15. Inele de polinoame

$(K,+,\cdot)$ inel comutativ.

- Un şir $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $a_i\in K, a_n\neq 0, a_i=0, (\forall i>n)$ se numeşte **polinom de grad *n*,**

cu coeficienţi în K $f\overset{not}{=}(a_0,a_1,a_2,...,a_n,0,0,...,0)$;

- Mulţimea polinoamelor cu coeficienţii în K se notează $K[X]$

$f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+...+a_1X+a_0$, $a_i\in K$, $i=\overline{1,n}$

- $a_n\neq 0\Rightarrow \text{grad} f=n$ şi a_n se numeşte **coeficient dominant;**
- $a_n=a_{n-1}=...=a_0=0\Rightarrow f=0$ **polinomul nul** şi grad $f=-\infty$.
- $f(c)=a_n\cdot c^n+a_{n-1}\cdot c^{n-1}+...+a_1\cdot c+a_0$ se numeşte **valoarea** polinomului f în c.

Teoremă: $(K,+,\cdot)$ inel $\Rightarrow (K[X],+,\cdot)$;

$(K,+,\cdot)$ inel comutativ $\Rightarrow (K[X],+,\cdot)$ inel comutativ.

- $f,g\in K[X]$: $f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+...+a_1X+a_0$; $f=(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$;

$g=b_mX^m+b_{m-1}X^{m-1}+...+b_1X+b_0$; $g=(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$;

Suma + : $K[X]\times K[X]\to K[X]; f+g=(a_i+b_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Produsul · : $K[X]\times K[X]\to K[X], f\cdot g=\left(\sum_{i+j=k} a_i\cdot b_j\right)_{k\in\mathbb{N}}$

Înmulţirea cu o constantă (scalar) $\lambda\in K$:
$K[X]\times K[X]\to K[X]:\ \lambda\cdot f=(\lambda a_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Exemplu: $f=2X^3-3X^2+2X+5$; $g=4X^2-X-4$.

$f+g=2X^3+X^2+X+1$;

$f\cdot g = 8X^5-2x^4-8X^3-12X^4+3X^3+12X^2+8X^3-8X-2X^2+20X^2-5X-20$

$= 8X^5-14X^4+3X^3+30X^2-13X-20$.

$2f+3g=4X^3-6X^4+4X+10+12X^2-3X-12=4X^3+6X^2+X-2$.

Teorema împărţirii cu rest

$(K,+,\cdot)$ corp comutativ, $f, g\in K[X]$, $g\neq 0$. Există în mod unic polinoamele $q, r\in K[X]$ astfel încât $f=g\cdot q+r$, grad $r<$ grad g.

q se numeşte câtul împărţirii lui f la g;

r se numeşte restul împărţirii lui f la g.

Teorema restului: $f\in K[X]$, $a\in K$. Restul împărţirii polinomului f prin $(X-a)\in K[X]$ este $f(a)$.

Teorema lui Bezout: $f\in K[X]$, $a\in K$, $X-a\in K[X]$. Polinomul f se divide prin $X-a$ (sau polinomul $X-a$ divide polinomul f) dacă şi numai dacă $f(a)=0$.

Schema lui Horner = algoritm pentru determinarea câtului şi restului împărţirii unui polinom f printr-un polinom de forma $X-a$ (respectiv $X+a$).

Exemplu: $f = 3X^3 - 2X^2 + 5X - 7$; $g_1 = X - 2$; $g_2 = X + 1$.

	X^3	X^2	X	X^0
	3	-2	5	-7
	$\downarrow$			
2	3	$2 \cdot 3 - 2 = 4$	$2 \cdot 4 + 5 = 13$	$2 \cdot 13 - 7 = 19$
		coeficienţii câtului	coeficienţii câtului	restul

$r_1 = 19$; $q_1 = 3X^2 + 4X + 13$

$g_2 = 0 \Rightarrow x = -1$.

	X^3	X^2	X	X^0
	3	-2	5	-7
	$\downarrow$			
-1	3	$(-1) \cdot 3 - 2 = -5$	$(-1) \cdot (-5) + 5 = 10$	$(-1) \cdot 10 - 7 = -17$
		coeficienţii câtului	coeficienţii câtului	restul

$r_2 = -17$; $q_2 = 3X^2 - 5X + 10$

- $f \in K[X]$, grad $f = n$; $n \geq 1$ este **reductibil** peste K, dacă există polinoamele $g, h \in K[X]$ grad $g < n$ şi grad $h < n$, astfel încât $f = g \cdot h$.

  În caz contrar, f este **ireductibil** peste K.

- $f, g \in K[X]$, g divide f (notat $g \mid f$) sau f este divizibil prin g (notat $f \,\vdots\, g$) dacă există polinomul $h \in K[X]$, astfel încât $f = g \cdot h$.
- $f, g \in K[X]$ sunt asociate în divizibilitate şi scriu $f \sim g$ dacă $f \mid g$ şi $g \mid f$.
- Orice polinom $f \in \mathbb{C}[X]$ poate fi descompus în factori, ca un produs de polinoame de gradul 1 din $\mathbb{C}[X]$, unic determinate (mai puţin ordinea şi o asociere în divizibilitate).
- $f \in K[X]$, $\alpha \in K$. Dacă $f(\alpha) = 0$, spun că α este rădăcina polinomului f.
- $f = 0 \in K$ (polinomul nul) are ca rădăcină orice element al lui K (polinomul nul are o infinitate de soluţii în corpul K).
- $f, g \in K[X]$, $\left.\begin{matrix} g \mid f \\ g(\alpha) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(\alpha) = 0$.

- $f \in K[X]$, $\alpha \in K$ este rădăcină de ordin $n \in \mathbb{N}^*$ a polinomului f dacă şi numai dacă $(X-\alpha)^n \mid f$ şi $(X-\alpha)^{n+1} \nmid f$ (adică $(X-\alpha)^{n+1}$ nu divide f).

Teoremă: $f \in K[X]$, $\alpha \in K$ sunt echivalente.

$$(\alpha \text{ rădăcină de ordinul } n \text{ a polinomului } f) \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha)=0 \\ f'(\alpha)=0 \\ f''(\alpha)=0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ f^{(n-1)}(\alpha)=0 \\ f^{(n)}(\alpha)=0 \\ f^{(n+1)}(\alpha)\neq 0 \end{cases}$$

unde f' este derivata formală a lui f, f'' este derivata formală a lui f'.

Se ataşează polinomului f – funcţia polinomială asociată, care se derivează de mai multe ori.

Teorema fundamentală a algebrei (D'Alembert - Gauss)

O ecuaţie algebrică $f(x) = 0$, $f \in \mathbb{C}[X]$, grad $f \geq 1$ are cel puţin o rădăcină complexă.

Consecinţe:

- $f \in \mathbb{C}[X]$, grad $f = n \in \mathbb{N}^*$ are exact n rădăcini complexe;
- $f = 0 \in \mathbb{C}[X]$ are o infinitate de rădăcini;
- $f, g \in \mathbb{C}[X]$, $(\exists) D \subseteq \mathbb{C}$, mulţime infinită, astfel încât $f(\alpha) = g(\alpha)$, $(\forall) \alpha \in I$, atunci $f = g$.

Propoziţie: $(K,+,\cdot)$ inel comutativ, $f \in K[X]$. Orice polinom f admite o descompunere în factori ireductibili.

Consecinţe: $f \in \mathbb{C}[X]$, grad $f = n \in \mathbb{N}^*$. Atunci există $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{C}$, nu neapărat distincte, şi $k \in \mathbb{C}^*$, astfel încât $f = k(X-x_1)(X-x_2)...(X-x_n)$.

Propoziţie: Dacă $f = k(X-x_1)(X-x_2)...(X-x_n)$, $(\forall)\alpha \neq x_i$, $i=\overline{1,n}$,

$$\frac{1}{\alpha-x_1}+\frac{1}{\alpha-x_2}+...+\frac{1}{\alpha-x_n}=\frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)}.$$

Relaţiile lui Viète

$f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$, cu rădăcinile $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{C}$.

$$\begin{cases} x_1+x_2+...+x_n=-\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ x_1x_2+x_1x_3+...+x_{n-1}x_n=\dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+...+x_{n-2}x_{n-1}x_n=-\dfrac{a_{n-3}}{a_n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1x_2...x_n=(-1)^n\cdot\dfrac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

- relaţie utilă: $x_1^2+x_2^2+...+x_n^2=(x_1+x_2+...+x_n)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+...+x_{n-1}x_n)$;
- caz particular: relaţiile lui Viète:

în cazul grad $f = 4 \Rightarrow f = a_4X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$.

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-\dfrac{a_3}{a_4} \\ (x_1+x_2)(x_3+x_4)+x_1x_2+x_3x_4=\dfrac{a_2}{a_4} \\ x_1x_2(x_3+x_4)+x_3x_4(x_1+x_2)=-\dfrac{a_1}{a_4} \\ x_1x_2x_3x_4=\dfrac{a_0}{a_4} \end{cases}$$

Observaţie.: x_1, x_2, x_3, x_4 pot fi grupate două câte două şi sub alte forme.

Teoremă: $\left.\begin{array}{l} f\in\mathbb{R}[X] \\ x_1=a+bi\in\mathbb{C} \text{ rădăcină a lui } f \end{array}\right\} \Rightarrow x_2=\overline{x_1}=a-bi$ este rădăcină a lui f.

Consecinţă: $f\in\mathbb{R}[X]$ are un număr par de rădăcini în $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

Teoremă: $f\in\mathbb{Q}[X], f\neq 0$. $x_1=a+\sqrt{b}$; $a,\ b\in\mathbb{Q}$, $b>0$, $\sqrt{b}\notin\mathbb{Q}$, este rădăcină a polinomului f, atunci $x_2=a-\sqrt{b}$ este rădăcină a polinomului f.

Teoremă: $f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+a_{n-2}X^{n-2}+\ldots+a_1X+a_0\in\mathbb{Z}[X]$, $a_n\neq 0$. Dacă $p,q\in\mathbb{Z}$, $q\neq 0$, $(p,\ q)=1$ şi $x_1=\dfrac{p}{q}$ este rădăcină raţională a polinomului f, atunci $p\mid a_0$ şi $q\mid a_n$. În particular, dacă $x_1\in\mathbb{Z}\Rightarrow x_1\mid a_0$.

Exemple:

1) Determinaţi rădăcinile întregi ale polinomului $f=X^3-2X^2-X+2$.

$D_2=\{\pm1,\pm2\}$.

$f(1)=1-2-1+2=0\Rightarrow x_1=1$ rădăcină a lui f;

$f(-1)=-1-2+1+2=0\Rightarrow x_2=-1$ rădăcină a lui f;

$f(2)=2^3-2\cdot2^2-2+2=0\Rightarrow x_3=2$ rădăcină a lui f;

$\Rightarrow f=1\,(X-1)\,(X+1)\,(X-2)$

2) Determinaţi $a, b \in \mathbb{R}$, ştiind că $f = 2X^3 - 3X^2 + aX - 2b$ are rădăcina $x_1 = 1 - i$.

$$\left.\begin{array}{l} f \in \mathbb{R}[X] \\ x_1 = 1 - i \text{ rădăcină a lui } f \end{array}\right\} \Rightarrow x_2 = 1 + i \text{ rădăcină a lui } f \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f \vdots (X - x_1)(X - x_2) \Rightarrow f \vdots \left(\overline{X-1} + i\right)\left(\overline{X-1} - i\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f \vdots \left[(X-1)^2 - i^2\right] \Rightarrow f \vdots \left(X^2 - 2X + 1 + 1\right) \Rightarrow f \vdots \left(X^2 - 2X + 2\right).$$

$$\begin{array}{r|l} 2X^3 - 3X^2 + aX - 2b & X^2 - 2X + \\ \cline{2-2} -2X^3 + 4X^2 - 4X & 2X + 1 \\ \cline{1-1} / \quad X^2 + (a-4)X - 2b & \\ -X^2 \;+\; 2X \;-2 & \\ \cline{1-1} / \quad (a-2)X - 2b - 2 & \end{array}$$

$$\text{restul} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a - 2 = 0 \\ -2b - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \in \mathbb{R} \\ b = -1 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

3) Determinaţi $a, b \in \mathbb{Q}$, ştiind că $f = 3X^3 - 5X^2 - aX + b$ are rădăcina $x_1 = 1 + \sqrt{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} f \in \mathbb{Q}[X] \\ x_1 = 1 + \sqrt{2} \text{ rădăcină a lui } f \end{array}\right\} \Rightarrow x_2 = 1 - \sqrt{2} \text{ rădăcină a lui } f \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f \vdots \left(X - 1 - \sqrt{2}\right)\left(X - 1 + \sqrt{2}\right) \Rightarrow f \vdots \left[(X-1)^2 - 2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f \vdots \left(X^2 - 2X + 1 - 2\right) \Rightarrow f \vdots \left(X^2 - 2X - 1\right)$$

$$\begin{array}{r|l} 3X^3 - 5X^2 - aX + b & X^2 - 2X - 1 \\ \cline{2-2} -3X^3 + 6X^2 + 3X & 3X + 1 \\ \cline{1-1} / \quad X^2 + (3-a)X + b & \\ -X^2 \;+\; 2X \;+1 & \\ \cline{1-1} / \quad (5-a)X + b + 1 & \end{array}$$

restul $= 0 \Rightarrow \begin{cases} 5-a=0 \\ b+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=-1 \end{cases}$

4) Determinaţi ordinul de multiplicitate al rădăcinii $\alpha = 1$, pentru polinomul
$f = X^7 - 3X^6 + 2X^5 + 2X^4 - 2X^3 - 2X^2 + 3X - 1$;
Asociem funcţia polinomială $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$g(x) = x^7 - 3x^6 + 2x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 3x - 1$;

$g'(x) = 7x^6 - 18x^5 + 10x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 4x - 3$;

$g''(x) = 42x^5 - 90x^4 + 40x^3 + 24x^2 - 12x - 4$;

$g'''(x) = 210x^4 - 360x^3 + 120x^2 + 48x - 12$:

$g(1) = 1 - 3 + 2 + 2 - 2 - 2 + 3 - 1 = 0$;
$g'(1) = 7 - 18 + 10 + 8 - 6 - 4 + 3 = 0$;
$g''(1) = 42 - 90 + 40 + 24 - 12 - 4 = 0$;
$g'''(1) = 210 - 360 + 120 + 48 - 12 \neq 0$.
Aşa că $\alpha = 1$ este rădăcină de ordin 3, adică ordinul de multiplicitate este 3.

5) Determinaţi valorile reale ale lui a, astfel încât ecuaţia $x^4 - x^3 + 2x^2 + 3x + 2a = 0$ să aibă o rădăcină dublă reală.
Asociez funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$f(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + 3x + 2a$
$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 4x + 3$
$f''(x) = 12x^2 - 6x + 4$.

α rădăcină dublă dacă: $\begin{cases} f(\alpha)=0 \\ f'(\alpha)=0 \\ f''(\alpha)\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^4 - \alpha^3 + 2\alpha^2 + 3\alpha + 2a = 0 \\ 4\alpha^3 - 3\alpha^2 + 4\alpha + 3 = 0 \\ 12\alpha^2 - 6\alpha + 4 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4\alpha(\alpha^2 - 1) - 3(\alpha^2 - 1) = 0 \Rightarrow (\alpha - 1)(\alpha + 1)(4\alpha - 3) = 0 \Rightarrow \alpha = 1;\ \alpha = -1;\ \alpha = \frac{3}{4}$.

$\alpha = 1$ rădăcină dublă dacă $\begin{cases} f(1)=0 \\ f''(1)\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-1+2+3+2a=0 \\ 12-6+4\neq 0 \text{ (A)} \end{cases} \Rightarrow 5 + 2a = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ a=-\frac{5}{2}$.

$\alpha=-1$ rădăcină dublă dacă $\begin{cases} f(-1)=0 \\ f''(-1)\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+1+2-3+2a=0 \\ 12+6+4\neq 0 \text{ (A)} \end{cases} \Rightarrow 1+2a=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ a=-\frac{1}{2}$.

$\alpha=\frac{3}{4}$ rădăcină dublă dacă $\begin{cases} f\left(\frac{3}{4}\right)=0 \\ f''\left(\frac{3}{4}\right)\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{81}{16^2}-\frac{27}{64}+2\cdot\frac{9}{16}+3\cdot\frac{3}{4}+2a=0 \\ 12\cdot\frac{9}{16}-6\cdot\frac{4}{5}+4\neq 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ prin calcul a.

6) a) Rezolvaţi în $\mathbb{Z}_4$ ecuaţia $x^2+\hat{3}x+\hat{2}=0$.

x	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	
x^2	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\rightarrow$ se ridică la pătrat
$\hat{3}x$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\rightarrow$ se înmulţeşte cu $\hat{3}$
$x^2+\hat{3}x$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\rightarrow$ se adună liniile 2 şi 3
$x^2+\hat{3}x+\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	

Soluţie unică: $x=\hat{3}$

b) Rezolvaţi în $\mathbb{Z}_5$ ecuaţiile $\hat{2}x+\hat{3}=\hat{0}$; $\hat{3}x+\hat{4}=\hat{0}$.

x	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{2}x$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{1}$	$\hat{3}$
$\hat{2}x+\hat{3}$	$\hat{3}$	$\underline{\underline{\hat{0}}}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$

Soluţie: $x=\hat{1}$;

x	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{3}x$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{1}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$
$\hat{3}x+\hat{4}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$	$\underline{\underline{\hat{0}}}$	$\hat{3}$	$\hat{1}$

Soluţie: $x=\hat{2}$

c) Rezolvaţi în $\mathbb{Z}_8$ ecuaţia $\hat{5}x+\hat{3}=\hat{0}$.

x	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{6}$	$\hat{7}$
$\hat{5}x$	$\hat{0}$	$\hat{5}$	$\hat{2}$	$\hat{7}$	$\hat{4}$	$\hat{1}$	$\hat{6}$	$\hat{3}$
$\hat{5}x+\hat{3}$	$\hat{3}$	$\underline{\underline{\hat{0}}}$	$\hat{5}$	$\hat{2}$	$\hat{7}$	$\hat{4}$	$\hat{1}$	$\hat{6}$

Soluţie: $x=\hat{1}$

7) Se consideră polinoamele: $f = X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{3}X + \hat{2}$, $g = X + a, f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$.
Determinaţi $a \in \mathbb{Z}_5$ astfel încât f divizibil cu g.

x	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	
$\hat{3}x$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{1}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$	(am înmulţit linia 1 cu $\hat{3}$)
$\hat{3}x+\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{1}$	$\hat{4}$	(am adunat la linia a doua $\hat{2}$)
x^2	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{4}$	$\hat{4}$	$\hat{1}$	(am ridicat linia 1 la pătrat)
$\hat{2}x^2$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	(am înmulţit linia precedentă cu $\hat{2}$)
x^3	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	(am înmulţit liniile care conţin x, respectiv x^2)
f	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{1}$	$\underline{\underline{\hat{0}}}$	

Conform tabelului, $f\left(\hat{4}\right) = \hat{0} \Rightarrow a = -\hat{4} \Rightarrow a = \hat{1}$ soluţie.

Ecuaţii reciproce

Se numeşte **ecuaţie reciprocă de grad 3** o ecuaţie de forma $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$, la care coeficienţii egal depărtaţi de centru sunt egali.

- Are ca rădăcină $x = -1$

Schema lui Horner:

	x^3	x^2	x	x^0
	a	b	b	a
-1	a	$-a+b$	a	$\underline{\underline{0}}$
				↑ restul

$ax^2 + (b-a)x + a = 0$, se rezolvă şi se determină x_2 şi x_3.

Exemplu: $x^3+8x^2+8x+1=0$; $x_1=-1$

	x^3	x^2	x	x^0
	1	8	8	1
-1	1	7	1	$\underline{\underline{0}}$
				$\uparrow$ restul

$x^2+7x+1=0$; $\Delta=49-4=45 \Rightarrow x_{2,3}\in\mathbb{R}$; $x_{2,3}=\dfrac{-7\pm\sqrt{45}}{2}$.

- **Se numeşte ecuaţie reciprocă de gradul 4 o ecuaţie de forma:**

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$$

- Se împarte prin x^2;
- Se notează $x+\dfrac{1}{x}=t$;
- Se rezolvă ecuaţia în t.

Exemplu: $2x^4+x^3+x^2+x+2=0 \quad |:x^2$;

- $2x^2+x+1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}=0 \Leftrightarrow 2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+x+\dfrac{1}{x}+1=0$.
- $x+\dfrac{1}{x}=t \uparrow^2 \Rightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2}+2=t^2 \Rightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2$.
- Ecuaţia devine: $2\left(t^2-2\right)+t+1=0 \Leftrightarrow 2t^2-4+t+1=0 \Leftrightarrow 2t^2+t-3=0$;

$\Delta=1+24=25$; $t_{1,2}=\dfrac{-1\pm5}{4}$; $t_1=1$; $t_2=-\dfrac{3}{2}$.

- $x+\dfrac{1}{x}=1 \Leftrightarrow x^2+1=x \Leftrightarrow x^2-x+1=0$; $x_{1,2}=\dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$

$x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 2x^2+2=-3x \Leftrightarrow 2x^2+3x+2=0$; $x_{3,4}=\dfrac{-3\pm i\sqrt{7}}{4}$.

- Se numeşte ecuaţie reciprocă de grad 5, o ecuaţie de forma $ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^3 + bx + a = 0$, în care coeficienţii egal depărtaţi de centru sunt egali.
  - Are rădăcina $x_1 = -1$;
  - Se rezolvă o ecuaţie reciprocă de grad 4 obţinută prin împărţirea la $x + 1$.

Exemplu: $2x^5 + 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 4x + 2 = 0 \quad |:2 \Leftrightarrow x^5 + 2x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0$

	x^5	x^4	x^3	x^2	x	x^0
	1	2	1	1	2	1
-1	1	1	0	1	1	0

- $x^4 + x^3 + x + 1 = 0 \qquad |:x^2$
- $x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} = 0$.
- $x + \frac{1}{x} = t$; $t^2 - 2 + t = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0$; $t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$;

$t_1 = 1$; $t_2 = -2$.

- $x + \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 1 = x \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$; $x_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$;
- $x + \frac{1}{x} = -2 \Leftrightarrow x^2 + 1 = -2x \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$; $(x+1)^2 = 0$; $x_{3,4} = -1$.