Logică computațională

Metoda rezoluției

Este o metodă bazată pe respingere și are scopul de a verifica consistența sau inconsistența unei mulțimi de clauze (formule cu $\vee$)

Sistemul asociat rezoluției:

$Res = (\Sigma_{Res}, F_{Res}, A_{Res}, R_{Res})$

- $\Sigma_{Res} = \Sigma_p$ (mulțimea simbolurilor) $\setminus \{\wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ - alfabetul
- $F_{Res} \cup \{\square\}$ - mulțimea tuturor clauzelor care pot fi formate folosind alfabetul + clauza vidă care simbolizează inconsistența
- $A_{Res} = \emptyset$ - mulțimea axiomelor (seturi de formule care sunt acceptate ca fiind adevărate fără demonstrație)
- $R_{Res} = \{res\}$ - mulțimea regulilor de interferență (proceduri care permit deducerea de concluzii valide, ex: regula modus ponens afirmă că dacă A adv atunci dacă $AB (A \rightarrow B) \overset{\text{(deducem)}}{\dashv} B$ adv) conține.
- regula rezoluției: $A \vee l, B \vee \neg l \vdash_{res} A \vee B$, l este literal (A, B, C...)

$A, B \in F_{Res}$

Terminologie

- Clauzele $C_1 = A \vee l$, $C_2 = B \vee \neg l$, aceste clauze se spune că rezolvă, deoarece conțin doi literali opuși (l și $\neg l$)
- Notație: $C_3 = Res_l(C_1, C_2)$, C_3 s.n. rezolventul clauzelor C_1, C_2
- C_1, C_2 sunt clauze părinte
- caz particular: $C_1 = l$, $C_2 = \neg l$, $Res_l(C_1, C_2) = \square$ - inconsistentă

Obs: Rezoluția este o generalizare a regulilor modus ponens, modus tollens și a silogismului.

- modus ponens: $U, U \to V \vdash V \Rightarrow \cancel{U}, \cancel{\neg U} \vee V \vdash V$
- modus tollens: $U \to V \vdash \neg V \to \neg U \Rightarrow U \to V, \neg V \vdash \neg U$, adică

  $\Rightarrow \neg U \vee \cancel{V}, \cancel{\neg V} \vdash \neg U$
- silogismul: $U \to V, V \to Z \vdash U \to Z \Rightarrow \neg U \vee \cancel{V}, \cancel{\neg V} \vee Z \vdash \neg U \vee Z$

Algoritmul rezoluției

Date de intrare: S - o mulțime de clauze

Date de ieșire: S consistentă/inconsistentă

$S_0 = S$

$i = 0$

Repetă

@ se aleg două clauze $C_1, C_2 \in S$ care rezolvă

$C_3 = Res(C_1, C_2)$

$S_{i+1} = S_i \cup \{C_3\}$

Dacă $C_3 = \square$

Atunci Scrie "S este inconsistentă"; STOP

Altfel $i = i+1$

Sf_dacă

Până când $S_i = S_{i+1}$ // nu se mai pot deriva clauze noi

Scrie "S este consistentă"

Sfârșit algoritm

Notație:

$S \vdash_{Res} \square$ "din mulțimea S de clauze s-a derivat clauza vidă"

· Teorema de corectitudine

Dacă $S \vdash_{Res} \square$ atunci S este inconsistentă

· Teorema de completitudine

Dacă S este inconsistentă atunci $S \vdash_{Res} \square$

- Teorema de corectitudine și completitudine

  Mulțimea S este inconsistentă d.n.d. $S \vdash_{Res} \square$

Teoreme

- U este tautologie d.n.d. $FNC(\neg U) \vdash_{Res} \square$
- $U_1, U_2, \dots, U_n \vDash V$ d.n.d.

  $U_1, U_2, \dots, U_n \vdash V$ d.n.d.

  $FNC(U_1 \wedge U_2 \wedge \dots \wedge U_n \wedge \neg V) \vdash_{Res} \square$

$S_i \overset{not}{=} FNC(U_i)$, $i = \overline{1,n}$

$S_{n+1} \overset{not}{=} FNC(\neg V)$

$S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n \cup S_{n+1} \vdash_{Res} \square$

Exemplu

$$S = \{\underbrace{\neg p \vee q}_{C_1}, \underbrace{\neg p \vee r}_{C_2}, \underbrace{p}_{C_3}, \underbrace{\neg q \vee \neg r}_{C_4}\}$$

$$\begin{array}{ccccc}
C_1 \quad C_3 & & & & C_3 \quad C_2 \\
C_5 = q \quad C_4 & & & & C_6 = r \\
& C_7 = \neg r & & & \\
& & C_8 = \square \to S \text{ inconsistentă} & &
\end{array}$$

Ex:

Transformare limbaj natural în limbaj logic

Ion și-a făcut lab. $\stackrel{not.}{=} p$,
Vasile și-a făcut lab. $\stackrel{not.}{=} q$,
Gheorghe și-a făcut lab. $\stackrel{not.}{=} r$.

- Dacă Ion își face laboratorul atunci Ion sau Vasile au laboratorul făcut. $p \to p \vee q$
- Dacă Ion își face laboratorul, atunci și Vasile își face laboratorul $p \to q$
- Dacă Vasile nu-și face laboratorul, atunci Gheorghe îl va face. $\neg q \to r$
- Dacă Gheorghe nu își face laboratorul, atunci nu își face nici Ion laboratorul sau Vasile îl face. $\neg r \to \neg p \vee q$
- Știm că Gheorghe nu și-a făcut laboratorul. $\neg r$

? Vasile a făcut laboratorul. q

Obținerea mulțimilor de clauze

- $p \to p \vee q \equiv \neg p \vee p \vee q \stackrel{not.}{=} C_1$
- $p \to q \equiv \neg p \vee q \stackrel{not.}{=} C_2$
- $\neg q \to r \equiv q \vee r \stackrel{not.}{=} C_3$
- $\neg r \to \neg p \vee q \equiv r \vee \neg p \vee q \stackrel{not.}{=} C_4$
- $\neg r \stackrel{not.}{=} C_5$

$? q \xRightarrow{\text{se neagă concluzia}} \neg q \stackrel{not.}{=} C_6$

$S_1 = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$

$S_2 = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\}$

Aplicarea metodei rezoluției pt. S_1:

$S_1 = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\} =$
$= \{\neg p \vee p \vee q, \neg p \vee q, q \vee r, r \vee \neg p \vee q, \neg r\}$

$C_6 = Res_r(C_3, C_5) = q$

$\cancel{C_2 = Res_p(C_1, C_2) = \neg p \vee q}$ nu s-a obținut o clauză nouă

$\cancel{C_1 = Res_p(C_1, C_1) = \neg p \vee p \vee q}$ nu s-a obținut o clauză nouă

$\cancel{C_2 = Res_r(C_4, C_5) = \neg p \vee q}$ nu s-a obținut o clauză nouă

Abandonăm fără a ajunge la o concluzie, am constatat că avem nevoie de o strategie.
Deci nu știm încă dacă ipotezele sunt contradictorii.

Aplicarea metodei rezoluției pt. S_2:

$S_2 = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\} =$
$= \{\neg p \vee p \vee q, \neg p \vee q, q \vee r, r \vee \neg p \vee q, \neg r, \neg q\}$

$C_7 = Res_r(C_3, C_5) = q_{TCC}$

$C_8 = Res_r(C_7, C_6) = \square \Rightarrow S_2$ e inconsistentă adică, Vasile își face laboratorul

Strategia eliminării

- O mulțime S de clauze poate fi simplificată păstrând consistența/inconsistența prin:
  - Eliminarea clauzelor tautologice: $\cancel{\neg p \vee q \vee p \neg r}$
  - Eliminarea clauzelor subsumate de alte clauze:

clauza C_1 este subsumată de C_2 dacă $\exists C_3$ a.î.: $C_1 = C_2 \vee C_3$

ex. $\cancel{\neg p \vee q \vee r}$ este subsumată de $\neg p \vee q$

  - Eliminarea clauzelor care conțin literali puri: un literal pur este dacă negația sa nu apare în nici o altă clauză:

$\{\neg p \vee q, \cancel{\neg p \vee \underline{r}}, p, \cancel{\neg q \vee \underline{r}}\}$

- Dacă $C = l$ este o clauză unitate, se șterg clauzele care-l conțin pe l și literalul $\neg l$ din clauzele rămase.

$\{\cancel{\neg} p \vee q, \cancel{\neg} p \vee r, \cancel{p}, \neg q \vee \neg r, \cancel{p \vee \neg r}\} \Rightarrow \{q, r, \neg q \vee \neg r\}$

Strategia eliminării aplicată la S_1:

$S_1 = \{\neg p \vee p \vee q, \neg p \vee q, q \vee r, r \vee \neg p \vee q, \neg r\}$

- **Eliminarea clauzelor tautologice** (nu pot contribui la derivarea clauzei vide):

$S_1 = \{\neg p \vee q, q \vee r, \boldsymbol{r} \vee \boldsymbol{\neg p \vee q}, \neg r\}$

- **Eliminarea clauzelor subsumate de alte clauze din *S***: clauza C_1 este subsumată de C_2 dacă există o clauză C_3 astfel încât $C_1 = C_2 \vee C_3$:

$S_1 = \{\neg p \vee q, q \vee r, \neg r\}$

- **Eliminarea clauzelor care conțin literali puri în *S***: Un literal este pur dacă negația sa nu apare în nici o clauză din *S*:

$S_1 = \{q \vee r, \neg r\}$

$S_1 = \{\neg r\}$

$S_1 = \{\} = \varnothing$ - consistentă, deci pactul studenților este necontradictoriu

Strategia eliminării aplicată la S_2:

$S_2 = \{\neg p \vee p \vee q, \neg p \vee q, q \vee r, r \vee \neg p \vee q, \neg r, \neg q\}$

- **Eliminarea clauzelor tautologice** (nu pot contribui la derivarea clauzei vide):

$S_2 = \{\neg p \vee q, q \vee r, \boldsymbol{r} \vee \boldsymbol{\neg p \vee q}, \neg r, \neg q\}$

- **Eliminarea clauzelor subsumate de alte clauze din *S***: clauza C_1 este subsumată de C_2 dacă există o clauză C_3 astfel încât $C_1 = C_2 \vee C_3$:

$S_2 = \{\neg p \vee q, q \vee r, \neg r, \neg q\}$

- **Eliminarea clauzelor care conțin literali puri în *S***: Un literal este pur dacă negația sa nu apare în nici o clauză din *S*:

$S_2 = \{q \vee r, \neg r, \neg q\}$

- Dacă C=*l* este o **clauză unitate** din *S*, **se șterg toate clauzele *care-l conțin pe l* și *¬l din clauzele rămase***.

$S_2 = \{q, \neg q \vee \square\}$

$S_2 = \{\square\}$ – inconsistentă, deci Vasile și-a făcut laboratorul

Strategia saturării pe nivele

Date de intrare: S - o mulțime de clauze

Date de ieșire: S consistentă sau inconsistentă

// se generează mulțimile $S^0, S^1, \dots, S^k$ ce reprezintă nivele

Repetă

$K = K + 1$

$S^k = \{ Res(C_1, C_2) \mid C_1 \in S^0 \cup S^1 \cup \dots \cup S^{k-1}, C_2 \in S^{k-1} \}$

$S^k = S^k \setminus (S^0 \cup S^1 \cup \dots \cup S^{k-1})$

Până când $\square \in S^k$ sau $S^k = \emptyset$

Dacă $\square \in S^k$

Atunci Scrie "S este inconsistentă"

Altfel Scrie "S este consistentă"

Sfârșit_dacă

Sfârșit_algoritm

Strategia saturării pe nivele aplicată la S_2 (1):

$S_2 = \{ C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 \} =$
$= \{\neg p \vee p \vee q, \neg p \vee q, q \vee r, r \vee \neg p \vee q, \neg r, \neg q\}$

$C_2 = Res_p (C_1, C_2) = \neg p \vee q$
$Res_? (C_1, C_3)$ NU
$C_4 = Res_p (C_1, C_4) = \neg p \vee q \vee r$
$Res_? (C_1, C_5)$ NU
$C_7 = Res_q (C_1, C_6) = \neg p \vee p$
$Res_? (C_2, C_3)$ NU
$Res_? (C_2, C_4)$ NU
$Res_? (C_2, C_5)$ NU
$C_8 = Res_q (C_2, C_6) = \neg p$
$Res_? (C_3, C_4)$ NU
$C_9 = Res_r (C_3, C_5) = q$
$C_{10} = Res_q (C_3, C_6) = r$
$C_2 = Res_r (C_4, C_5) = \neg p \vee q$
$C_{11} = Res_q (C_4, C_6) = r \vee \neg p$
$Res_? (C_5, C_6)$ NU

$S_2^1 = \{C_7, C_8, C_9, C_{10}, C_{11}\} = \{\neg p \vee p, \neg p, q, r, r \vee \neg p\}$

Strategia saturării pe nivele aplicată la S_2(2):

$S_2^0 = \{ C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 \} =$
$= \{\neg p \vee p \vee q, \neg p \vee q, q \vee r, r \vee \neg p \vee q, \neg r, \neg q\}$
$S_2^1 = \{C_7, C_8, C_9, C_{10}, C_{11}\} =$
$= \{\neg p \vee p, \neg p, q, r, r \vee \neg p\}$

$C_1 = Res_p (C_7, C_1) = \neg p \vee p \vee q$
$C_2 = Res_p (C_7, C_2) = \neg p \vee q$
$Res_? (C_7, C_3)$ NU
$C_4 = Res_p (C_7, C_4) = r \vee \neg p \vee q$
$Res_? (C_7, C_5)$ NU
$Res_? (C_7, C_6)$ NU
$C_8 = Res_p (C_7, C_8) = \neg p$
$Res_? (C_7, C_9)$ NU
$Res_? (C_7, C_{10})$ NU
$C_{11} = Res_p (C_7, C_{11}) = r \vee \neg p$
$C_2 = Res_p (C_8, C_1) = \neg p \vee q$
$Res_? (C_8, C_2)$ NU
$Res_? (C_8, C_3)$ NU
$Res_? (C_8, C_4)$ NU
$Res_? (C_8, C_3)$ NU
$Res_? (C_8, C_4)$ NU
$Res_? (C_8, C_5)$ NU
$Res_? (C_8, C_6)$ NU
$Res_? (C_8, C_9)$ NU
$Res_? (C_8, C_{10})$ NU
$Res_? (C_8, C_{11})$ NU
$Res_? (C_9, C_1)$ NU
$Res_? (C_9, C_2)$ NU
$Res_? (C_9, C_3)$ NU
$Res_? (C_9, C_4)$ NU
$Res_? (C_9, C_5)$ NU
$C_{12} = Res_p (C_9, C_6) = \square$
$\Rightarrow S_2$ este inconsistentă

Strategia mulțimii suport

- se evită aplicarea rezoluției asupra clauzelor dintr-o submulțime consistentă a mulțimii inițiale de clauze, deoarece rezolvenții sunt irelevanți în procesul de derivare a $\square$.

Ex: $S = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$, unde:

$C_1 = p \vee q$

$C_2 = \neg p \vee r$

$C_3 = \neg r$

$C_4 = \neg p$

Pașii:

1. Stabilim mulțimea suport Y, alegem concluzia pe care vrem să o demonstrăm, de exemplu că $\neg p$ (din C_4) duce la o contradicție, atunci $Y = \{C_4\}$, restul clauzelor formează $S_1 = \{C_1, C_2, C_3\}$
2. Rezoluția nu se aplică între clauzele care aparțin lui S_1, deoarece sunt considerate deja consistente
   Rezoluția ar trebui să conțină cel puțin o clauză din Y

Pas 1: $C_5 = Res(C_1, C_4) = q$

Pas 2: $C_6 = Res(C_5, C_2) = r$

Pas 3: $C_7 = Res(C_6, C_3) = \square \Rightarrow S$ inconsistent