

Linguaggio Predicativo

Massimo calabrigo

November 21, 2019

Contents

1 Variabile Libera	1
2 Sostituzione di termini e/o formule	1
3 Interpretazione di una formula	2
3.1 Stato di una formula	2
3.2 Metodologia da seguire per l'interpretazione di una formula . .	4
4 Equivalenza e Conseguenza Logica	4

1 Variabile Libera

Una variabile libera è una variabile che non è legata ai quantificatori (\exists e \forall).

Quindi, se abbiamo una formula del tipo $\forall x(r(x, y))$, allora y sarà una variabile libera, mentre x sarà una variabile legata. Possiamo pensare più facilmente ad y come una variabile vera e propria, alla quale posso sostituire qualsiasi valore io voglia (presente nel dominio), mentre per quanto riguarda la x , è un valore al quale dobbiamo sostituire, uno alla volta, tutti i valori del dominio.

2 Sostituzione di termini e/o formule

La scrittura $r(f(x))\{x/t\} = r(f(t))$, significa che devi sostituire alla variabile x , il termine t .

La scrittura $r(f(x))\{x/f(x)\} = r(f(f(x)))$, significa che devo sostituire alla variabile x , il termine $f(x)$.

Per poter fare una sostituzione, devo essere sicuro che la variabile che sostituisco sia una variabile libera, inoltre devo accertarmi che, dopo averla sostituita, essa rimanga ancora libera. Esempio:

$$\forall x(r(x,y))\{x/w\}$$

Nella formula sovrastante ci sono 2 variabili: x e y . x è legata (dal quantificatore $\forall x$) mentre y è libera, e visto che io sto cercando di sostituire w ad x , e che dopo aver sostituito w , quest'ultima sarà comunque una variabile libera, poichè non è legata a nessun quantificatore, allora posso effettuare la sostituzione.

3 Interpretazione di una formula

Cos'è un linguaggio?

Un linguaggio è composto da simboli di costante, di relazione e di funzione, oltre che a quantificatori e connettivi logici.

Un linguaggio può anche essere definito come insieme di formule.

Cos'è l'interpretazione di una formula?

L'interpretazione è il valore che assume quella formula, al variare dello stato (vedi dopo) a cui è associata. Si scrive I, σ soddisfa F , dove F è la formula e σ è lo stato.

Per trovare l'interpretazione di una formula, dobbiamo avere l'interpretazione di un linguaggio, per esempio se dovessimo avere un linguaggio L_0 , con 1 simbolo di costante c , un simbolo di relazione binario r e un simbolo di funzione f , una interpretazione possibile potrebbe essere:

- $D = \{0, 1, 2\}$
- $c^I = 1$
- $f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 3$
- $r^I = \{(0, 0), (1, 2), (2, 2)\}$

3.1 Stato di una formula

Lo stato associato ad una formula, è una funzione che manda da una qualsiasi variabile, ad un elemento del dominio: $\sigma : Var \rightarrow D^I$.

Lo stato si scrive in coppia con l'interpretazione, e li si usano per vedere se una determinata formula F , possa far parte dell'insieme delle formule T del linguaggio L_0 . Si scrive I, σ soddisfa F . E si legge l'interpretazione con

stato sigma, soddisfa F.

Uno stato possibile potrebbe essere:

- $\sigma(x) = 0$
- $\sigma(y) = 1$
- $\sigma(w) = 2$ (con $w \neq x, y$)

Il sigma può essere usato su qualsiasi termine, ma avrà effetti diversi:

- (termine) $\sigma(\text{variabile}) \rightarrow \sigma(x)$, per i $\sigma(Var)$ definiti nello stato (esempio sopra)
- (termine) $\sigma(\text{costante}) \rightarrow \sigma(c^I)$
- (termine) $\sigma(\text{simbolodifunzione}) \rightarrow f(\sigma(t_1), \sigma(t_2), \dots, \sigma(t_n))$
- (formula) $\sigma(\text{simbolodirelazione}) \rightarrow$ risolvo i sigma, e vedo se $p(0, 1, 3)$ appartiene a $p^I\{(1, 2, 3), (3, 6, 8), \dots, (2, 8, 34)\}$. Se appartiene allora I, σ soddisfa $p(0, 1, 3)$, altrimenti no.
- (formula) Per tutti i tipi di formule composte da connettivi logici, tranne i quantificatori, il soddisfa funziona in modo analogo alla soddisfazione del connettivo scelto, per esempio se ho I, σ soddisfa F or G, deve valere I, σ soddisfa F oppure I, σ soddisfa G.
- (formula) Per le formule con un quantificatore devo fare:
 - Quantificatore Esistenziale: $D^I = \{0, 1, 2\} (\forall x(r(x, y)))$, devo controllare che I, σ soddisfi $r(x, y)$, per almeno un valore di x, quindi devo verificare:
 1. $I, \sigma[x/0]$ soddisfa $r(x, y)$ oppure
 2. $I, \sigma[x/1]$ soddisfa $r(x, y)$ oppure
 3. $I, \sigma[x/2]$ soddisfa $r(x, y)$
 - Quantificatore Per ogni: $D^I = \{0, 1, 2\} (\forall x(r(x, y)))$, devo controllare che I, σ soddisfi $r(x, y)$, per tutti i valori di x, quindi devo verificare:
 1. $I, \sigma[x/0]$ soddisfa $r(x, y)$ e
 2. $I, \sigma[x/1]$ soddisfa $r(x, y)$ e
 3. $I, \sigma[x/2]$ soddisfa $r(x, y)$

3.2 Metodologia da seguire per l'interpretazione di una formula

Dati Una formula F , uno stato σ e un'interpretazione I , bisogna trovare se I, σ soddisfa F . Vedi i punti sovrastanti, c'è scritto cosa fare ad ogni passo!

4 Equivalenza e Conseguenza Logica

Due formule A e B sono logicamente equivalenti $A \equiv B$, se per ogni interpretazione I , e ogni stato σ : I, σ soddisfa A se e solo se I, σ soddisfa B .

Date 2 formule A e B , B è conseguenza logica di A se per ogni interpretazione I , e ogni stato σ : I, σ soddisfa A si ha I, σ soddisfa B