Algebră

Minuță Aurelian   minuta.aurelian@math.ubbcluj.ro

Teams Seminar — zc9kadt

$N_g = \frac{1}{2}\left(N_{lucrare} + N_{seminar}\right)$

$N_{seminar} = 5$ ieșiri la tablă.

Seminar 1 Funcții injective, surjective, bijective

Def O funcție (aplicație) este un triplet (A, B, f), unde A și B sunt mulțimi, iar f este o lege de corespondență a.î. fiecărui elem din A îi corespunde un singur elem din B.

$f : A \to B$ $\qquad$ $A \xrightarrow{f} B$

domeniul de definiție

codomeniul

Def Funcția $f: A \to B$ s.n. injectivă dc.

$$\forall x_1 \neq x_2 \in A \longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Obs. f inj $\Longleftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A \quad f(x_1) = f(x_2) \longrightarrow x_1 = x_2$.

Def Funcția $f: A \to B$ s.n. surjectivă dc

$$\forall y \in B, \exists x \in A \text{ a.î. } f(x) = y$$

Def $f: A \to B$ s.n. bijectivă $\Longleftrightarrow f$ inj și surj.

$$\Longleftrightarrow \forall y \in B, \exists! x \in A \text{ a.î. } f(x) = y \Longleftrightarrow \exists f^{-1}: B \to A, f^{-1}(y) = x$$

Ex 1.3.35/pg 11 Se consideră funcțiile:

(1) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x) = x^2$

(2) $f_2 : [0,\infty) \to \mathbb{R},\ f_2(x) = x^2$

(3) $f_3 : \mathbb{R} \to [0,\infty),\ f_3(x) = x^2$

(4) $f_4 : [0,\infty) \to [0,\infty),\ f_4(x) = x^2$

Să se studieze inj, surj, bij. În cazul existenței inversei să se determine aceasta.

1) Injectivitate

Fie $x_1 = -1$, $x_2 = 1$

$\Rightarrow f_1(x_1) = 1,\ f_1(x_2) = 1$

$\Rightarrow f_1(x_1) = f_1(x_2) \Rightarrow f_1$ nu este inj

f nu este bijectivă $\Uparrow$

Surjectivitate

Fie $y = -1$, Pp. $\exists\, x \in \mathbb{R}$ a.î. $f_1(x) = y$

$\Rightarrow f_1(x) = -1 \Leftrightarrow x^2 = -1$ $\nexists\, x \in \mathbb{R}$ a.î. $x^2 = -1$

$\Rightarrow f_1$ nu este surjectivă

$f_2 : [0,\infty) \to \mathbb{R}$

<u>Inj.</u>

Fie $x_1, x_2 \in [0,\infty)$ și $f_2(x_1) = f_2(x_2) \overset{?}{\Rightarrow} x_1 = x_2$

$f_2(x_1) = x_1^2$

$f_2(x_2) = x_2^2$

$f_2(x_1) = f_2(x_2) \Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2 \; / \sqrt{}$

$$\left.\begin{array}{l} |x_1| = |x_2| \\ x_1, x_2 \in [0,\infty) \\ \Rightarrow |x_1| = x_1 \\ \quad |x_2| = x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \text{(A)} \Rightarrow f_2 - \text{inj.}$$

Analog f_1

f_2 - nu este surj.

$f_3 : \mathbb{R} \to [0, \infty)$

Inj. <u>nu</u> (analog f_1)

<u>Surj.</u>

Fie $y \in [0, \infty) \overset{?}{\Rightarrow} \exists x \in \mathbb{R}$ a.î. $f_3(x) = y$

$\Rightarrow x^2 = y \ /\sqrt{\ }$ $\quad \Rightarrow \sqrt{y} = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

$|x| = |\sqrt{y}|$

$y \geq 0 \Rightarrow |\sqrt{y}| = \sqrt{y}$ $\quad x = \begin{cases} \sqrt{y}, & x \geq 0 \\ -\sqrt{y}, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f_3$ este surj.

$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

$f_1 : [0,\infty) \to [0,\infty)$

f_1 - inj. și surj. (analog anterior)

$\Rightarrow f_1$ - bijectivă

$\Rightarrow \exists\, f_1^{-1} : [0,\infty) \to [0,\infty)$

$f_1^{-1}(y) = x$

$f_1^{-1}(x) = \sqrt{x}$

Ex 1.3.36.

(1) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{dacă } x \leq 1 \\ x+2, & \text{dacă } 1 < x \end{cases}$

Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \mid f(x_1) = f(x_2)$

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{dacă } x \leq 1 \\ x+2, & \text{dacă } 1 < x \end{cases}$

I $x_1 \in (-\infty, 1]$ $\quad x_2 \in (1, +\infty)$

$2x_1+1 = x_2+2 \qquad 2x_1 = x_2+1 \qquad x_1 = \dfrac{x_2+1}{2} \qquad \dfrac{x_2+1}{2} \in (1, +\infty)$

$\Rightarrow x_1 \in (1, +\infty)$

II $x_1 \in (-\infty, 1]$, $x_2 \in (-\infty, 1] \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow$

$$2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$$

$$2x_1 = 2x_2$$

$$x_1 = x_2$$

III $x_1 \in (1, +\infty)$ $x_2 \in (1, +\infty)$ $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow$

$$x_1 + 2 = x_2 + 2$$

$$x_1 = x_2$$

$\underline{\text{I, II, III}}$ $\Rightarrow$ f injectivă

$x \in (-\infty, 1]$ $f(x) = 2x+1$

Im. $f((-\infty, 1]) = (-\infty, 3]$

$x \in (1, +\infty)$ $f((1, +\infty)) = (3, +\infty)$

$f(x) = x+2$

$Im\, f = R \Rightarrow f$ e surjectiva $\Rightarrow f$ e bijectiva $\Rightarrow \exists f^{-1}: R \to R$

I $x \in (-\infty, 1]$ $f(x) = y \Leftrightarrow 2x+1 = y$ $2x = y-1$

$x = \frac{y-1}{2}$

II $x \in (1, +\infty)$ $f(x) = y \Leftrightarrow x+2 = y$ $x = y-2$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{2} & x \in [-\infty, 3] \\ x-2 & x \in (3, +\infty) \end{cases}$$

Compunerea funcțiilor

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right] & B \arrow[r, "g"] & C
\end{tikzcd}
$$

$g \circ f : A \longrightarrow C$, $\quad (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$

$\forall x \in A$

Ex 1.3.37/pg 11. Să se precizeze dc. urm. compuse $f\circ g$, $g\circ f$ sunt definite și în caz afirmativ det. compusa

(2) $f: \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $f(x) = |x|$

$g: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, $g(x) = 1/x$

$f\circ g: \mathbb{N}^* \to [0, \infty)$

$(f\circ g)(x) = f(g(x)) =$

$= f\left(\frac{1}{x}\right) = \left|\frac{1}{x}\right|$

$g\circ f$ nu este definită

---

(3) $f: \mathbb{R} \to [0, \infty)$ $f(x) = x^2+1$

$g: [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$

$$f \circ g : [0, \infty) \to [0, \infty)$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = x + 1$$

$$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}$$

(1) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2-1, & dc\ x \le -1 \\ x-1, & dc\ -1 < x \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} -x+1, & dc\ x < 3 \\ x-2, & dc\ 3 \le x \end{cases}$

$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} f(-x+1), & dc\ x < 3 \\ f(x-2), & dc\ 3 \le x \end{cases} = \begin{cases} (-x+1)^2-1, & dc \begin{cases} x < 3 \\ -x+1 \le -1 \end{cases} ;\ -x \le -2;\ x \ge 2 \quad [2,3) \\ (-x+1)-1, & dc \begin{cases} x < 3 \\ -1 < -x+1 \end{cases} ;\ x < 2 \quad (-\infty, 2) \\ \cancel{(x-2)^2-1, \ dc \begin{cases} 3 \le x \\ x-2 \le -1 \end{cases} ;\ x \le 1} \quad \emptyset \\ (x-2)-1, & dc \begin{cases} 3 \le x \\ -1 < x-2 \end{cases} ;\ x > 1 \quad [3, \infty) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -x, & dc\ x \in (-\infty, 2) \\ x^2-2x, & dc\ x \in [2,3) \\ x-3, & dc\ x \in [3, \infty) \end{cases}$$

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2-1, & dc\ x \le -1 \\ x-1, & dc\ -1 < x \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} -x+1, & dc\ x < 3 \\ x-2, & dc\ 3 \le x \end{cases}$

$(g \circ f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} g(x^2-1), & dc\ x \le -1 \\ g(x-1), & dc\ -1 < x \end{cases}$$

$$g(f(x)) = \begin{cases} -(x^2-1)+1, & dc\ x \le -1,\ x^2-1 < 3 \Rightarrow x^2 < 4 \quad |x| < 2 \quad -2 < x < 2 \Rightarrow x \in (-2,2) \quad x \in (-2,-1] \\ (x^2-1)-1, & dc\ x \le -1,\ x^2-1 \ge 3 \quad x^2 \ge 4 \quad |x| \ge 2 \quad x \in (-\infty,-2] \cup [2,\infty) \quad x \in (-\infty,-2] \\ -(x-1)+1, & dc\ x > -1,\ x-1 < 3 \quad x < 4 \quad x \in (-1,4) \\ (x-1)-2, & dc\ -1 < x,\ x-1 \ge 3 \quad x \ge 4 \quad x \in [4,\infty) \end{cases}$$

$$g(f(x)) = \begin{cases} -x^2+2, & x \in (-2,-1] \\ x^2-3, & x \in (-\infty,-2] \\ -x+2, & x \in (-1,4) \\ x-3, & x \in [4,\infty) \end{cases}$$

Temă

pg 11 Ex 1.3.36, (2), (3)