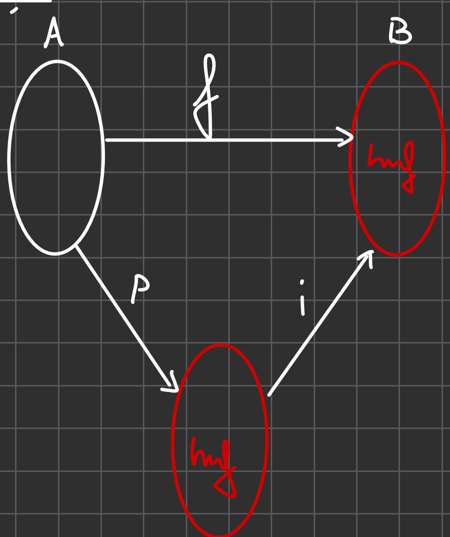
Algebra

1.3.41.

Să se arate că orice funcție $f_0 : A \to B$ poate fi scrisă ca o compunere $f_0 = i \circ p$, unde i este injectivă, iar p este surjectivă.

<u>Soluție</u>:



$p : A \to \mathrm{Im} f$

$p(x) = f(x)$

$i : \mathrm{Im} f \to B$

$i(x) = x$

p surj ($\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Im} f$)

i inj (funcția identitate)

$f = i \circ p$, $i \circ p : A \to B$

1.3.40.

Să se găsească un exemplu de două funcții $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a.î. $g \circ f \neq f \circ g$

<u>Soluție</u>:

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x + 1$

$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x^3$

$$\left.\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^3 \\ (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x^3) = x^3 + 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f \circ g \neq g \circ f$$

(Deși compunerea este definită bilateral, adică are sens pentru orice pereche de elemente din mulțimea în care este definită, ea nu este comutativă)

1.3.42.

Să se găsească un exemplu care constă dintr-o funcție $f : A \to B$, astfel încât:

(1) f este injectivă, dar nu are inversă la stânga

(2) f are exact o inversă la stânga dar nu este bijectivă

(3) f are exact două inverse la stânga

(4) f are o infinitate de inverse la stânga

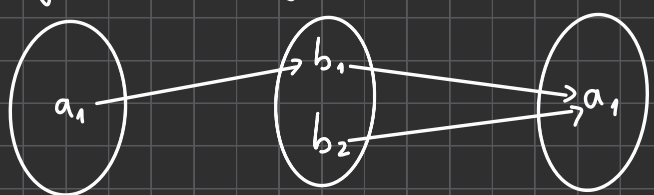
Soluție:

(1) $A = \emptyset$, B mulțime oarecare

$\exists!\ f : A \to B$ inj

De ce este f injectivă? Pentru a verifica dacă f este injectivă ar trebui să vedem dacă două elemente distincte din domeniu au aceeași imagine dar cum domeniul funcției este $\emptyset$ nu există elemente în domeniu $\Rightarrow$ nu există un contraexemplu.

(2) $f : A \to B$, $g : B \to A$

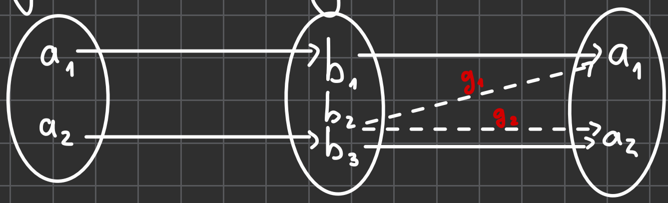


$g(b_1) = a_1 = g(b_2)$

$b_1 \neq b_2$ (nu este inj)

$\exists!\ g : B \to A$, $g(x) = a_1\ \forall x \in B$ a.î. $g \circ f = 1_A$

(3) $f : A \to B$, $g : B \to A$



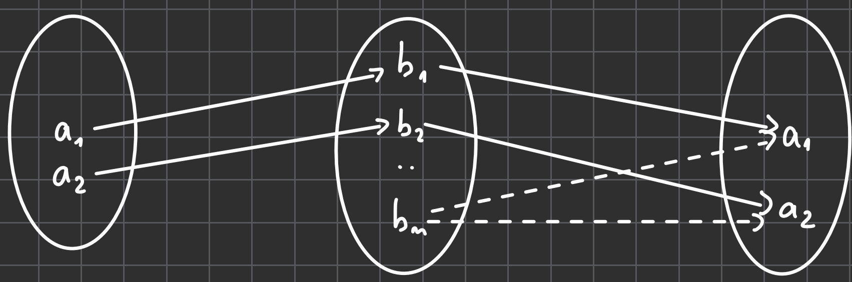
$g : B \to A$ inv la stânga

$g \circ f = 1_A$

$$\left.\begin{array}{l} g(b_1) = a_1 \\ g(b_3) = a_2 \\ g(b_2) \in \{a_1, a_2\} \end{array}\right\} f \text{ are exact două inverse la stânga}$$

(4)

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} A$$



$\exists$ o infinitate de funcții $g : B \to A$ a.î.

$g(b_1) = a_1$

$g(b_2) = a_2$

$g(b_i) \in \{a_1, a_2\}$, $i \geq 3 \Rightarrow |A^B| = |A|^{|B|} = 2^{\infty}$ funcții

! Pentru a defini o inversă la stânga, avem libertate pentru elementele din B care nu sunt atinse de f.

1.3.43.

Să se găsească un exemplu care constă dintr-o funcție $g : B \to A$, astfel încât:

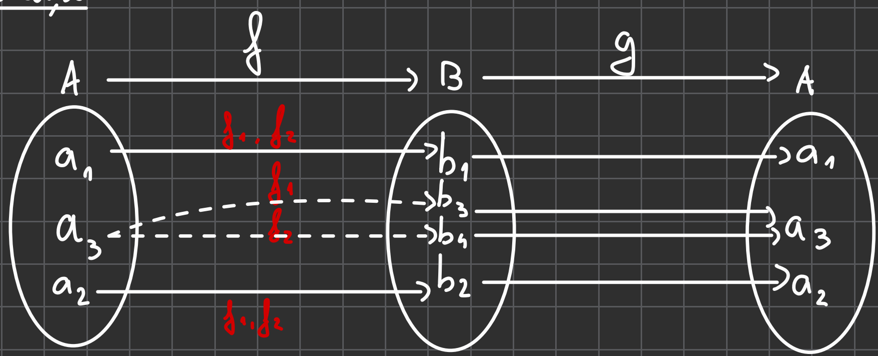
(1) g are exact două inverse la dreapta

(2) g are o infinitate de inverse la dreapta

Să se arate că g are exact o inversă la dreapta dacă g este bijectivă

<u>Soluție</u>:

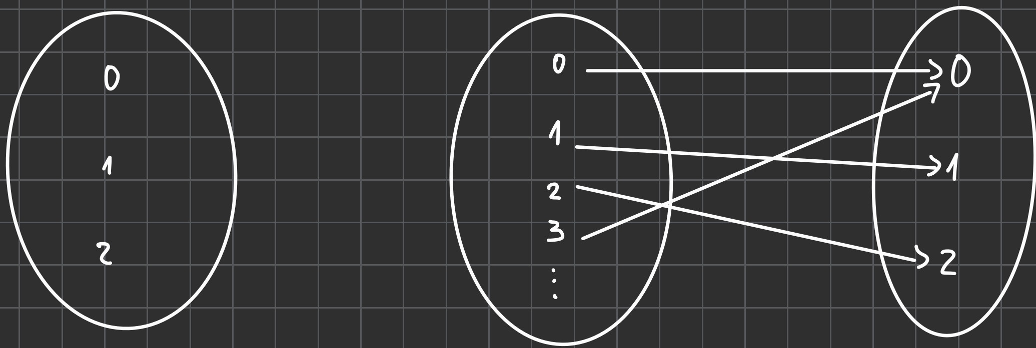
(1)



$$\left.\begin{array}{l} f_i(a_1) = b_1, \quad i=\overline{1,2} \\ f_i(a_2) = b_2, \quad i = \overline{1,2} \\ f_1(a_3) = b_3 \end{array}\right\} \Rightarrow f_1, f_2 \text{ inverse la dreapta ptr. } g$$

$f_2(a_3) = b_4$

(2) $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} A$



$f : \{0, 1, 2\} \to \mathbb{N}$, $g \circ f = 1_A$ $\forall x \in \{0, 1, 2\}$

$g(f(x)) = x$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = x \bmod 3$

$f(0) = 3n_0, \ n_0 \in \mathbb{N}$

$f(1) = 3n_1 + 1, \ n_1 \in \mathbb{N}$

$f(2) = 3n_2 + 2, \ n_2 \in \mathbb{N}$ $\Big\} \Rightarrow$ o infinitate de posibilități pentru f^{-1} (inverse la dreapta)

$g : B \to A$ bijectivă $\Leftrightarrow \exists! \ f : A \to B$ a.î. $g \circ f = 1_A$

1.3.44

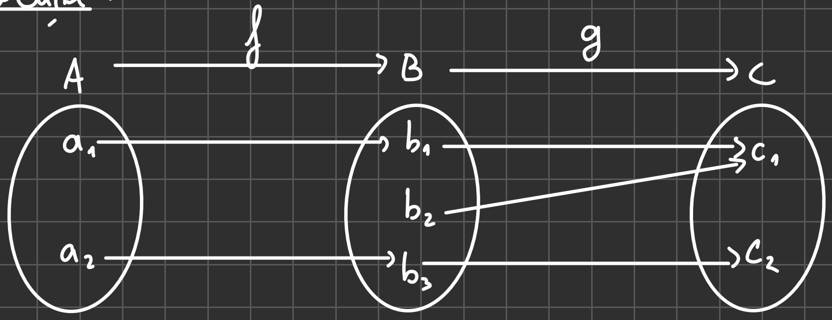
Să se găsească un exemplu care constă din două funcții: $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ așa încât:

(1) $g \circ f$ injectivă, dar g nu este injectivă

(2) $g \circ f$ surjectivă, dar f nu este surjectivă

<u>Soluție</u>:

(1)



$g \circ f : A \to C$

$A = \{a_1, a_2\}$

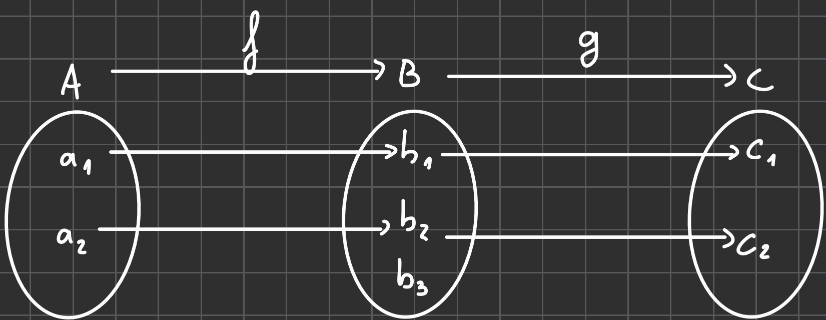
$B = \{b_1, b_2, b_3\}$

$C = \{c_1, c_2\}$

$$\left.\begin{array}{l} (g \circ f)(a_1) = g(f(a_1)) = g(b_1) = c_1 \\ (g \circ f)(a_2) = g(f(a_2)) = g(b_3) = c_2 \\ \qquad\qquad a_1 \neq a_2 \ , \ c_1 \neq c_2 \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f \text{ injectivă}$$

$$\left.\begin{array}{l} g(b_1) = c_1 \\ g(b_2) = c_1 \\ b_1 \neq b_2 \end{array}\right\} \Rightarrow g : B \to C \text{ nu este injectivă}$$

(2)



$g \circ f : A \to C$

$(g \circ f)(a_1) = g(f(a_1)) = g(b_1) = c_1$

$(g \circ f)(a_2) = g(f(a_2)) = g(b_2) = c_2$

$\operatorname{Im}(g \circ f) = \{c_1, c_2\} = C \Rightarrow g \circ f$ este surjectivă

$f : A \to B$

$f(a_1) = b_1$

$f(a_2) = b_2$

$\operatorname{Im} f = \{b_1, b_2\} \subset B = \{b_1, b_2, b_3\} \Rightarrow f : A \to B$ nu este surjectivă

1.3.45.

Fie $f: A \to B$ o funcție și fie $X, X_1, X_2 \subseteq A$ și $Y, Y_1, Y_2 \subseteq B$ submulțimi

Să se arate că:

(1): $X \subseteq f^{-1}(f(X))$

(2): $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$

(3): $f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$

(4): $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$

<u>Soluție</u>:

$f: A \to B$, $C \subseteq A$

$f(C) = \{y \in B \mid \exists\, x \in C : f(x) = y\}$

$\forall\, D \subseteq B$

$f^{-1}(D) = \{x \in A \mid f(x) \in D\}$

(1): $X \subseteq A$

Fie $x \in X$, notăm $f(x) = y \in B$

$\Rightarrow f(x) = y \in f(X) \subseteq B$

$x \in f^{-1}(f(X))$

Dar $x \in X$

$\Rightarrow X \subseteq f^{-1}(f(x))$