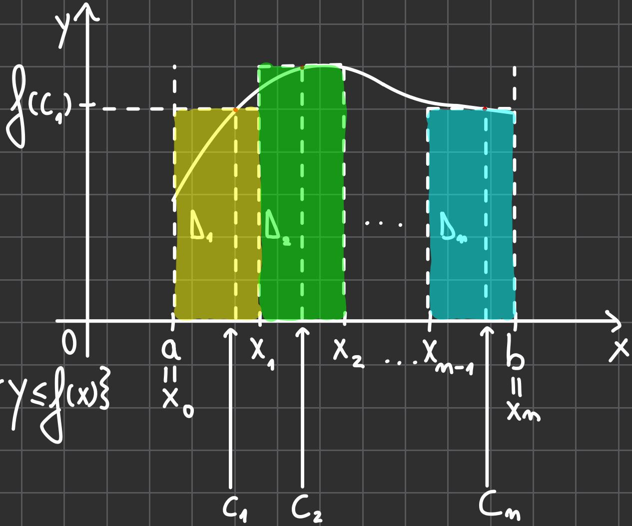
Analiza

6. Integrala Riemann

aria = ?



$f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$

$S[a,b] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$

subgraficul funcției f.

Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$

$\forall\, k = \overline{1,n}$, Δ_k – dreptunghiul de laturi $x_k - x_{k-1}$ și $f(c_k)$, $k = \overline{1,n}$

$$\text{aria } S[a,b] = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \text{aria}(\Delta_k) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{f(c_k)}_{\text{înălțimea}} \cdot \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{\text{lățimea}}$$

Def: Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție mărginită și $n \in \mathbb{N}^*$

a) Un șir finit $\Delta = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ cu proprietatea $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ se numește diviziune a intervalului $[a,b]$

b) Numărul real $\|\Delta\| = \max\{x_k - x_{k-1} \mid k = \overline{1,n}\}$ se numește norma diviziunii Δ.

c) Un șir finit $\xi = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ cu proprietatea $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$

, $k=\overline{1,n}$ se numește sistem de puncte intermediare (s.p.i.) asociat diviziunii Δ.

d) Numărul real $\sigma_f(\Delta,\xi)=\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\cdot(x_k-x_{k-1})$ se numește suma Riemann a funcției f corespunzătoare diviziunii Δ și s.p.i. ξ.

e) Funcția f se numește integrală Riemann pe $[a,b]$ dacă $\exists\ I=\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sigma_f(\Delta,\xi)\in\mathbb{R}$, iar valoarea lui I nu depinde de alegerea s.p.i. ξ. Numărul I se numește integrala Riemann a funcției f pe $[a,b]$ și se notează cu $\int_a^b f(x)\,dx$

Obs: a) Șirul finit $x_k=a+(b-a)\cdot\frac{k}{n}$, $k=\overline{0,n}$ formează o diviziune a intervalului $[a,b]$ numită diviziunea echidistantă (dacă o folosim în calculul integralei Riemann, atunci toate subintervalele vor avea aceeași lungime)

b) Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$ atunci

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{b-a}{n}}_{\text{lungimea fiecărui subinterval când }[a,b]\text{ este împărțit în }n\text{ subintervale egale}}\cdot\sum_{k=1}^{n}\underbrace{f\big(\overbrace{a+(b-a)\cdot\tfrac{k}{n}}^{c_k=x_k}\big)}_{\text{înălțimea funcției la punctul }x_k}$$

, x_k este coordonata unui punct de diviziune dintr-o împărțire echidistantă.

Dem:

a) $x_0 = a$, $x_n = b$, $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n} > 0$

b) $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\|\Delta\| \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(c_k)\cdot(x_k - x_{k-1})$

Alegem diviziunea echidistantă $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ și $c_k = x_k$,

$\|\Delta\| = \frac{b-a}{n} \to 0 \quad (n \to \infty)$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot \frac{b-a}{n}$

Ex: a) $f(x) = \alpha$, $\forall\, x \in [a,b]$

Fie $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ o diviziune și $\xi = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ s.p.i.

$\sigma_f(\Delta, \xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha \cdot (x_k - x_{k-1}) = \alpha \cdot (x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \dots x_n - x_{n-1}) =$

$= \alpha(x_n - x_0) = \alpha(b-a) \Rightarrow \int_a^b \alpha\,dx = \lim\limits_{\|\Delta\| \to 0} \sigma_f(\Delta, \xi) = \alpha(b-a)$

$\Rightarrow f$ integrabilă pe $[a,b]$

b) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$, $f: [0,1] \to \mathbb{R}$

Fie $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ o diviziune oarecare a interv $[0,1]$,

$\exists\, c_k \in [x_{k-1}, x_k] \cap \mathbb{Q}$ și $c_k' \in [x_{k-1}, x_k] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, $k = \overline{1,n}$.

$\Rightarrow \xi = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ și $\xi' = (c_1', c_2', \dots, c_n')$ două s.p.i. ale lui Δ.

$\sigma_f(\Delta, \xi) = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot (x_k - x_{k-1}) = (x_n - x_0) = 1$, $\sigma_f(\Delta, \xi') = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot (x_k - x_{k-1}) = 0$

$\Rightarrow \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sigma_f(\Delta, \xi)$ depinde de ξ) $\Rightarrow f$ nu este int Riemann pe $[0,1]$

Prop: Orice funcție continuă pe $[a,b]$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$

Ex: $f(x) = x$, $\forall\, x \in [a,b]$, $\int_a^b f(x)\,dx = ?$

f continuă pe $[a,b] \Rightarrow \exists \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sigma_f(\Delta, \xi)$

Fie $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ diviziune echidistantă

$x_k = a + (b-a) \cdot \frac{k}{n}$, $k = \overline{0,n}$ și $\xi = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ s.p.i.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(a + (b-a) \cdot \frac{k}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a + (b-a) \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \right) = \lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \left(an + \cancel{n}(b-a) \cdot \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \frac{n(n+1)}{2n}\right) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \left(an + (b-a) \cdot \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n} \left(a + \frac{b-a}{2} + \underbrace{\frac{b-a}{n^2}}_{\to 0}\right)$$

$$= b-a\left(a + \frac{b-a}{2}\right) = \frac{\cancel{2ab} - 2a^2 + b^2 \cancel{- 2ab} + a^2}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

Prop: Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funcții integrabile Riemann pe $[a,b]$.

Au loc afirmațiile:

1° (monotonia integralei)

Dacă $f(x) \le g(x)$, $\forall\, x \in [a,b]$ atunci $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

2°. (liniaritatea integralei)

$$\int_a^b (\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x))\,dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\,dx + \beta \cdot \int_a^b g(x)\,dx, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

3°. (aditivitatea integralei)

$$\int_a^b f(x) = \int_a^c f(x) + \int_c^b f(x), \ \forall c \in (a,b)$$

<u>Cons</u>: Dacă $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ este funcție continuă pe $[a,b]$ atunci au loc afirmațiile:

1°. Dacă $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$ atunci $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

2°. $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

3° $\inf f([a,b]) \leq \underbrace{\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx}_{\text{înălțimea medie a unui dreptunghi}} \leq \sup f([a,b])$

<u>Def</u>: Fie $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție și $F:[a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu proprietatea că $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a,b]$.

Atunci F se numește <u>primitiva</u> (antiderivata) lui f.

<u>Obs</u>: a) Orice primitivă a funcției nule este o funcție constantă

b) Oricare două primitive ale unei funcții diferă printr-o constantă.

<u>Dem</u>: a) $f(x) = 0$, $\forall x \in [a,b]$ și $F:[a,b] \to \mathbb{R}$, $F'(x) = 0$, $\forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow$ aplicăm teorema de medie a lui Lagrange funcției F pe intervalul

$[a,x]$, $x \in (a,b]$

$\exists\, c \in (a,x)$ a.î. $\underbrace{F'(c)}_{0} = \dfrac{F(x) - F(a)}{x-a} \Rightarrow F(x) = F(a) \Rightarrow$ valoarea funcției $F(x)$ nu se schimbă pe tot intervalul $\Rightarrow F(x)$ constantă, adică $F(x) = \mathcal{C}\ \forall\, x \in [a,b]$.

b) Fie $F, G : [a,b] \to \mathbb{R}$ a.î. $F'(x) = G'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in [a,b]$ unde $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este o funcție dată.

$\Rightarrow F'(x) - G'(x) = 0$, $\forall\, x \in [a,b] \Rightarrow F - G$ este o primitivă a funcției nule $\overset{a)}{\Rightarrow} F - G =$ constantă.

$\boxed{T}$ (teorema fundamentală a calculului integral)

Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă pe $[a,b]$ atunci au loc afirmațiile:

1°. Funcția $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $\forall\, x \in [a,b]$ este o primitivă a lui f.

2°. Dacă $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ este o primitivă oarecare a lui f atunci are loc formula

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) \overset{\text{not}}{=} G(x)\Big|_a^b$$

Prop (formula de integrare prin părți)

Dacă $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt funcții derivabile și derivatele lor sunt funcții continue pe $[a,b]$ atunci

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\, dx$$

Prop (formula schimbării de variabilă)

Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este continuă pe $[a,b]$, iar $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ este derivabilă cu derivata funcției continuă pe $[\alpha, \beta]$ și $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ atunci

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt$$

Dem: Dacă $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ este o primitivă a lui f, este considerată φ o funcție de transformare $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a,b]$, atunci $G \circ \varphi$ este o primitivă a lui $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ deoarece $(G \circ \varphi)'(t) =$
$= G'(f(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, $\forall\, t \in [\alpha, \beta]$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx = G(b) - G(a) = G(\varphi(\beta)) - G(\varphi(\alpha))$ și

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot f'(t)\, dt = (G \circ f)(\beta) - (G \circ f)(\alpha) = G(\varphi(\beta)) - G(\varphi(\alpha))$$