Analiza

4. Serii cu termeni pozitivi (s.t.p.)

Def. Seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ se numește cu termeni pozitivi dacă $x_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Prop: Dacă o serie cu termeni pozitivi este convergentă <=> șirul sumelor parțiale este mărginit.

Dem: Fie $S_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$S_{n+1} - S_n = x_{n+1} \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (S_n)$ șir crescător

I) Dacă (S_n) mărginit superior $\Rightarrow (S_n)$ convergent $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ conv

II) Dacă (S_n) nemărginit superior $\Rightarrow (S_n) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ div

Obs: Orice serie cu termeni pozitivi are sumă (finită sau $+\infty$)

$\boxed{T}$ (criteriul condensării al lui Cauchy)

Fie (x_n) un șir descrescător de numere pozitive. Seriile $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot x_{2^n} = x_1 + 2 \cdot x_2 + 4 \cdot x_4 + \dots$ au aceeași natură.

Dem:

Fie $S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, $T_n = x_1 + 2x_2 + \ldots + 2^n \cdot x_{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ fixat $\exists!\ k \in \mathbb{N}$ a.î. $2^k \le n \le 2^{k+1} - 1$

$S_n = x_1 + \ldots + x_n \le x_1 + \ldots + x_{2^{k+1}-1}$, unde $x_1 + \ldots + x_{2^{k+1}-1} =$

$x_1 + (x_2 + x_3) + (x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8) + \ldots + (x_{2^k} + \ldots + x_{2^{k+1}-1}) \le$

$x_1 + 2x_2 + 4x_4 + \ldots + 2^k \cdot x_{2^k} = T_k$, apoi

$S_n = x_1 + \ldots + x_n \ge x_1 + \ldots + x_{2^k}$, unde $x_1 + \ldots + x_{2^k} =$

$= x_1 + x_2 + (x_3 + x_4) + (x_5 + x_6 + x_7 + x_8) + \ldots + (x_{2^{k-1}+1} + \ldots + x_{2^k}) \ge$

$\ge x_1 + x_2 + 2x_4 + 4x_8 + \ldots + 2^{k-1} \cdot x_{2^k} =$

$\frac{x_1}{2} + \frac{1}{2} \cdot (x_1 + 2x_2 + 4x_4 + \ldots + 2^k \cdot x_{2^k}) = \frac{x_1}{2} + \frac{1}{2} \cdot T_k \ge \frac{1}{2} \cdot T_k$

Deci $0 \le \frac{1}{2} T_k \le S_n \le T_k$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$ și $2^k \le n \le 2^{k+1} - 1$, deoarece $\frac{1}{2} T_k$, T_k au aceeași natură, iar termenii seriei S_n sunt cuprinși între termenii celorlalte două serii, de unde rezultă (S_n) mărginit $\Leftrightarrow (T_k)$ mărginit

Ex: Natura seriei armonice generalizată $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p \in \mathbb{R}$

Caz particular $p = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, serie divergentă (II)

I) Dacă $p \leq 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} 1, & p = 0 \\ +\infty, & p < 0 \end{cases} \Rightarrow$ serie divergentă

II) Dacă $p > 0$, fie $x_n = \frac{1}{n^p}$

(x_n) descrescător cu termeni pozitivi $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \sim \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot x_{2^n}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot x_{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2^n)^{p-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{p-1})^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{1-p})^n$$

$\sum_{n=0}^{\infty} (2^{1-p})^n$ convergentă $\Leftrightarrow 2^{1-p} < 1 \Leftrightarrow p > 1$

Concluzie: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ convergentă $\Leftrightarrow p > 1$

$\boxed{T}$ (criteriul comparației)

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ două serii cu termeni pozitivi. Au loc afirmațiile:

1°. Dacă $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n \leq y_n$, $\forall\, n \geq n_0$ atunci:

i) Dacă $\sum y_n$ este convergentă $\Rightarrow \sum x_n$ este convergentă

ii) Dacă $\sum x_n$ este divergentă $\Rightarrow \sum y_n$ este divergentă

$\boxed{T}$ 2°. (criteriul comparației sub formă de limită)

Dacă $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l \in [0, +\infty]$ atunci:

i) Dacă $l = 0$ și $\sum y_n$ este convergentă $\Rightarrow \sum x_n$ convergentă

ii) Dacă $l = \infty$ și $\sum y_n$ este divergentă $\Rightarrow \sum x_n$ divergentă

<u>Dem:</u>

1°. Fie $S_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$, $T_n = y_0 + y_1 + \dots + y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Din $x_n \le y_n$, $\forall n \geq n_0 \Rightarrow \sum\limits_{k=n_0}^{n} x_k \le \sum\limits_{k=n_0}^{n} y_k \Rightarrow S_n - S_{n_0-1} \le T_n - T_{n_0-1}$

I) Dacă (T_n) mărginit superior $\Rightarrow (S_n)$ mărginit superior (i)

II) Dacă (S_n) nemărginit superior $\Rightarrow (T_n)$ nemărginit superior (ii)

2°. i) $l < +\infty \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_0$: $\left| \frac{x_n}{y_n} - l \right| < \varepsilon$

$\Rightarrow -\varepsilon < \frac{x_n}{y_n} - l < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < \frac{x_n}{y_n} < \varepsilon + l \Rightarrow x_n < (l+\varepsilon) y_n \ \forall n \geq n_0$

Din $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ convergentă $\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} (l+\varepsilon) \cdot y_n$ convergentă $\overset{1° i)}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ convergentă

ii) $l > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \frac{1}{l} < +\infty$

Presupunem prin absurd că $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă $\overset{2^\circ i)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă, contradicție cu ipoteza $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă

<u>Obs:</u> Cu notațiile din teorema anterioară, dacă $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l \in (0, +\infty)$ atunci seriile $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ au aceeași natură

Serii de comparație: seria geometrică, seria armonică generalizată

<u>Ex:</u> Natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)$

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - \cos\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin^2\frac{\pi}{2n}}{\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)^2$$

$$= \frac{\pi^2}{4} \cdot \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4} \in (0, +\infty) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$ care este convergentă

$\boxed{T}$ (criteriul lui Kummer)

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două șiruri cu termeni strict pozitivi având următoarele proprietăți:

1°. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{u_n}$ este divergentă

2° $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \left(u_n \cdot \frac{x_n}{x_{n+1}} - u_{n+1} \right) = K \in \overline{\mathbb{R}}$

Au loc afirmațiile:

i) Dacă $K > 0 \Rightarrow \sum x_n$ este convergentă

ii) Dacă $K < 0 \Rightarrow \sum x_n$ este divergentă

Dem:

Din $2° \Rightarrow \forall \varepsilon, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_0$:

$$K-\varepsilon \overset{i)}{<} u_n \cdot \frac{x_n}{x_{n+1}} - u_{n+1} \overset{ii)}{<} K+\varepsilon$$

i) Alegem $\varepsilon = \frac{K}{2} > 0 \Rightarrow u_n \cdot \frac{x_n}{x_{n+1}} - u_{n+1} > \frac{K}{2} \Big/ \cdot x_{n+1}, \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow u_n \cdot x_n - u_{n+1} \cdot x_{n+1} > \frac{K}{2} \cdot x_{n+1}, \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow (u_{n_0} x_{n_0} - \underline{u_{n_0+1} \cdot x_{n_0+1}}) + (\underline{u_{n_0+1} \cdot x_{n_0+1}} - u_{n_0+2} \cdot x_{n_0+2}) + \ldots +$

$+ (u_n \cdot x_n - u_{n+1} \cdot x_{n+1}) > \frac{K}{2} \cdot (x_{n_0+1} + \ldots + x_{n+1})$

sumă telescopică: în care termenii se reduc termeni succesivi

$\Rightarrow u_{n_0} \cdot x_{n_0} > u_{n_0} \cdot x_{n_0} - u_{n+1} \cdot x_{n+1} > \frac{k}{2} \cdot (x_{n_0+1} + \dots + x_{n+1})$

termeni specifici ai șirului $\Rightarrow$ mărginit superior

$\Rightarrow S_n = x_{n_0+1} + \dots + x_n$ este mărginit superior $\Rightarrow \sum_{n=n_0+1}^{\infty} x_n$ convergentă $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ convergentă

ii) Alegem $\varepsilon = -k < 0 \Rightarrow u_n \cdot \frac{x_n}{x_{n+1}} - u_{n+1} < 0$, $\forall n \geq n_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow u_n \cdot x_n < u_{n+1} \cdot x_{n+1}$, $\forall n \geq n_0 \Rightarrow u_{n_0} \cdot x_{n_0} < u_{n_0+1} \cdot x_{n_0+1} < \dots <$

$< u_n \cdot x_n \Rightarrow u_{n_0} \cdot x_{n_0} \leq u_n \cdot x_n$, $\forall n \geq n_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_n \geq u_{n_0} \cdot x_{n_0} \cdot \frac{1}{u_n}$, $\forall n \geq n_0$

Din $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{u_n}$ divergentă $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(u_{n_0} \cdot x_{n_0})}_{\neq 0} \cdot \frac{1}{u_n}$ divergentă $\overset{C.C.}{\Longrightarrow}$

$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ divergentă.

Prop (consecințele criteriului lui Kummer)

Fie (x_n) un șir cu termeni strict pozitivi. Au loc:

$\boxed{T}$ 1°. (criteriul raportului al lui d'Alembert)

Dacă $\exists \lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} = D \in \overline{\mathbb{R}}$ atunci:

i) Dacă $D > 1 \Rightarrow \sum x_n$ este convergentă

iii) Dacă $D < 1 \Rightarrow \sum x_n$ este divergentă

$\boxed{T}$ 2°. (criteriul lui Raabe - Duhamel)

Dacă $\exists \lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = R \in \overline{\mathbb{R}}$ atunci:

i) Dacă $R > 1 \Rightarrow \sum x_n$ convergentă

ii) Dacă $R < 1 \Rightarrow \sum x_n$ divergentă

$\boxed{T}$ 3°. (criteriul lui Bertrand)

Dacă $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \ln n \cdot \left[n\cdot\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) - 1\right] = B \in \overline{\mathbb{R}}$ atunci

i) Dacă $B > 1 \Rightarrow \sum x_n$ este convergentă

ii) Dacă $B < 1 \Rightarrow \sum x_n$ este divergentă

Dem: În criteriul lui Kummer facem următoarele particularizări:

1°. $u_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 1$ divergentă și $K = \lim\limits_{n\to\infty} \Big(\underbrace{\frac{x_n}{x_{n+1}}}_{D} - 1\Big) = D - 1$

$D - 1 > 0 \Rightarrow \sum x_n$ convergentă

$D - 1 < 0 \Rightarrow \sum x_n$ divergentă

2°. $u_n = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergentă și $K = \lim_{n\to\infty} \left(n \cdot \frac{x_n}{x_{n+1}} - (n+1)\right) =$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right)}_{R} - 1 = R - 1$$

$R - 1 > 0 \Rightarrow \sum x_n$ convergentă

$R - 1 < 0 \Rightarrow \sum x_n$ convergentă

criteriul integralei

3° $u_n = n \cdot \ln n$, $\forall n \geq 2$; $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ divergentă (seminar!)

$$K = \left[(n \cdot \ln n) \cdot \frac{x_n}{x_{n+1}} - (n+1) \cdot \ln(n+1)\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \ln n \cdot \left[n \cdot \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) - 1 \right] + \underbrace{(n+1) \cdot \left(\ln n - \ln(n+1)\right)}_{\text{are limita } -1} \right\} =$$

$= B - 1$

$\boxed{T}$ Criteriul radical al lui Cauchy

Fie (x_n) un șir cu termeni strict pozitivi și cu proprietatea că $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = c \in \overline{\mathbb{R}}$

i) Dacă $c < 1 \Rightarrow \sum x_n$ este convergentă

ii) Dacă $c > 1 \Rightarrow \sum x_n$ este divergentă

Dem:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_0 : c - \varepsilon \overset{(ii)}{<} \sqrt[n]{x_n} \overset{(i)}{<} c + \varepsilon$

i) Fie $\varepsilon = \frac{1-c}{2} > 0$, notăm $\alpha = c + \varepsilon = c + \frac{1-c}{2} = \frac{c+1}{2} < 1$

$\Rightarrow 0 < \alpha < 1$ și $\sqrt[n]{x_n} < \alpha$, $\forall n \geq n_0 \Rightarrow x_n < \alpha^n$, $\forall n \geq n_0$

Din $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n$ convergentă (pt că $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n$ este o serie geometrică cu $\alpha \neq 1$) $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ convergentă

ii) Fie $\varepsilon = \frac{c-1}{2} > 0$, notăm $\alpha = c - \varepsilon = c - \frac{c-1}{2} = \frac{c+1}{2} > 1$

$\Rightarrow 1 < \alpha < \sqrt[n]{x_n}$, $\forall n \geq n_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum x_n$ este divergentă

Obs:

1) Criteriile enunțate nu decid natura seriei în cazul $D = 1$, $R = 1$, $B = 1$, respectiv $c = 1$

2) Dacă $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} = D \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \frac{1}{D}$ (la seminar)

Ex: Stabiliți natura seriei $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{a(a+1)\cdot\ldots(a+n)}$, $a > 0$

$x_n = \frac{n!}{a(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+n)}$; $\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{n!}{a(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+n)} \cdot \frac{a(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+n+1)}{(n+1)!}$

$$= \frac{a+n+1}{n+1}$$

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a+n+1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}(\overset{\nearrow 0}{\frac{a}{n}}+1+\overset{\nearrow 0}{\frac{1}{n}})}{\cancel{n}(1+\underset{\searrow 0}{\frac{1}{n}})} = 1 \text{ (nu decide)}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{a+n+1}{\cancel{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot a}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}a}{\cancel{n}(1+\underset{\searrow 0}{\frac{1}{n}})} = a$$

Dacă $a>1 \Rightarrow$ serie convergentă

Dacă $a<1 \Rightarrow$ serie divergentă

Dacă $a=1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cancel{n!}}{\cancel{(n+1)!}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \underset{m=n+1}{=} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}$ divergentă