Algebra

- O funcție este un triplet (A, B, f), unde A și B sunt mulțimi oarecare, iar f este o lege de corespondență a.î. fiecărui element din A îi corespunde un singur element din B.

A = domeniu de definiție

B = codomeniu

$f: A \to B$

- Funcția $f: A \to B$ se numește injectivă dacă:

$\forall\ x_1, x_2 \in A$ a.î. $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

sau

$$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

- Funcția $f: A \to B$ se numește surjectivă dacă:

$\forall\ y \in B\ \exists\ x \in A$ a.î. $f(x) = y$

- Funcția $f: A \to B$ se numește bijectivă dacă este injectivă și surjectivă

$\forall\ y \in B\ \exists!\ x \in A$ a.î. $f(x) = y$

$\Updownarrow$

$\exists\ f^{-1}: B \to A$, $f^{-1}(y) = x$ (inversa există)

Aplicații:

1.3.35. Fie funcțiile:

(1) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^2$

(2) $f_2 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = x^2$

(3) $f_3 : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $f_3(x) = x^2$

(4) $f_4 : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f_4(x) = x^2$

Să se studieze pt. fiecare dintre ele inj, surj, bij. În cazul existenței inversei, să se determine aceasta.

Soluție:

(1) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^2$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_1 \neq x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f_1 \text{ nu este injectivă} \\ \left.\begin{array}{l} y = -1 \in \mathbb{R} \text{ (codomeniul)} \\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f_1 \text{ nu este surjectivă} \end{array}\right\} \Rightarrow f_1 \text{ nu este bij}$$

(2) $f_2 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = x^2$

fie $x_1 \neq x_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$x_1^2 \neq x_2^2 \quad /\sqrt{\ }$

$\pm x_1 \neq \pm x_2$, domeniul $= [0,\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 \neq x_2 \Rightarrow f_2$ inj

$$\left.\begin{array}{l} y=-1 \in \mathbb{R} \\ \forall x \in [0,\infty) \Rightarrow f_2(x) = x^2 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f_2 \text{ nu este surj.} \Rightarrow f_2 \text{ nu este bijectivă}$$

(3) $f_3 : \mathbb{R} \to [0,\infty)$, $f_3(x) = x^2$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_1 \neq x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow f_3(x_1) = f_3(x_2) \Rightarrow f_3 \text{ nu este inj}$$

$\forall y \in [0,\infty), \exists x \in \mathbb{R}$ a.î. $f_3(x) = y \Rightarrow f_3$ este surj $\Rightarrow f_3$ nu este bijectivă

(4) $f_4 : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $f_4(x) = x^2$

$$\left.\begin{array}{l} \forall x_1, x_2 \in [0,\infty),\ x_1 = x_2 \Rightarrow f_4(x_1) = f_4(x_2) \Rightarrow f_4 \text{ inj} \\ \forall y \in [0,\infty)\ \exists\ x \in [0,\infty) \text{ a.î. } f(x) = y \Rightarrow f_4 \text{ surj} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f_4$ bijectivă $\Rightarrow \exists f_4^{-1} : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $f_4^{-1}(y) = \sqrt{y}$

1.3.36.

Să se studieze pentru următoarele funcții inj, surj, bij. În cazul existenței inversei, să se determine aceasta.

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \le 1 \\ x+2, & x > 1 \end{cases}$$

Soluție

$$f(x) = y \Rightarrow \begin{cases} 2x+1 = y, & x \in (-\infty, 1] \\ x+2 = y, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{y-1}{2}, & \frac{y-1}{2} \le 1 \\ x = y-2, & y-2 > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{y-1}{2}, & y \le 3 \\ x = y-2, & y > 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{y-1}{2}, & y \in (-\infty, 3] \\ x = y-2, & y \in (3, +\infty) \end{cases}$$

$(-\infty, 3] \cup (3, +\infty) = \mathbb{R} \Rightarrow f$ surj

$(-\infty, 3] \cap (3 + \infty) = \emptyset \Rightarrow$ sol unică pe ramură $\Rightarrow f$ inj

$$\Rightarrow f \text{ bij} \Rightarrow \exists f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{y-1}{2}, & x \in (-\infty, 1] \\ y-2, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 0 \\ x+2, & x > 0 \end{cases}$

Metoda I

$f(x) = y \Rightarrow \begin{cases} y = 2x+1, & x \in [-\infty, 0] \\ y = x+2, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$

$\begin{cases} y = 2x+1, & x \leq 0 \\ y = x+2, & x > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = \frac{y-1}{2}, & \frac{y-1}{2} \leq 0 \\ x = y-2, & y-2 > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = \frac{y-1}{2}, & y \leq 1 \\ x = y-2, & y > 2 \end{cases}$

$\begin{cases} x = \frac{y-1}{2}, & y \in (-\infty, 1] \\ x = y-2, & y \in (2, +\infty) \end{cases}$

Metoda II

$f((-\infty, 0]) = (-\infty, 1]$

$f((0, +\infty)) = (2, +\infty)$

$(-\infty, 1] \cup (2, +\infty) \neq \mathbb{R} \Rightarrow f$ nu e surj

$(-\infty, 1] \cap (2, +\infty) = \emptyset \Rightarrow f$ este injectivă

Compunerea funcțiilor

$f : A \to B$, $g : B \to C$

$g \circ f : A \to C$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $\forall\, x \in A$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f \circ g"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& C
\end{tikzcd}$$

1.3.37.

Să se precizeze dacă următoarele compuneri $f \circ g$, $g \circ f$ sunt definite, și în caz afirmativ, să se determine funcția compusă:

(1) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq -1 \\ x - 1, & x > -1 \end{cases}$

$$g(x) = \begin{cases} -x + 1, & x < 3 \\ x - 2, & x \geq 3 \end{cases}$$

Sunt funcții definite.

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} f(-x+1), & x<3 \\ f(x-2), & x\geq 3 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (-x+1)^2-1, & -x+1 \leq -1 \text{ și } x<3 \\ -x, & -x+1 > -1 \text{ și } x\geq 3 \\ x-3, & x-2 > -1 \text{ și } x \geq 3 \\ (x-2)^2-1, & x-2 \leq -1 \text{ și } x<3 \end{cases}$$

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} g(x^2-1), & x\leq -1 \\ g(x-1), & x>-1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -(x^2-1)+1, & x^2-1<3 \text{ și } x\leq -1 \\ x^2-1-2, & x^2-1\geq 3 \text{ și } x\leq -1 \\ -(x-1)+1, & x-1<3 \text{ și } x>-1 \\ x-1-2, & x-1\geq 3 \text{ și } x>-1 \end{cases}$$

(2) $f: \mathbb{R} \to [0,\infty)$, $f(x) = |x|$

$g: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$

$(g\circ f)(x) = \mathbb{R} \xrightarrow{f} [0,\infty) \neq \mathbb{N}^* \Rightarrow \nexists (g\circ f)(x)$

$(f\circ g)(x) = \mathbb{N}^* \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} [0,\infty) \Rightarrow \exists (f\circ g)(x)$