Seminar 3

13 oct 2021

1.3.45 Fie $f: A \to B$ f.c.t. $Y_1, Y_2 \subseteq B$

(5) $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$

"$\subseteq$" Fie $a \in f^{-1}(Y_1 \cup Y_2)$

Vrem $a \in f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$

$a \in f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) \Rightarrow \exists y \in Y_1 \cup Y_2$

a.î. $f(a) = y$

$y \in Y_1 \cup Y_2 \Rightarrow y \in Y_1$ sau $y \in Y_2$

Cazul I Dc $y \in Y_1 \Rightarrow f(a) \in Y_1$

$\Rightarrow a \in f^{-1}(Y_1)$

Cazul II Analog $a \in f^{-1}(Y_2)$

$\Rightarrow$

$a \in f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$

"$\supseteq$" Fie $a \in f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$

Vrem $a \in f^{-1}(Y_1 \cup Y_2)$

$a \in f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2) \Rightarrow$

$a \in f^{-1}(Y_1)$ sau $a \in f^{-1}(Y_2)$

<u>Cazul I</u> Dc $a \in f^{-1}(Y_1) \Rightarrow$

$\underline{\exists y \in Y_1}$ a.î. $f(a) = y$

<u>Cazul II</u> Dc. $a \in f^{-1}(Y_2) \Rightarrow$

$\underline{\exists y \in Y_2}$ a.î. $f(a) = y$

Așadar $\underline{\exists y \in Y_1 \text{ sau } \exists y \in Y_2}$ a.î. $f(a) = y$

$\Rightarrow \exists y \in Y_1 \cup Y_2$ a.î. $f(a) = y$

$\Rightarrow a \in f^{-1}(Y_1 \cup Y_2)$

$\square$

1.3.48 Fie A și B mult. finite cu $|A| = n$ și $|B| = m$. Det. $|B^A| = (m^n)$

$$B^A = \{ f : A \to B \text{ funcție} \}$$

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$$

$f(a_1) \in \{b_1, \dots, b_m\} \longrightarrow$ m val pos.

$f(a_2) \in \{b_1, \dots, b_m\} \longrightarrow$ m val pos

$\dots$

$f(a_n) \in \{b_1, \dots, b_m\} \longrightarrow$ m val pos

Nr total de funcții:

$$\underbrace{m \cdot m \cdot \ldots \cdot m}_{\text{de } n \text{ ori}} = m^n$$

Metoda 2 (prin inducție după n)

$P(n)$: $|B^A| = m^n$

Pas 1: Verificăm pt $n=1$.

$P(1)$. $|B^A| = m$

$n = 1 \Rightarrow A = \{a_1\}$

$B = \{b_1, \dots, b_m\}$

$\left.\begin{array}{l} f_i : A \to B \\ f_i(a_1) = b_i \end{array}\right\}$ Avem m funcții

Pas 2 Pp $P(k)$ adev: $|B^A| = m^k$

Vrem să dem $P(k+1)$: $|B^{A'}| = m^{k+1}$

unde $A' = A \cup \{a_{k+1}\}$

$|B^A| = m^k$

$$\begin{cases} f : A' \longrightarrow B \\ \begin{cases} f|_A : A \longrightarrow B \rightsquigarrow m^k \text{ funcții pos} \\ f(a_{k+1}) \in \{b_1, \dots, b_m\} \rightsquigarrow m \text{ pos} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow |B^{A'}| = m^k \cdot m = m^{k+1}$$

$\square$

1.3.49 Fie A, B mulț. finite cu $|A| = n$ și $|B| = m$. Să se afl. nr.-ul tuturor funcțiilor injective de la A la B

$$\left(R = A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!} \right)$$

$A = \{a_1, \dots, a_n\}$ $B = \{b_1, \dots, b_m\}$

$f(a_1) \in \{b_1, \dots, b_m\} \rightsquigarrow m$ val pos.

$f(a_2) \in \{b_1, \dots, b_m\} \setminus \{f(a_1)\} \rightsquigarrow m-1$ pos.

$f(a_3) \in \{b_1, \dots, b_m\} \setminus \{f(a_1), f(a_2)\} \rightsquigarrow m-2$ pos

$\dots$

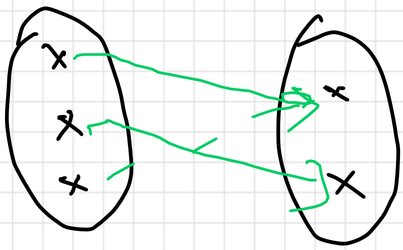
$f(a_n) \in \{b_1, \dots, b_m\} \setminus \{f(a_1), \dots, f(a_{n-1})\} \longrightarrow m-n+1$ val pos

$$\text{Total} = m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)$$

$$= \frac{m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)\cdot(m-n)(m-n-1)\cdot\ldots\cdot 1}{(m-n)(m-n-1)\cdot\ldots\cdot 1}$$

$$= \boxed{\frac{m!}{(m-n)!}} = A_m^n \quad (\text{Dacă } n \le m)$$

Dacă $n > m$, atunci Total $= 0$ □



(Nu $\exists$ f.ct. inj)

1.3.50 Fie A o mulț. finită cu $|A| = n$. Să se det nr-ul tuturor funcțiilor bijective $f : A \to A$ (adică nr-ul permutărilor lui A)

Met π 1.3.19 $\longrightarrow$ $\exists \; \dfrac{m!}{(m-n)!}$ f.ct inj.

Obs $\Rightarrow$ $n!$ fct bij.

Met I $A = \{a_1, \dots, a_n\}$

$f(a_1) \in \{a_1, \dots, a_n\} \longrightarrow n$ pos

$f(a_2) \in \{a_1, \dots, a_n\} \setminus \{f(a_1)\} \longrightarrow n-1$ pos.

...

$f(a_n) \in \{a_1, \dots, a_n\} \setminus \{f(a_1), \dots, f(a_{n-1})\} \longrightarrow 1$ pos

Total: $n!$ funcții (injective)

$(f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2)$

O f-ț inj (s. surj): o mulț finită → o mulț finită cu acelaș nr. de elem este bijectivă!

$\Rightarrow$ bijective R: $n!$

Ver. 2 pt. surj:

În cadrul algoritmului valorile ocupam cu

$f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_m)$ distincte 2 câte 2.

$\Rightarrow |\operatorname{Im} f| = m$

$\operatorname{Im} f \subseteq A$
$|A| = m$ $\Rightarrow \operatorname{Im} f = A$ $\Rightarrow$ f surj.

1.3.51 Fie B o mulț. finită cu $|B| = m$
Să se det. nr-ul tuturor submulț. lui B cu n elem.

(Indicație: $\binom{m}{n} = C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$)

$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$

Pp. $n \leq m$ (altfel am avea 0 submulț.)

Fie $C \subseteq B$, $|C| = n$
$C = \{c_1, \ldots, c_n\}$

$c_1 \in \{b_1, \dots, b_m\}$ ⇝ m mod

$c_2 \in \{b_1, \dots, b_m\} \setminus \{c_1\}$ ⇝ m - 1 mod

...

$c_n \in \{b_1, \dots, b_m\} \setminus \{c_1, \dots, c_{n-1}\}$

⇝ m - n + 1 moduri.

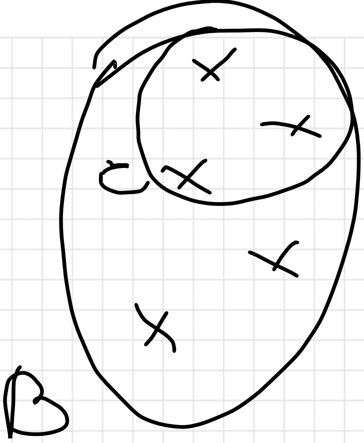
Total: $\dfrac{m!}{(m-n)!}$

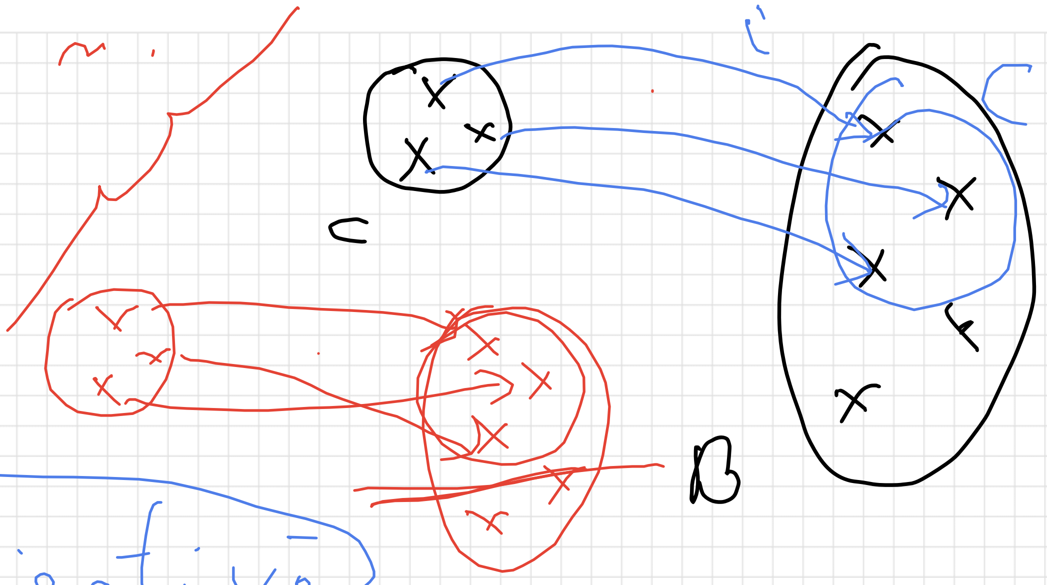
Aici am numărat de fapt și toate permutările mulț C ⇝ n!

R: $\dfrac{m!}{n!(m-n)!}$

Met II

Dc. $\boxed{C} \subseteq B \Longleftrightarrow$ funcția $i: C \to B$ de incluziune $i(x) = x$





i este injectivă

$\Rightarrow$ pt a alege funcția i avem

$i : C \longrightarrow B$ $\qquad \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$

$|C| = n$

$|B| = m$

1.3.52 Sac $\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} = 2^m$

$C_m^0 + C_m^1 + \dots + C_m^m = 2^m$

Metoda 1: inducție după m

$P(m): \sum_{i=0}^{m} C_m^i = 2^m$

Pas 1: $P(0)$: $\underbrace{C_0^0}_{\frac{0!}{0!\,(0-0)!} = 1} = \overbrace{2^0}^{1}$

Pp $P(k)$ adev

$$\boxed{\sum_{i=0}^{k} C_k^i = 2^k}$$

Dem $P(k+1)$

$$\sum_{i=0}^{k+1} C_{k+1}^i = 2^{k+1}$$ (temă)

$$C_{k+1}^i = C_k^i + C_k^{i-1}$$ (temă)

1

1 1

$1 = C_2^0$ $2 = C_2^1$ $1 = C_2^2$

$1 = C_3^0$ $3 = C_3^1$ $3 = C_3^2$ $1 = C_3^3$

Temă Met. 2 cu submulțimi.