Algebra

Aplicații

1.3.44.

Să se găsească un exemplu care constă din două funcții $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, așa încât:

(1) $g \circ f$ este injectivă, dar g nu este injectivă

(2) $g \circ f$ este surjectivă, dar f nu este surjectivă

(3) $g \circ f$ este bijectivă, dar g nu este injectivă și f nu este surjectivă.

(1) $g : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, $g(x) = x^2$

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$, $f(x) = x + 1$

(2) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$, $g(x) = -x + 1$

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x + 1$

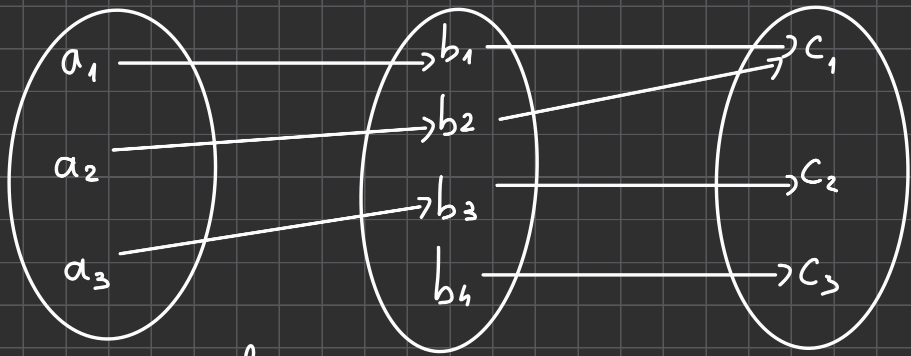
(3) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}^*$, $g(x) = |x|$

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x + 1$

$g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$

sau

(3)



$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

$g \circ f : A \to C \Rightarrow g \circ f$ este bijectivă

Observație

Dacă $C = A$ și $g \circ f$ este bijectivă $\Rightarrow$

$\Rightarrow (g \circ f)(x) = x,\ \forall\, x \in A$ pentru că $g \circ f$ este injectivă ($\forall x \in A$ are o imagine unică) cât și surjectivă (fiecare element din A este atins de $g \circ f$)

$\Rightarrow$ în cazul unei funcții bijective de la A la A, aceasta poate fi doar funcția identitate.

- g este inversa la stânga a funcției f ($g = f^{-1}$)
- f este inversa la dreapta a funcției g ($f = g^{-1}$)

Propoziția 1

Fie $f: A \to B$ o funcție, $A \neq \emptyset$

Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) f este injectivă

(ii) f are o inversă la stânga, adică $\exists\, g: B \to A$ a.î. $g \circ f = 1_A$

(iii) f este simplificabilă la stânga, adică dacă $h_1, h_2 : A' \to A$, atunci

$$f \circ h_1 = f \circ h_2 \Rightarrow h_1 = h_2$$

Fie $f: A \to B$ o funcție, $A \neq \emptyset$

Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) f este surjectivă

(ii) f are o inversă la dreapta, adică $\exists\, g: B \to A$ a.î. $f \circ g = 1_A$

(iii) f este simplificabilă la dreapta, adică dacă $h_1, h_2 : A' \to A$, atunci

$$h_1 \circ f = h_2 \circ f \Rightarrow h_1 = h_2$$

Exemplu funcție la dreapta

$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{a, b\}$

$f : A \to B$, $f(x) = \begin{cases} a & \text{dacă } x = 1, x = 2 \\ b & \text{dacă } x = 3 \end{cases} \Rightarrow f$ surjectivă

funcția f are inversa la dreapta $g(y) = \begin{cases} 1, & y = a \\ 3, & y = b \end{cases}$

$f(g(y)) = y, \ \forall y \in B$

1.3.48.

Fie A și B două mulțimi finite cu $|A| = n$, $|B| = m$

Să se det $|B^A|$

Soluție:

$B^A = \{ f : A \to B \mid f \text{ este funcție} \}$

$A = \{a_1, a_2, \dots a_n\}$

$f(a_1) \in B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\} \Rightarrow m$ posibilități

$f(a_2) \in B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\} \Rightarrow m$ posibilități

$\vdots$

$f(a_n) \in B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\} \Rightarrow m$ posibilități

$$\Rightarrow \underbrace{m \cdot m \cdot m \cdot \dots \cdot m}_{\text{de } n \text{ ori}} = m^n \text{ funcții}$$

1.3.49.

Fie A și B mulțimi finite cu $|A| = n$ și $|B| = m$. Det. nr. tuturor funcțiilor injective de la A la B.

$A = \{a_1, \dots, a_n\}$

$B = \{b_1, \dots, b_m\}$

$f(a_1) \in B \Rightarrow m$ posibilități

$f(a_2) \in B \setminus f(a_1) \Rightarrow m-1$ posibilități

$\vdots$

$f(a_n) \in B \setminus \{f(a_1), \dots, f(a_{n-1})\} \Rightarrow m-n+1$ posibilități

Total: $m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1) = \begin{cases} \dfrac{m!}{(m-n)!}, & n \le m \\ 0, & n > m \end{cases}$

1.3.50.

Fie A o mulțime finită cu $|A| = n$. Să se det. numărul tuturor funcțiilor bijective $f: A \to A$ (adică numărul tuturor permutărilor lui A)

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

$f(a_1) \in A \Rightarrow n$ posibilități

$f(a_2) \in A \setminus f(a_1) \Rightarrow n-1$ posibilități

$\vdots$

$f(1) \in A \setminus \{f(a_1) \dots f(a_{n-1})\} \Rightarrow 1$ posibilitate

Total: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \Rightarrow n!$ posibilități

1.3.52

Să se arate că:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$$

Soluție: Fie B o mulțime

$P(B)$ = mulțimea tuturor submulțimilor mulțimii B

$|P(B)| = 2^m$, unde $|B| = m$

Combinările numără submulțimile unei mulțimi în funcție de cardinalul lor. Mai precis suma combinărilor de n luate câte $k = \overline{0, n}$ este egală cu numărul total de submulțimi ale unei mulțimi cu cardinalul n.

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} = 2^m$$

1.3.53. (Principiul includerii și al excluderii)

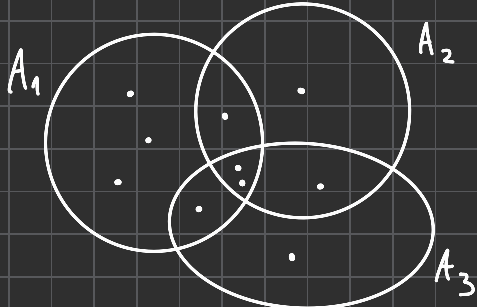
Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mulțimi finite, $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k|$$

$$- \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$

Exemplu:

$$\overset{10}{|A_1 \cup A_2 \cup A_3|} = \overset{7}{|A_1|} + \overset{5}{|A_2|} + \overset{5}{|A_3|} - \overset{3}{|A_1 \cap A_2|} - \overset{3}{|A_1 \cap A_3|} - \overset{3}{|A_2 \cap A_3|} + \overset{2}{|A_1 \cap A_2 \cap A_3|}$$



1.3.54.

Fie A și B mulțimi, cu $|A| = n$ și $|B| = m$. Să se găsească nr tuturor funcțiilor surjective $f: A \to B$.

Soluție: Numărăm mulțimile care nu sunt surjective și le scădem din $|B^A|$.

$S_1 = \{ f: A \to B \mid b_1 \notin \mathrm{Im} f \} \Rightarrow |S_1| = (m-1)^n$

$S_2 = \{ f: A \to B \mid b_2 \notin \mathrm{Im} f \} \Rightarrow |S_2| = (m-1)^n$

...

$S_m = \{ f: A \to B \mid b_m \notin \mathrm{Im} f \} \Rightarrow \left| \bigcup_{i=1}^{m} S_i \right|$ și folosim 1.3.53.