Analiza

Fie $m, p \in \mathbb{N}$, $m, p \geq 2$

Def: a) O funcție $f : A \to \mathbb{R}^p$, unde $A \subseteq \mathbb{R}$, se numește funcție vectorială de variabilă reală.

$\forall\, x \in A$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)) \in \mathbb{R}^p$

b) O funcție $f : A \to \mathbb{R}$, unde $A \subseteq \mathbb{R}^m$, se numește funcție reală de variabilă vectorială.

$\forall\, (x_1, \dots, x_m) \in A$, $f(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}$

c) O funcție $f : A \to \mathbb{R}^p$, unde $A \subseteq \mathbb{R}^m$, se numește funcție vectorială de variabilă vectorială.

$\forall\, (x_1, \dots, x_m) \in A$, $f(x_1, \dots, x_m) = f(f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_p(x_1, \dots, x_m)) \in \mathbb{R}^p$

$(x_1, \dots, x_m)$ - variabilele funcției

$(f_1, \dots, f_p)$ - componentele scalare ale funcției

2. Șiruri în $\mathbb{R}^p$

Def: Orice funcție $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^p$ se numește șir de puncte din $\mathbb{R}^p$.

x^n reprezintă al n-lea termen din șirul x

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $f(n) \overset{\text{not}}{=} (x^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x^n = (x_1^n, \dots, x_p^n)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$(x_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (x_p^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sunt șiruri de numere reale.

Spunem că $x \in \mathbb{R}^p$ este limita șirului (x^n) dacă $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists$ $n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall\, n \geq n_0$: $\|x^n - x\| < \varepsilon$ (*)

Ex: $x^n = \left(\frac{(-1)^n}{n}, \left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right) \subseteq \mathbb{R}^2, \forall n \geq 1$

$$\frac{(-1)^n}{n} \downarrow 0 \qquad \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \downarrow e^{-1}$$

Este $x = (0, e^{-1})$ limita șirului (x^n)?

Afirmația (*) este echivalentă cu $\lim_{n\to\infty} \|x^n - x\| = 0$

Dem: Notăm $a_n = \|x^n - x\|$, $\forall n \in \mathbb{N}$, deci (a_n) șir de nr. reale

Avem $\|x^n - x\| < \varepsilon \iff a_n - \varepsilon < 0 \iff |a_n - 0| < \varepsilon \iff \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\boxed{T}$ (convergența pe componente a unui șir de puncte)

Dacă $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un șir de puncte din $\mathbb{R}^p$ cu $x^n = (x_1^n, \ldots, x_p^n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ și $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ atunci:

$$\lim_{n\to\infty} x^n = x \iff \lim_{n\to\infty} x_i^n = x_i, \forall i = \overline{1,p}$$

Dem:

$$\begin{array}{ccccc} x^n = (x_1^n, & \ldots, & x_p^n) \\ \downarrow \quad\ \ \downarrow & & \downarrow \\ x = (x_1, & \ldots, & x_p) \end{array}$$

„$\Rightarrow$" $\forall i = \overline{1,p}$: $|x_i^n - x_i| = \sqrt{(x_i^n - x_i)^2} \leq \sqrt{(x_1^n - x_1) + \ldots + (x_p^n - x_p)} = \|x^n - x\|$

Din $\lim_{n\to\infty} \|x^n - x\| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |x_i^n - x_i| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_i^n = x_i$

„$\Leftarrow$" Au loc inegalitatea $\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_p^2} \leq a_1 + \ldots + a_p$, $\forall a_1, \ldots, a_p \geq 0$

$\|x^n - x\| = \sqrt{(x_1^n - x_1)^2 + \ldots + (x_p^n - x_p)^2} \leq |x_1^n - x_1| + \ldots + |x_p^n - x_p|$

Avem $\lim_{n\to\infty} |x_i^n - x_i| = 0$, $\forall i \in \overline{1,p} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (|x_1^n - x_1| + \ldots + |x_p^n - x_p|) = 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|x^n - x\| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x^n = x$

<u>Prop</u> (caracterizarea cu șiruri a punctelor de acumulare)
Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p$ mulțime nevidă și $x \in \mathbb{R}^p$. Au loc $x \in A' \Leftrightarrow \exists (x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ șir de puncte din $A \setminus \{x\}$ a.î. $\lim_{n\to\infty} x^n = x$.

Dem: „$\Rightarrow$" $x \in A' \Rightarrow \forall r > 0 : B(x, r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ alegem $r = \frac{1}{n} > 0 \Rightarrow B(x, \frac{1}{n}) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists x^n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap (A \setminus \{x\}) \Rightarrow (x^n)$ este șir de puncte din $A \setminus \{x\}$ cu $\|x^n - x\| < \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|x^n - x\| = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x^n = x$.

„$\Leftarrow$" Fie $r > 0$ și $(x^n) \subseteq A \setminus \{x\}$ cu $\lim_{n\to\infty} x^n = x$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_0 : \|x^n - x\| < r$

$\Rightarrow x^n \in B(x, r)$, $\forall n \geq n_0 \Rightarrow B(x, r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset \Rightarrow x \in A'$

3. <u>Limită și continuitate pentru funcții reale de variabilă vectorială</u>

<u>Def</u>: Fie $A \subseteq \mathbb{R}^m$ mulțime nevidă, o funcție $f : A \to \mathbb{R}$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$ și $x^0 \in A'$. Spunem că l este limita funcției f în punctul x_0 dacă $\forall (x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ șir de puncte din $A \setminus \{x^0\}$ cu $\lim_{n\to\infty} x^n = x^0$,

atunci $\lim\limits_{n\to\infty} f(x^n) = l$, și vom scrie $\lim\limits_{x\to x^0} f(x) = l$ sau

$$\lim_{(x_1,\dots,x_m)\to(x_1^0,\dots,x_m^0)} f(x_1,\dots,x_m) = l$$

<u>Ex</u>: $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f: A\to\mathbb{R}$

$$f(x_1, x_2) = \frac{(x_1)^2\cdot x_2}{(x_1)^4+(x_2)^2}, \ \forall (x_1,x_2)\in A \text{ și } x^0=(0,0)$$

$x^0\in A'$. Fie $(a^n), (b^n)$ șiruri din $A\setminus\{x^0\}$

$$a^n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)\to(0,0)\ ;\ b^n = \left(\frac{1}{n}, 0\right)\to(0,0)\ ,\ n\to\infty$$

$$\left.\begin{aligned} f(a^n) &= \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2}\to\frac{1}{2} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad ,\ n\to\infty \\ f(b^n) &= \frac{0}{\frac{1}{n^4}} = 0\to 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} f(x_1,x_2)$$

<u>Obs</u>: Cu notațiile din def anterioară și ipoteza $l\in\mathbb{R}$ avem echivalența: $\lim\limits_{x\to x^0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x^0} |f(x) - l| = 0$

<u>Ex</u>: $A = \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, $f: A\to\mathbb{R}$

$$f(x_1,x_2) = \frac{(x_1)^2\cdot(x_2)^2}{(x_1)^4+(x_2)^2}, \ \forall (x_1,x_2)\in A \text{ și } x^0=(0,0)$$

$$|f(x_1,x_2) - 0| = (x_1)^2\cdot\underbrace{\frac{(x_2)^2}{(x_1)^4+(x_2)^2}}_{\leq 1} \leq (x_1)^2$$

$$\Rightarrow 0 \le \lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} |f(x_1,x_2) - 0| \le \lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} (x_1)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} f(x_1,x_2) = 0$$

Considerăm în continuare cazul particular al funcțiilor reale de două variabile $f(x_1, x_2)$

<u>Def</u>: Fie $A = A_1 \times A_2 \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție și $x^0 = (x_1^0, x_2^0) \in A'$ cu următoarele proprietăți:

1°. $\exists \lim_{x_1 \to x_1^0} f(x_1, x_2) \in \mathbb{R}, \forall x_2 \in A_2$

2°. $\exists \lim_{x_2 \to x_2^0} f(x_1, x_2) \in \mathbb{R}, \forall x_1 \in A_1$

Atunci limitele $\lim_{x_1 \to x_1^0} \lim_{x_2 \to x_2^0} f(x_1, x_2)$ și $\lim_{x_2 \to x_2^0} \lim_{x_1 \to x_1^0} f(x_1, x_2)$

se numesc limitele iterate ale funcției f în punctul x^0.

<u>Prop</u>: În ipotezele definiției anterioare are loc afirmația:

Dacă $\exists \lim_{(x_1,x_2)\to(x_1^0, x_2^0)} f(x_1, x_2) = l \in \overline{\mathbb{R}}$ atunci

$$\lim_{x_1 \to x_1^0} \lim_{x_2 \to x_2^0} f(x_1, x_2) = \lim_{x_2 \to x_2^0} \lim_{x_1 \to x_1^0} f(x_1, x_2) = l$$

Reciproca afirmației nu este adevărată.

Ex a) $f(x_1, x_2) = \dfrac{(x_1)^2 \cdot x_2}{(x_1)^4 + (x_2)^4}$, $x^0 = (0,0)$

Limitele iterate sunt egale și totuși $\nexists \lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,0)} f(x_1,x_2)$

Def: Fie $A \subseteq \mathbb{R}^m$ mulțime nevidă și $x^0 \in A \cap A'$. Spunem că funcția $f: A \to \mathbb{R}$ este:

a) continuă în punctul x_0 dacă $\exists \lim\limits_{x\to x^0} f(x) = f(x^0)$

b) continuă pe mulțimea A dacă f continuă în $\forall x \in A$.

Ex: $f(x) = |x|$ continuă pe $\mathbb{R}^m$.

Def: Fie $A \subseteq \mathbb{R}^m$ mulțime nevidă, $f: A \to \mathbb{R}$ o funcție și $f(A) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in A \text{ a.î. } f(x) = y\}$ imaginea funcției.

Spunem că:

a) f este mărginită dacă $f(A)$ este mărginită.

b) f își atinge extremele pe A dacă $\exists\ x, x_1 \in A$ a.î.:

$f(x) = \inf f(A)$ și $f(x_1) = \sup f(A)$ numite extremele funcției.

$f(x) = \min f(A)$ și $f(x_1) = \max f(A)$

$\boxed{T}$ (Weierstrass)

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^m$ o mulțime compactă (închisă, mărginită) și $f: A \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe A. Au loc afirmațiile:

1°. f este mărginită

2°. f își atinge extremele pe A