

14. Legi de compoziție

M = mulțime nevidă

„ $*$ ”: $M \times M \rightarrow M; (x, y) \rightarrow x * y$ se numește **lege de compoziție internă**.

Exemple: „ $+$ ”: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} (x, y) \rightarrow x + y$ adunarea pe \mathbb{R} ;

„ \cdot ”: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} (x, y) \rightarrow x \cdot y$ înmulțirea pe \mathbb{R} .

Proprietăți:

1) **Asociativitatea = (A)** „ $*$ ” este asociativă dacă

$$(\forall) x, y, z \in M: (x * y) * z = x * (y * z)$$

2) **Comutativitatea = (C)** „ $*$ ” este comutativă dacă

$$(\forall) x, y \in M: x * y = y * x$$

3) **Element neutru = (EN)**

$$(\exists) e \in M, \text{ astfel încât } x * e = e * x = x, (\forall) x \in M$$

4) **Un element este simetrizabil = (E.S.)**

$$(\forall) x \in M, (\exists) x' \in M, \text{ astfel încât } x * x' = x' * x = e$$

Exemplu: „ \cdot ”: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

1) (A): $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), (\forall) x, y, z \in \mathbb{R};$

2) (C): $x \cdot y = y \cdot x, (\forall) x, y \in \mathbb{R};$

3) (E.N.): „ \cdot ” admite elementul neutru $1 \in \mathbb{R};$

$$(\exists) 1 \in \mathbb{R} \text{ astfel încât } x \cdot 1 = 1 \cdot x = x, (\forall) x \in \mathbb{R};$$

4) (E.S.): orice element real nenul este simetrizabil

$$(\forall) x \in \mathbb{R}^*, (\exists) x' = \frac{1}{x} \in \mathbb{R} \text{ (inversul lui } x), \text{ astfel încât } x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1.$$

Parte stabilă

$M \neq \emptyset$ mulțime: „ $*$ ”: $M \times M \rightarrow M$ lege de compoziție pe M


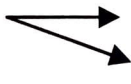
• $H \subset M, H \neq \emptyset$ este **parte stabilă** a lui M în raport cu „ $*$ ” dacă:

$$(\forall) x, y \in H \text{ am } x * y \in H.$$

Exemplu: $(\mathbb{R}, +), N \subset \mathbb{R}, N$ parte stabilă a lui \mathbb{R} , în raport cu „ $+$ ”.

Monoizi

$M \neq \emptyset$ mulțime „ $*$ ”: $M \times M \rightarrow M$ lege de compoziție pe M

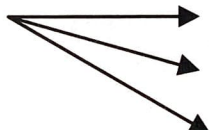
- $(M, *)$ monoid:  „ $*$ ” este (A)
„ $*$ ” admite (E.N.)
- $(M, *)$ monoid: comutativ  $(M, *)$ monoid
„ $*$ ” este (C)

Exemple: $(\mathbb{N}, +); (\mathbb{Z}, +); (\mathbb{Q}, +); (\mathbb{R}, +);$
 $(\mathbb{N}, \cdot); (\mathbb{Z}, \cdot); (\mathbb{Q}, \cdot); (\mathbb{R}, \cdot)$
sunt monoizi comutativi.

Grupuri

$G \neq \emptyset$ mulțime: „ $*$ ”: $G \times G \rightarrow G$ lege de compoziție

$(G, *)$ se numește grup dacă:

- 
- „ $*$ ” este (A)
 - „ $*$ ” are (E.N.)
 - $(\forall) x \in G$ este (E.S.)

$(G, *)$ se numește grup comutativ
sau grup abelian **dacă**:

- 
- $(G, *)$ grup
 - „ $*$ ” este (C)

Exemple: $(\mathbb{Z}, +)$ grupul comutativ al numerelor întregi;
 (\mathbb{Q}^*, \cdot) grupul abelian al numerelor raționale nenule

Grupul claselor de resturi modulo n

$\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \dots, \widehat{n-1}\}$ „ $+$ ”: $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$ $(\hat{x}, \hat{y}) \rightarrow \hat{x} + \hat{y}$; $(\mathbb{Z}_n, +)$ este grup
abelian.

Subgrupuri

$(G, *)$ grup, $H \subset G, H \neq \emptyset$

- H subgrup al lui G dacă „ $*$ ” induce pe H o lege de compoziție astfel încât $(H, *)$ grup.

Teoremă: $H \subset G$ subgrup al grupului $(G, *)$ dacă și numai dacă sunt îndeplinite:

$$(\forall) x, y \in H \Rightarrow x * y \in H;$$

$$(\forall) x \in H \Rightarrow x' \in H \text{ (unde } x' \text{ este simetricul lui } x \text{ în raport cu legea „} * \text{”).}$$

Exemple: $(\mathbb{Z}, +)$ subgrup al lui $(\mathbb{Q}, +)$ $(\mathbb{Q}, +)$ subgrup al lui $(\mathbb{R}, +)$

(\mathbb{Z}^*, \cdot) subgrup al lui (\mathbb{Q}^*, \cdot) (\mathbb{Q}^*, \cdot) subgrup al lui (\mathbb{R}^*, \cdot)

- Fie $(G, *)$ grup. $(H, *)$ subgrup al lui $(G, *)$. Avem:

- Elementul neutru al lui H coincide cu elementul neutru al lui G ;

$$(\forall) x \in H \Rightarrow x' \in H;$$

- Sunt echivalente afirmațiile:

- H subgrup al lui G ;

$$(\forall) x, y \in H \Rightarrow xy' \in H;$$

$$(\forall) x, y \in H \Rightarrow xy \in H \text{ și } x' \in H.$$

Ordinul unui element: $(G, *)$ grup cu elementul neutru $e, x \in G$.

- Cel mai mic număr natural $n \in \mathbb{N}^*$, cu proprietatea $x^n = e$, se numește ordinul elementului x , în grupul G .

Exemple: $(\mathbb{Z}_4, +), e = \hat{0}: \hat{1} + \hat{1} + \hat{1} + \hat{1} = \hat{0} \text{ ord}(\hat{1}) = 4; \hat{2} + \hat{2} = \hat{0} \text{ ord}(\hat{2}) = 2.$

$$(\mathbb{Z}_5, \cdot), e = \hat{1}: \hat{2}^4 = \hat{1} \Rightarrow \text{ord}(\hat{2}) = 4;$$

$$\hat{3}^4 = \hat{1} \Rightarrow \text{ord}(\hat{3}) = 4;$$

$$\hat{4}^2 = \hat{1} \Rightarrow \text{ord}(\hat{4}) = 2.$$

Morfisme și izomorfisme de grupuri

Fie $(G_1, *)$ și (G_2, \circ) grupuri.

- $f: G_1 \rightarrow G_2$ se numește **morfism** de grupuri dacă $f(x * y) = f(x) \circ f(y)$.
- Dacă $G_1 = G_2$, atunci f se numește **endomorfism**.
- $f: G_1 \rightarrow G_2$ morfism de grupuri, e_1, e_2 sunt elemente neutre din grupurile G_1 și

G_2 . Atunci:

- 1) $f(e_1) = e_2$;
- 2) $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$, $(\forall) x \in G_1$;
- 3) $f(x^n) = (f(x))^n$, $(\forall) x \in G_1$; $(\forall) n \in \mathbb{Z}$

- $(G_1, *)$ și (G_2, \circ) grupuri. $f: G_1 \rightarrow G_2$ se numește **izomorfism** de grupuri dacă:

- 1) f este bijectivă;
- 2) f este morfism de grupuri.

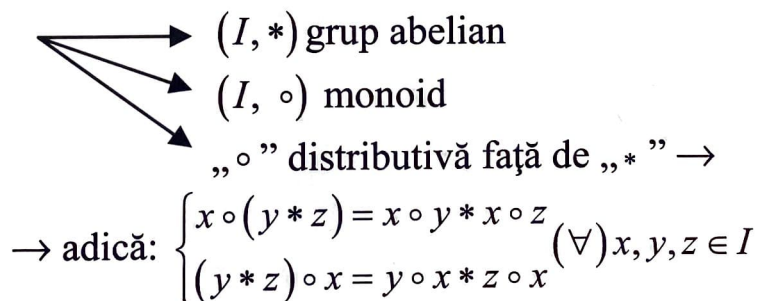
- Dacă $G_1 = G_2$, $f: G_1 \rightarrow G_1$ îndeplinește condițiile de mai sus, se numește **automorfism** al lui G_1 .

- $f: G_1 \rightarrow G_2$ izomorfism de grupuri, atunci $f^{-1}: G_2 \rightarrow G_1$ izomorfism de grupuri.

Inele

Fie $I \neq \emptyset$.

$(I, *, \circ)$ se numește inel dacă:



Observații: Dacă (I, \circ) monoid comutativ, atunci I se numește inel comutativ.

Exemplu: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ inel comutativ; $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ inel comutativ.

Fie e_1 elementul neutru al legii „ $*$ ” (al primei legi) și e_2 elementul neutru al legii „ \circ ” (al celei de-a doua legi).

- I este inel **fără divizori ai lui zero** dacă $x \neq e_1$ și $y \neq e_1 \Rightarrow x \circ y \neq e_1$;
- I este inel comutativ cu cel puțin două elemente și fără divizori ai lui zero, atunci I se numește **domeniu de integritate**.

Reguli de calcul într-un inel

$(I, *, \circ)$ inel.

1) $(\forall) x \in I, e_1 \circ x = x \circ e_1 = e_1$;

2) $e_1 \neq e_2$ (e_1 elementul neutru al primei legi; e_2 elementul neutru al celei de-a doua legi)

3) Regula semnelor:

$$(\forall) x, y \in I; (-x) \circ y = x \circ (-y) = -x \circ y;$$

$(-x) \circ (-y) = x \circ y$, unde $(-x)$ este elementul simetrizabil al lui x în raport cu prima lege „ $*$ ”

4) $(\forall) x, y, z \in I, x \circ (y - z) = x \circ y - x \circ z$;

$$(y - z) \circ x = y \circ x - z \circ x.$$

5) I inel fără divizori ai lui zero, $(\forall) x, y, z \in I; x \neq e_1; x \circ y = x \circ z$ sau $y \circ x = z \circ x$, atunci $y = z$.

Subinele

$(I, *, \circ)$ inel. $M \subset I, M \neq \emptyset$ se numește subinel al inelului I , dacă $(M, *, \circ)$ inel.

Exemple: $(\mathbb{Z}^*, +, \cdot)$ subinel al inelului $(\mathbb{C}^*, +, \cdot)$;

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ subinel al inelului $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

Morfisme și izomorfisme de inele

(I_1, \perp, Δ) și $(I_2, *, \circ)$ două inele.

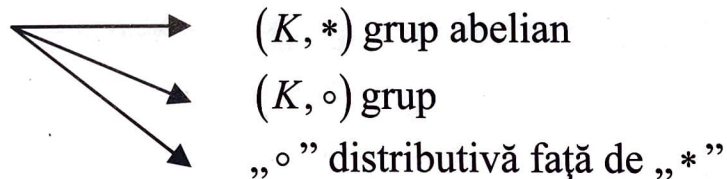
- $f: I_1 \rightarrow I_2$ este morfism de inele dacă:
 - $f(x \perp y) = f(x) * f(y), (\forall) x, y \in I_1;$
 - $f(x \Delta y) = f(x) \circ f(y), (\forall) x, y \in I_1;$
- $f: I_1 \rightarrow I_1$ morfism de inele se numește **endomorfism** al inelului I_1 ;
- $f: I_1 \rightarrow I_2$ surjectivă, atunci f se numește **morfism unitar** de inele;
- $f: I_1 \rightarrow I_2$ morfism bijectiv, atunci f se numește **izomorfism** de inele;
- $f: I_1 \rightarrow I_1$ izomorfism, atunci f se numește **automorfism**.

Exemplu: $1_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcția identică pe A ; 1_A este automorfism între $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ și $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

Corpuri

Fie K mulțime nevidă care conține cel puțin două elemente.

$(K, *, \circ)$ corp dacă:



Obs.: (K, \circ) grup abelian $\Rightarrow (K, *, \circ)$ se numește **corp comutativ**.

Exemple: $(\mathbb{Q}^*, +, \cdot)$ corp comutativ;

$(\mathbb{R}^*, +, \cdot)$ corp comutativ;

Proprietăți:

- 1) Un corp nu are divizori ai lui zero (este **domeniu de integritate**);
- 2) Orice domeniu de integritate finit este corp.

Morfisme și izomorfisme de corpuri

(K_1, \perp, Δ) și $(K_2, *, \circ)$ corpuri.

- $f: K_1 \rightarrow K_2$ este morfism de corpuri dacă:
 - $f(x \perp y) = f(x) * f(y), \quad (\forall x, y \in K_1);$
 - $f(x \Delta y) = f(x) \circ f(y), \quad (\forall x, y \in K_1)$
- $f: K_1 \rightarrow K_2$ morfism bijectiv de corpuri, atunci f este **izomorfism** de corpuri;
- $f: K_1 \rightarrow K_1$ morfism, se numește **endomorfism** al corpului K_1 ;
- $f: K_1 \rightarrow K_1$ izomorfism, se numește **automorfism** al corpului K_1 .

Teoremă: Orice morfism de corpuri este injectiv.