Șiruri de numere reale

Minoranți, majoranți

$MIN(A) = \{ x \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A, x \le a \}$

$MAJ(A) = \{ x \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A, x \ge a \}$

$\inf(A)$ = cel mai mare minorant

$\sup(A)$ = cel mai mic majorant

$m = \min(A)$ dacă $m \in A \cap MIN(A)$

$m = \max(A)$ dacă $m \in A \cap MAX(A)$

Criteriul de existență a limitei unui șir cu epsilon

$\lim \mathbb{R} \setminus \{\pm\infty\} : \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \ge n_0 \ |x_n - l| < \varepsilon$

$\lim \infty \quad : \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \ge n_0 \ |x_n| > \varepsilon$

Monotonia unui șir

$x_{n+1} - x_n = r \quad : \quad r > 0 \Rightarrow x_n$ cresc.

$r < 0 \Rightarrow x_n$ descresc.

Weierstrass

- x_n descrescătoare, mărg. inferior $\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} x_n = \inf(x_n)$
- x_n crescătoare, mărg. inferior $\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} x_n = \inf(x_n)$
- x_n monoton, mărginit

$\Rightarrow x_n$ convergent

Criteriul cleștelui

$\left.\begin{array}{l} - \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ a.î. } x_n \le y_n \le z_n, \ \forall n \ge n_0 \\ - \lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} z_n = l \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim\limits_{n \to \infty} y_n = l$

Stolz-Cesaro:

1. $\boxed{y_n \text{ - cresc și divergent}}$

$\Rightarrow \lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

2. dacă $\exists \lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in [0, \infty]$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{x_n} = l$ (reciproca falsă)

Criteriul raportului pt. șiruri:

x_n - s.t.p.

Dacă $\exists \lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} = l$. $l > 1 \Rightarrow x_n$ convergent

$l < 1 \Rightarrow x_n$ divergent

Binomul lui Newton

$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^n a^0 b^n$

$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k, \ k \in \mathbb{N}$

Șir fundamental

(x_n) - șir fundamental $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \ge n_0$, $\forall p \in \mathbb{N} : |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$

(x_n) convergent $\Leftrightarrow (x_n)$ fundamental

Serii de numere reale

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = x^0 + x^1 + \dots = \frac{1}{1-x}, x \in (-1,1)$

seria geometrică $\sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$, $q \in (-1,1) \Rightarrow$ seria convergentă

Seria armonică $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^p}$, $p>1 \Rightarrow$ seria convergentă

Convergența și divergența seriilor

Dacă $\sum x_n$ - conv $\Rightarrow \lim \sum x_n = \mathbb{R}\setminus\{\pm\infty\}$

Dacă $\sum x_n$ - divergentă $\Rightarrow \lim \sum x_n = \infty$

Criterii de comparare:

1. comp sub formă de ineg : $x_n \leq y_n$

$\sum y_n$ conv $\Rightarrow \sum x_n$ conv

$\sum x_n$ div $\Rightarrow \sum y_n$ div

2. comp sub formă de $\lim\limits_{n\to\infty}$: $\lim \frac{x_n}{y_n} = l$

$l = 0$ și $\sum y_n$ conv $\Rightarrow \sum x_n$ conv

$l = \infty$ și $\sum y_n$ div $\Rightarrow \sum x_n$ div

$\exists \lim \frac{x_n}{y_n} = l \in (0,\infty) \Rightarrow \sum x_n \sim \sum y_n$

Criteriul lui Leibniz (serii alternante)

$$\left.\begin{array}{l} x_n \text{ - STP descrescătoare} \\ \lim x_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=0} (-1)^n \cdot x_n \text{ convergentă}$$

Criteriul condensării al lui Cauchy:

x_n - $\boxed{\text{desc. s.t.p}}$

$\sum x_n \sim \sum 2^n \cdot x_{2^n} = x_1 + 2x_2 + 4x_4 + \dots$

Seria Taylor

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0)$$

not. $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ $\Rightarrow S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$

raza de convergență : $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

0. Kummer:

$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{v_n} \text{ divergentă}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(v_n \cdot \frac{x_n}{x_{n+1}} - v_{n+1}\right) = K \in \overline{\mathbb{R}}$: $K < 0 \Rightarrow x_n$ div

$K > 0 \Rightarrow x_n$ conv

1. D'Alembert:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} = D \in \overline{\mathbb{R}}$: $D < 1 \Rightarrow x_n$ div

$D > 1 \Rightarrow x_n$ conv

2. Raabe - Duhamel:

$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = R \in \overline{\mathbb{R}}$: $R < 1 \Rightarrow x_n$ div

$R > 1 \Rightarrow x_n$ conv

3. Bertrand:

$\lim\limits_{n\to\infty} \ln(n)\left[n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) - 1\right] = B \in \overline{\mathbb{R}}$: $B < 1 \Rightarrow x_n$ div

$B > 1 \Rightarrow x_n$ conv

4. Cauchy:

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = C \in \overline{\mathbb{R}}$: $C < 1 \Rightarrow x_n$ - conv

$C > 1 \Rightarrow x_n$ - div

Mulțimea de convergență a unei serii de puteri

$I \subseteq \mathbb{R}$ = mulțimea de convergență a unei serii de puteri centrată în x_0

$\exists!\, r \in [0,\infty]$ a.î. seria e C, $\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$

seria e D, $\forall x \in (-\infty, x_0 - r, x_0 + r, +\infty)$

natura seriei nu este precizată în $x = x_0 - r$ și $x = x_0 + r$

Calculul razei de convergență

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ - serie de puteri cu raza de convergență $r \in [0,+\infty]$

$r = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

Funcții reale

Teorema lui Lagrange

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$\left.\begin{array}{l} \cdot\ f \text{ continuă pe } [a,b] \\ \cdot\ f \text{ derivabilă pe } (a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, x_0 \in (a,b)$ a.î. $f'(x_0) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Teorema lui Weierstrass

Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuă pe $[a,b] \Rightarrow f$ mărginită și își atinge marginile $[a,b]$

sau

Fie $f : A \to \mathbb{R}$ și $f(A) = \{ y \in \mathbb{R} \mid \exists\, x \in A \text{ a.î. } f(x) = y \} = \operatorname{Im} f$

Atunci valorile extreme ale lui f sunt $\inf f(A)$ și $\sup f(A)$

Deci f își atinge extremele pe A dacă $\exists\, x_1, x_2 \in A$ a.î.

$f(x_1) = \inf(A)\ (= \min f(A))$

$f(x_2) = \sup(A)\ (= \max f(A))$

Formula lui Leibniz

$$(f \cdot g)^{n} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot f^{k} \cdot g^{n-k}$$

ex: $f(x) = (x^2 - x)\, e^x$

luăm $f(x) = x^2 - x$

$g(x) = e^x$

Polinomul lui Taylor

$$(T_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x^0)}{k!} \cdot f^{(k)}(x_n)$$

Integrale

$$\int_{-a}^{a} f(x) = \begin{cases} 0, & f \text{ impară } (f(-x) = -f(x)) \\ 2\int_0^a f(x)\,dx, & f \text{ pară } (f(-x) = f(x)) \end{cases}$$

Funcția Gamma

$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} \cdot e^{-x}\,dx, \ \alpha \in \mathbb{R}$

Substituții trigonometrice

$R(u,v)$ - funcție rațională

- $\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})$ $\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $x = a\cdot \sin t$, $x = a \cdot \cos t$
- $\int R(x, \sqrt{a^2+x^2})$ $\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$, $x = a \cdot \text{ctg}\, t$, $x = a \cdot \text{tg}\, t$
- $\int R(x, \sqrt{x^2-a^2})$ $\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $x = \frac{a}{\sin t}$, $x = \frac{a}{\cos t}$

Criteriul comparației

$-\infty < a \leq b < +\infty$

$f, g : [a,b) \to [0,\infty)$ fct poz și local integrabile pe $[a,b]$

- dacă $\exists\, c \in [a,b)$ a.î. $f(x) \leq g(x)$ $\forall\, x \in [c,b)$, at:
  - $\int_a^{b-0} g(x)\,dx$ C $\Rightarrow \int_a^{b-0} f(x)\,dx$ C
  - $\int_a^{b-0} f(x)\,dx$ D $\Rightarrow \int_a^{b-0} g(x)\,dx$ D
- dacă $\exists \lim\limits_{\substack{x\to b \\ x<b}} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in [0, \infty]$ at:
  - $l < \infty$ și $\int_a^{b-0} g(x)\,dx$ C $\Rightarrow \int_a^{b-0} f(x)\,dx$ C
  - $l > 0$ și $\int_a^{b-0} g(x)\,dx$ D $\Rightarrow \int_a^{b-0} f(x)\,dx$ D

Convergența integralelor improprii

1) $a, b, p \in \mathbb{R}$ $f : [a,b) \to [0,\infty)$ - fct poz și integrabilă pe $[a,b]$
Dacă $\exists \lim\limits_{\substack{x\to b \\ x<b}} (b-x)^p \cdot f(x) = \lambda$, at:
   - dacă $p<1$ și $\lambda < \infty \Rightarrow \int_a^{b-0} f(x)\,dx$ C
   - dacă $p>1$ și $\lambda > 0 \Rightarrow \int_a^{b-0} f(x)\,dx$ D

2) $a, b \in \mathbb{R}$ $f : [a,\infty) \to [0,\infty)$ - fct poz și integrabilă pe $[a,b]$
Dacă $\exists \lim\limits_{x\to\infty} x^p \cdot f(x) = \lambda$, at:
   - dacă $p>1$ și $\lambda < \infty \Rightarrow \int_a^{\infty} f(x)\,dx$ C
   - dacă $p\leq 1$ și $\lambda > 0 \Rightarrow \int_a^{\infty} f(x)\,dx$ D

3) $a, b, p \in \mathbb{R}$ $f : (a,b] \to [0,\infty)$ - fct poz și integrabilă pe $[a,b]$
Dacă $\exists \lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} (x-a)^p \cdot f(x) = \lambda$, at:
   - dacă $p<1$ și $\lambda < \infty \Rightarrow \int_a^{b-0} f(x)\,dx$ C
   - dacă $p\geq 1$ și $\lambda > 0 \Rightarrow \int_a^{b-0} f(x)\,dx$ D

4) $a, b \in \mathbb{R}$ $f : (-\infty,b] \to [0,\infty)$ - fct poz și integrabilă pe $[a,b]$
Dacă $\exists \lim\limits_{\substack{x\to -\infty \\ x>-\infty}} x^p \cdot f(x) = \lambda$, at:
   - dacă $p>1$ și $\lambda < \infty \Rightarrow \int_a^{b-0} f(x)\,dx$ C
   - dacă $p\leq 1$ și $\lambda > 0 \Rightarrow \int_a^{b-0} f(x)\,dx$ D

* local integrabilă pe $[a,b]$ = integrabilă pe $\forall\, [u,v] \subseteq [a,b]$

* dacă e nevoie să împărțim integrala pe bucăți și una este divergentă atunci și integrala inițială e divergentă

Vectori

Proprietăți

$x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $y \in (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$

Avem: $\cdot\ x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_m + y_m)$

$\cdot\ \alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_m)$

$\cdot\ x \cdot y = (x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_m y_m)$, $x \cdot y = y \cdot x$

Norma (lungimea euclidiană)

$\cdot\ \|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2}$

Mulțimi

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^m$

$\cdot\ \text{int } A = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \exists r > 0 \text{ a.î. } B(x, r) \subseteq A\}$

$\cdot\ \text{fr } A = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \exists r > 0 \text{ a.î. } B(x, r) \cap A \neq \emptyset \text{ și } B(x, r) \cap (\mathbb{R}^m \setminus A) \neq \emptyset\}$

A = mulțime deschisă dacă $\forall x \in A\ \exists r > 0$ a.î. $B(x, r) \subseteq A$

A = mulțime închisă dacă $\forall x \in \mathbb{R}^m \setminus A$ este deschisă

$B(x^0, r) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x - x^0\| < r\}$ - bila deschisă de centru x^0 și rază r

$\bar{B}(x^0, r) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x - x^0\| \leq r\}$ - bila închisă de centru x^0 și rază r

Distanța dintre mulțimi

$A, B \subseteq \mathbb{R}^m$

$d(A, B) = \inf\{\|x - y\| : x \in A, y \in B\}$

Teorema lui Weierstrass

mulțime compactă = mărginită și închisă

$$\left.\begin{array}{l} \text{Fie } A \subseteq \mathbb{R}^m \text{ - mulțime compactă} \\ f: A \to \mathbb{R} \text{ - fct continuă} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} f \text{ mărginită} \\ f \text{ își atinge extremele pe } A \end{cases}$$

Inegalitatea mediilor

$n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_n \in [0, +\infty) \Rightarrow G \leq A \Rightarrow \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \dfrac{x_1 + \dots + x_n}{n}$

Inegalitatea Cauchy-Schwarz

$n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_n$, $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow (x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2)$

Derivate parțiale

Calculul derivatei parțiale

Calculul derivatelor parțiale în raport cu o variabilă se poate efectua cu regulile de derivare obișnuite, iar celelalte variabile ale funcției sunt parametrii constanți

ex: $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=2x^2+7y+3z^3$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=4x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=7$, $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=9z^2$

Gradientul

$$\nabla f(x^0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_m}(x^0)\right)\in\mathbb{R}^m$$

ex: $\nabla f(x,y,z)=(4x,7,9z^2)$

Diferențiala

$df(x^0):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$

$$df(x^0)(u)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)\cdot u_i \quad ,u=(u_1,\dots,u_m)\in\mathbb{R}^m$$

$df(x,y,z):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$

$$df(x,y,z)(u)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\cdot u_1+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\cdot u_2+\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\cdot u_3=$$

$$=(2x^2)u_1+7u_2+(9z^2)u_3$$

Derivata după direcție

$A\subseteq\mathbb{R}^m$, $f:A\to\mathbb{R}$ - fct

$x^0\in A$, $v\in\mathbb{R}^m$

Dacă $\exists\lim\limits_{t\to0}\frac{f(x^0+tv)-f(x^0)}{t}$ derivata lui f în x^0 după direcția vect. v

not. $=f'_v(x^0)$

Funcție de clasă C^1

O funcție $f:A\to\mathbb{R}$ s.n. de clasă C^1 în $x_0\in A$ dacă:

- $\exists\, r>0$ a.î. f derivabilă parțial în orice pct al mulțimii $B(x^0,r)\cap A$
- Fct $\frac{\partial f}{\partial x_i}:B(x^0,r)\cap A\to\mathbb{R}$ sunt cont în x^0, $\forall\, i=\overline{1,m}$

Derivarea parțială a funcțiilor compuse

$$\nabla(g\circ f)(x^0)=\nabla g(f(x^0))\cdot J(f)(x^0)$$

$$J(f)(x^0)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x^0)\\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_m}(x^0)\end{pmatrix}$$

Funcție de clasă C^2

O funcție $f:A\to\mathbb{R}$ s.n. de clasă C^2 în $x_0\in A$ dacă:

- $\exists\, r>0$ a.î. f este de două ori derivabilă parțial în orice pct al mulțimii $B(x^0,r)\cap A$
- Fct $\frac{\partial f}{\partial x_j x_i}:B(x^0,r)\cap A\to\mathbb{R}$ sunt cont în x^0, $\forall\, i,j=\overline{1,m}$

Criteriul lui Schwarz

Dacă $f:A\to\mathbb{R}$ - fct de clasă C^2 în $x^0\in A$ at:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(x^0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x^0)\quad,\forall\, i,j=\overline{1,m},\ i\neq j$$

Puncte extrem local

Teorema lui Fermat

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^m$ și $f: A \to \mathbb{R}$ fct

$$\left.\begin{array}{l} x^0 \in \operatorname{int} A \\ f \text{ deriv parțial în } x^0 \\ x^0 \text{ pct extrem} \end{array}\right\} \Rightarrow \nabla f(x^0) = 0_m$$

Puncte extrem local

1. Derivata parțială, în funcție de variabilă
   Egalăm derivatele cu 0
   Găsim punctele critice (x,y) sau (x,y,z), pot fi mai multe coordonate
2. Matricea hessiană
   - prima linie: luăm der. parțială a lui x și o mai derivăm iar în raport cu x, y sau x, y, z
   - a doua linie: facem același lucru pt. derivata parțială a lui y
   - trebuie să fie simetrică față de diagonala principală
3. Facem matricea pt fiecare pct. critic
   - luăm un pct critic dacă în matrice avem x, y sau z, le înlocuim cu val. din pct. critic
   - calc. determinanții:
     - dacă $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: $\Delta_1 = |a|$ $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$
     - dacă $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$: $\Delta_1 = |a|$ $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$
   - îi comparăm pe fiecare cu 0:
     - dacă toți $\Delta > 0 \Rightarrow$ pct minim local
     - dacă $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0 \Rightarrow$ pct maxim local
     - dacă $\exists$ alt caz $\Rightarrow$ punct șa