Cap II . DETERMINANŢI

Fiecărei **matrice pătrate** i se asociază **un număr** ce depinde de coeficienţii matricei, numit ***determinant.***

Determinanţii îşi vor dovedi utilitatea în problema inversabilităţii matricelor, în rezolvarea sistemelor şi în aplicaţii geometrice.

DETERMINANTUL DE ORDINUL DOI ŞI TREI. PROPRIETĂŢI.

1. Determinantul de ordinul doi

Să considerăm un sistem format din două ecuaţii liniare cu două necunoscute.

Forma generală a unui astfel de sistem este $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$

în ipoteza că : $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$

folosind metoda reducerii sau substituţiei, găsim soluţia unică: $x_1 = \dfrac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}, x_2 = \dfrac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$

Observăm că x_1 şi x_2 au acelaşi numitor.
Considerăm matricea coeficienţilor (matricea sistemului): $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

şi observăm că expresia ce apare la numitori este egală cu diferenţa dintre produsul elementelor diagonalei principale şi produsul elementelor diagonalei secundare a acestei matrice.

Acest număr $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ reprezintă, prin definiţie, determinantul matricei *A.*

Definiţie:

Determinantul matricei $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ este **numărul complex**,notat **detA**, definit prin relaţia:

$$\boxed{\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

numit determinant de ordinul 2

se mai notează: $\boxed{\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$

Regula lui Cramer *(pentru sistemul de două ecuaţii liniare cu două necunoscute)*

Folosind noţiunea de determinant ataşat unei matrice pătrate de ordinul al doilea, rezultă următoarea:

dacă $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ atunci sistemul: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ are soluţie unică (x_1,x_2) dată de formulele:

$$\boxed{x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}; x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}}$$

Pentru a reţine regula,
remarcăm că **la numitori** se află **determinantul matricei sistemului**,
iar **la numărători,** determinanţii matricelor ce se obţin din matricea sistemului **înlocuind prima, respectiv a doua coloană prin coloana termenilor liberi**.

Probleme rezolvate:

1.) Calculaţi: $\begin{vmatrix} 2+i & -5 \\ 3 & 2-i \end{vmatrix}$

Soluţie:

$$\begin{vmatrix} 2+i & -5 \\ 3 & 2-i \end{vmatrix} = (2+i)(2-i) - (-5)\cdot 3 = 20.$$

2.) Folosind regula lui *Cramer,* rezolvaţi sistemul: $\begin{cases} x\sqrt{2} + 3y = 5 \\ 3x - y\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \end{cases}$

Soluţie: Determinantul matricei coeficienţilor este $\det A = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 3 \\ 3 & -\sqrt{2} \end{vmatrix} = -11 \neq 0$ putem aplica regula lui *Cramer* şi obţinem:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 3 \\ 3 & -\sqrt{2} \end{vmatrix}} = \sqrt{2};\ y = \frac{\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 5 \\ 3 & 2\sqrt{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 3 \\ 3 & -\sqrt{2} \end{vmatrix}} = 1$$

3.) Fie *X,* o matrice pătrată de ordinul doi. Demonstraţi că:

$$\boxed{X^2 - (TrX)X + (\det X)I_2 = O_2}$$

Soluţie: $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow X^2 - (TrX)X + (\det X)I_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ca+dc & ad+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$$

Observaţie. Relaţia demonstrată este un caz particular al unei teoreme importante a algebrei liniare, teorema lui *Hamilton-Cayley.*

2. Determinantul de ordinul trei

Definiţie:

Determinantul matricei $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ este **numărul complex** , **detA**

definit prin relaţia: $$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{23}a_{32}a_{22}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

Observaţie. Definiţia este motivată de următoarele consideraţii legate de rezolvarea sistemului de trei ecuaţii cu trei necunoscute

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

Sistemul se rezolvă prin metoda reducerii.
Se reduce x_3 între primele două ecuaţii şi între ultimele două ecuaţii.
Se obţin astfel două ecuaţii liniare în x_1 şi x_2, care se rezolvă prin metoda reducerii.

Se obţine pentru x_1 valoarea: $$x_1=\frac{b_1a_{22}a_{33}+b_2a_{32}a_{13}+b_3a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}b_3-a_{23}a_{32}b_1-a_{12}b_2a_{33}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{23}a_{32}a_{22}-a_{12}a_{21}a_{33}}$$

cu condiţia ca numitorul să fie nenul.
Expresia de la numitor este, prin definiţie determinantul matricei *A* a sistemului.

Observând că, formal, numărătorul se obţine din numitor înlocuind a_{11} , a_{21}, a_{31} respectiv prin b_1 , b_2 şi b_3, tragem concluzia că numărătorul reprezintă determinantul matricei ce se obţine din matricea sistemului, înlocuind prima coloană cu coloana termenilor liberi.
Procedând asemănător se obţin x_2 şi x_3.

Regula lui Cramer *(**sistemul de trei ecuaţii liniare cu trei necunoscute**)*

Dacă: $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$,atunci sistemul: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$

are soluţie unică (x_1, x_2, x_3) dată de formulele:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}; x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}; x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

Reguli de calcul pentru determinanţii de ordinul 3

Deoarece formula prin care s-a definit determinantul de ordinul trei **nu poate fi memorată cu uşurinţă**, există reguli practice, uşor de aplicat, pentru calculul acestui determinant.

1 • Regula lui *Sarrus*

Pentru a calcula determinantul $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

alcătuim un tablou în care **adăugăm** dedesubtul celor trei linii ale determinantului, **primele două linii.**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

Scriem, **cu semnul +,** produsul elementelor de pe diagonala principală $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$ şi încă două produse $a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13}$ *şi* $a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23}$, corespunzând direcţiilor paralele cu diagonala principală.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

Scriem apoi, **cu semnul - ,** produsul elementelor de pe diagonala secundară $a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$ şi încă două produse $a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11}$ şi $a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21}$ corespunzând direcţiilor paralele cu diagonala secundară.

În practică ,procedăm direct:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = + a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21}$$
$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

2· Regula *triunghiului*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Scriem, **cu semnul +,** produsul elementelor de pe diagonala principală $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$ şi încă două produse $a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13}$ şi $a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}$, care se obţin alcătuind două triunghiuri care au câte o latură paralelă cu diagonala principală şi celălalt vârf, în colţul opus al determinantului.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Scriem apoi **cu semnul - ,** produsul elementelor de pe diagonala secundară $a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$ şi încă două produse $a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$ şi $a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11}$, care se obţin alcătuind două triunghiuri, care au câte o latură paralelă cu diagonala secundară şi celălalt vârf, în colţul opus al determinantului.

În practică ,procedăm direct:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = + a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21}$$

Observaţie: **(determinantul de ordinul 1)**

O matrice pătrată de ordinul 1 este de forma $\boldsymbol{A = (a_{11})}$. Prin definiţie, determinantul ei este: $\mathbf{det A = a_{11}}$

Problema rezolvată.

Calculaţi determinantul matricei $A \in M_3(R), A = (a_{ij}), unde: a_{ij} = i + j - 1, \forall (i, j) \in \{1,2,3\} x \{1,2,3\}$

Soluţie. $a_{11} = 1 + 1 - 1 = 1$, $a_{12} = 1 + 2 - 1 = 2$ etc.

Obţinem : $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

folosind regula lui *Sarrus* sau regula triunghiului, avem

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}$$
$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{matrix}$$

$= 1 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 4 - 3 \cdot 3 \cdot 3 - 4 \cdot 4 \cdot 1 - 5 \cdot 2 \cdot 2 = 0.$

3. Dezvoltarea unui determinant după o linie sau o coloană

Vom arăta un procedeu prin care calculul unui determinant de ordinul 3 se reduce la calculul unor determinanţi de ordinul 2.

Este necesar mai întâi să definim **minorul** corespunzător **unui element** al unui determinant şi **complementul algebric** al **unui element** al unui determinant.

Definiţie: Fie determinantul de ordinul 3 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ şi a_{ij} , un element fixat al său.

- **Se numeşte *minor* corespunzător elementului a_{ij} , determinantul d_{ij} , care se obţine înlăturând din determinantul dat, linia i şi coloana j.**

- **Se numeşte complement algebric al elementului aij , numărul**

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot d_{ij}$$

Exemplu. **Minorul** corespunzător elementului a_{32} al determinantului

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} este: d_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

obţinut prin înlăturarea liniei a treia şi coloanei a doua.

Complementul algebric al elementului a_{32} este $A_{32} = (-1)^{3+2} d_{32} = - d_{32}$.

Teoremă:

Determinantul unei matrice $A \in M_3(C)$ este egal cu **suma produselor dintre elementele unei linii (coloane) şi complemenţii algebrici ai acestor elemente.**

Calculul determinantului prin procedeul dat de această teoremă se numeşte **dezvoltarea determinantului după o linie sau coloană**

Astfel, considerând matricea $\mathbf{A = (a_{ij})}$, **dezvoltarea** determinantului său **după linia *i*** este: $\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}$

iar **dezvoltarea după coloana j** este $\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j}$

Deci, calculul unui determinant de ordinul 3 revine la calculul unor determinanţi de ordinul 2.

Evident, pentru uşurinţa calculului, dacă determinantul are elemente nule, **este avantajos să-l dezvoltăm** după o linie sau coloană **care conţine cât mai multe zerouri.**

Problemă rezolvată. Calculaţi

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Soluţie. Dezvoltând determinantul după linia a doua, avem $D = 0 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \ldots = 0$

EXERCIŢII DE INIŢIERE

1.) Se consideră matricele ∈ ***A, B M$_2$(R),*** $A=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 1 & 7\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 3\\ -1 & 4\end{pmatrix}$ **Calculaţi detA, detB şi det(A +*B)***

2.) Aflaţi valorile lui *x* astfel încât: $\begin{vmatrix}x & 2\\ 1 & x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 1\\ -2 & 4\end{vmatrix}$

3.) Fie matricele $A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ **Stabiliţi dacă există *α, β* reale astfel încât: det(αA +βB) = αdetA + βdetB.**

4.) Aplicând regula lui *Sarrus,* calculaţi determinanţii: $\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}1 & 5 & 0\\ 2 & 1 & 4\\ -1 & 0 & 5\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}2 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 9\\ 3 & 1 & 0\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}1 & 2 & 9\\ 2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix};$

5.) Aplicând regula triunghiului, calculaţi determinanţii: $\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}2 & 5 & 1\\ 2 & 0 & 4\\ 1 & 3 & 5\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}-1 & 4 & -1\\ 0 & 0 & 9\\ 3 & 1 & 0\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 4 & 8\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix};$

6.) Rezolvaţi sistemele următoare, folosind regula lui *Cramer:*

$$\begin{cases}3x-7y=4\\ 2x-3y=1\end{cases};\quad \begin{cases}5x+4y=2\\ 6x+5y=3\end{cases};\quad \begin{cases}4x-5y=0\\ x+y=2\end{cases};\quad \begin{cases}2x-3y=1\\ 2x-5y=11\end{cases};\quad \begin{cases}3x-2y=5\\ 2x-y=1\end{cases};\quad \begin{cases}3x+10y=26\\ 10x+3y=26\end{cases};$$

Prof:Ciocotişan Radu

PROBLEME ♦ PROBLEME ♦ PROBLEME

1.) Calculaţi determinanţii de ordinul 2 , ($i^2 = -1$)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 10 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \sqrt{3}+\sqrt{2} & \sqrt{6} \\ 2 & \sqrt{3}+\sqrt{2} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1+i & 2-i \\ -i & -2i \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \log_2 3 & \log_2 5 \\ 1 & \log_2 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \log_2 3 & 1 \\ 2 & \log_3 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \cos\frac{\pi}{12} & \sin\frac{\pi}{12} \\ \sin\frac{\pi}{12} & \cos\frac{\pi}{12} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & \sin\frac{\pi}{8} \\ \cos\frac{\pi}{8} & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \sin x + i\cos x & \sqrt{2}\cos x \\ \sqrt{2}\cos x & \sin x - i\cos x \end{vmatrix}, \ x \in R$$

2.) Calculaţi determinanţii (în *două moduri):*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -i & i \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ i & i & i \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1+i \\ 1+i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \end{vmatrix},$$

3.) Dacă $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$, calculaţi determinanţii: $\begin{vmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & \varepsilon^2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & \varepsilon & -\varepsilon \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \end{vmatrix},$

4.) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţiile

$$a) \begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ 1 & x+1 \end{vmatrix} = 0; b) \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ -2 & x \end{vmatrix} = 0; \quad c) \begin{vmatrix} x-3 & 0 & 0 \\ x^2 & x & x+1 \\ x^4 & x+2 & x+3 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 0 & x+1 & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$$

5.) Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Calculaţi : $\det(A^{10})$ şi $\det\left(\sum_{k=1}^{8} A^k\right)$

6.) Calculaţi determinantul matricei $A=(a_{ij})\in M_3(R)$ $dacă:$

$a) a_{ij}=i+j, \forall i,j=\overline{1,3};$ $b) a_{ij}=i\cdot j, \forall i,j=\overline{1,3};$ $c) a_{ij}=\max(i,j), \forall i,j=\overline{1,3};$

$d) a_{ij}=\min(i,j), \forall i,j=\overline{1,3};$ $e) a_{ij}=|2i-j|, \forall i,j=\overline{1,3};$

7.) Folosind regula lui *Cramer,* rezolvaţi în RxR, sistemele:

$a)\begin{cases} 2x+3y=-1 \\ 3x+2y=1 \end{cases};$ $b)\begin{cases} (\sqrt{3}-2)x+y=\sqrt{3}-4 \\ 3x+(\sqrt{3}+2)y=3-2\sqrt{3} \end{cases};$ $\begin{cases} x\cos a-y\sin a=1 \\ x\sin a+y\cos a=1 \end{cases}$

8.) Folosind regula lui *Cramer,* rezolvaţi în CxC, sistemele:

$a)\begin{cases} ix+y=2 \\ 3x-iy=0 \end{cases};$ $b)\begin{cases} 2x+7y=i \\ 3x+10y=0 \end{cases};$ $\begin{cases} (1+i)x+y=i \\ 3x+(1-2i)y=-i \end{cases}$

9.) Se consideră matricea:

$A=\begin{pmatrix} 2006 & 2007 \\ -2005 & -2006 \end{pmatrix}$

a) Aflaţi urma şi determinantul matricei.
b) Calculaţi A^2 şi A^{2007}.

10.) Fie $A=\begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) Arătaţi că: $A^2 - A + I_2 = O_2$
b) Deduceţi că: $A^3 = -I_2$
c) Calculaţi : $\det(A^6)$
d) Calculaţi: A^{2007}

11.) Notăm cu *M* - mulţimea tuturor matricelor pătrate de ordinul doi, care au ca elemente, numere distincte din mulţimea {1, 2, 3, 4}.

a) Câte matrice există în mulţimea *M* ?
b) Aflaţi valoarea maximă pe care o poate avea determinantul unei matrice din mulţimea *M.*
c) Demonstraţi că toate matricele din mulţimea *M* au determinantul diferit de zero.
d) Daţi exemplu de matrice $X \in M$ *cu* proprietatea $X^2 - 7X + 10I_2 = 0_2$

Prof:Ciocotişan Radu

12.) **Demonstraţi că dacă o matrice *A e* $M_3(R)$ are toate elementele de pe diagonala principală egale cu 1, iar suma elementelor de pe flecare linie şi fiecare coloană este egală cu 3, atunci :** $\det A \geq 0$