Algebra

3.3. Aplicații liniare și matrici

Matricea unei liste de vectori

În cele ce urmează se consideră un K-spațiu vectorial V cu $\dim_K V = n$. Reamintim că dacă $b = [b_1, b_2, \dots, b_n]^t$ o bază a lui V și $x \in V$, atunci coordonatele lui x în baza b sunt scalarii unic determinați $[x_1, x_2, \dots, x_n] \in K^n$ cu proprietatea:

$$x = x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_n b_n = [x_1, x_2, \dots, x_n][b_1, b_2, \dots, b_n]^t$$

Notăm $[x]_b = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ și egalitatea de mai sus se scrie $[x]_b b$.

Definiție 3.3.1.

Fie V un K-spațiu vectorial cu $\dim_K V = n$. Fie $b = [b_1, \dots, b_n]^t$ o bază a lui V și o lista de vectori $v = [v_1, v_2, \dots, v_m]^t$, unde fiecare $v_i \in V$. Prin matricea listei v în baza b se înțelege:

$$[v]_b = [[v_1]_b, [v_2]_b, \dots, [v_m]_b]^t \in M_{m \times n}(K)$$

sau cu alte cuvinte

$$[V]_b = \begin{bmatrix} [V_1]_b \\ [V_2]_b \\ \vdots \\ [V_m]_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

unde $v_i = \alpha_{i1} b_1 + \alpha_{i2} b_2 + \dots + \alpha_{in} b_n$, $1 \leq i \leq m$

Propoziție 3.3.2.

Fie V un K-spațiu vectorial cu $\dim_K V = n$. Fie $e = [e_1, e_2, \dots, e_n]^t$ o bază și fie $b = [b_1, b_2, \dots, b_n]$ un sistem de vectori în V. Atunci b este bază ddacă $[b]_e \in GL_n(K) = \{A \in M_n(K) \mid \det(A) \neq 0)$, adică $[b]_e$ este inversabilă (adică $[b]_e$ este inversabilă), și în acest caz avem pentru $x \in V$ avem $[x]_b = [x]_e [b]_e^{-1}$

Observație 3.3.3.

Dacă $e = [e_1, e_2, \dots, e_n]^t$ și $b = [b_1, b_2, \dots, b_n]^t$ sunt baze, iar $v = [v_1, v_2, \dots, v_m]$ este un sistem de vectori în V atunci $[v]_b = [v]_e [b]_e^{-1}$

Observație 3.3.4.

Dacă $v = [v_1, \dots, v_n]^t$ este un sistem vectorial iar $b = [b_1, b_2, \dots, b_n]^t$

este o bază a K-spațiului vectorial V atunci:

rank V = rank $[V]_b$

Matricea unei aplicații liniare

Definiție 3.3.5.

Se consideră K-spațiile vectoriale V și W cu $\dim_K V = m$ și $\dim_K W = n$. Prin matricea unei aplicații liniare $f \in Hom_K(V, W)$ în raport cu perechea de baze $v = [v_1, v_2, \dots, v_m]$ a lui V și $w = [w_1, w_2, \dots, w_n]$ a lui W înțelegem

$$[f]_{v,w} = [f(v)]_w \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$$

unde prin $f(v)$ am notat sistemul de vectori $[f(v_1), \dots, f(v_m)]^t$ în W. Cu alte cuvinte:

$$[f]_{v,w} = \begin{bmatrix} [f(v_1)]_w \\ [f(v_2)]_w \\ \vdots \\ [f(v_m)]_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

unde $f(v_i) = \alpha_{i1} w_1 + \alpha_{i2} w_2 + \dots + \alpha_{in} w_n$, pentru $1 \leq i \leq m$

Propoziție 3.3.6.

Se consideră K-spațiile vectoriale V, W și U cu $\dim_K V = m$, $\dim_K W = n$ și $\dim_K U = p$, împreună cu bazele $v = [v_1, \dots, v_m]$, $w = [w_1, \dots, w_n]$ și $u = [u_1, \dots, u_p]$ în V, W, respectiv U. Dacă $\alpha \in K$, $f, f' \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ și $g \in \mathrm{Hom}_K(W, U)$ avem:

(a) $[f + f']_{v,w} = [f]_{v,w} + [f']_{v,w}$

(b) $[\alpha f]_{v,w} = \alpha [f]_{v,w}$

(c) $[g \circ f]_{v,w} = [f]_{v,w} \cdot [g]_{w,u}$

Teoremă 3.3.7.

Se consideră K-spațiile vectoriale v și w cu $\dim_K V = m$, $\dim_K w = n$, împreună cu bazele $v = [v_1, v_2, \dots, v_m]$ și $w = [w_1, w_2, \dots, w_n]$.

Atunci:

(a) Aplicația $\varphi : \mathrm{Hom}_K(V, W) \to M_{m \times n}(K)$, $\varphi(f) = [f]_{v,w}$ este un izomorfism de spații vectoriale.

(b) Aplicația $\varphi : \mathrm{End}_K(V) \to M_{n \times n}(K)^{\circ}$, $\varphi(f) = [f]_{v,v}$ este un izomorfism de inele.

Observație 3.3.8.

Pentru $f \in End_K(V)$ vom nota uneori $[f]_v = [f]_{v,v}$ (ca și $M_n(K)$ în loc de $M_{n \times n}(K)$).

Teoremă 3.3.9.

(Formula schimbării de bază). Se consideră K-spațiile vectoriale V și W cu $\dim_K V = m$, $\dim_K W = n$, împreună cu bazele $v = [v_1, v_2, \dots, v_m]$, $v' = [v_1', v_2', \dots, v_m']$ în V și $w = [w_1, w_2, \dots, w_n]$, $w' = [w_1', w_2', \dots, w_n']$ în W. Dacă $f \in Hom_K(V, W)$ atunci avem:

$$[f]_{v',w'} = [v']_v \cdot [f]_{v,w} \cdot [w']_w^{-1}$$