Analiza

3. Serii de numere reale

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de numere reale.

Def: a) Suma infinită $x_0+x_1+x_2+\dots$ se numește serie de numere reale asociată șirului (x_n) și se notează cu $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sau $\sum_{n\geq 0} x_n$.

b) Șirul $S_n = x_0+x_1+\dots+x_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$ se numește șirul sumelor parțiale ale seriei.

c) Seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ se numește convergentă dacă șirul (S_n) este convergent. Limita $S=\lim_{n\to\infty} S_n$ se numește suma seriei și scriem $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = S$

d) O serie care nu este convergentă se numește divergentă.

serie divergentă → cu suma infinită
→ fără sumă (serie oscilantă)

Ex: Natura seriei geometrice $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1+a+a^2+\dots$, $a\in\mathbb{R}$

$$\text{Avem } S_n = 1+\underbrace{a+a^2+\dots+a^n}_{=\,a\frac{a^n-1}{a-1}} = \begin{cases} 1+a\dfrac{a^n-1}{a-1} = \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}, & a\neq 1 \\ n+1, & a=1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \frac{1}{1-a}, & a\in(-1,1) \\ +\infty, & a\geq 1 \\ \nexists, & a\leq -1 \end{cases}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ este convergentă $\Leftrightarrow a\in(-1,1)$

<u>Prop</u>: Dacă seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$

Reciproca nu este adevărată

<u>Dem</u>: Fie $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, $S_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$

$S_n - S_{n-1} = \lim_{n\to\infty} x_n$

<u>Negația</u>: Dacă $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă

<u>Ex</u>: Natura seriei armonice : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \infty \Rightarrow$ seria este divergentă

chiar dacă $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ pentru că termenii nu scad

suficient de repede.

T (Criteriul general de convergență al lui Cauchy)

Seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_0$
$\forall p \in \mathbb{N} : |x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} + .. + x_{n+p}| < \varepsilon$

Dem:

$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ convergentă $\Leftrightarrow (S_n)$ șir convergent, $S_n = x_0 + x_1 + ... + x_n$

$\Leftrightarrow (S_n)$ șir fundamental $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_0$,
$\forall p \in \mathbb{N} : |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$,

$|S_{n+p} - S_n| = |x_0 + x_1 + ... + x_{n+p} - x_0 - x_1 - ... - x_n| = |x_{n+1} + ... x_{n+p}|$

Def: Spunem despre două serii că au aceeași natură ($\sim$) dacă ambele sunt fie convergente, fie divergente.

Ex: 1) $\sum_{n=0}^{\infty} x_n \sim \sum_{n=n_0}^{\infty} x_n, \forall n_0 \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = (x_0 + x_1 + ... + x_{n_0 - 1}) + \sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} x_n \sim \sum_{n=0}^{\infty} \alpha \cdot x_n, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$S_n = x_0 + x_1 + ... + x_n, \quad S_n' = \alpha x_0 + \alpha x_1 + ... + \alpha x_n = \alpha \cdot S_n$$