Matematică

clasa a IX-a

ALGEBRĂ **Capitolul 1. Numere reale**

CAPITOLUL 1

MULŢIMEA NUMERELOR REALE

Tema 1.1
Numere raţionale şi iraţionale. Reprezentări zecimale

Notăm cu $\mathbb{N}$ mulţimea numerelor naturale şi cu $\mathbb{Z}$ mulţimea numerelor întregi. Astfel, $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,...\}$ şi $\mathbb{Z}=\{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$.

Fracţiile $\frac{a}{b}$ şi $\frac{c}{d}$ $(a,c\in\mathbb{Z},\ b,d\in\mathbb{Z}^*)$ se numesc *echivalente* dacă $ad=bc$; scriem $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Mulţimea tuturor fracţiilor echivalente cu o fracţie dată se numeşte *număr raţional*. Pentru simplificarea exprimării, vom identifica un număr raţional cu oricare dintre fracţiile echivalente care îl reprezintă. Mulţimea numerelor raţionale se notează cu $\mathbb{Q}$. Aşadar,

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{p}{q}\ \middle|\ p,q\in\mathbb{Z},\ q\neq 0\right\}.$$

Cu ajutorul algoritmului de împărţire a două numere naturale, orice fracţie ordinară $\frac{p}{q}$ $(p\geq 0,\ q>0)$ se poate scrie sub formă de fracţie zecimală periodică, cu perioada diferită de (9). Reciproc, orice fracţie periodică, cu perioada diferită de (9), se poate scrie sub formă de fracţie ordinară.

Dacă a este o *fracţie periodică simplă*, adică are forma $a=a_0,(a_1a_2...a_p)$, unde $a_0\in\mathbb{N}$ şi $a_1,a_2,...,a_p\in\{0,1,2,...,9\}$, atunci

$$a=a_0+\frac{\overline{a_1a_2...a_p}}{\underbrace{99...9}_{p\ ori}}.$$

În cazul când a este *fracţie periodică mixtă*, adică $a=a_0,a_1a_2...a_k(a_{k+1}a_{k+2}...a_{k+p})$, avem

$$a=a_0+\frac{\overline{a_1a_2...a_{k+p}}-\overline{a_1a_2...a_k}}{\underbrace{99...9}_{p\ ori}\underbrace{00...0}_{k\ ori}}.$$

$\mathbb{Q}$ este mulţimea tuturor fracţiilor periodice (fracţiile zecimale finite sunt considerate fracţii periodice cu perioada (0)).

Există fracţii zecimale infinite şi neperiodice, de exemplu $a=0,1010010001...$. O astfel de fracţie zecimală se numeşte *număr iraţional*.

Reunind mulţimea numerelor raţionale cu mulţimea numerelor iraţionale obţinem *mulţimea numerelor reale* pe care o notăm cu $\mathbb{R}$. Aşadar, $\mathbb{R}$ este mulţimea tuturor fracţiilor zecimale, periodice sau neperiodice. Notăm $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Au loc incluziunile: $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$.

*

1. ***a)*** Arătați că, pentru orice $m \in \mathbb{N}$, fracția $\dfrac{2m+1}{3m+2}$ este ireductibilă.

b) Determinați $n \in \mathbb{N}$ pentru care fracția $\dfrac{n+2}{3n+1}$ este reductibilă.

2. Scrieți ca fracție zecimală fiecare dintre numerele:

a) 5; ***b)*** $\dfrac{13}{8}$; ***c)*** $\dfrac{3}{4}$; ***d)*** $-\dfrac{3}{20}$; ***e)*** $\dfrac{14}{11}$;

f) $\dfrac{481}{125}$; ***g)*** $-\dfrac{2}{3}$; ***h)*** $\dfrac{31}{13}$; ***i)*** $\dfrac{77}{75}$; ***j)*** $-\dfrac{47}{66}$.

3. Transformați în fracții ordinare următoarele fracții zecimale:

a) $5,(7)$; ***b)*** $-1,(13)$; ***c)*** $0,23(7)$; ***d)*** $-1,01(02)$; ***e)*** $-3,2(123)$.

4. Fie $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Este posibil ca a^2 și a^3 să fie numere raționale?

5. ***a)*** Aflați a $100-a$ zecimală a numărului rațional $\dfrac{1}{13}$.

b) Arătați că există un multiplu de 13 format numai cu cifra 1.

6. Fie $a \in \mathbb{Q}$ și $m, n \in \mathbb{N}^*$, $(m,n)=1$. Arătați că, dacă $ma \in \mathbb{Z}$ și $na \in \mathbb{Z}$, atunci $a \in \mathbb{Z}$.

7. Arătați că, dacă o singură cifră din reprezentarea zecimală a unui număr real se repetă de o infinitate de ori, atunci numărul este rațional.

8. Arătați că un număr rațional pozitiv $\dfrac{p}{q}$ $\left(p, q \in \mathbb{N}^*, (p,q)=1\right)$ se reprezintă ca fracție zecimală finită dacă și numai dacă $q = 2^{\alpha} \cdot 5^{\beta}$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$.

**

9. Se consideră numărul $a = 0,101001000100001\ldots$.

a) Arătați că a este număr irațional.

b) Aflați a $1000-a$ zecimală a numărului a.

c) Calculați suma primelor 1000 zecimale ale numărului a.

10. ***a)*** Fie $x, y \in \mathbb{Q}$ și $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Arătați că $x + y \cdot a = 0$ dacă și numai dacă $x = y = 0$.

b) Fie $x, y, z \in \mathbb{Q}$. Arătați că $x\sqrt{2} + y\sqrt{3} + z\sqrt{5} = 0$ dacă și numai dacă $x = y = z = 0$.

11. Demonstrați afirmațiile:

a) dacă $r \in \mathbb{Q}$ și $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $r + a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

b) dacă $r \in \mathbb{Q}^*$ și $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $ra \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

c) dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $\dfrac{1}{a} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

d) dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $a > 0$, atunci $\sqrt{a} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

12. Fie $n \in \mathbb{N}$. Arătați că:

a) $\sqrt{n} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n = k^2, k \in \mathbb{N}$; *b)* $\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \sqrt{n} \in \mathbb{N}$.

13. Arătați că există o infinitate de perechi (a,b) de numere iraționale cu $a+b \in \mathbb{Q}$ și $a \cdot b \in \mathbb{Q}$.

14. Arătați că numărul $\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$ este irațional.

15. Arătați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, următoarele numere sunt iraționale:

a) $\sqrt{5^n+2}$; *b)* $\sqrt{7n+3}$; *c)* $\sqrt{n^2+5n+7}$; *d)* $\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$.

16. Determinați numerele naturale k pentru care numărul $\sqrt{k^2+3k+14}$ este rațional.

17. Fie mulțimea $M = \left\{a+b\sqrt{3} \mid a,b \in \mathbb{Q}, a^2-3b^2=1\right\}$. Arătați că:

a) $2+\sqrt{3} \in M$;
b) $x, y \in M \Rightarrow xy \in M$;
c) M este infinită.

18. *a)* Fie $m,n \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că $\sqrt{m}+\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$ dacă și numai dacă $\sqrt{m}, \sqrt{n} \in \mathbb{N}$.

b) Determinați perechile (x, y) de numere naturale astfel încât $\sqrt{x}+\sqrt{y}=10\sqrt{3}$.

19. Fie $a,b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ astfel încât $a+b \in \mathbb{Q}$ și $m,n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$. Arătați că numerele $a-b$ și $ma+nb$ sunt iraționale.

***

20. Determinați $x, y \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=0,58(3)$.

21. Arătați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, numărul $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ este irațional.

22. Determinați numerele naturale n pentru care numărul $\sqrt{n+1}+\sqrt{4n+21}$ este rațional.

Tema 1.2
Operaţii algebrice cu numere reale

Calculul cu numere reale se bazează pe proprietăţile adunării şi înmulţirii numerelor reale.

Adunarea este operaţia prin care oricărei perechi de numere reale (x, y) i se asociază un număr real, notat cu $x+y$, numit *suma* numerelor x şi y.

Proprietăţile adunării

1. Adunarea este *asociativă*: $(a+b)+c=a+(b+c)$, oricare ar fi $a,b,c \in \mathbb{R}$.

2. Adunarea este *comutativă*: $a+b=b+a$, oricare ar fi $a,b \in \mathbb{R}$.

3. Numărul real 0 este *element neutru* pentru adunare, adică oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$, avem $a+0=0+a=a$.

4. Orice număr real a are un *opus*, adică există un număr real notat cu $-a$, astfel încât $a+(-a)=(-a)+a=0$.

Daca $x, y \in \mathbb{R}$, se notează $x-y=x+(-x)$ (*diferenţa* numerelor x şi y).

Înmulţirea este operaţia prin care oricărei perechi de numere reale (x, y) i se asociază un număr real, notat cu $x \cdot y$ sau xy, numit *produsul* numerelor x şi y.

Proprietăţile înmulţirii

1. Înmulţirea este *asociativă*: $(ab)c=a(bc)$, oricare ar fi $a,b,c \in \mathbb{R}$.

2. Înmulţirea este *comutativă*: $ab=ba$, oricare ar fi $a,b \in \mathbb{R}$.

3. Numărul real 1 este *element neutru* pentru înmulţire, adică oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$, avem $a \cdot 1=1 \cdot a=a$.

4. Orice număr real $a \neq 0$ are un *invers*, adică există un număr real, notat cu a^{-1}, astfel încât $aa^{-1}=a^{-1}a=1$.

5. Înmulţirea este *distributivă faţă de adunare*, adică oricare ar fi $a,b,c \in \mathbb{R}$, au loc egalităţile:

$$a(b+c)=ab+ac, \qquad (a+b)c=ac+bc.$$

Daca $x, y \in \mathbb{R}$ şi $y \neq 0$, se notează $\frac{x}{y}=xy^{-1}$ (*câtul* numerelor reale x şi y).

*

1. Calculaţi $(-1)^n \cdot 0{,}1(3)+(-1)^{n+1} \cdot 0{,}1+(-1)^{n+2} \cdot \frac{7}{6}+(-1)^{n+3} \cdot \frac{1}{5}$, unde $n \in \mathbb{N}$.

2. Calculaţi: ***a)*** $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}+\frac{6}{\sqrt{3}}$; ***b)*** $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}-\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$.

3. ***a)*** Dacă $\frac{3}{13}=0,a_1a_2a_3\ldots$, calculaţi $a_{2000}-a_{1000}$ şi $a_1+a_2+\ldots+a_{100}$.

b) Dacă $\frac{41}{333}=0,a_1a_2a_3\ldots$, calculaţi $a_5+a_{10}+a_{15}+\ldots+a_{100}$.

4. *a)* Calculați suma dintre opusul şi inversul numărului $\sqrt{5}-2$.

b) Calculați suma inverselor următoarelor numere: $-1,\ 2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}$.

5. Determinați $x \in \mathbb{R}$ în fiecare dintre cazurile:

a) opusul numărului $2x-3$ este 15;

b) inversul numărului $3x-2$ este 5;

c) numărul x^2-x este inversabil.

6. Calculați media aritmetică şi media geometrică a numerelor:

a) $3-2\sqrt{2}$ şi $3+2\sqrt{2}$; *b)* $\sqrt{10}+\sqrt{3}+\sqrt{2}$ şi $\sqrt{10}-\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

7. Se dau numerele: $a=2\sqrt{2}-3\sqrt{3}$, $b=3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$, $c=5(\sqrt{3}-\sqrt{2})$. Calculați:

a) $a+b+c$; *b)* $a^2+b^2+c^2$; *c)* $ab+bc+ca$.

**

8. Calculați:

a) $2,(3)+7,(6)$; *b)* $0,(3)+0,0(3)+0,00(3)$;

c) $1,1(3)-2,07(27)$; *d)* $\dfrac{3}{5}-0,1(3)+\dfrac{1}{7}-0,(285714)$.

9. Calculați:

a) $5\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{5}\right)-7\left(1-\dfrac{5}{6}+\dfrac{11}{12}\right)$;

b) $\dfrac{(1,5-0,25+5,8(3)):2,5}{0,(6)\cdot 3,(3)-0,25\cdot 2,1(6)}-\dfrac{1}{11}\cdot\left(1-1:\dfrac{3}{2}\right)$;

c) $1-\left\{\left[\dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{16}-7:(-24)\right]:\left(-\dfrac{1}{4}\right)-\dfrac{1}{2}\right\}\cdot\left(-5\dfrac{1}{3}\right)$.

10. Determinați numerele reale x din egalitatea: $\dfrac{1}{2}\cdot\left\{3-\dfrac{1}{2}\cdot\left[3-\dfrac{1}{2}\cdot\left(x^2-1\right)\right]\right\}=1$.

11. Calculați cu două zecimale exacte:

a) $\sqrt{3}$; *b)* $\sqrt{2,013}$; *c)* $\sqrt{5,71}$; *d)* $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$; *e)* $\dfrac{\sqrt{39}}{3}$.

12. Calculați: $\dfrac{2,8+5\frac{1}{2}:\left(3+0,2\cdot 2\frac{1}{2}\right)-\frac{2}{7}\cdot\sqrt{\frac{63}{175}}}{\left(5\frac{3}{7}\cdot 4\frac{1}{5}+2,45:4\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{2}{3}-\sqrt{1,5625}}:2\dfrac{4}{5}$.

13. Se consideră numerele reale a, b, x, y astfel încât $a-b=\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ şi $x+y=\sqrt{5+2\sqrt{6}}$. Calculați $ax-by+ay-bx$.

14. Calculați:

a) $\left(2\sqrt{2}+3\sqrt{3}-5\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{18}-\sqrt{12}-\sqrt{5}\right)$;

b) $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$;

c) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{6+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{3}}}$.

15. Arătați că:

a) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}}=2\sqrt{2}$; *b)* $\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}=4$.

16. Calculați:

a) $\left(\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{1}{2-\sqrt{3}}-\sqrt{5}\right)^{-1}+\left(\sqrt{5}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(\sqrt{5}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

b) $\left(\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}\right)^{-2}\cdot(3{,}5+0{,}(6))$;

c) $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}-\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$.

17. Arătați că $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{10}+\sqrt{6}+\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}+\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{10}-\sqrt{6}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}\in\mathbb{N}$.

***

18. Câturile obținute prin împărțirea numerelor $\frac{24}{11}$, $\frac{34}{13}$, $\frac{48}{7}$ la un număr rațional $r>0$ sunt numere întregi. Aflați cel mai mare număr rațional r cu această proprietate.

19. Fie $a,b\in\mathbb{R}^*$ astfel încât $\frac{a}{b}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Calculați $\frac{a^2-ab+2b^2}{a^2+ab+3b^2}$.

20. *a)* Arătați că $\frac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$ pentru orice $k\in\mathbb{N}^*$.

b) Calculați suma

$$S_n=\frac{1}{1\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{1}}+\frac{1}{2\cdot\sqrt{3}+3\cdot\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}},\ n\in\mathbb{N}^*.$$

c) Determinați $m\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $S_m=0{,}75$.

Tema 1.3

Formule de calcul prescurtat. Identități (extindere)

În contextul operațiilor cu numere reale sunt foarte utile *formulele de calcul prescurtat.*

1. Factorul comun: $ab+ac=a(b+c)$.

2. Binomul la pătrat: $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.

3. Diferența de pătrate: $a^2-b^2=(a-b)(b+c)$.

4. Trinomul la pătrat: $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$.

5. Binomul la cub: $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$,

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$.

6. Suma de cuburi: $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

7. Diferența de cuburi: $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

Formulele 3, 6 și 7 admit următoarele generalizări:

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+...+ab^{n-2}+b^{n-1})$, unde $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$;

$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-...-ab^{n-2}+b^{n-1})$, unde $n\in\mathbb{N}$ este impar.

Descompunerea trinomului de gradul al II-lea în factori de gradul I

Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, astfel încât $b^2-4ac\geq 0$. Dacă x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $ax^2+bx+c=0$, atunci $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Exemple.

1. Ecuația $x^2-3x+2=0$ are soluțiile $x_1=1,\ x_2=2$, deci $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$.

2. Ecuația $4x^2-4x+1=0$ are soluțiile $x_1=x_2=\frac{1}{2}$, deci

$$4x^2-4x+1=4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=4\cdot\frac{2x-1}{2}\cdot\frac{2x-1}{2}=(2x-1)^2.$$

Descompunerea în factori a unei expresii polinomiale de grad cel puțin egal cu 3

Propoziție. Se consideră expresia

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0,\text{ unde } a_0,a_1,...,a_n\in\mathbb{R},\ a_n\neq 0.$$

a) Dacă $f(c)=0$, $c\in\mathbb{R}$, atunci există $b_0,b_1,...,b_{n-1}\in\mathbb{R}$ astfel încât

$$f(x)=(x-c)(b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+...+b_1x+b_0).$$

b) Dacă $f(c)=0$ și, în plus, $c,a_0,a_1,...,a_n\in\mathbb{Z}$, atunci $c\mid a_0$.

Demonstrație.

a) Avem: $f(x)=f(x)-f(c)=a_1(x-c)+a_2(x^2-c^2)+...+a_n(x^n-c^n)$.

Concluzia se obține având în vedere că

$$x^k-c^k=(x-c)\left(x^{k-1}+cx^{k-2}+c^2x^{k-3}+...+c^{k-1}\right).$$

b) Din $f(c)=0$ rezultă $a_0=-c\left(a_1+a_2c+...+a_nc^{n-1}\right)$, de unde $c\mid a_0$.

Exemplu. Vom descompune în factori expresia $f(x)=2x^3-x^2-5x-2$.
Observăm că un divizor întreg al lui 2 care anulează expresia este 2. Prin urmare, $f(x)=(x-2)g(x)$. Pentru a determina $g(x)$ grupăm termenii expresiei $f(x)$ aşa încât să putem da factor comun pe $x-2$:

$$f(x)=\underbrace{2x^3-4x^2}+\underbrace{3x^2-6x}+\underbrace{x-2}=$$

$$=2x^2(x-2)+3x(x-2)+x-2=(x-2)(2x^2+3x+1).$$

Deci $g(x)=2x^2+3x+1$. La fel, din faptul că $g(-1)=0$, deducem că $g(x)$ are în descompunere factorul $x+1$; avem

$$g(x)=\underbrace{2x^2+2x}+\underbrace{x+1}=2x(x+1)+x+1=(x+1)(2x+1).$$

În concluzie, $f(x)=(x-2)(x+1)(2x+1)$.

*

1. Arătaţi că, oricare ar fi numerele reale a,b,c, au loc egalităţile:

a) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;
c) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$;
b) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$;
d) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

2. Numerele reale a şi b îndeplinesc condiţiile $a+b=6$ şi $ab=1$. Calculaţi:

a) a^2+b^2; *b)* a^3+b^3; *c)* a^4+b^4; *d)* $a-b$.

3. Arătaţi că, oricare ar fi numerele întregi a,b,c,d, există două numere întregi x şi y astfel încât $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=x^2+y^2$.

4. Fie $x,y\in\mathbb{Q}$, $x+y\neq 0$ şi $z=\dfrac{xy}{x+y}$. Arătaţi că $x^2+y^2+z^2$ este pătratul unui număr raţional.

5. Fie $a,b\in\mathbb{R}$. Calculaţi:

a) a^3+b^3 ştiind că $a+b=10$ şi $ab=1$;
b) a^2+b^2 ştiind că $a+b=4$ şi $a^3+b^3=52$;
c) a^3-b^3 ştiind că $a-b=2$ şi $ab=1$.

6. Fie x un număr real nenul. Calculaţi:

a) $x^4+\dfrac{1}{x^4}$ în funcţie de $a=x+\dfrac{1}{x}$; *b)* $x^3-\dfrac{1}{x^3}$ în funcţie de $b=x-\dfrac{1}{x}$.

7. Fie $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $a-b=1$ şi $a^3-b^3=37$. Calculaţi a^2+b^2.

8. Calculaţi:

a) $\left(\dfrac{a-b}{a}-\dfrac{a+b}{b}+\dfrac{3a^2+b^2}{2ab}+\dfrac{b}{a}\right)\cdot\dfrac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a+b)^2+(a-b)^2}$, unde $a,b\in\mathbb{R}^*$;

b) $\frac{1}{a^3}\left\{\left[a-\left(\frac{1}{a+1}-\frac{3}{a^3+1}+\frac{3}{a^2-a+1}\right)\left(a-\frac{2a-1}{a+1}\right)\right]\cdot\left(a^2+a+1\right)+1\right\}$, $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$;

c) $\frac{a^3-b^3}{a^3+a^2b+ab^2}:\left[\left(a+b-\frac{ab}{a+b}\right):\left(\frac{a}{a+b}-\frac{b}{b-a}+\frac{ab}{a^2-b^2}\right)\right]$, unde $a,b\in\mathbb{R}^*$, $a\neq\pm b$.

9. Descompuneți în factori de forma $ax+b$:

a) x^2-x-2; **b)** $2x^2+5x+3$; **c)** $x^3-6x^2+11x-6$;

d) $2x^3+x^2-5x+2$; **e)** $x^4-3x^3+x^2+3x-2$; **f)** $x^4+x^3-3x^2-4x-4$.

10. **a)** Descompuneți în factori expresiile

$$A(x)=x^3-4x^2+x+6 \text{ și } B(x)=x^3-2x^2-3x.$$

b) Determinați numerele reale x pentru care fracția $F(x)=\frac{A(x)}{B(x)}$ are valoarea definită.

c) Determinați numerele întregi k pentru care $F(k)\in\mathbb{Z}$.

**

11. Se consideră expresia $E(x)=x^4-x^3-6x^2+4x+8$.

a) Calculați $E(-2)$ și $E(2)$.

b) Simplificați fracția $F(x)=\frac{x^4-x^3-6x^2+4x+8}{x^4-16}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$.

12. Fie expresia $E(x)=\left(\frac{x^2+2}{x^3-1}+\frac{x}{x^2+x+1}-\frac{1}{x-1}\right)\cdot\left(\frac{x^2}{x^2-1}+\frac{1}{x-1}\right)$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

a) Arătați că $E(x)=\frac{1}{x+1}$.

b) Calculați $E(1)\cdot E\left(\frac{1}{2}\right)\cdot E\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot E\left(\frac{1}{n}\right)$, $n\in\mathbb{N}^*$.

13. Fie $x,y,z\in\mathbb{R}$ astfel încât $x+y+z=1$ și $(x+y)(y+z)(z+x)=14$. Calculați

$$xy+yz+zx-xyz.$$

14. Fie $x,y\in\mathbb{R}^*$ astfel încât $x^2-5xy+6y^2=0$. Determinați $\frac{x}{y}$.

15. Fie $x,y,z\in\mathbb{Q}$ astfel încât $xy+yz+zx=1$. Arătați că $(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)$ este pătratul unui număr rațional.

16. Fie $a,b,c\in\mathbb{R}^*$ cu $a+b+c=0$. Arătați că

$$\frac{1}{-a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{a^2-b^2+c^2}+\frac{1}{a^2+b^2-c^2}=0.$$

17. Arătați că, oricare ar fi numerele reale $a,b,c,$ au loc egalitățile:

a) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$;

b) $\left(a+b+c\right)^3-\left(a^3+b^3+c^3\right)=3(a+b)(b+c)(c+a)$.

18. Fie $x, y \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătaţi că $x^n - y^n = (x-y)\left(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + ... + xy^{n-2} + y^{n-1}\right)$.

b) Dacă, în plus, n este impar, arătaţi că

$$x^n + y^n = (x+y)\left(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - x^{n-4}y^3 + ... - xy^{n-2} + y^{n-1}\right).$$

c) Folosind *a)*, demonstraţi că $(a+b)^n = a^n + Mb = Ma + b^n$ pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}$.

d) Arătaţi că, oricare ar fi $m \in \mathbb{N}$, numărul $2^{3m+1} + 3 \cdot 5^{2m+1}$ este divizibil cu 17.

19. Numărul real $a > 0$ îndeplineşte condiţia $a^2 + \frac{1}{a^2} = 14$. Calculaţi $a^5 + \frac{1}{a^5}$.

20. Fie $a, b, c > 0$ astfel încât $abc = 1$. Arătaţi că $\frac{a}{1+a+ab} + \frac{b}{1+b+bc} + \frac{c}{1+c+ca} = 1$.

21. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Demonstraţi egalităţile, descompunând membrul stâng în produs:

a) $a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 3abc = (a+b+c)(ab+bc+ca)$;

b) $a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 2abc = (a+b)(b+c)(c+a)$;

c) $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = -(a-b)(b-c)(c-a)$;

d) $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b) = -(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$;

e) $a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3 = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$.

22. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Arătaţi că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, are loc egalitatea:

$$(x-a)^2(b-c) + (x-b)^2(c-a) + (x-c)^2(a-b) = -(a-b)(b-c)(c-a).$$

23. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, $a \neq b \neq c \neq d$. Demonstraţi egalităţile:

a) $\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} = 0$;

b) $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} = 1$;

c) $\frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)} = a+b+c$;

d) $\frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-c)(b-a)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)} = \frac{1}{abc}$.

24. Numerele reale a, b, c îndeplinesc condiţiile

$$(a+b)(b+c)(c+a) \neq 0 \quad \text{şi} \quad \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1.$$

Demonstraţi egalităţile:

a) $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$; *b)* $\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b} + a^2 + b^2 + c^2 = 0$.

25. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq b \neq c \neq a$, astfel încât $\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0$. Arătaţi că

$$\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0.$$

***

26. Arătaţi că, dacă x, y, z sunt numere raţionale distincte, atunci numărul

$$s=\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}$$

este pătratul unui număr raţional.

27. Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$. Demonstraţi egalitatea, descompunând membrul stâng în produs:

$$(a+b)(b+c)(c+a)+abc=(a+b+c)(ab+bc+ca).$$

28. Arătaţi că, dacă numerele reale pozitive a,b,c îndeplinesc condiţia $ab+bc+ca=1$, atunci

$$\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{c}{1+c^2}=\frac{2}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}}.$$

29. Demonstraţi identitatea lui *Catalan*:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n},\ n\in\mathbb{N}^*.$$

30. Demonstraţi următoarele egalităţi de numere reale:

a) $\left(a_1^2+a_2^2\right)\left(b_1^2+b_2^2\right)=\left(a_1b_1+a_2b_2\right)^2+\left(a_1b_2-a_2b_1\right)^2$;

b) $\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)=\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)^2+$

$$+\left(a_1b_2-a_2b_1\right)^2+\left(a_2b_3-a_3b_2\right)^2+\left(a_3b_1-a_1b_3\right)^2.$$

Generalizare. (identitatea lui *Lagrange*). Dacă $a_1,a_2,\ldots,a_n$; $b_1,b_2,\ldots,b_n\in\mathbb{R}$, atunci

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2=\sum_{1\le i<j\le n}(a_ib_j-a_jb_i)^2.$$

TESTE DE EVALUARE

Testul 1

(2p) 1. ***a)*** Găsiți numerele $k \in \mathbb{Z}$ pentru care fracțiile $\frac{k^2+5}{2}$ și $\frac{2k^2+3}{3}$ sunt echivalente.

b) Calculați: $1,(18)+2,5(45)-2,(72)$.

(2p) 2. Se consideră numerele reale $a=\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{3+2\sqrt{2}}$ și $b=2+\sqrt{6+4\sqrt{2}}$.

a) Arătați că $a,b \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

b) Calculați media aritmetică și geometrică a numerelor a și b.

(2p) 3. ***a)*** Arătați că $(x+y)^2=(x-y)^2+4xy$ pentru orice $x,y \in \mathbb{R}$.

b) Numerele reale a,b îndeplinesc condițiile $a-b=2$ și $ab=4$. Calculați $a+b$.

(3p) 4. Fie fracția $F(x)=\frac{x^3-3x^2-x+3}{x^3-x^2-9x+9}$.

a) Determinați numerele reale x pentru care fracția are valoarea definită.

b) Calculați $F\left(\frac{1}{2}\right)$.

c) Simplificați fracția.

NOTĂ. Timp de lucru 50 minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 2

(2p) 1. ***a)*** Găsiți numerele $k \in \mathbb{Z}$ pentru care fracțiile $\frac{k^2+2}{3}$ și $\frac{3k^2-1}{2}$ sunt echivalente.

b) Calculați: $1,(27)+2,2(27)-3,5$.

(2p) 2. Se consideră numerele reale $a=\frac{1}{3-2\sqrt{2}}-\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ și $b=1+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$.

a) Arătați că $a,b \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

b) Calculați media aritmetică și geometrică a numerelor a și b.

(2p) 3. ***a)*** Arătați că $x^3+y^3=(x+y)\left((x+y)^2-3xy\right)$ pentru orice $x,y \in \mathbb{R}$.

b) Numerele reale a,b îndeplinesc condițiile $a^3+b^3=18$ și $a+b=3$. Calculați $a \cdot b$.

(3p) 4. Fie fracția $F(x)=\frac{x^3-3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$.

a) Determinați numerele reale x pentru care fracția are valoarea definită.

b) Calculați $F\left(\frac{1}{2}\right)$.

c) Simplificați fracția.

NOTĂ. Timp de lucru 50 minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 3

(2p) 1. *a)* Scrieți numărul rațional $\frac{5}{7}$ sub formă de fracție zecimală.

b) Dacă $\frac{5}{7}=0,a_1a_2a_3\ldots$, calculați $a_1+a_2+\ldots+a_{100}$.

(3p) 2. *a)* Arătați că numerele $7-4\sqrt{3}$ și $7+4\sqrt{3}$ sunt iraționale.

b) Calculați media aritmetică și geometrică a numerelor $7-4\sqrt{3}$ și $7+4\sqrt{3}$.

c) Arătați că numărul $\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ este natural.

(2p) 3. *a)* Arătați că $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Fie $a,b\in\mathbb{R}^*$ astfel încât $a^2-ab-2b^2=0$. Determinați $\frac{a}{b}$.

(2p) 4. Se consideră fracția $F(x)=\frac{(x^2-x)(x^2-x-5)+6}{(x^2-x-4)^2-4}$.

a) Determinați numerele reale x pentru care fracția are valoarea definită.

b) Simplificați fracția f.

NOTĂ. Timp de lucru 50 minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 4

(2p) 1. *a)* Scrieți numărul rațional $\frac{3}{7}$ sub formă de fracție zecimală.

b) Dacă $\frac{3}{7}=0,a_1a_2a_3\ldots$, calculați $a_1+a_2+\ldots+a_{101}$.

(3p) 2. *a)* Arătați că numerele $6-4\sqrt{2}$ și $6+4\sqrt{2}$ sunt iraționale.

b) Calculați media aritmetică și geometrică a numerelor $6-4\sqrt{2}$ și $6+4\sqrt{2}$.

c) Arătați că numărul $\sqrt{6-4\sqrt{2}}+\sqrt{6+4\sqrt{2}}$ este natural.

(2p) 3. *a)* Arătați că $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Fie $a,b\in\mathbb{R}^*$ astfel încât $a^2-2ab-3b^2=0$. Determinați $\frac{a}{b}$.

(2p) 4. Se consideră fracția $F(x)=\frac{(x^2+x)(x^2+x+1)-6}{(x^2+x)(x^2+x-8)+12}$.

a) Determinați numerele reale x pentru care fracția are valoarea definită.

b) Simplificați fracția f.

NOTĂ. Timp de lucru 50 minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Tema 1.4
Ordonarea numerelor reale

Definiţie. Fie a şi b două numere reale.

- Dacă a,b sunt pozitive, $a=a_0,a_1a_2a_3...$ şi $b=b_0,b_1b_2b_3...$, spunem că *a este mai mic decât b* şi scriem $a<b$ dacă există $p\in\mathbb{N}$ astfel încât $a_p<b_p$ şi $a_k=b_k$ pentru $k<p$.
- Dacă a,b sunt negative, atunci $a<b$ dacă $-b<-a$.
- Dacă a este negativ şi b este pozitiv, atunci $a<0<b$.

Definiţie. Spunem că numărul real a *este mai mic sau egal decât numărul real* b şi scriem $a\le b$ dacă $a<b$ sau $a=b$.

Observaţie. Relaţia $\le$ are proprietăţile:

a) este *reflexivă*: $a\le a$, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$;

b) este *tranzitivă*: $a\le b$ şi $b\le c\Rightarrow a\le c$ ($a,b,c\in\mathbb{R}$);

c) este *antisimetrică*: $a\le b$ şi $b\le a\Rightarrow a=b$ ($a,b\in\mathbb{R}$).

Relaţia $\le$ este *totală*, adică oricare ar fi numerele reale a şi b, avem $a\le b$ sau $b\le a$.

Relaţia $\le$ este compatibilă cu operaţiile algebrice:

$$a\le b\Rightarrow a+c\le b+c,\ \forall c\in\mathbb{R};$$

$$a\le b \text{ şi } 0\le c\Rightarrow a\cdot c\le b\cdot c\ (a,b,c\in\mathbb{R}).$$

*

1. Daţi trei exemple de numere raţionale cuprinse între $\sqrt{2}$ şi $\sqrt{3}$.

2. Daţi trei exemple de numere iraţionale cuprinse între $0,1$ şi $0,2$.

3. Arătaţi că $1<\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{5}+\frac{\sqrt{5}}{7}+\frac{\sqrt{7}}{11}<2$.

4. Comparaţi numerele:

a) $\frac{3}{10}$ şi $\frac{2}{7}$; *b)* $-7,8765$ şi $-7,8764$; *c)* $2,375$ şi $\frac{19}{8}$; *d)* $-1,3(23)$ şi $-\frac{11}{9}$.

5. Fie $a,b\in\mathbb{R}$, $a>b>0$. Arătaţi că $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ şi $\sqrt{a}>\sqrt{b}$.

6. Comparaţi numerele:

a) $1,4142$ şi $\sqrt{2}$; *b)* -3 şi $-\sqrt{10}$; *c)* $2\sqrt{3}$ şi $3\sqrt{2}$; *d)* $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ şi 6.

7. Ordonaţi crescător numerele: $-3\sqrt{5}$; $\frac{7}{2}$; $-2\sqrt{10}$; $\sqrt{12}$; 0; $3,5(6)$.

8. Ordonaţi crescător numerele:

a) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$, $\frac{\sqrt{5}}{7}$;

b) 2^n+3^{n+1}, $2^{n+1}+3^n$, $2^{n+2}+3^{n-1}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

9. Studiaţi semnul produselor:

a) $(x+1)(x-2)$; *b)* $(2x-1)(x+3)$; *c)* $(3x+2)(2x-3)$; *d)* $(x-1)(2x-3)(3x-5)$.

10. Studiaţi semnul fracţiilor:

a) $\frac{x+1}{x-1}$; *b)* $\frac{3x-2}{2x+1}$; *c)* $\frac{3x+4}{2x-7}$; *d)* $\frac{x+3}{x^2-x}$.

**

11. Fie $n\in\mathbb{N}$. Câte numere naturale sunt între numerele raţionale $\frac{n+1}{3n+2}$ şi $\frac{5n+13}{n+3}$?

12. Determinaţi cel mai mare număr raţional de forma $\frac{\overline{mnp}}{\overline{pnm}}$.

13. Fie a,b numere reale pozitive. Comparaţi numerele:

a) $\sqrt{ab}$ şi $\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; *b)* $\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}$ şi $\frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}$.

14. Fie $n\in\mathbb{N}$. Comparaţi numerele:

a) $a=\sqrt{n}+\sqrt{n+2}$ şi $b=2\sqrt{n+1}$; *b)* $a=\sqrt{n}+\sqrt{2n+3}$ şi $b=\sqrt{n+2}+\sqrt{2n+1}$.

15. Fie $a>b>0$ numere reale. Comparaţi numerele $\frac{1+a}{1+a+a^2}$ şi $\frac{1+b}{1+b+b^2}$.

16. Comparaţi numerele $\frac{1}{x^2-1}$, $\frac{1}{x-1}$ şi $\frac{1}{x+1}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

17. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ inecuaţiile:

a) $x^2-3x+2\le 0$; *b)* $4x^2-3x-1>0$; *c)* $x^2-5x+3\le 2(x-1)-5$;

d) $\frac{2x+3}{x-2}\le 1$; *e)* $\frac{5x-8}{2x+5}\ge -2$; *f)* $\frac{x-1}{3x+2}<1$.

18. Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$. Arătaţi că, oricare ar fi numerele reale pozitive $a<b$, avem

$$a^n<a^kb^{n-k}<b^n\text{, unde } k\in\mathbb{N},\ 1\le k\le n-1.$$

19. Dacă $a<b<c$ sunt numere reale pozitive, arătaţi că $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}<0$.

20. *a)* Determinaţi numerele reale x,y,z ştiind că $x(1-x)+y(2-y)+z(3-z)=\frac{7}{2}$.

b) Determinaţi $x+y+z$ ştiind că $x^2+y^2+z^2+4x+6y-2z+14=0$ $(x,y,z\in\mathbb{R})$.

21. Arătaţi că $x^2-3xy+4y^2\ge 0$ pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

22. Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât $a^2\le bc$, $b^2\le ca$, $c^2\le ab$. Arătați că $a=b=c$.

23. Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$. Arătați că cel puțin unul dintre numerele $a(a+b)$, $b(b+c)$, $c(c+a)$ este nenegativ.

24. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuațiile:

a) $2x^3-3x^2-3x+2>0$; *b)* $\dfrac{x^2+2x+3}{x^2-1}\le 1$; *c)* $\dfrac{x^2-3x-20}{x-3}\ge 2$.

***

25. Fie $a\in\mathbb{R}$, $0\le a\le 1$. Arătați că $x^4-ax+1>0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

26. Fie $k,n\in\mathbb{N}^*$. Arătați că:

a) $\sqrt{k+1}-\sqrt{k}<\dfrac{1}{2\sqrt{k}}<\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$;

b) $2(\sqrt{n+1}-1)<1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$.

27. Fie $a<b<c<d$ numere reale pozitive astfel încât $a+d=b+c$. Arătați că $ad<bc$.

28. Numerele reale x,y,z îndeplinesc condițiile: $x+y+z>0$, $xy+yz+zx>0$, $xyz>0$. Arătați că $x>0$, $y>0$ și $z>0$.

29. Arătați că, pentru orice număr natural $n\ge 2$, avem $\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{n+n}<\dfrac{3}{4}$.

Tema 1.5
Inegalităţi algebrice (extindere)

*

1. Arătaţi că, oricare ar fi numerele reale $x, y \geq 0$, are loc inegalitatea
$$\frac{x+y}{1+x+y} \leq \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y}.$$

2. Demonstraţi că pentru orice numere reale x, y, z au loc inegalităţile:

a) $x^2 + y^2 \geq 2xy$, cu egalitate dacă şi numai dacă $x = y$;

b) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$, cu egalitate dacă şi numai dacă $x = y = z$.

3. Arătaţi că, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$, are loc inegalitatea
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq (a+b)(c+d).$$

4. Fie a, b, c numere reale pozitive. Demonstraţi inegalităţile:

a) $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$; *b)* $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}$.

5. Arătaţi că $\sqrt{(a+b)^2 + (x+y)^2} \leq \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + y^2}$, unde $a, b, x, y \in \mathbb{R}$.

6. Arătaţi că, oricare ar fi numerele reale $x, y > 0$, avem:
$$\min(x, y) \leq \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} \leq \max(x, y).$$
Egalităţile au loc numai în cazul $x = y$.

7. Arătaţi că $(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9$ pentru orice $x, y, z > 0$.

8. Fie a, b, c numere reale pozitive. Demonstraţi inegalităţile:

a) $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$;

b) $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$;

c) $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$.

9. Fie $a, b \in \mathbb{R}_+$. Arătaţi că $1 + \sqrt{ab} \leq \sqrt{(1+a)(1+b)}$. Când are loc egalitatea?

10. Arătaţi că, oricare ar fi numerele reale $a, b, c, d \geq 0$, are loc inegalitatea
$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}.$$

11. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ cu $a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$. Arătaţi că $(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geq 2^n$.

12. Fie a, b, c numere reale pozitive. Demonstraţi că $\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}$.

**

13. Fie $a,b \in \mathbb{R}$ cu $a+b=2$. Arătaţi că $a^4+b^4 \geq 2$.

14. Fie a un număr real pozitiv şi $n \in \mathbb{N}$. Arătaţi că $(1+a)^n + \left(1+\frac{1}{a}\right)^n \geq 2^{n+1}$.

15. *a)* Arătaţi că $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ pentru orice $x,y>0$.

b) Fie $a,b,c>0$. Demonstraţi inegalitatea $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$.

16. *a)* Demonstraţi că, oricare ar fi numerele reale x_1, x_2, y_1, y_2, are loc inegalitatea

$$(x_1y_1+x_2y_2)^2 \leq \left(x_1^2+x_2^2\right)\left(y_1^2+y_2^2\right),$$

cu egalitate dacă şi numai dacă există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_1 = \lambda y_1$ şi $x_2 = \lambda y_2$.

b) Demonstraţi că, oricare ar fi numerele reale $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$, are loc inegalitatea

$$(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2 \leq \left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2\right),$$

cu egalitate dacă şi numai dacă există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_k = \lambda y_k$, $1 \leq k \leq 3$.

Generalizare. (inegalitatea *Cauchy-Buniakovski-Schwarz*). Oricare ar fi numerele reale $x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y_1, y_2, \ldots, y_n$, are loc inegalitatea

$$(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n)^2 \leq \left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)\left(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2\right),$$

cu egalitate dacă şi numai dacă există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_k = \lambda y_k$, $1 \leq k \leq n$.

17. *Inegalitatea lui Minkowski.* Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, atunci

$$\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+\ldots+(a_n+b_n)^2} \leq \sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}.$$

18. Determinaţi minimul expresiei $E(a,b,c)=\frac{a^2}{b^2c^2}+\frac{b^2}{c^2a^2}+\frac{c^2}{a^2b^2}$, unde a,b,c sunt numere reale pozitive cu $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$.

19. *a)* Folosind relaţia $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$, unde $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, arătaţi că

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} \leq 2-\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

b) Arătaţi că $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} \leq \sqrt{2n-1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

20. Arătaţi că, dacă a,b,c sunt numere reale pozitive, atunci

$$\left(1+\frac{ab}{c}\right)\left(1+\frac{bc}{a}\right)\left(1+\frac{ca}{b}\right) \geq (1+a)(1+b)(1+c).$$

21. Arătaţi că, oricare ar fi numerele reale $a,b,c>0$, au loc inegalităţile:

a) $\left(a^2+bc\right)\left(1+\frac{b}{c}\right) \geq (a+b)^2$;

b) $\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(a+c)^2} \geq \frac{1}{a^2+bc}$.

22. Fie x, y, z numere reale pozitive. Demonstrați că:

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\geq\frac{3}{2}.$$ (inegalitatea lui *Nesbitt*)

23. Arătați că, oricare ar fi numerele reale $x, y, z > 0$ cu $xyz = 1$, are loc inegalitatea

$$\frac{1}{x(1+y)}+\frac{1}{y(1+z)}+\frac{1}{z(1+x)}\geq\frac{3}{2}.$$

24. Demonstrați inegalitățile:

a) $\frac{x_1^2}{\lambda_1}+\frac{x_2^2}{\lambda_2}\geq\frac{(x_1+x_2)^2}{\lambda_1+\lambda_2}$, unde $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ și $\lambda_1, \lambda_2 > 0$;

b) $\frac{x_1^2}{\lambda_1}+\frac{x_2^2}{\lambda_2}+\frac{x_3^2}{\lambda_3}\geq\frac{(x_1+x_2+x_3)^2}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$, unde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ și $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$.

Generalizare. Dacă $a_1, a_2, ..., a_n$ și $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n > 0$ sunt numere reale, atunci

$$\frac{x_1^2}{\lambda_1}+\frac{x_2^2}{\lambda_2}+...+\frac{x_n^2}{\lambda_n}\geq\frac{(x_1+x_2+...+x_n)^2}{\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $\frac{x_1}{\lambda_1}=\frac{x_2}{\lambda_2}=...=\frac{x_n}{\lambda_n}$ (inegalitatea lui *Bergstrom*).

25. Demonstrați inegalitatea lui *Nesbitt* folosind inegalitatea lui *Bergstrom*.

26. Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=1$. Arătați că

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{1}{2}.$$

27. Arătați că, dacă a, b, c, x, y, z sunt numere reale pozitive, atunci

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\geq\frac{(x+y+z)^2}{ax+by+cz}.$$

28. Arătați că, oricare ar fi numerele reale pozitive a, b, c, d, are loc inegalitatea

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geq 2.$$

29. *Inegalitatea lui Cebîșev*. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și numerele reale $a_1, a_2, ..., a_n$, $b_1, b_2, ..., b_n$.

a) Dacă $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$ și $b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_n$, atunci are loc inegalitatea:

$$(a_1+a_2+...+a_n)\cdot(b_1+b_2+...+b_n)\leq n(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n).$$

b) Dacă $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$ și $b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n$, atunci are loc inegalitatea:

$$(a_1+a_2+...+a_n)\cdot(b_1+b_2+...+b_n)\geq n(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n).$$

În ambele cazuri, egalitatea are loc dacă și numai dacă $a_1 = a_2 = ... = a_n$ sau $b_1 = b_2 = ... = b_n$.

30. ***a)*** Arătați că $\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}\geq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ pentru orice $x, y > 0$.

b) Fie a, b, c numere reale pozitive. Arătați că $\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2}+\frac{a+b}{c^2}\geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$.

31. Fie $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n > 0$ astfel încât $a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = \dots = a_n + b_n$. Arătați că

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_n}\right) \le n\left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n}\right).$$

32. Fie $a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n$ numere reale. Arătați că $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \le \frac{2n-1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} a_k$.

***

33. Determinați valoarea minimă a expresiei $E(x, y) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2$, unde $x, y > 0$ cu $x + y = 1$.

34. Arătați că, dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, atunci au loc inegalitățile:

a) $\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} + \frac{1}{a+b-c} \ge \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$;

b) $\sqrt{-a+b+c} + \sqrt{a-b+c} + \sqrt{a+b-c} \le \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$.

35. Fie $a, b, c > 0$ cu $a^2 + b^2 + c^2 = 14$. Arătați că $\sqrt{a+15} + \sqrt{2b+12} + \sqrt{3c+7} \le 12$.

36. Fie $a, b, c > 0$ cu $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Arătați că $\frac{a^3}{b+2c} + \frac{b^3}{c+2a} + \frac{c^3}{a+2b} \ge \frac{1}{3}$.

37. Arătați că $\frac{a+b}{a+3b+2c} + \frac{b+c}{2a+b+3c} + \frac{c+a}{3a+2b+c} \ge 1$, oricare ar fi $a, b, c > 0$.

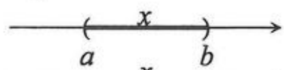
Tema 1.6

Operaţii cu intervale de numere reale

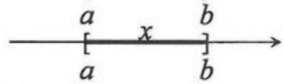
Un *interval* este o submulţime nevidă I a mulţimii $\mathbb{R}$ cu proprietatea că, pentru orice $u, v \in I$, $u < v$, dacă x este un număr real între u şi v, atunci $x \in I$.

1. Intervale mărginite: sunt intervalele a căror reprezentare geometrică (pe axa numerelor) este un segment. Un interval mărginit poate fi:

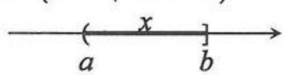
- deschis: $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$



- închis: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$



- semiînchise / semideschise:
  - închis la stânga şi deschis la dreapta: $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$
  - deschis la stânga şi închis la dreapta: $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$.



Observaţie. Un interval închis cu capetele egale se reduce la un punct: $[a,a] = \{a\}$.

2. Intervale nemărginite: sunt intervalele a căror reprezentare geometrică (pe axa numerelor) este o semidreaptă. Un interval nemărginit poate fi:

- nemărginit la stânga şi mărginit la dreapta:
  - deschis la dreapta: $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$

  - închis la dreapta: $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}$

- nemărginit la dreapta şi mărginit la stânga:
  - deschis la stânga: $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

  - închis la stânga: $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge a\}$.

Observaţie. Mulţimea $\mathbb{R}$ este un interval nemărginit: $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

*

1. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $1,73 \in \left(\sqrt{3}, \infty\right)$; ***b)*** $1 \in \mathbb{R} \setminus (1, \infty)$; ***c)*** $\mathbb{N} \subset [0, \infty)$;

d) $\{-1, 1\} \subset [-1, 1)$; ***e)*** $[-1, 1] \subset \left(-2, \dfrac{3}{2}\right)$; ***f)*** $(2, \pi) \subset \left[2, \sqrt{10}\right]$.

2. Determinaţi mulţimile:

a) $[-1, 5] \cap \left(\pi, \sqrt{31}\right)$; ***b)*** $(-\infty, -1) \cap [-3, \infty)$; ***c)*** $(-3, 1) \cup [0, 3]$;

d) $(-\infty, 0) \cup [0, \infty)$; **e)** $(-1, 1] \setminus \left(-\sqrt{2}, 0\right]$; ***f)*** $[0, \infty) \setminus (1, \infty)$.

3. Determinați mulțimile:

a) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cap \mathbb{N}$; *b)* $[-3,3) \cap \mathbb{Z}$; *c)* $[-1,1] \setminus \mathbb{Z}$; *d)* $\mathbb{R} \setminus \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$.

4. Calculați suma numerelor întregi din intervalul $\left[\sqrt{3}-\sqrt{31},\ \sqrt{2}+\sqrt{41}\right]$.

5. Determinați mulțimile:

a) $\left(-\infty, -\frac{a}{2}\right) \cup (-a, \infty)$, unde $a > 0$;

b) $(a,b) \cap \left(-\infty, \frac{a+b}{2}\right)$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$;

c) $\left(-\infty, \frac{a+b}{2}\right] \setminus \left[\sqrt{ab}, \infty\right)$, unde $a, b \geq 0$.

******

6. Fie $a, b \in \mathbb{Z}$, $a < b$. Determinați cardinalul mulțimii $(a,b) \cap \mathbb{Z}$.

7. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Arătați că, oricare ar fi $x \in [a,b]$, avem $a+b-x \in [a,b]$.

8. Se consideră intervalul $I = (1, \infty)$. Arătați că, pentru orice $x, y \in I$, avem
$$xy - x - y + 2 \in I.$$

9. Fie $x, y > 0$ astfel încât $3x + 5y = 15$. Arătați că $x + y \in (3,5)$.

10. Fie $m, n \geq 2$ numere naturale. Determinați $\left(\frac{n}{mn+1}, \frac{mn+1}{n}\right) \cap \mathbb{N}$.

11. Determinați numerele reale x astfel încât $\left(\frac{x-2}{2}, \frac{2x+1}{3}\right) \cap \left(\frac{3x+2}{3}, \frac{x+3}{2}\right) \neq \phi$.

12. Determinați numerele întregi $a < b$ în fiecare dintre cazurile:

a) $[a,b] \cup [-1,1] = [-1,3]$; *b)* $(a,b) \cap \mathbb{Z} = \{-1,0,1\}$; *c)* $[a,b] \setminus \{0,1\} = [-1,0) \cup (0,1)$.

13. Determinați numerele reale $a < b$ în fiecare dintre cazurile:

a) $[a,b] \cup (-1,1) = [-3,1)$; *b)* $(a,b] \cap [0,\pi) = (0,3]$; *c)* $[a,b] \setminus (0,1) = \{0\} \cup \left[1, \sqrt{3}\right]$.

14. Determinați intervalul I în fiecare dintre cazurile:

a) $I \cup (-1,3) = (-1,7)$ și $I \cap (-1,3] = [0,3]$;

b) $I \cup (0,5) = (0,7]$ și $I \cap (0,5) = (1,5)$;

c) $I \cup [-3,1] = [-3,2)$ și $I \cap [-3,1] = [0,1]$.

15. Arătați că 1 este singurul punct comun al intervalelor $\left[\frac{n}{n+1}, \frac{n+1}{n}\right]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

16. Calculați suma numerelor pare din intervalul $\left[n^2 - n + 1,\ n^2 + n + 1\right]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

***

17. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, notăm $I_n = \left[\frac{n+1}{n}, \frac{13n-2}{n+1}\right]$.

a) Determinați $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât mulțimea $I_m \cap \mathbb{Z}$ să aibă 10 elemente.

b) Arătați că $I_n \subset I_{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

18. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval și $x_1, x_2, ..., x_n \in I$. Arătați că, oricare ar fi $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \geq 0$ cu $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = 1$, avem $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n \in I$.

19. Se consideră intervalele $I = (a, 3b+2)$ și $J = (2a-1, b+5)$, unde $a, b \in \mathbb{Z}$. Determinați a și b astfel încât $I \cap J \cap \mathbb{Z} = \{4\}$.

20. Arătați că, dacă un interval I conține toate intervalele de forma $(-n, n)$ cu $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $I = \mathbb{R}$.

E TESTE DE EVALUARE

Testul 1

(3p) 1. *a)* Ordonați crescător numerele: $4, 3\sqrt{2}, 2\sqrt{3}, \sqrt{11}$.

b) Comparați numerele reale $3+2\sqrt{2}$ și $13-2\sqrt{6}$.

(2p) 2. *a)* Determinați mulțimea $(-\infty,3)\setminus(-1,1)$.

b) Determinați numerele reale a și b astfel încât $(0,a)\cap(b,1)=(0,1)$.

(2p) 3. Se consideră expresia $E(x)=15x^2-16x-15$, $x\in\mathbb{R}$.

a) Arătați că $E(x)=(3x-5)(5x+3)$.

b) Studiați semnul expresiei după valorile reale ale lui x.

(2p) 4. *a)* Fie $a,b>0$, $a\neq b$ și intervalele $I=\left(0,\sqrt{ab}\right)$ și $J=\left(\dfrac{2ab}{a+b},\dfrac{a+b}{2}\right)$. Având în vedere inegalitatea mediilor, determinați $I\setminus J$.

b) Fie $a,b,c>0$ cu $abc=1$. Folosind inegalitatea mediilor, arătați că

$$(a+2)(b+3)(c+6)\geq 48.$$

NOTĂ. Timp de lucru 50 minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 2

(3p) 1. *a)* Ordonați crescător numerele: $7, 5\sqrt{3}, 3\sqrt{5}, 2\sqrt{11}$.

b) Comparați numerele reale $5+2\sqrt{3}$ și $13-3\sqrt{2}$.

(2p) 2. *a)* Determinați mulțimea $[0,3)\setminus(1,\infty)$.

b) Determinați numerele reale a și b astfel încât $(-1,a)\cap(b,1)=(-1,1)$.

(2p) 3. Se consideră expresia $E(x)=6x^2+x-2$, $x\in\mathbb{R}$.

a) Arătați că $E(x)=(2x-1)(3x+2)$.

b) Studiați semnul expresiei după valorile reale ale lui x.

(2p) 4. *a)* Fie $a,b>0$, $a\neq b$ și intervalele $I=\left(0,\sqrt{ab}\right)$ și $J=\left(\dfrac{2ab}{a+b},\dfrac{a+b}{2}\right)$. Având în vedere inegalitatea mediilor, determinați $I\cap J$.

b) Fie $a,b,c>0$ cu $abc=1$. Folosind inegalitatea mediilor, arătați că

$$(a+1)(b+2)(c+8)\geq 32.$$

NOTĂ. Timp de lucru 50 minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Tema 1.7
Modulul unui număr real

Modulul unui număr real x, notat cu $|x|$, se definește astfel:

$$|x| = \begin{cases} -x, \text{ dacă } x < 0 \\ x, \text{ dacă } x \geq 0 \end{cases}.$$

Din definiție rezultă că $|x| = \max(-x, x)$, deci $x \leq |x|$ și $x \geq -|x|$.

Proprietățile modulului unui număr real

1. $|x| \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$;
2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
3. $|-x| = |x|$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$;
4. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$;
5. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$;
6. $|x + y| \leq |x| + |y|$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$ (cu egalitate dacă și numai dacă $x \cdot y \geq 0$);
7. $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$;
8. Dacă $x \in \mathbb{R}$ și $a > 0$, atunci $|x| \leq a$ dacă și numai dacă $-a \leq x \leq a$.
9. Dacă $x \in \mathbb{R}$ și $a > 0$, atunci $|x| \geq a$ dacă și numai dacă $x \leq -a$ sau $x \geq a$.

*

1. Calculați:

   a) $|\sqrt{3} - \sqrt{5}| + |\sqrt{3} - 1| + |\sqrt{5} - 3|$;

   b) $|1 - \sqrt{3}| - |2 - \sqrt{3}| + |3 - \sqrt{3}|$;

   c) $3 \cdot |1 - \sqrt{3}| + 5 \cdot |2 - \sqrt{3}| + |3 - 2\sqrt{3}|$.

2. Calculați:

   a) $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$;

   b) $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{8}$;

   c) $\left|\sqrt{14 - 6\sqrt{5}} - \sqrt{21 - 4\sqrt{5}}\right| - |5 - \sqrt{45}|$.

3. Pentru fiecare număr real x, notăm $x_+ = \frac{x + |x|}{2}$ și $x_- = \frac{-x + |x|}{2}$. Arătați că $x = x_+ - x_-$ și $|x| = x_+ + x_-$.

4. Determinați numerele reale x, y știind că $|x| = 3$, $|y| = 2{,}3$ și $x - y = 5{,}3$.

5. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $|x|=5$; *b)* $|x+1|=-1$; *c)* $|x-1|=3$; *d)* $|2x-1|=|x-2|$;

e) $|3x-2|=|x+1|$; *f)* $|3x+5|=|x-7|$; *g)* $||x-3|-5|=1$; *h)* $||x-1|-2|=3$;

6. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuațiile:

a) $|x|\le 1$; *b)* $|x|>3$; *c)* $|3x-2|<\frac{3}{2}$; *d)* $\left|5x-\frac{1}{3}\right|\ge\frac{1}{2}$;

e) $||3x+2|-3|\le 5$; *f)* $||x-1|-3|\ge 2$; *g)* $||3x-5|-11|\le 7$; *h)* $\left||x+2|-\frac{1}{2}\right|\ge\frac{3}{4}$.

7. Fie $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$. Arătați că, pentru orice $x\in[a,b]$, avem $\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\le\frac{b-a}{2}$.

8. Fie $a,b\in\mathbb{R}$. Arătați că $|x-a|+|x-b|\ge|a-b|$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

9. Fie x,y numere reale. Arătați că:

a) $|x-1|+|x-2|+|x-3|\ge|x|$;

b) $|x-y|-|x+y|\le 2\cdot\min(|x|,|y|)$.

10. Fie $x,y\in\mathbb{R}$ astfel încât $|2x-y|\le 1$ și $|x-2y|\le 2$. Arătați că $|x-y|\le 1$.

**

11. Fie $x,y,z\in\mathbb{R}$. Demonstrați egalitățile:

a) $\min(x,y)=\frac{x+y-|x-y|}{2}$ și $\max(x,y)=\frac{x+y+|x-y|}{2}$;

b) $|x-y|+|y-z|+|z-x|=2(\max(x,y,z)-\min(x,y,z))$.

12. Arătați că nu există $x,y\in\mathbb{Q}$ astfel încât $|x-\sqrt{2}|+|y-\sqrt{3}|=1$.

13. Fie $n\in\mathbb{N}^*$ și $a_k\in\mathbb{R}$, $|a_k|\le 1$, $1\le k\le n$. Arătați că

$$|a_1+2a_2+3a_3+...+na_n|\le\frac{n(n+1)}{2}.$$

14. Fie $x,y\in\mathbb{R}$ cu $x^2+y^2=1$. Demonstrați că $|x+y|\le\sqrt{2}$ și $|xy|\le\frac{1}{2}$.

15. Fie $a,b,c\in\mathbb{R}^*$ cu $a+b+c=0$. Arătați că $\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}=\left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right|$.

16. Arătați că, dacă numerele reale a și b îndeplinesc condiția $|a-b|<\frac{1}{n}$, pentru orice număr natural $n\ge 1$, atunci $a=b$.

17. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $|2x-1|+|x-2|=7$; *b)* $|2x+1|=||x-1|-3|$; *c)* $|x-1|+|x+1|=|5x-3|$.

18. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuațiile:

a) $|2x-3|>|3x-2|$; *b)* $|x+2|+|x-3|\le 13$; *c)* $|3x-2|-|2x+1|\ge 4$.

19. Fie $a,b,c \in \mathbb{R}$. Rezolvați ecuația $||x-a|-b|=c$, $x \in \mathbb{R}$.

20. Determinați numerele reale a pentru care ecuația $|x+1|-|x-1|=ax+1$ are soluție unică.

21. Determinați numerele reale x, y astfel încât $|x|+|2y-1|=5$ și $x-|y|=1$.

22. Arătați că, oricare ar fi numerele reale x, y cu $|x|<1$ și $|y|<1$, avem $\left|\frac{x+y}{1+xy}\right|<1$.

23. Arătați că, dacă $1 \le x \le 2$, atunci $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=2$.

24. Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$ astfel încât $x+y+z=3$. Arătați că

$$\sqrt{x^4+2y^2+1}+\sqrt{y^4+2z^2+1}+\sqrt{z^4+2x^2+1} \ge 6.$$

25. Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$, $(x+y)(y+z)(z+x) \ne 0$ cu $|x|+|y|+|z|=3$. Arătați că

$$\frac{1}{|x+y|}+\frac{1}{|y+z|}+\frac{1}{|z+x|} \ge \frac{3}{2}.$$

***

26. Arătați că, oricare ar fi numerele reale *x* și *y*, au loc inegalitățile:

a) $|x-y|+|x+y| \le 2\sqrt{x^2+y^2}$;

b) $\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \le \frac{|x|}{1+|x|}+\frac{|y|}{1+|y|}$.

27. Numerele întregi a și b îndeplinesc condiția $|a+b|>|1+ab|$. Arătați că $ab=0$.

28. Fie $a,b,c \in (0,\infty)$ și $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $|ax-b| \le c$, $|bx-c| \le a$, $|cx-a| \le b$. Arătați că $0 \le x \le 2$.

29. Determinați numerele întregi a,b pentru care ecuația $|x-1|+|x-a|+|x-b|=1$ are o singură soluție reală.

30. Fie $E(x,y,z)=\left|\frac{|x-y|}{|xy|}+\frac{x+y}{xy}-\frac{2}{z}\right|+\frac{|x-y|}{|xy|}+\frac{x+y}{xy}+\frac{2}{z}$, unde $x,y,z \in \mathbb{R}^*$. Arătați că

$$E(x,y,z)=4\max\left\{\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}\right\}.$$

Tema 1.8

Partea întreagă şi partea fracţionară a unui număr real

Definiţie. Fie $x \in \mathbb{R}$. Cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu *x*, notat cu $[x]$, se numeşte *partea întreagă* a lui *x*.

Numărul real $\{x\} = x - [x]$ se numeşte *partea fracţionară* a lui *x*.

Proprietăţi

1. $[x] \le x < [x]+1$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
2. $x-1 < [x] \le x$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
3. $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$;
4. $[x+k] = [x]+k \Leftrightarrow k \in \mathbb{Z}$.

1. $\{x\} \in [0,1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
2. $\{x\} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$;
3. $\{x\} = \{y\} \Leftrightarrow x-y \in \mathbb{Z}$;
4. $\{x+n\} = \{x\} \Leftrightarrow n \in \mathbb{Z}$.

Identitatea lui Hermite.

$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx]$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$.

*

1. Determinaţi partea întreagă şi partea fracţionară a numerelor:

a) $\frac{11}{3}$; *b)* $\frac{123}{11}$; *c)* $3,01(3)$; *d)* $-5,123$; *e)* $-1,01$; *f)* $-2,(6)$.

2. Calculaţi:

a) $\left[\sqrt{1313}\right]+5\cdot\left\{-\frac{1}{10}\right\}$;

b) $\left[\sqrt{12345}\right]+(2+\sqrt{3})\cdot\left\{-\sqrt{3}\right\}$;

c) $\left[\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{11+6\sqrt{2}}\right]$;

d) $\left[1+\sqrt{5}\right]-\left\{\frac{1}{2-\sqrt{5}}\right\}-4\cdot\left\{\frac{1}{3-\sqrt{5}}\right\}$.

3. Arătaţi că numărul $(1+\sqrt{2})\cdot\{13+\sqrt{2}\}$ este natural.

4. Determinaţi numerele $\overline{abc}$ astfel încât $\left[\sqrt{\overline{abc}}\right]=24$ şi $a+b+c=21$.

5. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Determinaţi partea întreagă a numerelor:

a) $a_n=\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}\right)^2$;

b) $b_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$;

c) $c_n=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$.

6. Arătaţi că $\left\{\sqrt{n^2+5n+3}\right\}=\frac{n-1}{\sqrt{n^2+5n+3}+n+2}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

7. *a)* Determinați $\left[\sqrt{k^2+k}\right]$, $k \in \mathbb{N}$;

b) Calculați $S_n = \left[\sqrt{1\cdot 2}\right]+\left[\sqrt{2\cdot 3}\right]+...+\left[\sqrt{n(n+1)}\right]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

8. Arătați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există $x \in \mathbb{R}$ (care depinde de x) astfel încât

$$\{x\}+\{2x\}+...+\{nx\}<1.$$

9. Determinați numărul real x în fiecare dintre cazurile:

a) $[x]=-1$ și $\{x\}=0,1(3)$; *b)* $x+[x]=2,1$; *c)* $[x]-\{x\}=1,3$.

10. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $x^2-x+1=[x]$; *b)* $\left[\frac{2x-1}{3}\right]=\{x\}$; *c)* $[x]=\frac{x+\{x\}}{2}$;

d) $\left[\frac{3x-2}{5}\right]=x-1$; *e)* $\left[\frac{x+1}{3}\right]=\frac{x-3}{2}$; *f)* $\left[x+\frac{1}{3}\right]+\left[x+\frac{1}{5}\right]=1$.

**

11. Determinați numerele reale x și y care îndeplinesc simultan condițiile

$$[x]+\{y\}=1,2 \text{ și } \{x\}+[y]=3,3.$$

12. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $a=\frac{113}{13}$. Determinați cardinalul mulțimii $\{a, 2a, 3a, ..., na\} \cap \mathbb{Z}$.

13. Arătați că, pentru orice număr real $x>1$, există un singur număr natural n cu proprietatea

$$1+2+3+...+n \le x < 1+2+3+...+n+(n+1).$$

14. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $a+b$, $a-b$, ab sunt numere întregi. Arătați că $a, b \in \mathbb{Z}$.

15. Determinați partea întreagă a numerelor:

a) $a_n=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n^2}}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

b) $b_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$, unde numărul radicalilor este n;

c) $c_n=\sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2+n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

16. Fie $x, y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. Arătați că $\{x\}+\{y\}=1$ dacă și numai dacă $x+y \in \mathbb{Z}$.

17. Arătați că, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, avem:

a) $[x]=[y] \Rightarrow |x-y|<1$; *b)* $\{x\}=\{y\} \Leftrightarrow x-y \in \mathbb{Z}$.

18. Arătați că, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, avem:

a) $x<y \Rightarrow [x] \le [y]$; *b)* $[x]<[y] \Rightarrow x<y$.

19. Arătați că, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, au loc afirmațiile:

a) $[-x]=\begin{cases}-[x], & \text{dacă } x \in \mathbb{Z}\\ -[x]-1, & \text{dacă } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\end{cases}$; *b)* $\{-x\}=\begin{cases}0, & \text{dacă } x \in \mathbb{Z}\\ 1-\{x\}, & \text{dacă } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\end{cases}$

20. Demonstrați că, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$, au loc inegalitățile:

a) $[x]+[y] \le [x+y] \le [x]+[y]+1$; ***b)*** $[x]-[y]-1 \le [x-y] \le [x]-[y]$.

21. Fie $x, y \in \mathbb{R}$. Arătați că au loc inegalitățile:

a) $x, y \ge 0 \Rightarrow [x]\cdot[y] \le [xy] \le [x]\cdot[y]+[x]+[y]$;

b) $x, y \le 0 \Rightarrow [xy] \le [x]\cdot[y]$.

22. ***a)*** Arătați că $\{\{x\}+y\}=\{x+\{y\}\}$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că $\{\{x+y\}+z\}=\{x+\{y+z\}\}$ pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.

23. Arătați că, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}^*$, are loc relația $\left[\frac{x}{n}\right]=\left[\frac{[x]}{n}\right]$.

24. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $[x]=1$; ***b)*** $\left[x+\frac{3}{2}\right]=5$; ***c)*** $\left[x+\frac{1}{2}\right]+\left[x+\frac{5}{2}\right]=12$;

d) $\left[\frac{2x+3}{5}\right]=\frac{x-1}{2}$; ***e)*** $\left[\frac{x-3}{2}\right]=\left[\frac{x-2}{3}\right]$; ***f)*** $\left[\frac{3x-7}{4}\right]+\left[\frac{3x-5}{4}\right]=\frac{5x+3}{7}$.

25. ***a)*** Arătați că $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Rezolvați ecuația $[x]+\left[x+\frac{3}{8}\right]=[2x]$, $x \in \mathbb{R}$.

***

26. Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Arătați că, dacă $[x+a]=[x+b]$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, atunci $a=b$.

27. Determinați cardinalul mulțimii $A=\left\{\left\{\frac{n^2}{2}\right\}+\left\{\frac{n^2}{5}\right\} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$.

28. Fie $p>2$ un număr prim. Determinați numerele naturale n pentru care

$$\{\sqrt{n}\}=\{\sqrt{n+p}\}.$$

29. Arătați că $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right]$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

30. Arătați că, dacă numărul real $a>0$ îndeplinește condiția $\{a\}=\frac{1}{a}$, atunci $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Tema 1.9
Aproximări ale numerelor reale

Aproximări şi rotunjiri. Fie $x \in \mathbb{R}$ şi e un număr real pozitiv. Spunem că un număr real x^* *aproximează* pe x (este *aproximare* a lui x) cu *eroare* cel mult egală cu e (respective mai mică decât e) dacă $|x - x^*| \leq e$ (respectiv $|x - x^*| < e$).

Aproximarea se face prin *lipsă* dacă $x^* \leq x$ şi prin *adaos* dacă $x^* \geq x$.

Fie x' şi x'' două aproximări ale unui număr real x. Spunem că x' *este o aproximare a lui* x *mai bună decât* x'' dacă

$$|x - x'| < |x - x''|.$$

Aproximări zecimale. Fie x un număr real şi $n \in \mathbb{Z}$.

1. Aproximarea zecimală a lui x prin lipsă cu eroare de cel mult 10^{-n} este

$$x'_n = 10^{-n} \cdot [10^n \cdot x].$$

- dacă $x = x_0, x_1x_2x_3...$ este un număr real pozitiv, atunci $x'_n = x_0, x_1x_2x_3...x_n$;
- dacă $x = -x_0, x_1x_2x_3...$ este un număr real negativ, atunci $x'_n = -x_0, x_1x_2x_3...x_n - \frac{1}{10^n}$;

2. Aproximarea zecimală a lui x prin adaos cu eroare de cel mult 10^{-n} este

$$x''_n = 10^{-n} \cdot \left([10^n \cdot x] + 1\right).$$

- dacă $x = x_0, x_1x_2x_3...$ este un număr real pozitiv, atunci $x''_n = x_0, x_1x_2x_3...x_n + \frac{1}{10^n}$;
- dacă $x = -x_0, x_1x_2x_3...$ este un număr real negativ, atunci $x''_n = -x_0, x_1x_2x_3...x_n$;

3. Rotunjirea lui x cu eroare de cel mult 10^{-n} este $r_n = \begin{cases} x'_n, \text{ dacă } x - x'_n < x'' - x \\ x''_n, \text{ dacă } x - x'_n \geq x'' - x \end{cases}$.

Mai exact, dacă $x = \pm x_0, x_1x_2x_3...$ este un număr real, atunci

$$r_n = \begin{cases} \pm x_0, x_1x_2...x_n, \text{ dacă } x_{n+1} \in \{0,1,2,3,4\} \\ \pm(x_0, x_1x_2...x_n + 10^{-n}), \text{ dacă } x_{n+1} \in \{5,6,7,8,9\} \end{cases}.$$

Observaţii.

1. Aproximările zecimale (prin lipsă sau prin adaos) sunt numere raţionale: $x'_n, x''_n \in \mathbb{Q}$.

2. Dacă $x > 0$, atunci $x'_n \leq x < x''_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{Z}$.

Dacă $x < 0$, atunci $x'_n < x \leq x''_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{Z}$.

3. Aproximarea zecimală prin lipsă cu eroare cel mult egală cu 10^{-n} a unui număr real x se mai numeşte *trunchierea* după a n – a zecimală a lui x.

Exemple.

1. Pentru $n=1$ se obţin aproximări ale lui x, prin lipsă sau prin adaos, cu eroare cel mult egală cu 10^{-1} (altfel spus, aproximările cu eroare de cel mult o zecime). Pentru numărul $x = 24,53$ avem:

– o aproximare a lui x prin lipsă: $x_1' = 10^{-1} \cdot [10 \cdot 24{,}53] = 24{,}5$;

– o aproximare a lui x prin adaos: $x_1'' = 10^{-1}\left([10^1 \cdot 24{,}53] + 1\right) = 24{,}6$.

Cum $x - x_1' = 24{,}53 - 24{,}5 = 0{,}03$ şi $x_1'' - x = 24{,}6 - 24{,}53 = 0{,}07$, iar $0{,}03 < 0{,}07$, rezultă că numărul 24,5 îl rotunjeşte pe 24,53 cu eroare de cel mult 10^{-1} (o zecime).

2. Pentru $n = -2$, se obţin aproximări ale lui x cu eroare cel mult egală cu 10^2 (altfel spus, aproximările la ordinul sutelor). Pentru numărul $x = 321{,}4$ avem:

– o aproximare a lui x prin lipsă : $x_l = 10^2 \cdot [10^{-2} \cdot 321{,}4] = 10^2 \cdot 3 = 300$;

– o aproximare a lui x prin adaos: $x_a = 10^2 \cdot \left([10^{-2} \cdot 321{,}4] + 1\right) = 10^2 \cdot 4 = 400$.

*

1. Arătaţi că $1{,}23$ reprezintă o aproximare a numărului $1{,}2289$ cu o eroare mai mică decât $0{,}002$.

2. Determinaţi aproximările zecimale prin lipsă şi prin adaos cu o eroare mai mică decât 10^{-2} ale numerelor:

a) $0{,}01357$; *b)* $-1{,}1134$; *c)* $\sqrt{13}$; *d)* $-\frac{3}{8}$; *e)* $1-\sqrt{2}$.

3. Determinaţi aproximările zecimale prin lipsă şi prin adaos cu o eroare mai mică decât 10^{-3} ale numerelor:

a) $0{,}5107$; *b)* $-4{,}0592$; *c)* $\sqrt{17}$; *d)* $-\frac{1}{6}$; *e)* $3-\sqrt{11}$.

4. Determinaţi trunchierea după a doua zecimală pentru fiecare dintre numerele:

a) $3{,}37524$; *b)* $-0{,}03751$; *c)* $\frac{3}{7}$; *d)* $-\sqrt{5}$; *e)* $2-\sqrt{3}$.

5. Determinaţi trunchierea după a treia zecimală pentru fiecare dintre numerele:

a) $0{,}12735$; *b)* $-5{,}0987$; *c)* $-\frac{2}{3}$; *d)* $-\sqrt{2}$; *e)* $2-\sqrt{5}$.

6. Determinaţi rotunjirea la a doua zecimală pentru fiecare dintre numerele:

a) $1{,}0099$; *b)* $0{,}035$; *c)* $\frac{3}{8}$; *d)* $\sqrt{5}$; *e)* $3-\sqrt{5}$.

7. Determinaţi rotunjirea la a treia zecimală pentru fiecare dintre numerele:

a) $1{,}0075$; *b)* $3{,}0935$; *c)* $\frac{5}{6}$; *d)* $\sqrt{12}$; *e)* $3-\sqrt{7}$.

**

8. Fie $1{,}134$ şi $1{,}1369$ două aproximări ale numărului $1{,}1357$. Stabiliţi care dintre cele două aproximări este mai bună.

9. Determinaţi aproximările zecimale prin lipsă şi prin adaos cu o eroare mai mică decât 10^{-3} ale numerelor:

a) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; *b)* $\sqrt{3}+\sqrt{5}$; *c)* $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; *d)* $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$.

10. Determinaţi rotunjirea la treia zecimală pentru fiecare dintre numerele:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$; *b)* $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; *c)* $1,(7)-\sqrt{3}$; *d)* $1+\sqrt{3}-\sqrt{5}$.

11. Determinaţi mulţimea numerelor reale care aproximează prin lipsă numărul $3,123$ cu o eroare mai mică decât $e=0,01$.

12. Aceleaşi cerinţe ca în problema precedentă pentru:
a) $17,51$ şi $e=0,003$; *b)* $-5,432$ şi $e=0,013$; *c)* $-0,1357$ şi $e=0,011$.

13. Determinaţi mulţimea numerelor reale care aproximează prin adaos numărul $0,1073$ cu o eroare mai mică decât $e=0,001$.

14. Aceleaşi cerinţe ca în problema precedentă pentru:
a) $1,987$ şi $e=0,013$; *b)* $-0,2351$ şi $e=0,002$; *c)* $-0,37$ şi $e=0,023$.

15. Determinaţi mulţimea numerelor reale care aproximează numărul $-135,1257$ cu o eroare mai mică decât $e=0,012$.

16. Determinaţi aproximările zecimale cu eroare cel mult egală cu $0,001$ ale numărului $\sqrt{5}+\sqrt{7}$.

17. Determinaţi mulţimea numerelor reale care aproximează simultan numerele $a=1,7653$ şi $b=1,786$ cu o eroare mai mică decât $e=0,023$.

***

18. Se consideră numărul real $s=\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{17}+\sqrt{19}}$. Determinaţi:

a) aproximările zecimale prin lipsă şi prin adaos cu o eroare mai mică decât 10^{-3};
b) rotunjirea la treia zecimală.

19. Fie $\dfrac{m}{n}\in\left(1,\sqrt{2}\right)$ şi $\dfrac{m+p}{n+p}$, unde $m,n,p\in\mathbb{N}^*$, două aproximări ale numărului $\sqrt{2}$. Stabiliţi care dintre cele două aproximări este mai bună.

20. Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Determinaţi aproximările zecimale cu o eroare mai mică decât 10^{-2} ale numărului $\left\{\sqrt{4n^2+n}\right\}$.

E TESTE DE EVALUARE

Testul 1

(2p) **1.** *a)* Determinați partea întreagă a numărului $2+\sqrt{5}$.

b) Determinați partea fracționară a numărului $2-\sqrt{5}$.

(2p) **2.** Calculați:

a) $|x-1|+|x|,\ x\in[0,1]$;

b) $|1-\sqrt{3}|+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

(3p) **3.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $|x-2|=1$; *b)* $[x]=2$; *c)* $[x+1]+[x+3]+[x+5]=12$.

(2p) **4.** Determinați numerele reale x în fiecare din cazurile:

a) $||2x-1|-3|\le 1$; *b)* $\left[\frac{2x-3}{2}\right]=\left\{\frac{x-2}{3}\right\}$.

NOTĂ. Timp de lucru 50 minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 2

(2p) **1.** *a)* Determinați partea întreagă a numărului $3+\sqrt{11}$.

b) Determinați partea fracționară a numărului $3-\sqrt{11}$.

(2p) **2.** Calculați:

a) $|x-1|+|x+1|,\ x\in[-1,1]$;

b) $|2-\sqrt{5}|+\sqrt{14-6\sqrt{5}}$.

(3p) **3.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $|x-1|=2$; *b)* $[x]=1$; *c)* $[x]+[x+1]+[x+2]=12$.

(2p) **4.** Determinați numerele reale x în fiecare din cazurile:

a) $||3x-5|-2|\ge 1$; *b)* $2\{x\}+3[x]=5x-2$.

NOTĂ. Timp de lucru 50 minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Tema 1.10

Probleme pentru performanță școlară și olimpiade

1. Determinați $a,b,c \in \mathbb{N}^*$, diferite două câte două, astfel încât $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \in \mathbb{Z}$.

2. Arătați că orice număr rațional se scrie ca diferența a două pătrate de numere raționale.

3. Fie n un număr natural cu suma cifrelor egală cu 2000. Arătați că $\sqrt{n} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

4. Arătați că $\sqrt{6}+\sqrt{14}+\sqrt{15}+\sqrt{35} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

5. Există $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ astfel încât numerele $x+\sqrt{3}$ și $x^2-\sqrt{3}$ să fie raționale?

6. Aflați numerele iraționale x pentru care numerele x^2+2x și x^3-6x sunt raționale.

7. Aflați numerele iraționale x pentru care numerele $\frac{2x^2+1}{x-3}$ și $\frac{3x^2-1}{3x-5}$ sunt raționale.

8. Determinați $m,n \in \mathbb{N}$ astfel încât numărul $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{m}}{\sqrt{3}+\sqrt{n}}$ să fie rațional.

9. Fie $a,b \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ astfel încât $a+b=p\sqrt{3}$ și $a^3+b^3=q\sqrt{3}$, unde $p,q \in \mathbb{Q}^*$. Arătați că ab este număr rațional.

10. Fie $x,y,z \in \mathbb{R}^*$ astfel încât xy, yz, zx sunt numere raționale.

a) Arătați că numărul $x^2+y^2+z^2$ este rațional.

b) Dacă, în plus, $x^3+y^3+z^3$ este număr rațional, atunci $x,y,z \in \mathbb{Q}$.

11. Fie $x,y \in \mathbb{R}$ astfel încât $x^2+y^2 \in \mathbb{Q}$, $x^3+y^3 \in \mathbb{Q}$, $x^4+y^4 \in \mathbb{Q}$. Arătați că $x+y \in \mathbb{Q}$ și $xy \in \mathbb{Q}$.

12. Arătați că orice număr real $x \in (0,1)$ se scrie ca diferența a două numere iraționale din intervalul $(0,1)$.

13. *a)* Arătați că orice număr real nenul se scrie ca produs de două numere iraționale diferite.

b) Arătați că orice număr real se scrie ca suma a n numere iraționale diferite, unde $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

14. Între numerele reale a,b,c există relația $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$. Demonstrați că cel puțin două dintre aceste numere sunt opuse.

15. Arătați că fracția $F(x,y)=\frac{x+\sqrt{y^2+1}-y}{x\sqrt{y^2+1}+xy+1}$ nu depinde de x.

16. Fie $a,b,c \in \mathbb{R}$ astfel încât $a+b+c=1$. Arătați că cel puțin unul dintre numerele $a+bc$, $b+ca$, $c+ab$ este nenegativ.

17. Lungimile laturilor unui triunghi verifică relația $\frac{a^2}{b+c}=\frac{b^2}{b+c}=\frac{c^2}{c+a}$. Demonstrați că triunghiul este echilateral.

18. Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$ astfel încât $x^2+yz\leq 2$, $y^2+zx\leq 2$, $z^2+xy\leq 2$. Determinați valoarea minimă și valoarea maximă a sumei $x+y+z$.

19. Fie x, y, z trei numere reale pozitive care satisfac simultan condițiile:

$$x\leq 1,\ x+y\leq 5,\ x+y+z\leq 14.$$

Determinați valoarea maximă a sumei $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

20. Să se demonstreze că $(n!)^2>n^n$ pentru orice număr natural $n\geq 3$.

21. Arătați că există un singur număr real a astfel încât $\frac{n}{n+1}<a<\frac{n+1}{n}$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

22. Arătați că, dacă numerele reale a și b îndeplinesc condiția $a<2b<3a<4b<5a<\ldots$, atunci $a=b$.

23. Fie $a\geq b\geq c>0$ astfel încât $a^n\leq b^n+c^n$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Arătați că $a=b$.

24. Arătați că, dacă $\sqrt{7}-\frac{m}{n}>0$, atunci $\sqrt{7}-\frac{m}{n}>\frac{1}{mn}$, unde $m,n\in\mathbb{N}^*$.

25. Determinați primele n zecimale ale numărului $\sqrt{a}$, unde $a=\underbrace{11\ldots1}_{de\ n\ ori}$, $n\geq 2$.

26. Aflați $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ și cifrele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ astfel încât $\sqrt{\overline{a_1a_2\ldots a_n}}-\sqrt{\overline{a_1a_2\ldots a_{n-1}}}=a_n$.

27. Fie $a,b\in\mathbb{R}$, $0\leq a<b$. Arătați că intervalul (a,b) conține o infinitate de numere raționale x cu proprietatea $x^2\in\mathbb{Q}$.

28. Determinați numerele naturale nenule a, b care au proprietatea: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\in[a,b]$, oricare ar fi $x,y\in[a,b]$.

29. *a)* Demonstrați că, oricare ar fi numerele reale $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$, are loc identitatea

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}b_k\right)+\frac{1}{n^2}\sum_{1\leq i<j\leq n}(a_i-a_j)(b_i-b_j).$$

b) Folosind a), deduceți inegalitatea lui Cebîșev.

30. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n\in\mathbb{R}$. Arătați că, dacă $\sum_{k=1}^{n}a_k=0$ și $\sum_{k=1}^{n}|a_k|=1$, atunci

$$\sum_{k=1}^{n}|a_kb_k|\leq\frac{1}{2}\left(\max_{1\leq k\leq n}b_k-\min_{1\leq k\leq n}b_k\right).$$

31. *a)* Arătați că, dacă a, b sunt numere reale pozitive, atunci $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

b) Arătaţi că, dacă x, y, z sunt numere reale pozitive, atunci

$$\frac{x+y}{z^2}+\frac{y+z}{x^2}+\frac{z+x}{y^2}\geq 2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$$

32. Demonstraţi că, oricare ar fi numerele reale $x, y, z>0$, are loc inegalitatea

$$\frac{1}{x^2+yz}+\frac{1}{y^2+zx}+\frac{1}{z^2+xy}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right).$$

33. Arătaţi că, oricare ar fi numerele reale $a, b, c>0$, avem

$$\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}\geq a+b+c.$$

34. Calculaţi partea întreagă a numărului $E=\frac{a}{a+2b}+\frac{b}{b+2c}+\frac{c}{c+2a}$, unde a, b, c sunt numere reale pozitive.

35. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţiile:

a) $[x]+\frac{1}{[x]}=\{x\}+\frac{1}{\{x\}}$; *b)* $x+\frac{2}{[x]}=\frac{3}{1+\{x\}}$; *c)* $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]+\left[x+\frac{1}{3}\right]=1$.

36. *a)* Daţi un exemplu de număr a astfel încât $\{a\}+\left\{\frac{1}{a}\right\}=1$.

b) Arătaţi că orice număr real a cu proprietatea de mai sus este iraţional.

37. *a)* Fie $x, y\in\mathbb{R}$ astfel încât $|x-y|\leq\frac{1}{n}$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Arătaţi că $x=y$.

b) Fie $a, b, c, d\in\mathbb{R}$ astfel încât $[na]+[nb]=[nc]+[nd]$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Arătaţi că $x=y$.

38. Arătaţi că, dacă numărul real x are proprietatea $[2nx]=2[nx]$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$, atunci x este întreg.

39. Fie $x\in\mathbb{R}$. Să se demonstreze că $[x]+[2x]+...+[nx]=\frac{(n+1)[nx]}{2}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, dacă şi numai dacă $x\in\mathbb{Z}$.

40. Fie $x\in\mathbb{R}$. Arătaţi că x este număr întreg dacă şi numai dacă relaţia

$$[x]+[2x]+...+[nx]=\frac{n([x]+[nx])}{2}$$

are loc pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

41. Demonstraţi că, pentru orice $x\in\mathbb{R}$ şi $n\in\mathbb{N}^*$, are loc egalitatea

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+...+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx]$$

(identitatea lui *Hermite*).

SOLUŢII

CAPITOLUL 1. Mulţimea numerelor reale

Tema 1.1. Numere raţionale şi iraţionale. Reprezentări zecimale

1. *a)* Dacă $d=(2m+1,3m+2)$, atunci d divide $2(3m+2)-3(2m+1)=1$, deci $d=1$. *b)* Fie $d>1$ un divizor comun al numerelor naturale $n+2$ şi $3n+1$. Atunci d divide $3(n+2)-(3n+1)=5$, deci $d=5$. În consecinţă, $n=5k-2$, $k\in\mathbb{N}^*$. **2.** *a)* 5,(0); *b)* 1,625; *c)* 0,75; *d)* $-\frac{3}{20}=-\frac{15}{100}=-0{,}15$; *e)* $1{,}(27)$; *f)* $\frac{481}{125}=\frac{8\cdot481}{8\cdot125}=\frac{3848}{1000}=3{,}848$; *g)* $-0{,}(6)$; *h)* $2{,}(384615)$; *i)* $1{,}02(6)$; *j)* $-0{,}7(12)$. **3.** *a)* $\frac{52}{9}$; *b)* $-\frac{112}{99}$; *c)* $\frac{107}{450}$; *d)* $\frac{10001}{9900}$; *e)* $-\frac{10697}{3330}$. **4.** Dacă a^2 şi a^3 ar fi numere raţionale, atunci $a=\frac{a^3}{a^2}\in\mathbb{Q}$, contradicţie. **5.** *a)* Deoarece $\frac{1}{13}=0{,}(076923)$ şi $100=6\cdot16+4$, rezultă că a $100-a$ zecimală a numărului raţional $\frac{1}{13}$ este a patra cifră a perioadei, adică 9. *b)* Din $\frac{76923}{999999}=\frac{1}{13}$ rezultă că $13\cdot76923=9\cdot111111$, de unde $111111=13\cdot8547$. **6.** Să presupunem că $a=\frac{p}{q}$, $p,q\in\mathbb{Z}$, $(p,q)=1$. Din condiţiile $ma\in\mathbb{Z}$ şi $na\in\mathbb{Z}$, deducem că $q|m$ şi $q|n$, ceea ce implică $q=1$, deci $a\in\mathbb{Z}$. **7.** Fie $a=a_0,a_1a_2a_3...$ şi cifra c care se repetă. Cum celelalte cifre apar de un număr finit de ori, există $r\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $a_r\neq c$ şi $a_k=c$ pentru orice $k>r$, deci $a=a_0,a_1a_2...a_r(c)$. **8.** Dacă $\frac{p}{q}=a_0,a_1a_2...a_p$, atunci $\frac{p}{q}=a_0+\frac{\overline{a_1a_2...a_p}}{10^p}=\frac{a_0\cdot10^p+\overline{a_1a_2...a_p}}{2^p\cdot5^p}$. Simplificând membrul drept din relaţia precedentă până la o fracţie ireductibilă, rezultă că $q=2^\alpha\cdot5^\beta$ ($\alpha,\beta\in\mathbb{N}$). Reciproc, dacă $q=2^\alpha\cdot5^\beta$, atunci $\frac{p}{q}=p\cdot(0{,}5)^p\cdot(0{,}2)^q$. Calculând produsul din membrul drept al acestei egalităţi, obţinem o fracţie zecimală finită. **9.** *a)* Presupunem că numărul $a=0{,}101001000100001...$ este raţional, adică a este fracţie zecimală periodică. Fie p numărul cifrelor din perioadă. Perioada conţine cel puţin o cifră de 1 şi cel mult $p-1$ cifre de 0. Prin urmare, între două cifre consecutive de 1 nu putem avea mai mult de $p-1$ cifre de 0, contradicţie. *b)* Observăm că după a $k-a$ cifră de 1 urmează k cifre de 0. Până la a $k-a$ cifră de 1 avem $1+2+...+(k-1)=\frac{(k-1)k}{2}$ zerouri. Punem condiţia $k-1+\frac{(k-1)k}{2}\le1000$ şi obţinem: $k(k+1)\le2002\Leftrightarrow k\le44$. Numărul cifrelor de 0 până la a 44 cifră de 1 este 946; rezultă că a $1000-a$ zecimală a lui a este 0. *c)* Suma primelor 1000 zecimale ale numărului a este 45. **10.** *a)* ($\Rightarrow$) Dacă am avea $y\neq0$, ar rezulta că $a=-\frac{x}{y}\in\mathbb{Q}$, contradicţie; rezultă că $y=0$ şi apoi $x=0$. *b)* ($\Rightarrow$) $x\sqrt{2}+y\sqrt{3}+z\sqrt{5}=0$ $\Rightarrow$ $x\sqrt{2}+y\sqrt{3}=-z\sqrt{5}$ $\Rightarrow$ $(x\sqrt{2}+y\sqrt{3})^2=5z^2$ $\Rightarrow$ $2x^2+3y^2+2xy\sqrt{6}=5z^2$ $\Rightarrow$ $xy\sqrt{6}\in\mathbb{Q}$ $\Rightarrow$ $x=0$ sau $y=0$. Să presupunem, de exemplu, că $x=0$. Atunci $3y+\sqrt{15}\cdot z=0$, de unde obţinem $y=z=0$. **11.** Dacă am avea $r+a\in\mathbb{Q}$, ar rezulta că $a=(r+a)-r\in\mathbb{Q}$, contradicţie. Asemănător se demonstrează celelalte afirmații. **12.** Pentru $n=0$, afirmația este evidentă. Din acest motiv, vom presupune că $n \geq 1$. *a)* $(\Rightarrow)$ $\sqrt{n}=k \in \mathbb{N} \Rightarrow n=k^2$; $(\Leftarrow)$ $n=k^2$, $k \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{n}=k$. *b)* Să presupunem că $\sqrt{n}=\frac{p}{q}$, $p,q \in \mathbb{N}^*, (p,q)=1$. Atunci $p^2=nq^2$, de unde deducem că $p^2 | n$ (pentru că $(p,q)=1$), deci există $r \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $n=p^2r$; obținem: $p^2=p^2q^2r \Rightarrow q^2r=1 \Rightarrow q=r=1$. Deci $\sqrt{n}=p \in \mathbb{N}$. **13.** $m-n\sqrt{2}$ și $m+n\sqrt{2}$, unde $m,n \in \mathbb{Z}$. **14.** Presupunem prin absurd că $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}=r \in \mathbb{Q}$; avem: $\sqrt{2}+\sqrt{3}=r-\sqrt{5} \Rightarrow 2\sqrt{6}=r^2-2r\sqrt{5} \Rightarrow 24=(r^2-2r\sqrt{5})^2 \Rightarrow$ $r^3\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$, de unde obținem $r=0$, contradicție. **15.** Fiecare dintre numerele de sub radicali nu sunt pătrate perfecte. *a)* Ultima cifră a numărului 5^n+2 este 7. *b)* Un pătrat perfect este de forma $7n+r$, unde $n \in \mathbb{N}$ și $r \in \{0,1,2,4\}$. *c)* $(n+2)^2 < n^2+5n+7 < (n+3)^2$. d) Numărul de sub radical se scrie sub forma $(n+1)(n+4)\cdot(n+2)(n+3)=$ $(n^2+5n+4)\cdot(n^2+5n+6)=r(r+2)=r^2+2r$, unde $r=n^2+5n+4$. Concluzia se obține având în vedere că $r^2<r^2+2r<(r+1)^2$. **16.** $(k+1)^2<k^2+3k+14<(k+2)^2$ pentru orice $k>10$; obținem $k=10$. **17.** *a)* Pentru $a=2$ și $b=1$ avem $a^2-3b^2=1$, deci $2+\sqrt{3} \in M$; *b)* Fie $x=a+b\sqrt{3} \in M$ și $y=c+d\sqrt{3} \in M$. Cum $xy=ac+3bd+(ad+bc)\sqrt{3}$ și $(ac+3bd)^2-3(ad+bc)^2=(a^2-3b^2)(c^2-3d^2)=1\cdot 1=1$, rezultă că $xy \in M$. *c)* $(2+\sqrt{3})^n \in M$ și $(2+\sqrt{3})^{n+1}>(2+\sqrt{3})^n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. **18.** *a)* $(\Rightarrow)$ $\sqrt{m}+\sqrt{n}=r \in \mathbb{Q}$ $(r>0) \Rightarrow n=(r-\sqrt{m})^2 \Rightarrow n=r^2+m-2r\sqrt{m} \Rightarrow \sqrt{m} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{m} \in \mathbb{N}$ (vezi 12). Analog se arată că $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$. *b)* Ecuația se scrie sub forma $\sqrt{3x}+\sqrt{3y}=30$. Conform punctului anterior, deducem că $3x=a^2$ și $3y=b^2$ ($a,b \in \mathbb{N}$). Din $3x=a^2$ rezultă că $3|a$. Analog $3|b$. Deci $a=3m$ și $b=3n$ $(m,n \in \mathbb{N})$; obținem $m+n=10$ $(m,n) \in \{(k,10-k) \mid 0 \leq k \leq 10\}$. Așadar, $(x,y) \in \{(3k^2, 3(10-k)^2) \mid 0 \leq k \leq 10\}$. **19.** Dacă $a-b \in \mathbb{Q}$, atunci $a=\frac{1}{2}((a+b)+(a-b)) \in \mathbb{Q}$, contradicție. Presupunem prin absurd că $ma+nb$ este număr rațional. Cum $na+nb \in \mathbb{Q}$, deducem că $(m-n)a=(ma+nb)-(na+nb) \in \mathbb{Q}$, contradicție. **20.** Din ipoteză obținem $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{12}$, $x \geq 2$ și $y \geq 2$. Dacă $x>4$, atunci $\frac{7}{12}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}<\frac{1}{4}+\frac{1}{y}$, de unde $y<3$, deci $y=2$ și $x=12$. Pentru $x=2$ rezultă $y=12$, iar pentru $x=3$ obținem $y=4$. Așadar, $(x,y) \in \{(2,12),(12,2),(3,4),(4,3)\}$. **21.** Notând $s_n=\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$, avem $s_n^2=2n+1+2\sqrt{n(n+1)}$. Dar $n^2<n(n+1)<(n+1)^2$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, de unde rezultă că $n(n+1)$ nu este pătrat perfect și, în consecință, $\sqrt{n(n+1)} \notin \mathbb{Q}$. Prin urmare, $s_n^2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ și atunci $s_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. **22.** Conform problemei 18, numărul $\sqrt{n+1}+\sqrt{4n+21}$ este rațional dacă și numai dacă $n+1=a^2$ și $4n+21=b^2$ ($a,b \in \mathbb{N}^*$), de unde obținem: $b^2-4a^2=17 \Leftrightarrow (b-2a)(b+2a)=17 \Leftrightarrow b-2a=1$ și $b+2a=17 \Leftrightarrow a=4$ și $b=9 \Rightarrow n=15$.

Tema 1.2. Operații algebrice cu numere reale

1. $(-1)^n$. **2.** *a)* $3\sqrt{3}$; *b)* 0. **3.** *a)* $\frac{3}{13}=0,(230769) \Rightarrow a_{2000}-a_{1000}=-4$ și $a_1+a_2+...+a_{100}=444$. *b)* $\frac{41}{333}=\frac{123}{999}=0,(123) \Rightarrow a_5+a_{10}+a_{15}+...+a_{100}=39$. **4.** *a)* 4; *b)* 3. **5.** *a)* $-(2x-3)=15 \Rightarrow x=-6$;

b) $\frac{1}{3x-2}=5 \Rightarrow x=\frac{11}{15}$; *c)* $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. **6.** *a)* 3 şi 1; *b)* $\sqrt{10}$ şi $\sqrt{3}-\sqrt{2}$. **7.** *a)* 0; *b)* $190-74\sqrt{6}$; *c)* $-95+37\sqrt{6}$. **8.** *a)* 10; *b)* 0,37; *c)* $-\frac{31}{33}$; *d)* $\frac{3}{5}-\frac{2}{15}+\frac{1}{7}-\frac{2}{7}=\frac{34}{105}$. **9.** *a)* $-\frac{65}{12}$; *b)* $\frac{601}{363}$; *c)* $-\frac{25}{3}$. **10.** $x\in\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$. **11.** *a)* 1,73...; *b)* 1,41...; *c)* 2,38...; *d)* 0,55...; *e)* 2,08. **12.** $\frac{15}{143}$.
13. $ax-by+ay-bx=a(x+y)-b(x+y)=(a-b)(x+y)=1$. **14.** *a)* $19+5\sqrt{6}-17\sqrt{10}+7\sqrt{15}$; *b)* 1; *c)* $3\sqrt{11}$. **15.** *a)* $\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}-\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}-(\sqrt{3}-\sqrt{2})=$ $=2\sqrt{2}$; *b)* $\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=4$. **16.** *a)* 5; *b)* $\frac{125\sqrt{6}}{36}$; *c)* 1. **17.** 8. **18.** Fie $r=\frac{p}{q}$, unde $p,q\in\mathbb{N}^*$ şi $(p,q)=1$, astfel încât $\frac{24}{11}:\frac{p}{q}=\frac{24q}{11p}\in\mathbb{N}^*$, $\frac{34}{13}:\frac{p}{q}=\frac{34q}{13p}\in\mathbb{N}^*$, $\frac{48}{7}:\frac{p}{q}=\frac{48q}{7p}\in\mathbb{N}^*$. Întrucât $(p,q)=1$ şi $(24,11)=1$, $(34,13)=1$, $(48,7)=1$, rezultă că p este un divizor comun al numerelor 24, 34, 48 iar q este un multiplu comun al numerelor 11, 13, 7. Prin urmare, $r=\frac{(24,34,48)}{[11,13,7]}=\frac{2}{1001}$. **19.** $\frac{a}{b}=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{a^2-ab+2b^2}{a^2+ab+3b^2}=\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2-\frac{a}{b}+2}{\left(\frac{a}{b}\right)^2+\frac{a}{b}+3}=\frac{3(5-\sqrt{5})}{20}$. **20.** *a)* $\frac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}=\frac{1}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1}\cdot(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1}}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$; *b)* $S_n=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$; *c)* $m=15$.

Tema 1.3. Formule de calcul prescurtat. Identităţi

1. *a)* $(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2=(a+b)(a^2+2ab+b^2)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. *c)* $a^3+b^3=a^3+$ $+a^2b-a^2b+b^3=a^2(a+b)-b(a^2-b^2)=(a+b)(a^2-b(a-b))=(a+b)(a^2-ab+b^2)$. **2.** *a)* a^2+ $+b^2=(a+b)^2-2ab=34$; *b)* $a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab)=198$; *c)* $a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-$ $-2(ab)^2=1154$; *d)* $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=32 \Rightarrow a-b\in\{-4\sqrt{2},4\sqrt{2}\}$. **3.** $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=$ $=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$. **4.** Din relaţia $z=\frac{xy}{x+y}$ rezultă că $z\in\mathbb{Q}$ şi $xy-yz-zx=0$. Atunci $x^2+y^2+z^2=x^2+y^2+z^2+2(xy-yz-zx)=(x+y-z)^2$. **5.** a) 970; b) $(a+b)^3=a^3+b^3+$ $+3ab(a+b)$, de unde rezultă că $ab=1$; obţinem $a^2+b^2=14$. c) $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=6 \Rightarrow$ $a^3-b^3=(a-b)(a^2+b^2+ab)=14$. **6.** a) $x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2$ şi $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=$ $x^2+\frac{1}{x^2}=a^2-2 \Rightarrow x^4+\frac{1}{x^4}=(a^2-2)^2-2=a^4-4a^2+2$; b) b^3+3b. **7.** Cum $(a-b)^3=a^3-b^3-$ $-3ab(a-b) \Rightarrow ab=12 \Rightarrow a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=25$. **8.** *a)* 1; *b)* 1; *c)* $\frac{1}{a}$. **9.** *a)* $(x+1)(x-2)$; *b)* $(x+1)(2x+3)$; *c)* $(x-1)(x-2)(x-3)$; *d)* $(x-1)(x+2)(2x-1)$; *e)* $(x-2)(x-1)^2(x+1)$; *f)* $(x-2)(x+2)(x^2+x+1)$. **10.** *a)* $A(2)=0$; obţinem $A(x)=(x-2)(x^2-2x-3)=(x-2)(x+1)(x-3)$ şi $B(x)=x(x+1)(x-3)$. *b)* $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0,3\}$; *c)* $k\in\{-2,1,2\}$. **11.** *a)* $E(-2)=E(2)=0$; *b)*

$x^4-x^3-6x^2+4x+8=(x-2)^2(x+1)(x+2) \Rightarrow F(x)=\dfrac{(x-2)^2(x+1)(x+2)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}=\dfrac{(x-2)(x+1)}{x^2+4}$. **12.** *a)* $E(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x^3-1}\cdot\dfrac{x^2+x+1}{x^2-1}=\dfrac{1}{x+1}$; *b)* $E\left(\dfrac{1}{k}\right)=\dfrac{k}{k+1}, k\in\mathbb{N}^* \Rightarrow E(1)\cdot E\left(\dfrac{1}{2}\right)\cdot E\left(\dfrac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot E\left(\dfrac{1}{n}\right)=$ $=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\dfrac{n}{n+1}=\dfrac{1}{n+1}$. **13.** Din relația $x+y+z=1$, rezultă că $x+y=1-z$, $y+z=1-x$ și $z+x=1-y$; obținem $14=(1-x)(1-y)(1-z)=1-(x+y+z)+xy+yz+zx-xyz$, de unde deducem că $xy+yz+zx-xyz=14$. **14.** $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-5\cdot\dfrac{x}{y}+6=0 \Rightarrow \dfrac{x}{y}\in\{2,3\}$. **15.** Din ipoteză rezultă că $1+x^2=xy+yz+zx+x^2=(x+y)(x+z)$, $1+y^2=(y+z)(y+x)$ și $1+z^2=(z+x)(z+y)$. În consecință, $(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)=\left((x+y)(y+z)(z+x)\right)^2$. **16.** $a+b+c=0 \Rightarrow -a=b+c \Rightarrow$ $\Rightarrow a^2=b^2+c^2+2bc$; obținem: $\dfrac{1}{-a^2+b^2+c^2}+\dfrac{1}{a^2-b^2+c^2}+\dfrac{1}{a^2+b^2-c^2}=-\dfrac{1}{2bc}-\dfrac{1}{2ca}-\dfrac{1}{2ab}=$ $=-\dfrac{a+b+c}{2abc}=0$. **17.** *a)* $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc=(a+b)^3+c^3-$ $-3ab(a+b+c)=(a+b+c)((a+b)^2-(a+b)c+c^2)-3ab(a+b+c)=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-$ $-bc-ca)$; *b)* $(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)=(a+b)^3+c^3+3(a+b)c(a+b+c)-(a^3+b^3+c^3)=$ $=(a+b)((a+b)^2+3c(a+b+c)-(a^2-ab+b^2))=3(a+b)(b+c)(c+a)$.

18. *a)* $(x-y)\left(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\ldots+xy^{n-2}+y^{n-1}\right)=x^n+x^{n-1}y+x^{n-2}y^2+\ldots+x^2y^{n-2}+xy^{n-1}-$ $-x^{n-1}y-x^{n-2}y^2-\ldots-x^2y^{n-2}-xy^{n-1}-y^n=x^n-y^n$. *b)* Înlocuim în egalitatea precedentă pe y cu $-y$. *c)* $x=a+b$ și $y=a \Rightarrow (a+b)^n-a^n=Mb$. *d)* $2^{3m+1}+3\cdot5^{2m+1}=2\cdot8^m+15\cdot(M17+8^m)=$ $=17\cdot8^m+M17=M17$. **19.** $a^5+\dfrac{1}{a^5}=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\left(a^4+\dfrac{1}{a^4}-\left(a^2+\dfrac{1}{a^2}\right)+1\right)$. Cum $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2=a^2+$ $+\dfrac{1}{a^2}+2=16$ și $a^4+\dfrac{1}{a^4}=\left(a^2+\dfrac{1}{a^2}\right)^2-2=194$, deducem că $a^5+\dfrac{1}{a^5}=724$. **20.** Amplificând a doua fracție cu a și a treia fracție cu ab, obținem:

$$\frac{a}{1+a+ab}+\frac{b}{1+b+bc}+\frac{c}{1+c+ca}=\frac{a}{1+a+ab}+\frac{ab}{a+ab+1}+\frac{1}{ab+1+a}=1.$$

21. *a)* $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc=a^2(b+c)+abc+b^2(c+a)+abc+c^2(a+b)+abc=$ $=a(ab+bc+ca)+b(ab+bc+ca)+c(ab+bc+ca)=(a+b+c)(ab+bc+ca)$.

b) $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc=(b+c)a^2+(b^2+c^2+2bc)a+bc(b+c)=$ $=(b+c)(a^2+ab+ac+bc)=(a+b)(b+c)(c+a)$.

c) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+b^2c-bc^2=(b-c)(a^2-ab-ac+bc)$ $=(b-c)(a(a-b)-c(a-b))=-(a-b)(b-c)(c-a)$.

d) $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)=(b-c)a^3-(b^3-c^3)a+bc(b^2-c^2)=$ $=(b-c)[a^3-(b^2+bc+c^2)a+bc(b+c)]$. Ordonăm acum paranteza mare după puterile lui b; avem $a^3-(b^2+bc+c^2)a+bc(b+c)=(c-a)b^2+c(c-a)b-a(c^2-a^2)=(c-a)(b^2+bc-a(c+a))=$ $=(c-a)(b^2-a^2+c(b-a))=-(a-b)(c-a)(a+b+c)$, de unde rezultă concluzia.

e) Ordonăm mai întâi după puterile lui a și apoi după puterile lui b; obținem:

$a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3=(c-b)a^3-(c-b)(b^2+bc+c^2)a+bc(c^2-b^2)=$

$=(c-b)[(c-a)b^2+c(c-a)b-a(c^2-a^2)]=(c-b)(c-a)(b^2+bc-ac-a^2)=$

$=(c-b)(c-a)(b^2-a^2+c(b-a))=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$.

22. Ordonând membrul stâng după puterile lui x ,deducem că $(x-a)^2(b-c)+(x-b)^2(c-a)+$ $+(x-c)^2(a-b)=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=-(a-b)(b-c)(c-a)$.

23. *a)* $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}=\dfrac{a(c-b)+b(a-c)+c(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=0$.

b) $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}=\dfrac{a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=$

$=-\dfrac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=1$ (vezi $21-$c)).

c) Se aduce la acelaşi numitor şi apoi se foloseşte $21-$ d).

d) $\dfrac{1}{a(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{b(b-c)(b-a)}+\dfrac{1}{c(c-a)(c-b)}=\dfrac{bc(c-b)+ca(a-c)+ab(b-a)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}=$

$=\dfrac{(c-b)a^2-(c^2-b^2)a+bc(c-b)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}=\dfrac{(c-b)(a^2-(c+b)a+bc)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}=\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}=\dfrac{1}{abc}$.

24. *a)* Înmulţind egalitatea $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}=1$ cu $a+b+c$: $\left(\dfrac{a^2}{b+c}+a\right)+\left(\dfrac{b^2}{c+a}+b\right)+$ $+\left(\dfrac{c^2}{a+b}+c\right)=a+b+c\Rightarrow\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}=0$. *b)* Deoarece $\dfrac{a^3}{b+c}+a^2=\dfrac{a^2(a+b+c)}{b+c}$, rezultă că $\dfrac{a^3}{b+c}+\dfrac{b^3}{c+a}+\dfrac{c^3}{a+b}+a^2+b^2+c^2=(a+b+c)\left(\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}\right)=0$. **25.** Înmulţind succesiv relaţia $\dfrac{a}{b-c}+\dfrac{b}{c-a}+\dfrac{c}{a-b}=0$ cu $\dfrac{1}{b-c},\dfrac{1}{c-a},\dfrac{1}{a-b}$ şi adunând (pe coloane), rezultă

$$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}+\left(\frac{b+c}{(c-a)(a-b)}+\frac{c+a}{(a-b)(b-c)}+\frac{a+b}{(b-c)(c-a)}\right)=0.$$

Dar $\dfrac{b+c}{(c-a)(a-b)}+\dfrac{c+a}{(a-b)(b-c)}+\dfrac{a+b}{(b-c)(c-a)}=0$, de unde concluzia.

26. Notăm $\dfrac{1}{x-y}=a$, $\dfrac{1}{y-z}=b$ şi $\dfrac{1}{z-x}=c$ $(a,b,c\in\mathbb{Q})$. Cum $ab+bc+ca=0$, rezultă că $s=a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2$. **27.** Notăm $s=a+b+c$; avem:

$(s-a)(s-b)(s-c)+abc=s^3-(a+b+c)s^2+(ab+bc+ca)s=s(ab+bc+ca)$.

28. Observăm că $1+a^2=ab+bc+ca+a^2=(a+b)(a+c)$; obţinem $\dfrac{a}{1+a^2}+\dfrac{b}{1+b^2}+\dfrac{c}{1+c^2}=$

$=\dfrac{a}{(a+b)(a+c)}+\dfrac{b}{(b+c)(b+a)}+\dfrac{c}{(c+a)(c+b)}=\dfrac{2(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\dfrac{2}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}}$.

29. $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+...+\dfrac{1}{n+n}=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+...+\dfrac{1}{2n-1}+\dfrac{1}{2n}-2\cdot\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+...+\dfrac{1}{2n}\right)=$

$=1+\left(\dfrac{1}{2}-2\cdot\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{1}{4}-2\cdot\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{1}{5}+...+\dfrac{1}{2n-1}+\left(\dfrac{1}{2n}-2\cdot\dfrac{1}{2n}\right)=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+...+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n}$.

obținem: $\left(\frac{a}{b}\right)^2-2\cdot\frac{a}{b}-3=0\Rightarrow\left(\frac{a}{b}+1\right)\left(\frac{a}{b}-3\right)=0\Rightarrow\frac{a}{b}\in\{-1,3\}$. **4.** *a)* Rezolvăm în $\mathbb{R}$ ecuația $(x^2+x)(x^2+x-8)+12=0$. Notând $x^2+x=y\Rightarrow y(y-8)+12=0\Leftrightarrow y^2-8y+12=0\Leftrightarrow y\in\{2,6\}$. Din ecuațiile $x^2+x=2$ și $x^2+x=6$ rezultă $x\in\{-3,-2,1,2\}$. Fracția are valoarea definită pentru $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,-2,1,2\}$. *b)* Simplificăm fracția : $\frac{y(y+1)-6}{y(y-8)+12}=\frac{y^2+y-6}{y^2-8y+12}=\frac{(y-2)(y+3)}{(y-2)(y-6)}=\frac{y+3}{y-2}$.

Prin urmare, $F(x)=\frac{x^2+x+3}{x^2+x-2}$.

Tema 1.4. Ordonarea numerelor reale

1. $\sqrt{2}<1{,}43-\frac{1}{10^{n+1}}<\sqrt{3}$, $n\in\mathbb{N}^*$. **2.** $0{,}1<0{,}1+\frac{1}{10\sqrt{n^2+1}}<0{,}2$, $n\in\mathbb{N}^*$. **3.** Suma este cuprinsă între $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{11}>\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=1$ și $\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\frac{3}{11}<2$. **4.** *a)* $\frac{3}{10}>\frac{2}{7}$; *b)* $-7{,}8765<-7{,}8764$; *c)* $2{,}375=\frac{19}{8}$; *d)* $-1{,}3(23)<-\frac{11}{9}$. **5.** $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}<0$ și $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}>0\Rightarrow$ $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ și $\sqrt{a}>\sqrt{b}$. **6.** *a)* $\sqrt{2}>1{,}4142$; *b)* $-3>-\sqrt{10}$; *c)* $2\sqrt{3}<3\sqrt{2}$; *d)* $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}<1{,}5+1{,}8+2{,}3<6$. **7.** $-3\sqrt{5}<-2\sqrt{10}<0<\sqrt{12}<\frac{7}{2}<3{,}5(6)$. **8.** *a)* $\frac{\sqrt{5}}{7}<\frac{1}{\sqrt{2}+1}<\frac{1}{2}$; *b)* Pentru orice $n\in\mathbb{N}, n\geq 3$ avem $2^{n+2}+3^{n-1}<2^{n+1}+3^n<2^n+3^{n+1}$. **11.** $0<\frac{n+1}{3n+2}<1$ și $4<\frac{5n+13}{n+3}<5$; între cele două numere raționale sunt 4 numere naturale. **12.** $\frac{901}{109}$. **13.** *a)* $\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}=\frac{(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}\geq 0$; *b)* Se calculează diferența celor două numere. **14.** *a)* $b-a=(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})-\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}-$ $-\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}>0\Rightarrow a<b$; *b)* $a<b$. **15.** $\frac{1+a}{1+a+a^2}-\frac{1+b}{1+b+b^2}=\frac{(b-a)(a+b+ab)}{(1+a+a^2)(1+b+b^2)}<0$. **16.** Se compară numerele $\frac{1}{x^2-1}$, $\frac{x+1}{x^2-1}$ și $\frac{x-1}{x^2-1}$. **17.** *a)* $x\in[1,2]$; *b)* $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right)\cup(1,\infty)$; *c)* $[2,5]$; *d)* $x\in[-5,2)$; *e)* $x\in\left(-\infty,-\frac{5}{2}\right)\cup\left[-\frac{2}{9},\infty\right)$; *f)* $x\in\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\cup\left(-\frac{2}{3},\infty\right)$. **18.** $a^kb^{n-k}>a^ka^{n-k}=a^n$ și $a^kb^{n-k}<b^kb^{n-k}=b^n$. **19.** $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}=\frac{1}{a-b}+\frac{b-a}{(b-c)(c-a)}<0$. **20.** *a)* Relația se scrie sub forma $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=0$, de unde rezultă că $x=\frac{1}{2}$, $y=1$, $z=\frac{3}{2}$; *b)* $(x+2)^2+$ $+(y+3)^2+(z-1)^2=0\Rightarrow x=-2$, $y=-3$, $z=1$. **21.** $x^2-3xy+4y^2=\left(x-\frac{3y}{2}\right)^2+\frac{7y^2}{4}\geq 0$. **22.** Adunăm membru cu membru cele trei inegalități; obținem: $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\leq 0\Rightarrow a=b=c$. **23.** Dacă cele trei numere ar fi negative, atunci $0>2(a(a+b)+b(b+c)+c(a+b))=(a+b+c)^2+$ $+a^2+b^2+c^2\geq 0$, contradicție. **24.** *a)* $x\in\left(-1,\frac{1}{2}\right)\cup(2,\infty)$; *b)* $x\in(-\infty,-2]\cup(-1,1)$; *c)* $x\in[-2,3)\cup[7,\infty)$. **25.** Dacă $x\leq 1$, atunci $ax\leq a\leq 1\Rightarrow 1-ax\geq 0\Rightarrow x^4-ax+1>0$ (deoarece inegalitățile $x^4 \geq 0$ și $1-ax \geq 0$ nu pot fi simultan egalități). Dacă $x>1$, atunci $x^3 > 1 \geq a \Rightarrow x^4 > ax \Rightarrow x^4 - ax + 1 > 0$. **26.** ***a)*** $\frac{1}{2\sqrt{k}} > \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \sqrt{k+1}-\sqrt{k}$ și $\frac{1}{2\sqrt{k}} < \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} = \sqrt{k}-\sqrt{k-1}$. ***b)*** Se scriu inegalitățile de la punctul a) pentru $k=\overline{1,n}$ și apoi se adună membru cu membru. **27.** Din relația $a+d=b+c \Rightarrow b-a=d-c \overset{\text{not.}}{=} r>0 \Rightarrow ad-bc=a(c+$ $+r)-(a+r)c=r(a-c)<0 \Rightarrow ad<bc$. **28.** Din condiția $xyz>0$ deducem că cel puțin unul dintre cele trei numere este pozitiv, de exemplu a. Rezultă că numerele b și c au același semn. Presupunând că $b<0$ și $c<0$, obținem: $b+c>-a \Rightarrow (b+c)^2 < -a(b+c) < bc \Rightarrow b^2+bc+c^2<0$. $b+c>-a \Rightarrow (b+c)^2 < -a(b+c) < bc \Rightarrow b^2+bc+c^2<0$, contradicție. **29.** Notăm suma cu S_n; avem $S_n > n\cdot\frac{1}{n+n}=\frac{1}{2}$. Adunând membru cu membru inegalitățile $\frac{1}{2n-k+1}+\frac{1}{n+k}=\frac{1}{2n-k+1}+$ $+\frac{2}{2n+2k}<\frac{3}{2n-k+1}\leq\frac{3}{2n}$, $1\leq k\leq n$, obținem $2S_n < n\cdot\frac{3}{2n}=\frac{3}{2}$.

Tema 1.5. Inegalități algebrice (extindere)

1. $\frac{x+y}{1+x+y}=\frac{x}{1+x+y}+\frac{y}{1+x+y}\leq\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}$. **2.** ***a)*** $x^2+y^2\geq 2xy \Leftrightarrow (x-y)^2\geq 0$; ***b)*** Înmulțind cu 2, se ajunge la $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geq 0$. **3.** Se adună membru cu membru inegalitățile: $a^2+c^2\geq 2ac$, $a^2+d^2\geq 2ad$, $b^2+c^2\geq 2bc$, $b^2+d^2\geq 2bd$. **4.** ***a)*** $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}=\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}\geq$ $\geq\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. ***b)*** Se adună membru cu membru inegalitățile: $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}\geq 2\cdot\frac{a}{c}$, $\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geq 2\cdot\frac{b}{a}$, $\frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}\geq 2\cdot\frac{c}{b}$. **5.** Ridicând la pătrat cei doi membri (pozitivi) ai inegalități, rezultă $a^2+2ab+b^2+x^2+2xy+y^2\leq a^2+x^2+b^2+y^2+2\sqrt{a^2+x^2}\cdot\sqrt{b^2+y^2}$, de unde obținem $ab+xy\leq\sqrt{a^2+x^2}\cdot\sqrt{b^2+y^2}$. Dacă $ab+xy<0$, ultimă inegalitate este evidentă. În cazul $ab+xy\geq 0$, avem: $(ab+xy)^2\leq(a^2+x^2)\cdot(b^2+y^2)\Leftrightarrow(ay-bx)^2\geq 0$. **6.** $\frac{x+y}{2}\leq\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\frac{(x+y)^2}{4}\leq\frac{x^2+y^2}{2}\Leftrightarrow(x+y)^2\leq 2(x^2+y^2)\Leftrightarrow(x-y)^2\geq 0$. Cum $\frac{x+y}{2}-\sqrt{xy}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2}\geq 0$, rezultă că $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$. Din inegalitatea precedentă aplicată numerelor $\frac{1}{x}$ și $\frac{1}{y}$, deducem că $\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\leq\sqrt{xy}$. În fine, $\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\geq\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{a}}=a$ și $\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\leq\frac{2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{b}}=b$, unde $a=\min(a,b)$ și $b=\max(a,b)$. În aceste inegalități avem egalitate dacă și numai dacă $x=y$. **7.** Folosind inegalitatea $a+\frac{1}{a}\geq 2$ $(a,b>0)$, avem: $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)\geq 9$. **8.** ***a)*** $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)\geq(a+b)ab=a^2b+ab^2$. ***b)*** Din $x+y\geq 2\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}$ $(x,y\geq 0)$ rezultă că $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca}=8abc$. ***c)*** Se adună membru cu membru inegalitățile:

$a+b \geq 2\sqrt{ab}$, $b+c \geq 2\sqrt{bc}$, $c+a \geq 2\sqrt{ca}$. **9.** Avem: $1+\sqrt{ab} \leq \sqrt{(1+a)(1+b)} \Leftrightarrow (1+\sqrt{ab})^2 \leq$ $\Leftrightarrow (1+a)(1+b) \Leftrightarrow 2\sqrt{ab} \leq a+b$. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a=b$. **10.** Avem: $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab}+\sqrt{cd} \Leftrightarrow (a+c)(b+d) \geq (\sqrt{ab}+\sqrt{cd})^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{abcd} \geq ad+bc$. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $ad=bc$. **11.** Înmulţind membru cu membru inegalităţile $1+a_k \geq 2\sqrt{a_k}$, $1 \leq k \leq n$, obţinem: $(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n) \geq 2^n\sqrt{a_1a_2...a_n}=2^n$. **12.** Se adună membru cu membru inegalităţile: $\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4}$, $\frac{bc}{b+c} \leq \frac{b+c}{4}$, $\frac{c+a}{c+a} \leq \frac{c+a}{4}$. **13.** Din condiţia $a+b=2$ rezultă că $a-1=1-b$. Dacă $c:=a-1=1-b$, atunci $a=1+c$ şi $b=1-c$; obţinem $a^4+b^4=(1+c)^4+$ $+(1-c)^4=2(1+6c^2+c^4) \geq 2$. **14.** $(1+a)^n+\left(1+\frac{1}{a}\right)^n \geq (2\sqrt{a})^n+\left(\frac{2}{\sqrt{a}}\right)^n = 2^n\left((\sqrt{a})^n+\frac{1}{(\sqrt{a})^n}\right) \geq$ $\geq 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$. **15.** *a)* $\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \geq \frac{x+y}{2} \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$. *b)* Se adună membru cu membru inegalităţile: $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$, $\frac{1}{b+c} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$, $\frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)$. **16.** *a)* Din inegalitatea $\left(x_1^2+x_2^2\right)\left(y_1^2+y_2^2\right)-(x_1y_1+x_2y_2)^2=(x_1y_2-x_2y_1)^2 \geq 0$ obţinem $(x_1y_1+x_2y_2)^2 \leq \left(x_1^2+x_2^2\right)\left(y_1^2+y_2^2\right)$, cu egalitate dacă şi numai dacă $x_1y_2-x_2y_1=0$, adică $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}$ (cu convenţia de anulare a numitorilor). *b)* După desfacerea parantezelor, inegalitatea de demonstrat se rescrie sub forma

$$(x_1y_2-x_2y_1)^2+(x_2y_3-x_3y_2)^2+(x_3y_1-x_1y_3) \geq 0.$$

În cazul general, inegalitatea se obţine din identitatea lui *Lagrange* (vezi 1.2.2–30). **17.** Se ridică la pătrat ambii membrii şi apoi se aplică inegalitatea *Cauchy-Buniakovski*. **18.** Conform inegalităţii *Cauchy-Buniakovski*, avem $\left(\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}\right)^2 \leq 3E(a,b,c)$. Întrucât $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}=\frac{a^2+b^2+c^2}{abc} \geq$ $\geq \frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$, deducem că $E(a,b,c) \geq \frac{1}{3}=E(3,3,3)$. **19.** *a)* $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2} \leq 1+$ $+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=2-\frac{1}{n}$. *b)* $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right)^2 \leq n\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}\right) \leq n\left(2-\frac{1}{n}\right)=2n-1.$ **20.** $\left(1+\frac{ab}{c}\right)\left(1+\frac{bc}{a}\right)=1+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)b+b^2 \geq 1+2b+b^2=(1+b)^2$. Se înmulţeşte această inegalitate cu inegalităţile $\left(1+\frac{bc}{a}\right)\left(1+\frac{ca}{b}\right) \geq (1+c)^2$ şi $\left(1+\frac{ca}{b}\right)\left(1+\frac{ab}{c}\right) \geq (1+a)^2$. **21.** *a)* Conform inegalităţii *Cauchy-Buniakovski*, avem: $(a^2+bc)\left(1+\frac{b}{c}\right) \geq \left(a \cdot 1+\sqrt{bc}\cdot\sqrt{\frac{b}{c}}\right)^2=(a+b)^2$. *b)* Din inegalitatea de mai sus rezultă că $\frac{1}{(a+b)^2} \geq \frac{1}{a^2+bc}\cdot\frac{c}{b+c}$; obţinem $\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(a+c)^2} \geq \frac{1}{a^2+bc}\left(\frac{c}{b+c}+\frac{b}{b+c}\right)=$ $=\frac{1}{a^2+bc}$. **22.** Notând $S=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \Rightarrow S+3=\left(\frac{a}{b+c}+1\right)+\left(\frac{b}{c+a}+1\right)+\left(\frac{c}{a+b}+1\right)=$

$= (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right) = \frac{1}{2}((b+c)+(c+a)+(a+b))\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right) \ge \frac{1}{2}\cdot 9 = \frac{9}{2}$.

23. Fie $a,b,c>0$ astfel încât $x=\frac{b}{a}, y=\frac{c}{b}, z=\frac{a}{c}$. Înlocuind, obținem $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$, adică inegalitatea lui *Nesbitt*. **24.** ***a)*** Aplicând inegalitatea *Cauchy-Buniakovski*, obținem:

$$(x_1+x_2)^2 = \left(\sqrt{\lambda_1}\cdot\frac{x_1}{\sqrt{\lambda_1}}+\sqrt{\lambda_1}\cdot\frac{x_1}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^2 \le (\lambda_1+\lambda_2)\left(\frac{x_1^2}{\lambda_1}+\frac{x_2^2}{\lambda_2}\right) \Rightarrow \frac{x_1^2}{\lambda_1}+\frac{x_2^2}{\lambda_2}\ge\frac{(x_1+x_2)^2}{\lambda_1+\lambda_2}.$$

b) Se aplică inegalitatea *Cauchy-Buniakovski* pentru numerele $a_k=\frac{x_k}{\sqrt{\lambda_k}}$ și $b_k=\sqrt{\lambda_k}$, $1\le k\le 3$.

c) Se aplică inegalitatea *Cauchy-Buniakovski* pentru numerele $a_k=\frac{x_k}{\sqrt{\lambda_k}}$ și $b_k=\sqrt{\lambda_k}$, $1\le k\le n$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\dots=\frac{a_n}{b_n}$, adică $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\dots=\frac{a_n}{b_n}$. **25.** $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{a^2}{ab+ca}+\frac{b^2}{bc+ab}+\frac{c^2}{ca+bc}\ge\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}\ge\frac{3(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)}=\frac{3}{2}$. **26.** $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)}=\frac{a+b+c}{2}\ge\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}+\sqrt{c}\cdot\sqrt{a}}{2}=\frac{1}{2}$. **27.** $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\frac{x^2}{ax}+\frac{y^2}{by}+\frac{z^2}{cz}\ge\frac{(x+y+z)^2}{ax+by+cz}$. **28.** Prelucrăm membrul stâng și apoi folosim inegalitatea $\frac{1}{xy}\ge\frac{4}{(x+y)^2}$; obținem: $\left(\frac{a}{b+c}+\frac{c}{d+a}\right)+\left(\frac{b}{c+d}+\frac{d}{a+b}\right)==\frac{a(d+a)+c(b+c)}{(b+c)(d+a)}+\frac{b(a+d)+d(c+d)}{(c+d)(a+b)}\ge$

$\ge\frac{4(ad+a^2+bc+c^2)}{(a+b+c+d)^2}+\frac{4(ab+b^2+cd+d^2)}{(a+b+c+d)^2}=2\cdot\frac{(a+b+c+d)^2+(a-c)^2+(b-d)^2}{(a+b+c+d)^2}\ge 2$. **29.** Din inegalitatea evidentă $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i-a_j)(b_i-b_j)\ge 0$ rezultă $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_i+a_jb_j-a_ib_j-a_jb_i)\ge 0$, adică $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_j+a_jb_i)\le\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_i+a_jb_j)$. Din relațiile $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_j+a_jb_i)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_j+a_jb_i)=$ $=\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot\sum_{j=1}^{n}b_j+\sum_{i=1}^{n}b_i\cdot\sum_{j=1}^{n}a_j=2\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot\sum_{j=1}^{n}b_j$ și $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_i+a_jb_j)=n\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+n\sum_{j=1}^{n}a_jb_j=2n\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$, deducem că $\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)\le n\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)$.

30. ***a)*** Inegalitatea este echivalentă cu $(x-y)^2(x+y)\ge 0$. ***b)*** Inegalitatea se obține adunând membru cu membru inegalitățile: $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, $\frac{b}{c^2}+\frac{c}{b^2}\ge\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, $\frac{c}{a^2}+\frac{a}{c^2}\ge\frac{1}{c}+\frac{1}{a}$. **31.** Se folosește inegalitatea lui *Cebîșev* în cazul $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n=1$ $\left(a_i\le a_j\Leftrightarrow b_i\ge b_j\Leftrightarrow\frac{1}{b_i}\le\frac{1}{b_j}\right)$. **32.** Se aplică inegalitatea lui *Cebîșev* în cazul $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n=1$ pentru șirurile de numere $(a_1\le a_2\le\dots\le a_n)$ și $\left(\frac{1}{1^2}\ge\frac{1}{2^2}\ge\dots\ge\frac{1}{n^2}\right)$, apoi se folosește **19.** ***a)***. **33.** Folosind inegalitatea $a^2+b^2\ge\frac{(a+b)^2}{2}$, rezultă că

$E(x,y)\geq\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}\right)^2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{xy}\right)^2$. De aici, având în vedere că $1=(x+y)^2\geq 4xy$, obținem $E(x,y)\geq\frac{1}{2}(1+4)^2=\frac{25}{2}=E\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. **34.** *a)* Deoarece numerele a,b,c sunt lungimile laturilor unui triunghi, există $x,y,z>0$ astfel încât $a=x+y$, $b=y+z$ și $c=z+x$. Inegalitatea se rescrie sub forma $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$. Ultima inegalitate este o consecință a inegalității $\frac{1}{u+v}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right)$, $u,v>0$. *b)* Se arată că $\sqrt{-a+b+c}+\sqrt{a-b+c}\leq 2\sqrt{c}$, cu egalitate dacă și numai dacă $a=b$. **35.** Din $\left(\sqrt{a+15}+\sqrt{2b+12}+\sqrt{3c+7}\right)^2\leq 3(a+2b+3c+34)$ și $(a+2b+3c)^2\leq$ $\leq(1^2+2^2+3^2)(a^2+b^2+c^2)=14^2$ rezultă că $\sqrt{a+15}+\sqrt{2b+12}+\sqrt{3c+7}\leq 12$. Egalitatea are loc când au loc simultan relațiile $\sqrt{a+15}=\sqrt{2b+12}=\sqrt{3c+7}$ și $\frac{a}{1}=\frac{b}{2}=\frac{c}{3}$, adică $a=1, b=2, c=3$.

36. $\frac{a^3}{b+2c}+\frac{b^3}{c+2a}+\frac{c^3}{a+2b}=\frac{a^4}{ab+2ca}+\frac{b^4}{bc+2ab}+\frac{c^4}{ca+2bc}\geq\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3(ab+bc+ca)}\geq\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3(a^2+b^2+c^2)}=$ $=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}=\frac{1}{3}$. **37.** Notăm $x=a+b$, $y=b+c$ și $z=c+a$; avem $\frac{x}{x+2y}+\frac{y}{y+2z}+\frac{z}{z+2x}=$ $\frac{x^2}{x^2+2xy}+\frac{y^2}{y^2+2yz}+\frac{z^2}{z^2+2zx}\geq\frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx}=1$.

Tema 1.6. Operații cu intervale de numere reale

1. Propozițiile b), c), e), f) sunt adevărate, iar a) și d) sunt false. **2.** *a)* $(\pi,5]$; *b)* $[-3,-1)$; *c)* $(-3,3]$; *d)* $\mathbb{R}$; *e)* $(0,1]$; *f)* $[0,1]$. **3.** *a)* $\{0\}$; *b)* $\{-3,-2,-1,0,1,2\}$; *c)* $(-1,0)\cup(0,1)$; *d)* $\left[\frac{1}{2},\infty\right)$. **4.** 22. **5.** *a)* $\mathbb{R}$; *b)* $\left(a,\frac{a+b}{2}\right]$; *c)* $(-\infty,\sqrt{ab})$. **6.** Intervalul (a,b) conține $b-a-1$ numere întregi. **7.** Din $a+b-x\geq a+b-b=a$ și $a+b-x\leq a+b-a=b$ rezultă că $a+b-x\in[a,b]$. **8.** $xy-x-y+2=$ $=(x-1)(y-1)+1>1\Rightarrow xy-x-y+2\in I$. **9.** $3(x+y)<3x+5y=15\Rightarrow x+y<5$. Asemănător, din relația $5(x+y)>3x+5y=15$ rezultă că $x+5>3$. Deci $x+y\in(3,5)$. **10.** Cum $0<\frac{n}{mn+1}<1$ și $m<\frac{mn+1}{n}=m+\frac{1}{n}<m+1$, obținem $\left(\frac{n}{mn+1},\frac{mn+1}{n}\right)\cap\mathbb{N}=\{1,2,...,m\}$. **11.** $x\in(-\infty,-1)$. **12.** *a)* $a\in\{-1,0,1\}$ și $b=3$; *b)* $a=-2$ și $b=2$; *c)* $a=-1$ și $b=1$. **13.** *a)* $a=-3$ și $b\in[-1,1)$; *b)* $a=0$ și $b=3$; *c)* $a=0$ și $b=\sqrt{3}$. **14.** *a)* $I=[0,7)$; *b)* $(1,7]$; *c)* $[0,2)$. **15.** Este clar că $\frac{n}{n+1}<1<\frac{n+1}{n}$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Să presupunem prin absurd că există $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $\frac{n}{n+1}\leq a<b\leq\frac{n+1}{n}$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Atunci, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$, avem: $0<b-a\leq$ $\leq\frac{n+1}{n}-\frac{n}{n+1}<\frac{2}{n}\Rightarrow n<\frac{2}{b-a}$, adică mulțimea numerelor naturale ar fi mărginită, contradicție. **16.** Întrucât produsul a două numere naturale consecutive este număr par, rezultă că numerele $n^2-n+1=(n-1)n+1$ și $n^2+n+1=n(n+1)+1$ sunt impare. Numerele pare din intervalul

$[n^2-n+1, n^2+n+1]$ sunt: n^2-n+2, n^2-n+4, ..., $n^2+n=(n^2-n)+2n$; suma lor este egală cu $n(n^2-n)+2(1+2+...+n)=n(n^2+1)$. **17.** *a)* $7 \le m \le 13$; *b)* $\frac{(n+1)+1}{n+1} < \frac{n+1}{n} < \frac{13n-2}{n+1} < \frac{13(n+1)-2}{(n+1)+1} \Rightarrow I_n \subset I_{n+1}$. **18.** Dacă notăm $a=\min(x_1,x_2,...,x_n)$ şi $b=\max(x_1,x_2,...,x_n)$, atunci $[a,b]\subset I$ şi $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+...+\lambda_nx_n \ge \lambda_1a+\lambda_2a+...+\lambda_na=a(\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n)=a$. Analog se arată că $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+...+\lambda_nx_n \le b$, deci $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+...+\lambda_nx_n \in [a,b]\subset I$. **19.** $a=2$ şi $b=1$. **20.** Pentru orice număr real x există $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $n>|x|$, adică $x\in(-n,n)$, ceea ce arată că mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale este inclusă în reuniunea intervalelor $(-n,n)$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Teste de evaluare

Testul 1. **1.** *a)* $\sqrt{11}<2\sqrt{3}<4<3\sqrt{2}$; *b)* $3+2\sqrt{2}<13-2\sqrt{6}$. **2.** *a)* $(-\infty,-1]\cup[1,3)$; *b)* $a\ge1$ şi $b\le0$. **3.** *a)* $E(x)=15x^2-25x+9x-15=5x(3x-5)+3(3x-5)=(3x-5)(5x+3)$ sau, pornind de la membru drept, $(3x-5)(5x+3)=15x^2-16x-15$. *b)* Avem: $E(x)=0 \Leftrightarrow x\in\left\{-\frac{3}{5},\frac{5}{3}\right\}$; $E(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left(-\frac{3}{5},\frac{5}{3}\right)$; $E(x)>0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty,-\frac{3}{5}\right)\cup\left(\frac{5}{3},\infty\right)$. **4.** *a)* $\frac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}, \forall a,b>0, a\ne b \Rightarrow I\setminus J=\left(0,\frac{2ab}{a+b}\right)$. *b)* Se înmulţesc inegalităţile: $a+2\ge2\sqrt{2a}$, $b+3\ge2\sqrt{3b}$, $c+6\ge2\sqrt{6c}$.

Testul 2. **1.** *a)* $2\sqrt{11}<3\sqrt{5}<7<5\sqrt{3}$; *b)* $5+2\sqrt{3}<13-3\sqrt{2}$. **2.** *a)* $[0,1]$; *b)* $a\ge1$ şi $b\le-1$. **3.** *a)* $E(x)=6x^2-3x+4x-2=3x(2x-1)+2(2x-1)=(2x-1)(3x+2)$ sau, pornind de la membru drept, $(2x-1)(3x+2)=6x^2+x-6$. b) $E(x)=0 \Leftrightarrow x\in\left\{-\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right\}$; $E(x)>0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{2},\infty\right)$; $E(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right)$. **4.** *a)* $\frac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}, \forall a,b>0, a\ne b \Rightarrow I\cap J=\left(\frac{2ab}{a+b},\sqrt{ab}\right)$. *b)* Se înmulţesc membru cu membru inegalităţile: $a+1\ge2\sqrt{a}$, $b+2\ge2\sqrt{2b}$, $c+8\ge2\sqrt{8c}$.

Tema 1.7. Modulul unui număr real

1. *a)* 2; *b)* $\sqrt{3}$; *c)* 4. **2.** *a)* $\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}+\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}=|2-\sqrt{3}|+|2+\sqrt{3}|=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=4$; *b)* 0; *c)* 1. **4.** $x=3$ şi $y=-2{,}3$. **5.** *a)* $x\in\{-5,5\}$; *b)* ecuaţia nu are soluţii; *c)* $x\in\{-2,4\}$; *d)* $x\in\{-1,1\}$; *e)* $x\in\left\{\frac{1}{4},\frac{3}{2}\right\}$; *f)* $x\in\left\{-6,\frac{1}{2}\right\}$; *g)* $x\in\{-3,-1,7,9\}$; *h)* $x\in\{-4,6\}$. **6.** *a)* $x\in[-1,1]$; *b)* $x\in(-\infty,-3)\cup(3,\infty)$; *c)* $x\in\left(\frac{1}{6},\frac{7}{6}\right)$; *d)* $\left(-\infty,-\frac{1}{30}\right]\cup\left[\frac{1}{6},\infty\right)$; *e)* $x\in\left[-\frac{10}{3},2\right]$; *f)* $x\in(-\infty,-4]\cup[0,2]\cup[6,\infty)$; *h)* $x\in\left(-\infty,-\frac{13}{4}\right]\cup\left[-\frac{3}{4},\infty\right)$. **7.** Dacă $x\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$, atunci avem $\left|x-\frac{a+b}{2}\right|=\frac{a+b}{2}-x\le\frac{a+b}{2}-a=\frac{b-a}{2}$, iar dacă $x\in\left(\frac{a+b}{2},b\right]$, atunci $\left|x-\frac{a+b}{2}\right|=x-\frac{a+b}{2}\le b-\frac{a+b}{2}=\frac{b-a}{2}$. **8.** $|x-a|+|x-b|\ge|(a-x)+(x-b)|=|a-b|$. **9.** *a)* $|x-1|+|x-2|+|x-3|=|x-1|+|x-2|+|3-x|\ge|(x-1)+(x-2)+(3-x)|=|x|$; *b)* $|x-y|-|x+y|\le|(x-y)+(x+y)|=2|x|$ şi

$|x-y|-|x+y| \le |(x-y)-(x+y)| = 2|y|$. **10.** $3|x-y| = |3(x-y)| = |(2x-y)+(x-2y)| \le |2x-y| + |x-2y| \le 3 \Rightarrow |x-y| \le 1$. **11.** *b)* Deoarece $|-t| = t$ $(t \in \mathbb{R})$ şi relaţia de demonstrat este simetrică în x, y, z, putem presupune că $x \le y \le z$; obţinem $|x-y|+|y-z|+|z-x| = (y-x)+(z-y)+(z-x) = 2(z-x)$. **12.** Se explicitează modulele şi, în fiecare dintre cele patru cazuri, se ţine seama că $\pm(\sqrt{2} \pm \sqrt{3}) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. **13.** $|a_1 + 2a_2 + ... + na_n| \le |a_1| + 2|a_2| + ... + n|a_n| \le 1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. **14.** $(x+y)^2 \le 2(x^2+y^2) = 2 \Rightarrow |x+y| \le \sqrt{2}$ şi $2|xy| = 2|x| \cdot |y| \le |x|^2 + |y|^2 = x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow |xy| \le \dfrac{1}{2}$.

15. $\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}} = \sqrt{\dfrac{(ab+bc+ca)^2}{a^2b^2c^2}} = \sqrt{\left(\dfrac{ab+bc+ca}{abc}\right)^2} = \left|\dfrac{ab+bc+ca}{abc}\right|$. **16.** Dacă am avea $a \ne b$, atunci $n < \dfrac{1}{|a-b|}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, contradicţie. **17.** *a)* $x \in \left\{-2, \dfrac{8}{3}\right\}$; *b)* $x \in \{-1, 1\}$; *c)* $x \in \left\{\dfrac{1}{5}, 1\right\}$. **18.** *a)* $x \in (-1,1)$; *b)* $x \in [-6,7]$; *c)* $x \in (-\infty,-1] \cup [7,\infty)$. **19.** În cazul $c < 0$, ecuaţia nu are soluţii. Dacă $c \ge 0$, atunci $|x-a|-b = -c$ sau $|x-a|-b = c$. **20.** $a \in (-\infty, 0] \cup (1, \infty)$. **21.** Din a doua ecuaţie rezultă că $x = 1 + |y| > 0$; obţinem în final $(x,y) \in \left\{(2,-1), \left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{5}{3}\right)\right\}$. **22.** $|xy| = |x| \cdot |y| < 1 \Rightarrow 1 + xy > 0$. Din relaţiile $\dfrac{x+y}{1+xy} + 1 = \dfrac{x+y+xy+1}{1+xy} = \dfrac{(x+1)(y+1)}{1+xy} > 0$ şi $\dfrac{x+y}{1+xy} - 1 = \dfrac{(x-1)(1-y)}{1+xy} < 0$ rezultă că $-1 < \dfrac{x+y}{1+xy} < 1$, adică $\left|\dfrac{x+y}{1+xy}\right| < 1$. **23.** $x \pm 2\sqrt{x-1} = (\sqrt{x-1} \pm 1)^2 \Rightarrow \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = \left|\sqrt{x-1}-1\right| + \left|\sqrt{x-1}+1\right| = 1 - \sqrt{x-1} + \sqrt{x-1} + 1 = 2$. **24.** $x^2 + 2y^2 + 1 \ge 2(x^2+y^2) \ge (x+y)^2 \Rightarrow x^2 + 2y^2 + 1 \ge |x+y| \Rightarrow \sum \sqrt{x^2+2y^2+1} \ge \sum |x+y| \ge 2|x+y+z| = 6$. **25.** $\dfrac{1}{|x+y|} \ge \dfrac{1}{|x|} + \dfrac{1}{|y|} \Rightarrow$ $\Rightarrow 6\sum \dfrac{1}{|x+y|} \ge \sum(|x|+|y|) \cdot \sum \dfrac{1}{|x|+|y|} \ge 9 \Rightarrow \sum \dfrac{1}{|x+y|} \ge \dfrac{3}{2}$. **26.** *a)* Folosim inegalitatea între media aritmetică şi media pătratică, obţinem $\dfrac{|x+y|+|x-y|}{2} \le \sqrt{\dfrac{(x+y)^2+(x-y)^2}{2}} = \sqrt{x^2+y^2}$. *b)* $\dfrac{a}{1+a} = 1 - \dfrac{1}{1+a} \Rightarrow \dfrac{|x+y|}{1+|x+y|} - \dfrac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} = \dfrac{1}{1+|x|+|y|} - \dfrac{1}{1+|x+y|} = \dfrac{|x+y|-|x|-|y|}{(1+|x|+|y|)(1+|x+y|)} \le 0 \Rightarrow$ $\dfrac{|x+y|}{1+|x+y|} \le \dfrac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} = \dfrac{|x|}{1+|x|+|y|} + \dfrac{|y|}{1+|x|+|y|} \le \dfrac{|x|}{1+|x|} + \dfrac{|y|}{1+|y|}$. **27.** $|a+b| > |1+ab| \Leftrightarrow (a+b)^2 > (1+ab)^2 \Leftrightarrow (a^2-1)(b^2-1) < 0 \Rightarrow a^2 < 1$ sau $b^2 < 1 \Rightarrow a = 0$ sau $b = 0 \Rightarrow ab = 0$. **28.** $a+b+c \ge |ax-b|+|bx-c|+|cx-a| \ge |(ax-b)+(bx-c)+(cx-a)| = |(a+b+c)(x-1)| = (a+b+c)|x-1| \Rightarrow$ $\Rightarrow |x-1| \le 1 \Rightarrow -1 \le x-1 \le 1 \Rightarrow 0 \le x \le 2$. **29.** i) Cazul $a \ne b$. Dacă x_0 este soluţie a ecuaţiei atunci $1 = |x_0-1|+|x_0-a|+|x_0-b| \ge |x_0-1| + |(x_0-a)-(x_0-b)| = |x_0-1|+|b-a| \ge |x_0-1|+1 \Rightarrow x_0 = 1$. Prin urmare, $|a-1|+|b-1| = 1$, de unde se obţine $(a,b) \in \{(1,0),(1,2),(0,1),(2,1)\}$. ii) Cazul $a = b = 1$: $3|x-1| = 1 \Leftrightarrow x \in \left\{\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}\right\}$. iii) Cazul $a = b \ne 1$. Dacă $x_0 \in \mathbb{R}$ este soluţie a ecuaţiei, atunci

$1=|x_0-a|+(|x_0-1|+|x_0-a|)\geq|x_0-a|+|a-1|\geq\ |x_0-a|+1\Rightarrow x=a$. Înlocuind $x=a$ în ecuație, se obține $a\in\{0,2\}$. În ambele situații $x_0=a$ este singura soluție a ecuației. În concluzie, ecuația are o singură soluție reală dacă și numai dacă $(a,b)\in\{(1,0),(1,2),(0,1),(2,1),(0,0),(2,2)\}$. **30.** Vom folosi faptul că $\max(a,b)=\dfrac{a+b+|a-b|}{2}$ (vezi 11); avem:

$$E(x,y,z)=\left\|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{2}{z}\left|+\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{2}{z}=\left|2\max\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right)-\frac{2}{z}\right|+2\max\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right)+\frac{2}{z}=$$

$$=2\left(\left|\max\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right)-\frac{1}{z}\right|+\max\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{z}\right)=4\max\left(\max\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right),\frac{1}{z}\right)=4\max\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}\right).$$

Tema 1.8. Partea întreagă şi partea fracţionară a unui număr real

1. *a)* 3 şi $0,(6)$; *b)* 11 şi $0,1(8)$; *c)* 3 şi $0,01(3)$; *d)* -6 şi $0,877$; *e)* -2 şi $0,99$; *f)* -3 şi $0,(3)$. **2.** *a)* $40,5$; *b)* 112; *c)* $\left[\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{11+6\sqrt{2}}\right]=\left[(2+\sqrt{3})+(3+\sqrt{2})\right]=8$; *d)* $3-(3-\sqrt{5})-4\cdot\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}=1$. **3.** 1. **4.** $24\leq\sqrt{\overline{abc}}<25\Rightarrow576\leq\overline{abc}<25\ \Rightarrow a\in\{5,6\}$. Dacă $a=5$, atunci $b+c=16$, de unde $(b,c)\in\{(7,9),(8,8),(9,7)\}$. În cazul $a=6$ nu avem soluții. **5.** *a)* Din $a_n=2n+4+\sqrt{4n^2+16n+12}$ și $(2n+3)^2<4n^2+16n+12<(2n+4)^2$ rezultă că $[a_n]=2n+4+2n+3=4n+7$; *b)* $b_n=1-\dfrac{1}{n}\Rightarrow$ $\Rightarrow[b_n]=0$. *c)* $[c_1]=1$; pentru $n\geq2$ avem: $1\leq c_n<2-\dfrac{1}{n}\Rightarrow[c_n]=1$. **6.** $(n+2)^2\leq n^2+5n+3<$ $<(n+3)^2\Rightarrow\left[\sqrt{n^2+5n+3}\right]=n+2$ şi $\left\{\sqrt{n^2+5n+3}\right\}=\dfrac{n-1}{\sqrt{n^2+5n+3}+n+2}$. **7.** *a)* $k^2\leq k^2+k<$ $<(k+1)^2\Rightarrow\left[\sqrt{k^2+k}\right]=k$; *b)* $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\sqrt{k^2+k}\right]=\sum\limits_{k=1}^{n}k=\dfrac{n(n+1)}{2}$. **8.** $x=\dfrac{1}{2n^2}$; **9.** *a)* $x=-\dfrac{13}{15}=$ $=-0,8(6)$; *b)* $x=1,1$; *c)* $x=2,7$. **10.** *a)* $x^2-x+1\leq x\Leftrightarrow x=1$; *b)* $\left[\dfrac{2x-1}{3}\right]=\{x\}\Leftrightarrow\left[\dfrac{2x-1}{3}\right]=0$ şi $x\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow0\leq\dfrac{2x-1}{3}<1$ şi $x\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=1$. *c)* $[x]=\dfrac{x+\{x\}}{2}\Leftrightarrow[x]=2\{x\}\Leftrightarrow x\in\left\{0,\dfrac{3}{2}\right\}$; *d)* $\left[\dfrac{3x-2}{5}\right]=x-1\Leftrightarrow\left[\dfrac{3x-2}{5}\right]=k\ (k\in\mathbb{Z})$ şi $x=k+1\Leftrightarrow\left[\dfrac{3k+1}{5}\right]=k$ şi $x=k+1\Leftrightarrow k\leq\dfrac{3k+1}{5}<$ $<k+1$ şi $x=k+1$; obținem $x\in\{0,1\}$; *e)* $x\in\{7,9,11\}$; *f)* $x=[x]+\{x\}$; obținem $x\in\left[\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{5}\right)$. **11.** $x=1,3$ şi $y=3,2$. **12.** Cum $(13,133)=1$, deducem că $ma\in\mathbb{Z}\ (m\in\mathbb{Z})$ dacă şi numai dacă $13|m$. Mulţimea $\{a,2a,3a,...,na\}$ are $\left[\dfrac{n}{13}\right]$ elemente. **13.** Avem succesiv: $\dfrac{n^2+n}{2}\leq x<\dfrac{n^2+3n+2}{2}\Leftrightarrow$ $4n^2+4n\leq8x<4n^2+12n+8\Leftrightarrow(2n+1)^2\leq8x+1<(2n+3)^2\Leftrightarrow2n+1\leq\sqrt{8x+1}<2n+3$; obţinem $n\leq\dfrac{\sqrt{8x+1}-1}{2}<n+1\Rightarrow n=\left[\dfrac{\sqrt{8x+1}-1}{2}\right]$. **14.** Dacă $m=[a]$, $n=[b]$, $\alpha=\{a\}$ şi $\beta=\{b\}$, atunci $a=m+\alpha$ şi $b=n+\beta$. Din relațiile $a\pm b\in\mathbb{Z}$, deducem că $\alpha\pm\beta\in\mathbb{Z}$. Dar $\alpha+\beta\in[0,2)$ şi $\alpha-\beta\in(-1,1)\Rightarrow\alpha+\beta\in\{0,1\}$ şi $\alpha=\beta\Rightarrow\alpha=\beta=0$ sau $\alpha=\beta=\dfrac{1}{2}$. În cazul $\alpha=\beta=\dfrac{1}{2}$

obținem $ab = mn + \frac{2(m+n)+1}{4} \notin \mathbb{Z}$, contradicție. Deci $\alpha = \beta = 0$ și, în consecință, $a,b \in \mathbb{Z}$. **15.** *a)* Folosind inegalitățile $2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) < \frac{1}{\sqrt{k}} < 2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$, $k \in \mathbb{N}^*$ (vezi 1.4 – problema 26), rezultă că $a_n > 2\sum_{k=1}^{n^2}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) = 2\sqrt{n^2+1}-2 > 2n-2$ și $a_n < 1 + 2\sum_{k=2}^{n^2}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}) = 2n-1$ pentru orice $n \geq 2$. În consecință, $[a_1] = 1$ și $[a_n] = 2n-2$ pentru $n \geq 2$. *b)* Din inegalitățile $1 < b_n < < \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+4}}} = 2$ rezultă că $[b_n] = 1$; *c)* Din $(n-1)^2 \leq n^2 - n < \left(n-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} < \left(n-\frac{1}{2}\right)^2$ și $n^2 \leq n^2 + n < \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} < \left(n+\frac{1}{2}\right)^2$ rezultă că $2n-1 \leq \sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2+n} < 2n$. Prin urmare, $[c_n] = 2n-1$. **16.** $(\Rightarrow)$ $x+y = [x]+[y]+\{x\}+\{y\} = [x]+[y]+1 \in \mathbb{Z}$. $(\Leftarrow)$ $x+y \in \mathbb{Z}$ și $x,y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z} \Rightarrow \{x\}+\{y\} \in \mathbb{Z}$ și $0 < \{x\}+\{y\} < 2 \Rightarrow \{x\}+\{y\} = 1$. **17.** *a)* $[x] = [y] = k$ $(k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow k \leq x,y < k+1 \Rightarrow |x-y| < (k+1)-k = 1$; *b)* $(\Rightarrow)$ Dacă $\{x\} = \{y\}$, din relația $x - y = [x]-[y]+\{x\}- -\{y\}$, rezultă că $x-y \in \mathbb{Z}$. $(\Leftarrow)$ Reciproc, dacă $x-y \in \mathbb{Z}$, din aceeași relație deducem că $\{x\}-\{y\} \in \mathbb{Z}$. Cum $-1 < \{x\}-\{y\} < 1$, rezultă că $\{x\} = \{y\}$. **18.** *a)* $[x] \leq x < y \Rightarrow [x] \leq [y]$; *b)* $x < [x]+1 \leq [y] \leq y$. **19.** *a)* Dacă $x \in \mathbb{Z}$, atunci $[-x] = -x = -[x]$. În cazul $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, notând $[x] = k$, avem: $k < x < k+1 \Rightarrow -k-1 < -x < -k \Rightarrow [-x] = -k-1 = -[x]-1$; *b)* Afirmația rezultă din a), având în vedere relația $\{x\} = x - [x]$. **20.** Notăm $[x] = h$ și $[y] = k$ $(h,k \in \mathbb{Z})$; avem: *a)* $h+k \leq x+y < h+k+2 \Rightarrow h+k \leq [x+y] \leq h+k+1$. *b)* La fel, $h-k-1 < x-y < h-k+1$, deci $h-k-1 \leq [x-y] \leq h-k$. **21.** *a)* Notăm $[x] = h$ și $[y] = k$ $(h,k \in \mathbb{N})$ $\Rightarrow$ $hk \leq xy < (h+1)(k+1) = = hk+h+k+1 \Rightarrow hk \leq [xy] \leq hk+h+k$; *b)* $[x] \leq x$ și $[y] \leq y \Rightarrow [x]\cdot[y] \geq xy \geq [xy]$. **22.** a) Având în vedere că $\{\{a\}+b\} = \{a+b-[a]\} = \{a+b\}$, oricare ar fi numerele reale a,b, obținem $\{\{x\}+y\} = \{x+y\} = \{x+\{y\}\}$; *b)* $\{\{x+y\}+z\} = \{x+\{y+z\}\} = \{x+y+z\}$. **23.** Conform teoremei împărțirii cu rest, există $q,r \in \mathbb{Z}$ cu $0 \leq r < n$, astfel încât $[x] = nq+r$; rezultă $\frac{[x]}{n} = q + \frac{r}{n}$. Cum $0 \leq \frac{r}{n} < 1$, deducem că $\left[\frac{[x]}{n}\right] = q + \left[\frac{r}{n}\right] = q$. Pe de altă parte, din $\frac{x}{n} = \frac{[x]}{n} + \frac{\{x\}}{n} = q + \frac{r+\{x\}}{n}$ și $0 \leq \frac{r+\{x\}}{n} < 1 \Rightarrow \left[\frac{x}{n}\right] = q$. Prin urmare, $\left[\frac{x}{n}\right] = q = \left[\frac{[x]}{n}\right]$. **24.** *a)* $x \in [1,2)$; *b)* $x \in \left[\frac{7}{2},\frac{9}{2}\right)$; *c)* $x \in \left[\frac{9}{2},\frac{11}{2}\right)$; *d)* $x \in \{3,5,7,9,11\}$; *e)* $x \in [1,2)\cup[3,7)\cup[8,9)$; *f)* $x = 5$. **25.** *a)* Notăm $[x] = a$ și $\{x\} = \alpha$. i) Dacă $\alpha \in \left[0,\frac{1}{2}\right)$, atunci $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right] = 2a = [2x]$. ii) În cazul $\alpha \in \left[\frac{1}{2},1\right)$ avem $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right] = 2a+1 = [2x]$. *b)* Cu identitatea de la a), ecuația se scrie sub forma $\left[x+\frac{3}{8}\right] = \left[x+\frac{1}{2}\right]$; obținem $x \in \left[0,\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{5}{8},1\right)$. **26.** $(\Rightarrow)$ Pentru $x = -b$ obținem $[a-b] = 0$, deci $a \geq b$. Pentru $x = -a$ obținem $[b-a] = 0$, deci $b \geq a$. **27.** Pătratul oricărui număr natural are forma $10k+r$, unde $k \in \mathbb{N}$, $r \in \{0,1,4,5,6,9\} \Rightarrow A = \left\{0,\frac{7}{10},\frac{4}{5},\frac{1}{2},\frac{1}{5},\frac{13}{10}\right\}$. **28.** $\{\sqrt{n+p}\} = \{\sqrt{n}\} \Leftrightarrow$

$\sqrt{n+p}-\sqrt{n}=m\in\mathbb{N}^*$ (vezi 17 – b)). Din relația $\sqrt{n+p}=m+\sqrt{n}$, prin ridicare la pătrat obținem $p=m^2+2m\sqrt{n}$, deci $n=k^2$, $k\in\mathbb{N}^*$; rezultă că $p=m(m+2k)$ și, cum p este prim, deducem că $m=1$ și $m+2k=p$, deci $n=\left(\frac{p-1}{2}\right)^2$. **29.** $(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2=2n+1+\sqrt{4n^2+4n}$ și $(2n)^2\le 4n^2+4n<(2n+1)^2\Rightarrow$ $\sqrt{4n+1}\le\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<\sqrt{4n+2}\Rightarrow[\sqrt{4n+1}]\le[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]\le[\sqrt{4n+2}]$. Vom demonstra că $[\sqrt{4n+1}]=[\sqrt{4n+2}]$. Deoarece $4n+2$ nu este pătrat perfect, numărul $\sqrt{4n+2}$ este irațional. Notând $[\sqrt{4n+2}]=k$ $(k\in\mathbb{N}^*)$, avem: $k^2<4n+2<(k+1)^2\Rightarrow k^2\le 4n+1<(k+1)^2$, de unde se obține $k\le\sqrt{4n+1}<k+1\Rightarrow[\sqrt{4n+1}]=k$. Deci $[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=[\sqrt{4n+2}]$. **30.** Dacă am avea $a\in\mathbb{Z}$, atunci ar rezulta $\frac{1}{a}=0$, ceea ce nu este posibil. Din relația $\{a\}=\frac{1}{a}$ rezultă că $a>1$ și $a-\frac{1}{a}=[a]\in\mathbb{Z}$. Presupunem prin absurd că $a=\frac{m}{n}$, $m,n\in\mathbb{N}^*$, $(m,n)=1\Rightarrow\frac{m}{n}-\frac{n}{m}=k\in\mathbb{Z}\Rightarrow m^2-$ $-n^2=kmn\Rightarrow n\,|\,m^2\Rightarrow n=1\Rightarrow a\in\mathbb{Z}$, contradicție.

Tema 1.9. Aproximări ale numerelor reale

1. $|1{,}2289-1{,}23|=0{,}0011<0{,}002$. **2.** *a)* $0{,}013$ și $0{,}014$; *b)* $-1{,}12$ și $-1{,}11$; *c)* $3{,}60$ și $3{,}61$; *d)* $-0{,}38$ și $-0{,}37$; *e)* $-0{,}42$ și $-0{,}41$. **3.** *a)* $0{,}510$ și $0{,}511$; *b)* $-4{,}060$ și $-4{,}059$; *c)* $4{,}123$ și $4{,}124$; *d)* $-0{,}167$ și -0.166; *e)* $0{,}317$ și $-0{,}316$. **4.** *a)* $3{,}37$; *b)* $-0{,}04$; *c)* $0{,}42$; *d)* $2{,}24$; *e)* $0{,}76$. **5.** *a)* $0{,}127$; *b)* $-5{,}099$; *c)* $-0{,}667$; *d)* $-1{,}415$; *e)* $-0{,}237$. **6.** *a)* $1{,}01$; *b)* $0{,}04$; *c)* $0{,}38$; *d)* $2{,}24$; *e)* $0{,}76$. **7.** *a)* $1{,}008$; *b)* $3{,}093$; *c)* $0{,}833$; *d)* $3{,}464$; *e)* $0{,}354$. **8.** Dintre cele două aproximări, mai bună este $1{,}1369$. **9.** *a)* $3{,}146$ și $3{,}147$; *b)* $3{,}968$ și $3{,}969$; *c)* $0{,}317$ și $0{,}318$; *d)* $1{,}910$ și $1{,}911$. **10.** *a)* $0{,}274$; *b)* $1{,}374$; *c)* $0{,}046$; *d)* $0{,}366$. **11.** $(3{,}113;3{,}123)$. **12.** *c)* $(-0{,}1467;-0{,}1357)$; **13.** $(0{,}1073;0{,}1083)$; **14.** *b)* $(-0{,}2351;-0{,}2331)$. **15.** $(-135{,}1377;-135{,}1137)$. **16.** $4{,}881$ (prin lipsă) și $4{,}882$ (prin adaos). **17.** $(1{,}7423;1{,}7883)\cap(1{,}763;1{,}809)=(1{,}763;1{,}7883)$. **18.** *a)* $1{,}679$ și $1{,}68$; *b)* $1{,}679$. **19.** Întrucât $\frac{m}{n}-\frac{m+p}{n+p}=\frac{p(m-n)}{n(n+p)}>0$, rezultă că $\frac{m+p}{n+p}<\frac{m}{n}<\sqrt{2}$. Dintre cele două aproximări, mai bună este $\frac{m}{n}$. **20.** Vom arăta că, pentru orice $n\in\mathbb{N}, n\ge 2$, avem $\sqrt{4n^2+n}=a_n{,}24\ldots$, unde $a_n=2n$ (adică primele două zecimale ale numărului $\sqrt{4n^2+n}$ sunt aceleași). Deoarece $(2n)^2\le 4n^2+n<(2n+1)^2$, rezultă că $[\sqrt{4n^2+n}]=2n$ și $\{\sqrt{4n^2+n}\}=\sqrt{4n^2+n}-2n$. Rezolvând inecuația $2n+\frac{24}{100}\le\sqrt{4n^2+n}<2n+\frac{25}{100}$, obținem $n\ge 2$. Aproximările zecimale ale numărului $\sqrt{4n^2+n}$ cu o eroare cel mult egală cu 10^{-2} sunt $\overline{a_n{,}24}$ și $\overline{a_n{,}25}$.

Teste de evaluare

Testul 1. **1.** *a)* $[2+\sqrt{5}]=4$; *b)* $\{2-\sqrt{5}\}=3-\sqrt{5}$. **2.** *a)* $|x-1|+|x|=1-x+x=1$, $\forall x\in[0,1]$; *b)* 1. **3.** *a)* $x\in\{0,2\}$; *b)* $x\in[2,3)$; *c)* $x\in[1,2)$. **4.** *a)* $\big||2x-1|-3\big|\le 1\Leftrightarrow -1\le|2x-1|-3\le 1\Leftrightarrow|2x-1|\ge 2$ și

$|2x-1| \le 4 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$ şi $x \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right] \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$; *b)* $\left\{\frac{x-2}{3}\right\} = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{x-2}{3} = k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 3k+2,\ k \in \mathbb{Z}$; obținem $\left[3k + \frac{1}{2}\right] = 0$, de unde $k = 0$ şi $x = 2$.

Testul 2. 1. *a)* $\left[3+\sqrt{11}\right] = 6$; *b)* $\left\{3-\sqrt{11}\right\} = 4-\sqrt{11}$. **2.** *a)* $|x-1| + |x+1| = 1-x+x+1 = 2$ pentru orice $x \in [-1,1]$; *b)* 1. **3.** *a)* $x \in \{-1,3\}$; *b)* $x \in [1,2)$; *c)* $x \in [3,4)$. **4.** *a)* $\left||3x-5|-2\right| \ge 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow |3x-5|-2 \le -1$ sau $|3x-5|-2 \ge 1 \Leftrightarrow |3x-5| \le 1$ sau $|3x-5| \ge 3 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{4}{3}, 2\right]$ sau $x \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right] \cup$ $\cup \left[\frac{8}{3}, \infty\right) \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{4}{3}, 2\right] \cup \left[\frac{8}{3}, \infty\right)$; *b)* $[x] + \{x\} = x \Rightarrow 2x + [x] = 5x - 2 \Leftrightarrow 3x = [x] + 2 \Leftrightarrow$ $3x = k,\ k \in \mathbb{Z}$ şi $k = \left[\frac{k}{3}\right] + 2$; obținem $k \in \{2,3\}$ şi $x \in \left\{\frac{2}{3}, 1\right\}$.