Analiza

5. Serii alternante

Fie (x_n) un șir de numere reale.

<u>Def</u>: Spunem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este absolut convergentă dacă seria $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ este convergentă

<u>Prop</u>: Orice serie absolut convergentă este convergentă.
Reciproca nu este adevărată.

Dem: Din $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ convergentă $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall_{n \geq n_0}, \forall p \in \mathbb{N}$:

$|x_{n+1}| + \ldots + |x_{n+p}| < \varepsilon \Rightarrow |x_{n+1} + \ldots + x_{n+p}| \leq |x_{n+1}| + \ldots |x_{n+p}|$
$< \varepsilon \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ convergentă

Un contraexemplu pentru reciprocă se va da ulterior

<u>Def</u>: O serie care este convergentă dar nu este absolut convergentă se numește semiconvergentă.

<u>Def</u>: Seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ se numește alternantă dacă $x_n \cdot x_{n+1} \leq 0$
$\forall n \in \mathbb{N}$

Dacă notăm $a_n = |x_n|$, $\forall n \in \mathbb{N}$ atunci vom avea:

$x_n = (-1)^n \cdot a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Notație $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\boxed{T}$ (criteriul lui Leibnitz)

Dacă $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir descrescător de numere pozitive cu $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ atunci seria alternativă $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ este convergentă

Dem: (a_n) este descrescător

Fie $\varepsilon > 0$ și $n, p \in \mathbb{N}$

$|(-1)^{n+1} \cdot a_{n+1} + (-1)^{n+2} \cdot a_{n+2} + \ldots + (-1)^{n+p} \cdot a_{n+p}| =$

$= |\underbrace{a_{n+1} - a_{n+2}}_{\geq 0} + \underbrace{a_{n+3} - a_{n+4}}_{\geq 0} + \ldots + \underbrace{(-1)^{p-2} \cdot a_{n+p-1} + (-1)^{p-1} \cdot a_{n+p}}_{\geq 0}| =$

$= a_{n+1} \underbrace{- a_{n+2} + a_{n+3}}_{\leq 0} \underbrace{- a_{n+4} + \ldots}_{\leq 0} \underbrace{+ (-1)^{p-2} \cdot a_{n+p-1}}_{\leq 0} + (-1)^{p-1} \cdot a_{n+p} \leq$

$\leq a_{n+1} < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$ căci $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 0$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ este convergentă

Ex: <u>Natura seriei armonice alternate</u> $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$

$a_n = \frac{1}{n} \searrow 0 \overset{L.}{\Rightarrow}$ seria este convergentă

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \Rightarrow$ serie este semiconvergentă

T (dependența sumei de ordinea de însumare)

1°. (Riemann) Într-o serie semiconvergentă se pot schimba ordinea termenilor a.î. seria nou obținută să aibă ca sumă orice număr $s \in \overline{\mathbb{R}}$.

2° (Cauchy) La o serie absolut convergentă suma sa nu depinde de ordinea de însumare a termenilor.