10. Permutări

Definiţie: Fie $A = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Orice funcţie bijectivă $f : A \to A$ se numeşte permutare de grad n.

Exemplu: Permutările de gradul doi: $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ permutarea identică;

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Definiţie: Fie $\sigma, \tau \in Sn$ (mulţimea permutărilor de grad n). $\sigma = \tau \Leftrightarrow \sigma(i) = \tau(i)$, $(\forall)\ i = \overline{1,n}$.

Teoremă: Numărul permutărilor de grad n, $n \in \mathbb{N}^*$, este $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.

Compunerea permutărilor

Fie $\sigma, \tau \in S_n$, $\quad \sigma \circ \tau = \sigma\tau \in S_n \quad$ $\sigma\tau(i) = \sigma(\tau(i))$, $(\forall)\ i = \overline{1,n}$

Exemplu: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; $\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\sigma(1) = 3 \Rightarrow \sigma^{-1}(3) = 1;$
$\sigma(2) = 1 \Rightarrow \sigma^{-1}(1) = 2;$
$\sigma(3) = 2 \Rightarrow \sigma^{-1}(2) = 3;$

- Se numeşte transpoziţie de grad n:

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 & i & \dots & j-1 & j & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & i-1 & j & \dots & j-1 & i & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Exemple: $(12)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$; $(34)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 4 & 3\end{pmatrix}$

Teoremă: $(ij) \in S_n$, atunci
1) $(ij) = (ji)$;
2) $(ij)^2 = e$;
3) $(ij)^{-1} = (ij)$.

Teoremă: Orice permutare de grad n se poate scrie ca un produs de transpoziţii din S_n.

Inversiuni. Semnul unei permutări

$\sigma \in S_n$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i < j$. Dacă $\sigma(i) > \sigma(j)$, atunci perechea (i, j) se numeşte **inversiune a permutării** σ.

- $m(\sigma)$ = numărul tuturor inversiunilor permutării σ;
- $\Sigma(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$ - signatura (sau semnul) permutării σ.
- $\Sigma(\sigma)=\begin{cases}1, \text{dacă } \sigma \text{ permutare pară}\\ -1, \text{dacă } \sigma \text{ permutare impară}\end{cases}$
- $\sigma \in S_n \Rightarrow \Sigma(\sigma)=\prod\limits_{1\le i<j\le n}\dfrac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$;
- $\Sigma(\sigma\tau) = \Sigma(\sigma)\cdot\Sigma(\tau), (\forall)\ \sigma, \tau \in S_n$;
- $\Sigma(\sigma^{-1}) = \Sigma(\sigma)$.
- $\sigma \in S_n$,

1) σ, τ au acelaşi semn $\Rightarrow \sigma\tau$ este pară;

2) σ, τ au semne contrare $\Rightarrow \sigma\tau$ este impară.

- Numărul permutărilor pare de grad n este egal cu numărul permutărilor impare de grad n, adică $\dfrac{n!}{2}$.