Algebra

1.4.37.

Să se determine toate relațiile de echivalență care se pot defini pe $A = \{a, b, c\}$

Soluție:

A mulțime

- relație de echivalență este o preordine care este de asemenea simetrică (o relație reflexivă, tranzitivă, simetrică)
- preordine = reflexivă + tranzitivă
- O relație R pe A este tranzitivă dacă:

$\forall a, b, c \in A$ cu aRb și $bRc \Rightarrow aRc$

- $\forall a, b, c \in A$ cu $aRb \Rightarrow bRa$ (simetrie)
- $\forall a, b, c \in A$, dacă aRb și bRa, atunci $a = b$ (antisimetrie)

$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} \subseteq \{a, b, c\}$

Perechile posibile:

$\{(a,a); (b,b); (c,c); (a,b); (b,a); (a,c); (c,a); (b,c); (c,b)\}$

obs: o relație pe mulțimea A este o submulțime a mulțimii $A \times A$

reflexivă : (x,x) este în relație

simetrică : (x,y) este în relație, (y,x) este în relație

tranzitivă : (x,y) este în relație, (y,z) este în relație $\Rightarrow$

$\Rightarrow (x,z)$ este în relație

$R_1 = \{(a,a), (b,b), (c,c)\}$

$R_2 = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,a)\}$

$R_3 = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,c), (c,a)\}$

$R_4 = \{(a,a), (b,b), (c,c), (b,c), (c,b)\}$

$R_5 = \{(a,a); (b,b); (c,c); (a,b); (b,a); (a,c); (c,a);$
$(b,c); (c,b)\}$

1.4.39

Să se arate că relația dată prin $(a,b) \sim (c,d)$ dacă $ad = cb$ este o echivalență pe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ și să se determine mulțimea factor $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)_\sim$.

Soluție: $(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad = cb$

I $(a,b) \sim (a,b)$?

$\Leftrightarrow ab = ab$ (adv) $\Rightarrow$ rel este reflexivă

II $(a,b), (c,d), (e,f) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$

$(a,b) \sim (c,d)$ și $(c,d) \sim (e,f) \overset{?}{=>} (a,b) \sim (e,f)$

$(a,b) \sim (c,d) => ad = cb$

$(c,d) \sim (e,f) => cf = de \;/ : f \neq 0$

$c = \frac{de}{f}$

$ad = \frac{de}{f} b$

$=> ad = \frac{deb}{f} : d$

$a = \frac{eb}{f}$

$\underline{af = eb} => (a,b) \sim (e,f) =>$ rel este <u>tranzitivă</u>

III $(a,b) \sim (c,d)$

$<=> ad = cb$

$cb = ad <=> (c,d) \sim (a,b) =>$ rel este <u>simetrică</u>

Mulțimea factor $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ $(a,b) \sim (c,d) <=> ad = cb,\ b,d \in \mathbb{Z}^*$

$<=> \underbrace{\frac{a}{b}}_{\in \mathbb{Q}} = \underbrace{\frac{c}{d}}_{\in \mathbb{Q}}$

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* /_\sim = \{(a,b) \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*, \text{cmmdc}(a,b)=1\}$

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* /_\sim = \mathbb{Q}$

Fie $\sim$ o rel. de echi pe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ cu $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$:

$[(a,b)] = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid (x,y) \sim (a,b)\}$

este clasa de echivalență a lui (a,b)

Mulțimea factor a lui $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ cu $\sim$ este mulțimea tuturor claselor de echivalență:

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* /_\sim = \{[(a,b)] \mid (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*\}$

$(a,b) \sim (x,y) \Rightarrow ay = xb, \; b,y \in \mathbb{Z}^*$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{a}{b}}_{\mathbb{Q}} = \underbrace{\frac{x}{y}}_{\mathbb{Q}}$$

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* /_\sim = \{(a,b) \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*, \text{cmmdc}(a,b)=1\}$

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* /_\sim = \mathbb{Q}$