

INDUCTIA MATEMATICA-liceu

Un algoritm foarte des folosit în demonstrarea unor propoziții ce depind de șirul numerelor naturale, este cel al inducției matematice, numit și *metoda inducției complete*.

Demonstrația prin inducție matematică ar putea lua una din formele următoare:

VARIANTA I :

Se dă o propoziție $P(n)$ și se cere să se demonstreze că este adevărată pentru orice număr natural n , mai mare sau egal cu numărul natural m .

Demonstrația necesită parcurgerea a doi pași, anume :

I) Se demonstrează că $P(m)$ este o propoziție adevărată.

II) Se demonstrează că implicația $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ este adevărată, oricare ar fi k natural mai mare sau egal cu m .

Dacă ambele etape au fost parcurse

(adică " $P(m)$ " și " $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ " sunt propoziții adevărate),

atunci propoziția $P(n)$ este adevărată, oricare ar fi numărul natural n mai mare sau egal cu m , conform principiului inducției matematice.

Intr-adevăr, dacă în I) s-a constatat că $P(m)$ este adevărată, conform II) vom avea că $P(m+1)$ este, de asemenea, adevărată, deci la fel $P(m+2)$ ș.a.m.d...

VARIANTA II:

Demonstrația necesită parcurgerea următorilor doi pași :

I) Se demonstrează că $P(m)$ este o propoziție adevărată.

II) Se demonstrează că dacă $P(m), P(m+1), P(m+2), \dots, P(k-1)$, unde numărul natural k este mai mare sau egal cu $(m+2)$, sunt adevărate, atunci și $P(k)$ este adevărată.

Dacă ambele etape ale demonstrației sunt verificate, atunci propoziția $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural n , mai mare sau egal cu m .

EXERCITIUL 1

Suport teoretic:

Calcul sume, metoda inducției matematice, progresii geometrice.

Enunt:

Sa se calculeze suma urmatoare si, apoi, sa se demonstreze rezultatul gasit, folosind metoda inducției matematice:

$S = 5 + 55 + 555 + \dots + 555\dots 5$, unde ultimul termen al sumei contine n cifre.

Raspuns:

$$S = \frac{50}{81} \cdot (10^n - 1) - \frac{5n}{9}.$$

EXERCITIUL 2

Suport teoretic:

Metoda inducției matematice, divizibilitate in \mathbb{Z} , divizori, multipli.

Enunt:

Sa se arate, in doua moduri distincte, ca numarul

$$N = 9 \cdot 9^{2n} + 5 \cdot 5^{2n}$$

este divizibil cu 14, oricare ar fi numarul natural n .

EXERCITIUL 3

Suport teoretic:

Metoda inducției matematice, metoda inducției complete, divizibilitatea in \mathbb{N} .

Enunt:

Sa se demonstreze ca pentru orice numar natural n , are loc relatia:

$$3 | (n^3 + 11 \cdot n).$$

EXERCITIUL 4

Suport teoretic:

Inductia matematica, operatii matrice.

Enunt:

$$\text{Fie matricea } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Folosind inductia matematica, sa se demonstreze ca:

$$A^n = (-1)^n \cdot \begin{pmatrix} (-2n+1) & 2n \\ -2n & (2n+1) \end{pmatrix}, \text{ unde } n \in \mathbb{N}^*.$$