Algebra

1.2. Mulțimi

Mulțimea e o colecție de obiecte distincte. Mulțimile pot să fie date în mod direct prin enumerarea explicită a elementelor sau prin precizarea unei condiții pe care trebuie să o îndeplinească. Scriem $x \in A$ ("x aparține mulțimii A") pentru a exprima faptul că x este un element al mulțimii A

<u>Exemplu</u> 1.2.1.

a) $A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{a, b, c, d\}$

$C = \{?, 7, *, \vee\}$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

b) $M = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 0 \leq x < 10\}$

$[-3, 8) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ și } -3 \leq x < 8\}$

<u>Definiție</u> 1.2.2.

Două mulțimi sunt egale exact atunci când ele conțin aceleași elemente.

<u>Exemplu</u> 1.2.3.

$\{1, 2, 3\} = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 3\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x < 4\}$

Observație 1.2.4.

a) Elementele unei mulțimi nu sunt ordonate în nici un fel: $\{1,2\}=\{2,1\}$ sau $\{a,b,c\}=\{a,c,b\}=\{b,a,c\}=\{b,c,a\}=$ $=\{c,a,b\}=\{c,b,a\}$.

b) Într-o mulțime un element apare numai o dată: $\{1,2\}$ și NU $\{1,2,2,1\}$

c) Definirea unei mulțimi necesită precauții, de exemplu $M=\{x \mid x \notin x\}$ care duce la o contradicție (paradoxul lui das Russell). Dacă presupunem că $M \in M$ atunci prin definiția lui M, $M \notin M$, ceea ce e contradictoriu. Astfel, soluția este să lucrăm cu un univers U suficient de mare (include toate elementele asupra cărora vrem să lucrăm) și care nu depinde de mulțimea pe care o definim. și un predicat $P(x)$ care este o expresie logică (ex. $P(x): x>5$) sau o propoziție logică (ex. $P(x)$: x este un număr prim) Astfel definim $M=\{x \in U \mid P(x)\}$ și nu $M=\{x \in P(x)\}$.

Exemplu 1.2.5.

Mulțimi de numere:

Numere naturale: $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\dots\}$, $\mathbb{N}^*=\{1,2,3,\dots\}$

Numere întregi: $\mathbb{Z}=\{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$

Numere raționale: $\mathbb{Q} = \{ \frac{m}{n} \mid n, m \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \}$

Numere iraționale: $\mathbb{R} / \mathbb{Q}$ (ex: $\sqrt{5}, \pi, -\sqrt{2}$)

Numere reale: $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R} = ?$)

Numere complexe: $\mathbb{C} = \{ a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \}$, $i^2 = -1$

<u>Definiție</u> 1.2.6.

Considerăm două mulțimi A și B. Spunem că A este o submulțime a lui B, dacă $x \in A \overset{\text{(implică)}}{\Rightarrow} x \in B$. Scriem $A \subseteq B$ (A este inclusă în B)

<u>Definiție</u> 1.2.7.

Mulțimea vidă $\emptyset$ este mulțimea care nu conține nici un element.

<u>Propoziție</u> 1.2.8.

Următoarele afirmații sunt valabile pentru orice mulțimi A, B, C

(a) $A \subseteq A$ (reflexivitate)

(b) Dacă $A \subseteq B$ și $B \subseteq C$ atunci $A \subseteq C$ (tranzitivitate)

(c) $A = B$ dacă $A \subseteq B$ și $B \subseteq A$ (antisimetrie)

(d) $\emptyset \subseteq A$

Operații cu mulțimi

Definiție 1.2.9.

Fie A și B mulțimi. Se definește:

(a) **Reuniunea** dintre A și B prin $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

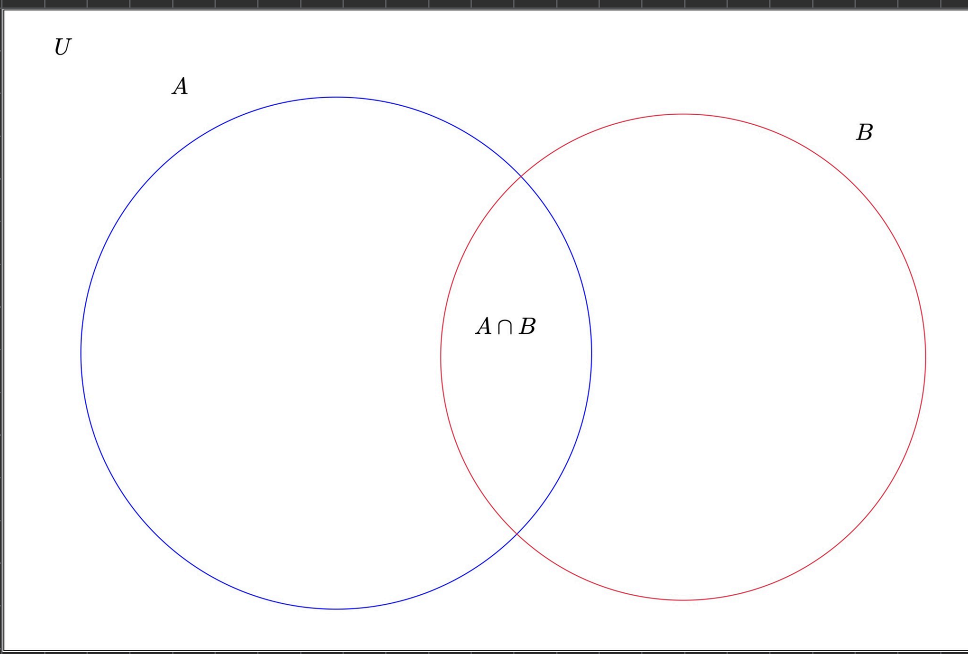
(b) **Intersecția** dintre A și B prin $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

(c) **Diferența** dintre A și B prin $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

În cazul $A \subseteq U$ se numește **complementara** lui A în U mulțimea $C_U A = U \setminus A$

Observație 1.2.10.

Mulțimile pot fi reprezentate prin diagrame Euler-Venn. Ex:



Teoremă 1.2.11.

Fie A, B, C, M mulțimi a.î. $A, B, C \subseteq M$

(a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (asociativitate)

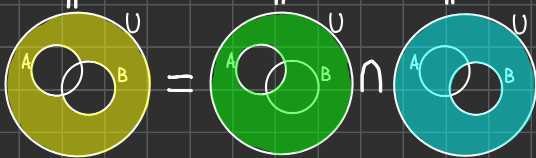
(b) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ (comutativitate)

(c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (dublă distributivitate)

(d) $A \cup A = A = A \cap A$ (idempotență)

(e) $A \cup (A \cap B) = A = A \cap (A \cup B)$ (absorbție)

(f) $C_U(A \cup B) = C_U A \cap C_U B$, $C_U(A \cap B) = C_U A \cup C_U B$ (Morgan)



Definiție 1.2.12.

Fie A o mulțime. Mulțimea puterii a mulțimii A este mulțimea tuturor submulțimilor lui A, adică: $P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$

Observație 1.2.13.

Definiția mulțimii tuturor submulțimilor necesită precauții suplimentare, deoarece cardinalitatea lui $P(A)$ este strict mai mare decât cardinalitatea lui A. Însă dacă A conține toate submulțimile atunci cum poate fi $P(A)$ mai mare decât A

dacă A conține tot? (paradoxul lui Cantor)

Definiție 1.2.14.

Pentru două mulțimi A și B se definește produsul cartezian ca fiind:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

(a,b) este o pereche (ceea ce înseamnă o mulțime ordonată), atunci poate fi definită $(a,b) = \{a, \{a,b\}\}$

Observație 1.2.15.

Inductiv se poate defini produsul cartezian a unui număr finit de mulțimi:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}$$

$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = (A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{n-1}) \times A_n$, atunci pentru o mulțime A avem $A^1 = A$ și $A^n = A^{n-1} \times A$, $\forall n > 1$