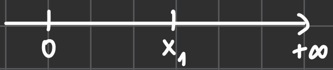
# Analiza

# Funcții vectoriale de variabilă vectorială

## 1. Topologia spațiului $\mathbb{R}^n$

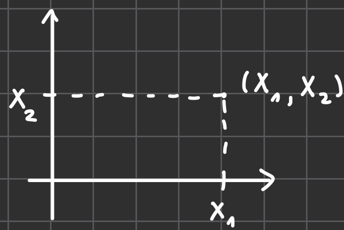
$n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ ori}} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1,n}\}$

Cazuri particulare:



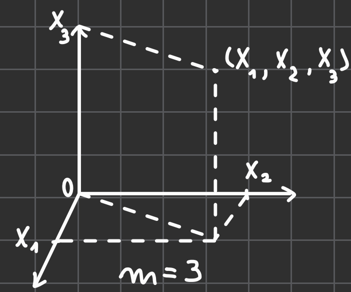

$n = 1$

$\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$




$n = 2$

$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$




$n = 3$

$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$

<u>Def</u>: Elementele mulțimii $\mathbb{R}^n$ se numesc puncte (vectori) cu $n$ componente, iar numerele din se numesc scalari.

<u>Def</u>: Definim operațiile:

a) $\forall\ x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$x + y \stackrel{def}{=} (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad (1)$$

numită adunarea vectorilor.

b) $\forall\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \forall\ \lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda x \stackrel{def}{=} (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

numită **înmulțirea cu scalari**. (2)

Obs: Mulțimea $\mathbb{R}^n$ împreună cu operațiile (1) și (2) formează o structură algebrică de **spațiu vectorial real** $n$-dimensional.

Notații: 1) $0_n = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ **vectorul nul**.

2) $\forall\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ fie $-x \overset{not}{=} (-x_1, \dots, -x_n) \in \mathbb{R}^n$ numit **opusul** lui $x$.

3) $e^1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e^2 = (0, 1, \dots, 0)$, $\dots$, $e^n = (0, 0, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ numiți **vectorii canonici**.

Def: $\forall\ x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ definim operația

$$x \cdot y \overset{def}{=} x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \in \mathbb{R}$$

numită **produs scalar** al vectorilor $x$ și $y$.

Prop (proprietăți ale produsului scalar)

$\forall\ x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ au loc:

$1^\circ.$ $x \cdot y = y \cdot x$

$2^\circ.$ $(\alpha x + \beta y) \cdot z = \alpha (xz) + \beta (yz)$

$3^\circ.$ $x \cdot x \geq 0$

Dem $2^\circ$.

$x = (x_1, \dots, x_m)$, $y = (y_1, \dots, y_m)$, $z = (z_1, \dots, z_m)$

$(\alpha x + \beta y) = (\alpha x_1 + \beta y_1, \dots, \alpha x_m + \beta y_m)$,

$$(\alpha x + \beta y) \cdot z = \sum_{i=1}^{m} (\alpha x_i + \beta y_i) \cdot z_i = \sum_{i=1}^{m} (\alpha x_i z_i + \beta y_i z_i) =$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{m} (x_i z_i) + \beta \sum_{i=1}^{m} (y_i z_i) = \alpha (x \cdot z) + \beta (y \cdot z)$$

$\boxed{T}$ (inegalitatea lui Cauchy - Schwarz)

$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^m$ avem $|x \cdot y| \leq \sqrt{x \cdot x} \cdot \sqrt{y \cdot y}$

Dem:

$x = (x_1, \dots, x_m)$, $y = (y_1, \dots, y_m)$, inegalitatea se scrie

$$|x_1 y_1 + \dots + x_m y_m| \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_m^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + \dots y_m^2} = \sqrt{(x_1^2 + \dots x_m^2) \cdot (y_1^2 + \dots + y_m^2)} \; (*)$$

Considerăm funcția $f(t) = \sum_{i=1}^{m} (x_i \cdot t + y_i)^2 \geq 0$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right)}_{a} t^2 + \underbrace{2 \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot y_i}_{b} \cdot t + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} y_i^2}_{c}$$

caz I : $\sum_{i=1}^{m} x_i^2 = 0 \Rightarrow x = 0_m \Rightarrow (*)$ este adevărată

caz II : $\sum_{i=1}^{m} x_i^2 > 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = \left(2 \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot y_i\right)^2 - 4 \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{m} y_i^2$

$$\leq 0 \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot y_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{m} y_i^2 \overset{\sqrt{\ }}{\Rightarrow} (*)$$

**Def:** $\forall\, x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ definim numărul real pozitiv

$$\|x\| \overset{def}{=} \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_m^2}$$

numit norma (lungimea) euclidiană a vectorului $x$.

**Prop:** (proprietăți ale normei)

$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^m$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ au loc:

$1^\circ$. $\|x\| = 0 \iff x = 0_{\mathbb{R}^m}$

$2^\circ$. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

$3^\circ$. $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

**Dem:** $3^\circ$

$$\|x+y\|^2 = (x+y)\cdot(x+y) = x\cdot x + x\cdot y + y\cdot x + y\cdot y =$$

$$= \|x\|^2 + 2(\overbrace{x\cdot y}^{x_1y_1\cdot\ldots\cdot x_my_m}) + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2|x\cdot y| + \|y\|^2 \le$$

$$\le \|x\|^2 + 2\overbrace{\|x\|\cdot\|y\|}^{(x_1+\dots+x_m)(y_1+\dots+y_m)} \cdot \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \overset{2\sqrt{}}{\Longrightarrow} \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$$

**Def:** $\forall\, x = (x_1, \dots, x_m)$, $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ numărul real pozitiv

$$\|x-y\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots (x_m-y_m)^2}$$

este numit distanța euclidiană de la $x$ la $y$

**Obs:** $x - y = x + (-y) = (x_1 - y_1, \dots, x_m - y_m)$

Prop: (proprietăți ale distanței)

$\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}^m$ au loc:

1°. $\|x-y\| = 0 \iff x = y$

2°. $\|x-y\| = \|y-x\|$

3°. $\|x-y\| \leq \|x-z\| + \|y-z\|$

Dem:

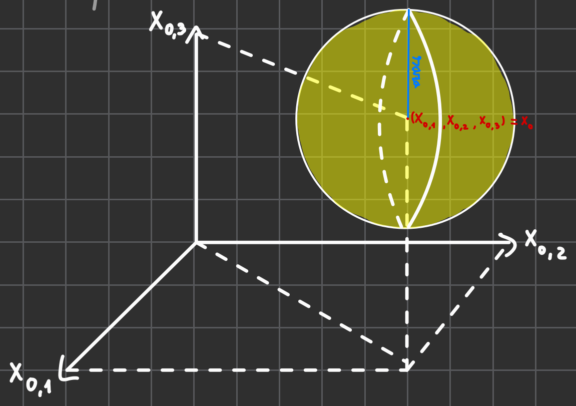
3°. $\|x-y\| = \|x-z+z-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\|$

Def: Fie $x^0 \in \mathbb{R}$ și $r > 0$. Mulțimea

a) $B(x^0, r) = \{x \in \mathbb{R}^m, \|x - x^0\| < r\}$ se numește bila deschisă de centru $x^0$ și rază $r$.

$\|x - x_0\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - x_{0,i})^2}$, $x = (x_1, \dots, x_m)$ și $x_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,m})$

Această formulă este distanța pentru a verifica că un punct $x$ aparține unei bile cu centrul în $x_0$ și raza $r$.




Am desenat cu punctele aflate la o distanță mai mică decât $r$ de $x_0$

b) $\overline{B}(x^0, r) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x - x^0\| \leq r\}$ se numește bila închisă de centru $x^0$ și rază $r$

Cazuri particulare:

$m = 1$: $x \in \mathbb{R}$, $\|x\| = \sqrt{x^2} = |x|$, $x^0 \in \mathbb{R}$

$\|x - x^0\| < r \iff |x - x^0| < r \iff x \in (x^0 - r, x^0 + r)$

deci $B(x^0, r) = (x^0 - r, x^0 + r)$, $\overline{B}(x^0, r) = [x^0 - r, x^0 + r]$

$m = 2$: $x = (x_1, x_2)$, $x^0 = (x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{R}^2$

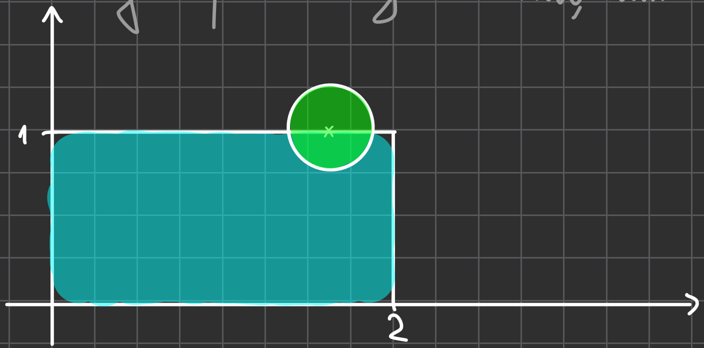
$\|x - x^0\| < r \iff \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2} < r$

Def: Fie $A \subseteq \mathbb{R}^m$ o mulțime nevidă

a) $\text{int}\, A = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \exists\, r > 0$ a.î. $B(x, r) \subseteq A\}$ se numește mulțimea punctelor interioare ale lui A

b) $A' = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \forall\, r > 0 : B(x, r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset\}$ se numește mulțimea punctelor de acumulare ale lui A. (toate punctele x care sunt centrul sferelor deschise de rază $\forall r > 0$ a căror mulțime de puncte, în afară de punctul din centru, intersectează și puncte din mulțimea A.)

c) $\text{fr}\, A = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \underline{\forall\, r > 0} : B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ și $B(x, r) \cap (\mathbb{R}^m \setminus A) \neq \emptyset\}$ se numește mulțimea punctelor frontieră ale lui A. (toate punctele x care sunt centrul sferelor deschise de rază $\forall r > 0$ care au cel puțin un punct în A și un punct din exteriorul lui A $\Rightarrow$ x se află pe marginea mulțimii.




d) A se numește **mulțime deschisă** dacă $\forall x \in A, \exists r > 0$ a.î. $B(x, r) \subseteq A$. $\Rightarrow$ mulțimea A trebuie să aibă capetele deschise.

e) A se numește **mulțime închisă** dacă $\mathbb{R}^m \setminus A$ este deschisă.

Obs: Prin convenție, $\mathbb{R}^m$ este atât o mulțime deschisă cât și o mulțime închisă.

<u>Prop</u>: (caracterizarea mulțimilor deschise și închise cu ajutorul punctelor frontieră)

1°. A este deschisă $\Leftrightarrow A \cap \mathrm{fr}\, A = \emptyset$

2°. A este închisă $\Leftrightarrow \mathrm{fr}\, A \subseteq A$

Cons: În $\mathbb{R}^m$ au loc afirmațiile:

1°. Bilele deschise sunt mulțimi deschise.

2°. Bilele închise sunt mulțimi închise.

Prop

1°. $\text{int}\, A \subseteq A$

2°. $A' \subseteq A \cup \text{fr}\, A$

3°. $\text{int}\, A = A \setminus \text{fr}\, A$

4°. $\text{fr}\, A = \text{fr}(\mathbb{R}^m \setminus A)$

5°. $\text{int}\, A \cup \text{fr}\, A \cup \text{int}(\mathbb{R}^m \setminus A) = \mathbb{R}^m$

6° $\text{int}\, A$ este mulțime deschisă

7°. $\text{fr}\, A$ este mulțime închisă

Ex: Fie $A = (a, b] \subseteq \mathbb{R}$

$\text{int}\, A = (a, b)$

$A' = [a, b]$

$\text{fr}\, A = \{a, b\}$

A nu este nici deschisă nici închisă