Logică computațională

Axiome și reguli de inferență

$A_p = \{A_1, A_2, A_3\}$

- $A_1 : U \to (V \to U)$
- $A_2 : (U \to (V \to Z)) \to ((U \to V) \to (U \to Z))$
- $A_3 : (U \to V) \to (\neg U \to \neg V)$

Modus Ponens :

- U adv, $U \to V \vdash V$ adv

$\vdash$ → se deduce

Definiția deducției :

- Fie ipotezele (formule propoziționale pe care le considerăm adevărate) $U_1, U_2, \dots, U_n$
- V, concluzia (formula propozițională pe care dorim să o deducem, să o demonstrăm că poate fi adevărată) folosind ipotezele $U_1, U_2, \dots, U_n$

Se spune că V este deductibilă din $U_1, U_2, \dots, U_n$ dacă putem construi o secvență de formule care duce de la ipoteze la concluzie. Notare : $U_1, U_2, \dots, U_n \vdash V$

Secvența de formule $f_1, f_2, \dots, f_n$ reprezintă pașii demonstrației
Secvența $(f_1, f_2, \dots, f_m)$ se numește deducția lui V din $U_1, U_2, \dots, U_n$

Definiția unei teoreme:

O formulă $U \in F_p$, F_p este o mulțime de formule logice, înseamnă că putem deduce U fără să folosim vreo ipoteză
($\vdash U$)

Obs: Teoremele sunt formule deductibile doar din axiome și folosind regula modus ponens.

Teorema de deducție și inversa sa

- Teorema de deducție: dacă $U_1, U_2, \dots, U_n \vdash V$, atunci $U_1, U_2, \dots, U_{n-1} \vdash U_n \to V$ (dacă putem deduce o propoziție V dintr-un set de ipoteze $U_1, U_2, \dots, U_2$ atunci U_n implică V sub ipoteza celorlalte premise $U_1, U_2, \dots, U_{n-1}$.

Generalizarea

$U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}, U_n \vdash V$ dacă și numai dacă
$U_1, U_2, \ldots, U_{n-1} \vdash U_n \to V$ dacă și numai dacă
$U_1, U_2, \ldots, U_{n-2} \vdash U_{n-1} \to (U_n \to V)$ dacă și numai dacă
…
$U_1 \vdash U_2 \to (\ldots U_{n-1} \to (U_n \to V) \ldots)$ dacă și numai dacă
$\vdash U_1 \to (U_2 \to (\ldots U_{n-1} \to (U_n \to V) \underbrace{\ldots)}_{n-1}$

Consecințele teoremei de deducție

$\vdash U \to ((U \to V) \to V)$, dacă U este adevărat, atunci dacă U→V implică V, atunci V trebuie să fie adevărată

$\vdash (U \to V) \to ((V \to Z) \to (U \to Z))$ (tranzitivitate)

$\vdash (U \to (V \to Z)) \to (V \to (U \to Z))$ (reordonarea premizelor)

$\vdash (U \to (V \to Z)) \to (U \wedge V \to Z)$ (combinație de premize)

$\equiv$

$\vdash (U \wedge V \to Z) \to (U \to (V \to Z))$ (separare de premize)

Proprietățile logicii propozițiilor

- $\vdash U$ atunci $\vDash U$ (teorema de corectitudine)
- $\vDash U$ atunci $\vdash U$ (teorema de completitudine)
- $\vdash U$ d.n.d $\vDash U$

Consecințele teoremei de corectitudine și completitudine

1) Logica propozițiilor este contradictorie:
nu pot avea loc simultan $\vdash U$ și $\vdash \neg U$

2) Logica propozițiilor este coerentă:
nu orice formulă propozițională este teoremă

3) Logica propozițiilor este decidabilă:
se poate deduce dacă o formulă propozițională este sau nu teoremă