Algebra

Seminar 11

3.2.40. Se consideră în $\mathbb{R}^3$ lista de vectori $v = [v_1, v_2, v_3]^t$. Folosind două metode (definiția bazei, respectiv lema substituției) să se găsească $a \in \mathbb{R}$ a.î. V este o bază a lui $\mathbb{R}^3$, unde:

(1) $v_1 = (1, -2, 0)$; $v_2 = (2, 1, 1)$, $v_3 = (0, a, 1)$

Soluție

liniar independența este suficientă

(1) $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$

$\alpha_1 \cdot (1, -2, 0) + \alpha_2 \cdot (2, 1, 1) + \alpha_3 \cdot (0, a, 1) = (0, 0, 0)$

$(\alpha_1, -2\alpha_1, 0) + (2\alpha_2, \alpha_2, \alpha_2) + (0, a\alpha_3, \alpha_3) = (0, 0, 0)$

$(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 0, -2\alpha_1 + \alpha_2 + a\alpha_3, 0 + \alpha_2 + \alpha_3) = (0, 0, 0)$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 0 = 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + a\alpha_3 = 0 \\ 0 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{sistemul} = A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dacă $\det A \neq 0 \Rightarrow$ sistemul are doar soluția $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - 0 - a + 4 = 5 - a \neq 0$$

$$a \neq 5 \Rightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & a \end{matrix}$$

· Lema substituției

Fie $b = [b_1, b_2, \ldots, b_n]^t$ o bază a K-spațiului vectorial V și $v \in V$ cu coordonatele $[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$ în raport cu baza b. ($v = \lambda_1 \cdot b_1 + \lambda_2 \cdot b_2 + \ldots + \lambda_n \cdot b_n$)

Considerăm o listă de vectori $b' = [b_1, \ldots, v, \ldots, b_n]$ care rezultă din v prin înlocuirea vectorului b_i cu v.

Atunci:

(a) b' este bază dacă $\lambda_i \neq 0$

(b) Dacă b' este bază și $x \in V$ are coordonatele $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ în raport cu b și $[x'_1, x'_2, \ldots, x'_n]$ în raport cu b', atunci:

$$\boxed{\begin{cases} x'_i = \lambda_i^{-1} \cdot x_i \\ x'_j = \lambda_i^{-1} (\lambda_i x_j - \lambda_j x_i), \; j \neq i \end{cases}}$$

$v_1 = (1, -2, 0)$; $v_2 = (\underset{x_1}{2}, \underset{x_2}{1}, \underset{x_3}{1})$; $v_3 = (0, a, 1)$

$v_1 = \underbrace{1}_{\alpha_1} \cdot e_1 + \underbrace{(-2)}_{\alpha_2} \cdot e_2 + \underbrace{0}_{\alpha_3} \cdot e_3$

$\alpha_1 = 1 \neq 0 \Rightarrow b' = (v_1, e_2, e_3)$ este o bază în $\mathbb{R}^3$

Coordonatele lui v_2 în baza b':

$x_1' = \alpha_1^{-1} \cdot x_1 = \frac{1}{1} \cdot x_1 = 2$

$x_2' = \alpha_1^{-1} \cdot (\alpha_1 \cdot x_2 - \alpha_2 \cdot x_1) = 1 \cdot (1 + 4) = 5$

$x_3' = \alpha_1^{-1} \cdot (\alpha_1 \cdot x_3 - \alpha_3 \cdot x_1) = 1 \quad (1 - 0) = 1$

$v_2 = (2, 5, 1) = \underbrace{2}_{\alpha_1} \cdot v_1 + \underbrace{5}_{\alpha_2} \cdot e_2 + \underbrace{1}_{\alpha_3} \cdot e_3$

$\alpha_2 = 5 \neq 0 \Rightarrow b'_2 = (v_1, v_2, e_3)$ este o bază în $\mathbb{R}^3$

Coordonatele lui v_3 în baza b'

$x_1' = \alpha_1^{-1} \cdot x_1 = \frac{1}{1} \cdot 0 = 0$

$x_2' = \alpha_1^{-1} \cdot (\alpha_1 \cdot x_2 - \alpha_2 \cdot x_1) = \frac{1}{1} \cdot (1 \cdot a - (-2) \cdot 0) = a$

$x_3' = \alpha_1^{-1} \cdot (\alpha_1 \cdot x_3 - \alpha_3 \cdot x_1) = \frac{1}{1} \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) = 1$

$v_3 = (\underbrace{0}_{x_1} \cdot v_1, \underbrace{a}_{x_2} \cdot e_2, \underbrace{1}_{x_3} \cdot e_3)$

Coordonatele lui v_3 în baza b_2'

$$x_1' = \lambda_2^{-1} \cdot (\lambda_2 \cdot x_1 - \lambda_1 \cdot x_2) = \frac{1}{5} \cdot (5 \cdot 0 - 2 \cdot a) = -\frac{2a}{5}$$

$$x_2' = \lambda_2^{-1} \cdot x_2 = \frac{a}{5}$$

$$x_3' = \lambda_2^{-1} \cdot (\lambda_2 \cdot x_3 - \lambda_3 \cdot x_2) = \frac{1}{5} \cdot (5 \cdot 1 - 1 \cdot a) = \frac{5-a}{5}$$

$$v_3 = -\frac{2a}{5} \cdot v_1 + \frac{a}{5} \cdot v_2 + \frac{5-a}{5} \cdot e_3$$

$$\frac{5-a}{5} \neq 0 \Rightarrow 5 - a \neq 0$$
$$a \neq 5 \Rightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$$

3.2.41

Să se arate că $b = [b_1, b_2, b_3, b_4]^t$, unde $b_1 = [1, 2, -1, 2]$, $b_2 = [1, 2, 1, 4]$, $b_3 = [2, 3, 0, -1]$ și $b_4 = [1, 3, -1, 0]$ este o bază a lui $\mathbb{R}^4$ și să se determine coordonatele lui $x = [2, 3, 2, 10]$ în raport cu acea bază

Soluție

$$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 + \lambda_4 b_4 = 0 \text{ d.n.d } \lambda_i, i = \overline{1,4} = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[C_4 = C_4 + C_2]{C_1 = C_1 + C_2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & -1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$\xlongequal[\text{după linia } 3]{\text{dezvoltare}} 1 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 6 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot (24 - 8 + 60 - 36 +$$

$$\begin{matrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{matrix}$$

$$+ 10 - 32) = -18 \neq 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} \text{rang } A = 4 \\ \dim \mathbb{R}^4 = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow b \text{ este bază în } \mathbb{R}^4$$

$X = (2, 3, 2, 10)$

$(2, 3, 2, 10) = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 + \alpha_4 b_4 =$

$$= \alpha_1(1,2,-1,2)+\alpha_2(1,2,1,4)+\alpha_3(2,3,0,-1)+\alpha_4(1,3,-1,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4 = 2 \\ 2\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+3\alpha_4 = 3 \\ -\alpha_1+\alpha_2+0\cdot\alpha_3-\alpha_4 = 2 \\ 2\alpha_1+4\alpha_2-\alpha_3+0\cdot\alpha_4 = 10 \end{cases}$$

, $\det A \neq 0 \Rightarrow$ sistem compatibil determinat (Cramer)

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\Delta\alpha_1}{\det A} = \frac{-18}{-18} = 1 \\ \alpha_2 &= \frac{\Delta\alpha_2}{\det A} = \frac{-36}{-18} = 2 \\ \alpha_3 &= \frac{\Delta\alpha_3}{\det A} = 0 \\ \alpha_4 &= \frac{\Delta\alpha_4}{\det A} = \frac{18}{-18} = -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = (\underset{\alpha_1}{\underset{\downarrow}{1}}, \underset{\alpha_2}{\underset{\downarrow}{2}}, \underset{\alpha_3}{\underset{\downarrow}{0}}, \underset{\alpha_4}{\underset{\downarrow}{-1}}) \text{ în baza } b$$

$$\Delta\alpha_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 10 & 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \ldots = -18 \qquad \Delta\alpha_3 = 0$$

...

$$\Delta\alpha_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \ldots = -36 \qquad \Delta\alpha_4 = 18$$