Seminar 6 03.11.2021

Relații de ordine

Def Fie A o mulțime
$r = (A, A, R)$, $R \subseteq A \times A$ o relație omogenă

r este o rel de ordine dc

rel de ordine

- r reflexivă: $\forall a \in A$: $a r a$
- r tranzitivă: $\forall a, b, c \in A$: dc $a r b$, $b r c$ atunci $a r c$
- r antisimetrică: $\forall a, b \in A$ dc $a r b$ și $b r a$ atunci $a = b$

- Dacă „$\le$" este o rel de ordine pe A $\Rightarrow$ $(A, \le)$ o mulțime ordonată
- Spunem că mulțimea ordonată $(A, \le)$ este un lanț dacă:

$\forall\, x, y \in A$ avem $x \leq y$ sau $y \leq x$

- Fie $(A, \leq)$ o mult ordonată, $a \in A$, a.m.

→ minimal: dc $\forall\, x \in A$ cu $x \leq a$ at $x = a$

→ maximal: dc $\forall\, x \in A$ cu $a \leq x$ at $a = x$

→ cel mai mic elem al lui A:

$$a \leq x, \forall\, x \in A$$

→ cel mai mare elem al lui A.

$$x \leq a, \forall\, x \in A$$

1.4.96 Să se det toate rel de ordine care se pot defini pe $A = \{a, b, c\}$. În fiecare caz să se precizeze elem. minimale, maximale, cel mai mic/mare elem.

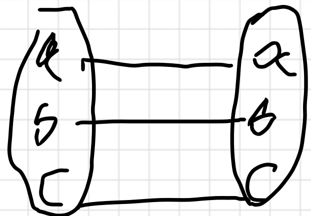
"$\leq$" o rel de ordine (R, T, A)

"$\leq$" reflexivă: $a \leq a$, $b \leq b$, $c \leq c$

Obs Dacă $a \leq b$ și $b \leq a \xRightarrow{A} a = b$

fals deoarece a, b, c sunt distincte

$R_1 = \{(a,a),(b,b),(c,c)\}$



a b c

$R_2 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b)\}$ b | a c

$R_3 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(b,a)\}$ a | b c

$R_4 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,c)\}$ c | a b

$R_5 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(c,a)\}$ a | c b

$R_6 = \{$ —//— $,(b,c)\}$ c | b a

$R_7 = \{$ —//— $,(c,b)\}$ b | c a

$R_8 = \{$ —//— $,(a,b),(a,c)\}$

$R_9 = \{$ —//— $,(a,b),(b,c),(a,c)\}$

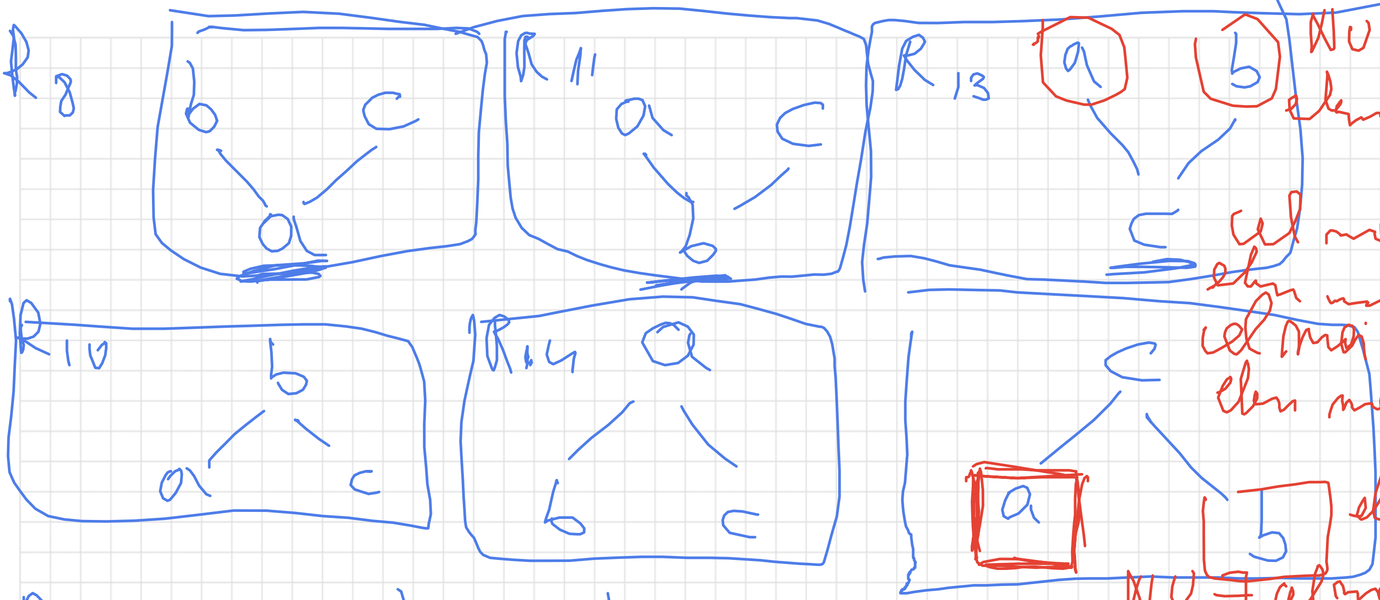
$R_{10} = \{$ —//— $,(a,b),(c,b)\}$

$R_{11} = \{$ —//— $,(b,a),(b,c)\}$

$R_{12} = \{$ —//— $,(b,a),(a,c),(b,c)\}$

$R_{13} = \{$ —//— $,(c,a),(c,b)\}$ ...

$R_{14} = \{$ —//— $,(b,a),(c,a)\}$



NU ∃ cel mai mare elem max

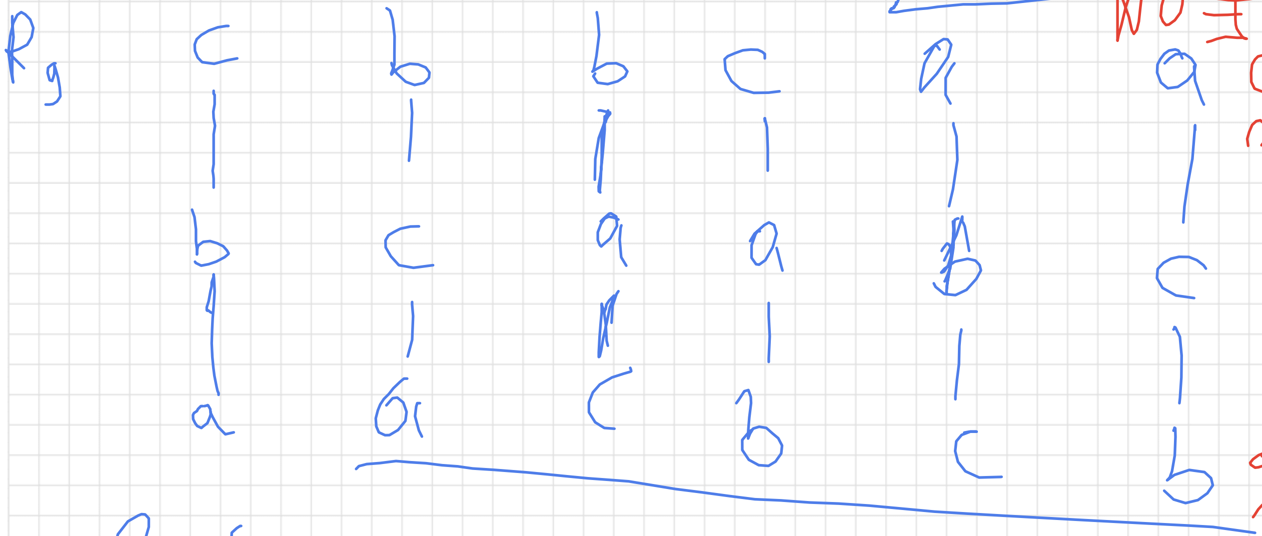
cel mai mic elem min

cel mai mare elem elem max

elem min

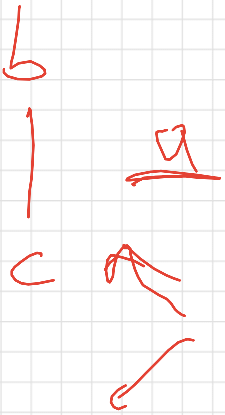
NU ∃ cel mai mic elem

cel mai mare max



cel mai mic min

Cont

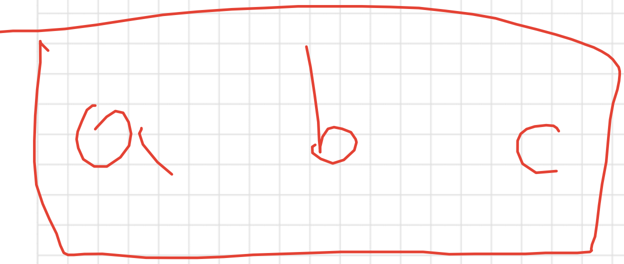


elem maximale: a, b

elem minimale: c, a

NU ∃ cel mai mare elem

mic



toate sunt elem maximale și minimale

$\boxed{1.4.48}$ Dacă $(A, \leq)$ mult ord atunci $(A, \geq)$ o mult ordonată

$\left(\geq \overset{def}{=} \leq^{-1} \right)$

R, T, A ?

Reflexivitate: $\forall a \in A$ avem $a \geq a$

$a \leq a$

$\Updownarrow$

$a \leq a$

(valabil pt că $\leq$ este R)

Tranzitivitate $\forall a, b, c \in A$?

Dacă $\boxed{a \geq b}$ și $\boxed{b \geq c}$ atunci $\boxed{a \geq c}$

$b \leq a$ $\quad$ $c \leq b$

$c \leq b$ și $b \leq a \xRightarrow{\text{Tr}_{\leq}} c \leq a$

Antisimetrie $\forall a, b \in A$?

Dacă $\boxed{a \geq b}$ și $\boxed{b \geq a}$ atunci $\boxed{a = b}$

$$\underbrace{b \le a \quad a \le b}$$

$\Downarrow$ A S rel „$\le$"

$a = b$.

A, ocolo (A, $\ge$) mult. ord.

Recap:

Def Fie $(A, \le)$ o mult. ord. $X \subseteq A$.

- O margine inferioară pentru este un element $a \in A$ a.î. $\underline{a} \le x$, $\forall x \in X$.
- Se numește infimum al lui X în A cea mai mare margine inferioară.

$$a = \inf_A X \iff \begin{cases} a \le x, \ \forall x \in X \\ \text{dacă } a' \in A \text{ a.î. } a' \le x, \forall x \in X \\ \text{atunci } a' \le a \end{cases}$$

Spunem că $(A, \le)$ este o latice

dacă $\forall x, y \in A$, $\exists$
$\inf\{x,y\} = x \wedge y$ și $\sup\{x,y\} = x \vee y$

Dacă $\forall X \subseteq A$, $\exists \inf X$ și $\sup X$
atunci A este o latice completă

$\boxed{1.450}$ Orice lanț este o latice.
Este orice lanț o latice completă?

Fie $(A, \leq)$ lanț (mult. ord. și $\forall x, y \in A$ avem $x \leq y$ sau $y \leq x$)

Vrem $(A, \leq)$ latice $\Leftrightarrow \forall x, y \in A$, $\exists \sup\{x,y\}$, $\inf\{x,y\}$

Fie $x, y \in A \xrightarrow{A \text{ lanț}} x \leq y$ sau $y \leq x$

Cazul I Dacă $\boxed{x \leq y}$

$\boxed{\sup\{x,y\} = y}$

$\boxed{\inf\{x,y\} = x}$

Cazul II Dacă $\boxed{y \le x}$

$\sup\{x, y\} = x$

$\inf\{x, y\} = y$

Aşadar A este latice.

NU Exemplu

Lanțul de $(\mathbb{Q}, \le)$

$X = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} \subseteq \mathbb{Q}$

NU $\exists \sup_{\mathbb{Q}} X$

În $\mathbb{R}$ $\sup_{\mathbb{R}} X = \sqrt{2}$

$\boxed{1.4.52}$ Să se arate că (N, |) este o latice.

Este (N, |) latice completă?

Vrem (N, |) mulț. ord. (R, T, AS)

Reflexivitate $a \mid a$, $\forall a \in \mathbb{N}$

valabil pt. că $a = 1 \cdot a$

Tranzitivitate $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$

dacă $\boxed{a \mid b}$ și $\boxed{b \mid c}$ atunci $\boxed{a \mid c}$

$\exists x \in \mathbb{N}$ a.î. $b = a \cdot x$

$b \mid c \Rightarrow \exists y \in \mathbb{N}$ a.î. $c = b \cdot y \Rightarrow c = a(x \cdot y)$, $x \cdot y \in \mathbb{N}$

Antisim $\forall a, b \in \mathbb{N}$

dacă $\boxed{a \mid b}$, $\boxed{b \mid a} \Rightarrow \boxed{a = b}$

$\exists x \in \mathbb{N}$ a.î. $b = a \cdot x$

$b \mid a \Rightarrow \exists y \in \mathbb{N}$ a.î. $a = b \cdot y$ $\Rightarrow$

$a = a \cdot x \cdot y$

Dacă $a \neq 0 \Rightarrow 1 = xy \Rightarrow x = y = 1$ (în $\mathbb{N}$) $\Rightarrow a = b$

Dacă $a = 0 \Rightarrow b = 0 \cdot x = 0 \Rightarrow a = b$

Vrem $(\mathbb{N}\ |)$ latice

$\sup\{x, y\} = \text{cmmmc}(x, y)\ (\neq 0)$ pt $x, y \in \mathbb{N}^*$

$\inf\{x, y\} = \text{cmmdc}(x, y)$