Algebra

1.2.16.

Să se determine $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $C_{\mathbb{N}}(A)$, $A \times B$, unde:

$$A = \{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{3n+5}{n+1} \in \mathbb{N} \}$$

$$B = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ este par și } -2 \leq x < 3 \}$$

<u>Soluție</u>:

$$\frac{3n+5}{n+1} = \frac{3(n+1)+2}{n+1} = 3 + \frac{2}{n+1} \in \mathbb{N} \Rightarrow n \in \{0, 1\}$$

$A = \{0, 1\}$

$B = \{-2, 0, 2\}$

$A \cup B = \{-2, 0, 1, 2\}$

$A \cap B = \{0\}$

$A \setminus B = \{1\}$

$C_{\mathbb{N}}(A) = \mathbb{N} \setminus A = \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

$A \times B = \{(0,-2), (0,0), (0,2), (1,-2), (1,0), (1,2)\}$

1.2.17.

Să se determine $P(\emptyset)$, $P(\{\emptyset\})$, $P(\{\emptyset, \{\emptyset\}\})$, unde P - mulțimea părților mulțimii

Soluție:

$P(\emptyset) = \{\emptyset\}$

$P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$P(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}\}$

1.3.46.

Următoarele afirmații sunt echivalente, pentru o funcție $f: A \to B$:

(i) f este injectivă

(ii) $X = f^{-1}(f(X))$ pt orice submulțime $X \subseteq A$

(iii) $f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$ pt orice două submulțimi $X_1, X_2 \subseteq A$

a) Demonstrați (i) => (ii) și (ii) => (i)

b) Să se găsească un exemplu care să arate că injectivitatea lui f este necesară pt egalitățile (ii) și (iii).

Soluție

a) Fie $x \in X$

Pentru a arăta că $x \in f^{-1}(f(X))$ este suficient să arătăm că $\exists\ x' \in X$ a.î. $x \in f^{-1}(f(x'))$ adică $\exists\ x' \in X$ a.î. $f(x) = f(x')$

(alegem $x = x'$) (1)

$\Rightarrow x' \in f^{-1}(f(X))$

$\Rightarrow f(x') \in f(X)$

$\Rightarrow \exists\ x \in X$ a.î. $f(x') = f(x) \Rightarrow x' \in X$

Deci, $f^{-1}(f(X)) \subseteq X$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow f^{-1}(f(X)) = X$

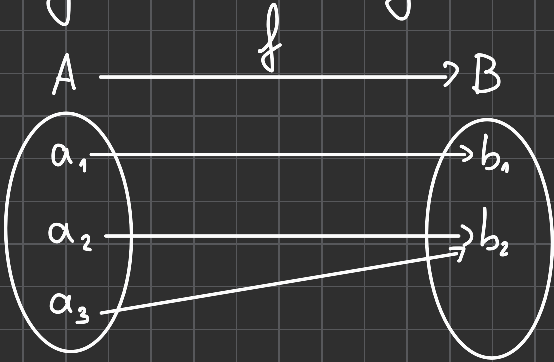
Fie $f^{-1}(f(X)) = X$

Fie $f(x_1) = f(x_2)$, $x_1, x_2 \in X$

Atunci, $x_1 \in f^{-1}(f(\{x_2\})) = \{x_2\}$

$\Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ este injectivă

b) f nu este injectivă



$f : \{a_1, a_2, a_3\} = A \to \{b_1, b_2\} = B$

$\left.\begin{array}{l} f(a_1) = b_1 \\ f(a_2) = b_2 \\ f(a_3) = b_2 \end{array}\right\} \Rightarrow f$ nu este injectivă

$X = \{a_1, a_2\}$, $X \subseteq A$

(ii) $X = \{a_1, a_2\}$

$f(X) = f(\{a_1, a_2\}) = \{b_1, b_2\}$

$f^{-1}(\{b_1, \underline{\underline{b_2}}\})$ nu există

(iii) $X_1 = \{a_1, a_2\}$, $X_2 = \{a_3\}$

$X_1 \cap X_2 = \emptyset$

$f(\emptyset) = \emptyset$

$f(X_1) = f(\{a_1, a_2\}) = \{b_1, b_2\}$

$f(X_2) = f(\{a_3\}) = \{b_2\}$

$\Rightarrow f(X_1) \cap f(X_2) = \{b_2\} \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ inj lui f este necesară pt (ii) și (iii)

1.3.51.

Fie B o mulțime cu $|B| = m$. Să se determine numărul tuturor submulțimilor lui B cu n elemente.

<u>Soluție:</u>

$f: \underbrace{\{1, \dots, n\}}_{A} \to B$ funcție injectivă

$C = \operatorname{Im} f \subseteq B$

$\operatorname{Im} f = \{f(1), \dots, f(n)\}$

Câte funcții injective $f: A \to B$ există cu $\operatorname{Im} f = C$?

$$\begin{cases} C_m^n, & n \leq m \\ 0, & n > m \end{cases}$$

1.3.58.

Se consideră operația $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată prin $x * y = xy + 2ax + by$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ a.î. $*$ să fie asociativă și comutativă.

Soluție:

$$x * y = xy + 2ax + by = x(y+2a) + by + 2ab - 2ab =$$
$$= x(y+2a) + b(y+2a) - 2ab = (x+b)(y+2a) - 2ab$$

$*$ comutativă $\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow x * y = y * x$

$$x * y = xy + 2ax + by$$
$$y * x = yx + 2ay + bx$$
$$\cancel{xy} + 2ax + by = \cancel{yx} + 2ay + bx$$
$$2ax - 2ay + by - bx = 0$$
$$2a(x-y) + b(y-x) = 0$$
$$2a(x-y) - b(x-y) = 0 \Rightarrow 2a = b$$

$*$ asociativă $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow (x * y) * z = x * (y * z)$

$$(x * y) * z = [(x+b)(y+b) - b^2] * z =$$

$$= [(x+b)(y+b) - b^2 + b](z+b) - b^2 =$$

$$= [(x+b)(y+b) - b(b+1)](z+b) - b^2 =$$

$$= (x+b)(y+b)(z+b) - b(b+1)(z+b) - b^2$$

$$x * (y * z) = x * [(y+b)(z+b) - b^2] =$$

$$= (x+b)[(y+b)(z+b) - b^2 + b] - b^2 =$$

$$= (x+b)[(y+b)(z+b) - b(b+1)] - b^2 =$$

$$= (x+b)(y+b)(z+b) - b(b+1)(x+b) - b^2$$

$$(x * y) * z = x * (y * z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{(x+b)(y+b)(z+b)} - b(b+1)(z+b) \cancel{-b^2} =$$

$$= \cancel{(x+b)(y+b)(z+b)} - b(b+1)(x+b) \cancel{-b^2}$$

$$(b - b^2)(z+b) = (b - b^2)(x+b)$$

$$(b - b^2)(z+b) - (b - b^2)(x+b) = 0$$

$$(b - b^2)(z + b - x - b) = 0$$

$$(b - b^2)(z - x) = 0 \quad , \forall\ z, x \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b - b^2 = 0$$

$$b(1-b) = 0 \Rightarrow b = \{0, 1\}$$

$$b = 0 \Rightarrow a = 0 \quad ; \quad b = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$