Analiza

5. Extreme locale pentru funcții reale de variabilă vectorială

Def: Fie $A \subseteq \mathbb{R}^m$ mulțime nevidă, $f: A \to \mathbb{R}$ o funcție și $x^0 \in A$. Spunem că:

a) x^0 este punct de minim (local) al lui f dacă $\exists\, r > 0$ a.î. $f(x^0) \leq f(x)$, $\forall\, x \in B(x^0, r) \cap A$.

b) x^0 este punct de maxim (local) al lui f dacă $\exists\, r > 0$ a.î. $f(x^0) \geq f(x)$, $\forall\, x \in B(x^0, r) \cap A$.

c) x^0 este punct de extrem (local) al lui f dacă f este punct de minim sau maxim local.

$\boxed{T}$ (Fermat) Fie $A \subseteq \mathbb{R}^m$ și $f: A \to \mathbb{R}$ o funcție. Dacă

i) $x^0 \in \text{int} A$ (adică x^0 este un punct interior al mulțimii A)

ii) f este derivabilă parțial în x^0

iii) x^0 este punct de extrem atunci $\nabla f(x^0) = 0_m$

Dem: Considerăm că x^0 este punct de minim local $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, r > 0$ a.î. $f(x^0) \leq f(x)$, $\forall\, x \in B(x^0, A) \subseteq A$ deoarece $x^0 \in \text{int} A$.

Fie $H(x^0, l) = [x_1^0 - l, x_1^0 + l] \times \ldots \times [x_m^0 - l, x_m^0 + l]$

hipercubul de centru x^0 și latură $2l$. Evident $\exists\, l>0$ a.î. $H(x^0, l) \subseteq B(x^0, r)$

Fie $i \in \{1, \dots, m\}$ fixat și funcția $\ell : (x_i^0 - l, x_i^0 + l) \to \mathbb{R}$,

$\ell(t) = f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, t, x_{i+1}^0, \dots, x_m^0)$

Funcția ℓ este derivabilă în $t = x_i^0$ și $\ell'(x_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$

Avem $\ell(x_i^0) = f(x^0) \le \ell(t)$, $\forall t \in (x_i^0 - l, x_i^0 + l) \Rightarrow$

$\Rightarrow x_i^0$ este punct de minim al lui $\ell \xRightarrow{T.F.} \ell'(x_i^0) = 0$,

deci $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$, $\forall i = \overline{1, m} \Rightarrow \nabla f(x^0) = 0_m$

Def: Cu notațiile din teorema anterioară, un punct $x^0 \in \text{int}A$ cu proprietatea că $\nabla f(x^0) = 0_m$ se numește punct critic al lui f.

Obs: Orice punct de extrem local din interiorul domeniului lui f este punct critic al lui f. Reciproca nu este adevărată.

Ex: a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = (x_1)^4 + (x_2)^4$

Evident $(0,0)$ este punct de extrem, $f(0,0) \le f(x_1, x_2)$, $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

Dar $(0,0)$ este și punct critic, deoarece $\nabla f(0,0) = 0_2$

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = (x_1)^2 - (x_2)^2$

$(0,0)$ este punct critic, deoarece $\nabla f(0,0) = 0_2$, dar $(0,0)$ nu este punct de extrem local.

$\forall\, r>0$, $(t,0), (0,t) \in B(0_2, r)$ pentru $t \neq 0$ suficient de mic.

$f(0,0) = 0 < f(t,0)$ și $f(0,0) = 0 > f(0,t)$

<u>Def</u>: Punctele critice ale unei funcții care nu sunt puncte de extrem local se numesc puncte șa.

<u>Obs</u>: Studiul punctelor de extrem local se poate face cu ajutorul diferențialei de ordin 2.

<u>Def</u>: Fie $C = (c_{i,j})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,m}}}$ o matrice pătratică cu coeficienți reali.

a) Funcția $\emptyset : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\emptyset(u) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} \cdot u_i \cdot u_j$, $\forall\, u = (u_1, .., u_m) \in \mathbb{R}^m$ se numește forma pătratică asociată matricei C

b) Spunem că $\emptyset$ este pozitiv definită dacă

$\emptyset(u) > 0$, $\forall\, u \in \mathbb{R}^m \setminus \{0_m\}$

c) Spunem că $\emptyset$ este negativ definită dacă

$\emptyset(u) < 0, \forall u \in \mathbb{R}^m \setminus \{0_m\}$

d) Spunem că $\emptyset$ este indefinită dacă

$\exists\, u, v \in \mathbb{R}^m$ a.î. $\emptyset(u) < 0 < \emptyset(v)$

Obs: a) $\emptyset(0_m) = 0$

b) Diferențiala de ordinul 2 a unei funcții f într-un punct x^0 este o formă pătratică asociată matricei hessiene, $H(f)(x^0)$

Prop (criteriul lui Sylvester)

Fie $\emptyset : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ forma pătratică asociată unei matrici

$C = (c_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,m}}}$ și $\Delta_K = \det(c_{ij})_{\substack{i=\overline{1,K} \\ j=\overline{1,K}}}$, $K = \overline{1,m}$ (numiți determinanții lui Sylvester). Au loc afirmațiile:

1° $\emptyset$ este pozitiv definită $\Leftrightarrow \Delta_K > 0, \forall K = \overline{1,m}$

2° $\emptyset$ este negativă definită $\Leftrightarrow (-1)^K \cdot \Delta_K > 0, \forall K = \overline{1,m}$

Obs: $\Delta_1 = c_{11}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}$, $\dots$, $\Delta_m = \det(C)$

$\boxed{T}$ Fie $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $f: A \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^2 într-un punct $x^0 \in \text{int } A$ și $\nabla f(x^0) = 0_m$. Au loc afirmațiile:

1°. Dacă $d^2 f(x^0)$ este pozitiv definită $\Rightarrow x^0$ punct de minim local

2°. Dacă $d^2 f(x^0)$ este negativ definită $\Rightarrow x^0$ punct de maxim local

3°. Dacă $d^2 f(x^0)$ este indefinită $\Rightarrow x^0$ punct șa

Ex:

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = (x_1)^2 + x_1 x_2 + (x_2)^2 + a x_1 + b x_2$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ constante date.

I) Căutăm punctele critice:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 + x_2 + a$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 + 2x_2 + b$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2 + a, 2x_2 + x_1 + b) \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + a = 0 \\ 2x_2 + x_1 + b = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow x_1 = \dfrac{-x_2 - a}{2} \\ 2x_2 - \dfrac{x_2 + a}{2} + b = 0 \Rightarrow 4x_2 - x_2 - a + 2b = 0 \Rightarrow x_2 = \dfrac{a-2b}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-\frac{a-2b}{3} - a}{2} = \frac{\frac{-a+2b-3a}{3}}{2} = \frac{2b-4a}{6} = \frac{b-2a}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_1^0, x_2^0) = \left(\frac{b-2a}{3}, \frac{a-2b}{3}\right)$$

II) Semnul diferențialei de ordinul 2:

$$H(f)(x_1^0, x_2^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \ \Delta_1 = 2 > 0, \ \Delta_2 = 3 > 0$$

$$d^2 f(x_1^0, x_2^0)(u_1, u_2) = u \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = (u_1 \ \ u_2) \cdot \begin{pmatrix} 2u_1 + u_2 \\ u_1 + 2u_2 \end{pmatrix} =$$

$= u_1(2u_1 + u_2) + u_2(u_1 + 2u_2) = 2u_1^2 + 2u_1u_2 + 2u_2^2$ pozitiv definită

$\Rightarrow (x_1, x_2)$ punct de minim local.

$\inf f(\mathbb{R}^2) = -\frac{1}{3}(a^2 - ab + b^2)$

$\sup f(\mathbb{R}^2) = +\infty$

Ex: Considerăm problema determinării distanței de la un punct dat la un plan dat în spațiul $\mathbb{R}^3$.

Fie $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ punctul dat și

$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = c\}$ un plan dat,

$b_1, b_2, b_3, c \in \mathbb{R}$ date.

$x = (x_1, x_2, x_3) \in S$: $\|x - a\| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2}$

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2$

De minimizat $f|_S \Rightarrow$ problemă de extrem condiționat

În continuare considerăm numerele naturale $p < m$.

<u>Def.</u> Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^m$ mulțime nevidă, $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție și $F = (F_1, \dots, F_p) : A \to \mathbb{R}^p$ o funcție vectorială, notăm

$$S = \{x \in A \mid F_1(x) = \dots = F_p(x) = 0\} \tag{1}$$

numită mulțimea restricțiilor.

Un punct $x^0 \in S$ se numește punct de extrem condiționat al lui f relativ la S dacă x^0 este punct de extrem local al funcției $f|_S$.

$\boxed{T}$ (metoda multiplicatorilor lui Lagrange)

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^m$ mulțime deschisă, $f : A \to \mathbb{R}$ și $F = (F_1, \dots, F_p) : A \to \mathbb{R}^p$ funcții cu proprietatea că $f, F_1, \dots, F_p$ sunt toate de clasă C_1 pe A, $x^0 \in S$ un punct de extrem condiționat al lui f relativ la mulțimea S dată de (1) și rang $J(F)(x^0) = p$.

Atunci funcția $L : A \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ definită prin:

$$L(x, y) = f(x) + y \cdot F(x), \ \forall x \in A, \forall y \in \mathbb{R}^p \tag{2}$$

admite un punct critic de forma (x^0, λ), cu $\lambda \in \mathbb{R}^p$.

Cu alte cuvinte $\nabla L(x^0, \lambda) = 0_{m+p}$ (3)

<u>Obs</u>: a) Teorema dă o condiție necesară ca x^0 să fie punct de extrem condiționat.

b) Funcția L dată de (2) se numește **funcția lui Lagrange** asociată funcțiilor f și F. Ea se mai scrie:

$L(x, y) = f(x) + y_1 \cdot F_1(x) + \ldots + y_p \cdot F_p(x), \forall x \in A, \forall y = (y_1, \ldots, y_p) \in \mathbb{R}^p$

c) Numerele $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) = \lambda \in \mathbb{R}^p$ a căror existență este garantată de teoremă se numesc multiplicatorii lui Lagrange.

d) Relația (3) se poate scrie

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(x^0, \lambda) = 0, \forall i = \overline{1,m}, \quad \frac{\partial L}{\partial y_j}(x^0, \lambda) = 0, \forall j = \overline{1,p}$$

<u>Ex</u>: Revenim la exemplul anterior

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2,$

$(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$

$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, F(x_1, x_2, x_3) = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 - c, (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$

$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x_1, x_2, x_3) = 0\}$

$m = 3, p = 1$

$J(F)(x_1, x_2, x_3) \Rightarrow$ rang $J(F) = 1$ dacă $(b_1, b_2, b_3) \neq 0$

Introducem funcția lui Lagrange:

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 + \lambda(b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 - c)$$

Formăm sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(x_1 - a_1) + \lambda b_1 = 0 & / \cdot b_1 \\ 2(x_2 - a_2)^2 + \lambda b_2 = 0 & / \cdot b_2 \\ 2(X_3 - a_3)^2 + \lambda b_3 = 0 & / \cdot b_3 \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 - c = 0 \end{cases}$$

$$\overset{(+)}{\Rightarrow} 2(b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3) + \lambda(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2 \cdot (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 - c)}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

$$x_1 - a_1 = -\frac{\lambda b_1}{2}, \quad x_2 - a_2 = -\frac{\lambda b_2}{2}, \quad x_3 - a_3 = -\frac{\lambda b_3}{2}$$

ce permite determinarea lui (x_1, x_2, x_3) punct de extrem condiționat al lui f relativ la S.

$$\Rightarrow \min(S) = \left(-\frac{\lambda b_1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\lambda b_2}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\lambda b_3}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{\lambda^2}{4}(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = \frac{(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 - c)^2}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

Distanța căutată va fi egală cu $\dfrac{|a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 - c|}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$