Logică computațională

Logica predicatelor de ordin I

"Afară plouă" · $p \equiv P(a)$ (a - azi)

"În fiecare zi plouă afară" · $(\forall x)\, P(x)$ (x - ziua)

"Mâine va ploua" · $P(b)$ (b - mâine)

"Acum o lună a plouat" · $P(f(a))$ ($f(x): x-30$)

Sistemul axiomatic al logicii predicatelor de ordinul I - Alfabetul

- $Var = \{x, y, z..\}$ - mulțimea simbolurilor de variabile
- $Const = \{a, b, c...\}$ - mulțimea constantelor
- $F_i = \{f \mid f : D^j \to D\}$ - mulțimea simbolurilor de funcții de aritate "j"
- $P_i = \{P \mid P : D^j \to \{T, F\}\}$ - mulțimea simbolurilor de predicate de aritate "j"
- $P_0 = \{p, q, r, ...\} \cup \{T, F\}$ - mulțimea variabilelor propoziționale și a valorilor de adevăr, de ex: (T) dacă plouă, (F) dacă nu plouă
- $Conective = \{\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$
- $Cuantif = \{\forall$ (cuantificatorul universal), $\exists$ (cuantificatorul existențial)$\}$

- $\Sigma_{pr} = Var \cup Const \cup (\bigcup_{j=1}^{m} F_j) \cup (\bigcup_{j=1}^{m} P_j) \cup P_0 \cup Conective \cup$
  $\cup$ Cuantif
- $P = (\Sigma_{pr}, F_{pr}, A_{pr}, R_{pr})$

TERM, ATOM, Literal

TERM = mulțimea termenilor

- $Var \subset TERM$
- $const \subset TERM$
- dacă $f \in F_K$ și $t_1, \dots, t_K \in TERM$ atunci $f(t_1, \dots, t_K) \in TERM$

ATOM = mulțimea formulelor atomice (atomilor):

- $T, F \in ATOM$
- dacă $P \in P_K$ și $t_1, \dots, t_K \in TERM$ atunci $P(t_1, \dots, t_K) \in ATOM$

Literal = un atom sau negația sa

Formule corect construite

F_{pr} = mulțimea formulelor predicative bine formate

- $ATOM \subset F_{pr}$
- dacă $U \in F_{pr}$ și $x \in var$ a.î. x nu se află sub incidența unui alt cuantificator (nu este legat), atunci:

$(\forall x) U(x) \in F_{pr}$ și $(\exists x) U(x) \in F_{pr}$

· dacă $U, V \in F_{pr}$ a.î. U, V nu conțin aceeași variabilă simplă cât și legată, atunci:

$\neg U \in F_{pr}$, $U \wedge V \in F_{pr}$, $U \vee V \in F_{pr}$, $U \to V \in F_{pr}$, $U \leftrightarrow V \in F_{pr}$

Axiome

· $A_{pr} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ scheme axiomatice

$A_1 : U \to (V \to U)$

$A_2 : (U \to (V \to Z)) \to ((U \to V) \to (U \to Z))$

$A_3 : (U \to V) \to (\neg V \to \neg U)$

$A_4 : (\forall x)\, U(x) \to U(t)$, t este un termen arbitrar

$A_5 : (U \to V(y)) \to (U \to (\forall x)\, V(x))$, unde y este o variabilă liberă în V care nu apare în U, iar x nu este variabilă liberă nici în U nici în V

Reguli de inferență

· $R_{pr} = \{mp, gen\}$

· modus ponens: $U, U \to V \vdash_{mp} V$

· regula generalizării: $U(x) \vdash_{gen} (\forall x)\, U(x)$ (x este o variabilă lib în U)

Definiții

- Variabilele din formule predicative care se află sub incidența unui cuantificator se numesc variabile legate, în caz contrar ele se numesc variabile libere.
- O formulă predicativă se numește închisă dacă toate variabilele sale sunt legate, în caz contrar se numește deschisă.

Transformarea unor afirmații din limbaj natural în logica predicatelor

Ex: Dacă x, y sunt întregi nenegativi și $x > y$ atunci $x^2 > y^2$

$D = \mathbb{N}$

Variabilele din D: x, y

Constantele din D: 2

Simbolurile de Funcții (definite pe $D^n \to D$):

$f: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $f(x,y) = x^y$

Simboluri de Predicate (definite pe $D^n \to \{T, F\}$

$P: \mathbb{N}^2 \to \{T, F\}$, $P(x,y) = $ "$x > y$"

Formula Predicativă: $(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \to P(f(x,2), f(y,2)))$

Definiția deducției

· Fie $U_1, U_2, \dots, U_n$ ipoteze și V formulă propozițională. Spunem că V este deductibilă din $U_1, U_2, \dots, U_n$ și notăm $U_1, U_2, \dots, U_n \vdash V$, dacă există o secvență de formule $f_1, f_2, \dots, f_m$ a.î. $f_m = V$ și $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ avem:

- $f_i \in A_{pr}$
- $f_i \in \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$
- $f_j, f_k \vdash_{mp} f_i$, $j < i$, $k < i$
- $f_j \vdash_{gen} f_i$, $j < i$
- Secvența $(f_1, f_2, \dots, f_m)$ se numește deducția lui V din $U_1, U_2, \dots U_n$

Definiția Teoremei

· O formulă $U \in F_{pr}$ a.î. $\emptyset \vdash U$ (sau $\vdash U$) se numește teoremă

Exercițiu

$A_1 : U \to (V \to U)$
$A_2 : (U \to (V \to Z)) \to ((U \to V) \to (U \to Z))$
$A_3 : (U \to V) \to (\neg V \to \neg U)$
$A_4 : (\forall x)\, U(x) \to U(t)$
$A_5 : (U \to V(y)) \to (U \to (\forall x)\, V(x))$

$U, U \to V \vdash_{mp} V$
$U(x) \vdash_{gen} (\forall x) U(x)$

- $(\forall y)\, P(y) \vdash (\forall x)(Q(x) \to P(x))$

$f_1 : (\forall) P(y)$ (ip)

$f_2 : (\forall) P(y) \to P(x)$ (A_4)

$f_1, f_2 \vdash_{mp} f_3 : P(x)$

$f_4 : P(x) \to (Q(x) \to P(x))$ (A_1)

$f_3, f_4 \vdash_{mp} f_5 : Q(x) \to P(x)$

$f_5 \vdash_{gen} f_6 : (\forall x)(Q(x) \to P(x))$

$(f_1, f_2, \dots, f_6)$ este deducția lui $(\forall x)(Q(x) \to P(x))$ din $(\forall y) P(y)$,
deci $(\forall y) P(y) \vdash (\forall x)(Q(x) \to P(x))$

Semantica logicii predicatelor de ordinul 1

- realizează legătura dintre
  - constantele,
  - simbolurile de funcții
  - simbolurile de predicate

Definiția interpretării

- O interpretare pentru un limbaj L al calculului predicatelor este o pereche $I = \langle D, m \rangle$, unde:
  - D este o mulțime nevidă numită domeniu al interpretării
  - m este o funcție care asociază:
    - o valoare fixă $m(c)$ din domeniul D unei constante c
    - o funcție $m(f): D^n \to D$ fiecărui simbol de funcție f de aritate n
    - un predicat $m(P): D^n \to \{T, F\}$ fiecărui simbol de predicat P de aritate n

Notații

pentru interpretarea $I = \langle D, m \rangle$:

- $|I| = D$ este domeniul interpretării I
- $|x| = m(x)$ unde x este constantă, simbol de funcție sau simbol predicat.
- $As(I)$ mulțimea funcțiilor de asignare de variabile peste domeniul interpretării I.

O funcție $a \in As(I)$ este definită astfel $a: Var \to |I|$

- $[a]_x = \{a' \mid a' \in As(I)$ și $a'(y) = a(x), \forall y \neq x\}$

Def funcției de evaluare

Fie o interpretare I și $a \in As(I)$. Se definește inductiv funcția de evaluare V'_a.

- $V'_a(x) = a(x)$, $x \in Var$
- $V'_a(c) = I|c|$
- $V'_a(f(t_1, \ldots, t_n)) = I|f(V'_a(t_1), \ldots, V'_a(t_n))$, $f \in \mathcal{F}_k, n>0$
- $V'_a(P(t_1, \ldots, t_n)) = I|P(V'_a(t_1), \ldots, V'_a(t_n))$, $P \in P_k, n>0$
- $V'_a(\neg A) = \neg V'_a(A)$; $V'_a(A \wedge B) = V'_a(A) \wedge V'_a(B)$
- $V'_a(A \vee B) = V'_a(A) \vee V'_a(B)$; $V'_a(A \to B) = V'_a(A) \to V'_a(B)$
- $V'_a((\exists x) A(x)) = T$ d.n.d. $V'_a(A(x)) = T$ pentru o funcție $a' \in [a]_x$
- $V'_a((\forall x) A(x)) = T$ d.n.d. $V'_a(A(x)) = T$ pentru orice funcție $a' \in [a]_x$

Concepte semantice

- O formulă A este consistentă d.n.d $\exists$ o interpretare și o funcție $a \in As(I)$ a.î. $V'_a(A) = T$. În caz contrar este inconsistentă.
- Formula A este adevărată în interpretarea I d.n.d. pentru orice funcție $a \in As(I)$ avem $V'_a(A)$ și se notează $\models_I A$.

iar I se numește model a lui A.

- Interpretarea I se numește anti-model a formulei A dacă A este evaluată ca falsă în I, adică: $\forall a \in A_S(I)$ are loc $V_a^I(A) = F$
- Formula A este validă (tautologie) d.n.d. A este adevărată în orice interpretare și se notează $\models A$.
- Două formule A și B sunt logic echivalente dacă $V_a^I(A) \equiv V_a^I(B)$ pentru orice interpretare și se notează $A \equiv B$.
- O formulă S de formule implică logic o formulă A dacă toate modelele mulțimii sunt modele ale formulei și se notează $S \models A$.
- O mulțime de formule este consistentă dacă formula obținută prin conjuncția elementelor sale este consistentă, adică are cel puțin un model, în caz contrar este inconsistentă.