1

Recapitulare calcul matricial şi sisteme de ecuaţii liniare-Liceu

1.1 Matrici. Operaţii cu matrici

O matrice de elemente reale, cu m linii şi n coloane este "un tablou" ce are înregistrat în linia i, coloana j, un număr real, notat a_{ij}:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

• Mulţimea matricilor A, de elemente reale, de tip $m \times n$ se notează $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.
• Dacă numărul de linii este egal cu numărul de coloane, atunci matricea se numeşte **matrice pătratică**.
• Mulţimea matricilor pătratice de n linii şi n coloane se notează $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Exemple de matrici:

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 11 & 34 & 27 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 51 \\ -12 \\ 13 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 7 & -4 & 5 \\ 0 & 8 & 11 \end{bmatrix}$$

Matricea nulă. O matrice $\mathcal{O}$ de tip $m \times n$ care are toate elementele egale cu zero se numeşte matricea nulă.

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$$

O matrice pătratică particulară este **matricea unitate**:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Matricea unitate are elementele de pe diagonala principală egale cu 1 şi restul sunt egale cu 0.

Adunarea matricilor. Două matrici $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ având acelaşi număr de linii şi coloane se adună astfel: Suma $C = A + B$ este o matrice cu acelaşi număr de linii şi coloane ca A şi B, iar un element arbitrar al sumei este:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Exemplul 1.

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 6 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 14 & 9 \\ 7 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 14 \\ 23 & 15 \\ 9 & 25 \end{bmatrix}$$

Suma unei matrici A cu matricea nulă de acelaşi tip este $A + \mathcal{O} = \mathcal{O} + A = A$.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

Produsul dintre o matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}$ **şi un număr real** α este o matrice $P = (p_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}$ ale cărei elemente p_{ij} se calculează astfel: $\boxed{p_{ij} = \alpha a_{ij}}$, $\forall\ i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$. În cuvinte, se înmulţeste fiecare element al matricii A cu numărul α.

Exemplul 2.

$$-2 \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ -12 & -4 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$$

Produsul a două matrici Pentru orice două matrici A, B cu particularitatea că numărul de coloane al primei matrici coincide cu numărul de linii al celei de-a doua, adică A este de tip $m \times p$, iar B de tip $p \times n$, definim **matricea produs**, ca fiind matricea $C = AB$, de m linii linii şi n coloane, alecărei elemente c_{ij}, se determină astfel:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}, \tag{1.2}$$

adică:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{i1} & \dots & \mathbf{c_{ij}} & \dots & c_{in} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{a_{i1}} & \cdots & \mathbf{a_{ik}} & \cdots & \mathbf{a_{ip}} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & \mathbf{b_{1j}} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{k1} & \dots & \mathbf{b_{kj}} & \dots & b_{kn} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{p1} & \dots & \mathbf{b_{pj}} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix}$$

Remarcăm că pentru a calcula elementul din poziţia (i, j) a matricii produs, înmulţim elementele corespunzătoare din linia i a matricii A cu elementele coloanei j a matricii B şi adunăm produsele.

Exemplul 3. Să calculăm produsul AB, unde $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, iar $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$AB = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2)\cdot 1 + 1(-5) & (-2)\cdot 3 + 1 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1(-5)\cdot(-5) & 3\cdot 3 + (-5)\cdot 2 \\ 0\cdot 1 + 4\cdot(-5) & 0\cdot 3 + 4 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -4 \\ 28 & -1 \\ -20 & 8 \end{bmatrix}$$

Produsul dintre matricea unitate I_n şi o matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este $AI_n = I_nA = A$.

Analog:

$$I_n \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Transpusa unei matrice Fie A o matrice de tip $m \times n$, $A = (a_{ij})$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Transpusa sa este o matrice de tip $n \times m$, notată A^T, de elemente $b_{ij} = a_{ji}$, $\forall\ i, j$. Cu alte cuvinte, linia i a matricii A este coloana i în transpusă, $i = \overline{1,m}$.

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Proprietăţi ale operatorului de transpunere

1 $(A^T)^T = A$.
2 $(AB)^T = B^TA^T$, oricare ar fi A, B două matrici ce se pot înmulţi.
Un caz particular al proprietăţii **2** pe care-l vom folosi adesea este următorul:
Dacă A este o matrice pătratica de tip $n \times n$ şi x este o matrice coloana, atunci:

$$\left(A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \right)^T = x^TA^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} A^T$$

De exemplu:

$$\left(\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

1.2 Determinantul unei matrici pătratice

Determinantul unei matrici pătratice, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, este un număr real ce se notează:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Calculul determintului de **ordin 2** (al unei matrici de 2 linii şi 2 coloane):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - ((-3) \cdot 4) = 10 - (-12) = 10 + 12 = 22.$$

Un determinant de **ordin 3** se calculează folosind fie regula lui **Sarrus**, fie **regula triunghiului**.

Pentru a calcula valoarea determinantului folosind regula lui Sarrus se copiază linia 1 şi apoi linia 2 sub linia 3 a determinantului şi se efectuează calculele astfel:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} +$$
$$+ a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{13}$$

Ultimul membru al egalităţii de mai sus exprimă regula triunghiului. Termenii cu semnul + în faţă se obţin efectuând produsele elementelor de aceeaşi culoare din:

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_{11} & \mathfrak{a}_{12} & \mathfrak{a}_{13} \\ \mathfrak{a}_{21} & \mathfrak{a}_{22} & \mathfrak{a}_{23} \\ \mathfrak{a}_{31} & \mathfrak{a}_{32} & \mathfrak{a}_{33} \end{vmatrix}$$

iar termenii cu semnul - se obţin efectuând la fel produsele elementelor de aceeaşi culoare din:

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_{11} & \mathfrak{a}_{12} & \mathfrak{a}_{13} \\ \mathfrak{a}_{21} & \mathfrak{a}_{22} & \mathfrak{a}_{23} \\ \mathfrak{a}_{31} & \mathfrak{a}_{32} & \mathfrak{a}_{33} \end{vmatrix}$$

O matrice pătratică A al cărei determinant este zero se numeşte **matrice singulară**. Dacă determinantul este diferit de zero, matricea se numeşte **matrice nesingulară**.

Calculul determinanţilor de ordin mai mare decât 3

- Se bazează pe noţiunea de minor al unui element.

Definiţia 1.2.1 *Fie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ o matrice pătratică, $A = (a_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$. Fiecărui element $a_{k\ell}$ din matrice i se asociază un determinant de ordin $n-1$ notat $M_{k\ell}$, obţinut prin eliminarea liniei k şi coloanei ℓ din det(A). Determinantul $M_{k\ell}$ se numeşte minorul elementului a_{kl}.*

Exemplul 4. Constituirea minorului M_{23} în determinantul

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{a_{13}} & a_{14} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & \mathbf{a_{23}} & \mathbf{a_{24}} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & \mathbf{a_{43}} & a_{44} \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Ştiind să calculăm un determinant de ordin 3, un determinant de ordin 4 se calculează dezvoltându-l după o linie i (sau o coloană j) astfel:

$$\text{det}(A) = a_{i1}(-1)^{i+1}M_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2}M_{i2} + a_{i3}(-1)^{i+3}M_{i3} + a_{i4}(-1)^{i+4}M_{i4},$$

Exemplul 5. Să dezvoltăm următorul determinant după elementele liniei 3:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ \mathbf{0} & \mathbf{-6} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ 3 & 7 & -9 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\underbrace{0(-1)^{3+1}M_{31}}_{=0} -6(-1)^{3+2}M_{32} + 1(-1)^{3+3}M_{33} - 2(-1)^{3+4}M_{34} =$$

$$6\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 5 \\ 3 & -9 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 7 & -9 \end{vmatrix}$$

1.3 Proprietăţi ale determinanţilor

Fie D determinantul unei matrici pătratice de n linii şi n coloane. Notăm cu L_i, L_j două linii distincte ale determinantului.

Proprietăţile determinanţilor

1. Dacă se schimbă două linii între ele, atunci determinantul schimbă semnul.

Simbolizăm prin $L_i \leftrightarrow L_j$ schimbarea liniilor i şi j între ele.

Exemplul 6. Fie determinantul

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

Efectuând schimbarea $L_2 \leftrightarrow L_3$ obţinem determinantul

$$D' = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -2 = -D$$

2. Dacă se înmulţeste o linie a unui determinant cu un număr, atunci valoarea determinantului se înmulţeste cu numărul respectiv.

De exemplu în determinantul D, de mai sus, înmulţim linia 2 cu 3 şi rezultatul îl rescriem în linia 2 a unui nou determinant D'' şi obţinem:

$$D'' = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3\cdot 3 & 3\cdot 1 & 3\cdot(-4) \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 9 & 3 & -12 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3D = 6$$

3. Dacă se înmulţeste o linie a determinantului cu un număr şi se adună la o altă linie, valoarea determinantului nu se schimbă.

În determinantul D de mai sus, înmulţim linia 1 cu 3 şi o adunăm la linia 2, rezultatul fiind înregistrat în linia 2, $3L_1 + L_2 \to L_2$, şi avem:

$$D''' = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = D = 2$$

Aceste proprietăţi ale determinanţilor sunt foarte utile în calculul determinanţilor de ordin mai mare decat 3, pentru care nu avem o regula ca Sarrus sau regula triunghiului, ci se dezvoltă determinantul după elementele unei linii sau coloane.

Exemplul 7. Pentru a calcula determinantul

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

am putea dezvolta după elementele coloanei 1 şi atunci:

$$D = (-1)^{1+1}1 \cdot M_{11} + (-1)^{2+1}3M_{12} + (-1)^{1+3}2M_{13} + (-1)^{1+4} \cdot 1M_{14}$$

Deci practic am reduce calculul lui D la calculul a 4 determinanţi de ordinul trei, $M_{11}, M_{12}, M_{13}, M_{14}$, ceea ce ar presupune calcule multe. Pentru a evita calculul celor 4 determinaţi de ordinul 3, aplicăm proprietatea 3 a determinanţilor pentru a transforma elementele coloanei 1, de sub $a_{11} = 1$ în zerouri.

Observăm că aplicând succesiv operaţiile:

$$-3L_1 + L_2 \to L_2, \quad -2L_1 + L_3 \to L_3, \quad -1L_1 + L_4 \to L_4$$

obţinem aceeaşi valoare a determinantului şi anume:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & -10 & 7 & 8 \\ 0 & -5 & 1 & 7 \\ 0 & -5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -10 & 7 & 8 \\ -5 & 1 & 7 \\ -5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 0 \cdot M_{12} + (-1)^{1+3} \cdot 0 \cdot M_{13} + (-1)^{1+4} \cdot 0 \cdot M_{14}$$

Deci practic am redus calculul determinantului de ordin 4 la calculul unui singur determinant de ordin 3.

Observaţie: Operaţiile asupra liniilor unui determinant se pot alege şi pentru a transforma în zerouri elementele altei coloane nu neapărat coloana 1. De exemplu pentru determinantul D cu care am lucrat era mai simplu dacă în coloana 3 formam zerouri în liniile 1,2 şi 4, efectuând operaţiile:

$$-7L_3 + L_2 \to L_2, \quad -4L_3 + L_4 \to L_4$$

şi obţineam:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ -11 & -8 & 0 & -19 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ -7 & -6 & 0 & -11 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -11 & -8 & -19 \\ -7 & -6 & -11 \end{vmatrix}$$

1.4 Calculul inversei unei matrici nesingulare

O matrice pătratică, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, care are determinantul diferit de zero se numeşte matrice nesingulară şi ea este inversabilă, adică există o matrice notată A^{-1}, cu proprietatea că:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n,$$

unde I_n este matricea unitate, adică matricea:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Etapele de calcul a inversei unei matrici A

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

• se calculează determinantul matricii; dacă det$(A) = 0$ matricea nu este inversabilă. În caz contrar se trece la etapa următoare;

• se determină transpusa matricii A,

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

• se calculează adjuncta matricii A, adică matricea pătratică notată A^*, de elemente $a^*_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, unde M_{ij} este minorul elementului din poziţia (i, j) a transpusei;

• $A^{-1} = \dfrac{1}{\text{det}(A)} A^*$

Exemplul 8. Să se verifice dacă matricea

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

este nesingulară şi dacă da, să se calculeze inversa ei.

• det$(A) = -1 \neq 0 \quad \Rightarrow A$ este nesingulară

• $A^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$

• Să calculăm explicit câteva elemente din adjuncta, A^*:

$$a^*_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 19$$

$$a^*_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -(-3) = 3$$

etc

Efectuând calculul tuturor elementelor avem:

$$A^* = \begin{bmatrix} 19 & 3 & 12 \\ 11 & 2 & 7 \\ 6 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

şi deci:

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}A^{*} = -A^{*} = \begin{bmatrix} -19 & -3 & -12 \\ -11 & -2 & -7 \\ -6 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

Verificare:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -19 & -3 & -12 \\ -11 & -2 & -7 \\ -6 & -1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.5 Sisteme de ecuaţii liniare

Un sistem liniar de m ecuaţii cu n necunoscute constă din m ecuaţii de forma:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}, b_1, b_2, \ldots, b_m \in \mathbb{R} \tag{1.3}$$

• Dacă toţi termenii liberi ai sistemului sunt egali cu 0, $b_1 = b_2 = \ldots = b_m$ atunci sistemul:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}, b_1, b_2, \ldots, b_m \in \mathbb{R} \tag{1.4}$$

se numeşte **sistem omogen**.

• Dacă cel puţin unul din termenii liberi este diferit de 0, sistemul (1.3) se numeşte **sistem neomogen**.

Exemplul 9. Sistemele următoare:

$$\begin{array}{rcl} 2x - 5y - 3z & = & 0 \\ -x + 7y + 4z & = & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x + y - z & = & 0 \\ -5x + 2y - 11z & = & 0 \\ y + 3z & = & 0 \end{array}$$

sunt sisteme omogene, iar sistemele:

$$\begin{array}{lcr} 2x - 9y + 4z & = & -3 \\ -x + 7y + 13z & = & 0 \\ 6x + y - 3z & = & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{lcr} x + y - 7z & = & 1 \\ -5x + 3y & = & -6 \end{array}$$

sunt sisteme neomogene.

Pentru un sistem de forma (1.3) o soluţie constă din n numere reale, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, care verifică fiecare ecuaţie a sistemului.

Un astfel de sistem se numeşte:
1. Compatibil determinat dacă are o singură soluţie;
2. Compatibil nedeterminat dacă are o infinitate de soluţii);
3. Incompatibil dacă nu are nici o soluţie.

Un sistem de forma (1.3) se poate exprima matricial astfel:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{b} \quad \text{sau concentrat } Ax = b \tag{1.5}$$

Pentru a decide natura sistemului general (1.3), omogen sau neomogen, adică dacă este compatibil sau incompatibil, avem nevoie de o modalitate de calcula rangul matricii sistemului.

Rangul unei matrice.

Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ este o matrice, atunci rangul ei este un număr întreg egal cu cel mai mare ordin de determinant nenul ce se poate constitui din elementele de intersecţie a k linii distincte şi k coloane distincte ale matricii A.

Cel mai mare ordin de determinant ce se poate constitui din elementele unei matrici $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ este $k = \min(m, n)$.

Exemplul 10.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

Matricea are 2 linii şi 3 coloane. Ordinul celui mai mare determinant ce se poate constitui din elemente de intersecţie a k linii şi k coloane din A este $k = min(2, 3) = 2$.

Mai întâi se calculează determinanţi de ordinul cel mai mare, în acest caz 2. Dacă cel puţin unul este diferit de zero, atunci rangul matricii este 2. Dacă toţi sunt egali cu zero, atunci se caută un determinant de ordinul 1, diferit de 0.

Din matricea A putem constitui următorii determinanţi de ordinul 2:
1) Din liniile $1, 2$ şi coloanele $1, 2$;
2) liniile 1,2, coloanele 1,3;
3) din liniile 1,2, coloanele 2,3:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_2' = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_2'' = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -9 \end{vmatrix} = 0$$

Deci rangul matricii nu este 2.

Observăm însă că $\Delta_1 = |-1| \neq 0$ şi deci rangul este 1.

Exemplul 11. Matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 6 & -2 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

are 3 linii şi 3 coloane, deci determinantul de ordin maxim ce se poate constitui este determinantul de ordin 3, $\Delta_3 = \det(A) = 0$. Fiind egal cu zero, rangul nu este 3.

Căutăm un determinant de ordin 2 diferit de 0.

Formăm determinanţi de ordin 2, din elementele de intersecţie a două linii $i_1 < i_2$ şi 2 coloane, $j_1 < j_2$. Evaluâm fiecare determinant şi dacă obţinem unul diferit de zero, stopăm calculul determinanţilor de ordin 2 şi concluzionăm că rangul este 2:

	col 1	col 2
lin 1	2	-3
lin 2	-4	6

	col 1	col 3
lin 1	2	1
lin 2	-4	-2

	col 2	col 3
lin 1	-3	1
lin 2	6	-2

	col 1	col 2
lin 1	2	-3
lin 3	1	0

Primii trei determinanţi sunt 0, iar al patrulea este diferit de zero, Deci rangul matricii date este 2.

Scrieţi restul determinaţilor de ordin 2, ce se pot constitui din matricea A.

1.6 Rezolvarea sistemelor de n ecuaţii cu n necunoscute

Ştim de la liceu, că un sistem de n ecuaţii cu n necunoscute, $Ax = b$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, sau detaliat:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}, \tag{1.6}$$

este compatibil determinat (adică are o unică soluţie) dacă şi numai dacă determinatul matricii sistemului este diferit de zero. În acest caz soluţia $(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$ se poate calcula:

1. folosind regula lui Cramer:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \mathbf{b_1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \mathbf{b_2} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \underbrace{\mathbf{b_n}}_{col j} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}, \quad j = \overline{1, n}$$

adică, x_j este raportul ce are la numitor, determinantul sistemului, iar la numărator, determinantul sistemului în care coloana j se înlocuieşte cu coloana termenilor liberi.

Exemplul 12. Considerăm sistemul:

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= -4 \\ -x + y + 2z &= 1 \\ 3x + 5y - z &= 0 \end{aligned}$$

Matricea sistemului este:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Deoarece determinantul său, $\det(A) = -45$, sistemul este compatibil determinat şi soluţia sa este:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{-4} & -3 & 1 \\ \mathbf{1} & 1 & 2 \\ \mathbf{0} & 5 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & \mathbf{-4} & 1 \\ -1 & \mathbf{1} & 2 \\ 3 & \mathbf{0} & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & \mathbf{-4} \\ -1 & 1 & \mathbf{1} \\ 3 & 5 & \mathbf{0} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}}$$

2. O a doua modalitate de a rezolva un sistem de n ecuaţii cu n necunoscute, compatibil determinat, este metoda matricială. Şi anume, scriind sistemul în forma $Ax = b$, deoarece $\det(A) \neq 0$, rezultă că matricea A este inversabilă, adică exista A^{-1} astfel încât $A^{-1}A = I_n($ matricea unitate). Înmulţind sistemul scris matricial, $Ax = b$, la stânga cu A^{-1}, avem:

$$\underbrace{A^{-1}A}_{I_n} x = A^{-1}b \quad \Leftrightarrow \quad I_n x = A^{-1}b \quad \Leftrightarrow \quad x = A^{-1}b$$

Deci soluţia sistemului se obţine calculând A^{-1} şi apoi efectuând înmulţirea:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Exemplul 13. Să se arate că sistemul:

$$\begin{aligned} x - 2y &= -3 \\ -3x + 5y &= 2 \end{aligned}$$

este compatibil determinat şi să se determine soluţia sa prin metoda matricială.

Matricea sistemului este:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

iar determinatul sau este

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1$$

Deci sistemul este compatibil determinat şi soluţia sa este:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Să parcurgem etapele de calcul a inversei:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad A^* = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^* = -1 \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Deci soluţia sistemului este:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \end{bmatrix}$$

1.7 Studiul compatibilităţii sistemelor de de m ecuaţii cu n necunoscute

Considerăm un sistem de m ecuaţii cu n necunoscute

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad , \quad a_{ij} \in \mathbb{R}, b_1, b_2, \ldots, b_m \in \mathbb{R}, \tag{1.7}$$

Un astfel de sistem poate fi incompatibil (nu are nici o soluţie) sau compatibil (are cel puţin o soluţie). Pentru a testa dacă admite sau nu soluţii, îi asociem două matrici: matricea A a coeficienţilor necunoscutelor:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

şi matricea prelungită:

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

care se obţine bordând la matricea A (adică adăugând) coloana termenilor liberi.

Calculând rangul celor două matrici, A şi $\overline{A}$ putem deduce dacă sistemul are soluţii sau nu, folosind:

Teorema 1.7.1 *(Kronecker–Capelli). Sistemul (1.7) este compatibil dacă şi numai dacă rangul matricii sistemului este egal cu rangul matricii prelungite:*

$$rang(A) = rang(\overline{A})$$

Consecintă. Dacă rangul matricii sistemului este diferit de rangul matricii prelungite, atunci sistemul este incompatibil.

Exemplul 14. Să se studieze natura sistemului folosind teorema Kronecker–Capelli şi în caz de compatibilitate să se detrmine mulţimea soluţiilor:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Matricea sistemului şi respectiv matricea prelungită este:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 3 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -5 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -2 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

Determinatul de ordin maxim ce se poate constitui din elementele de intersecţie a k linii şi k coloane ale matricii A este $k = min(3, 4) = 3$. Şi anume putem construi 4 determinanţi de ordinul 3, având elemente din liniile $1, 2, 3$ ale matricii A şi respectiv coloanele $(1, 2, 3)$,

$(1,2,4)$, $(1,3,4)$, $(2,3,4)$: Dacă îi calculăm efectiv obţinem că toţi cei 4 determinanţi sunt egali cu zero. Deci rangul matricii A nu este 3. Să căutăm un determinat de ordin mai mic nenul. Observăm că acest determinant de ordinul 2 este nenul:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

şi deci rangul$(A) = 2$.

Să calculăm rangul matricii prelungite. Rangul ar putea fi 3, dacă unul din determinanţii ce conţin elemente din liniile $1, 2, 3$ ale lui $\overline{A}$ şi respectiv coloanele $(1, 2, 5)$, $(1, 3, 5)$, $(1, 4, 5)$, $(2, 3, 5)$, $(2, 4, 5)$, $(3, 4, 5)$ este nenul (ceilaţi determinanţi de ordin 3 ce conţin coloane doar din A ştim că sunt nuli).

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -6 + 24 - 32 - 2 = -16$$

Prin urmare rangul matricii $\overline{A}$ este egal cu 3. Deoarece rang(A) $\neq$rang$(\overline{A})$, rezultă ă sistemul este incompatibil.

Exemplul 15. Sistemul

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -5 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

are det(A)=0. Deoarece

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

rangul matricii A este 2.

Matricea prelungită

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & -5 & -5 \\ 3 & 2 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

are toţi determinaţii de ordin 3 egali cu zero (calculaţi!!), dar are şi ea rangul 2. Rangul lui A fiind egal cu rangul lui $\overline{A}$ sistemul este compatibil (dar nu determinat, pt ca matricea sistemului are determinantul egal cu zero), ci nedeterminat.

Pentru a găsi mulţimea soluţiilor sale, fixăm un determinant nenul ce are ordinul egal cu rangul lui A, numit **determinat principal**. De exemplu determinantul Δ_2. Identificăm care sunt liniile şi coloanele lui A din ale căror coeficienţi se constituie determinantul principal, Δ_2.

Observăm că coloanele 1, 2, 3 din matricea A conţin coeficientii necunoscutelor x, y, z din sistem. Pentru că determinantul Δ_2 conţine doar elemente din coloanele 1 şi 2, corespunzătoare lui x şi y, x şi y le numim **necunoscute principale**, iar $z = \alpha$, **necunoscută secundară**.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -5 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Dintre ecuaţiile sistemului folosim pentru a determina mulţimea soluţiilor, doar pe cele ai căror coeficienţi intră în determinantul principal Δ_2. Astfel rezolvăm ecuaţiile 1 şi 2, în raport cu necunoscutele principale x, y, în funcţie de necunoscuta secundară $z = \alpha$:

$$\begin{cases} -x + 2y + 3\alpha &= 4 \\ 4x \quad - 5\alpha &= -5 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x + 2y &= 4 - 3\alpha \\ 4x &= -5 + 5\alpha \end{cases}$$

Rezolvând ultimul sistem, obţinem că mulţimea soluţiilor sistemului este:

$$(x = \frac{5\alpha - 5}{4}, y = \frac{11 - 7\alpha}{8}, z = \alpha), \alpha \in \mathbb{R}$$

Deci pentru fiecare număr real α obţinem altă soluţie. Cum exista o infinitate de numere reale, avem o infinitate de soluţii.

1.8 Analiza şi rezolvarea sistemelor de ecuaţii omogene

Un sistem omogen de ecuaţii liniare:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n &=& 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n &=& 0 \\ \vdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n &=& 0 \end{array} \quad , \quad a_{ij} \in \mathbb{R} \tag{1.8}$$

admite întotdeauna soluţia banală $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Prin urmare când analizăm mulţimea soluţiilor unui astfel de sistem, trebuie să decidem dacă sistemul admite doar soluţia banală sau şi soluţii nebanale.

• În cazul în care numărul de ecuaţii este egal cu numărul de necunoscute şi determinantul matricii sistemului este diferit de zero, atunci sistemul având o soluţie unică, rezultă că el admite doar soluţia banală.

Exemplul 16. Să se determine mulţimea soluţiilor sistemului:

$$\begin{array}{rcl} x + 6y &=& 0 \\ -3x + y &=& 0 \end{array}$$

Matricea sistemului este:

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 18 = 19 \neq 0$$

Determinantul fiind diferit de zero, sistemul are o unică soluţie, care este soluţia banală. Observăm că în acest caz nu e necesar să aplicăm regula lui Cramer, pentru că ştim deja că sistemul fiind omogen admite soluţia banală, şi admiţând o soluţie unică, aceasta este $x = y = 0$.

Dacă am aplica totuşi regula lui Cramer, am obţine acelaşi rezultat, dar am efectua calcule inutile:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}} = 0, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}} = 0$$

Exemplul 17. Să se determine mulţimea soluţiilor sistemului:

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 0 \\ -x + 4y - z &= 0 \end{aligned}$$

Matricea sistemului A respectiv matricea prelungită $\overline{A}$ este:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad \overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Pentru orice sistem omogen rangul matricii A coincide cu rangul matricii prelungite, deoarece coloana ce se adaugă matricii A este formată din zerouri. De aceea în problemele pe care le rezolvaţi în continuare nu mai ataşaţi şi matricea prelungită, pentru că este inutil.

Rangul matricii A este 2 şi un determinant principal este $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 1 = 7$ Astfel necunoscutele principale sunt x, y, iar $z = \alpha$ este necunoscută secundară. Rezolvăm astfel primele două ecuaţii în raport cu necunoscutele principale, x, y, în funcţie de necunoscuta secundară, α:

$$\begin{aligned} 2x - y &= -3\alpha \\ -x + 4y &= \alpha \end{aligned}$$

Rezolvând obţinem mulţimea soluţiilor:

$$(x = -\frac{\alpha}{7}, y = -\frac{11\alpha}{7}, z = \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}$$

Pentru fiecare valoare particulară a lui α obţinem o altă soluţie. Dacă $\alpha = 0$ obţinem soluţia banală $x = y = z = 0$.