Analiza

FUNCȚII REALE DE VARIABILĂ REALĂ

1. Limită și continuitate

$A \subseteq R$ nevidă, $x \in A \xmapsto{f} f(x) \in \mathbb{R}$, $f : A : \mathbb{R}$

Def: Spunem că elementul $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ este:

a) punct de acumulare al mulțimii A dacă $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ șir de numere din $A \setminus \{x_0\}$ cu proprietatea că $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$

În acest caz scriem $x_0 \in A'$ (are alte puncte din mulțime în jurul său. ex: $\forall a \in (0,1)$ este punct de acumulare)

Notație: A' - mulțimea punctelor de acumulare ale lui A

b) punct izolat al mulțimii A dacă $x_0 \in A \setminus A'$ (este un punct care nu are alte puncte în vecinătatea lui. ex: $B = \{1, 2\}$, 1,2 puncte izolate)

Ex: 1) $A = (a, b)$

$a \in A'$ deoarece șirul $a + \frac{b-a}{2n} \in A, \forall_{n \geq 1}$ și $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$

Analog $b \in A'$, deci $A' = [a, b]$

2) $A = \mathbb{N}$

$x_n = n \in A$, $\forall n \in \mathbb{N}$ și $\lim\limits_{n \to x_n} = +\infty$

$\forall n \in \mathbb{N}$, n - punct izolat al mulțimii $\mathbb{N} \Rightarrow A' = \{+\infty\}$

Def: (limita unei funcții într-un punct)

Fie $f: A \to \mathbb{R}$ o funcție, $l \in \overline{\mathbb{R}}$ și $x_0 \in A'$. Spunem că l este limita funcției f în punctul x_0 dacă $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ șir de numere din $A \setminus \{x_0\}$ cu proprietatea $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ avem $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = l$

Notație: $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

Ex: Fie $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$ partea întreagă a lui $x \in \mathbb{R}$. Arătăm că $\forall p \in \mathbb{Z}$, $\nexists \lim_{x \to p} [x]$

$x_0 = p$, $x_n = p + \frac{1}{n}$

$y_n = p - \frac{1}{n}$, $\forall n \geq 2 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} y_n = p$ și

$$\lim_{n \to \infty} [x_n] = \lim_{n \to \infty} p = p \neq p-1 = \lim_{n \to \infty} (p-1) = \lim_{n \to \infty} [y_n]$$

Def: Fie $f: A \to \mathbb{R}$ o funcție și $x_0 \in A \cap A'$. Spunem că

a) f este continuă în punctul x_0 dacă $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

b) f este continuă pe mulțimea A dacă f continuă în $\forall x \in A$

Ex: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = [x]$

f este continuă pe $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ și discontinuă pe $\mathbb{Z}$

Def: Fie $f: A \to \mathbb{R}$ o funcție și $f(A) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists\, x \in A$ a.î. $f(x) = y\}$ imaginea funcției. Spunem că

a) f este mărginită inferior, mărginită superior, respectiv mărginită dacă mulțimea $f(A)$ (mulțimea tuturor valorilor pe care le poate lua y) are această proprietate

b) f își atinge extremele pe A dacă $\exists\, x_1, x_2 \in A$ a.î. $f(x_1) = \inf(f(A))$ și $f(x_2) = \sup(f(A))$

În acest caz putem scrie:

$f(x_1) = \min f(A)$ și $f(x_2) = \max f(A)$ numite extremele funcției

$\boxed{T}$ (Weierstrass) Dacă $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă pe $[a,b]$ atunci au loc afirmațiile:

1°. f este mărginită

2°. f își atinge extremele pe $[a,b]$

2. Derivabilitate

Def: Fie funcția $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ și $x_0\in(a,b)$. Spunem că

a) f are derivată în punctul x_0 dacă

$\exists \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \overset{not}{=} f'(x_0)\in\overline{\mathbb{R}}$

numită derivata lui f în x_0

b) f este derivabilă în punctul x_0 dacă f are derivată în punctul x_0 și $f'(x_0)\in\mathbb{R}$

c) f este derivabilă pe (a,b) dacă f este derivabilă în $\forall x\in(a,b)$

<u>Ex:</u> $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x_0=0$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{3}\,2}}}=\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}=+\infty,\ f'(0)\notin\mathbb{R}$$

<u>Obs:</u>

Derivata unei funcții într-un punct reprezintă panta tangentei la graficul funcției în acel punct.

- ecuația dreptei prin (x_0, y_0)

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

m = panta dreptei

- ecuația tangentei la grafic în punctul $(x_0, f(x_0))$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0), \quad m = f'(x_0)$$

<u>Prop</u>: Orice funcție derivabilă într-un punct este continuă în acel punct. Reciproca nu este adevărată.

<u>Dem</u>: Fie $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ funcție derivabilă în $x_0 \in (a,b)$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to 0} (f(x) - f(x_0)) + f(x_0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$$

$$+ f(x_0) = f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0) \Rightarrow f \text{ continuă în } x_0.$$

<u>Def</u>: Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ mulțime nevidă, $f: A \to \mathbb{R}$ o funcție și $x_0 \in A$

Spunem că:

a) x_0 este punct de minim (local) al lui f dacă $\exists\ \delta > 0$

a.î. $\forall\ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A : f(x_0) \leq f(x)$

b) x_0 este punct de maxim (local) al lui f dacă $\exists\ \delta > 0$

a.î. $\forall\, x \in (x_0 - \delta,\, x_0 + \delta) \cap A : f(x_0) \geq f(x)$

c) x_0 este punct de extrem (local) al lui f dacă este punct de minim sau maxim (local).

$\boxed{T}$ (Fermat). Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție. Dacă

i) $x_0 \in [a,b]$

ii) f are derivată în x_0

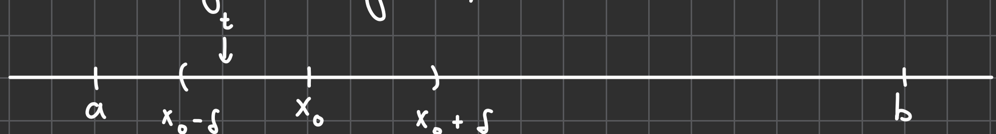
iii) x_0 este punct de extrem

atunci $f'(x_0) = 0$

Dem: Considerăm x_0 punct de minim local

$x_0 \in (a,b) \Rightarrow \exists\, \delta > 0$ a.î. $a < x_0 - \delta < x_0 < x_0 + \delta < b$ și

$$f(x_0) \leq f(x), \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta,\, x_0 + \delta)$$



$$\left.\begin{array}{l} \forall\, t \in (x_0 - \delta,\, x_0) : \dfrac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} \leq 0 \Rightarrow \lim\limits_{t \nearrow x_0} \dfrac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} \leq 0 \\[2ex] \forall\, t \in (x_0,\, x_0 + \delta) : \dfrac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} \geq 0 \Rightarrow \lim\limits_{t \nearrow x_0} \dfrac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

$\boxed{T}$ (Rolle) Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție. Dacă

i) f continuă pe $[a,b]$

ii) f derivabilă pe (a,b)

iii) $f(a)=f(b)$

atunci $\exists\, x_0\in(a,b)$ a.î. $f'(x_0)=0$

Dem: f continuă pe $[a,b] \Rightarrow f$ își atinge extremele pe $[a,b]$

$\Rightarrow \exists\, x_1, x_2 \in [a,b]$ a.î. $f(x_1)=\min f[a,b]$ și $f(x_2)=\max f[a,b]$

x_1, x_2 sunt puncte de extrem (global)

Distingem cazurile:

I. $x_1\in(a,b) \Rightarrow f'(x_1)=0$ și alegem $x_0=x_1$

II $x_2\in(a,b)\Rightarrow f'(x_2)=0$ și alegem $x_0=x_2$

III $x_1,x_2\notin(a,b) \Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} x_1,x_2\in\{a,b\} \\ f(a)=f(b)\end{array}\right\} \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow f$ este

constantă pe $[a,b] \Rightarrow f'(x_0) \Rightarrow f'(x_0)=0,\ \forall\, x_0\in(a,b)$

$\boxed{T}$ (teorema de medie a lui Lagrange)

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție. Dacă

i) f continuă pe $[a, b]$

ii) f derivabilă pe (a, b)

atunci $\exists\ x_0 \in (a, b)$ a.î. $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Dem:

Arătăm că funcția $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot x$,

$\forall\ x \in [a, b]$ satisface ipotezele teoremei lui Rolle.

g este continuă pe $[a, b]$ și derivabilă pe (a, b)

$$g(a) = g(b) = \frac{b \cdot f(a) - a \cdot f(b)}{b - a}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \exists\ x_0 \in (a, b) \text{ a.î. } g'(x_0) = 0 \\ &g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \end{aligned}\right\} \Rightarrow f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$