Analiza

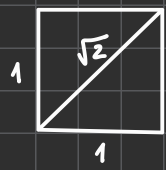
Șiruri și serii de numere reale

1. Numere reale

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}$



, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

T Fie $p, q \in \mathbb{Z}^*$ numere prime între ele. Dacă numărul rațional $\frac{p}{q}$ este rădăcină a ecuației polinomiale cu coeficienți întregi

$$a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0 = 0$$

$$a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z},\ a_0 \neq 0,\ a_n \neq 0 \ (n \in \mathbb{N}^*)$$

atunci:
1. p divide a_0
   q divide a_n

Dem:

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + \dots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0 \Rightarrow a_n p^n + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 \cdot q^n = 0$$

$$\Rightarrow a_0 \cdot q^n = -p \cdot (a_n \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot q^{n-1}) \Rightarrow p \text{ divide } a_0 \cdot q^n$$

$\Rightarrow p$ divide a_0

Ex: a) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Arătăm că ecuația $x^2 - 2 = 0$ nu are rădăcini raționale, dar $\alpha = \sqrt{2}$ este rădăcină, totuși $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Presupun prin absurd că $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ este rădăcină a ec.

$\Rightarrow p/2$ și $q/1 \Rightarrow \frac{p}{q} \in \{-2, -1, 1, 2\}$ absurd!

b) $\sqrt[3]{3 + \sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$

$\alpha = \sqrt[3]{3+\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha^3 = 3 + \sqrt{2} \Rightarrow (\alpha^3 - 3)^2 = 2$

adică α este rădăcina ec. polinomiale $x^6 - 6x^3 + 7 = 0$

Dacă $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ este o rădăcină $\Rightarrow \frac{p}{7}$ și $\frac{q}{1} \Rightarrow \frac{p}{q} \in \{-7, -1, 1, 7\}$ absurd!

c) $\pi, e \notin \mathbb{Q}$

<u>Def</u>: Mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ este acea mulțime de numere care satisface axioma infimului și, respectiv axioma supremului.

<u>Def</u>: Fie $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

a) $MIN(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A, x \leq a\}$ se numește mulțimea minoranților lui A

b) $MAJ(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A, x \geq a\}$ se numește mulțimea majoranților lui A

c) A se numește mărginită inferior dacă $MIN(A) \neq \emptyset$

d) A se numește mărginită superior dacă $MAJ(A) \neq \emptyset$

e) A se numește mărginită dacă c) și d) au loc simultan.

Axioma infimumului: Orice submulțime nevidă și mărginită inferior $A \subseteq \mathbb{R}$ posedă (în $\mathbb{R}$) un cel mai mare minorant numit marginea inferioară (infimum) a lui A, notat inf A.

Axioma supremumului: Orice submulțime nevidă și mărginită superior $A \subseteq \mathbb{R}$ posedă (în $\mathbb{R}$) un cel mai mic majorant numit marginea superioară (supremum) a lui A, notat sup A.

Ex: a) Mulțimea $\mathbb{Q}$ nu satisface axioma infimumului sau a supremumului

$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} \subseteq \mathbb{Q}$, $A = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$

$MIN(A) = (-\infty, -\sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$; $MAJ(A) = (\sqrt{2}, +\infty) \cap \mathbb{Q}$

$\inf A$, $\sup A$?

b) $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} \subseteq \mathbb{R}$, $A = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cap \mathbb{R}$

$MIN(A) = (-\infty, -\sqrt{2}]$; $MAJ(A) = [\sqrt{2}, +\infty)$

$\inf A = -\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, $\sup A = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$

Obs:

$$m = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} m \in MIN(A) \\ \forall\, m' \in MIN(A) \text{ avem } m' \leq m \end{cases}$$

$$M = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} M \in MAJ(A) \\ \forall\, M' \in MAJ(A) \text{ avem } M' \geq M \end{cases}$$

Prop (caracterizarea algebrică a inf și sup)

$$m = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} i)\ \forall x \in A,\ x \geq m \\ ii)\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, y \in A \text{ a.î. } y < m + \varepsilon \end{cases}$$

$$M = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} i)\ \forall x \in A,\ x \leq M \\ ii)\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, y \in A \text{ a.î. } y > M - \varepsilon \end{cases}$$

Ex: $A = \mathbb{N}$, $\inf \mathbb{N} = 0$, $\sup \mathbb{N}$? $\mathbb{N}$ nemărginită

Def: Considerăm două elemente $-\infty, +\infty \notin \mathbb{R}$ având următoarele proprietăți:

$\forall x \in \mathbb{R}, \ -\infty < x < +\infty$

$$x + \infty = \infty + x = \infty \ ; \ x - \infty = -\infty + x = -\infty$$
$$\infty + \infty = \infty \ , \ -\infty - \infty = -\infty$$
$$\frac{x}{\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$$
$$\infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$$
$$\infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty$$

$\forall x > 0, \ x \cdot \infty = \infty \cdot x = \infty, \ x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty$

$\forall x < 0, \ x \cdot \infty = \infty \cdot x = -\infty, \ x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = \infty$

Mulțimea $\overline{\mathbb{R}} \overset{not}{=} \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$ se numește mulțimea extinsă a numerelor reale.

Obs: a) $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$

b) Următoarele operații nu se definesc:

$$\infty - \infty, \ -\infty + \infty, \ 0 \cdot (\pm\infty), \ (\pm\infty) \cdot 0, \ \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

Convenție:

a) Dacă $A \subseteq \mathbb{R}$ este nemărginit inferior atunci $\inf A = -\infty$

b) Dacă $A \subseteq \mathbb{R}$ este nemărginit superior atunci $\sup A = +\infty$

c) $\inf \emptyset = +\infty$, $\sup \emptyset = -\infty$

Ex: $\sup \mathbb{N} = +\infty$

Def: Numim valoarea absolută (modul) a numărului $x \in \mathbb{R}$ numărul

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Prop: Fie $x, y \in \mathbb{R}$ și $a > 0$. Au loc

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| = 0 \iff x = 0$
3. $|x| = |-x|$
4. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
5. $|x + y| \leq |x| + |y|$
6. $|x| < a \iff -a < x < a$

Def: Fie $x \in \mathbb{R}$ și $\varepsilon > 0$, un interval de forma

a) $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ se numește vecinătate a lui x

b) $(\varepsilon, +\infty)$ ——— " ——— vecinătate a lui $+\infty$

c) $(-\infty, -\varepsilon)$ ——— " ——— vecinătate a lui $-\infty$

x - centrul vecinătății

ε - raza vecinătății