Seminar 8 17. XI. 2021

Temă ex: 1.4.40, 1.4.41, 1.4.42, 1.4.53, 1.4.54

$\boxed{2.1.52}$ (Grupul quaternionilor)

„·" este asociativă?

Met 1 Computational

$x \cdot (y \cdot z) \overset{?}{=} (x \cdot y) \cdot z, \ \forall x, y, z \in G$

$8^3 \cdot 4$ înmulțiri

după eliminarea semn: $4^3 \cdot 4 = 256$ înm

Met 2 Se consideră matricile din $M_2(\mathbb{C})$

$1 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$i = I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$j = J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

$k = K = I \cdot J = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

$I^2 = J^2 = K^2 = -I_2$

$JK = I \quad , \quad KI = J$

<u>Met 3</u> $\quad M_4(\mathbb{R})$

$1 = I_4$

$i = I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$j = J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$k = K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{2.1.53}$ Ssac grupurile $(\mathbb{R}, +)$ și $(\mathbb{R}^*_+, \cdot)$ sunt izomorfe

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = a^x$, $a \neq 1$, $a > 0$

1) f este morfism.

$f(x+y) \overset{?}{=} f(x) \cdot f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$f(x+y) = a^{x+y}$

$f(x) \cdot f(y) = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

2) f este injectivă

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $f(x_1) = f(x_2) \overset{?}{\Longrightarrow} x_1 = x_2$

Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ a.î.

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow a^{x_1} = a^{x_2} \Big| \log_a$

3) f este surjectivă

$\forall y \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists x \in \mathbb{R}$ a.î. $f(x) = y$.

$a^x = y$

$\boxed{x = \log_a y \in \mathbb{R}}$

$\Rightarrow f$ izomorfism $\Rightarrow (\mathbb{R},+) \simeq (\mathbb{R}_+^*, \cdot)$

$f^{-1}(y) = \log_a y$

$\boxed{2.1.54}$

Fie $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arg x$ este un morfism de gr. între $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ și $(\mathbb{R}, +)$. Să se det. $\ker f$ și $\operatorname{Im} f$.

GREȘEALĂ:

Pt. $x = y = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$

$f(x \cdot y) = f(\cos 3\pi + i\sin 3\pi)$

$= \pi \neq 3\pi$

$f(x) + f(y) = \frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = 3\pi$

$f : \mathbb{R}, + \to \mathbb{C}^*, \cdot$, $f(x) = \cos x + i\sin x$

1) Morfismul g

Verif: $g(x+y) = g(x) \cdot g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$

$g(x+y) = \cos(x+y) + i\sin(x+y)$

$g(x) \cdot g(y) = (\cos x + i\sin x) \cdot (\cos y + i\sin y)$

2) $\ker g = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 1\}$

elem. neutru din $\mathbb{C}^*$

$g(x) = 1 \Rightarrow$

$\cos x + i\sin x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$

$\ker g = \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

3) $\operatorname{Im} g = g(\mathbb{R}) = \{g(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$g(x) = \cos x + i\sin x$ $r = 1$

$z \in \mathbb{C}$, $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

$\boxed{r = d(O, z)}$

$\operatorname{Im} f = \mathcal{B}(\vec{0}, 1)$

$\boxed{2.1.57}$ Să se găsească toate subgrupurile lui $(\mathbb{Z}, +)$.

Indicație $\operatorname{Sub}(\mathbb{Z}, +) =$
$\{n\mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{N}\}$

$\underline{n\mathbb{Z}} = M_n = \{nx \mid x \in \mathbb{Z}\}$

$H = \underline{n\mathbb{Z}}, n \in \mathbb{Z}$. Vrem $\underline{H < (\mathbb{Z}, +)}$

I. $0 = n \cdot 0 \Rightarrow 0 \in n\mathbb{Z}$

II. $\underline{\text{Vrem să}}$ $\forall x, y \in H$, $x + y \in \underset{n\mathbb{Z}}{H}$

$\exists x', y' \in \mathbb{Z}$ a.î. $x = n x'$
$y = n \cdot y'$

$x + y = n \cdot x' + n \cdot y' = n\overbrace{(x' + y')}^{\in \mathbb{Z}} \in n\mathbb{Z} \overset{\text{ }}{=} H$

III Vrem $\forall x \in H, -x \in H = n\mathbb{Z}$

$\Downarrow$

$\exists x' \in \mathbb{Z}$ a.î. $x = n \cdot x'$

$-x = -n \cdot x' = n \cdot \underbrace{(-x')}_{\in \mathbb{Z}} \in n\mathbb{Z}$.

$\Rightarrow H = n\mathbb{Z} \leq (\mathbb{Z}, +)$.

Fie $H \leq (\mathbb{Z}, +)$. Vrem să arătăm că $\exists$ $n \in \mathbb{Z}$ a.î. $H = n\mathbb{Z}$

$\Downarrow$

$0 \in H$

Caz I $H = \{0\} = 0 \cdot \mathbb{Z}$

Caz II $H \neq \{0\} \Rightarrow \exists x \in H$

$\Downarrow H \leq (\mathbb{Z}, +)$

$-x \in H$.

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{H conține cel puțin un nr. întreg pozitiv nenul}}$

$(\mathbb{N}, \leq)$ bine ordonat

$\Rightarrow$ Fie n cel mai mic nr. natural nenul din H.

Dem că $H = n\mathbb{Z}$.

$n \in H \Rightarrow \underbrace{n + n + \ldots + n}_{x \text{ ori}} \in H, \forall x \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow n \cdot x \in H, \forall x \in \mathbb{N}$

$\overset{0}{n} = 0 \in H$

$-n \in H \Rightarrow \underbrace{-n + (-n) + \ldots + (-n)}_{x \text{ ori}} \in H$

$\Rightarrow -n \cdot x \in H, \forall x \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow n\mathbb{Z} \subseteq H$

Vrem $H \subseteq n\mathbb{Z}$.

Pp. RA că $\exists\, x \in H \setminus n\mathbb{Z}$

$x \notin n\mathbb{Z} \Rightarrow n \nmid x$

$$\boxed{\begin{array}{l} x \in H \Rightarrow -x \in H \\ n \nmid x \Rightarrow n \nmid -x \end{array}}$$

Arătăm pp că x este pozitiv.

$n \nmid x \Rightarrow \exists\, q, r \in \mathbb{Z}$ a.î.

$x = n \cdot q + r$, unde $0 < r < n$

$\in H$

$n\mathbb{Z} \subseteq H \Rightarrow n \in H$

$\Rightarrow \underbrace{x - n - n - n - \dots - n}_{q \text{ ori}} \in H$

$\Rightarrow x - n \cdot q \in H \Rightarrow r \in H$

contradicție cu alegerea lui n $\longrightarrow H \setminus n\mathbb{Z} = \cancel{\emptyset}$

$\Rightarrow H \subseteq n\mathbb{Z}$

$\sim 2 \subseteq H \implies H = \sim 2$

2.1.58, 2.1.59, 2.1.60, 2.1.61