Algebra

3.4. Diagonalizarea unui endomorfism de spații vectoriale

În cele ce urmează fixăm un K - spațiu vectorial V, cu $\dim_K V = n \geq 1$ și un endomorfism $f \in End_K(V)$

Propoziție 3.4.1.

Pentru $\forall \lambda \in K$, mulțimea $V(\lambda) = \{x \in V, f(x) = \lambda x\}$ este un sub-spațiu vectorial al lui V

Observație 3.4.2.

Avem $V(\lambda) = Ker(\lambda 1_V - f)$, unde $(\lambda 1_V - f) = \lambda v - f(v)$

Spunem că $\lambda \in K$ este o valoare proprie pentru f dacă ecuația $f(x) = \lambda x$ are soluții nenule în V, cu alte cuvinte dacă $V(\lambda) \neq 0$. În acest caz, o soluție nenulă a acestei ecuații, adică un vector $0 \neq x \in V(\lambda)$ se numește vector propriu asociat valorii proprii λ. O matrice se zice diagonală dacă este de forma:

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_3) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Spunem că f este diagonalizabil dacă există o bază b a lui V astfel încât $[f]_b$ este diagonală.

Teoremă 3.4.3.

Fie $b = [b_1, b_2, \dots, b_n]^t$ o bază a lui V. Atunci

$$[f]_b = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

ddacă $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sunt valori proprii ale lui f iar b_i, $1 \leq i \leq n$ sunt vectori proprii corespunzători acestor valori proprii. Așadar $f \in End_K(V)$ este diagonalizabil ddacă există o bază a lui V constituită din vectori proprii, caz în care matricea matricea lui f în această bază are pe diagonală valorile proprii respective.