Logică computațională

Logica propozițiilor

Propozițiile logice sunt fie adevărate / false

Sintaxa propozițiilor

p, q - propoziție

$\neg$ negație, $\neg p = F$ dacă $p = A$, $\neg p = A$ dacă $p = F$

$\wedge$ conjuncție (și), $p \wedge q = A$ dacă $p \&\& q = A$, altfel $p \wedge q = F$

$\vee$ disjuncție (sau), $p \vee q = A$ dacă $p = A \ || \ q = A$, altfel $p \vee q = F$

$\rightarrow$ implicație, $p \rightarrow q = F$ dacă $p = A \ \&\& \ q = F$, altfel $p \rightarrow q = A$ $(\neg p \vee q)$

$\leftrightarrow$ echivalență, $p \leftrightarrow q = A$ dacă $p \ \&\& \ q = A$ sau $p \&\& q = F$, altfel $p \leftrightarrow q = F$

$(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$

Semantica conectivelor

p	$\neg p$
A	F
F	A

$\uparrow$ nand $p \uparrow q = \neg (p \wedge q)$

$\downarrow$ nor $p \downarrow q = \neg (p \vee q)$

$\otimes$ xor = A doar dacă una și numai una este A $= \neg (p \leftrightarrow q)$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$	$p \uparrow q$	$p \downarrow q$	$p \oplus q$
T	T	T	T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	F	F	T	F	T
F	T	F	T	T	F	T	F	T
F	F	F	F	T	T	T	T	F

Interpretarea

i este o funcție care atribuie fiecărei propoziții fie T fie F

$U(P_1, P_2, \dots, P_n)$ este o expresie unde $P_1, P_2, \dots, P_n$ sunt legați prin conectori logici precum $\neg, \wedge, \vee$, etc

$i : \{P_1, P_2, P_3, \dots, P_n\} \to \{T, F\}$ este o funcție $i : F_p \to \{T, F\}$

$i(\neg p) = \neg i(p)$

$i(p \wedge q) = i(p) \wedge i(q)$

$i(p \leftrightarrow q) = i(p) \leftrightarrow i(q)$

$i(p \vee q) = i(p) \vee i(q)$

$i(p \to q) = i(p) \to i(q)$

Avem 2^n interpretări deoarece fiecare propoziție $P_1, P_2, \dots, P_n$ poate lua două valori: A, F

O interpretare i care evaluează U ca fiind adevărată (adică $i(U) = T$) se numește model al formulei.

O interpretare i care evaluează U ca fiind falsă (adică $i(U) = F$) se numește antimodel al formulei.

O formulă U este consistentă (realizabilă) dacă are cel puțin un model

O formulă U este validă (tautologie) $\models U$, dacă este adevărată în orice interpretare

O formulă U este inconsistentă (nerealizabilă) dacă nu are niciun model

O formulă U este contingentă dacă este consistentă dar nu este validă

Relații între formule

Formula V este consecință logică a formulei U, $U \models V$ dacă pentru orice interpretare i care face U adevărată, formula V este de asemenea adevărată

Două formule U și V sunt logic echivalente $U \equiv V$ dacă tabelele lor de adevăr sunt identice

Ex: formule

Tabela de adevăr

	p	q	r	$\neg p \vee q$	$r \vee p$	$U(p,q,r)$	$V(p,q,r)$	$p \uparrow \neg p$	$p \downarrow \neg p$
i_1	T	T	T	T	T	T	T	T	F
i_2	T	T	F	T	T	T	T	T	F
i_3	T	F	T	F	T	F	F	T	F
i_4	T	F	F	F	T	F	F	T	F
i_5	F	T	T	T	T	T	T	T	F
i_6	F	T	F	T	F	F	F	T	F
i_7	F	F	T	T	T	T	T	T	F
i_8	F	F	F	T	F	F	F	T	F

$U(p,q,r) = (\neg p \vee q) \wedge (r \vee p)$,
$V(p,q,r) = (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge p)$

Obs:

modelele pentru U: i_1, i_2, i_5, i_7

anti modelele pentru U: i_3, i_4, i_6, i_8

$p \uparrow \neg p$ tautologie

$p \downarrow \neg p$ inconsistentă

$U \equiv V$

$U \models \neg p \vee q$

Relații între mulțimi de formule

O mulțime de formule $\{U_1, U_2, U_3 \ldots U_n\}$ este consistentă dacă formula combinată $U_1 \wedge U_2 \wedge \ldots \wedge U_n$ este consistentă, adică cel puțin o interpretare din toate formulele este adevărată.

O mulțime de formule $\{U_1, U_2, U_3 \dots U_n\}$ este inconsistentă dacă formula combinată $U_1 \wedge U_2 \wedge \dots \wedge U_n$ este inconsistentă, adică nu există nicio interpretare în care toate formulele să fie adevărate.

Formula V este consecință logică a mulțimii de formule $\{U_1, U_2, \dots U_n\}$ dacă pentru fiecare interpretare i care face toate formulele din mulțime să fie adev. și formula V este adev.

- O mulțime $S = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ de formule este consistentă $\Rightarrow$ fiecare submulțime este consistentă.
- Dacă S este consistentă și V este o formulă validă $\Rightarrow$ $S \cup \{V\}$ este consistentă.
- Dacă S inconsistentă $\Rightarrow$ pentru orice formulă V mulțimea $S \cup \{V\}$ este inconsistentă.

Teoremă

1. $\models U$ d.n.d $\neg U$ este inconsistentă
2. $U \models V$ d.n.d $U \to V$ este tautologie

U	V	$U \to V$
T	T	T
F	T	T
T	T	T
T	T	T
F	T	T
T	T	T
T	T	T

3. $U \equiv V$ d.n.d $U \leftrightarrow V$ este tautologie
4. $\{U_1, U_2, \dots, U_n\} \models V$ d.n.d $U_1 \wedge U_2 \wedge \dots \wedge U_n \to V$ este tautologie
   d.n.d $U_1 \wedge U_2 \wedge \dots \wedge U_n \wedge \neg V$ este inconsistentă

Echivalențe logice

- Legile lui DeMorgan

$\neg(U \wedge V) \equiv \neg U \vee \neg V$ și $\neg(U \vee V) \equiv \neg U \wedge \neg V$

- Legile de absorbție

$U \wedge (U \vee V) \equiv U$ și $U \vee (U \wedge V) \equiv U$

- Legile de commutativitate

$U \wedge V \equiv V \wedge U$ și $U \vee V \equiv V \vee U$

- Legile de asociativitate

$U \wedge (V \wedge Z) \equiv (U \wedge V) \wedge Z$ și $U \vee (V \vee Z) \equiv (U \vee V) \vee Z$

- Legile de distributivitate

$U \wedge (V \vee Z) \equiv (U \wedge V) \vee (U \wedge Z)$

$U \vee (V \wedge Z) \equiv (U \vee V) \wedge (U \vee Z)$

- Legile de idempotență

$U \wedge U \equiv U$ și $U \vee U \equiv U$

Alte echivalențe logice

- Legile de simplificare

$\neg\neg U \equiv U$	$U \to U \equiv \mathrm{T}$
$U \wedge \neg U \equiv \mathrm{F}$	$U \vee \neg U \equiv \mathrm{T}$
$\mathrm{T} \wedge U \equiv U$	$\mathrm{F} \vee U \equiv U$
$U \to \mathrm{T} \equiv \mathrm{T}$	$U \to \mathrm{F} \equiv \neg U$
$T \to U \equiv U$	$\mathrm{F} \to U \equiv \mathrm{T}$
$U \leftrightarrow \mathrm{T} \equiv U$	$U \leftrightarrow \mathrm{F} \equiv \neg U$
$U \oplus \mathrm{T} \equiv \neg U$	$U \oplus \mathrm{F} \equiv U$
$U \leftrightarrow U \equiv \mathrm{T}$	$U \oplus U \equiv \mathrm{F}$

- Definirea conectivelor

$U \to V \equiv \neg U \vee V$

$U \to V \equiv \neg (U \wedge \neg V)$

$U \to V \equiv U \leftrightarrow (U \wedge V)$

$U \to V \equiv V \leftrightarrow (U \vee V)$

$U \leftrightarrow V \equiv (U \to V) \wedge (V \to U)$

$U \oplus V \equiv \neg (U \to V) \vee \neg (V \to U)$

$U \leftrightarrow V \equiv (U \vee V) \to (U \wedge V)$

$U \vee V \equiv \neg (\neg U \wedge \neg V)$

$U \wedge V \equiv \neg (\neg U \vee \neg V)$

$U \vee V \equiv \neg U \to V$

$U \wedge V \equiv \neg (U \to \neg V)$

$\neg U \equiv U \uparrow U \equiv U \downarrow U$

$U \vee V \equiv (U \uparrow U) \uparrow (V \uparrow V) \equiv (U \downarrow V) \downarrow (U \downarrow V)$

$U \wedge V \equiv (U \downarrow U) \downarrow (V \downarrow V) \equiv (U \uparrow V) \uparrow (U \uparrow V)$

1. Un literal este o variabilă propozițională (P) sau negația sa ($\neg P$)

2. O clauză este disjuncția (sau) unui număr finit de literali (de exemplu $P \vee Q \vee \neg R$)

3. Un cub este conjuncția (și) unui număr finit de literali (de exemplu $P \wedge Q \wedge \neg R$)

4. Clauza vidă, notație $\square$ reprezintă o clauză fără literali, și neavând literali este inconsistentă.

5. FND (forma normală disjunctivă) o formulă este FND dacă poate fi scrisă ca o disjuncție de cuburi.

6. FNC (forma normală conjunctivă) o formulă este FNC dacă poate fi scrisă ca o conjuncție de clauze.

Algoritmul de normalizare

Pasul 1:

înlocuirea $U \rightarrow V$ cu $\neg U \vee V$

înlocuirea $U \leftrightarrow V$ cu $(\neg U \vee V) \wedge (U \vee \neg V)$

Pasul 2:

Aplicarea legilor legilor lui DeMorgan (dinspre ext spre int) și simplificarea negațiilor multiple precum $\neg\neg U \equiv U$

Pasul 3:

Aplicarea legilor distributivității:

- pentru FND: $U \wedge (V \vee Z) \equiv (U \wedge V) \vee (U \wedge Z)$
- pentru FNC: $U \vee (V \wedge Z) \equiv (U \vee V) \wedge (U \vee Z)$

Pasul 4:

Simplificarea formei obținute folosind alte echivalențe logice:

$U \vee U \equiv U$, etc.

Teoreme

1. Formula în FNC este tautologie d.n.d toate clauzele sale sunt valide $U_1 \wedge U_2 \wedge \dots \wedge U_n$
2. Formula în FND este inconsistentă d.n.d toate cuburile sale sunt inconsistente $V_1 \vee V_2 \vee \dots \vee V_n$