Algebra

1.4 Relații

Definiție 1.4.1.

O relație este un triplet (A, B, R), unde A și B sunt două mulțimi oarecare, iar $R \subseteq A \times B$. Uneori notăm $r = (A, B, R)$ și scriem arb în loc de $(a,b) \in R$, alteori scriem numai $R \subseteq A \times B$ pentru a desemna o relație. Ca și în cazul funcțiilor A și B se numesc domeniu respectiv codomeniu. Dacă $A = B$ atunci relația $R \subseteq A \times A$ se zice omogenă (pe A).

Observație 1.4.2.

Funcțiile pot fi privite ca fiind cazuri speciale de relații, și anume o funcție $f: A \to B$ este o relație $f = (A, B, F)$ cu proprietatea suplimentară că pentru orice $x \in A$ există un singur element $y \in B$ a.î. $x f y$. În acest caz $F = \{(a, f(a)) \mid a \in A$ este graficul funcției $f\}$

Exemplu 1.4.3

Următoarele exemple sunt relații care nu sunt funcții

(1) Relația $\leq$ este o relație omogenă pe $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

(2) Divizibilitatea $a | b$ doar dacă există c a.î. $b = a \cdot c$ este o relație omogenă pe $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$

(3) Fie $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Relația congruența modulo între două numere indică faptul că diferența lor este un multiplu a lui n. Dacă $n = 5$, $x = 17$, $y = 7$, $x - y = 10$, iar 10 este un multiplu al lui 5, astfel notăm: $x \equiv y \pmod{n}$

(4) Pentru orice mulțime A apartenența $\in$ este o relație între A și $P(A)$.

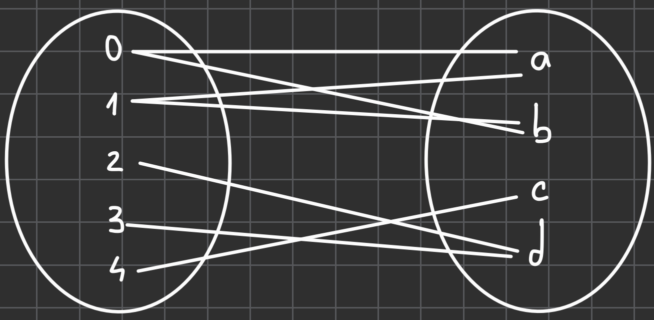
<u>Exemplu</u> 1.4.4.

Pentru orice mulțime A, egalitatea este o relație omogenă pe A. Se observă că această relație este și o funcție, mai precis funcția egalitate a lui A.

<u>Observație</u> 1.4.5.

Ca și în cazul funcțiilor, există mai multe moduri în care poate fi dată o relație:

(1) Prin indicarea directă a perechilor care sunt în relație, de ex. dacă $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ și $R = \{(0, a), (0, b), (1, a), (1, b), (2, d), (3, d), (4, c)\}$ atunci (A, B, R) este o relație. Diagrama corespunzătoare:



(2) Printr-o matrice cu intrări în mulțimea $\{0, 1\}$: Se consideră două mulțimi finite $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ și $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ și o relație $R \subseteq A \times B$. Această relație poate fi reprezentată printr-o matrice $M(R) = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\{0, 1\})$, unde:

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } (a_i, b_j) \in R \\ 0 & \text{dacă } (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Matricea relației anterioare este:

$$\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

(3) Printr-o proprietate care trebuie să o satisfacă toate elementele care se află în relație, ca în Exemplul 1.4.3. (2), (3).

<u>Definiție</u> 1.4.6.

Pentru orice relație (A, B, R) se definește relația inversă ca fiind (B, A, R^{-1}), unde $(b, a) \in R^{-1}$ ddacă $(a, b) \in R$ pentru orice pereche $(a, b) \in A \times B$

<u>Observație</u> 1.4.7.

Relația inversă se poate defini pentru orice relație, în particular pentru orice funcție privită ca relație. Dar relația inversă a unei funcții este o funcție când funcția de la care pornim este bijectivă.

Definiție 1.4.8.

Fie $r = (A, B, R)$ o relație și $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$ submulțimi.
Se definesc: $r(X) = \{ y \in B \mid$ există $x \in A$ așa încât $x r y \}$ și $r^{-1}(Y) = \{ x \in A \mid$ există $y \in B$ așa încât $x r y \}$

Observație 1.4.9.

Pentru o relație $r = (A, B, R)$ și o submulțime $Y \subseteq B$ avem $(r^{-1})(Y) = r^{-1}(Y)$

Definiție 1.4.10.

Fie (A, B, R) și (C, D, S) două relații. Compunerea celor două relații este definită prin $(A, D, S \circ R)$ unde
$S \circ R = \{ (a, d) \mid$ există $x \in B \cap C$ a.î. $(a, x) \in R$ și $(x, d) \in S \}$

Exemplu: Compoziția relațiilor

Datele problemei

1. Relația (A, B, R):
   - $A = \{1, 2\}$,
   - $B = \{3, 4\}$,
   - $R = \{(1,3), (2,4)\}$.
2. Relația (C, D, S):
   - $C = \{3, 4\}$,
   - $D = \{5, 6\}$,
   - $S = \{(3,5), (4,6)\}$.

Regula compunerii

$S \circ R = \{(a,d) \mid \exists x \in B \cap C \text{ astfel nct } (a,x) \in R \text{ i } (x,d) \in S\}$.

Pasul 1: Determinăm mulțimile intermediare

- $B = \{3,4\}$, $C = \{3,4\}$, deci $B \cap C = \{3,4\}$.

Pasul 2: Calculăm compoziția $S \circ R$

1. **Pentru $a = 1$:**
   - $(1,3) \in R$, $x = 3 \in B \cap C$,
   - $(3,5) \in S$, deci $(1,5) \in S \circ R$.
2. **Pentru $a = 2$:**
   - $(2,4) \in R$, $x = 4 \in B \cap C$,
   - $(4,6) \in S$, deci $(2,6) \in S \circ R$.

Rezultatul final

$S \circ R = \{(1,5), (2,6)\}$.

Observație 1.4.11.

Spre deosebire de cazul funcțiilor, compunerea este definită oricând fără a fi necesară coincidența dintre codomeniul primei relații cu domeniul celei de-a doua.

Definiție 1.4.12.

O relație omogenă $r = (A, A, R)$ se numește:

(a) reflexivă dacă ara pentru orice $a \in A$, adică dacă fiecare element al mulțimii A este în relație cu el însuși. Exemplu: $A = \{1, 2, 3\}$ și relația $R = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$ atunci R este reflexivă. Dacă $R = \{(1,1), (2,2)\}$ R nu e reflexivă

(b) tranzitivă dacă pentru orice $a, b, c \in A$ din arb și brc rezultă arc. Exemplu: $A = \{1, 2, 3\}$ și relația $R = \{(1,2), (2,3), (1,3)\}$, R este tranzitivă deoarece $(1,2) \in R$ și $(2,3) \in R$ implică $(1,3) \in R$. Dacă $R = \{(1,2), (2,3)\}$ și $(1,3) \notin R$ atunci relația nu este tranzitivă.

(c) simetrică dacă pentru orice $a, b \in A$ din arb rezultă bra. Exemplu: $A = \{1, 2, 3\}$ și relația $R = \{(1,2), (2,1), (2,3), (3,2)\}$ R este simetrică.

(d) antisimetrică dacă pentru orice $a, b \in A$ din aRb și bRa rezultă $a = b$. Exemplu: $A = \{1, 2, 3\}$ și relația $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2)\}$ R este antisimetrică deoarece:

- perechea $(1,1)$ este ok, deoarece $1 = 1$
- perechea $(1,2)$ este ok, deoarece nu avem și $(2,1)$
- perechea $(2,2)$ este ok, deoarece $2 = 2$

Dacă avem $R = \{(1,2), (2,1)\}$, relația nu este antisimetrică pentru că $(1,2) \in R$ și $(2,1) \in R$, dar $1 \neq 2$.

Se numește preordine o relație omogenă care este reflexivă și tranzitivă.

Relații de echivalență

<u>Definiție</u> 1.4.13.

Fie A o mulțime. O relație de echivalență pe A este o preordine care este de asemenea simetrică, adică o relație omogenă pe A care este reflexivă, tranzitivă și simetrică.

<u>Exemplu</u> 1.4.14.

Următoarele relații sunt echivalente:

(1) Relația de egalitate pe o mulțime arbitrară

(2) Congruența triunghiurilor

- **Reflexivă**: Orice triunghi este congruent cu el însuși.
- **Simetrică**: Dacă triunghiul T_1 este congruent cu T_2, atunci T_2 este congruent cu T_1.
- **Tranzitivă**: Dacă T_1 este congruent cu T_2 și T_2 este congruent cu T_3, atunci T_1 este congruent cu T_3.

(3) Asemănarea triunghiurilor

- **Reflexivă**: Orice triunghi este asemănător cu el însuși.
- **Simetrică**: Dacă T_1 este asemănător cu T_2, atunci T_2 este asemănător cu T_1.
- **Tranzitivă**: Dacă T_1 este asemănător cu T_2 și T_2 este asemănător cu T_3, atunci T_1 este asemănător cu T_3.

<u>Definiție</u> 1.4.15.

Fie $\equiv$ o relație de echivalență pe o mulțime A. Pentru un element $a \in A$ se notează

$$[a] = [a]_{\equiv} = \{ x \in A \mid a \equiv x \}$$

clasa de echivalență $[a]$ conține toate elementele din A care sunt echivalente cu a conform relației $\equiv$.

Exemple:

1. Dacă A este mulțimea numerelor întregi $\mathbb{Z}$ și $\equiv$ este congruența modulo 3, atunci clasa de echivalență a 0 este $[0] = \{..., -6, -3, 0, 3, 6, ...\}$.

Se numește mulțimea factor a lui A mulțimea tuturor claselor de echivalență și se notează

$$A/_{\equiv} = \{[a] \mid a \in A\}$$

Exemple:

1. Dacă $A = \mathbb{Z}$ și $\equiv$ este congruența modulo 3, atunci mulțimea factor $A/\equiv$ este:

$A/\equiv = \{[0], [1], [2]\}$,

unde $[0], [1], [2]$ sunt clasele de echivalență.

1. **Clasa** $[0]$: Conține toate numerele care dau restul 0 la împărțirea cu 3:

$[0] = \{..., -6, -3, 0, 3, 6, ...\}$.

2. **Clasa** $[1]$: Conține toate numerele care dau restul 1 la împărțirea cu 3:

$[1] = \{..., -5, -2, 1, 4, 7, ...\}$.

3. **Clasa** $[2]$: Conține toate numerele care dau restul 2 la împărțirea cu 3:

$[2] = \{..., -4, -1, 2, 5, 8, ...\}$.

Funcția $p_{\equiv} : A \to A/_{\equiv}$ se numește proiecția canonică și se definește ca $p_{\equiv}(x) = [x]$. Funcția $p_{\equiv}$ asociază fiecărui element $x \in A$ clasa lui de echivalență.

- $p(4) = [4] = [1]$, deoarece 4 are restul 1 la împărțirea cu 3.

<u>Observație</u> 1.4.16.

În definiția mulțimii factor este posibil ca anumite elemente să apară de mai multe ori, de aceea necesită precauții suplimentare pentru a elimina repetițiile.

<u>Propoziție</u> 1.4.17.

Fie $(A, A, \equiv)$ o relație de echivalență pe o mulțime A, și $a, b \in A$. Avem:

(a) $a \in [a]$, așadar $[a] \neq \emptyset$

(b) $[a] = [b]$ ddacă $a \equiv b$

(c) $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ ddacă $[a] = [b]$

(d) $\bigcup_{x \in A} [x] = A$

<u>Definiție</u> 1.4.18.

Fie A o mulțime. O partiție a mulțimii A este o submulțime $\pi \subseteq P(A)$ a mulțimii putere a lui A (adică o mulțime a cărei elemente sunt submulțimi ale lui A), așa încât:

(a) $\emptyset \notin \pi$

(b) Pentru $X, Y \in \pi$ dacă $X \cap Y \neq \emptyset$ atunci $X = Y$

Acest lucru implică faptul că **dacă există vreo intersecție nenulă între două submulțimi dintr-o partiție, ele trebuie să fie aceeași submulțime.**

(c) $\bigcup_{X \in \pi} X = A$

<u>Teoremă</u> 1.4.19.

(1) Dacă $(A, A, \equiv)$ este o relație de echivalență pe A, atunci $A/_{\equiv}$ este o partiție a mulțimii A.

(2) Dacă $\pi \subseteq P(A)$ este o partiție a lui A, atunci putem defini o relație de echivalență $(A, A, \equiv_\pi)$, unde pentru două elemente $a, b \in A$ spunem că $a \equiv_\pi b$ dacă există o submulțime $X \in \pi$ a.î. $a \in X$ și $b \in X$.

(3) Procedeele de la (1) și (2) descriu două funcții inverse una celeilalte deoarece procedeul descris în (1) transformă o relație de echivalență într-o partiție și procedeul descris în (2) transformă o partiție într-o relație de echivalență.

Relații de echivalență

Definiție 1.4.20.
Fie A o mulțime. O relație de ordine pe A este o preordine care este și antisimetrică, adică o relație omogenă pe A care este reflexivă, tranzitivă și antisimetrică.

Adesea se notează o relație de ordine cu $\leq$ și se spune că $(A, \leq)$ este o mulțime ordonată.

Exemplu 1.4.21.
Următoarele relații sunt de ordine:

(1) Relația de egalitate pe o mulțime arbitrară

(2) Relația obișnuită de mai mic sau egal pe $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

Proprietățile relației $\leq$:

1. **Reflexivitate:** Orice element x din mulțime este mai mic sau egal cu el însuși, adică $x \leq x$.
2. **Antisimetrie:** Dacă $x \leq y$ și $y \leq x$, atunci rezultă că $x = y$.
3. **Tranzitivitate:** Dacă $x \leq y$ și $y \leq z$, atunci rezultă că $x \leq z$.

(3) Incluziunea pe o mulțime a căror elemente sunt mulțimi, de exemplu $(P(A), \subseteq)$ este o mulțime ordonată, unde A este o mulțime oarecare.

Definiție 1.4.22.

Fie $(A, \leq)$ o mulțime ordonată. Un element $a \in A$ se numește

(a) minimal dacă pentru orice $x \in A$, dacă $x \leq a$, rezultă $x = a$

(b) maximal dacă pentru orice $x \in A$, dacă $a \leq x$, rezultă $x = a$

(c) cel mai mic element al lui A dacă $a \leq x$, $\forall\, x \in A$

(d) cel mai mare element al lui A dacă $x \leq a$, $\forall\, x \in A$

- Un element minimal este „în colț" în sensul ordinii: nu există niciun alt element diferit de a care să fie mai mic sau egal cu a.
- Totuși, acest lucru nu înseamnă că a este mai mic decât toate celelalte elemente ale mulțimii A. Pot exista elemente în A care **nu pot fi comparate cu** a.

Exemplu concret:

- Considerăm mulțimea $A = \{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$, ordonată prin incluziune ($\subseteq$):
  - $\{1\}$ și $\{2\}$ sunt **minimale**, deoarece:
    - Nu există altă submulțime strict mai mică decât $\{1\}$ sau $\{2\}$ (niciun $X \subseteq \{1\}$ în afară de ele însele).
    - Însă ele **nu sunt comparabile** între ele

Observație 1.4.23.

Fie $(A, \leq)$ o mulțime ordonată. Se notează $\geq \,=\, \leq^{-1}$, adică $x \geq y$ ddacă $y \leq x$, unde $\geq$ este definită ca inversa lui $\leq$. Un element $a \in A$ este minimal sau cel mai mic element în $(A, \leq)$ dacă a este maximal sau cel mai mare element în $(A, \geq)$.

Lemă 1.4.24.
Fie $(A, \leq)$ o mulțime ordonată. Dacă A are un cel mai mic (mare) element, atunci acest element este unicul element minimal (respectiv maximal).

Corolar 1.4.25.
Cel mai mic (mare) element al unei mulțimi ordonate, dacă există, este unic.

Teoremă 1.4.26.
Următoarele afirmații sunt echivalente pentru o mulțime ordonată $(A, \leq)$:

(i) Orice submulțime nevidă a lui A are un element minimal

(ii) Orice lanț descrescător de elemente din A este finit, adică dacă $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots$ cu $a_0, a_1, a_2, \dots \in A$, atunci există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $a_n = a_{n+1} = \dots$ deoarece proprietatea lanțurilor finite este că trebuie să se termine sau să devină constant.

(iii) Dacă $B \subseteq A$ are proprietățile

(a) B conține toate elementele minimale lui A

(b) pentru $a \in A$ dacă $\{x \in A \mid x < a\} \subseteq B$ (adică toate elementele mai mici decât a sunt în B) atunci $a \in B$

atunci $B = A$

Definiție 1.4.27.

Fie $(A, \leq)$ o mulțime ordonată și $X \subseteq A$.

· Un element $a \in A$ este margine inferioară pentru X dacă $a \leq x$ pentru orice $x \in X$.

· Infimum-ul ($\inf X$) este cea mai mare ~~mare~~ margine inferioară a lui X.

$\inf X = a \in A$ dacă $\begin{cases} a \leq x \text{ pentru orice } x \in X \text{ (este margine inferioară)} \\ a' \in A \text{ este o margine inferioară, atunci } a' \leq a \end{cases}$

· Un element $a \in A$ este margine superioară pentru X dacă $x \leq a$ pentru orice $x \in X$.

· Supremum-ul ($\sup X$) este cea ~~mai mare~~ mică margine superioară a lui X.

$\sup X = a \in A$ dacă $\begin{cases} x \le a \text{ pentru orice } x \in X \text{ (este margine superioară)} \\ a' \in A \text{ este o margine superioară, atunci } a \le a' \end{cases}$

<u>Observații</u> 1.4.28.

Fie $(A, \le)$ o mulțime ordonată și $X \subseteq A$.

(1) Dacă există $\inf X$ și $\sup X$ sunt unice.

(2) Dacă există cel mai mic (mare) element a lui X atunci $a = \inf X$ $(a = \sup X)$

<u>Exemplu</u> 1.4.29.

(1) În $\mathbb{R}$ avem $\inf (0,1) = \inf [0,1] = 0$, $\sup \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\} = \sqrt{2}$, nu există $\inf \mathbb{Z}$ sau $\sup (0, +\infty)$

(2) În $(\mathbb{Q}, \le)$ nu există $\sup \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$

(3) $\inf \emptyset$ (infimumul mulțimii goale) sau $\sup \emptyset$ (supremumul mulțimii goale) există doar atunci când mulțimea A are un element, avem $\inf \emptyset = a = \sup A$ $(\inf A = a = \sup \emptyset)$

Definiție 1.4.30.

O **latice** este o mulțime ordonată $(L, \leq)$ cu proprietatea că există $\inf\{x, y\}$ notat $x \wedge y$ (cel mai mare element care este mai mic sau egal cu ambele) și $\sup\{x, y\}$ notat $x \vee y$ (cel mai mic element care este mai mare sau egal cu ambele). Laticea L se zice **completă** dacă există $\inf(X)$ și $\sup(X)$ pentru orice submulțime $X \in L$.

Teoremă 1.4.31.

Într-o latice $(L, \leq)$ sunt valabile proprietățile:

(a) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ și $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ (asociativitate)

(b) $x \vee y = y \vee x$ și $x \wedge y = y \wedge x$ (comutativitate)

(c) $x \vee (x \wedge y) = x = x \wedge (x \vee y)$ (absorbție)

Propoziție 1.4.32. O mulțime ordonată $(L, \leq)$ este o latice completă ddacă există $\inf X$ pentru orice $X \subseteq L$