Seminar 4 20 oct 2021

$f: A \to B$

f bij $\Leftrightarrow$ f inversabilă $\Leftrightarrow$ $\exists\, g: B \to A$ a.î.

f surj $\Leftrightarrow$ g este inv la dr $\longrightarrow$ $f \circ g = 1_B$

f inj $\Leftrightarrow$ g este inv la st $\longrightarrow$ $g \circ f = 1_A$

Obs Inversa la st/dr NU e neapărat unică.

1.3.42 | Găsiți un exemplu de funcție $f: A \to B$ a.î.

(1) f este injectivă, dar NU are inversă la dreapta

Obs f NU are inv la dr $\Rightarrow$ f NU e surj

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f(x) = 2x$

Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ a.î. $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ inj

$\operatorname{Im} f = \{0, 2, 4, \dots\} \subsetneq \mathbb{N} \Rightarrow$

f NU este surj

Rămâne să dem că f NU are inv la dr

Pp. RA că $\exists$ inv la dr:

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ a.î. } \underline{f \circ g = 1_{\mathbb{N}}}$$

Fie $x \in \mathbb{N} \Rightarrow (f \circ g)(x) = 1_{\mathbb{N}}(x) \Rightarrow$

$$f(g(x)) = x \Rightarrow$$

$$2g(x) = x, \forall x \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$g(x) = \frac{x}{2}, \forall x \in \mathbb{N}.$$

$g(1) = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$, dar $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

contradicție

$\Rightarrow f$ NU are inv la dr

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad f(x) = 2x$

f inj $\Rightarrow$ f are inv la st:

$\exists\, g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a.î. $\boxed{g \circ f = 1_{\mathbb{N}}}$

Fie $x \in \mathbb{N}$

$(g \circ f)(x) = 1_{\mathbb{N}}(x) \Rightarrow g(f(x)) = x$

$\Rightarrow g(\underline{2x}) = x \quad , \forall\, x \in \mathbb{N}.$

Definim g a.î.: $g: \underline{\mathbb{N} \to \mathbb{N}}$

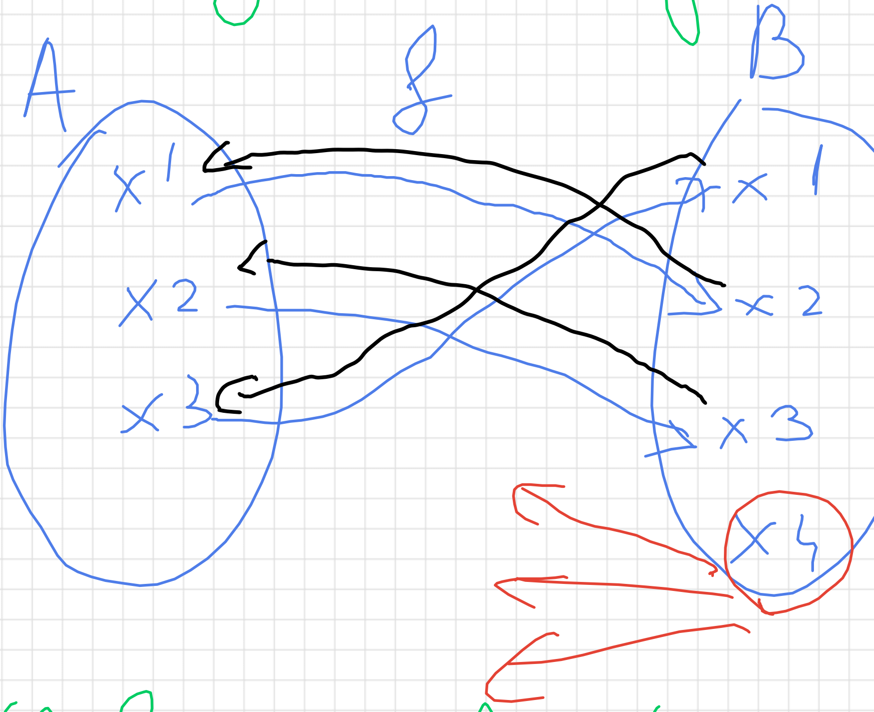
$$\underline{g(x)} = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & \text{dacă } x \text{ par} \\ \cancel{0, 1, 2, \ldots} & \text{dacă } x \text{ impar} \end{cases}$$

putem construi o $\underline{\infty}$ de funcții inverse la stânga pentru f.

(2) f are exact o inversă la stânga, dacă f NU este bij

Obs: f are inv la st $\Rightarrow f$ inj.

f NU e bij $\Rightarrow f$ NU este surj.



f inj

$\operatorname{Im} f = \{1, 2, 3\} \neq B$

f NU este surj

O fct inv la st $g: B \to A$ a.î. $g \circ f = 1_A$

$A = \{1, 2, 3 \dots\}$

$\boxed{(g \circ f)(1) = 1_A(1)} \Rightarrow g(f(1)) = 1 \Rightarrow$

$g(2) = 1$

$(g \circ f)(2) = 1_A(2) \Rightarrow g(f(2)) = 2 \Rightarrow$

$g(3) = 2$

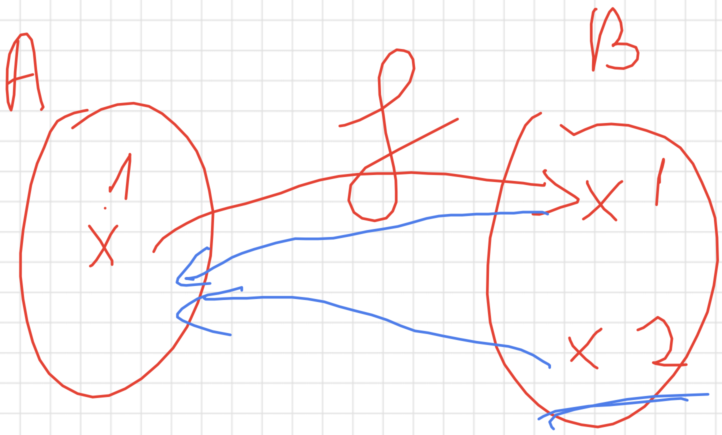
$(g\circ f)(3) = 1_A(3) \Rightarrow g(f(3)) = 3 \Rightarrow$

$g(1) = 3$

Obs. $g(4) \in \{1, 2, 3\} = A$

x	1	2	3	4
$g_1(x)$	3	1	2	1
$g_2(x)$	3	1	2	2
$g_3(x)$	3	1	2	3

Avem exact 3 inverse la st pt f



f inj

f NU e surj

$(\mathrm{Im} f = \{1\} \neq B)$

inversa la stânga este:

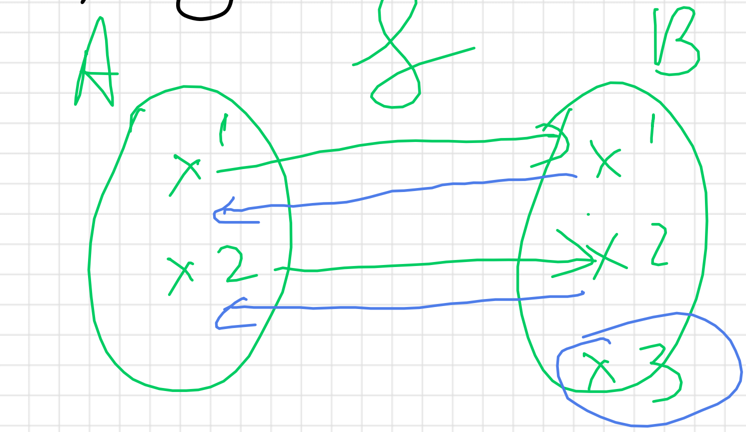
$g : B \to A$

$g(1) = 1$ $\quad$ $g(2) = 1$

$g \circ f = ? = 1_A$

$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(1) = 1$

(3) f are exact 2 inverse la st



f inj

f NU e surj

$\mathrm{Im} f = \{1, 2\} \subsetneq B$

Inv la st. $g : B \to A$ ai $\boxed{g \circ f = 1_A}$

$(g \circ f)(1) = 1_A(1) \Rightarrow g(f(1)) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow g(1) = 1$.

$(g \circ f)(2) = 1_A(2) \Rightarrow g(f(2)) = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow g(2) = 2$

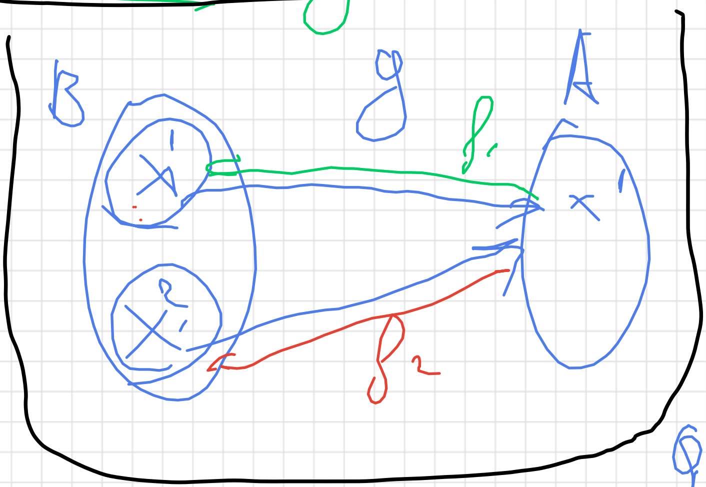
$g(3) \in \{1, 2\}$

x	1	2	3
$g_1(x)$	1	2	1
$g_2(x)$	1	2	2

$\boxed{1.3.43}$ Să se găsească un ex. de funcție $g: B \to A$ a.î.

(1) g are exact 2 inverse la dr

Obs g are inv la dr $\Rightarrow$ g este surj



$\mathrm{Im}\, g = \{1\} = A$

$\Rightarrow g$ surj

$g(1) = g(2) = 1 \Rightarrow g$ NU e inj

g surj $\Rightarrow$ are inv la dr:

$f: A \to B$ a.î. $g \circ f = 1_A$

$A = \{1\}$

$(g \circ f)(1) = 1_A(1) \Rightarrow g(f(1)) = 1$
$\Rightarrow f(1) \in \{1, 2\}$

x	1
$f_1(x)$	1
$f_2(x)$	2

(2) g are o ∞ de inv la dr
(temă)

Sn ac g are exact o inv la dr
$\Longleftrightarrow$ g bijectivă.

"$\Longrightarrow$". Pp g are exact o inv la dr
Vrem g bijectivă.

g are inv la dr $\Rightarrow$ g surj.
Rămâne să dem că g este inj.

Pp. R.A că g NU este inj $\Rightarrow$

$\exists\, x_1 \neq x_2 \in B$ a.î. $g(x_1) = g(x_2) = a \in A$

g are inv la dr $\Rightarrow \exists!\, f : A \to B$ a.î.

$g \circ f = 1_A$

$(g \circ f)(a) = 1_A(a) \Rightarrow$

$g(f(a)) = \underline{a} \Rightarrow f(a) \in \{x_1, x_2\}$

$\Rightarrow$ avem cel puțin 2 inverse la dr

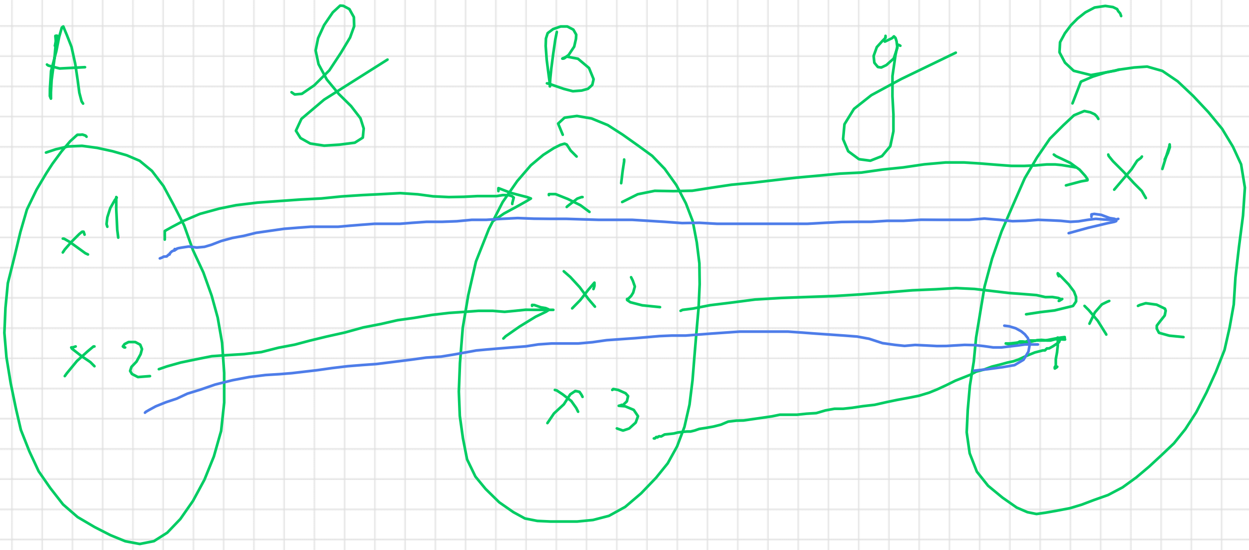
contrad $\Rightarrow g$ inj $\xrightarrow{g \text{ surj}}$ g bij

---

$\boxed{1.3.44}$ Exemple de funcții

$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ astfel încât

a) $g \circ f$ injectivă dar g NU este injectivă



$g(2) = g(3) \Rightarrow g$ NU e inj

$g \circ f : A \to C \qquad g \circ f = 1_{A=C}$

bijectivă ob inj.

(temă) (2), (3)

Arătăm că o fcț bij are exact o inv la ob

$g : B \to A$ bij $\Rightarrow g$ inversabilă $\Rightarrow$

$\exists\, g^{-1} : A \to B$ inversa lui g.

EXISTENȚA

g^{-1} este inclusiv inversa la ob pt g.

UNICITATEA Pp că $\exists\, f_1, f_2$ inv la ob pt g

$\Rightarrow g^{-1} \mid g \circ f_1 = g \circ f_2 = 1_A \Rightarrow f_1 = f_2 = g^{-1}$.

$\boxed{1.3.46}$ Functia $f : A \to B$ UASE

(1) f inj

(2) $\forall X \subseteq A$, $X = f^{-1}(f(X))$ — contraimaginea lui f

(3) $\forall X_1, X_2 \subseteq A$, $f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$

---

(2) $\Rightarrow$ (1). Pp. $\forall X \subseteq A$, $X = f^{-1}(f(X))$

Vrem f inj

Fie $x_1, x_2 \in A$ ai $f(x_1) = f(x_2) = y \in B$. Vrem $x_1 = x_2$

$X = \{x_1, x_2\} \subseteq A \Rightarrow$

$\{x_1, x_2\} = f^{-1}(\underbrace{f(\{x_1, x_2\})})$

$\Rightarrow \boxed{\{x_1, x_2\} = f^{-1}(\{y\})}$

$X = \{x_1\} \subseteq A$

$\{x_1\} = f^{-1}(\underbrace{f(\{x_1\})}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \underline{\{x_1\} = f^{-1}(\{y\})}$

$\text{or } f(x_2) = y \Rightarrow x_2 \underline{\in f^{-1}(\{y\})}$ $\Bigg| \Rightarrow$

$x_2 \in \{x_1\} \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f \text{ inj}$