Multimea numerelor complexe $\mathbb{C}$

Din necesitatea rezolvarii anumitor ecuatii, cum ar fi ecuatia de gradul II, cu $\Delta < 0$, s-au introdus numerele complexe, prin extinderea multimii numerelor reale.

$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a,b) / a,b \in \mathbb{R}\}$, deci numerele complexe sunt de forma :

$z = a + b \cdot i$, unde a si b sunt numere reale, iar $i^2 = -1$

a se numeste partea reala a lui z, iar b se numeste partea imaginara a lui z, deci

$\mathrm{Re}(z) = a$ si $\mathrm{Im}(z) = b$.

Numarul $\bar{z} = a - b \cdot i$ se numeste conjugatul lui z.

Operatii cu numere complexe . Fie $z_1 = a + b \cdot i$ si $z_2 = c + d \cdot i$

Adunarea. $z_1 + z_2 = (a+c) + (b+d) \cdot i$ Adunam partea reala cu partea reala, iar partea imaginara cu partea imaginara.

Exemplu : $z_1 = 5 + 4 \cdot i$ si $z_2 = 6 + 2 \cdot i$

$$z_1 + z_2 = (5+6) + (4+2) \cdot i = 11 + 6 \cdot i$$

Scaderea. $z_1 - z_2 = (a-c) + (b-d) \cdot i$ Scadem partea reala cu partea reala, iar partea imaginara cu partea imaginara.

Exemplu : $z_1 = 5 + 4 \cdot i$ si $z_2 = 6 + 2 \cdot i$

$$z_1 - z_2 = (5-6) + (4-2) \cdot i = -1 + 2 \cdot i$$

Inmultirea. $z_1 \cdot z_2 = (a + b \cdot i) \cdot (c + d \cdot i)$ Inmultim termen cu termen. Tinem cont de faptul ca $i^2 = -1$

$$z_1 \cdot z_2 = a \cdot c + a \cdot d \cdot i + b \cdot c \cdot i + b \cdot d \cdot i^2$$

$$z_1 \cdot z_2 = a \cdot c - b \cdot d + (a \cdot d + b \cdot c) \cdot i$$

Exemplu : $z_1 = 5 + 4 \cdot i$ si $z_2 = 6 + 2 \cdot i$

$$z_1 \cdot z_2 = 5 \cdot 6 + 5 \cdot 2 \cdot i + 6 \cdot 4 \cdot i + 4 \cdot 2 \cdot i^2$$

$$z_1 \cdot z_2 = 30 + 10 \cdot i + 24 \cdot i - 8 = 22 + 34 \cdot i$$

Impartirea. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + b \cdot i}{c + d \cdot i}$ Amplificam cu conjugata numitorului, $c - d \cdot i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{^{c-d \cdot i)}a + b \cdot i}{c + d \cdot i} = \frac{(a + b \cdot i) \cdot (c - d \cdot i)}{(c + d \cdot i) \cdot (c - d \cdot i)} = \frac{a \cdot c - a \cdot d \cdot i + b \cdot c \cdot i - b \cdot d \cdot i^2}{c \cdot c - c \cdot d \cdot i + d \cdot c \cdot i - d \cdot d \cdot i^2} =$$

$= \frac{(a \cdot c + b \cdot d) + (-a \cdot d + b \cdot c) \cdot i}{c^2 + d^2}$ Observam ca prin inmultirea cu conjugata, dispare i de la numitor.

Exemplu : $\frac{3 + 2 \cdot i}{2 - i} = \frac{^{2+i)}3 + 2 \cdot i}{2 - i} = \frac{(3 + 2 \cdot i) \cdot (2 + i)}{(2 - i) \cdot (2 + i)} = \frac{3 \cdot 2 + 3 \cdot i + 2 \cdot 2 \cdot i + 2 \cdot 2 \cdot i^2}{2 \cdot 2 + 2 \cdot i - 2 \cdot i - i^2} =$

$$= \frac{6 + 3 \cdot i + 4 \cdot i - 4}{4 + 1} = \frac{2 + 7 \cdot i}{5} = \frac{2}{5} + \frac{7}{5} \cdot i$$

Observam ca partea reala este $\frac{2}{5}$, iar partea imaginara este $\frac{7}{5}$

Modulul unui numar complex $|z|$

- pentru $z = a + b \cdot i$, definim $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Proprietati : 1) $\left|z^n\right| = (|z|)^n$

2) Daca $z = \dfrac{a+bi}{c+di}$, atunci $|z| = \dfrac{|a+bi|}{|c+di|} = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}$

Exemplul 1. Fie $z = 4 + 3 \cdot i$. Atunci $|z| = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

Exemplul 2. $z = (1+2\cdot i)^3$. Atunci $|z| = (|1+2\cdot i|)^3 = \left(\sqrt{1^2+2^2}\right)^3 = \left(\sqrt{5}\right)^3 = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

Exemplul 3. Calculati $|z|$, pentru $z = \dfrac{3+2i}{5-i}$.

Metoda 1, cu proprietatea 2 de mai sus :

Atunci $|z| = \dfrac{|3+2i|}{|5-i|} = \dfrac{\sqrt{3^2+2^2}}{\sqrt{5^2+(-1)^2}} = \dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{26}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Meteoda 2. Acest exercitiu se poate rezolva si prin amplificarea cu conjugata, eliminarea lui i de la numitor, apoi aplicarea definitiei modulului :

$$z = \frac{3+2i}{5-i} = \frac{{}^{5+i)}3+2\cdot i}{5-i} = \frac{(3+2\cdot i)\cdot(5+i)}{(5-i)\cdot(5+i)} = \frac{3\cdot 5+3\cdot i+2\cdot 5\cdot i+2\cdot 1\cdot i^2}{5\cdot 5+5\cdot i-5\cdot i-i^2} =$$

$$= \frac{15+3\cdot i+10\cdot i-2}{25+1} = \frac{13+13\cdot i}{26} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot i$$

Atunci modulul lui z,= $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Puterile lui i.

Calculam mai multe puteri ale lui i, pana vom observa ca se repeta rezultatele :

$i^0 = 1$	$i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1\cdot(-1) = 1$	....	$i^{4n+0} = i^0 = 1$
$i^1 = i$	$i^5 = i^4 \cdot i = 1\cdot i = i$	....	$i^{4n+1} = i^1 = i$
$i^2 = -1$	$i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1\cdot(-1) = -1$	....	$i^{4n+2} = i^2 = -1$
$i^3 = i^2 \cdot i = -i$	$i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1\cdot(-i) = -i$	....	$i^{4n+3} = i^3 = -i$

Observam ca din 4 in 4, obtinem acelasi rezultat. Pentru a calcula i^{putere}, impartim puterea la 4 si oprim doar restul.

Exemplu : a) $i^{253} = ?$
Fac 253 : 4 = 63 rest 1. Deci 253 = $4\cdot 63+1$
$i^{253} = i^{4\cdot 63+1} = i^1 = i$
b) $i^{1959} = ?$
Fac 1959 : 4 = 489 rest 3. Deci 1959 = $4\cdot 489+3$
$i^{1959} = i^{4\cdot 489+3} = i^3 = -i$

Ecuatia de gradul II cu $\Delta < 0$.

Din cate stim din lectiile anterioare, ecuatia de gradul II cu $\Delta < 0$ nu are solutii reale; dar are solutii complexe, care sunt si conjugate.
Obs : $\sqrt{-1} = i$; $\sqrt{-9} = 3i$

Ex: Rezolvati ecuatia : $x^2 + 4x + 5 = 0$.
Identificam coeficientii : a = 1, b = 4 , c = 5
Calculam Δ : $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ = $4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5$ = 16 - 20 = - 4

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm 2 \cdot i}{2}$, deci $x_1 = -2 + i$, $x_2 = -2 - i$

Tema

1. Fie $z_1 = 3 + 4i$ si $z_2 = 4 - 2i$. Calculati :
0.5 p a) $2z_1 + 3z_2 =$
0.5 p b) $z_1 \cdot z_2 =$
1p c) $\frac{z_1}{z_2} =$

2. Fie z = $i^{123} + i^{174} + i^{141} + i^{161}$.
1p a)Aduceti numarul la o forma mai simpla ;
1p b) Aflati Re(z) si $|z|$ (modulul lui z)

1p 3. Fie z = $\frac{5 - i}{3 + 2i}$. Aflati Re(z) si $|z|$ (modulul lui z)

4. 1p a)Rezolvati ecuatia : $x^2 + x + 1 = 0$
1p b) Fie $\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$. Calculati ε^{2010}.