Analiza

3. Derivate de ordin superior

Considerăm $-\infty \le a < b \le +\infty$

Def:

Fie $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ o funcție și $x_0 \in (a,b)$

1) Dacă $\exists\ \delta > 0$ a.î. f este derivabilă pe $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (a,b)$, iar funcția $f':(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$ este la rândul ei derivabilă în x_0, atunci f este de două ori derivabilă în punctul x_0.

Notăm $(f')'(x_0) = f''(x_0)$ numită derivata de ordinul 2 în punctul x_0.

2) Succesiv putem construi derivata de ordinul n a funcției f în punctul x_0, notată $f^{(n)}(x_0)$, $n \in \mathbb{N}$. Prin convenție $f^{(0)} = f$

3) Spunem că f este indefinit derivabilă în x_0 dacă există $f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$

4) Spunem că f este indefinit derivabilă pe (a,b) dacă f este indefinit derivabilă în $\forall\ x \in (a,b)$

(formula lui Leibnitz)

Dacă $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ sunt funcții indefinit derivabile pe (a,b) atunci are loc formula de derivare:

$$(f\cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Def: Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ o funcție indefinit derivabilă în punctul $x_0 \in (a,b)$. Polinomul

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n,$$

$\forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

se numește polinomul lui Taylor de grad n asociat funcției f în punctul x_0.

Obs: Derivatele de ordin superior (până la ordinul n) ale polinomului T_n și ale funcției f în punctul x_0 coincid. Adică

$$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \forall k=\overline{0,n}$$

Dem: Evident $T_n(x_0) = f(x_0)$

$$T_n'(x) = f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow T_n'(x_0) = f'(x_0)$, ș.a.m.d

Ex: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$, $n \in \mathbb{N}$

$f^{(k)}(0) = 1, \forall k=\overline{0,n}$, $T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}$

Ce legătură există între polinom și funcție când $n \to \infty$?

4. Serii Taylor și serii de puteri

Def: Fie $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ o funcție indefinit derivabilă în punctul $x_0 \in (a,b)$

a) Seria de numere

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_n)}{n!} \cdot (x - x_0)^n, \quad x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

se numește seria Taylor asociată funcției f în punctul x_0

b) Spunem că f este dezvoltabilă în serie Taylor în punctul x_0 pe mulțimea $M \subseteq (a,b)$ dacă seria (1) este conv și are suma $f(x)$, $\forall\ x \in M$.

Obs: Cu notațiile din definiția anterioară f este dezvoltabilă în serie Taylor pe mulțimea $M \iff$

$$\lim_{n \to \infty} (f(x) - T_n(x)) = 0, \ \forall\ x \in M$$

Ex: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$

Seria Taylor asociată este $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$

Este adv că $\lim_{n\to\infty} \left(e^x - \left(1 - \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \dots - \frac{x^n}{n!}\right)\right) = 0$, $x \in \mathbb{R}$?

Obs: Funcțiile elementare sunt dezvoltabile în serie Taylor dar nu pe întreg domeniul lor de definiție, ci doar pentru acele valori ale lui x pentru care seria Taylor asociată e convergentă.

Ex: Studiem convergența seriei $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$

Considerăm s.t.p. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$ și aplicăm criteriul raportului

$D = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{|x|^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{|x|} = +\infty > 1 \Rightarrow$ seria inițială este absolut convergentă, $\forall x \in \mathbb{R}$

Vom serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Studiul convergenței seriilor Taylor poate fi făcut într-un cadru mai general.

Def: Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de numere reale și $x_0, x \in \mathbb{R}$

a) Seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots \quad (2)$$

se numește serie de puteri centrată în x_0 (derivabilă).

b) Mulțimea $M = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{seria (2) este convergentă}\}$ se numește mulțimea de convergență a seriei de puteri

Obs: 1) Orice serie Taylor este o serie de puteri

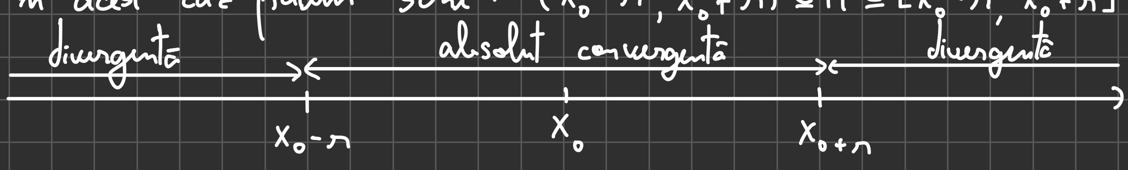
2) Mulțimea de convergență a unei serii de puteri este nevidă ($x_0 \in M$).

Ex: Seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n$ are $M = \mathbb{R}$

$\boxed{T}$ (caracterizarea mulțimii de convergență a unei serii de puteri)

Dacă $M \subseteq \mathbb{R}$ notează mulțimea de convergență a unei serii de puteri centrată în x_0 atunci $\exists !\ r \in [0, +\infty)$ astfel încât seria este absolut convergentă $\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ și seria este divergentă $\forall x \in (-\infty, x_0 - r) \cup (x_0 + r, +\infty)$.

În acest caz putem scrie: $(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq M \subseteq [x_0 - r, x_0 + r]$



Obs: 1) Teorema nu precizează natura seriei în $x = x_0 - r$ și $x = x_0 + r$

2) Dacă $r = +\infty$ atunci seria este absolut convergentă pe $\mathbb{R}$

$M = \mathbb{R}$

Def: Numărul $r \in [0, +\infty]$ din teorema anterioară se numește raza de convergență a seriei de puteri.

Prop: (calculul razei de convergență)

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ o serie de puteri având raza de convergență $r \in [0, +\infty]$. Atunci $r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$, în ipoteză că limita există.

Dem: Studiem convergența s.t.p. $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $x_n = |a_n \cdot (x - x_0)^n|$

$$D = \lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \cdot \frac{1}{|x - x_0|} = \frac{l}{|x - x_0|}, \quad l = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

serie convergentă dacă $D > 1 \iff l > |x - x_0| \iff x \in (x_0 - l, x_0 + l)$

serie divergentă dacă $D < 1 \iff l < |x - x_0| \iff x \in \mathbb{R} / (x_0 - l, x_0 + l)$

$\Rightarrow r = l$

Ex: Mulțimea de convergență a seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in \mathbb{R}$

$x_0 = 0$, $a_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow r = 1 \Rightarrow (-1, 1) \subseteq M \subseteq [-1, 1]$

Deoarece $-1, 1 \notin M \Rightarrow M = (1, -1)$

5. Operații cu serii de puteri

Pentru simplitate vom considera doar cazul seriilor de puteri centrate în origine $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in \mathbb{R}$

Prop (substituția într-o serie de puteri)

Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este o serie de puteri cu raza de convergență $r>0$ și suma $S(x)$, iar $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ este o funcție cu proprietatea că $f([\alpha,\beta]) \subseteq (-r, r)$ atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (f(t))^n$ este convergentă și are suma $S(f(t))$, $\forall t \in [\alpha,\beta]$.

Ex: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $\forall x \in (-1,1)$

a) $x=-t$: $\sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot t^n = \frac{1}{1+t}$, $\forall t \in (-1,1)$

b) $x=-t^2$: $\sum_{n=0}^{\infty} (-t)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, t^{2n} = \frac{1}{1+t^2}$, $\forall t \in (-1,1)$

Prop (derivarea și integrarea seriilor de puteri)

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri cu raza de convergență $r>0$ și suma $S(x)$. Atunci:

1°. Seria poate fi derivată termen cu termen și are loc.

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^{n-1}, \ \forall x \in (-r, r)$$

2°. Seria poate fi integrată termen cu termen și are loc

$$\int_0^t S(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot t^{n+1}, \ \forall t \in (-r, r)$$

Mai mult, seriile obținute au aceeași rază de convergență r, dar nu neapărat aceeași mulțime de convergență.

Ex: a) $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n, \ \forall x \in (-1, 1)$

$$\Rightarrow \int_0^t \frac{1}{1+x}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t (-1)^n \cdot x^n\, dx$$

$$\ln(1+t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot t^{n+1} = \sum_{n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot t^n, \ \forall t \in (-1, 1)$$

deoarece $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ este convergentă