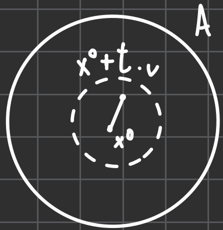
Analiza

1. Derivate parțiale și diferențiale

În cadrul paragrafului considerăm $A \subseteq \mathbb{R}^m$ mulțime deschisă



$\forall\, x_0 \in A : \exists\, r > 0$ a.î. $B(x^0, r) \subseteq A$

$\Rightarrow \forall\, v \in \mathbb{R}^m : \underbrace{x^0}_{\text{un punct fix din mulțimea } A} + \overbrace{\underbrace{t}_{\text{mărimea deplasării în direcția } v} \cdot \underbrace{v}_{\text{vector arbitrar din spațiul } \mathbb{R}^m \text{ (rep. direcția în care ne deplasăm)}}}^{\text{o mică deplasare față de punctul } x_0 \text{ în direcția } v} \in A$ pentru $t \in \mathbb{R}$, $|t| \ll 1$

t este foarte mic aproape de 0

Def: Fie $f = f(x_1, \ldots, x_m) : A \to \mathbb{R}$ o funcție, $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0) \in A$ un punct și $i \in \{1, \ldots, m\}$

a) Dacă există limita

$$(1) \quad \lim_{x_i \to x_i^0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_m^0) - f(x_1^0, \ldots, x_m^0)}{x_i - x_i^0}$$

ea se numește derivata parțială a lui f în x^0 în raport cu variabila x_i. Se notează cu $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$ sau $f'_{x_i}(x_0)$

b) Dacă limita (1) există și este un număr finit atunci spunem că f este derivabilă parțial în x^0 în raport cu variabila x_i

c) Dacă f este derivabilă parțial în punctul x^0 în raport cu fiecare variabilă $x_1, \ldots, x_m$ atunci spunem că f este derivabilă parțial în x^0.

Notând $x_i - x_i^0 = t$ limita (1) se rescrie astfel

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^0, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, \dots, x_m^0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(x^0 + t\cdot e^i) - f(x^0)}{t}$$, unde $e^i = (0, \dots, 0, \underset{\uparrow}{1}, 0, \dots, 0)$

Considerăm funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$g(x) = f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^0, \dots, x_m^0)$

$\Rightarrow g'(x_i^0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{g(x_i^0 + t) - g(x_i^0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$

<u>Obs</u>: Calculul derivatei în raport cu o variabilă se poate efectua utilizând regulile de derivare păstrând celelalte variabile ale funcției ca parametrii constanți.

<u>Ex</u>: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = (x_1)^2 \cdot x_2 + x_1$

$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 \cdot x_2 + 1$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = (x_1)^2$

<u>Def</u>: Fie $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție, $x^0 \in A$ și $v \in \mathbb{R}^m$. Dacă există limita:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x^0 + t\cdot v) - f(x^0)}{t}$$

ea se numește derivata lui f în x^0 după direcția vectorului v și se notează cu $f'_v(x^0)$. Dacă limita este finită atunci spunem că f este derivabilă în x^0 după direcția vectorului v.

Se observă $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = f'_{e_i}(x^0)$, $i=\overline{1,m}$

<u>Obs</u>: Derivatele parțiale ale unei funcții sunt cazuri particulare ale derivatei după direcția unui vector, anume după direcția vectorilor canonici.

<u>Def</u>: Fie $f: A \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă într-un punct $x^0 \in A$.

a) Vectorul

$$\nabla f(x^0) \overset{def}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(x^0)\right) \in \mathbb{R}^m$$

se numește gradientul funcției f în x^0

b) Aplicația liniară $df(x^0): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definită prin

$$df(x^0)(u) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) \cdot u_i \quad , \forall\, u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$$

se numește diferențiala funcției f în x^0 (de argument u)

<u>Obs</u>: $df(x^0)(u) = \nabla f(x^0) \cdot u \quad , \forall\, u \in \mathbb{R}^m$

Interpretare geometrică:

Fie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f = f(x, y)$ și $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$S: z = f(x, y)$ este ecuația unei suprafețe în $\mathbb{R}^3$

$P: z - f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0)$ este ecuația planului tangent la suprafața S în punctul $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

Ex: Fie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{(x_1)^2 \cdot x_2}{(x_1)^4 + (x_2)^2}, & (x_1, x_2) \neq O_2 \\ 0, & (x_1, x_2) = O_2 \end{cases}$$

f nu este continuă în O_2 deoarece $\nexists \lim\limits_{(x_1, x_2) \to (0,0)} f(x_1, x_2)$, dar f este derivabilă parțial în O_2, chiar derivabilă după orice direcție în acest punct.

Obs: Derivabilitatea parțială nu reprezintă o extindere satisfăcătoare a noțiunii de derivabilitate de pe axa reală.

Def: O funcție $f: A \to \mathbb{R}$ se numește de clasă C^1 în punctul $x^0 \in A$ dacă:

1°. $\exists\, r > 0$ a.î. f este derivabilă parțial în orice punct al mulțimii $B(x^0, r) \cap A$

2°. Funcțiile $\frac{\partial f}{\partial x_i} : B(x^0, r) \cap A \to \mathbb{R}$ sunt continue în x^0, $\forall\, i = \overline{1,m}$

<u>Prop</u>: Dacă $f : A \to \mathbb{R}$ este o funcție de clasă C^1 în punctul $x^0 \in A$ atunci au loc afirmațiile:

1°. f este continuă în x^0

2°. f este derivabilă după orice direcție în x^0 și au loc

$\forall\, v \in \mathbb{R}^m$, $f'_v(x^0) = df(x^0)(v)$

$\boxed{T}$ (derivarea parțială a funcțiilor compuse)

Fie $m, p \in \mathbb{N}^*$, $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $B \subseteq \mathbb{R}^p$ mulțimi deschise, $x^0 \in A$, $f = (f_1, \dots, f_p) : A \to \mathbb{R}^p$ o funcție vectorială având proprietățile $f(A) \subseteq B$ și $f_1, \dots, f_p$ sunt funcții de clasă C^1 în punctul x^0, iar $g : B \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^1 în punctul $u^0 = f(x^0)$.

Atunci funcția compusă $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ este de clasă C^1 în x^0 și au loc formula

$$(*) \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(g \circ f)(x^0) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial u_k}(f(x^0)) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x^0), \quad i = \overline{1,m}$$

unde $f = f(x_1, \dots, x_m)$ și $g = g(u_1, \dots, u_p)$

Def. Cu notațiile din teorema anterioară, matricea

$$J(f)(x^0) \stackrel{\text{not}}{=\!=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x^0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_m}(x^0) \end{pmatrix}$$

se numește matricea Jacobi a funcției f în punctul x^0.

Obs: Formula (*) se rescrie matricial astfel:

$$\nabla(g \circ f)(x^0) = \nabla g(f(x^0)) \cdot J(f)(x^0)$$

Caz particular $m = p = 1$: $(g \circ f)'(x^0) = g'(f(x^0)) \cdot f'(x^0)$

Def: Fie $f: A \to \mathbb{R}$ o funcție, $x^0 \in A$ și $i, j \in \{1, \dots, m\}$

a) Dacă $\exists\, r > 0$ a.î. f este derivabilă parțial în raport cu variabila x_i în orice punct al mulțimii $B(x^0, r) \cap A$, iar funcția $\frac{\partial f}{\partial x_i}: B(x^0, r) \cap A \to \mathbb{R}$ este la rândul ei derivabilă parțial în raport cu variabila x_j în punctul x^0, atunci spunem că f este de două ori derivabilă parțial în raport cu variabilele (x_i, x_j) în punctul x^0 și notăm

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x^0) \overset{not}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^0) = f''_{x_i x_j}(x^0)$$

b) Spunem că f este de două ori derivabilă parțial în punctul x^0 dacă toate cele m^2 derivate parțiale de ordinul doi $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, $i, j = \overline{1, m}$, există și sunt finite în x^0.

c) Spunem că f este de clasă C^2 în punctul x^0 dacă $\exists\, r > 0$ a.î. f este de două ori derivabilă parțial în orice punct al mulțimii $B(x^0, r) \cap A$, iar funcțiile $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} : B(x^0, r) \cap A \to \mathbb{R}$ sunt continue în x^0, $\forall\, i, j = \overline{1, m}$.

Notații: $i \neq j$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^0)$ - derivata parțială mixtă în x^0

$i = j$, $$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(x^0) \overset{not}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x^0) = f''_{x_i^2}(x^0)$$

<u>Ex</u>: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = (x_1)^2 \cdot x_2 + x_1$

$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 x_2 + 1$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = (x_1)^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = (2x_1 x_2 + 1)'_{x_1} = 2x_2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = ((x_1)^2)'_{x_2} = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = \left(\left((x_1)^2 \cdot x_2 + x_1\right)'_{x_1}\right)'_{x_2} = (2x_1 x_2 + 1)'_{x_2} = 2x_1$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) = (((x_1)^2 \cdot x_2 + x_1)'_{x_2})'_{x_1} = (x_1{}^2)'_{x_1} = 2x_1$$

$\boxed{T}$ (criteriul lui Schwarz)

Dacă $f : A \to \mathbb{R}$ este o funcție de clasă C^2 în punctul $x^0 \in A$, atunci

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0), \quad \forall\, i,j = \overline{1,m},\ i \neq j$$

Def. Fie $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă parțial într-un punct $x^0 \in A$.

a) Funcția $d^2 f(x^0) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definită prin

$$d^2 f(x^0)(u) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^0) \cdot u_i \cdot u_j, \quad \forall\, u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$$

se numește diferențiala de ordinul doi a funcției f în x^0.

b) Matricea pătratică

$$H(f)(x^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x^0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1}(x^0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x^0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x^0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2}(x^0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m}(x^0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m}(x^0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}(x^0) \end{pmatrix}$$

Se numește matricea hessiană a funcției f în punctul x^0.

Obs. În ipotezele criteriului lui Schwarz avem că matricea $H(f)(x^0)$ este simetrică și diferențiala de ordinul doi devine

$$d^2f(x^0)(u) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x^0)\cdot u_i^2 + 2\cdot \sum_{1\le i<j\le m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^0)\cdot u_i \cdot u_j$$

Cazuri particulare:

$f = f(x,y)$, $(u_1,u_2)\in \mathbb{R}^2$

$$d^2f(x,y)(u_1,u_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\cdot u_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\cdot u_2^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\cdot u_1\cdot u_2$$

$f = f(x,y,z)$, $(u_1,u_2,u_3)\in \mathbb{R}^3$

$$d^2f(x,y,z)(u_1,u_2,u_3) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z)\cdot u_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z)\cdot u_2^2 +$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z)\cdot u_3^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z)\cdot u_1\cdot u_2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z)\cdot u_1\cdot u_3$$

$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z)\cdot u_2\cdot u_3$$