

# **FUNCȚIA EXPONENȚIALĂ ȘI FUNCȚIA LOGARITMICĂ**

---

## **Funcția exponențială și funcția logaritmică**

1. Funcția exponențială
  - 1) Puteri cu exponent natural nenul;
  - 2) Semnul puterii cu exponent natural;
  - 3) Puterea produsului și a câtului a două numere reale;
  - 4) Înmulțirea puterilor care au aceeași bază;
  - 5) Ridicarea unei puteri la altă putere;
  - 6) Împărțirea puterilor cu aceeași bază;
  - 7) Compararea puterilor;
  - 8) Funcția putere.
  - 9) Puteri cu exponent negativ;
  - 10) Funcția putere de exponent negativ.
2. Logaritmi
  - 1) Radicalul unui număr pozitiv;
  - 2) Funcția radical;
  - 3) Radicalul de ordin impar al unui număr negativ ;
  - 4) Proprietățile radicalilor ;
  - 5) Operații cu radicali ;
  - 6) Ecuații iraționale.
3. Ecuații și inecuații exponențiale și logaritmice
  - 1) Puteri cu exponent rațional pozitiv;
  - 2) Puteri cu exponent rațional negativ;
  - 3) Funcția putere de exponent rațional
4. Sisteme inecuații exponențiale și logaritmice. Inecuații.
5. Aplicații. Evaluare. Test de evaluare

# FUNCȚIA EXPONENȚIALĂ ȘI FUNCȚIA LOGARITMICĂ

---

## Funcția exponențială

### 1). Puteri cu exponent real

#### a). Puteri cu exponent real pozitiv

Fie  $a > 1$ . Se numește **puterea  $x$  a lui  $a$**  un număr real  $y$  care, pentru orice număr natural  $n$ , satisface inegalitățile :

$$a^{x'_n} \leq y < a^{x''_n},$$

unde numărul real  $x > 0$  are reprezentările zecimale  $x'$  și  $x''$  prin lipsă și respectiv prin ados cu o eroare mai mică decât  $10^{-n}$ .

Numărul  $y$  dat de definiția precedentă se notează  $a^x$  și se citește  **$a$  la puterea  $x$** .

Fie  $0 < a < 1$  și  $x$  un număr real pozitiv. Se numește **puterea  $x$  a lui  $a$**  un număr real  $y$  care, pentru orice număr natural  $n$ , satisface inegalitățile :  $a^{x'_n} < y \leq a^{x''_n}$ .

**Atenție !** Oricare ar fi  $a > 0$  și  $x > 0$  are loc  $a^x > 0$ .

#### b). Puteri cu exponent real negativ

Dacă  $a > 0$  și  $x > 0$  este un număr real negativ, atunci prin definiție are loc:

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}}.$$

Prin convenție se scrie  $a^0 = 1$ .

#### c). Proprietăți ale puterilor cu exponent real

1.  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ ;
2.  $a^x : a^y = a^{x-y}$ ;
3.  $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$ ;
4.  $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$ ;
5.  $a^x : a^x = (a^x) : (b^x)$ .

### 2). Funcția exponențială

**Definiție.** Funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow (0, +\infty)$ ,  $f(x) = a^x$ , unde  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  se numește **funcția exponențială de bază  $a$** .

#### **Proprietăți**

- 1). a). Dacă  $a > 1$ , atunci pentru  $x > 0$  avem  $a^x > 1$  ar loc  $a^x > 1$ , iar pentru  $x < 0$  are loc  $a^x < 1$ .
- b). Dacă  $0 < a < 1$ , atunci pentru  $x > 0$  avem  $a^x < 1$ , iar pentru  $x < 0$  avem  $a^x > 1$ .
- 2). Dacă  $x = 0$ . atunci oricare ar fi  $a > 0$  are loc  $a^0 = 1$

# FUNCTIA EXPONENTIALĂ ȘI FUNCTIA LOGARITMICĂ

---

3). Pentru  $a > 1$ , funcția exponențială  $f: \mathbf{R} \rightarrow (0, +\infty)$ ,  $f(x) = a^x$  este *strict crescătoare*, iar pentru  $0 < a < 1$ , funcția este *strict descrescătoare*.

4). Funcția exponențială  $f: \mathbf{R} \rightarrow (0, +\infty)$ ,  $f(x) = a^x$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  este *bijectivă*.

**Demonstrație.** Se arată că  $f$  este injectivă. Fie,  $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$  astfel încât  $x_1 \neq x_2$ . Atunci are loc  $x_1 < x_2$  sau  $x_1 > x_2$ . Să presupunem, de exemplu, că  $x_1 < x_2$ . Atunci, după monotonia funcției exponențiale, rezultă că :

1). Dacă  $a > 1$ , atunci  $f(x_1) < f(x_2)$  și deci  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .

2). Dacă  $0 < a < 1$ , atunci  $f(x_1) > f(x_2)$  și deci  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .

Analog, rezultă pentru  $x_1 > x_2$ .

Deci  $f$  este injectivă.

Surjectivitatea nu se poate demonstra în clasa a X-a. Dar, dacă se folosește graficul, se observă că orice paralelă dusă prin punctele codomeniului  $(0, +\infty)$  graficul funcției este interesat în cel puțin un punct.

5). Funcția exponențială  $f: \mathbf{R} \rightarrow (0, +\infty)$ ,  $f(x) = a^x$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  este inversabilă. Inversa funcției exponențiale se numește *funcție logaritmică*.

### 3). Graficul funcției exponențiale

Graficul funcției exponențiale se construiește prin puncte.

**Exemplu.**

Să se construiască graficul funcției  $f: \mathbf{R} \rightarrow (0, +\infty)$ ,  $f(x) = a^x$ , pentru  $a \in \left\{ 2, \frac{1}{2} \right\}$ .

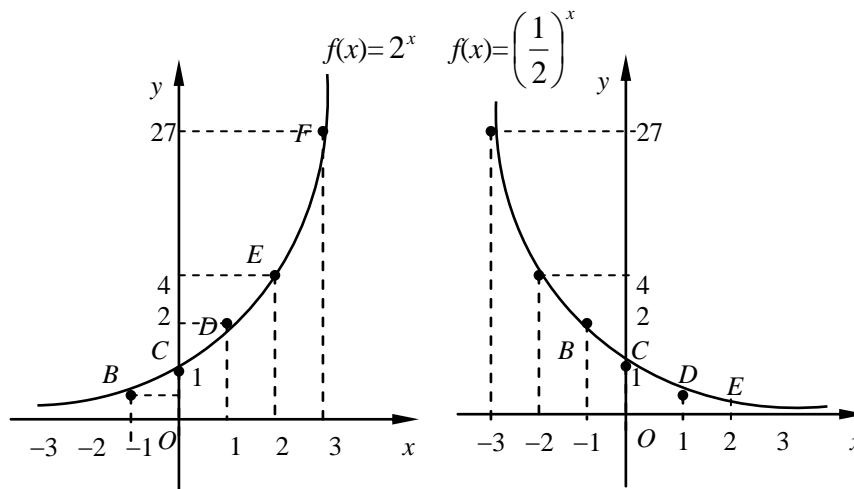
Se întocmește un tablou de valori pentru cele două cazuri :

$x$	$-\infty$	$-3$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$3$
	$+\infty$							
$f(x)$		$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$1$	$2$	$4$	$8$

$x$	$-\infty$	$-3$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$3$
	$+\infty$							
$f(x)$		$-27$	$-4$	$-2$	$1$	$\frac{1}{2}$	$4$	$27$

# FUNCTIA EXPONENTIALĂ ȘI FUNCTIA LOGARITMICĂ

Graficele celor două funcții sunt reprezentate mai jos :



Analizând cele două grafice, constatăm că ele au următoarele proprietăți :

1. Graficele se găsesc deasupra axei  $Ox$  ;
2. Trec prin punctul de coordonate  $(0, 1)$  ;
3. Graficul fiecărei funcții este construit dintr-o singură ramură care „urcă”
4. Graficul se apropie din ce în ce mai mult de axa  $Ox$  pozitivă dacă  $0 < a < 1$  și de  $Ox$  negativă dacă  $a > 1$ .

## CE TREBUIE SĂ ȘTIM

1. Orice putere rațională de forma  $a^{\frac{m}{n}}$  se poate scrie sub forma unui radical de forma  $\sqrt[n]{a^m}$ .
2. Dacă  $a > 1$  este un număr real, atunci dintre două puteri cu exponent rațional pozitive ale acestui număr, este mai mare acela al cărei exponent este mai mare.
3. Dacă  $0 < a < 1$  este un număr real, atunci dintre două puteri cu exponent rațional pozitive ale acestui număr, este mai mare acela al cărei exponent este mai mic.
4. Prin numărul real  $y = 3^{\sqrt{2}}$  se înțeleg aproximările:

$$1 \leq \sqrt{2} < 2$$

$$1,4 \leq \sqrt{2} < 1,5$$

$$1,41 \leq \sqrt{2} < 1,42 \Rightarrow$$

$$1,414 \leq \sqrt{2} < 1,415$$

.....

$$3^1 \leq y < 3^2$$

$$3^{1,4} \leq y < 3^{1,5}$$

$$3^{1,41} \leq y < 3^{1,42}$$

$$3^{1,414} \leq y < 3^{1,415}$$

.....

# FUNCTIA EXPONENTIALĂ ȘI FUNCTIA LOGARITMICĂ

---

## Probleme rezolvate

**E1. C3-1.** Ce se înțelege prin numărul real  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$  se înțeleg aproximările:

**E1. C3-1. Rezolvare**

$$\begin{array}{ll}
 1 \leq \sqrt{2} < 2 & \left(\frac{1}{3}\right)^2 < y \leq \left(\frac{1}{3}\right)^1 \\
 1,4 \leq \sqrt{2} < 1,5 & \left(\frac{1}{3}\right)^{1,5} < y \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{1,4} \\
 1,41 \leq \sqrt{2} < 1,42 \Rightarrow & \left(\frac{1}{3}\right)^{1,42} < y \leq 3^{1,41} \\
 1,414 \leq \sqrt{2} < 1,415 & \left(\frac{1}{3}\right)^{1,415} < y \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{1,144} \\
 ..... & .....
 \end{array}$$

**E2. C31-1.** Să se demonstreze că funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow (0, +\infty)$ ,  $f(x) = 3^x$  este strict crescătoare.

**E2. C3-1. Rezolvare.** Din  $x_1 < x_2$ , rezultă că există  $u > 0$  astfel încât  $x_2 = x_1 + u$ . Atunci  $a^{x_1} - a^{x_2} = a^{x_1} - a^{x_1+u} = a^{x_1}(1 - a^u)$  și deoarece  $u > 0$  după proprietatea funcției exponențiale rezultă că  $a^u > 1$ . Așadar,  $a^{x_1} > 0 \wedge 1 - a^u < 0$ , de unde  $a^{x_1}(1 - a^u) < 0$ . Înseamnă că  $a^{x_1} - a^{x_2} < 0 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f$  strict crescătoare.

**E3. C32-1.** Să se aducă la forma cea mai simplă  $\left[ (\sqrt{8})^{-4\frac{1}{3}} \right]^{\frac{\sqrt{8}}{26}}$ .

**E3. C3-1. Rezolvare.** Avem succesiv:

# FUNCTIA EXPONENTIALĂ ȘI FUNCTIA LOGARITMICĂ

---

$$\begin{aligned} \left[ (\sqrt{8})^{-4\frac{1}{3}} \right]^{\frac{\sqrt{8}}{26}} &= \left[ (\sqrt{8})^{-\frac{13}{3}} \right]^{\frac{\sqrt{8}}{26}} = \left[ \left( 8^{\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{13}{3}} \right]^{\frac{\sqrt{8}}{26}} = \left[ (8)^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{13}{3}} \right]^{\frac{\sqrt{8}}{26}} = \left[ (2^3)^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{13}{3}} \right]^{\frac{\sqrt{8}}{26}} = \left[ 2^{-3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{3}} \right]^{\frac{\sqrt{8}}{26}} = \\ &= \left[ 2^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{13}{1}} \right]^{\frac{\sqrt{8}}{26}} = 2^{-\frac{13}{2} \cdot \frac{\sqrt{8}}{26}} = 2^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{8}}{2}} = \left( \frac{1}{2} \right)^{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}} = \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}}. \end{aligned}$$

**E4. C3-1.** Să se compare  $m$  și  $n$  dacă este adevărată inegalitatea:

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^m \geq (\sqrt{3} - \sqrt{2})^n.$$

**E4. C3-1. Rezolvare.** Baza fiind subunitară  $0 < \sqrt{3} - \sqrt{2} < 1$ , pentru adevărul inegalității rezultă  $m \leq n$ .

**E5. C3-1.** Să se afle mulțimea valorilor lui  $x$  pentru care:

$$(0,01)^3 \cdot (\sqrt{10})^x < 1.$$

**E5. C3-1. Rezolvare.** Avem succesiv :

$$\begin{aligned} (0,01)^3 \cdot (\sqrt{10})^x < 1 &\Leftrightarrow \left( \frac{1}{100} \right)^3 \cdot 10^{\frac{1}{2} \cdot x} < 1 \Leftrightarrow (10^{-2})^3 \cdot 10^{\frac{1}{2} \cdot x} < 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 10^{-2 \cdot 3} \cdot 10^{\frac{1}{2} \cdot x} < 1 \Leftrightarrow 10^{-6 + \frac{x}{2}} < 10^0 \Leftrightarrow -6 + \frac{x}{2} < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 12). \end{aligned}$$

**E6. C3-1.** Sunt echivalente inegalitățile  $\left( \frac{1}{9} \right)^x > \left( \frac{1}{3} \right)^{x-1}$  și  $2x < x-1$  ?

## Fișă de studiu

**S1. C3-1.** Să se afle care număr din perechile de numere este mai mare:

a).  $(0,5)^{-13}$  și  $2^{13}$  ; b).  $5^{\sqrt{3}}$  și  $5^{\sqrt{2,5}}$  ; c).  $\sqrt[11]{6^3}$  și  $\sqrt[15]{6^7}$  .

**S2. C3-1.** Să se afle mulțimea valorilor lui  $x$  pentru care este adevărată inegalitatea :

a).  $3^x \leq 729$  b).  $\left( \frac{1}{81} \right)^x \cdot \sqrt{3} > 1$  ; c).  $32 \cdot (\sqrt[3]{2})^x > 0,25$  .

**S3. C3-1.** Să se compare  $m$  și  $n$  dacă este adevărată inegalitatea:

a).  $(3\pi)^m \leq (3\pi)^n$  b).  $\left( \frac{5\pi}{16} \right)^m > \left( \frac{5\pi}{16} \right)^n$  ; c).  $(\sqrt{7} - \sqrt{3})^m \leq (\sqrt{7} - \sqrt{3})^n$  .

**S4. C3-1.** Comparați numerele cu 1:

a).  $(\sqrt{5})^{\frac{1}{2}}$  b).  $\left( \frac{1}{5} \right)^{\sqrt{5}}$  ; c).  $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{-\frac{3}{2}}$  ; d).  $\left( \frac{\pi+1}{4} \right)^{-\sqrt{2}}$  .

# FUNCTIA EXPONENTIALĂ ȘI FUNCTIA LOGARITMICĂ

---

**S5. C3-1.** Să se afle  $x$  astfel încât  $a^x > \left(\frac{1}{a}\right)^x$ , unde  $a > 0$  este un număr real pozitiv.

**S6. C3-1.** Să se demonstreze că funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow (0, +\infty)$ ,  $f(x) = 3^x$  este strict crescătoare.

**S7. C3-1.** Să se studieze monotonia funcției  $f: \mathbf{R} \rightarrow (0, +\infty)$ ,  $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}$

**S7. L2-1.** Să se traseze graficul funcțiilor  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ :

- a).  $f(x) = 3^x$ ; b).  $f(x) = 2^{x-1}$ ; c).  $f(x) = 2^{|x|}$ ;  
d).  $f(x) = 2^x - 2$ ; e).  $f(x) = 2^{-|x|}$ ; c).  $f(x) = 2 \cdot 3^x$ .

**S7. C3-1.** Să se traseze graficul funcțiilor  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ :

- a).  $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ; b).  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$ ; c).  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} - 1$ ;  
d).  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$ ; e).  $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$ ; c).  $f(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x$ .

## Logaritmi

### 1). Logaritmi

Fie  $a > 0$  un număr real și  $a \neq 1$ . Ecuația de forma  $a^x = N$ ,  $N > 0$  (1) are o soluție unic determinată notată prin:  $x = \log_a N$  (2).

$\log_a N$  se numește *logarithmul numărului pozitiv  $N$  în baza  $a$* .

Din (1) și (2) se obține  $a^{\log_a N} = N$ , care ne arată că logarithmul unui număr real pozitiv este exponentul la care trebuie ridicată baza  $a$  pentru a obține numărul dat.

De exemplu, a calcula  $\log_2 32$ , înseamnă a găsi un număr real  $x$  așa încât să avem  $x^2 = 32$ . rezultă  $x = 5$ .

a). În practică se folosesc logarithmii în baza zece care se mai numesc *logaritmi zecimali*. Se notează cu  $\lg$  în loc de  $\log_{10}$

a). În matematică se folosesc logarithmii în baza  $e = 2,718281...$  care se numesc *logaritmi naturali* și se notează cu  $\ln$  în loc de  $\log_e$ .

### 2). Proprietățile logarithmilor

1. Dacă  $A$  și  $B$  sunt două numere pozitive, atunci are loc:

$$\log_a (A \cdot B) = \log_a A + \log_a B.$$

Proprietatea se poate extinde pentru  $n$  numere pozitive  $A_1, A_2, \dots, A_n$  și avem:

$$\log_a (A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = \log_a (A_1) + \log_a (A_2) + \dots + \log_a (A_n).$$

# FUNCTIA EXPONENTIALĂ ȘI FUNCTIA LOGARITMICĂ

---

$$2. \log_a \left( \frac{A}{B} \right) = \log_a A - \log_a B.$$

3. Dacă  $A$  este un număr pozitiv și  $m$  un număr real arbitrar, atunci are loc :  
 $\log_a A^m = m \log_a A$ .

4. Dacă  $A$  este un număr pozitiv și  $n \geq 2$  un număr natural, atunci are loc :  
 $\log_a \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} \cdot \log_a A$ . Proprietatea 4 poate fi privită ca un caz particular al proprietății 3.

### 3). Schimbarea bazei logaritmului aceluiași număr

Dacă  $a$  și  $b$  sunt două numere pozitive diferite de 1, iar  $A$  un număr pozitiv oarecare, are loc egalitatea:

$$\log_a A = \log_b A \cdot \log_a b$$

Numită formula de schimbare a bazei unui logaritm.

Dacă în egalitatea de mai sus,  $A = a$ , atunci formula devine:

$$\log_b a \cdot \log_a b = 1 \Rightarrow \log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

### 4). Operația de logaritmare a unei expresii

Operația de logaritmare are scopul de a transforma operații complicate de înmulțire, împărțire și ridicare la putere în operații de adunare, scădere și împărțire la numere naturale.

Să se logaritmeze expresia:  $E = \frac{15 \cdot \sqrt[5]{231} \cdot \sqrt[3]{51}}{\sqrt{32 \cdot 72 \cdot 733}}$

Se logaritmează expresia într-o bază oarecare  $a$  :

$$\log_a E = \log_a \frac{15 \cdot \sqrt[5]{231} \cdot \sqrt[3]{51}}{\sqrt{32 \cdot 72 \cdot 733}} = \log_a (15 \cdot \sqrt[5]{231} \cdot \sqrt[3]{51}) - \log_a (\sqrt{32 \cdot 72 \cdot 733}) =$$

$$\log_a 15 + \log_a \sqrt[5]{231} + \log_a \sqrt[3]{51} - \left[ \frac{1}{2} \cdot (\log_a 32 + \log_a 72 + \log_a 733) \right] =$$

$$= \log_a 15 + \frac{1}{5} \cdot \log_a 231 + \frac{1}{3} \cdot \log_a 51 - \left[ \frac{1}{2} \cdot \log_a 32 + \frac{1}{2} \cdot \log_a 72 + \frac{1}{2} \cdot \log_a 733 \right].$$

În general, dacă  $E$  este o expresie algebrică în care apar produse de puteri și radicali, putem să-i asociem o expresie, notată  $\log E$ , în care apar sume, diferențe de logaritmi înmulțite cu anumite numere raționale.

### 5). Funcția logaritmică

Prin definiție, se numește **funcție logaritmică** funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow (0, +\infty)$ ,  $f(x) = \log_a x$ , unde  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

**Proprietăți :**



# FUNCTIA EXPONENTIALĂ ȘI FUNCTIA LOGARITMICĂ

---

1.  $f(1) = 0$ , ceea ce înseamnă că  $\log_a 1 = 0$ .
2. Funcția logaritmică este monotonă și anume dacă  $a > 1$ , funcția este strict crescătoare, iar dacă  $0 < a < 1$ , funcția este strict descrescătoare.
3. Funcția logaritmică este bijectivă.
4. Funcția logaritmică este inversabilă. Inversafuncției logaritmice în baza  $a$  este funcția exponențială  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = a^x$ .

Dacă  $x \in (0, +\infty)$  avem  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\log_a x) = a^{\log_a x} = x$

și dacă  $y \in \mathbf{R}$ , atunci  $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(a^y) = \log_a a^y = y$ .

## 6). Graficul funcției exponențiale

Graficul funcției exponențiale se construiește prin puncte.

### Exemplu

Să se construiască graficul funcției  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \log_a x$ , pentru  $a \in \left\{2, \frac{1}{2}\right\}$ .

Se întocmește un tablou de valori pentru cele două cazuri :

$x$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	8
	$+\infty$						
$f(x)$		-3	-2	-1	0	1	3

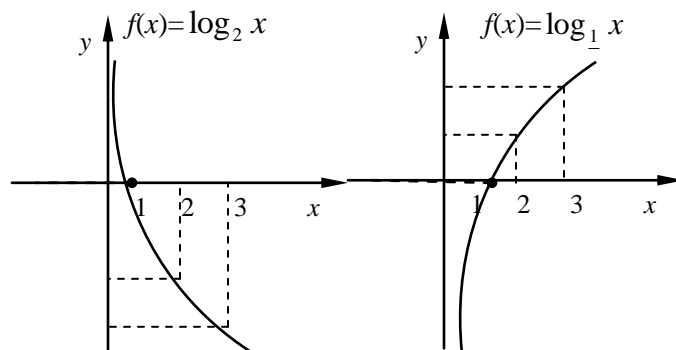
$x$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	8
	$+\infty$						
$f(x)$		3	2	1	0	-1	-3

Graficele celor două funcții reprezentate mai jos au proprietățile :

- 1). Graficele se găsesc la dreapta axei  $Oy$  ;
- 2). Trec prin punctul de coordonate  $(1, 0)$  ;
- 3). Graficul fiecărei funcții este construit dintr-o singură ramură care „urcă” dacă baza  $a > 1$  și „coboară” dacă baza  $0 < a < 1$

# FUNȚIA EXPONENȚIALĂ ȘI FUNȚIA LOGARITMICĂ

---



4). Graficul se apropie din ce în ce mai mult de axa  $Oy$  pozitivă dacă  $0 < a < 1$  și de axa  $Oy$  negativă dacă  $a > 1$ .

5). Graficul funcției logaritmice este simetricul graficului funcției exponențiale față de prima bisectoare.

## Probleme rezolvate

**E1. C3-2.** Să se calculeze: a).  $\log_2 128$ ; b).  $\log_3 \frac{1}{27}$ ; c).  $\log_{10} 0,001$ .

**E1. C3-2. Rezolvare.** a).  $\log_2 128 = x \Rightarrow 2^x = 128 \Rightarrow 2^x = 2^6 \Rightarrow x = 6$ ;

b).  $\log_3 \frac{1}{27} = x \Rightarrow 3^x = \frac{1}{27} \Rightarrow 3^x = 3^{-3} \Rightarrow x = -3$ ; c).  $\log_{10} 0,001 = x \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 10^x = 0,001 \Rightarrow 10^x = 10^{-3} \Rightarrow x = -3$ .

**E2. C3-2.** Să se calculeze: a).  $\log_2 1000 - \log_2 125$ ; b).  $\log_3 \sqrt[5]{81}$ ;

c).  $\log_6 \frac{1}{54} + \log_6 \frac{1}{12}$ ; d).  $3 \cdot \lg 25 + 2 \lg 125 - \frac{1}{2} \cdot \lg 5$ .

**E2. C3-2. Rezolvare**

a).  $\log_2 1000 - \log_2 125 = \log_2 \frac{1000}{125} = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3 \cdot \log_2 2 = 3 \cdot 1 = 3$

b).  $\log_3 \sqrt[5]{81} = \frac{1}{5} \cdot \log_3 81 = \frac{1}{5} \cdot \log_3 3^4 = \frac{1}{5} \cdot 4 \cdot 1 = \frac{4}{5}$ ;

c).  $\log_6 \frac{1}{54} + \log_6 \frac{1}{12} = \log_6 \left( \frac{1}{54} \cdot \frac{1}{12} \right) = \log_6 \frac{1}{6^4} = \log_6 6^{-4} = -4 \cdot 1 = -4$

## FUNCTIA EXPONENTIALĂ ȘI FUNCTIA LOGARITMICĂ

---

$$d). \quad 3 \cdot \lg 25 + 2 \lg 125 - \frac{1}{2} \cdot \lg 5 = \lg \frac{25^3 \cdot 125^2}{\sqrt{5}} = \lg \frac{5^2 \cdot 5^3}{5^{\frac{1}{2}}} = \lg 5^{5-\frac{1}{2}} = \lg 5^{\frac{9}{2}}$$

**E3. C3-2.** Să se arate că expresia  $E = \frac{\log_2 x}{\log_3 x}$  nu depinde de  $x$ .

**E3. C3-2. Rezolvare.** Avem

$$E = \frac{\log_2 x}{\log_3 x} = \frac{\log_2 x}{\log_2 x \cdot \log_2 3} = \frac{1}{\log_2 3} = 1.$$

**E4. C3-2.** Să se reprezinte pe același sistem de axe graficele funcțiilor :

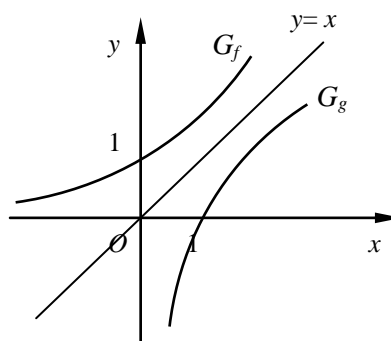
$$f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 3^x \text{ și } g : \mathbf{R} \rightarrow (0, +\infty), f(x) = \log_3 x.$$

**E4. C3-2. Rezolvare.** Se întocmesc tabele de valori pentru cele două funcții, considerând valori care să se poată calcula ușor.

$x$	$-\infty$	$-3$	$-2$	$-1$	$0$	$2$	$3$
	$+\infty$						
$f(x)$		$-\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{3}$	$1$	$9$	$27$

$x$	$0$	$-\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{3}$	$1$	$3$	$9$
	$+\infty$						
$g(x)$		$-3$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$

Graficele celor două funcții sunt simetrice față de prima bisectoare a sistemului de axe  $Oxy$ .



# FUNCTIA EXPONENTIALĂ ȘI FUNCTIA LOGARITMICĂ

---

## Fișă de studiu

**S1. C3-2.** Să se calculeze:

- a).  $\log_2 5 + \log_2 \frac{4}{5}$ ; b).  $\log_6 7 - \log_6 \frac{7}{36}$ ;  
c).  $\log_{0,1} 50 - \log_{0,1} 0,5$ ; d).  $\log_{\frac{1}{2}} 3 - \log_{\frac{1}{2}} 12 + \log_{\frac{1}{2}} 2$ .

**S2. C3-2.** Care dintre următoarele numere este mai mare:

- a).  $\log_2 5$  sau  $\log_2 \frac{4}{5}$ ; b).  $\log_5 \frac{1}{2}$  sau  $\log_5 \frac{1}{7}$ ;  
c). 2 sau  $\log_3 10$ ; d). 3 sau  $\log_2 7$ ;

**S3. C3-2.** Să se determine valorile lui  $x$  pentru ca următorii logaritmi să aibă sens :

- a).  $\log_2 (x-1)$ ; b).  $\log_4 (x^2 + x - 2)$ ;  
c).  $\log_4 (\log_2 x)$ ; d).  $\log_{\frac{1}{2}} (\log_{\frac{1}{2}} x)$ .

**S4. C3-2.** Determinați valorile lui  $x$  pentru care:

- a).  $\log_3 x > \log_3 4$ ; b).  $\log_4 (x^2 + x - 6) > 1$ ;  
c).  $\log_6 (x^2 - 1) \geq \log_6 (4x + 4)$ ; d).  $\log_{\frac{1}{2}} (2x) \geq 0$ .

**S5. C3-2.** Știind că  $\lg 7 = p$  și  $\lg 5 = q$ , să se exprime în funcție de  $p$  și  $q$

- a).  $\lg 0,7$ ; b).  $\lg \sqrt[3]{7}$ ; c).  $\lg 175$ ; d).  $\lg 7\sqrt{5}$ .

**S6. C3-2.** Să se determine expresia lui  $x$  astfel încât :

- a).  $\log_2 x = \log_2 3 + \log_2 4 - \log_2 5$ ;  
b).  $\log_3 x = 2\log_3 a + 3\log_3 (a+b) - 4\log_3 (a-b)$ ;  
c).  $\log_a x = 2\log_a 7 + 3\log_a 6 - 4\log_a 5$

**S7. C3-2.** Să se arate că expresiile următoare nu depend de  $x$

- a).  $E = \frac{\log_7 x^2}{\log_8 x^2}$ ; b).  $F = \frac{\log_2 x + \log_2 \sqrt{x}}{\log_3 x + \log_3 \sqrt{x}}$ .

**S8. C3-2.** Să se logaritmeze expresiile:

- a).  $E = 41^2 \cdot \sqrt[13]{41 \cdot 35^4}$ ; b).  $F = \frac{21}{4} \cdot \sqrt[5]{41 \cdot \sqrt[7]{31^{11}}}$ ;

- c).  $T = \frac{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a}}}}}{b\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b}}}}}$ ; d).  $S = \frac{2(a-b)}{3(a+b)} \cdot \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$ .

**S8. C3-2.** Să se reprezinte graphic funcțiile:

- a).  $f_1 : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}, f_1(x) = \log_2(x+1)$ ;

# FUNCȚIA EXPONENȚIALĂ ȘI FUNCȚIA LOGARITMICĂ

---

- b).  $f_2 : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}, f_2(x) = \log_2 x^3$ ;  
c).  $f_3 : \mathbf{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}, f_1(x) = \log_5 x^2$ ;  
d).  $f_4 : \mathbf{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbf{R}, f_4(x) = \log_6 |x - 3|$ .

## *Ecuatii*

### 1). Ecuatii exponențiale

Se numește ecuație exponențială, ecuația în care necunoscuta este exponent sau în care este exponentul este o expresie.

În practică, atunci când avem de rezolvat o ecuație exponențială, vom proceda astfel :

*Pasul 1.* se impun condiții de existență exponenților și bazei atunci când este cazul ;

*Pasul 2.* se fac transformări echivalente folosind proprietăți funcției exponențiale până se obțin ecuații algebrice cunoscute ;

*Pasul 3.* se verifică dacă valorile obținute la pasul 2 aparțin domeniului ecuației sau se fac verificări în ecuația dată inițial.

a). *Ecuatii de tipul*  $a^{f(x)} = b, a > 0, a \neq 1, b > 0$ .

Pe baza injectivității funcției exponențiale ecuația dată este echivalentă cu ecuația :  $f(x) = \log_a b$ . În aceste ecuații  $b$  trebuie exprimat ca o putere a lui  $a$  (atunci când este posibil).

**Exemplu.** Să se rezolve ecuația :  $5^{x^2-x-2} = 625$ .

$$5^{x^2-x-2} = 625 \Rightarrow 5^{x^2-x-2} = 5^4 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 4 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0.$$

Prin rezolvarea ecuației de gradul doi se obțin soluțiile :  $S = \{-2, 3\}$ .

b). *Ecuatii de tipul*  $a^{f(x)} = a^{g(x)}, a > 0, a \neq 1$ .

Pe baza injectivității funcției exponențiale ecuația dată este echivalentă cu ecuația algebrică  $f(x) = g(x)$ , care se rezolvă cu metode cunoscute.

**Exemplu.** Să se rezolve ecuația :  $3^{x^2-x-4} = 9^{x-2}$ .

$$3^{x^2-x-4} = 9^{x-2} \Rightarrow 3^{x^2-x-4} = 3^{2(x-2)} \Rightarrow x^2 - x - 4 = 2(x-2) \Rightarrow x^2 - 6x = 0.$$

Prin rezolvarea ecuației de gradul doi se obțin soluțiile :  $S = \{0, 6\}$ .

c). *Ecuatii de tipul*  $a^{f(x)} = b^{g(x)}, a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$ .

În acest caz se logaritmează ecuația convenabil într-o anumită bază și apoi se fac transformări pentru a obține o ecuație algebrică mai simplă.

**Exemplu.** Să se rezolve ecuația :  $2^x = 3^{2x+1}$ .

Pe baza injectivității funcției logaritmice se obține prin logaritmare în baza 10 ecuația echivalentă :

$$x \lg 2 = (2x + 1) \lg 3 \Rightarrow x(\lg 3 - \lg 2) = -\lg 3 \Rightarrow x = -\frac{\lg 3}{2\lg 3 - \lg 2}.$$

# FUNCȚIA EXPONENȚIALĂ ȘI FUNCȚIA LOGARITMICĂ

---

d). *Ecuatii de tipul*

$$ma^{2f(x)} + n \cdot a^{f(x)} + p = 0, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad m, n, p \in \mathbf{R}.$$

În acest caz se face substituția  $a^{f(x)} = t, \quad t > 0$  și se formează o ecuație

de gradul doi, de forma  $mt^2 + nt + p = 0$ , cu soluțiile căreia se revine la substituția făcută.

În final se verifică dacă valorile obținute verifică condițiile de existență ale ecuației sau se verifică direct dacă egalitatea dată inițială este adevărată.

**Exemplu.** Să se rezolve ecuația :  $4^x + 2^x = 272$ .

Se observă o substituție de forma  $2^x = t, \quad t > 0$ :

$$4^x + 2^x = 272 \Rightarrow (2^2)^x + 2^x = 272 \Rightarrow (2^x)^2 + 2^x - 272 = 0.$$

Ecuația de gradul doi atașată  $t^2 + t - 272 = 0$ , are soluțiile  $t \in \{-17, 16\}$ . Revenind la substituție, se acceptă numai  $t = 16$ . Se obține  $2^x = 16 \Rightarrow x = 4$ .

d). *Ecuatii de tipul*

$$a^{f(x)} + b^{g(x)} + c = 0, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0, \quad b \neq 1.$$

Ecuația de gradul doi atașată  $t^2 + t - 272 = 0$ , are soluțiile  $t \in \{-17, 16\}$ . Revenind la substituție, se acceptă numai valoarea pozitivă  $t = 16$ . Se obține  $2^x = 16 \Rightarrow x = 4$ .

## 2). Ecuatii logaritmice

Se numește ecuație logaritmică, ecuația în care necunoscuta este sub logaritm sau la baza logaritmului.

În practică, vom proceda astfel :

*Pasul 1.* se impun condiții de existență asupra bazei logaritmului și a expresiilor de sub logaritm ;

*Pasul 2.* se fac transformări echivalente folosind proprietățile funcției logaritmice și a logaritmilor până se obțin ecuații algebrice cunoscute ;

*Pasul 3.* se verifică dacă valorile obținute la pasul 2 aparțin domeniului ecuației sau se fac verificări în ecuația dată inițial.

a). *Ecuatii de tipul*  $\log_a f(x) = b, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad .$

Pe baza definiției logaritmului ecuația dată este echivalentă cu ecuația de forma  $f(x) = a^b$ . De aici se obțin soluțiile.

b). *Ecuatii de tipul*

$$\log_a f(x) = \log_b g(x), \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0, \quad b \neq 1.$$

Pe baza injectivității funcției logaritmice ecuația dată este echivalentă cu ecuația algebrică  $f(x) = g(x)$ , care se rezolvă.

c). *Ecuatii de tipul*

$$m \log_a^2 f(x) + n \cdot \log_a f(x) + p = 0, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad m, n, p \in \mathbf{R}$$

În acest caz se face substituția  $\log_a f(x) = t, \quad t \in \mathbf{R}$  și se formează o ecuație de gradul doi, de forma

# FUNCTIA EXPONENTIALĂ ȘI FUNCTIA LOGARITMICĂ

$mt^2 + nt + p + 0$ , cu soluțiile căreia se revine la substituția făcută. În final se verifică dacă valorile obținute verifică condițiile de existență ale ecuației sau se verifică direct ca egalitatea dată inițial să fie adevărată.

### 3). Sisteme de ecuații exponențiale și logaritmice

Se numește *sistem de ecuații exponențiale și logaritmice*, sistemul în care necunoscutele sunt la exponent, la baza unui logaritm sau în expresii sub logarimi.

În practică, atunci când avem de rezolvat un *sistem de ecuații exponențiale și logaritmice*, vom proceda astfel :

*Pasul 1.* se impun condiții de existență asupra bazelor, exponenților atunci când este cazul ;

*Pasul 2.* se fac transformări și substituții convenabile folosind proprietăți funcției exponențiale și logaritmice până se obțin sisteme algebrice cunoscute ;

*Pasul 3.* se verifică dacă valorile obținute la pasul 2 aparțin domeniului sistemului sau se fac verificări în ecuațiile sistemului dat inițial.

### 4). Inecuații exponențiale și logaritmice

Se numesc *inecuații exponențiale sau logaritmice*, inecuațiile în care necunoscutele sunt la exponent, la baza unui logaritm sau în expresii sub logarimi.

În practică, atunci când avem de rezolvat o *inecuație exponențială sau logaritmă*, vom proceda astfel :

*Pasul 1.* se impun condiții de existență asupra bazei, exponenților, expresiilor desub logaritmi, atunci când este cazul ;

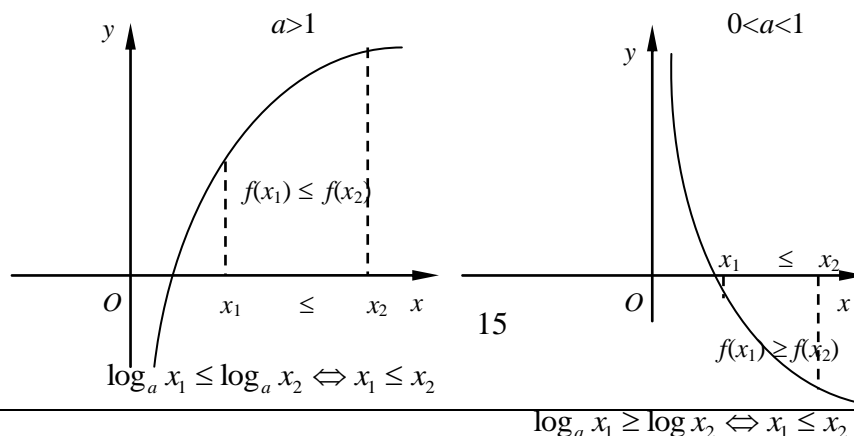
*Pasul 2.* se fac transformări și substituții convenabile folosind proprietăți funcției exponențiale și logaritmice până se obțin inecuații algebrice cunoscute ;

*Pasul 3.* se rezolvă inecuațiile obținute.

*Pasul 4.* se intersectează soluțiile obținute cu mulțimea de existență impusă pentru a obține soluția finală.

### Pentru inecuații exponențiale

Se observă că :

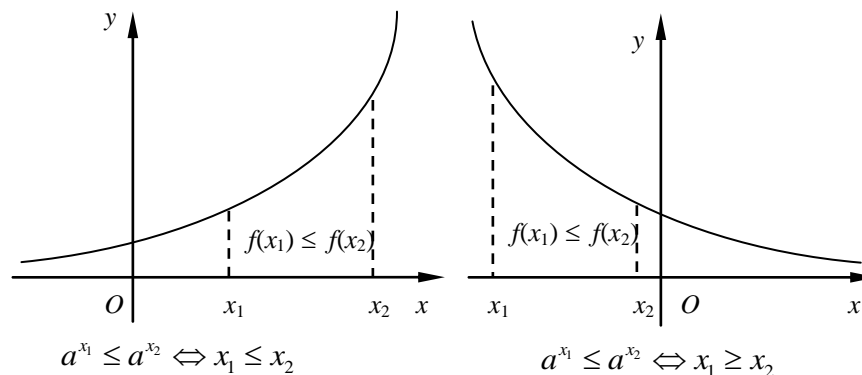


# FUNCTIA EXPONENTIALĂ ȘI FUNCTIA LOGARITMICĂ

---

a). Dacă baza exponențială  $a > 1$ , sensul inegalității dintre imagini se păstrează pentru argumente.

b). Dacă baza  $0 < a < 1$ , sensul inegalității dintre imagini se schimbă pentru argumente.



**Exemplul 1.** Să se rezolve inecuația :  $2^{x^2-4x} > \frac{1}{8}$ .

Inecuația nu are restricții, domeniul maxim fiind  $\mathbf{R}$ . Deoarece  $\frac{1}{8} = 2^{-3}$  și folosind faptul că baza este supraunitară, se obține:

$$x^2 - 4x > -3 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty).$$

**Pentru inecuații logaritmice**

Se observă că :

a). Dacă baza logaritmului este  $a > 1$ , sensul inegalității dintre imagini se păstrează pentru argumente.

b). Dacă baza logaritmului este  $0 < a < 1$ , sensul inegalității dintre imagini se schimbă pentru argumente.

**Exemplul 2.** Să se rezolve inecuația :  $\log_{\frac{1}{3}}(2x-1) > \log_3 27$ .

Domeniul inecuației este cerut de  $2x-1 > 0 \Rightarrow x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$ . Deoarece  $\log_3 27 = 3$ , rezultă că  $2x-1 > -3 \Rightarrow x \in (-2, +\infty)$ ,

Soluția inecuației este dată de intersecția :  $x \in (\frac{1}{2}, +\infty) \cap (-2, +\infty) = (\frac{1}{2}, +\infty)$



# FUNCTIA EXPONENTIALĂ ȘI FUNCTIA LOGARITMICĂ

---

## Probleme rezolvate

**E1. C3-3.** Să se rezolve ecuația :  $5^{7^x} = 7^{5^x}$ .

**E1. C3-3. Rezolvare.** Se logaritmează în baza 10 :

$$5^{7^x} = 7^{5^x} \Rightarrow 7^x \lg 5 = 5^x \lg 7 \Rightarrow \left(\frac{7}{5}\right)^x = \frac{\lg 5}{\lg 7}.$$

Printr-o nouă logaritmare în aceeași bază, rezultă

$$x \lg \frac{7}{5} = \lg \frac{\lg 5}{\lg 7} \Rightarrow x \lg \frac{7}{5} = \lg(\lg 7) - \lg(\lg 5) \Rightarrow x = \frac{\lg(\lg(7)) - \lg(\lg(5))}{\lg 7 - \lg 5}$$

**E2. C3-3.** Să se rezolve ecuația :  $3^{2x} \cdot 5^{2x-3} = 7^{x-1} \cdot 4^{x+3}$ .

**E2. C3-3. Rezolvare.** Se logaritmează în baza 10 :

$$2x \lg 3 + (2x - 3) \lg 5 = (x - 1) \lg 7 + (x + 3) \lg 4$$

După calcule și scoaterea factorului comun  $x$ , rezultă că :

$$x(2 \lg 3 + 2 \lg 5 - \lg 7 - \lg 4) = 3 \lg 5 - \lg 7 + 3 \lg 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \lg 5 - \lg 7 + 3 \lg 4}{2 \lg 3 + 2 \lg 5 - \lg 7 - 4} \Rightarrow x = \frac{\lg \frac{125 \cdot 64}{7}}{\lg \frac{225}{28}}.$$

**E3. C3-3.** Să se rezolve ecuația :  $\log_x(x^2 - x + 9) = 2$ .

**E3. C3-3. Rezolvare.** Condițiile de existență pentru logaritm sunt :

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x^2 - x + 9 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x \in (0, +\infty).$$

După transformarea membrului doi în logaritm și din proprietatea de injectivitate a funcției logaritmice, rezultă ecuația:

$$x^2 - x + 9 = x^2 \Rightarrow x = 9.$$

**E4. C3-3.** Să se rezolve ecuația :  $6^x + 4^x = 9^x$ .

**E4. C3-3. Rezolvare**

Ecuația se poate rezolva printr-o substituție. Se observă că prin împărțirea la  $9^x$  se obține

$$\left(\frac{6}{9}\right)^x + \left(\frac{4}{9}\right)^x = 1 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1. \text{ Făcând substituția } \left(\frac{2}{3}\right)^x = t, t > 0, \text{ rezultă că}$$

$$\text{ecuația atașată } t^2 + t - 1 = 0 \text{ are soluțiile } t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

## FUNCTIA EXPONENTIALĂ ȘI FUNCTIA LOGARITMICĂ

---

Pentru soluția pozitivă acceptată se obține soluția ecuației date printr-o logaritmare în

$$\text{baza } 10: x = \frac{\lg \frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\lg \frac{2}{3}}.$$

**E5. C3-3.** Să se rezolve ecuația :  $\lg(x^2 - 15) = \lg(x - 3)$ .

**E5. C3-3. Rezolvare.** Condițiile de existență sunt :

$$\begin{cases} 10 > 0 \\ 10 \neq 1 \\ x - 15 > 0, \quad x - 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 15 \Rightarrow x \in (15, +\infty)$$

Din proprietatea de injectivitate a funcției logaritmice, rezultă egalitatea argumentelor :

$$x^2 - 15 = x - 3 \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2} \Rightarrow x \in \{-3, 4\}.$$

Soluția acceptată de condițiile de existență este  $x = 4$ .

**E6. C3-3.** Să se rezolve sistemul : 
$$\begin{cases} 27^{2y-1} = 243 \cdot 3^{4x+2} \\ 3 \cdot 3^{x+y} = \sqrt{81^{2x-1}} \end{cases}$$

**E6. C3-3. Rezolvare.** Nu sunt necesare condiții de existență pentru ecuațiile sistemului. Mulțimea maximă este  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ . După transformări ale puterilor se obține sistemul

$$\text{echivalent } \begin{cases} 3^{6y-3} = 3^{4x+7} \\ 3^{x+y} = 3^{4x-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6y-3 = 4x+7 \\ x+y = 4x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow S = \{(2,3)\}.$$

**E7. C3-3.** Să se rezolve sistemul : 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 425 \\ \lg x + \lg y = 2 \end{cases}$$

**E7. C3-3. Rezolvare.** Se impun condițiile de existență pentru ecuațiile sistemului :

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (0, +\infty) \\ y \in (0, +\infty) \end{cases}. \text{ Se obține succesiv :}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 425 \\ \lg(xy) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 425 \\ xy = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = s \\ xy = p \\ s^2 - 2p = 425 \\ p = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = \pm 25 \\ p = 100 \end{cases}.$$

Sistemul simetric are soluțiile simetrice

$$\begin{cases} s = 25 \\ p = 100 \end{cases} \Rightarrow t^2 - 25t + 100 = 0 \Rightarrow t_{1,2} \in \{5, 20\} \Rightarrow S = \{(5, 20), (20, 5)\}$$

Al doilea sistem simetric cu soluțiile ecuației atașate

# FUNCTIA EXPONENTIALĂ ȘI FUNCTIA LOGARITMICĂ

---

$$\begin{cases} s = -25 \\ p = 100 \end{cases} \Rightarrow t^2 + 25t + 100 = 0 \Rightarrow t_{1,2} \in \{-20, -5\},$$

nu verifică condițiile inițiale ale sistemului.

**E8. C3-3. 16.** Dacă  $a, b \in (0, 1) \cup (1, \infty)$  și  $k \in [0, \infty)$  să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} a^{xz} - kb^y = a^2 - kb^2 \\ a^z + kb^{\frac{y}{2}} = a + kb \\ a^{z(x-1)} + b^{\frac{y}{2}} = a + b \end{cases}$$

## Fișă de studiu

**S1. C3-3.** Să se rezolve ecuațiile ;

a).  $4^x = 1024$ ; b).  $9^x = \frac{1}{81}$ ; c).  $2^{2x-3} = 32$ ; d).  $8^x = \frac{1}{128}$ ;

e).  $\left(\frac{4}{9}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{-5}$ ; f).  $2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2}$ .

**S2. C3-3.** Să se rezolve ecuațiile ;

a).  $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x-1} = 347$ ; b).  $3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} = 13$ ;

c).  $3^{x+1} + 5 \cdot 3^{x-1} - 7 \cdot 3^x + 21 = 0$ ;

**S3. C3-3.** Să se rezolve ecuațiile ;

a).  $5^{2x} - 5^x - 600 = 0$ ; b).  $9^x - 3^x - 6 = 80$ ;

c).  $2 \cdot 25^x = 10^x + 4^x$ ; d).  $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x - \left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x = \frac{3}{2}$ .

**S4. C3-3.** Să se rezolve ecuațiile ;

a).  $\log_2(x-1) = \log_2(x^2-x-16)$ ; b).  $\frac{2\lg x}{\lg(5x-4)} = 1$ ;

c).  $\frac{1}{12}\lg^2 x = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\lg x$ ; d).  $2\lg^2 x^3 - 3\lg x - 1 = 0$ .

**S5. C3-3.** Să se rezolve ecuația :

a).  $5^{\lg x} - 3^{\lg x-1} = 3^{\lg x+1} - 5^{\lg x-1}$ .

**S6. C3-3.** Să se rezolve ecuația :  $2\lg(x-1) = \frac{1}{2}\lg x^2 - \lg \sqrt{x}$ .

**S7. C3-3.** Să se rezolve ecuațiile :

a).  $\lg(x+7) + \lg(3x+1) = 2$ .

b).  $\lg(x+7)(3x+1) = 2$ .

**S8. C3-3.** Să se rezolve ecuația:  $\log_3^2 x - 3\log_3 x - 4 = 0$

# FUNCTIA EXPONENTIALĂ ȘI FUNCTIA LOGARITMICĂ

---

**S9. C3-3.** Să se rezolve ecuația:  $\log_2 x + \log_3 x = 1$

**S10. C3-3.** Să se rezolve ecuația:  $\log_3 x + \log_x 3 = 2$

**S11. C3-3.** Să se rezolve ecuația:  $x^{\lg x + 2} = 1000$

**S12. C3-3.** Să se rezolve ecuația:  $\log_x 2x + \log_{2x} 4x = \frac{7}{2}$ .

**S13. C3-3.** Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{\log_a \sqrt[4]{ax} + \log_x \sqrt[4]{ax}} + \sqrt{\log_a \sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \log_x \sqrt[4]{\frac{a}{x}}} = a, a > 0, a \neq 1.$$

**S14. C3-3.** Să se verifice identitatea:

$$\log_{a^2} x + \log_{a^6} x + \dots + \log_{a^{n(n+1)}} x = \log_a \sqrt[n+1]{x^n}.$$

**S15. C3-3.** Să se rezolve inecuațiile:

a).  $\lg(x^2 - 3) > \lg(x + 3)$ ; b).  $\lg^2 x - 2\lg x - 8 \leq 0$ ;

**S16. C3-3.** Să se rezolve în  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$  sistemele:

a).  $\begin{cases} 9^{x+y} = 729 \\ 3^{x-y+1} = 1 \end{cases}$ ; b).  $\begin{cases} x - y = 90 \\ \lg x + \lg y = 3 \end{cases}$ ;

c).  $\begin{cases} xy = 40 \\ x^{\lg y} = 4 \end{cases}$ ; b).  $\begin{cases} x^{\sqrt{y}} = y^x \\ y^{\sqrt{x}} = x^y \end{cases}$ .

## Exerciții de aprofundare

**A1.** Să se verifice identitatea

$$\log_{a^2} x + \log_{a^6} x + \dots + \log_{a^{n(n+1)}} x = \log_a \sqrt[n+1]{x^n}.$$

Deoarece prin schimbarea bazei logaritmului obținem  $\log_{a^p} x = \frac{1}{p} \log_a x$ .

$$\left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right] \log_a x = \frac{n}{n+1} \log_a x. \text{ Rămâne de demonstrat prin inducție că:}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

**A2.** Să se găsească perechile de numere reale  $(x, y)$  care verifică inegalitatea

$$\log_{|x|}(\cos 1) > \log_y(\cos 1).$$

**A3.** Dacă  $a \in \mathbf{R}, a > 0$ , atunci  $a^x \geq x + 1, \forall x \in \mathbf{R}$ , dacă și numai dacă  $a = e$ .

**A4.** Să se rezolve inecuația  $3^x + 4^x > 5^x$ .

# FUNCTIA EXPONENTIALĂ ȘI FUNCTIA LOGARITMICĂ

---

**A5.** Să se arate că nu există numere reale  $N > 0, \neq 1$  astfel încât, dacă  $a$  și  $b$  sunt numere prime între ele,  $\log_b N$  și  $\log_a N$  să fie amândouă raționale.

**A6.** Să se rezolve ecuația

$$\log_x 2x + \log_{2x} 4x = \frac{7}{2}.$$

**A7.** Să se rezolve ecuația

$$\sqrt{\log_a \sqrt[4]{ax} + \log_x \sqrt[4]{ax}} + \sqrt{\log_a \sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \log_x \sqrt[4]{\frac{a}{x}}} = a, a > 0, \neq 1.$$

**A8.** Să se verifice identitatea:

$$\log_{a^2} x + \log_{a^6} x + \dots + \log_{a^{n(n+1)}} x = \log_a \sqrt[n+1]{x^n}.$$

## Rezolvări

**A2.** Condițiile de existență:

$|x| > 0, |x| \neq 1, y > 0, y \neq 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$  - mulțime simetrică și

$y \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ . Deoarece  $\frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{3} < \cos 1 < \cos \frac{\pi}{4}$ , adică

$\cos 1 \in \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \subset (0, 1)$ , deci baza logaritmilor este subunitară. Trecem logaritmi la baza

$\cos 1$  și atunci inecuația este echivalentă cu

$$\frac{1}{\log_{\cos 1} |x|} > \frac{1}{\log_{\cos 1} y} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_{\cos 1} |x|} - \frac{1}{\log_{\cos 1} y} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_{\cos 1} y - \log_{\cos 1} |x|}{\log_{\cos 1} |x| \cdot \log_{\cos 1} y} > 0.$$

Se observă că inecuația este simetrică în raport cu  $x$ , deci dacă  $(x, y)$  este soluție, atunci și  $(-x, y)$  este soluție. Astfel soluțiile inecuației sunt puncte ale planului  $xOy$  simetrice față de axa  $Oy$ . Vom considera deci soluțiile inecuației pentru  $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$  și  $y \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ . Avem următoarele patru cazuri:

$$1^0 \left\{ \begin{array}{l} \log_{\cos 1} \frac{y}{x} > 0 \\ \log_{\cos 1} x > 0 \\ \log_{\cos 1} y > 0 \end{array} \right. \quad 2^0 \left\{ \begin{array}{l} \log_{\cos 1} \frac{y}{x} < 0 \\ \log_{\cos 1} x < 0 \\ \log_{\cos 1} y > 0 \end{array} \right. \quad 3^0 \left\{ \begin{array}{l} \log_{\cos 1} \frac{y}{x} < 0 \\ \log_{\cos 1} x > 0 \\ \log_{\cos 1} y < 0 \end{array} \right. \quad 4^0 \left\{ \begin{array}{l} \log_{\cos 1} \frac{y}{x} > 0 \\ \log_{\cos 1} x < 0 \\ \log_{\cos 1} y < 0 \end{array} \right.$$

Avem  $\log_{\cos 1} \frac{y}{x} > 0 \Leftrightarrow y < x$ , punctele sunt situate sub semidreapta  $y = x$ ;

$\log_{\cos 1} \frac{y}{x} < 0 \Leftrightarrow y > x$ , punctele sunt situate deasupra semidreaptei  $y = x$ ;

# FUNCTIA EXPONENTIALĂ ȘI FUNCTIA LOGARITMICĂ

$\log_{\cos 1} x > 0 \Leftrightarrow x < 1, x \in (0,1)$ , punctele sunt situate între dreptele de ecuație  $x = 0$  și  $x = 1 \parallel Oy$ ;

$\log_{\cos 1} x < 0 \Leftrightarrow x > 1, x \in (1, \infty)$ , punctele sunt situate la dreapta dreptei de ecuație  $x = 1$ ;

$\log_{\cos 1} y > 0 \Leftrightarrow y < 1, y \in (0,1)$ , punctele sunt situate între dreptele  $y = 0$  și  $y = 1 \parallel Ox$

$\log_{\cos 1} y < 0 \Leftrightarrow y > 1, y \in (1, \infty)$ , punctele sunt situate deasupra dreptei  $y = 1 \parallel Ox$

Rezultă următoarele sisteme de inecuații:

$$1^0 \begin{cases} y < x \\ x \in (0,1) \\ y \in (0,1) \end{cases} \quad 2^0 \begin{cases} y > x \\ x \in (1, \infty) \\ y \in (0,1) \end{cases} \quad 3^0 \begin{cases} y > x \\ x \in (0,1) \\ y \in (1, \infty) \end{cases} \quad 4^0 \begin{cases} y < x \\ x \in (1, \infty) \\ y \in (1, \infty) \end{cases}.$$

1<sup>0</sup> Soluțiile sunt în regiunea hașurată vertical.

2<sup>0</sup> Nu are soluții.

3<sup>0</sup> Are soluții în regiunea hașurată orizontal.

4<sup>0</sup> Are soluții în regiunea hașurată oblic.

Pentru inecuația inițială vom considera și soluțiile simetrice față de axa  $Oy$ . Evident, frontierele acestor regiuni nu reprezintă soluții, pentru că inegalitățile sunt stricte.

**A3.** Inegalitatea este echivalentă cu  $a^x - x - 1 \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$ .

Fie funcția

$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = a^x - x - 1; f(0) = 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0), \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow 0$  este punctul de minim.

Se poate aplica teorema lui Fermat. Rezultă că

$$f'(0) = 0. f'(x) = a^x \ln a - 1 = 0 \Rightarrow \ln a = 1 \Rightarrow a = e.$$

Reciproc, dacă  $a = e \Rightarrow$

$$f(x) = e^x - x - 1, f'(x) = e^x - 1.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0. \text{ Avem}$$

$x$	$-\infty$ $+\infty$	0
$f'(x)$	-	0      +
$f(x)$	$+\infty$ $+\infty$	min $f(0) = 0$

Din acest tablou se vede că  $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq x + 1, \forall x \in \mathbf{R}$ .

**A4.** Ecuația  $3^x + 4^x = 5^x$ , are soluția  $x=2$ , care este unică așa cum rezultă din faptul că

funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1$  este strict descrescătoare. Semnul funcției:

# FUNCTIA EXPONENTIALĂ ȘI FUNCTIA LOGARITMICĂ

dacă  $x \leq 2, f(x) \geq 0$ ;

dacă  $x \geq 2 \Rightarrow f(x) \leq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 2)$ .

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1$	$+\infty$	$0$	$-1$
$f(x)$	$+$	$0$	$-$

**A5.** Presupunem, prin absurd, că există  $\frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, (m, n) = 1$  astfel încât

$$\log_a N = \frac{m}{n} \text{ și că există } \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0, (p, q) = 1 \text{ astfel încât } \log_b N = \frac{p}{q} \Rightarrow$$

$N = a^{\frac{m}{n}} = b^{\frac{p}{q}} \Rightarrow a^{mq} = b^{np}$ , contradicție pentru că  $(a, b) = 1$ , a și b fiind prime între ele,  $a, b > 0, a \neq 1, b \neq 1$ .

**A5.** Punem condiții de existență:  $x > 0, x \neq 1, x \neq \frac{1}{2}$ .

Ecuția devine succesiv:

$$\log_x 2 + 1 + \log_{2x} 2 + 1 = \frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_2 x + 1} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2(2\log_2 x + 1) = 3\log_2^2 x + 3\log_2 x \Leftrightarrow$$

$$3\log_2^2 x - \log_2 x - 2 = 0 \Leftrightarrow \log_2 x = \frac{1 \pm 5}{6} \Leftrightarrow \log_2 x = 1 \text{ sau } \log_2 x = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow x = 2 \quad \text{sau}$$

$$x = 2^{-\frac{2}{3}}.$$

**A7.** Punem condiții de existență:  $x > 0, x \neq 1$ . Pentru  $a$  sunt puse în enunț

$a > 0, a \neq 1$ ;

$$\log_a \sqrt[4]{ax} + \log_x \sqrt[4]{ax} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\log_a x + \log_x a + 2}{4} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_a^2 x + 2\log_a x + 1}{4\log_a x} \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\log_a x + 1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\log_a x} \geq 0$$

$$\Rightarrow \log_a x > 0 (1) \Rightarrow x < 1, \text{ dacă } a \in (0, 1), x > 1, \text{ dacă } a \in (1, \infty) \Rightarrow \log_a x = |\log_a x|,$$

întrucât  $\log_a x > 0$ . Deci primul radical este egal cu  $\frac{\log_a x + 1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\log_a x}}$ , iar al doilea

$$\text{radical } \left| \frac{\log_a x - 1}{2} \right| \cdot \frac{1}{\sqrt{\log_a x}}, \text{ astfel încât ecuația devine } \frac{\log_a x + 1 + |\log_a x - 1|}{2\sqrt{\log_a x}} = a.$$

Pentru explicitarea modulului, avem

# FUNCTIA EXPONENTIALĂ ȘI FUNCTIA LOGARITMICĂ

---

$$1^0 \log_a x \geq 1 \Rightarrow \log_a x - 1 \geq 0 \Rightarrow |\log_a x - 1| = \log_a x - 1.$$

Ecuția devine

$$\frac{\log_a x + 1 + \log_a x - 1}{2\sqrt{\log_a x}} = a \Leftrightarrow \frac{2\log_a x}{2\sqrt{\log_a x}} = a \Leftrightarrow \frac{\log_a x}{\sqrt{\log_a x}} = a > 0, \text{ prin ipoteză.}$$

$$\Leftrightarrow \log_a x = a^2 \Leftrightarrow x = a^{a^2}; \log_a x > 1 \Rightarrow a > 1 \Rightarrow a^2 > 1 \Leftrightarrow a > 1$$

Dacă  $a > 1, x = a^{a^2} > 1$ , care arată că acest  $x$  este soluție.

Dacă  $0 < a < 1, x = a^{a^2} < 1$  și deci același  $x$  este soluție. Deci  $x = a^{a^2}$  este soluție.

$2^0 \log_a x \leq 1 \Rightarrow \log_a x - 1 \leq 0 \Rightarrow |\log_a x - 1| = 1 - \log_a x$ . Ecuția devine

$$\frac{\log_a x + 1 + 1 - \log_a x}{2\sqrt{\log_a x}} = a \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\log_a x}} = a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\log_a x} = \frac{1}{a} \Leftrightarrow \log_a x = \left(\frac{1}{a}\right)^2 \Leftrightarrow x = a^{\left(\frac{1}{a}\right)^2},$$

care admite soluții numai dacă

$$\frac{1}{a^2} < 1 \Rightarrow a^2 > 1 \Leftrightarrow a > 1.$$

Ecuția admite soluțiile  $x = a^{a^2}$  și  $x = a^{\frac{1}{a^2}}$ , numai dacă  $a > 1$ .

**A8.**  $x > 0$ . Pentru  $x = 1$ , egalitatea este verificată. Acum  $x > 0, x \neq 1$ . Schimbând baza, trecând la baza  $x$ , avem succesiv:

$$\begin{aligned} \log_{a^2} x + \log_{a^6} x + \dots + \log_{a^{n(n+1)}} x &= \frac{1}{2\log_x a} + \frac{1}{6\log_x a} + \dots + \frac{1}{n(n+1)\log_x a} = \\ &= \frac{1}{\log_x a} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) = (\log_a x) \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \\ &= (\log_a x) \frac{n}{n+1} = \log_a x^{\frac{n}{n+1}} = \log_a \sqrt[n+1]{x^n}. \text{ c.c.c.d.} \end{aligned}$$

## Probleme nerezolvate

1. Se consideră funcția  $f: (1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ , dată de legea  $f(x) = \ln(\ln x)$ .

Să se arate că funcția  $f$  este o bijecție și să se construiască inversa ei.

2. Să se rezolve în  $\mathbf{R}$  ecuațiile:  $3^x + 4^x + 5^x = 6^x$ ;  $9^x - 5^x - 4^x = 2\sqrt{20^x}$ .

3. Se consideră numerele reale  $a = \log_3 6, b = \log_2 5$ .

a) Să se arate că  $a < b$ . b). Care dintre numerele reale următoare

$a = \log_x(x+3), b = \log_{x+1}(x+4)$ , cu  $x \in (1, \infty)$  este mai mare.



# FUNCTIA EXPONENTIALĂ ȘI FUNCTIA LOGARITMICĂ

---

4. Să se determine toate numerele reale  $m$ , astfel încât inegalitatea

$$(m+1)e^{-2x} + m(e^{-x} + 1) > 0, \text{ să fie adevărată pentru orice } x \text{ real.}$$

5. Să se calculeze suma:  $\frac{\log_b a + \log_b^2 a + \log_b^3 a + \dots + \log_b^n a}{\log_b a + \log_b a^2 + \log_b a^3 + \dots + \log_b a^n}.$

6. Să se afle domeniul maxim de definiție al funcției  $f: E \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  dată de legea  $f(x) = \sqrt{\ln^2 x - 5 \ln x + 6}$ ;  $f(x) = \arcsin(\ln x)$ .

7. Să se rezolve inecuația:  $\log_x 3 \cdot \log_{3x} 3 \geq \log_{9x} 3.$

8. Să se rezolve ecuația:  $\frac{\ln x + \ln a}{\ln(x + \lambda)} = 2$ , unde  $\lambda$  este un parametru real, iar  $a > 0$ .

9. Fie  $a, b, c$  numere reale distincte și presupunem că  $\alpha, \beta, \gamma$  sunt numere reale astfel încât pentru orice număr real  $x$   $\alpha \cdot e^{ax} + \beta \cdot e^{bx} + \gamma \cdot e^{cx} = 0$ . Să se arate că  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ .

10. Să se rezolve inecuația:  $\frac{\log_a^2 x - 3 \log_a x + 2}{x^2 - 4} > 0, \quad 0 < a < 1.$

11. Să se determine relația între  $a$  și  $b$ , dacă  $\log_a x - \log_b x = \log_{\frac{b}{a}} x, \quad \forall x \in (0, \infty).$

12. Să se rezolve în  $\mathbf{R}$  ecuațiile:

$$(ab)^x + a^{2x} = b^{2x}, \quad a, b \in (0, 1) \cup (1, \infty), \quad a \neq b$$

$$\left(\sqrt[5]{7 + 4\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt[5]{7 - 4\sqrt{3}}\right)^x = 194.$$

13. Să se determine toate numerele reale  $m$ , astfel încât inegalitatea

$$m \cdot 4^x + 4(m-1)2^x + m > 1 \text{ să fie adevărată pentru orice } x \text{ real.}$$

14. Să se rezolve inecuația  $\max\left(a^x, \frac{1}{a^x}\right) > a^{\max\left(x, \frac{1}{x}\right)}, \quad a > 0.$

15. Să se reprezinte grafic funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} g(x) - \frac{1}{4}, & x \in (-\infty, -1) \\ 2, & x = -1 \\ g(x) - 4, & x \in (-1, \infty) \end{cases} \quad \text{unde } g(x) = 2^{|x+1|+|x-1|} + 2^{|x+1|-|x-1|}$$

16. Să se demonstreze inegalitatea  $\log_{x-1} N > \log_x N$ , unde  $x > 2$  și  $N > 1$  și apoi

$$\log_{x-1} \frac{x^2 + y^2}{x-1} > \log_x 2y, \quad x > 2, \quad y > 0.$$

17. Să se determine valorile reale ale lui  $a$ , pentru care inegalitatea  $\log_{\frac{a-1}{a+1}}(x^2 + 3) \geq 1$  este adevărată pentru orice  $x$  real.

# FUNȚIA EXPONENȚIALĂ ȘI FUNȚIA LOGARITMICĂ

---

**18.** Se consideră funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow f(\mathbf{R}), f(x) = a^x + a^{-x}$ , cu  $a > 0, a \neq 1$ .

**a.** Să se studieze monotonia funcției  $f$ .

**b.** Să se rezolve ecuația:  $(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = m, m \in \mathbf{R}$ .

**19.** Să se rezolve ecuația:

$$3 \log_{1000}(x-1) + 2 \log_{100}(x+3) - 2^{x+3} \log_{10}(x^2 + 2x - 3) = 0.$$

**20.** Să se găsească perechile de numere reale  $(x, y)$  care verifică inegalitatea

$$\log_{|x|}(\cos 1) > \log_y(\cos 1).$$

**21.** Dacă  $a \in \mathbf{R}, a > 0$ , atunci  $a^x \geq x + 1, \forall x \in \mathbf{R}$ , dacă și numai dacă  $a = e$ .

**22.** Să se rezolve inecuația  $3^x + 4^x > 5^x$ .

**23.** Să se arate că nu există numere reale  $N > 0, \neq 1$  astfel încât, dacă  $a$  și  $b$  sunt numere prime între ele,  $\log_b N$  și  $\log_a N$  să fie amândouă raționale.

**24.** Să se rezolve ecuația:  $\log_x 2x + \log_{2x} 4x = \frac{7}{2}$ .

**25.** Să se rezolve ecuația

$$\sqrt{\log_a \sqrt[4]{ax} + \log_x \sqrt[4]{ax}} + \sqrt{\log_a \sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \log_x \sqrt[4]{\frac{a}{x}}} = a, a > 0, \neq 1.$$

**26.** Să se verifice identitatea:  $\log_{a^2} x + \log_{a^6} x + \dots + \log_{a^{n(n+1)}} x = \log_a \sqrt[n+1]{x^n}$ .

**27.** Să se rezolve inecuația :

$$\log_{x^2+x+1}(2x^2-x-1) < \log_{x^2+x+1}(3x^2-4x+1)$$

**28.** Se consideră ecuația  $x^2 - (\log_a m) \cdot x + 3 \log_a m - 8 = 0, m$  este un parametru,  $m \in (0, \infty)$ , iar  $a$  constanta reală, cu  $a > 0$  și  $a \neq 1$ . Să se determine  $m$ , astfel încât :

**a).** ambele rădăcini să fie în  $[0, 3]$ ; **b).** una din rădăcini să fie în  $[0, 3]$ .

**29.** Să se reprezinte grafic  $f(x) = \log_a \lfloor x \rfloor$ , unde  $a > 0, a \neq 1$ .

**30.** Să se rezolve ecuația:  $(\log_{px} A + \log_{pq} A) \log_p A = 2 \log_{px} A \cdot \log_{pq} A$ , unde  $A, p, q$  sunt constante:  $A > 0, px > 0, \neq 1, p > 0, \neq 1, q > 0, \neq 1, pq > 0, \neq 1$ .

**31.** Să se arate că  $4 < \log_2 3 + \log_3 5 + \log_5 8 < 5$ .

**32.** Să se arate că funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , definită prin  $f(x) = x + a^x$ , cu  $a$  supraunitar, este bijectivă.

**33.** Să se arate că  $\log_2 3 + \log_3 4 + \log_4 5 + \log_5 6 > 5$

**34.** Fie funcția  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = a^x b^{1-x} + a^{1-x} b^x$ , unde  $a, b > 0, \neq 1$ .

**a.** Să se arate că  $f$  este descrescătoare pe  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  și crescătoare pe  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ .

**b.** Să se arate că pentru orice  $x \in [0, 1]$  avem  $2\sqrt{ab} \leq a\left(\frac{b}{a}\right)^x + b\left(\frac{a}{b}\right)^x \leq a + b$ .

## FUNȚIA EXPONENȚIALĂ ȘI FUNȚIA LOGARITMICĂ

---

**35.** Fie funcția  $f(x) = \log_a [(5m+1)x^2 + (7m+3)x + 3m]$ , unde  $a > 0, \neq 1, m \in \mathbf{R}$ . Să se determine  $m$ , astfel ca domeniul de definiție al funcției  $f$  să fie  $\mathbf{R}$ . Să se determine minimul sau maximul lui  $f(x)$ .

**36.a.** Se dă  $\log_{108} N = a$  și  $\log_{72} N = b, N > 0, \neq 1$ . Să se exprime  $\log_2 N$  și  $\log_3 N$  în funcție de  $a$  și  $b$ .

**b.** Să se arate că  $\frac{1}{\log_{x^n y^m} A} = \frac{n}{\log_x A} + \frac{m}{\log_y A}$ , unde  $A > 0, x, y > 0$ , iar  $m, n \in \mathbf{R} - \{0\}, A \neq 1$ .

**37.** Fie  $a > 1$ . Să se arate că  $a^{x^2} + a^{y^2} = 2 \cdot a^{xy}$  dacă și numai dacă  $x = y$ .

**38.** Să se rezolve ecuația  $\sqrt{\log_2 \sqrt[4]{2x} + \log_x \sqrt[4]{2x}} + \sqrt{\log_2 \sqrt[4]{\frac{x}{2}} + \log_x \sqrt[4]{\frac{2}{x}}} = 2$ .

**39.** Să se arate că funcția  $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \log_3 x + \log_x 3$  are un minim. Să se arate că  $\log_3 x + \log_x 3 \geq 2$ , oricare ar fi  $x \in (1, \infty)$ .

**40.a).** Să se arate că:  $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}, a, b, c > 0, c \neq 1$ .

**b).** Să se rezolve ecuația:  $x^{\log_3(x-1)} + 2(x-1)^{\log_3 x} = 3x^2$ .

**41.a).** Să se arate că dacă  $1 < a < b$  și  $N > 1$ , atunci  $\log_a N > \log_b N$ .

**b).** Ținând seama de rezultatul de la punctul **a.** și inegalitatea  $\frac{x+3}{x} > \frac{x+4}{x+1}, \forall x > 0$  să se arate că dacă  $a = \log_x(x+3)$  și  $b = \log_{x+1}(x+4)$  și  $x > 1$ , atunci  $a > b$ .

**42.** Să se demonstreze inegalitatea  $\frac{\ln(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1})}{\ln a_n} \geq \frac{n-2}{2}$ , unde  $a_1, \dots, a_n$  sunt

termenii unei progresii aritmetice cu rația  $a_1$ , dacă  $\ln a_1$  este cea mai mare valoare a funcției  $f(x, y) = 8y(x+1) - 5(x^2+1) - 2(3x+2y^2)$ .

**43.** Să se rezolve ecuația  $\log_{\sqrt{2}x} \log_{2\sqrt{2}x} x \log_4 x = 54$ .

# FUNȚIA EXPONENȚIALĂ ȘI FUNȚIA LOGARITMICĂ

---

**O1. Să se rezolve sistemul:**

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{3}} y = 2 \\ \log_{\frac{1}{2}} x \cdot \log_{\frac{1}{3}} y \geq 1 \end{cases}$$

**Rezolvare:**

Condiții de existență:  $x, y \in \mathbf{R}_+^*$

$$\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{3}} y = 2 \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} y = 2 - \log_{\frac{1}{2}} x$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x \cdot \log_{\frac{1}{3}} y \geq 1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} x \left( 2 - \log_{\frac{1}{2}} x \right) \geq 1 \Rightarrow 2 \log_{\frac{1}{2}} x - \left( \log_{\frac{1}{2}} x \right)^2 - 1 \geq 0$$

$$\text{Ecuația atașată: } -\left( \log_{\frac{1}{2}} x \right)^2 + 2 \log_{\frac{1}{2}} x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 4 = 0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} x = \frac{-2}{-2} = 1$$

$\log_{\frac{1}{2}} x$	<b>1</b>
$-\left( \log_{\frac{1}{2}} x \right)^2 + 2 \log_{\frac{1}{2}} x - 1$	- - - - - <b>0</b> - - - - -

$$-\left( \log_{\frac{1}{2}} x \right)^2 + 2 \log_{\frac{1}{2}} x - 1 \geq 0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{3}$$

**Deci**  $x = \frac{1}{2}$   
 $y = \frac{1}{3}$

**O2 Să se găsească valorile lui x astfel încât:**

$$\log_2(x+1) + \log_3(x+1) + \dots + \log_n(x+1) + n - 1 = \left( \frac{1}{2} \right)^x + \left( \frac{1}{3} \right)^x + \dots + \left( \frac{1}{n} \right)^x$$

# FUNCȚIA EXPONENȚIALĂ ȘI FUNCȚIA LOGARITMICĂ

---

**Răspuns:**

Se observă că  $x=0$  este soluție

$$\underbrace{\log_2(x+1)}_0 + \underbrace{\log_3(x+1)}_0 + \dots + \underbrace{\log_n(x+1)}_0 + n-1 = \underbrace{1+1+1+\dots+1}_{n-1 \text{ ori}} \Rightarrow n-1 = n-1(A)$$

Se consideră  $f(x) = \log_2(x+1) + \log_3(x+1) + \dots + \log_n(x+1) + n-1$  și

$$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^x$$

$f(x)$  este strict crescătoare pe  $\mathbf{R}$   
 $g(x)$  este strict descrescătoare  $\left. \vphantom{\begin{matrix} f(x) \text{ este strict crescătoare pe } \mathbf{R} \\ g(x) \text{ este strict descrescătoare} \end{matrix}} \right\} \Rightarrow x=0$  este soluție unică a ecuației

**O4 Să se rezolve sistemul:**

$$\begin{cases} \log_3 x + \log_2 y = 2 \\ 3^x - 2^y = 23 \end{cases}$$

**Rezolvare:**

Condiții de existență:  $x, y \in \mathbf{R}_+^*$

Observăm că  $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$  este soluție a sistemului

Verificare:

$$\log_3 x + \log_2 y = 1 + 1 = 2$$

$$3^3 - 2^2 = 27 - 4 = 23$$

**Cazul 1  $x \in (0; 3)$**

$$\begin{cases} \log_3 x < 1 \\ \log_3 + \log_2 y = 2 \end{cases} \Rightarrow \log_2 y > 1 \Rightarrow \log_2 y > 2^2 \Rightarrow y > 2(1)$$

$$\begin{cases} 3^x < 27 \\ 3^x - 2^y = 23 \end{cases} \Rightarrow 2^y < 4 \Rightarrow y < 2(2)$$

Din relațiile (1) și (2)  $\rightarrow$  contradicție  $\rightarrow$  nu există soluții pentru  $x \in (0; 3)$  (3)

**Cazul 2  $x \in (3; +\infty)$**

# FUNCTIA EXPONENTIALĂ ȘI FUNCTIA LOGARITMICĂ

---

$$\begin{cases} \log_3 x > 1 \\ \log_3 x + \log_2 y = 2 \end{cases} \Rightarrow \log_2 y < 1 \Rightarrow \log_2 y < 2^2 \Rightarrow y < 2(1)$$

$$\begin{cases} 3^x > 27 \\ 3^x - 2^y = 23 \end{cases} \Rightarrow 2^y > 4 \Rightarrow y > 2(2)$$

Din relațiile (1) și (2) → contradicție → nu există soluții pentru  $x \in (3; +\infty)$  (4)

**Din relațiile (3) și (4) → ecuația are soluție unică**  $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$

**N1 Să se rezolve inecuațiile:**

a)  $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 2x) > 0$

**Rezolvare:**

Condiții de existență:  $x^2 + 2x > 0 \rightarrow x(x+2) = 0$

Ecuatia atașată:  $x(x+2) = 0 \rightarrow$

$x$	$-2$	$0$
$x(x-2)$	$+$	$+$
$x(x+2)$	$+$	$+$

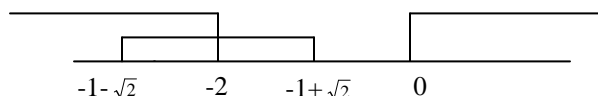
**Deci  $x \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$ .**

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 2x) > 0 \\ \frac{1}{2} \in (0; 1) \end{cases} \Rightarrow x^2 + 2x < 1 \Rightarrow x^2 + 2x - 1 < 0$$

Ecuatia atașată:  $x^2 + 2x - 1 = 0 \rightarrow \Delta = 4 + 4 = 8$ .

$x$	$-1 - \sqrt{2}$	$-1 + \sqrt{2}$
$x^2 + 2x - 1$	$+$	$+$
$x^2 + 2x - 1$	$+$	$+$

**Deci  $x \in (-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2})$**



**Deci  $x \in (-1 - \sqrt{2}; -2)$ .**

## FUNCȚIA EXPONENȚIALĂ ȘI FUNCȚIA LOGARITMICĂ

---

c)  $\log_x \frac{4x+5}{6-5x} < 1 \Leftrightarrow \log_x \frac{4x+5}{6-5x} < \log_x x$

**Rezolvare:**

Condiții de existență:

$$\frac{4x+5}{6-5x} > 0 \Rightarrow 4x > -5 \Rightarrow x > -\frac{5}{4}$$

**caz 1  $x > 1$**   $\rightarrow \frac{4x+5}{6-5x} < x \Rightarrow 4x+5 < 6x-5x^2 \Rightarrow 4x+5-6x+5x^2 < 0 \Rightarrow 5x^2-2x+5 < 0$

Ecuția atașată:  $5x^2-2x+5=0$

$\Delta = 4-4 \cdot 4 \cdot 5 < 0 \rightarrow$  **inecuația nu are soluții**

**caz 2  $x \in (0;1)$**   $\rightarrow \frac{4x+5}{6-5x} > x \Rightarrow 4x+5 > 6x-5x^2 \Rightarrow 5x^2-2x+5 > 0$

**Deci inecuația nu are soluții.**

**A1** Să se arate că expresia  $E = \frac{\log_2 x + \log_2 \sqrt{y} + \log_2 \sqrt[3]{z}}{\log_3 x + \log_3 \sqrt{y} + \log_3 \sqrt[3]{z}}$  este independentă de valorile strict mai mari ca 1 ale variabilelor  $x, y, z$ .

**Rezolvare:**

$$E = \frac{\log_2 x + \log_2 \sqrt{y} + \log_2 \sqrt[3]{z}}{\log_3 x + \log_3 \sqrt{y} + \log_3 \sqrt[3]{z}} = \frac{\log_2 (x\sqrt{y}\sqrt[3]{z})}{\log_3 (x\sqrt{y}\sqrt[3]{z})} \rightarrow$$

$$E = \frac{\log_2 t}{\log_3 t} = \frac{\log_2 t}{\frac{\log_2 t}{\log_2 3}} = \log_2 t \cdot \frac{\log_2 3}{\log_2 t} = \log_2 3 \rightarrow$$

**Notăm**  $x\sqrt{y}\sqrt[3]{z} = t$

$\rightarrow$  E este independentă de valorile  $x, y, z > 1$ .