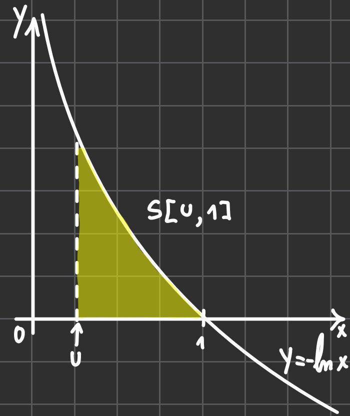
Analiza

7. Integrale improprii



Ex: $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=-\ln x$

$S(0,1]=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x\leq 1,\ 0\leq y\leq f(x)\}$

nemărginită, $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x)=+\infty$

aria $S(0,1]=\lim\limits_{u\searrow 0}$ aria $S[u,1]=$

$=\lim\limits_{u\searrow 0}\int_u^1(-\ln x)\,dx=\lim\limits_{u\searrow 0} -x\ln x\Big|_u^1-\int_u^1 -x\cdot\frac{1}{x}\,dx=\lim\limits_{u\searrow 0} x-x\ln x\Big|_u^1=$

$f'=-1 \quad f=-x$

$g=\ln x \quad g'=\frac{1}{x}$

$=\lim\limits_{u\searrow 0}(1-u-\underbrace{u\ln u}_{\to 0})=1 \Rightarrow S(0,1]$ nemărginită dar de arie finită.

Obs: Teoria integrării poate fi extinsă și la funcții definite pe intervale necompacte. Astfel de intervale fie nu sunt mărginite, fie nu sunt închise.

$a,b\in\mathbb{R}$

interval compact: $[a,b]$

intervale necompacte:
- Tipul I: $[a,b)$, $[a,+\infty)$
- Tipul II: $(a,b]$, $(-\infty,b]$
- Tipul III: (a,b), $(a,+\infty)$, $(-\infty,b)$, $(-\infty,+\infty)$

Def: Dacă $I \subseteq \mathbb{R}$ este un interval, spunem că funcția $f: I \to \mathbb{R}$ este local integrabilă pe I dacă f este integrabilă Riemann pe orice subinterval compact $[u, v] \subseteq I$.

Def: a) Fie $-\infty < a < b \leq +\infty$ și $f: [a, b) \to \mathbb{R}$ o funcție local integrabilă pe $[a, b)$. Limita

$$\lim_{v \nearrow b} \int_a^v f(x)\, dx \qquad (1)$$

se numește integrala improprie a lui f pe $[a, b)$ și se notează cu $\int_a^{b-0} f(x)\, dx$

b) Fie $-\infty \leq a < b < +\infty$ și $f: (a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție local integrabilă pe $(a, b]$. Limita

$$\lim_{u \searrow a} \int_u^b f(x)\, dx \qquad (2)$$

se numește integrala improprie a lui f pe $(a, b]$ și se notează cu $\int_{a+0}^{b} f(x)\, dx$

c) Fie $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ și $f: (a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție local integrabilă pe (a, b). Limita

$$\lim_{u \searrow a} \int_u^c f(x)\, dx + \lim_{v \nearrow b} \int_c^v f(x)\, dx, \quad c \in (a, b) \qquad (3)$$

se numește integrala improprie a lui f pe (a,b) și se notează cu $\int_{a+0}^{b-0} f(x)\,dx$

d) O integrală improprie este convergentă dacă limita corespunzătoare există și este finită.

e) O integrală improprie care nu este convergentă se numește divergentă.

Obs: a) Dacă limita (3) există atunci valoarea sa nu depinde de alegerea punctului intermediar $c \in (a,b)$.

b) Studiul integralelor de tipul (3) se reduce la studiul integralelor de tipul (1) și (2).

c) Studiul integralelor de tipul (2) se reduce la studiul integralelor de tipul (1):

$$\int_{a+0}^{b} f(x)\,dx = \lim_{u \searrow a} \int_{u}^{b} f(x)\,dx \overset{v=-u}{=} \lim_{v \nearrow -a} \int_{-v}^{b} f(x)\,dx = \lim_{v \nearrow -a} \int_{b}^{-v} (-f(x))\,dx$$

$$\underset{x=-t}{=} \lim_{v \nearrow -a} \int_{-b}^{v} f(-t)\,dt = \int_{-b}^{-a-0} f(-t)\,dt$$

Ex: a) Calculați $\int_{a}^{b-0} \frac{1}{(b-x)^p}$, $p \in \mathbb{R}$

$\underline{\text{Caz } p \neq 1}$, $\lim\limits_{v \nearrow b} \int_a^v \frac{1}{(b-x)^p} dx = \lim\limits_{v \nearrow b} \int_a^v (b-x)^{-p} dx = \lim\limits_{v \nearrow b} - \frac{(b-x)^{-p+1}}{-p+1} \Big|_a^v =$

$$= \lim_{v \nearrow b} - \left[\frac{(b-v)^{-p+1} - (b-a)^{-p+1}}{-p+1} \right] = \lim_{v \nearrow b} \frac{1}{p-1} \cdot \left[\underline{(b-v)^{-p+1}} - (b-a)^{-p+1} \right]$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-p} (b-a)^{1-p}, & p < 1 \\ +\infty, & p > 1 \end{cases}$$

$\underline{\text{Caz } p = 1}$, $\lim\limits_{v \nearrow b} \int_a^v \frac{1}{b-x} dx = \lim\limits_{v \nearrow b} - \int_a^v \frac{1}{t} dt = \lim\limits_{v \nearrow b} (-\ln|b-x|) \Big|_a^v =$

$t = b - x$

$dt = -1$

$$= \lim_{v \nearrow b} (-\ln|b-v| + \ln(b-a)) = +\infty$$

$\int_a^{b-0} \frac{1}{(b-x)^p} dx$ convergentă $\Leftrightarrow p < 1$

b) Calculați $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$, $p \in \mathbb{R}$, $a > 0$

$\underline{\text{Caz } p \neq 1}$, $\lim\limits_{v \to \infty} \int_a^v \frac{1}{x^p} dx = \lim\limits_{v \to \infty} \frac{1}{-p+1} \cdot x^{-p+1} \Big|_a^v =$

$$= \lim_{v \to \infty} \frac{1}{1-p} \cdot (\underline{v^{-p+1}} - a^{-p+1}) = \begin{cases} \frac{1}{p-1} \cdot a^{1-p}, & p > 1 \\ +\infty, & p < 1 \end{cases}$$

Caz $p=1$,

$$\lim_{v\to\infty}\int_a^v \frac{1}{x}\,dx = \lim_{v\to\infty} \ln x \Big|_a^v = +\infty$$

$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ convergentă $\Leftrightarrow p>1$

$\boxed{T}$ Fie $a,b\in\mathbb{R}$ și $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ o funcție continuă ce poate fi prelungită prin continuitate la intervalul $[a,b]$, atunci

$$\int_a^{b-0} f(x)\,dx = \int_a^b f^*(x)\,dx,$$

unde f^* este prelungirea lui f la $[a,b]$

Dem: f poate fi prelungită prin continuitate în punctul $x=b$ dacă $\exists \lim_{x\nearrow b} f(x)\in\mathbb{R}$. Atunci

$$f^*:[a,b]\to\mathbb{R},\quad f^*(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[a,b) \\ \lim_{x\nearrow b} f(x), & x=b \end{cases}$$

f^* continuă pe $[a,b] \Rightarrow F^*(t)=\int_a^t f^*(x)\,dx$, $\forall t\in[a,b]$ este o primitivă a sa.

$$\int_a^{b-0} f(x)\,dx = \lim_{v \nearrow b} \int_a^v f(x)\,dx = \lim_{v \nearrow b} \int_a^v f^*(x)\,dx = \lim_{v \nearrow b} F^*(v) =$$

$$= F^*(b) = F^*(b) - \underbrace{F^*(a)}_{=0} = \int_a^b f^*(x)\,dx$$

În continuare considerăm cazul funcțiilor cu valori pozitive.

<u>Propr</u>: Dacă $-\infty < a < b \le +\infty$, iar $f: [a,b) \to [0,+\infty)$ este o funcție pozitivă și local integrabilă pe $[a,b)$ atunci

$$\exists \lim_{v \nearrow b} \int_a^v f(x)\,dx$$

<u>Dem</u>: Fie $F(v) = \int_a^v f(x)\,dx$, $\forall\, v \in [a,b)$

F este derivabilă pe $[a,b)$ și $F'(v) = f(v) \geq 0 \Rightarrow F$ crescătoare

$\Rightarrow \exists \lim_{v \nearrow b} F(v) = \sup(F[a,b))$

<u>Obs</u>: În ipotezele proprietății anterioare avem

$$\int_a^{b-0} f(x) \text{ este convergentă} \iff \lim_{v \nearrow b} \int_a^v f(x)\,dx < +\infty$$

$\boxed{T}$ (criteriul comparației)

Dacă $-\infty < a < b \le +\infty$, iar $f, g: [a,b) \to [0,+\infty)$ sunt funcții pozitive și local integrabile pe $[a,b)$, atunci au loc:

1° Dacă $\exists\, c \in [a,b)$ a.î. $f(x) \le g(x)$, $\forall\, x \in [c,b)$ atunci

i) Dacă $\int_a^{b-0} g(x)\,dx$ este convergentă $\Rightarrow \int_a^{b-0} f(x)\,dx$ este convergentă

ii) Dacă $\int_a^{b-0} f(x)\,dx$ este divergentă $\Rightarrow \int_a^{b-0} g(x)\,dx$ este divergentă

2°. (criteriul comparației sub formă de limită)

Dacă $\exists \lim\limits_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in [0, +\infty]$ atunci

i) Dacă $l < +\infty$ și $\int_a^{b-0} g(x)\,dx$ este convergentă $\Rightarrow \int_a^{b-0} f(x)\,dx$ este convergentă

ii) Dacă $l > 0$ și $\int_a^{b-0} g(x)\,dx$ este divergentă $\Rightarrow \int_a^{b-0} f(x)\,dx$ este divergentă

Prop: Dacă $a, b, p \in \mathbb{R}$, $f : [a,b) \to [0,+\infty)$ este o funcție pozitivă și local integrabilă pe $[a,b)$ și $\exists \lim\limits_{x \nearrow b} (b-x)^p \cdot f(x) = \lambda$, atunci

i) Dacă $p < 1$ și $\lambda < +\infty \Rightarrow \int_a^{b-0} f(x)\,dx$ este convergentă

ii) Dacă $p > 1$ și $\lambda > 0 \Rightarrow \int_a^{b-0} f(x)\,dx$ este divergentă

Dem: Fie $g(x) = \frac{1}{(b-x)^p}$, $\forall x \in [a,b)$; $\int_a^{b-0} g(x)\,dx$ convergentă $\Leftrightarrow p < 1$

$\lim\limits_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \nearrow b} f(x) \cdot (b-x)^p = \lambda$, deci concluzia rezultă din criteriul comparației sub formă de limită. (convergentă/divergentă)

Prop: Dacă $a, p \in \mathbb{R}$, $f : [a, +\infty) \to [0, +\infty)$ este o funcție pozitivă și local integrabilă pe $[a, +\infty)$ și $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} x^p \cdot f(x) = \lambda$, atunci

i) Dacă $p>1$ și $\lambda<+\infty \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ este convergentă

ii) Dacă $p\le 1$ și $\lambda>0 \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ este divergentă

Prop: Dacă $a,b,p\in\mathbb{R}$, $f:(a,b]\to[0,+\infty)$ este o funcție pozitivă și local integrabilă pe $(a,b]$ și $\exists \lim_{x\searrow a}(x-a)^p\cdot f(x)=\lambda$, atunci

i) Dacă $p<1$ și $\lambda<+\infty \Rightarrow \int_{a+0}^{b} f(x)\,dx$ este convergentă

ii) Dacă $p>1$ și $\lambda>0 \Rightarrow \int_{a+0}^{b} f(x)\,dx$ este divergentă

Prop: Dacă $b,p\in\mathbb{R}$, $f:(-\infty,b]\to[0,+\infty)$ este o funcție pozitivă și local integrabilă pe $(-\infty,b]$ și $\exists \lim_{x\to-\infty}(-x)^p\cdot f(x)=\lambda$, atunci

i) Dacă $p>1$ și $\lambda<+\infty \Rightarrow \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ este convergentă

ii) Dacă $p\le 1$ și $\lambda>0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ este divergentă

Ex: Natura integralei $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx$

$$\int_{0+0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx = -\int_{0+0}^{\frac{\pi}{2}} -\ln(\sin x)\,dx$$

Fie $f:[0,\frac{\pi}{2})\to[0,+\infty)$, $f(x)=-\ln(\sin x)$

$$\lambda=\lim_{x\searrow 0}(x-0)^p\cdot f(x)=\lim_{x\searrow 0} x^p\cdot(-\ln(\sin x)) \overset{p=\frac{1}{2}}{=\!=} \lim_{x\searrow 0}\sqrt{x}\cdot(-\ln(\sin x))=$$

$$=\lim_{x\searrow 0}\frac{-\ln(\sin x)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\searrow 0}\frac{-\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{2x\sqrt{x}}}=\lim_{x\searrow 0} 2\sqrt{x}\cdot\cos x$$

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{x}{\sin x} = 0 < +\infty \quad , \; p = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{integrală convergentă.}$$

Când $p > 1$, $\lim_{x \searrow 0} \underbrace{x^p}_{\to 0} \cdot f(x) \geq 0$ divergentă, ptc $f(x)$ nu scade suficient de rapid spre 0

$p < 1$, $\lim_{x \searrow 0} \underbrace{x^p}_{\to +\infty} \cdot f(x) < +\infty$ convergentă, ptc $f(x)$ scade suficient de rapid spre 0