Logică computațională

Rafinările rezoluției

- impune restricții asupra clauzelor care rezolvă pt a eficientiza procesul, notație: $S \vdash^{x}_{Res} \square$ (din mulțimea S de clauze s-a derivat clauza vidă prin aplicarea strategiei x a rezoluției)

Strategii rezolutive

- orice strategie rezolutivă păstrează completitudinea și corectitudinea
- dacă strategia impune prea multe restricții atunci e posibil ca deși mulțimea să fie inconsistentă, să nu fie posibilă derivarea clauzei vide.

1. Strategii complete (pot deriva clauza vidă dintr-o mulțime inconsistentă):
   - Rezoluția generală:
     + cu strategia eliminării
     + cu strategia mulțimii suport
     + cu combinația dintre suport + eliminare
   - Rezoluția liniară:
     + cu strategia eliminării
     + cu strategia mulțimii suport

2. Strategii incomplete (nu garantează derivarea clauzei vide)

- Rezoluția blocării:
  - + cu strategia eliminării
  - + cu strategia mulțimii suport
  - + cu combinația dintre blocare și rezoluția liniară
- Rezoluția unitară
- Rezoluția de intrare

Rezoluția blocării

- Fiecare apariție a unui literal din mulțimea de clauze este indexat cu un număr întreg
- Când se rezolvă clauzele, trebuie să se aleagă literalii cu indicele cel mai mic posibil. ex: clauza 1: (L_1^1, L_1^2, L_1^3) și clauza 2: $(\neg L_2^1, \neg L_2^2, \neg L_2^3)$, conform restricției rezolvăm L_1^1 din clauza 1 și L_1^2 din clauza 2 (cei cu indicii minimi)
- Dacă doi literali identici sunt moșteniți (ex: L_1^1 și L_1^2 sunt identici) atunci se păstrează doar cel cu indicele mai mic)

Teorema de corectitudine și completitudine

Teorema de corectitudine:

Fie S o mulțime de clauze, în care fiecare literal este indexat în mod arbitrar. Dacă S este inconsistentă, atunci $\exists$ o deducție din mulțimea S care duce la clauza vidă.

Teorema de completitudine:

Fie S o mulțime de clauze, în care fiecare literal este indexat în mod arbitrar. Dacă din S se deduce prin rezoluția blocării clauza vidă, atunci S este inconsistentă.

Exemple

Verificați inconsistența mulțimilor folosind rezoluția blocării:

$S_1 = \{\neg r, p \vee \neg q, r \vee p \vee q, \neg q \vee \neg p\}$, $S_2 = \{p \vee q, \neg p \vee q, p \vee \neg q, \neg p \vee \neg q\}$

Rezolvare

Verificați inconsistența mulțimilor următoare de clauze utilizând rezoluția blocării:

$S = \{{}_{(1)}\neg r, {}_{(6)}p \vee {}_{(2)}\neg q, {}_{(8)}r \vee {}_{(3)}p \vee {}_{(5)}q, {}_{(4)}\neg q \vee {}_{(7)}\neg p\}$

$C_1 \overset{\text{not.}}{=} {}_{(1)}\neg r$

$C_2 \overset{\text{not.}}{=} {}_{(2)}\neg q \vee {}_{(6)}p$

$C_3 \overset{\text{not.}}{=} {}_{(3)}p \vee {}_{(5)}q \vee {}_{(8)}r$

$C_4 \overset{\text{not.}}{=} {}_{(4)}\neg q \vee {}_{(7)}\neg p$

$\overset{\text{TCC}}{\Longrightarrow} S$ este consistentă

Rezolvare

Verificați inconsistența mulțimilor următoare de clauze utilizând rezoluția blocării:

$S = \{{}_{(5)}p \vee {}_{(4)}q, {}_{(1)}\neg p \vee {}_{(6)}q, {}_{(7)}p \vee {}_{(2)}\neg q, {}_{(8)}\neg p \vee {}_{(3)}\neg q\}$

$C_1 \overset{\text{not.}}{=} {}_{(4)}q \vee {}_{(5)}p$

$C_2 \overset{\text{not.}}{=} {}_{(1)}\neg p \vee {}_{(6)}q$

$C_3 \overset{\text{not.}}{=} {}_{(2)}\neg q \vee {}_{(7)}p$

$C_4 \overset{\text{not.}}{=} {}_{(3)}\neg q \vee {}_{(8)}\neg p$

$C_5 = \mathrm{Res}_q^{\,lock}(C_1, C_3) = {}_{(5)}p$

$C_6 = \mathrm{Res}_p^{\,lock}(C_2, C_5) = {}_{(6)}q$

$C_7 = \mathrm{Res}_q^{\,lock}(C_4, C_6) = {}_{(8)}\neg p$

$C_8 = \mathrm{Res}_p^{\,lock}(C_5, C_7) = \square$

$\overset{\text{TCC}}{\Longrightarrow} S$ este inconsistentă

Rezoluția blocării cu / fără strategia eliminării

- rezoluția blocării + strategia eliminării nu e completă
  - $S = \{p \vee q, \neg p \vee q, p \vee \neg q, \neg p \vee \neg q\}$

    $C_1 =_{(2)} p \vee_{(1)} q$, $C_2 =_{(3)} \neg p \vee_{(4)} q$, $C_3 =_{(5)} p \vee_{(6)} \neg q$, $C_4 =_{(8)} \neg p \vee_{(7)} \neg q$

$\cancel{C_?} = \mathrm{Res}_p^{\,lock}(C_2, C_3) = \cancel{_{(4)}q \vee_{(6)} \neg q}$ conform str. eliminării este o clauză tautologică, deci se va elimina

$\cancel{C_?} = \mathrm{Res}_q^{\,lock}(C_1, C_4) = \cancel{_{(2)}p \vee_{(8)} \neg p}$ conform str. eliminării este o clauză tautologică, deci se va elimina

Nu se mai rezolvă clauze noi, deci nu putem ajunge la $\square$, deci, am ajunge la concluzia greșită că S nu e inconsistentă.

- rezoluția blocării fără strategia eliminării e completă
  - $S = \{p \vee q, \neg p \vee q, p \vee \neg q, \neg p \vee \neg q\}$

    $C_1 =_{(2)} p \vee_{(1)} q$, $C_2 =_{(3)} \neg p \vee_{(4)} q$, $C_3 =_{(5)} p \vee_{(6)} \neg q$, $C_4 =_{(8)} \neg p \vee_{(7)} \neg q$

$C_5 = \mathrm{Res}_p^{\,lock}(C_2, C_3) = {}_{(4)}q \vee_{(6)} \neg q$

$C_6 = \mathrm{Res}_q^{\,lock}(C_4, C_5) = {}_{(6)}\neg q \vee_{(8)} \neg p$

$C_8 = \mathrm{Res}_q^{\,lock}(C_6, C_1) = {}_{(2)}p \vee_{(8)} \neg p$

$C_9 = \mathrm{Res}_p^{\,lock}(C_8, C_2) = {}_{(4)}q \vee_{(8)} \neg p$

$C_{10} = \mathrm{Res}_q^{\,lock}(C_9, C_4) = {}_{(8)}\neg p$

$C_{11} = \mathrm{Res}_p^{\,lock}(C_{10}, C_3) = {}_{(6)}\neg q$ $\quad \overset{TCC}{\Longrightarrow}$ S este inconsistentă

$C_{12} = \mathrm{Res}_q^{\,lock}(C_{11}, C_1) = {}_{(2)}p$

$C_{13} = \mathrm{Res}_p^{\,lock}(C_{12}, C_{10}) = \square$

Rezoluția blocării cu / fără strategia mulțimii suport

- rezoluția blocării + strategia mulţimii suport nu e completă
  - $p \to (q \to r), r \wedge s \to t, u \to s \wedge \neg t \vdash p \wedge q \to \neg u$

    $C_1 =_{(3)} \neg p \vee_{(2)} \neg q \vee_{(1)} r$, $C_2 =_{(6)} \neg r \vee_{(5)} \neg s \vee_{(4)} t$, $C_3 =_{(8)} \neg u \vee_{(7)} s$, $C_4 =_{(10)} \neg u \vee_{(9)} \neg t$, $C_5 =_{(11)} p$, $C_6 =_{(12)} q$, $C_7 =_{(13)} u$

    $Y = \{C_5, C_6, C_7\}$

În această indexare, nu rezolvă nici o clauză urmând strategia mulțimii suport, deci am ajunge la falsa concluzie că S este consistentă.

- rezoluția blocării fără strategia mulţimii suport:

$p \to (q \to r), r \wedge s \to t, u \to s \wedge \neg t \vdash p \wedge q \to \neg u$

$C_1 =_{(3)} \neg p \vee_{(2)} \neg q \vee_{(1)} r$, $C_2 =_{(6)} \neg r \vee_{(5)} \neg s \vee_{(4)} t$, $C_3 =_{(8)} \neg u \vee_{(7)} s$, $C_4 =_{(10)} \neg u \vee_{(9)} \neg t$, $C_5 =_{(11)} p$, $C_6 =_{(12)} q$, $C_7 =_{(13)} u$

$C_8 = \mathrm{Res}_t^{\,lock}(C_2, C_4) = {}_{(5)}\neg s \vee_{(6)} \neg r \vee_{(10)} \neg u$

$C_9 = \mathrm{Res}_s^{\,lock}(C_8, C_3) = {}_{(6)}\neg r \vee_{(8)} \neg u$

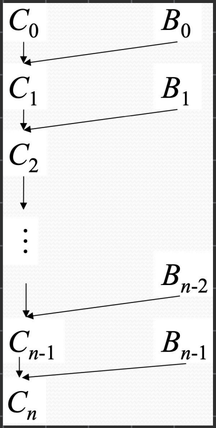
$C_{10} = \mathrm{Res}_r^{\,lock}(C_1, C_9) = {}_{(2)}\neg q \vee_{(3)} \neg p \vee_{(8)} \neg u$

$C_{11} = \mathrm{Res}_q^{\,lock}(C_{10}, C_6) = {}_{(3)}\neg p \vee_{(8)} \neg u$

$C_{12} = \mathrm{Res}_p^{\,lock}(C_{11}, C_5) = {}_{(8)}\neg u$ $\quad \overset{TCC}{\Longrightarrow}$ S este inconsistentă

$C_{13} = \mathrm{Res}_u^{\,lock}(C_{12}, C_7) = \square$

Rezoluția liniară



- Procesul rezolutiv este liniar, ceea ce înseamnă că la fiecare pas, una dintre cele două clauze părinte este rezolventa cu rezultatul obținut în pasul anterior
- Arborele de derivare are forma:
  - C_0 clauza vârf
  - $C_1, C_2, \dots, C_n$ clauze centrale
  - $B_0, B_1, \dots, B_n$ clauze laterale
  - $\forall\ i = 1, 2, \dots, n$ are loc: $C_i = Res(C_{i-1}, B_{i-1})$

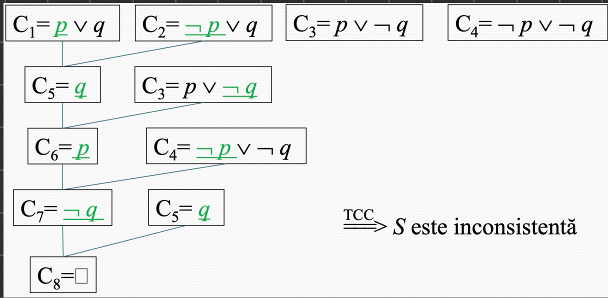
Teorema de corectitudine și completitudine

Mulțimea S de clauze este inconsistentă, d.n.d $S \vdash_{Res}^{lin} \square$

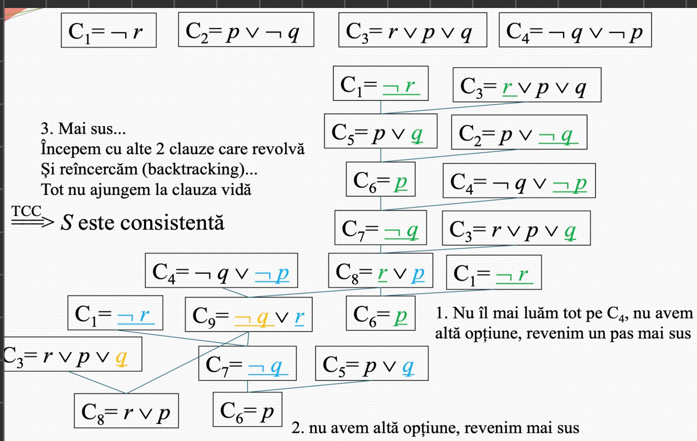
Exerciții

Verif. inconsistența mulțimilor următoare de clauze utilizând rezoluția liniară:

1) $S = \{\underbrace{p \vee q}_{C_1}, \underbrace{\neg p \vee q}_{C_2}, \underbrace{p \vee \neg q}_{C_3}, \underbrace{\neg p \vee \neg q}_{C_4}\}$



2) $S = \{\neg r, p \vee \neg q, r \vee p \vee q, \neg q \vee \neg p\}$ + strategia eliminării
$\quad C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4$



Obs: • rezoluția liniară furnizează o strategie la nivel de implementare: căutare cu revenire

• la fiecare iterație, pentru clauza centrală există mai multe clauze laterale

• după ce au fost utilizate toate posibilele clauze laterale dar nu s-a obținut clauza vidă, se revine la iterația precedentă

• consistența mulțimii de clauze este demonstrată după o căutare completă fără derivarea clauzei vide

Cazuri particulare ale rezoluției liniare

- Rezoluția unitară (unit): clauzele centrale au cel puțin o clauză părinte unitară (conține un singur literal), ex $\{C_1 = p \vee q, C_2 = \neg q\}$ $\Rightarrow C_3 = Res(C_1, C_2) = B$
- Rezoluția de intrare (input): una dintre clauzele părinte utilizate în fiecare pas al rezoluției trebuie să provină din mulțimea inițială de clauze (cele date la începutul problemei), cealaltă clauză părinte poate fi o clauză derivată anterior.

Teorema de echivalență dintre rezoluția unit și cea input:

$S \vdash^{input}_{Res} \square$ d.n.d. $S \vdash^{unit}_{Res} \square$

- corectitudine: Dacă $S \vdash^{input/unit}_{Res} \square$ atunci S inconsistentă
- incompletitudinea: $\exists$ mulțimea inconsistentă de clauze din care nu derivă clauza vidă folosind rezoluția input sau output

Ex:

Verif inconsistența mulțimii $S = \{\underset{C_1}{\neg r}, \underset{C_2}{p \vee \neg q}, \underset{C_3}{r \vee q}, \underset{C_4}{\neg q \vee \neg p}\}$

Input (cl. lat. sunt din mulț. init.) și unit (C_5,...C_8 au cel puțin un părinte unit.)

$C_1 = \neg r$ $C_2 = p \vee \neg q$ $C_3 = r \vee q$ $C_4 = \neg q \vee \neg p$

$C_1 = \underline{\neg r}$ $C_3 = \underline{r} \vee q$

$C_5 = \underline{q}$ $C_2 = p \vee \underline{\neg q}$

$C_6 = \underline{p}$ $C_4 = \neg q \vee \underline{\neg p}$

$C_7 = \underline{\neg q}$ $C_3 = r \vee \underline{q}$

$C_8 = \underline{r}$ $C_1 = \underline{\neg r}$

$C_9 = \square$

$\xRightarrow{TCC}$ S este inconsistentă

Tipuri de metode

	Semantice	**Sintactice**
Directe	Tabela de adevăr FNC	Deducția (*mp*)
prin **Respingere**	FND Tabele semantică	Rezoluția (generală, strategia eliminării, strategia saturării pe nivele, strategia mulțimii suport, rafinarea rezoluției blocării, rafinarea rezoluției liniare, cazuri particulare: input și unit)