1)$ și $Q(1, 1, 1)$.

Problema 10.2. Determinați imaginea triunghiului ABC printr-o rotație de 30° în jurul dreptei

$$(\Delta) : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-2}{2}.$$

Problema 10.3. Determinați imaginea triunghiului ABC printr-o rotație de 60° în jurul dreptei

$$(\Delta) : \begin{cases} x - y + z - 1 = 0, \\ 2x + y = 0. \end{cases}$$

Problema 10.4. Determinați imaginea triunghiului ABC printr-o scalare simplă neuniformă, relativ la punctul $Q(2, 5, 3)$, de factori de scală $(2, 1, 3)$.

Problema 10.5. Determinați imaginea triunghiului ABC printr-o scalare neuniformă generală, relativ la punctul $Q(2, 5, 3)$, de factor de scală $s = 1$, în direcția vectorului $\mathbf{v}(1, 3, 2)$.

Problema 10.6. Determinați imaginea triunghiului ABC prin reflexia față de planul $x - y + 2z - 1 = 0$.

Problema 10.7. Determinați imaginea triunghiului ABC prin reflexia față de planul care trece prin punctele $O(0, 0, 0)$, $P(1, 1, 1)$, $Q(1, 3, 2)$.

Problema 10.8. Determinați imaginea triunghiului ABC prin forfecarea de unghi 30° , relativ la planul $x - y - z - 1 = 0$, în direcția vectorului $\mathbf{v}(1, 1, 0)$.

Problema 10.9. Determinați imaginea triunghiului ABC prin forfecarea de unghi 30° , relativ la planul care trece prin punctele $O(0, 0, 0)$, $P(1, 1, 1)$, $Q(1, 3, 2)$, în direcția vectorului $\mathbf{v}(1, -1, 0)$.

11.1 Geometrie analitică plană în coordonate omogene

Fie $P(x, y)$ un punct din plan, dat prin coordonatele sale carteziene (x, y) . Acestor coordonate li se asociază coordonatele sale omogene (X, Y, W) astfel încât $x = X/W$ și $y = Y/W$. Presupunem că $W \neq 0$. Vom nota cu $\mathbf{P}(X, Y, W)$ punctul, dat prin coordonatele sale omogene. Coordonatele omogene nu sunt unice, ele sunt definite doar până la un factor nenul. În cele ce urmează, când va fi util, îl vom privi pe \mathbf{P} ca fiind un vector 3D. Din nou, este un vector *omogen*, de componente (X, Y, W) , care sunt unice până la un factor nenul. Dacă adăugăm punctelor obișnuite ale planului punctele care au coordonatele omogene $(X, Y, 0)$ (punctele “de la infinit”) obținem *planul proiectiv*.

Dacă punctul $P(x, y)$ aparține dreptei de ecuație

$$ax + by + c = 0,$$

atunci ecuațiile sale verifică ecuația

$$aX + bY + cW = 0. \quad (11.1.1)$$

Această ecuație se numește *ecuația omogenă a dreptei*.

Dreapta noastră unic determinată de coeficienții a, b, c . Reciproca este adevărată în sensul că fiecărei drepte i se pot asocia coeficienții săi, care sunt unici până la

un factor numeric nenul. Vom considera că (a, b, c) sunt coordonatele dreptei și introducem vectorul (omogen)

$$\ell = (a, b, c),$$

pe care îl vom numi *vectorul dreptei*.

Cu noile notații, ecuația dreptei (11.1.1) se poate scrie, cu ajutorul produsului scalar din \mathbb{R}^3 , sub forma:

$$\ell \cdot \mathbf{P} = aX + bY + cW = 0. \quad (11.1.2)$$

Relația (11.1.2) se poate utiliza pentru a rezolva două probleme importante care leagă punctele și dreptele din plan:

- (i) determinarea ecuației dreptei care trece prin două puncte date;
- (ii) determinarea punctului de intersecție a două drepte date.

Determinarea ecuației dreptei. Considerăm două puncte, date prin coordonatele lor omogene, \mathbf{P}_1 și \mathbf{P}_2 . Notăm cu $\ell(a, b, c)$ vectorul dreptei care trece prin ele. Atunci avem relațiile

$$\ell \cdot \mathbf{P}_1 = 0 \quad \text{și} \quad \ell \cdot \mathbf{P}_2 = 0.$$

Din punct de vedere geometric, aceste ecuații înseamnă că vectorul dreptei este perpendicular pe ambele puncte (privite ca vectori, desigur). Dar noi știm că asta înseamnă că putem pune

$$\ell = \mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2.$$

Ca exemplu, vom determina ecuația dreptei care trece prin punctele $(1, 1)$ și $(2, 3)$. Avem, astfel, $\mathbf{P}_1(1, 1, 1)$ și $\mathbf{P}_2(2, 3, 1)$. Atunci vectorul dreptei va fi

$$\ell = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2, 1, 1),$$

adică ecuația dreptei se poate scrie:

$$-2x + y + 1 = 0.$$

Determinarea punctului de intersecție a două drepte. Presupunem că se dau două drepte (distincte!), prin vectorii lor $\ell_1(a_1, b_1, c_1)$ și $\ell_2(a_2, b_2, c_2)$. Punctul lor de intersecție verifică sistemul de ecuații

$$\ell_1 \cdot \mathbf{P} = 0 \quad \text{și} \quad \ell_2 \cdot \mathbf{P} = 0.$$

Din aceleași motive ca mai sus, soluția evidentă este

$$\mathbf{P} = \ell_1 \times \ell_2.$$

Considerăm, de exemplu, dreptele $3x + 2y - 5 = 0$ și $4x + 7y - 1 = 0$, adică

$$\ell_1 = (3, 2, -5), \quad \ell_2 = (4, 7, -1).$$

Atunci

$$\mathbf{P} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & -5 \\ 4 & 7 & -1 \end{vmatrix} = (33, -17, 13),$$

adică obținem punctul de coordonate carteziane $(33/13, -17/13)$. Considerăm, ca al doilea exemplu, dreptele (paralele!) $3x + 2y - 5 = 0$ și $3x + 2y = 0$, adică

$$\ell_1 = (3, 2, -5), \quad \ell_2 = (3, 2, 0).$$

Atunci punctul de “intersecție” este dat de

$$\mathbf{P} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & -5 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (10, 15, 0)$$

sau $\mathbf{P}(2, 3, 0)$. Faptul că punctul de intersecție omogen are zero ca ultimă coordonată, înseamnă că este punctul de la infinit corespunzător direcției celor două drepte paralele.

11.2 Geometrie analitică în spațiu în coordonate omogene

Lucrurile în spațiu stau analog cu ceea ce se întâmplă în plan. Unui punct $P(x, y, z)$ i se asociază $\mathbf{P}(X, Y, Z, W)$, cu $x = X/W, y = Y/W, z = Z/W$. și aici, dacă adăugăm punctele ce au ultima coordonată omogenă zero (punctele de la infinit), obținem *spațiul proiectiv*. Două drepte paralele se intersectează într-un punct de la infinit, iar două plane paralele se intersectează după o dreaptă, formată din puncte de la infinit. Studiul dreptelor și planelor paralele se poate face și în coordonate omogene, dar nu ne interesează aici. Un plan de ecuație

$$ax + by + cz + d = 0$$

se poate scrie în coordonate omogene sub forma

$$aX + bY + cZ + dW = 0. \quad (11.2.1)$$

Dacă introducem vectorul omogen 4-dimensional

$$\mathbf{n} = (a, b, c, d)$$

și îl numim *vectorul planului*, atunci ecuația (11.2.1) se poate rescrie, folosind produsul scalar euclidian 4-dimensional, sub forma

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{P} = aX + bY + cZ + dW = 0. \quad (11.2.2)$$

Cu ajutorul relației (11.2.1) putem rezolva două probleme importante:

(a) determinarea planului care trece prin trei puncte;

(b) determinarea punctului de intersecție a trei plane.

Determinarea ecuației planului care trece prin trei puncte.

Considerăm trei puncte, date prin coordonatele lor omogene, $\mathbf{P}_1(X_1, Y_1, Z_1, W_1)$, $\mathbf{P}_2(X_2, Y_2, Z_2, W_2)$ și $\mathbf{P}_3(X_3, Y_3, Z_3, W_3)$ și fie \mathbf{n} vectorul omogen al planului care trece prin cele trei puncte. Atunci avem

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_1 = 0, \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_2 = 0, \text{ și } \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_3 = 0,$$

adică \mathbf{n} este ortogonal la cele trei puncte. Aceasta înseamnă că trebuie să avem

$$\mathbf{n} = \text{orth}(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 & W_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & W_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 & W_3 \end{vmatrix}. \quad (11.2.3)$$

Determinarea punctului de intersecție a trei plane.

De data aceasta se consideră trei plane, date prin vectorii lor, $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ și o trebuie să determinăm punctul lor de intersecție, \mathbf{P} . Întrucât punctul aparține tuturor celor trei plane, el trebuie să verifice egalitățile

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{P} = 0, \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{P} = 0, \text{ și } \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{P} = 0,$$

adică punctul trebuie să fie ortogonal celor trei plane, deci

$$\mathbf{P} = \text{orth}(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}. \quad (11.2.4)$$

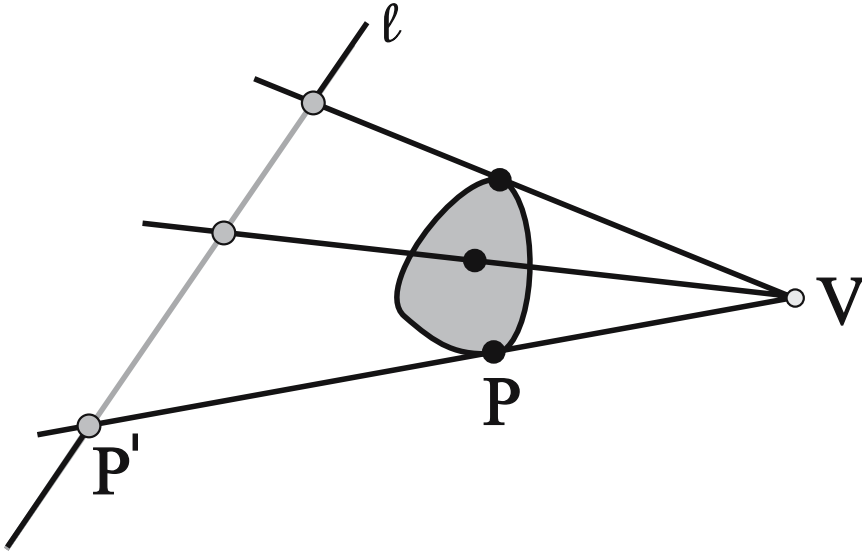


Figura 11.1: Proiecția perspectivă în plan

11.3 Proiecții

11.3.1 Proiecția pe o dreaptă

Fie V un punct din plan și ℓ o dreaptă care nu trece prin V . Se numește *proiecție centrală* sau *proiecție perspectivă* vin V pe ℓ aplicația care asociază fiecărui punct P din plan, diferit de V , punctul P' obținut intersectând dreapta VP cu dreapta ℓ . Punctul V se numește *centru de perspectivă* sau *punct de vedere*, iar dreapta ℓ se numește *linie de vedere* sau *linie de proiecție*. Liniile prin V se numesc *proietori*. Dacă punctul de vedere $v_1, v_2, \mathbf{0}$ este situat la infinit, atunci proietorii sunt drepte paralele de vector director (v_1, v_2) . În acest caz, proiecția se numește *paralelă*.

Teorema 11.1. *Matricea proiecției perspective dintr-un punct V (exprimat în coor-*

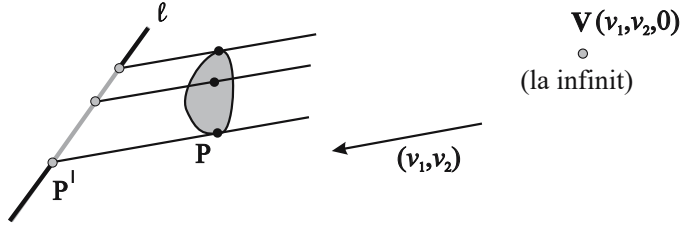


Figura 11.2: Proiecția paralelă în plan

donate omogene) pe o dreaptă de vector ℓ este dată de

$$\begin{aligned}
 M &= \mathbf{V}\ell^t - (\ell \cdot \mathbf{V})I_3 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \cdot (a_1 \ a_2 \ a_3) - (\ell \cdot \mathbf{V})I_3 = \\
 &= \begin{pmatrix} -v_2a_2 - v_3a_3 & v_1a_2 & v_1a_3 \\ v_2a_1 & -v_1a_1 - v_3a_3 & v_2a_3 \\ v_3a_1 & v_3a_2 & -v_1a_1 - v_2a_2 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{11.3.1}$$

Observație. Pentru proiecția paralelă, $v_3 = 0$ și atunci formula din teoremă se reduce la

$$M = \begin{pmatrix} -v_2a_2 & v_1a_2 & v_1a_3 \\ v_2a_1 & -v_1a_1 & v_2a_3 \\ 0 & 0 & -v_1a_1 - v_2a_2 \end{pmatrix} \tag{11.3.2}$$

Demonstrația teoremei Imaginea \mathbf{P}' a punctului \mathbf{P} este obținută intersectând dreapta de proiecție ℓ cu dreapta care trece prin \mathbf{V} și \mathbf{P} . Această dreaptă are vectorul omogen $\mathbf{V} \times \mathbf{P}$ și, de aceea, intersectează ℓ în punctul de coordonate omogene $\ell \times (\mathbf{V} \times \mathbf{P})$.

După cum se știe din algebra vectorială, dacă $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ sunt trei vectori din \mathbb{R}^3 , atunci

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C},$$

de aceea,

$$\mathbf{P}' = \ell \times (\mathbf{V} \times \mathbf{P}) = (\mathbf{P} \cdot \ell)\mathbf{V} - (\ell \cdot \mathbf{V})\mathbf{P}.$$

Dacă înlocuim vectorii cu matrici coloană și produsul scalar cu înmulțirea matricilor, obținem:

$$\mathbf{P}' = \mathbf{V}\ell^t \mathbf{P} - (\ell \cdot \mathbf{V})I_3 \mathbf{P} = (\mathbf{V}\ell^t - (\ell \cdot \mathbf{V})I_3)\mathbf{P} = M \cdot \mathbf{P}.$$

□

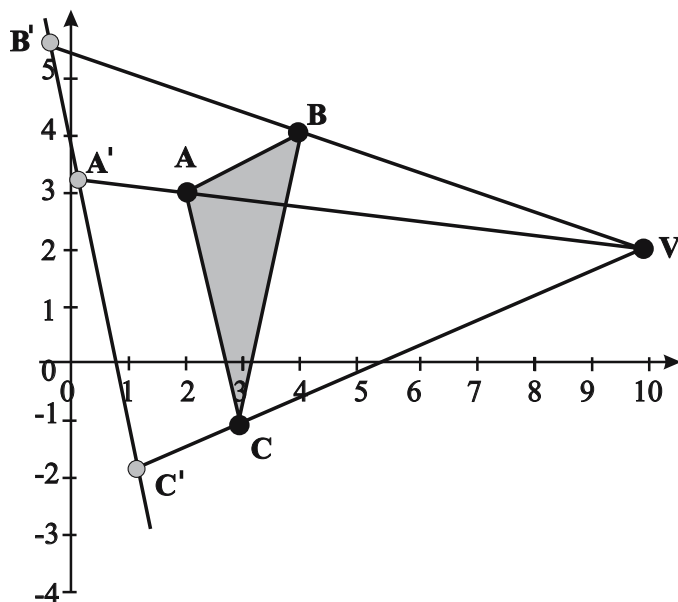


Figura 11.3: Proiecția perspectivă în plan

Exemplul 11.1. Vrem să proiectăm triunghiul de vârfuri $A(2, 3)$, $B(4, 4)$ și $C(3, -1)$ pe dreapta $5x + y - 4 = 0$, din punctul de coordonate $(10, 2)$. Avem $V(10, 2, 1)$, $\ell(5, 1, -4)$, iar $\ell \cdot V = 48$. Astfel, matricea de transformare este

$$M = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} (5 \ 1 \ -4) - 48 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 10 & -40 \\ 10 & -46 & -8 \\ 5 & 1 & -52 \end{pmatrix}.$$

Vom avea, prin urmare,

$$\begin{aligned} (A' \ B' \ C') &= \begin{pmatrix} 2 & 10 & -40 \\ 10 & -46 & -8 \\ 5 & 1 & -52 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -6 & 8 & -44 \\ -126 & -152 & 68 \\ -39 & -28 & -38 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

11.3.2 Proiecția pe un plan

Proiecția pe un plan este analoagă proiecției pe o dreaptă. Astfel, se alege un punct \mathbf{V} , *centrul de proiecție sau de perspectivă sau punctul de vedere*, precum și un plan de vector omogen \mathbf{n} , care nu trece prin \mathbf{V} , *planul de vedere sau de proiecție*. Proiecția perspectivă a unui punct \mathbf{P} , diferit de centrul de proiecție, pe planul de proiecție este punctul \mathbf{P}' în care acest plan se intersectează cu dreapta \mathbf{VP} . La fel ca în cazul plan, se poate demonstra următoarea teoremă:

Teorema 11.2. *Matricea proiecției perspective dintr-un punct \mathbf{V} (exprimat în coordonate omogene) pe un plan de vector \mathbf{n} este dată de*

$$M = \mathbf{V}\mathbf{n}^t - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{V})I_4 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \end{pmatrix} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{V})I_4 =$$

$$= \begin{pmatrix} -n_2v_2 - & n_2v_1 & n_3v_1 & n_4v_1 \\ -n_3v_3 - n_4v_4 & & & \\ n_1v_2 & -n_1v_1 - & n_3v_2 & n_4v_2 \\ & -n_3v_3 - n_4v_4 & & \\ n_1v_3 & n_2v_3 & -n_1v_1 - & n_4v_3 \\ & & -n_2v_2 - n_4v_4 & \\ n_1v_4 & n_2v_4 & n_3v_4 & -n_1v_1 \\ & & & -n_2v_2 - n_3v_3 \end{pmatrix}. \quad (11.3.3)$$

Exemplul 11.2. Considerăm poliedrul $ABCDEF$, cu $A(0, 0, 0)$, $B(2, 0, 0)$, $C(2, 3, 0)$, $D(0, 3, 0)$, $E(1, 2, 1)$ și $F(1, 1, 1)$.

Vrem să proiectăm această prismă pe planul xOy , paralel cu axa Oz . Asta înseamnă că centrul de proiecție este punctul la infinit de-a lungul axei Oz , adică $\mathbf{V}(0, 0, 1, 0)$, iar vectorul planului este $\mathbf{n}(0, 0, 1, 0)$. Matricea de proiecție este, atunci,

$$M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare, matricea coordonatelor omogene ale proiecției vârfurilor poliedrului va

fi

$$\begin{aligned} (A' \ B' \ C' \ D' \ E' \ F') &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Astfel, în coordonate carteziane, imaginile vor fi $A'(0, 0, 0)$, $B'(2, 0, 0)$, $C'(2, 3, 0)$, $D'(0, 3, 0)$, $E'(1, 2, 0)$ și $F'(1, 1, 0)$.

Proiectăm, din nou, același poliedru, dar, de data aceasta, facem o proiecție centrală, din punctul de coordonate carteziane $(1, 5, 3)$, pe același plan xOy . Acum, în coordonate omogene, centrul de proiecție este punctul $\mathbf{V}(1, 5, 3, 1)$, în timp ce vectorul omogen asociat planului de proiecție este, în continuare, $\mathbf{n}(0, 0, 1, 0)$.

Matricea de proiecție este, acum,

$$M = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (0 \ 0 \ 1 \ 0) - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Astfel, matricea coordonatelor omogene vârfurilor proiecției poliedrului va fi

$$\begin{aligned} (A'' \ B'' \ C'' \ D'' \ E'' \ F'') &= \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -6 & -6 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -9 & -9 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & -3 & -3 & -2 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

În coordonate carteziane, coordonatele vârfurilor sunt: $A''(0, 0, 0)$, $B''(2, 0, 0)$, $C''(2, 3, 0)$, $D''(0, 3, 0)$, $E''(1, 0.5, 0)$ și $F''(1, -1, 0)$.

11.4 Clasificarea proiecțiilor paralele

11.4.1 Proiecții ortografice

O *proiecție ortografică* (sau ortogonală) este o proiecție paralelă în care planul de proiecție este perpendicular pe direcția de proiecție. Dacă vectorul omogen al planului este $\mathbf{n}(n_1, n_2, n_3, n_4)$, atunci direcția de proiecție este descrisă de punctul de la infinit $\mathbf{V}(-n_1, -n_2, -n_3, 0)$. Înlocuind în formula generală pentru proiecția paralelă, obținem matricea unei proiecții ortografice sub forma

$$M = \begin{pmatrix} n_2^2 + n_3^2 & -n_1n_2 & -n_1n_3 & -n_4n_1 \\ -n_1n_2 & n_1^2 + n_3^2 & -n_2n_3 & -n_2n_4 \\ -n_1n_3 & -n_2n_3 & n_1^2 + n_2^2 & -n_4n_3 \\ 0 & 0 & 0 & n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 \end{pmatrix}. \quad (11.4.1)$$

În particular, matricea proiecției pe planul xOy este dată de

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Să presupunem că se alege \mathbf{n} astfel încât să avem $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ (adică astfel încât vectorul normal la planul de proiecție să fie un versor). Se numește *factor de contracție al proiecției în direcția uneia dintre axele de coordonate* raportul dintre lungimea proiecției unui segment paralel cu acea axă și lungimea reală a segmentului. Se poate arăta că factorii de contracție în direcțiile axelor Ox , Oy și Oz sunt egali cu $\sqrt{n_2^2 + n_3^2}$, $\sqrt{n_1^2 + n_3^2}$, respectiv $\sqrt{n_1^2 + n_2^2}$. Mai mult, doi factori de contracție sunt egali dacă și numai dacă componentele lui \mathbf{n} pe axele respective sunt egale în modul.

Proiecții ortografice multiple (multiview)

Proiecțiile multiple (multiview) se folosesc în inginerie pentru a reprezenta obiecte alcătuite din fațete poligonale. De regulă, o reprezentare multiview a unui obiect include 6 proiecții ortogonale pe planele de coordonate: din față, din spate, din stânga, din dreapta, de sus și de jos. Considerăm, de exemplu, poliedrul din figura 11.4

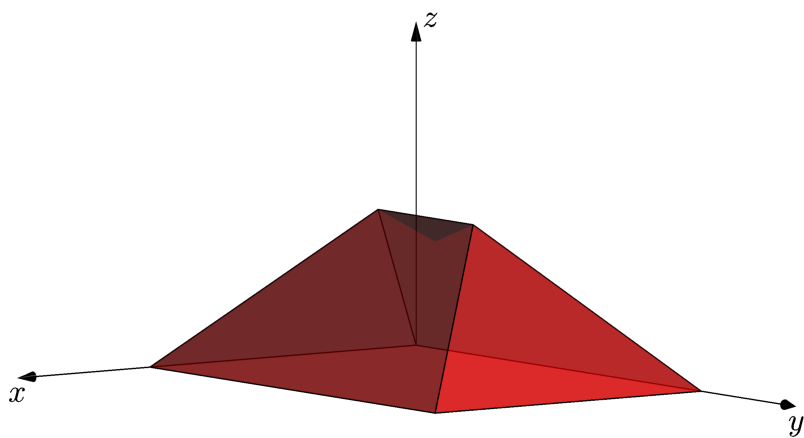


Figura 11.4: Exemplu de figură poliedrală

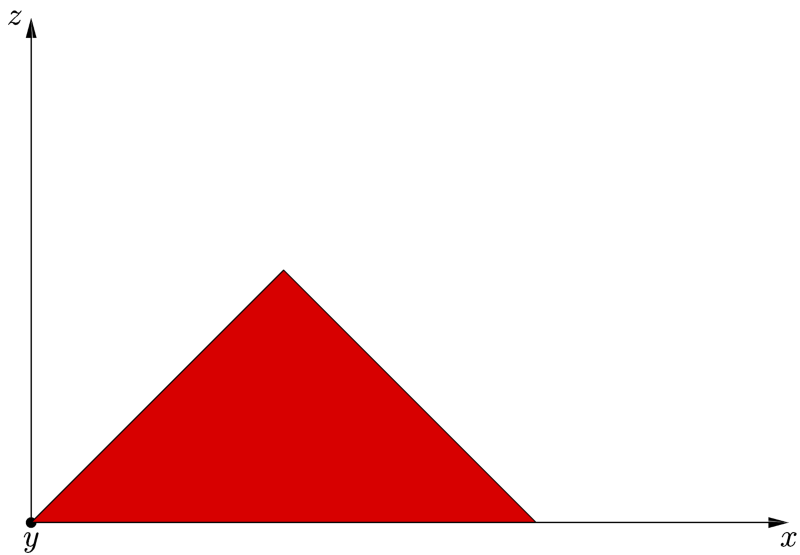


Figura 11.5: Vedere din față

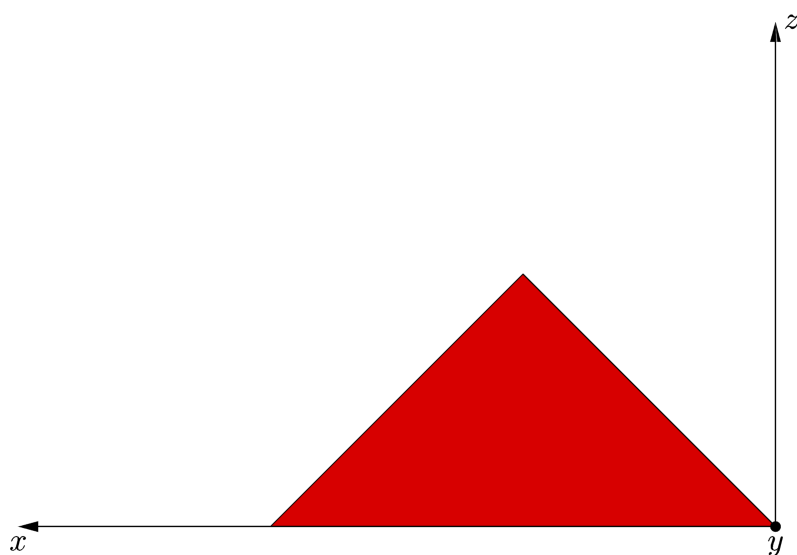


Figura 11.6: Vedere din spate

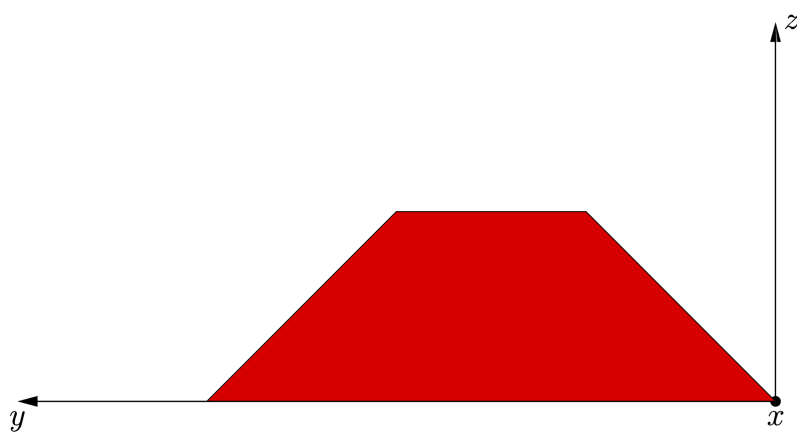


Figura 11.7: Vedere din stânga

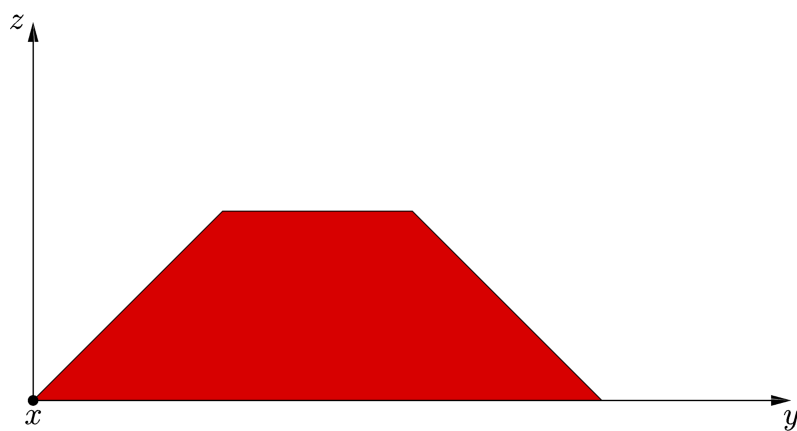


Figura 11.8: Vedere din dreapta

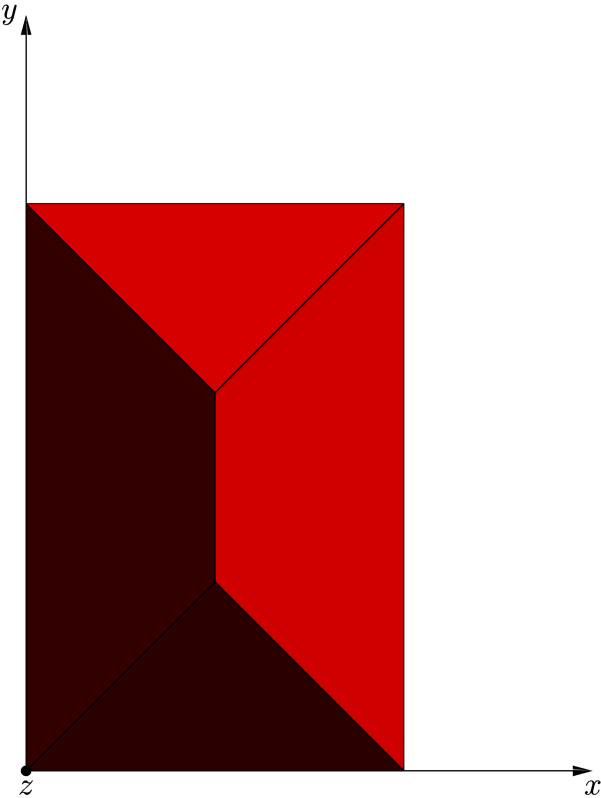


Figura 11.9: Vedere de sus

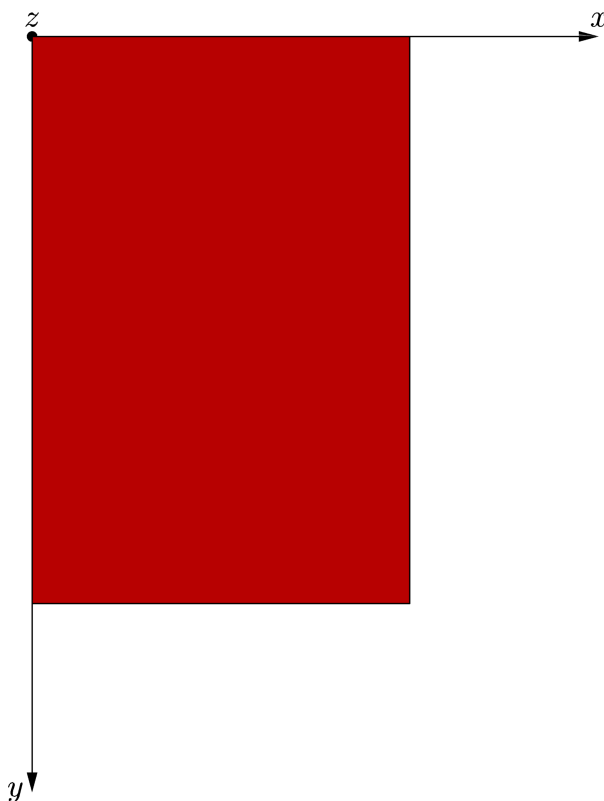


Figura 11.10: Vedere de jos

Proiecții axonometrice

Spre deosebire de proiecțiile multiple, care captează aspectul câte unei fațete plane a obiectului, proiecțiile axonometrice au scopul de a oferi într-o singură reprezentare o imagine cât mai sugestivă a obiectului tridimensional. O proiecție axonometrică este, în esența ei, o proiecție ortogonală după o direcție care nu coincide cu direcția nici uneia dintre axe.

Proiecțiile axonometrice se clasifică după factorii de contracție de-a lungul axelor. Astfel, avem:

- *proiecții trimetrice*, dacă toți cei trei factori de contracție sunt diferiți, ceea ce înseamnă că $|n_1|$, $|n_2|$ și $|n_3|$ sunt trei numere diferite două câte două.

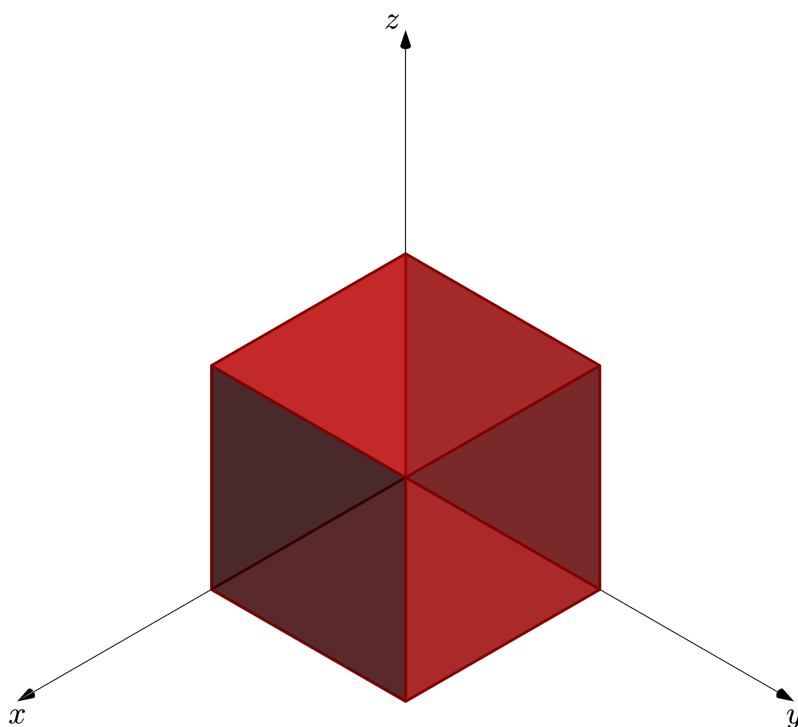


Figura 11.11: Proiecție izometrică a cubului unitate

- *proiecții dimetrice* dacă doar una dintre egalitățile $|n_1| = |n_2|$, $|n_2| = |n_3|$ și $|n_1| = |n_3|$ are loc.
- *proiecții izometrice*, dacă toți cei trei factori de contracție sunt egali: $|n_1| = |n_2| = |n_3|$.

11.4.2 Proiecții oblice

Proiecțiile oblice sunt acele proiecții pentru care direcția de proiecție nu este perpendiculară pe planul de proiecție. Avantajul acestui tip de proiecție este acela că reușește mai bine să redea impresia de adâncime a obiectului. În cazul acestor proiecții, segmentele paralele cu planul de proiecție își păstrează lungimea nemodificată. Printre proiecțiile oblice sunt două care sunt foarte des utilizate și de care ne vom ocupa în continuare.

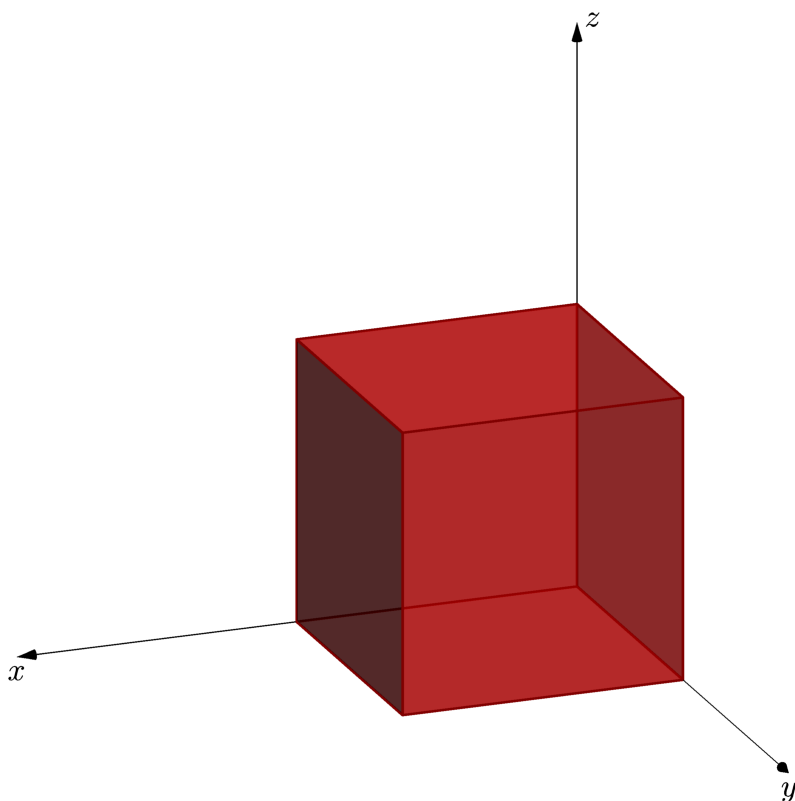


Figura 11.12: Proiecție dimetrică a cubului unitate

Proiecția cavalier (cavalier)

În cazul acestei proiecții, folosită, inițial, la fortificațiile militare, unghiul format de direcția de proiecție și planul de proiecție este egal cu $\pi/4$. Aici și segmentele perpendiculare pe planul de proiecție își păstrează lungimea, ceea ce face ca obiectul să pară mai gros decât este în realitate.

Unghiul dintre vectorul director al direcției de proiecție, (v_1, v_2, v_3) și vectorul normal la plan este egal tot cu $\pi/4$. Pe de altă parte, acest unghi θ satisface relația

$$(v_1, v_2, v_3) \cdot (n_1, n_2, n_3) = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} \cos \theta,$$

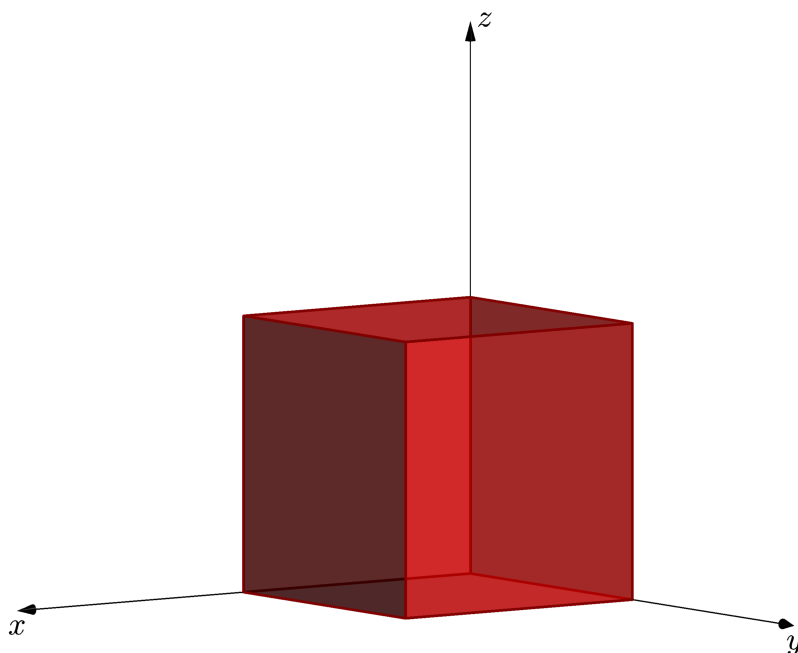


Figura 11.13: Proiecție trimetrică a cubului unitate

deci, în cazul proiecției cavalier, avem

$$v_1 n_1 + v_2 n_2 + v_3 n_3 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}. \quad (11.4.2)$$

Exemplul 11.3. Considerăm un exemplu de proiecție cavalier pe planul xOy . Vectorul omogen asociat planului este $\mathbf{n}(0, 0, 1, 0)$, ceea ce înseamnă că relația (11.4.2) se reduce la

$$v_3^2 = v_1^2 + v_2^2.$$

E ușor să găsim un triplet de numere care verifică această ecuație, de exemplu $(3, 4, 5)$. Atunci matricea transformării va fi

$$M = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0) - 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

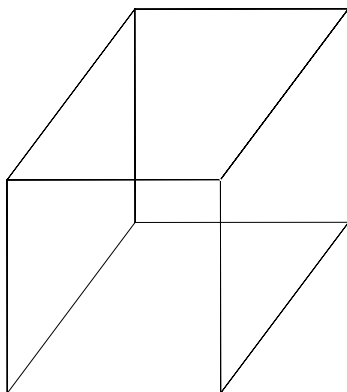


Figura 11.14: Proiecție cavalier

Proiecția cabinet

După cum am spus, proiecția cavalier are neajunsul că mărește prea tare grosimea. O soluție mai bună, din anumite puncte de vedere, este *proiecția cabinet*, folosită destul de mult în industria mobilei (de unde numele). Această proiecție oblică este aleasă astfel încât factorul de contracție pentru segmentele perpendiculare pe planul de proiecție să fie egal cu $1/2$. Prin urmare, tangenta unghiului format de direcția de proiecție cu planul de proiecție trebuie să fie $\tan \phi = 2$, prin urmare

$$\sin \phi = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos \phi = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Unghiul dintre direcția de proiecție și normala la planul de proiecție este

$$\theta = \frac{\pi}{2} \mp \phi,$$

deci

$$\cos \theta = \pm \sin \phi = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Un calcul similar cu cel din cazul proiecției cavalier ne conduce la condiția

$$v_1 n_1 + v_2 n_2 + v_3 n_3 = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}. \quad (11.4.3)$$

Exemplul 11.4. Vom determina, și de această dată, matricea proiecției cabinet pe planul xOy . Ecuația (11.15) devine $v_3^2 = 4(v_1^2 + v_2^2)$ și se observă că o soluție este $(3, 4, 10)$. Atunci matricea proiecției va fi

$$M = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (0 \ 0 \ 1 \ 0) - 10 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -10 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}.$$

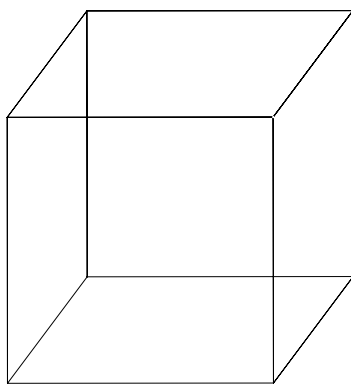


Figura 11.15: Proiecție cabinet

11.4.3 Clasificarea proiecțiilor perspective

Proiecțiile perspective se deosebesc prin numărul *punctelor de fugă* (*vanishing points*) în care se întâlnesc, în planul de proiecție, imagini ale unor drepte care sunt paralele în obiectul tridimensional care se proiectează. Această clasificare se bazează pe următoarea teoremă:

- Teorema 11.3.**
1. *Proiecțiile paralele aplică drepte paralele în spațiu în drepte paralele în planul de proiecție.*
 2. *Proiecțiile perspective aplică linii paralele în spațiu în linii paralele în planul de proiecție dacă și numai dacă liniile paralele din spațiu sunt paralele cu planul de proiecție.*

3. *O proiecție care aplică puncte de la infinit în trei sau mai multe direcții liniar independente în puncte de la infinit este o proiecție paralelă.*

Consecința 11.1. *Considerăm o proiecție perspectivă pe un plan de vector omogen $\mathbf{n}(n_1, n_2, n_3, n_4)$. Atunci vectorul normal la planul de proiecție, (n_1, n_2, n_3) poate*

1. *să nu fie perpendicular pe nici o axă de coordonate. Atunci fiecare dintre familiile de drepte paralele cu una dintre axele de coordonate se transformă într-o familie de drepte neparalele (perspectivă din trei puncte).*
2. *să fie perpendicular pe doar una dintre axe. Atunci dreptele paralele cu acea axă se transformă în drepte paralele, în timp ce dreptele paralele cu celelalte două axe se transformă în două familii de drepte neparalele (perspectivă din două puncte).*
3. *să fie perpendicular pe două dintre axele de coordonate. Atunci dreptele paralele cu aceste două axe se transformă în drepte paralele, iar dreptele paralele cu axa rămasă se transformă în drepte neparalele (perspectivă dintr-un punct).*

Observații. 1) Remarcăm că o familie de drepte paralele se intersectează, de fapt, într-un punct de la infinit. Prin urmare, imaginile lor printr-o proiecție se intersectează, de asemenea, într-un punct situat la infinit, dacă imaginile sunt paralele, sau un punct obișnuit, dacă imaginile nu sunt paralele. Astfel, pentru fiecare dintre cele trei tipuri de proiecții avem fie trei puncte de intersecție, fie două, fie unul. Acest puncte de intersecție a imaginilor dreptelor paralele se numesc *puncte de fugă*.

2) Vectorul normal la planul de proiecție este perpendicular pe o axă de coordonate dacă și numai dacă planul este paralel cu axa de coordonate respectivă. Atunci dreptele paralele cu acea axă rămân paralele prin proiecție. Dacă vectorul normal la planul de proiecție este perpendicular pe două axe de coordonate, el este, de fapt, paralel cu planul de coordonate care conține cele două axe, iar dreptele paralele cu cele două axe rămân paralele prin proiecție.

3) Punctele de fugă determinate de dreptele paralele cu axele de coordonate se numesc *puncte de fugă principale*. Pot exista și alte puncte de fugă, determinate de familii de drepte paralele care nu sunt paralele cu una dintre axele de coordonate.

4) Punctele de fugă determinate de dreptele paralele cu o anumită direcție se obțin, pur și simplu, aplicând proiecția punctului de la infinit de-a lungul acelei familii de puncte paralele. Dacă ceea ce se obține este tot un punct de la infinit (cu zero pe ultima coordonată) atunci dreptele nu determină un punct de fugă (adică ele rămân paralele prin proiecție). Dacă imaginea punctului este un punct ordinar (ultima

coordonată nu este zero), atunci coordonatele carteziene se obțin împărțind primele trei coordonate la cea de-a patra.

Exemplul 11.5. Considerăm un exemplu de proiecție cu un punct de fugă. Planul de proiecție este planul xOy , iar centrul de proiecție are coordonatele $(-1, 0, 2)$. Atunci avem $\mathbf{n}(0, 0, 1, 0)$ și $\mathbf{V}(-1, 0, 2, 1)$. Atunci matricea de proiecție este

$$M = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (0 \ 0 \ 1 \ 0) - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Imaginea cubului unitate prin această proiecție se poate vedea în figura 11.16.

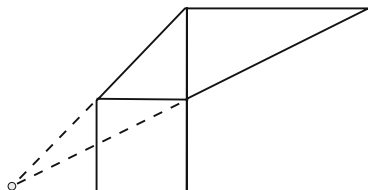


Figura 11.16: Proiecție perspectivă cu un punct de fugă

Punctul de la infinit este punctul de coordonate $(-1, 0, 0)$

Exemplul 11.6. Dăm acum un exemplu de proiecție perspectivă cu două puncte de fugă. Centrul de proiecție este același punct de coordonate $(-1, 0, 2)$, dar planul de proiecție este planul $x - z = 0$. Atunci avem $\mathbf{n}(1, 0, -1, 0)$ și $\mathbf{V}(-1, 0, 2, 1)$, deci matricea de proiecție este

$$M = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 0 \ -1 \ 0) - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Imaginea cubului unitate prin această proiecție se poate vedea în figura 11.17. Punctele de fugă sunt punctele $(2, 0, 2)$ și $(-1, 0, -1)$.

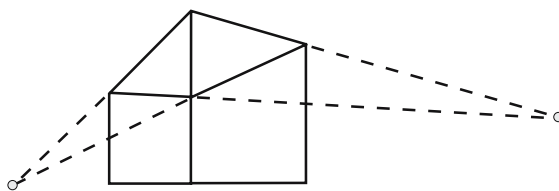


Figura 11.17: Proiecție perspectivă cu două puncte de fugă

Exemplul 11.7. Acesta este un ultim exemplu, de data asta e vorba de o proiecție cu trei puncte de fugă. Centrul de proiecție este același, dar planul este planul de ecuație $x + 2y - z - 3 = 0$. Prin urmare, avem $\mathbf{n}(1, 2, -1, -3)$ și $\mathbf{V}(-1, 0, 2, 1)$, deci matricea de proiecție este

$$M = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (1 \quad 2 \quad -1 \quad 3) + 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Imaginea cubului unitate prin această proiecție se poate vedea în figura 11.18. Punctele de fugă sunt punctele $(5, 0, 2)$, $(-1, 3, 2)$ și $(-1, 0, -4)$.

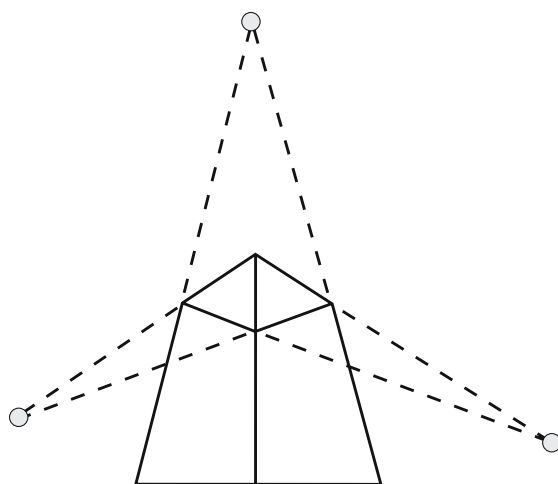


Figura 11.18: Proiecție perspectivă cu trei puncte de fugă

Bibliografie

- [1] Anand, V.B., *Computer Graphics and Geometric Modeling for Engineers*, John Wiley & Sons, 1993
- [2] Andrica, D., Topan, L., *Analytical Geometry*, Cluj University Press, 2005
- [3] Blaga, P.A., *Lectures on Classical Differential Geometry*, Risoprint, 2005
- [4] Boehm, W., Prautzsch, H., *Geometric Foundations of Geometric Design*, AK Peters, 1992
- [5] Farin, G., *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*, 4th edition, Academic Press, 1997
- [6] Fenn, R., *Geometry*, Springer, 2001
- [7] Foley, J.D., van Dam, A., Feiner, S.K., Hughes, J.F., *Computer Graphics – Principles and Practice*, 2nd edition, Addison-Wesley, 1990
- [8] Gallier, J., *Geometric Methods and Applications for Computer Science and Engineering*, Springer, 2000
- [9] Hoggar, S.G., *Mathematics for Computer Graphics*, Cambridge University Press, 1992
- [10] Mortenson, M., *Geometric Modeling*, Wiley, 1985

- [11] Mortenson, M., *Computer Graphics – An Introduction to the Mathematics and Geometry*, Industrial Press Inc., 1989
- [12] Plastock, R.A., Kalley, G., *Schaum's Outline of Theory and Problems of Computer Graphics*, McGraw-Hill Publishing Company, 1986
- [13] Rogers, D.F., Adams, J.A., *Mathematical Elements for Computer Graphics*, 2nd edition, McGraw Hill, 1990
- [14] Salomon, D., *Curves and Surfaces for Computer Graphics*, Springer, 2006
- [15] Salomon, D., *Transformations and Projections in Computer Graphics*, Springer, 2006
- [16] Schneider, P.J., Eberly, D.H., *Geometric Tools for Computer Graphics*, Elsevier, Morgan Kaufmann Publishers, 2003
- [17] Sharma, A.K., *Encyclopedia of Analytical Geometry*, vol. 1–3, Dominant Publishers and Distributors, New Delhi, 2001
- [18] Snyder, V., Sisam, C.H., *Analytic Geometry of Space*, Henry Holt and Company, 1914
- [19] Taylor, W.T., *The Geometry of Computer Graphics*, Wadsworth & Brooks/Cole, 1992