Algebra

3.2. Baza unui spațiu vectorial

Definiție 3.2.1.

Fie V un K-spațiu vectorial. Se numește listă de vectori un element $v = [v_1, v_2, \dots, v_n]^t$ din $V^{n \times 1}$, unde $n \in \mathbb{N}$ este arbitrar și v_i este un vector dintr-un K-spațiu vectorial V. O listă de vectori $v = [v_1, v_2, \dots, v_n]^t$ este liniar independentă dacă $\forall\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ scalari avem $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. O listă de vectori este liniar dependentă dacă nu este liniar independentă, adică există o egalitate de forma $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$, unde cel puțin unul dintre scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ este diferit de 0.

Observație 3.2.2.

(1) Definiția liniar independenței unei liste $v = [v_1, v_2, \dots, v_n]^t$ se poate scrie astfel:

$$[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n][v_1, v_2, \dots, v_n]^t = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

(2) Lista vidă de vectori este admisă ($n = 0$). În particular lista vidă este liniar independentă.

(3) O listă cu un singur element $[v_1]^t$ este exact atunci liniar independentă când $v_1 \neq 0$.

(4) Dacă lista $[v_1, v_2, \dots, v_n]^t \in V^{n \times 1}$, atunci ea este liniar dependentă, deoarece $0v_1 + \dots + 1v_i + \dots + 0v_n = 0$

(5) Dacă lista $[v_1, v_2, \dots, v_n]^t \in V^{n \times 1}$ conține doi vectori egali $v_i = v_j$ cu $i \neq j$ atunci ea este liniar dependentă, deoarece:

$0v_1 + \dots + 1v_i + \dots + (-1)v_j + \dots + 0v_n = 0$

Exemplu 3.2.3.

(1) Lista $[v_1, v_2, v_3]^t$ cu vectorii $v_1 = [1, 0, 1]$, $v_2 = [1, 2, 3]$ și $v_3 = v_1 + v_2 = [2, 2, 4]$ este liniar dependentă în $\mathbb{R}^3$ deoarece

$1v_1 + 1v_2 + (-1)v_3 = v_1 + v_2 - v_3 = 0$

(2) Lista $[e_1, e_2, e_3]^t$ cu vectorii $e_1 = [1, 0, 0]$, $e_2 = [0, 1, 0]$, $e_3 = [0, 0, 1]$ este liniar independentă în $\mathbb{R}^3$

Se spune că lista de vectori $[w_1, w_2, \dots, w_m]^t \in V^{m \times 1}$ este o sublistă a listei $[v_1, v_2, \dots, v_n]^t \in V^{n \times 1}$ dacă $\{w_1, w_2, \dots, w_m\} \subseteq \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Cu alte cuvinte, $[w_1, w_2, \dots, w_m]^t = [v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_m}]^t$, pentru anumiți indici $i_1, i_2, \dots, i_m \in \{1, \dots, n\}$

Propoziție 3.2.4.

Se consideră $w = [v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_m}]^t \in V^{m \times 1}$ o sublistă a listei $v = [v_1, v_2, \dots, v_n]^t \in V^{n \times 1}$. Dacă w este liniar dependentă atunci așa este și v. Dacă v este liniar independentă atunci așa este și w.

Propoziție 3.2.5.

Fie $v = [v_1, v_2, \dots, v_n]^t \in V^{n \times 1}$ o listă de vectori. Pentru $i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ notăm $v^{\setminus i_1, i_2, \dots, i_k}$ sublista care este obținută din v prin eliminarea vectorilor $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}$.

Pentru o listă de vectori $v = [v_1, v_2, \dots, v_n]^t$ scriem $\langle v \rangle = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ și vom vorbi despre subspațiul generat de lista v.

Propoziție 3.2.6.

Fie $v = [v_1, v_2, \dots, v_n]^t \in V^{n \times 1}$ o listă de vectori. Lista v este liniar dependentă dacă $\exists\ i \in \{1, \dots, n\}$ a.î. v_i este o comb combinație liniară a celorlalți vectori din $v^{\setminus i}$.

Corolar 3.2.7.

Fie $v = [v_1, v_2, \dots, v_n]^t \in V^{n \times 1}$ o listă de vectori, a.î. $\exists\, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ cu proprietatea că v_i este o combinație liniară a vectorilor din lista $v^{\backslash i}$ (adică $v_i = \lambda_1 v_1 + \dots \lambda_n v_n$ unde λ este scalar) atunci $\langle v \rangle = \langle v^{\backslash i} \rangle$

Definiție 3.2.8.

O submulțime finită $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$ se numește liberă dacă lista $[v_1, v_2, \dots, v_n]^t \in V^{n \times 1}$ este liniar independentă. O submulțime oarecare $B \subseteq V$ se numește liberă dacă fiecare submulțime finită a lui B este liberă.

Baze și coordonate

Definiție 3.2.9.

O bază a unui K-spațiu vectorial V este o listă de vectori $b = [b_1, b_2, \dots, b_n]^t \in V^{n \times 1}$ a.î. b este liniar independent (adică niciunul dintre vectori nu poate fi exprimat ca o combinație liniară a celorlalți) și $\langle b \rangle = V$ (adică $\langle b \rangle = \{v \in V \mid v = c_1 b_1 + c_2 b_2 + \dots + c_n b_n,\ c_1, \dots, c_n \in K\}$)

Observație 3.2.10.

O bază a unui spațiu vectorial V este o submulțime $B \subseteq V$ a.î. B este liberă și $\langle B \rangle = V$.

Exemplu 3.2.11.

Lista $e = [e_1, e_2, \dots, e_n]^t$, unde $e_1 = [1, 0, \dots, 0] \in K^n$, $e_2 = [0, 1, \dots, 0] \in K^n \dots$, $e_n = [0, 0, \dots, 1] \in K^n$ este o bază pentru K^n. Această bază se numește baza canonică a lui K^n. Baza canonică se poate scrie cu ajutorul așa numitelor simboluri lui Kronecker:

$$e_i = [\delta_{i,j}]_{1 \le j \le n} \in K^n, \text{ unde } \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } i = j \\ 0 & \text{dacă } i \neq j \end{cases} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Propoziție 3.2.12.

Fie V un K-spațiu vectorial și $b = [b_1, b_2, \dots, b_m]^t \in V^{m \times 1}$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) b este o listă de vectori maximal liniar independentă, b este liniar independentă și $\forall\, x \in V$ lista $b' = [b_1, b_2, \dots, b_m, x]$ nu mai are aceeași proprietate.

(ii) b este o listă minimală cu proprietatea că generează

V, adică $\langle b\rangle = V$ și $\forall\ i \in \{1, \dots, n\}$ avem $\langle b^{i}\rangle \neq V$

(iii) b este o bază a lui V.

<u>Definiție</u> 3.2.13.

Un K-spațiu vectorial V se numește finit generat dacă există o mulțime finită $\{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subseteq V$ a.î. $\langle b_1, b_2, \dots, b_n\rangle = V$.

<u>Corolar</u> 3.2.14.

Orice spațiu vectorial finit generat are o bază.

<u>Observație</u> 3.2.15.

Aici și în ce urmează, vom considera numai spații vectoriale finit generate. Totuși multe rezultate sunt valabile și în cazul spațiilor care nu sunt finit generate

<u>Propoziție</u> 3.2.16.

Fie V un K-spațiu vectorial și $b = [b_1, b_2, \dots, b_n]^t \in V^{n\times 1}$

Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) b este o bază a lui V.

(iii) Pentru orice vector $x \in V$ există un unic sistem de scalari $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_n] \in K^n$ a.î. $x = \alpha b = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n$

Definiție 3.2.17.
Fie V un K-spațiu vectorial și $b = [b_1, b_2, \dots, b_n]^t \in V^{n \times 1}$. Numim coordonate unui vector $x \in V$ în raport cu b scalari unic determinați $[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ cu proprietatea $x = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$.

Dimensiunea unui spațiu vectorial

Lemă 3.2.18. (Steinitz)
Se consideră două liste de vectori $v = [v_1, v_2, \dots, v_n]^t \in V^{n \times 1}$ și $w = [w_1, w_2, \dots, w_m]^t \in V^{m \times 1}$ într-un K-spațiu vectorial V unde $n, m \in \mathbb{N}$. Dacă v este liniar independentă și $\langle w \rangle = V$, atunci avem $n \le m$ (numărul de vectori liniar independenți nu poate fi mai mare decât numărul de vectori care generează întreg spațiul), după o renumerotare $\langle v_1, \dots, v_n, w_{n+1}, \dots, w_m \rangle = V$.

Corolar 3.2.19.

Oricare două baze ale unui K-spațiu vectorial (finit generat) au același număr de elemente.

Definiție 3.2.20.

Prin definiție dimensiunea unui K-spațiu vectorial V este numărul elementelor unei baze a lui V. Se scrie $\dim_K V$ sau simplu $\dim V$. De acum vom folosi noțiunea de spații finit dimensionale pentru a ne referi la spații finit generate.

1. Spațiul $\mathbb{R}^2$ (planul 2D):

- Spațiul vectorial $\mathbb{R}^2$ este format din toate vectorii de forma (x, y), unde $x, y \in \mathbb{R}$.

- O bază pentru $\mathbb{R}^2$ este:

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1).$$

Acești vectori sunt liniar independenți și orice vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ poate fi scris ca:

$$(x, y) = x \cdot \mathbf{e}_1 + y \cdot \mathbf{e}_2.$$

Exemplu 3.2.21.

(1) $\dim 0 = 0$

(2) $\dim_K K^n = n$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R} = 1$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$

Observație 3.2.22.

Următoarele afirmații sunt adevărate într-un spațiu finit dimensional:

(a) Orice listă de vectori liniar independentă se poate completa cu alți vectori a.î. lista să devină o bază.

(b) Din orice listă de vectori $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ care generează spațiul vectorial V, putem elimina vectorii redundanți a.î. să rămânem doar cu baza.

c) Dimensiunea unui spațiu vectorial V este egală cu numărul maxim de vectori liniar independenți din acel spațiu

d) Dimensiunea unui spațiu este cel mai mic număr de elemente al unei liste care generează acel spațiu

Propoziție 3.2.23.

Fie V un K-spațiu vectorial cu $\dim_K V = n$ și $b = [b_1, b_2, \dots, b_n] \in V^{n \times 1}$ o listă de vectori. Următoarele relații sunt echivalente:

(i) b este linear independentă

(ii) $\langle b \rangle = V$ $(\langle b \rangle = \text{span}(b)$, span(b) este mulțimea tuturor combinațiilor liniare ale vectorilor din b)

(iii) b este o bază

Proprietatea de universalitate a bazei unui spațiu vectorial

Teoremă 3.2.24.

Fie V și W două K-spații vectoriale și $v = [v_1, v_2, \dots, v_m]^t \in V^{m\times 1}$ o bază a lui V. Pentru orice funcție $f : \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \to W$ există o aplicație liniară unică $\bar{f} : V \to W$ astfel încât $\bar{f}(v_i) = f(v_i)$ $\forall\ i = \overline{1, m}$ (cu alte cuvinte aplicația $\bar{f}$ extinde f la întreg spațiu vectorial V)

Corolar 3.2.25.

Fie V și W două K-spații vectoriale și $v = [v_1, v_2, \dots, v_m]^t \in V^{m\times 1}$ o bază a lui V.

(a) Dacă $f, g : V \to W$ sunt aplicații a.î. $f(v_i) = g(v_i)$ pentru orice $1 \le i \le m$, atunci $f = g$.

(b) Dacă $\dim_K W = m$ atunci $V \cong W$

(c) $V \cong K^m$

Formule legate de dimensiuni

Propoziție 3.2.26.

Se consideră un K-spațiu vectorial V și $S, T \leq_K V$ două subspații. Avem:

$$\dim S + \dim T = \dim (S+T) - \dim (S \cap T)$$

Corolar 3.2.27.

Dacă V este un K-spațiu vectorial finit dimensional și $S \leq_K V$, atunci $\dim S \leq \dim V$. Mai mult, $\dim S = \dim V$ ddacă $S = V$

Propoziție 3.2.28.

Fie $f : V \to W$ o aplicație liniară între două K-spații vectoriale V și W. Atunci:

$$\dim V = \dim \underset{\substack{\parallel \\ \forall x,\ f(x)=0}}{\operatorname{Ker} f} + \dim \underset{\substack{\parallel \\ x,\ f(x) \in W}}{\operatorname{Im} f}$$

Corolar 3.2.29.

Fie V și W două K spații vectoriale cu $\dim V = \dim W$ și $f : V \to W$ o aplicație liniară. Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) f este injectivă

(ii) f este surjectivă

(iii) f este bijectivă

Lema substituției

Teoremă 3.2.30.

Fie $b = [b_1, b_2, \dots, b_n]^t$ o bază a K-spațiului vectorial V și $v \in V$ cu coordonatele $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ în raport cu baza b (adică $v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n$). Considerăm lista de vectori $b' = [b_1, \dots, v, \dots, b_n]$ care rezultă din v prin înlocuirea vectorului b_i cu v. Atunci:

(a) b' este bază d.n.d. $\alpha_i \neq 0$

(b) Dacă b' este o bază și $x \in V$ are coordonatele $[x_1, \dots, x_n]$ în raport cu b și $[x_1', \dots, x_n']$ în raport cu b' atunci:

$$\begin{cases} x_i' = \dfrac{x_i}{\alpha_i} \\ x_j' = \dfrac{(\alpha_i x_j - \alpha_j x_i)}{\alpha_i} \quad \text{pentru } j \neq i \end{cases}$$

Fie $V = \mathbb{R}^2$, cu baza $\mathbf{b} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]$:

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}.$$

Considerăm $\mathbf{v} = 2\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2$ (deci $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3$).

1. Înlocuim $\mathbf{b}_1$ cu $\mathbf{v}$, obținând baza nouă $\mathbf{b}' = [\mathbf{v}, \mathbf{b}_2]$.

2. Fie $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$. Coordonatele lui în raport cu $\mathbf{b}$ sunt:

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 5.$$

3. Coordonatele lui $\mathbf{x}$ în raport cu $\mathbf{b}'$ sunt:

$$x'_1 = \frac{x_1}{\alpha_1} = \frac{4}{2} = 2,$$

$$x'_2 = \frac{\alpha_1 x_2 - \alpha_2 x_1}{\alpha_1} = \frac{2 \cdot 5 - 3 \cdot 4}{2} = \frac{10 - 12}{2} = -1.$$

Astfel, $\mathbf{x}$ are coordonatele $[2, -1]$ față de baza $\mathbf{b}'$.

Definiție 3.2.31.
Se numește rangul unei liste de vectori $v = [v_1, \dots, v_n]^t$ dimensiunea spațiului generat de v, $\operatorname{rank} v = \dim \langle v \rangle$

Fie lista de vectori în $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}.$$

1. Verificăm dacă vectorii sunt liniar independenți:
   - Observăm că $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, deci $\mathbf{v}_3$ este dependent de $\mathbf{v}_1$ și $\mathbf{v}_2$.
2. Spațiul generat de acești vectori este bidimensional (planează într-un plan în $\mathbb{R}^3$). Deci:

$$\operatorname{rank}(\mathbf{v}) = 2.$$