Seminar 5

27.10.2021

Relații binare

Recap:

Def Fie A, B mulțimi și $S \subseteq A \times B$.

Structura $\underbrace{(A, B, S)}_{\sigma}$ este o rel binară.

Exemplu $A = \{a_1, a_2, a_3\}$

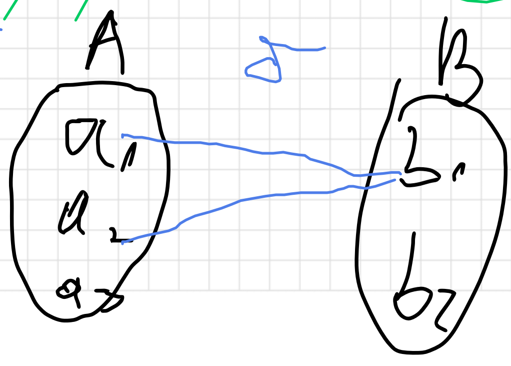
$B = \{b_1, b_2\}$

$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_1), (a_3, b_2)\}$

$S = \{\underline{(a_1, b_1)}, \underline{(a_2, b_1)}\} \subseteq A \times B$

$(A, B, S) = \sigma$

domeniul codomeniu grafic



Notatie

$(x,y)\in S \iff x\,\sigma\,y$

Exemplu $a_1 \sigma b_1 \quad a_2 \sigma b_1$

$f: A \to B$ funcție

$G_f = \{ (\underbrace{x}_{\in A}, \underbrace{f(x)}_{\in B}) \mid x \in A \} \subseteq A \times B$

$(A, B, G_f) = f$ relație

O relație $(A, A, R) = \mathcal{R}$ este o rel omogenă $(R \subseteq A \times A)$

Def O rel omogenă $(A, A, R) = \mathcal{R}$ de

- reflexivă dc $a\,\mathcal{R}\,a$, $\forall a \in A$
- tranzitivă dc $\forall a, b, c \in A$

dacă aRb și bRc atunci aRc

- simetrică dc $\forall\, a,b \in A$

  dacă aRb atunci bRa

- antisimetrică dc $\forall\, a,b \in A$

  dacă aRb și bRa atunci $a=b$

---

rel de preordine

- reflexivă
- tranzitivă

• simetrică

• antisim

rel de echivalență

rel de ordine

1.4.36 | Să se arate că divizibilitatea pe $\mathbb{Z}$ este o preordine, care NU este nici simetrică, nici antisimetrică

$a \mid b \overset{def}{\iff} \exists\, c \in \mathbb{Z}$ a.î. $\underline{b = a \cdot c}$

divizor multiplu

$\boxed{(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mid) - \mid}$

(1) **Reflexivitate** Vrem $a \mid a, \forall a \in \mathbb{Z}$

avem pt că $a = a \cdot 1 \Rightarrow$

(2) **Tranzitivitate**

Dacă $a \mid b$ și $b \mid c$. Vrem $a \mid c$

$$\left.\begin{array}{l} a \mid b \Rightarrow \exists\, c_1 \in \mathbb{Z} \text{ a.î. } \boxed{b = a \cdot c_1} \\ b \mid c \Rightarrow \exists\, c_2 \in \mathbb{Z} \text{ a.î. } c = b \cdot c_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = a \cdot \underbrace{(c_1 \cdot c_2)}_{= c_3} \Rightarrow c = a \cdot c_3$$

$$\Downarrow$$

$$a \mid c$$

Din (1) și (2) $\Rightarrow$ „$\mid$" este o preordine

Simetrie (de $a \mid b \Rightarrow b \mid a$)

Contraex: $2 \mid 4$ dar
$4 \nmid 2$

Antisimetrie [de $a \mid b$ și $b \mid a$ $\Rightarrow$ $a = b$)

$3 \mid -3$
$-3 \mid 3$ dar $3 \neq -3$

$\boxed{1.4.37}$ Să se det toate rel de echiv care se pot defini pe mult. $A = \{a, b, c\}$

$\mathcal{R} = (A, A, R)$ rel de echiv.

$\Downarrow$

$\mathcal{R}$ reflex $\Rightarrow$ $x \mathcal{R} x$, $\forall x \in A \Rightarrow$
$\{(a,a), (b,b), (c,c)\} \subseteq R$

$\mathcal{R}$ trans $\Rightarrow$ $\forall x, y, z \in A$
dacă $(x \mathcal{R} y$ și $y \mathcal{R} z) \Rightarrow x \mathcal{R} z$

$\mathcal{R}$ sim

$+$

$$\boxed{\forall x,y \in A \text{ dc } xry \Rightarrow yrx}$$

$R_1 = \{(a,a),(b,b),(c,c)\}$ ✓ $[a]=\{a\}$

$A = [a] \cup [b]$

$R_2 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,c),(c,a)\}$ ✓

$[c]=\{a,c\}$ $[b]=\{b\}$ $[a]=\{a,c\}$

$R_3 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a)\}$

$R_4 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(b,c),(c,b)\}$

$R_5 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a),(a,c),(c,a),(b,c),(c,b)\}$

$b\,r\,a$ şi $a\,r\,c \Rightarrow b\,r\,c$ $\quad \subseteq A\times A$

$$\boxed{|A\times B| = |A|\cdot|B|}$$

1.4.38 Să se arate că urm. rel sunt echivalente şi să se calculeze respectivele mulţimi factor.

(1) $(\mathbb{C}, \mathbb{C}, \equiv)$ dată prin

$x \equiv y \iff |x| = |y|$

Recap. Dacă $(A, A, R) = \mathcal{R}$ este o rel de echivalență

Pt un $a \in A$ putem lua

$$[a] = \{x \in A \mid a \mathcal{R} x\}$$

Putem partiționa mult A în clase de echiv:

$$\underbrace{A/_{\mathcal{R}}} = \{[a] \mid a \in A\}$$

mult factor

în ex $A/_{R_2} = \{[a], [b]\}$

Reflexivitate Vrem $x \equiv x, \forall x \in \mathbb{C}$

$|x| = |x|$ adev

Tranzitivitate Dacă $x \equiv y$ și $y \equiv z$ Vrem $x \equiv z$

$\underbrace{|x| = |y| \quad |y| = |z|}$

$\Rightarrow |x| = |z|$

Simetrie Dacă $x \equiv y$ Vrem $y \equiv x$

$|x| = |y| \Rightarrow |y| = |x|$

$\Rightarrow$ "$\equiv$" este o rel. de echiv

$x \in \mathbb{C}$.

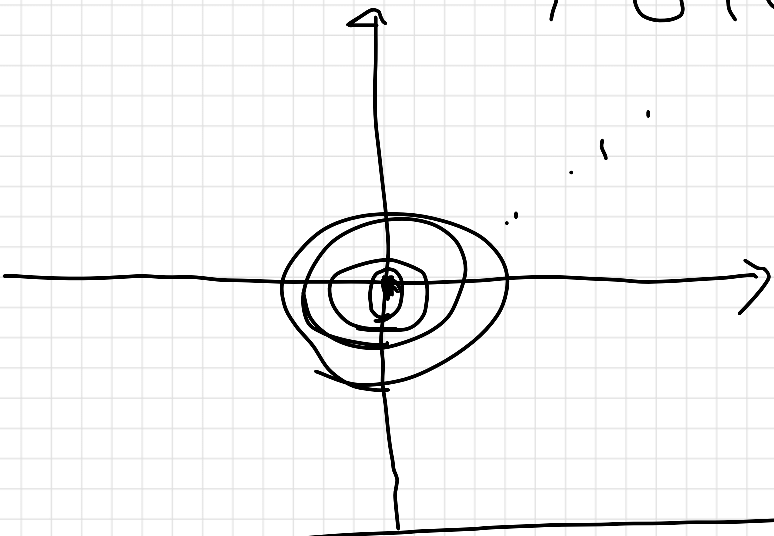
$$[x] = \{y \in \mathbb{C} \mid x \equiv y\}$$

$$= \{y \in \mathbb{C} \mid |x| = |y|\}$$

$$= \mathcal{C}(0, |x|)$$

$$\mathbb{C}/\equiv \; = \{[x] \mid x \in \mathbb{C}\}$$

$$= \{\mathcal{C}(0,r) \mid r \geq 0\}$$



Temă (2)

$\boxed{\text{Ex } 1.4.39}$ Spac rel dată

prin $\overset{\frac{a}{b}}{(a,b)} \sim \overset{\frac{c}{d}}{(c,d)} \iff a\cdot d = c\cdot b$

este o rel de echiv pe $\boxed{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*}$

Să se det mult factor

$$(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*)/\sim \; = \mathbb{Q}$$

Reflexivitate Vrem $(x,y) \sim (x,y)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$

$\Leftrightarrow$

$x \cdot y = y \cdot x$ ocder.

Tranzitivitate

$\forall (x,y), (m,n), (a,b)$

dacă $(x,y) \sim (m,n)$ și

$(m,n) \sim (a,b)$ atunci

Vrem $(x,y) \sim (a,b)$

$\Updownarrow$

$x b = y \cdot a$

$(x,y) \sim (m,n) \Rightarrow x n = y m \,/ :n$ $\in \mathbb{Z}^*$

$(m,n) \sim (a,b) \Rightarrow m b = n a \,/ :n$

$\Rightarrow x = y \frac{m}{n}$

$\Downarrow$

$\frac{m}{n} \cdot b = a$

$xb = ya \Leftrightarrow x \cdot b = y \cdot \frac{m}{n} \cdot b \Leftrightarrow$

$y \frac{m}{n} b = y \frac{m}{n} b$ ocder