Analiza

Seminar 5

1. a) $\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$

Lagrange: $f(x) = \ln n$
$f(x)$ derivabilă pe (a,b)
$f(x)$ continuă pe $[a,b]$
$\Big\} \Rightarrow \exists\, c \in (a,b)$ a.î.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

$$\left.\begin{array}{l} a = n \\ b = n+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, c \in (n, n+1) \text{ a.î. } f'(c) = \frac{\ln(n+1) - \ln(n)}{n+1-n}$$

$$\frac{1}{c} = \ln(n+1) - \ln(n)$$

$$n < c < n+1$$

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}$$

b) $c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n)$

$$c_{n+1} - c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) - 1 - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{n} + \ln n$$

$$= \frac{1}{n+1} - \underbrace{(\ln(n+1) - \ln n)}_{> \frac{1}{n+1}} < 0 \Rightarrow c_n \text{ descrescător}$$

mărginit superior de $c_1 = 1 - \ln 1 = 1$

mărginit inferior de $\gamma \approx 0,57$

2. Det mulțimea punctelor de acumulare A' pentru:

a) $A = \{ \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N} \}$

Spunem că $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ este punct de acumulare A' al mulțimii A dacă $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nr din $A \setminus \{x_0\}$ a.î. $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$

a) $x_0 = 0$; $x_n = \frac{1}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}$; $x_n \subset A \setminus \{0\}$ și $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$

Deci $0 \in A'$ și e singurul $\Rightarrow A' = \{0\}$

3. Verif dacă funct. următoare își ating valorile extreme și determinați aceste valori

a) $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$

$$\lim_{x \to -1} \ln \frac{1-x}{1+x} = \ln \frac{2}{0_+} = +\infty$$

?

$$\lim_{x \to 1} \ln \frac{1-x}{1+x} = \ln \frac{0_+}{1} = \ln 0_+ = -\infty \quad \Big\} \Rightarrow \operatorname{Im} f = (-\infty, +\infty)$$

!!

f nu își atinge extremele

b) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = 0 \\ x, & x \in (0,1] \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0} f(x) = 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ nu e continuă în } 0 \Rightarrow$$

f nu își atinge extremele ptc

$\operatorname{Im} f = \{\frac{1}{2}\} \cup (0,1] = (0,1]$

c) $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \sqrt{1-x^2}$

$$f'(x) = \sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - 2x^2 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

x	-1		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+1$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

$f(-1) = 0$

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt[2]{1-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$

$f\left(+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$

$f(1) = 0$

$\inf(A) = -\frac{1}{2}$

$\sup(A) = \frac{1}{2}$

5. Det punct. de extrem local ale funcțiilor de la Ex3.

a) $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$

$f'(x) = (\ln(1-x))' - (\ln(1+x))' = -\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} =$

$= \frac{-1-x-1+x}{(1-x)(1+x)} = \frac{-2}{(1-x)(1+x)}$

$\left.\begin{array}{l} \\ f'(x) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f$ nu are pct de extrem