Algebra

3. Algebra liniară

În acest capitol fixăm un corp comutativ $(K, +, \cdot)$. Exemple de corpuri comutative sunt în special $K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$ dar cazurile $K = \mathbb{Q}$ sau $K = \mathbb{Z}_p$ și $p \in \mathbb{N}$ este un număr prim sunt de asemenea posibile.

3.1. Spații vectoriale și aplicații liniare

<u>Definiție</u> 3.1.1.

Un spațiu vectorial peste K sau mai scurt K-spațiu vectorial este format dintr-un grup abelian $(V, \boxplus)$ împreună cu o operație externă $\odot : K \times V \to V$, adică un K-spațiu vectorial este o mulțime V împreună cu două operații: adunarea vectorială $\boxplus : V \times V \to V$ și înmulțirea scalară $\odot : K \times V \to V$ care satisface următoarele axiome:

(SV1) $\alpha \odot (x \boxplus y) = \alpha \odot x \boxplus \alpha \odot y$

(SV2) $(\alpha + \beta) \odot x = \alpha \odot x \boxplus \beta \odot x$

(SV3) $(\alpha\beta) \odot x = \alpha \odot (\beta \odot x)$

(SV4) $1 \odot x = x$

pentru $\forall\, u, v \in V$ și orice $\alpha, \beta \in K$. Se scrie ${}_K V$.

Elementele din V respectiv K sunt numite vectori respectiv scalari. Adunarea în V și operația externă se numesc adunarea vectorilor respectiv înmulțirea cu scalari. Spațiile vectoriale sunt numite uneori spații liniare.

<u>Exemplu</u> 3.1.2.

(1) $V = \{0\}$ este un spațiu vectorial, unde $0+0=0$ și $\alpha 0 = 0$ pentru orice $\alpha \in K$. Se notează cu 0 acest spațiu vectorial.

(2) K^n este un K-spațiu vectorial în raport cu adunarea vectorilor:

$$[x_1 + x_2 + \dots + x_n] + [y_1 + y_2 + \dots + y_n] = [x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n]$$

și cu înmulțirea vectorilor scalari:

$$\alpha [x_1 + x_2 + \dots + x_n] = [\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n]$$

(3) $M_{m \times n}(K)$ este un K-spațiu vectorial cu adunarea matricilor și cu înmulțirea unei matrici cu un scalar adică pentru $A = [a_{i,j}]$ și $B = [b_{i,j}]$ și $\alpha \in K$, avem

$A + B = [a_{i,j} + b_{i,j}]$ și $\alpha A = [\alpha a_{i,j}]$.

(4) Dacă K este un corp și L este un subcorp, atunci L este un K-spațiu vectorial, unde adunarea vectorilor este adunarea în L, adică elementele din L sunt adunate

conform regulilor din L iar înmulțirea este definită astfel:

$K \times L \to L$, $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$,

unde $\alpha \in K$, $x \in L$, iar αx reprezintă înmulțirea din K.

(5) Mulțimea tuturor polinoamelor

$$K[X] = \{a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n \mid n \in \mathbb{N},\ a_0, a_1, \dots, a_n \in K\}$$

este un K spațiu vectorial în raport cu adunarea polinoamelor și înmulțirea polinoamelor cu scalari din K.

(6) Mulțimea tuturor vectorilor liberi din plan (sau spațiu) în raport cu adunarea vectorilor liberi și obișnuita înmulțire cu scalari este un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial.

<u>Propoziție</u> 3.1.3.

Fie V un K-spațiu vectorial, $x, y \in V$ și $\alpha, \beta \in K$. Avem:

(a) $\alpha 0 = 0 = 0x$

(b) $\alpha(-x) = -\alpha(x) = -\alpha x$

(c) $\alpha(x-y) = \alpha x - \alpha y$ și $(\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x$

(d) $\alpha x = 0$ ddacă $\alpha = 0$ sau $x = 0$

Subspații vectoriale

Definiție 3.1.4.

Fie V un K-spațiu vectorial. Un subspațiu vectorial a lui V este o submulțime $U \subseteq V$, cu proprietatea că adunarea vectorilor și înmulțirea cu scalari induc operații bine definite pe U (adică $x, y \in U$, $\alpha \in K \Rightarrow x+y, \alpha x \in U$), și U împreună cu operațiile restricționate formează un spațiu vectorial. Se scrie $U \leq_K V$ sau simplu $U \leq V$.

Exemplu 3.1.5.

Orice spațiu vectorial ${}_K V$ are două subspații triviale, anume $0 \leq_K V$ și $V \leq V$.

Propoziție 3.1.6.

Fie V un K-spațiu vectorial și fie $U \subseteq V$ o submulțime. Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) $U \leq_K V$

(ii) a) $0 \in U$

b) $x, y \in U \Rightarrow$

(c) $x \in U$, $\alpha \in K \Rightarrow \alpha x \in U$

(iii)(a) $0 \in U$

(b) $x, y \in U \Rightarrow \alpha x + \beta y \in U$

<u>Propoziție</u> 3.1.7.

Fie V un K-spațiu vectorial. Dacă $U_i \leq_K V$ sunt subspații, cu $i \in I$, atunci avem $\bigcap_{i \in I} U_i \leq_K V$.

<u>Observație</u> 3.1.8.

Reuniunea a două sau mai multe subspații nu este a necesitate subspațiu.

<u>Definiție</u> 3.1.9.

Fie V un K-spațiu vectorial și $X \subseteq V$ o submulțime a lui V. Subspațiul generat de X este definit prin

$$\langle X \rangle = \langle X \rangle_K = \bigcap_{X \subseteq U \leq V}$$

Dacă $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ este o mulțime finită, scriem $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle_K$ în loc de $\langle \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \rangle_K$.

Lemă 3.1.10.

Fie V un K-spațiu vectorial și $X \subseteq V$ o submulțime a lui V. Avem:

(a) $\langle X \rangle_K \leq_K V$

(b) $X \subseteq \langle X \rangle_K$ și $X = \langle X \rangle_K$ ddacă $X \leq_K V$

(c) $\langle X \rangle_K$ este cel mai mic subspațiu a lui V care conține X

$$U = \langle X \rangle_K \text{ ddacă } \begin{cases} U \leq_K V \\ X \subseteq U \\ \text{dacă } W \leq_K V \text{ a.î. } X \subseteq W \text{ atunci } U \leq_K W \end{cases}$$

(d) Dacă $X \subseteq Y$ atunci $\langle X \rangle_K \leq \langle Y \rangle_K \leq V$

Propoziție 3.1.11

Fie V un K-spațiu vectorial și $X \subseteq V$ o submulțime a lui V. Avem:

$\langle X \rangle_K = \{ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n \mid n \in \mathbb{N},\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ și $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K \}$

În particular, pentru $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ avem:

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle_K = \{ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K \}$$

Definiție 3.1.12.

Fie V un K-spațiu vectorial și $X \subseteq V$. Se numește **combinație liniară** a vectorilor din X o expresie de forma $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$ cu $n \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ și $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$. În particular o combinație liniară a vectorilor $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ este o expresie de forma $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ și o combinație liniară a vectorilor $x, y \in V$ este $\alpha x + \beta y$ cu $\alpha, \beta \in K$.

Observație 3.1.13.

Prop 3.1.11 spune că subspațiul generat de X conține toți vectorii care se pot scrie în formă de combinații liniare de elementele ale lui X.

Corolar 3.1.14.

Fie V un K-spațiu vectorial

(a) Pentru $x \in V$ avem $\langle x \rangle_K = \{x\alpha \mid \alpha \in K\}$

(b) Pentru $x, y \in V$ avem $\langle x, y \rangle_K = \{x\alpha + y\beta \mid \alpha, \beta \in K\}$

Suma și suma directă a subspațiilor

Definiție 3.1.15.
Fie V un K-spațiu vectorial și fie $S, T \le_K V$ două subspații. Suma acestor două subspații este definită ca fiind $S+T = \{x+y \mid x \in S, y \in T\}$

Propoziție 3.1.16.
Fie V un K-spațiu vectorial și fie $S, T \le_K V$ două subspații. Atunci avem $\langle S \cup T \rangle_K = S+T$, unde $\langle S \cup T \rangle_K$ este format din toate combinațiile liniare ale vectorilor din $S \cup T$. Suma a două subspații este un subspațiu.

Corolar 3.1.17.
Într-un K-spațiu vectorial V notăm cu $Sub_K(V) = \{S \mid S \le_K V\}$ mulțimea tuturor subspațiilor. Atunci mulțimea $(Sub_K(V), \le_K)$ este o latice în care $\inf\{S, T\} = S \cap T$ (adică orice două subspații au un infim, și anume cel mai mare subspațiu inclus în ambele) și $\sup\{S, T\} = S+T$ (cel mai mic subspațiu care le conține pe ambele).

Elementele unei sume $S+T$ a două subspații $S, T \leq_K V$ sunt vectorii care se pot scrie ca o sumă între un vector S și un vector T.

<u>Propoziție</u> 3.1.18.

Fie V un K-spațiu vectorial și fie $S, T \leq_K V$ două subspații. Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) $S \cap T = 0$ (singurul vector comun între ele este 0)

(ii) Scrierea oricărui vector din $S+T$ ca o sumă dintre un vector din S și unul din T este unică, altfel spus pentru $v \in S+T$ avem $v = x + y = s + t$ cu $x, s \in S$ și $y, t \in T$ implică $x = s$ și $y = t$.

<u>Definiție</u> 3.1.19.

Se numește directă o sumă $S+T$ a două subspații S și T care satisface condițiile echivalente din 3.1.18. În acest caz se scrie $S \oplus T = S + T$

<u>Observație</u> 3.1.20.

Fie V K-spațiu vectorial și fie $S, T \leq_K V$ două subspații.

Atunci $V = S \oplus T$ ddacă $S \cap T = 0$ și $S + T = V$

Aplicații liniare

Definiție 3.1.21.

Fie V și W două K-spații vectoriale. Se numește aplicație liniară sau homomorfism de spații vectoriale între V și W o funcție $f: V \to W$ cu proprietățile $f(x+y) = f(x) + f(y)$ și $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ pentru $\forall\ x, y \in V$ și orice $\alpha \in K$. Se numește isomorfism o aplicație liniară care este și bijectivă. În acest caz spațiile vectoriale V și W se zic izomorfe și scriem $V \cong W$.

Exemplu 3.1.22.

Pentru orice două K-spații vectoriale V și W aplicațiile 1_V și $0: V \to W$, $0(x) = 0$ sunt liniare, mai mult 1_V este chiar un izomorfism.

Notație 3.1.23.

Fie V și W două K-spații vectoriale. Vom nota:

$Hom_K(V,W) = \{f : V \to W \mid f$ este liniară$\}$ și $End_K(V) = Hom_K(V,V)$

(o aplicație liniară $f : V \to V$ mai este numită și endomorfism a lui V)

Observație 3.1.24.

Orice aplicație liniară are:

(a) $f(0) = 0$

(b) $f(-x) = -f(x)$

Propoziție 3.1.25.

Fie V și W două K-spații vectoriale. O aplicație $f : V \to W$ este liniară ddacă $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$, pentru orice $x, y \in V$ și orice $\alpha, \beta \in K$.

Observație 3.1.26.

Prin inducție se poate arăta că o aplicație liniară, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ și $x_1, \dots, x_n \in V$ avem:

$$f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) = \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n)$$

Lemă 3.1.27.

Compunerea și adunarea a două aplicații liniare sunt de asemenea aplicații liniare. Înmulțirea unei aplicații liniare cu un scalar este o aplicație liniară. Funcția inversă a unui izomorfism este de asemenea un izomorfism.

Teoremă 3.1.28.

Fie V și W două K-spații vectoriale. Atunci $Hom_K(V, W)$ este de asemenea un K-spațiu vectorial în raport cu adunarea vectorilor (a funcțiilor):

$$+ : Hom_K(V,W) \times Hom_K(V,W) \to Hom_K(V,W)$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \text{ pentru } \forall x \in V$$

și cu înmulțirea cu scalari

$$\cdot : K \times Hom_K(V,W) \to Hom_K(V,W)$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \ \forall x \in V$$

Definiție 3.1.29.

Fie $f: V \to W$ o aplicație liniară. Numim nucleul respectiv imaginea lui f mulțimea:

$$Ker f = \{x \in V \mid f(x) = 0\} \text{ și } Im f = \{f(x) \mid x \in V\}$$

Propoziție 3.1.30

Dacă $f: V \to W$ este o aplicație liniară avem:

(a) $\operatorname{Ker} f \leq_K V$

(b) $\operatorname{Im} f \leq_K W$