Analiza

2. Şiruri de numere reale

Def: O funcție $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ se numește șir de nr reale

Dacă $f(n) = x_n$, $n \in \mathbb{N}$ atunci șirul se va nota $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

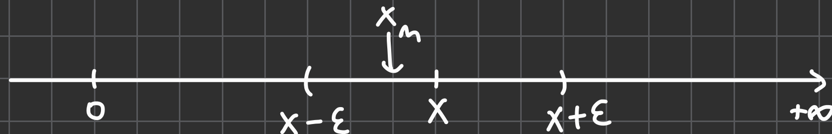
a) Spunem că șirul (x_n) este convergent dacă $\exists\, x \in \mathbb{R}$ cu proprietatea

punctul din care termenii șirului > 3

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \forall n \geq n_0 : |x_n - x| < \varepsilon$$

Numărul x cu proprietatea de mai sus este unic și se numește limita șirului (x_n)

Notații: $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ sau $x_n \to x \ (n \to \infty)$



$$|x_n - x| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x_n - x < \varepsilon \iff x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon \iff$$

$$x_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$$

Unicitatea: Dacă $\exists\, x, y \in \mathbb{R}$ a.î. $|x_n - x| < \varepsilon$ și $|x_n - y| < \varepsilon$

$$\Rightarrow |x - y| = |x - x_n + x_n - y| \leq |x - x_n| + |x_n - y| < 2\varepsilon$$

$\varepsilon > 0$ arbitrar $\Rightarrow x = y$

b) Spunem că șirul (x_n) are limita $+\infty$ (respectiv $-\infty$) dacă

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_0 : x_n > \varepsilon$ (respectiv $x_n < -\varepsilon$)

și scriem $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$ (respectiv $\lim\limits_{n \to -\infty} x_n = -\infty$)

c) Un șir care nu este convergent se numește divergent.

Ex: Justificați cu definiția că $\lim\limits_{n \to \infty} a^n = 0, \forall a \in (-1, 1)$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_0 : |a^n - 0| < \varepsilon$

$|a^n| < \varepsilon \Leftrightarrow |a|^n < \varepsilon \Leftrightarrow n \cdot \ln|a| < \ln \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |a|}, a \neq 0$

Cum alegem $n_0 \in \mathbb{N}$?

$n_0 = \max\left\{0, \left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln|a|}\right] + 1\right\}$

Def: Un șir (x_n) de numere reale se numește

a) mărginit inferior dacă mulțimea $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ este mărginită inferior ($\exists m \in \mathbb{R}$ a.î. $x_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}$)

b) mărginit superior dacă mulțimea $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ este mărginită superior ($\exists m \in \mathbb{R}$ a.î. $x_n \leq m, \forall n \in \mathbb{N}$)

c) mărginit dacă șirul este atât mărginit inferior cât și superior.

($\exists m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ a.î. $m_1 \leq x_n \leq m_2, \forall n \in \mathbb{N}$)

Obs: Orice șir convergent este mărginit. Reciproca nu este adv. De exemplu: $x_n = (-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}$ nu este convergent deoarece termenii alternează între 1 și -1 fără să se apropie de o valoare dar este mărginit

Def: Un șir (x_n) de numere reale se numește

a) crescător dacă $\exists \overset{\substack{\text{un anumit termen} \\ \shortparallel}}{n_0} \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n \leq x_{n+1}, \forall n \geq n_0$

b) descrescător dacă $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n \geq x_{n+1}, \forall n \geq n_0$

c) monoton dacă șirul este crescător sau descrescător

Analog se introduc noțiunile de șir strict crescător, respectiv strict descrescător, înlocuind inegalitățile de mai sus cu inegalități stricte.

Ex: $x_n = \dfrac{2000^n}{n!}, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{2000^n}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{2000^{n+1}} = \frac{n+1}{2000} > 1, \forall n \geq 2000$$

$\boxed{T}$ (Weierstrass)

Fie (x_n) șir de numere reale. Au loc afirmațiile

1°. Dacă (x_n) este descrescător și mărginit inferior $\Rightarrow (x_n)$ convergent și $\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}$

2° Dacă (x_n) este crescător și mărginit superior $\Rightarrow (x_n)$ convergent și $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}$

3° Dacă (x_n) este monoton și mărginit $\Rightarrow (x_n)$ convergent

Dem: 1° $\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ mărginită inferior $\Rightarrow \ell = \inf\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{i) } \ell \le x_n,\ \forall n\in\mathbb{N} & \Rightarrow \forall \varepsilon>0, \forall n\in\mathbb{N}\ .\ \ell < x_n+\varepsilon \ (*) \\ \text{ii) } \forall \varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N} \text{ a.î. } x_{n_0} < \ell+\varepsilon \end{cases}$

(x_n) descrescător $\Rightarrow x_{n_0} \overset{\text{index}}{\ge} x_n,\ \forall n_0\le n \Rightarrow x_n < \ell+\varepsilon, \forall n\ge n_0 \ (**)$

Din $(*)$, $(**)$ $\Rightarrow \ell-\varepsilon < x_n < \ell+\varepsilon,\ \forall n\ge n_0 \Rightarrow |x_n-\ell|<\varepsilon, \forall n\ge n_0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \ell \Rightarrow x_n$ convergent

2° analog

3° evidentă

Fie (x_n) șir de numere reale. Au loc afirmațiile

1° Dacă (x_n) este crescător și nemărginit superior $\Rightarrow (x_n)$ are limita $+\infty$

2° Dacă (x_n) este descrescător și nemărginit inferior $\Rightarrow (x_n)$ are limita $-\infty$

3° Dacă (x_n) este monoton $\Rightarrow (x_n)$ are limită (finită sau nu)

<u>Dem</u>: 1° $\left.\begin{array}{l}\forall \varepsilon>0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ a.î. } x_{n_0}>\varepsilon \\ (x_n) \text{ crescător } \Rightarrow x_n \geq x_{n_0}, \forall n \geq n_0\end{array}\right\} \Rightarrow x_n>\varepsilon, \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$

2° analog, 3° evident

$\boxed{T}$ (criteriul cleștelui)

Fie $(x_n), (y_n), (z_n)$ trei șiruri de numere reale având următoarele proprietăți:

i) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n \leq y_n \leq z_n, \forall n \geq n_0$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n \overset{\text{not}}{=} \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \alpha$

<u>Dem</u>: $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists n_1 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_1 : |x_n - \alpha| < \varepsilon$

$\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists n_2 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_2 : |z_n - \alpha| < \varepsilon$

Avem $x_n - \ell \le y_n - \ell \le z_n - \ell, \forall n \ge n_0$

$$\left.\begin{aligned} y_n - \ell &\le z_n - \ell \le |z_n - \ell| \le \max\{|x_n - \ell|, |z_n - \ell|\} \\ \ell - y_n &\le \ell - x_n \le |x_n - \ell| \le \max\{|x_n - \ell|, |z_n - \ell|\} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow |y_n - \ell| \le \max\{|x_n - \ell|, |z_n - \ell|\}, \forall n \ge n_0$

$\Rightarrow |y_n - \ell| < \varepsilon, \forall n \ge \max\{n_0, n_1, n_2\} \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} y_n = \ell$

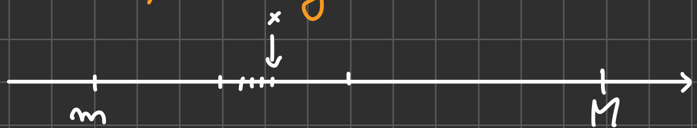
Def: Fie (x_n) un șir de numere reale și $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ un șir infinit strict crescător de numere naturale.
Șirul $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ se numește subșir al șirului (x_n).

Ex: $x_n = (-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}$ $\quad x_{2k} = 1, \; x_{2k+1} = -1, \; \forall k \in \mathbb{N}$

Prop: Șirul (x_n) are limita $x \in \overline{\mathbb{R}}$ $\Leftrightarrow$ Orice subșir al șirului (x_n) are limita x.

$\boxed{T}$ (Cesaro)

Orice șir mărginit de numere reale are un subșir convergent



Def: Fie (x_n) un șir de numere reale. Mulțimea

$$LIM(x_n) \overset{not}{=} \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid \exists (x_{n_k}) \text{ subșir al lui } x_n \text{ a.î. } \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x\}$$

se numește mulțimea punctelor limită ale șirului (x_n).

Ex: $x_n = (-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}$, $LIM(x_n) = \{-1, 1\}$

Prop: Pentru orice șir de numere reale (x_n) are loc

$$LIM(x_n) \neq \emptyset$$

Def: a) Numărul $\inf LIM(x_n)$ se numește limita inferioară a șirului (x_n) și se notează cu $\liminf_{n\to\infty} x_n$

b) Numărul $\sup LIM(x_n)$ se numește limita superioară a șirului (x_n) și se notează cu $\limsup_{n\to\infty} x_n$

Prop: Fie (x_n) un șir de numere reale. Atunci

$$\lim_{x\to\infty} x_n = x \in \overline{\mathbb{R}} \iff \liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = x$$

Dem: Rezultă din echivalența $\lim_{n\to\infty} x_n = x \iff LIM(x_n) = \{x\}$

Def: Un șir (x_n) de numere reale se numește fundamental dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall m, n \geq n_0 : |x_m - x_n| < \varepsilon$

Formulare echivalentă cu

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N} : |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$

punând $m = n + p \geq n_0$

Prop: Orice şir fundamental este mărginit

Dem: Pentru $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall m, n \geq n_0 : |x_m - x_n| < 1$

$|x_n| = |x_n - x_{n_0} + x_{n_0}| \leq \overbrace{|x_n - x_{n_0}|}^{<1} + |x_{n_0}| < 1 + |x_{n_0}|, \forall n \geq n_0$

Dacă notăm $M = \max\{|x_0|, |x_1|, \dots, |x_{n_0-1}|, 1 + |x_{n_0}|\} \Rightarrow |x_n| \leq M,$

$\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow -M \leq x_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (x_n)$ mărginit.

Prop: Orice şir fundamental este convergent

Dem: (x_n) fundamental $\Rightarrow (x_n)$ mărginit $\underset{\text{Cesaro}}{\Rightarrow} \exists (x_{n_k})$ un subşir convergent.

Notăm: $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_{n_k}$, deci

$\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall k \geq k_0 : |x_{n_k} - x| < \varepsilon$

(x_n) fundamental $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall m, n \geq n_0 : |x_m - x_n| < \varepsilon$

Alegem $m = n_k \geq k$ (căci $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$) $\Rightarrow |x_{n_k} - x_n| < \varepsilon, \forall k \geq n_0$

Fie $\varepsilon > 0$ fixat şi $k \geq \max\{k_0, n_0\}$ obţinem

$|x_n - x| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - x| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < 2\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow (x_n)$ convergent la x

Prop: Orice șir convergent este fundamental

Dem: Fie $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$, avem

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_0 : |x_n - x| < \varepsilon$, astfel

$\forall m, n \geq n_0 : |x_m - x_n| = |x_m - x + x - x_n| \leq |x_m - x| + |x - x_n| < 2\varepsilon$

$\Rightarrow (x_n)$ fundamental

$\boxed{T}$ (Cauchy)

Un șir de numere este convergent dacă și numai dacă este fundamental

Obs: $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_0 : |x_n - x| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall m, n \geq n_0 : |x_m - x_n| < \varepsilon$

Ex: Natura șirului $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, $\forall n \geq 1$?

(x_n) strict crescător $\Rightarrow (x_n)$ are limită

Este (x_n) mărginit superior?

$$x_{10^9} \simeq 21$$

Arătăm că (x_n) nu este fundamental $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0$ a.î. $\forall n \in \mathbb{N}$

$\exists m, l \geq n$ a.î. $|x_m - x_l| \geq \varepsilon$

Alegem $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $m = 2n$, $l = n$, unde $n \in \mathbb{N}$ fixat

$$|x_{2n} - x_n| = \left| 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2n} - 1 - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{n} \right| =$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ ori}} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow (x_n)$ nu este convergent, deci $\lim_{n \to \infty} x_n = +\infty$