

Examen Sisteme dinamice

1p oficiu

Exercițiul 1 (0,5p) Se consideră modelul lui Malthus de creștere a unei populații

$$\begin{cases} x'(t) = r \cdot x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Determinați rata de creștere r știind că mărimea populației la momentul inițial este $x_0 = 1000$ iar după 10 ani mărimea populației este $x_1 = 50000$.

Exercițiul 2 Determinați soluțiile generale pentru ecuațiile:

(a) (0,5p) $x^2 y' = xy + y^2$

(b) (1p) $y'' - 4y' + 8y = (25x - 5)e^x$

Exercițiul 3 (1p) Determinați soluția problemei Cauchy:

$$\begin{cases} xy'' + y' = 4x \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 4 \end{cases}$$

Exercițiul 4 (0,5p) Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} x'(t) = -x + e^x y \\ y'(t) = -e^x x - y \end{cases}$$

Să se studieze stabilitatea punctului de echilibru $X^*(0,0)$ utilizând funcția de tip Lyapunov

$$V(x, y) = x^2 + y^2.$$

Exercițiul 5 (1p) Să se determine și să se studieze stabilitatea punctelor de echilibru pentru ecuația

$$x' = a \cdot x^2 - x^3 - a + x,$$

unde a parametru real.

Exercițiul 6 (1p) Se consideră problema Cauchy

$$\begin{cases} y' = 3x^2 + xy^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Scrieți ecuația integrală Volterra echivalentă cu problema Cauchy, formula șirului aproximațiilor succesive și pentru funcția de start $y_0(x) \equiv 1$ calculați primele două aproximații succesive.

Exercițiul 7 Se consideră sistemul

$$\begin{cases} x'(t) = -4y(t) \\ y'(t) = x(t) \end{cases}$$

Se cere:

(a) (1p) Să se determine fluxul

(b) (0,5p) Să se determine portretul fazic și să se precizeze stabilitatea și tipul punctului de echilibru $(0;0)$.