

Materiale per il secondo compitino di gorni

Calabrigo Massimo

December 5, 2019

Contents

1 Numeri non generabili da algoritmi	1
2 Limiti con l'Hopital	3
2.1 Procedimento per affrontare i limiti con l'hospital	4
3 Limiti e derivate dei seni e dei coseni	4
3.1 Derivate da ricordare	4
3.2 Trasformazioni trigonometriche da ricordare	4
4 Teorema dell'esistenza degli zeri e funzioni continue	5
4.1 Funzioni continue	5
4.2 Teorema dell'esistenza degli zeri	5
5 Studio di funzione	8
5.1 Asintoti verticali, orizzontali e obliqui	8
5.2 Come affrontare una funzione con logaritmi o arctan e gli zeri della funzione	9
6 Primitive e integrali	10
6.1 Primitive e tabella	10
6.2 Risoluzione delle primitive	11

1 Numeri non generabili da algoritmi

Non tutti i numeri reali possono essere generati da algoritmi; Per dimostrare ciò ci serve l' **argomento diagonale**.

Rappresentiamo un elenco ordinato di tutti i numeri reali:

1.
2. 0.11111111...
3. 0.22222222...
4. 3.76535435...
5. 12.5454354...
6. 76.8479634...
7.

e prendiamo una "foto" finita dell'insieme dei numeri reali infiniti:

1. 0.11111
2. 0.22222
3. 3.76535
4. 12.54543
5. 76.84796

A questo punto prendiamo la n-esima cifra dopo la virgola alla n-esima riga, e diamogli un valore diverso da quella che ha:

1. 0.|7|1111
2. 0.2|5|222
3. 3.76|8|35
4. 12.545|3|3
5. 76.8479|1|

Abbiamo appena creato un nuovo numero che non esisteva nell'elenco precedente.

1. 0.11111
2. 0.22222
3. 0.75831

4. 3.76535
5. 12.54543
6. 76.84796

Ora aggiungiamo una cifra decimale ad ogni riga e otteniamo un nuovo gruppo finito, e da esso possiamo ricavare infiniti numeri che non facevano parte dell'elenco. La stessa cosa vale per l'insieme R dei numeri reali, poichè abbiamo un elenco con $n = +\infty$, perciò anche la diagonale e i numeri da essa generati saranno infiniti, e non generabili da algoritmi.

1. 0.111111
2. 0.222222
3. 0.758312
4. 3.765353
5. 12.545436
6. 76.847968

N.B.: la diagonale è solo un esempio per dimostrare che un algoritmo non può generare tutti i numeri reali, se al posto della diagonale, dicessimo di cambiare un valore casuale dopo la virgola per riga, ottenendo un nuovo numero, otterremmo lo stesso risultato di dimostrare l'impossibilità di generare tutti i numeri reali con gli algoritmi.

2 Limiti con l'Hopital

L'Hopital serve a gestire forme di limite indeterminate, altrimenti non risolvibili.

Possiamo risolvere le forme indeterminate: $\frac{\infty}{\infty}$ e $\frac{0}{0}$.

1. se $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ e $\frac{\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)}{\lim_{x \rightarrow 0} g'(x)} = L$,
allora $\frac{\lim_{x \rightarrow 0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 0} g(x)} = L$
2. se $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ e $\frac{\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)}{\lim_{x \rightarrow \infty} g'(x)} = L$,
allora $\frac{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)} = L$

2.1 Procedimento per affrontare i limiti con l'hospital

Quando affrontiamo i limiti con l'hospital, ci troveremo sempre davanti ad una situazione $f(x)/g(x)$, nel caso non fosse così basterà ricondurci a quella situazione facendo un denominatore comune.

Risolvere per prima $g(x)$, poichè potrebbe aiutare a capire quante volte io debba applicare poi l'hospital (per esempio se $g(x)$, si semplifica in x^3).

Bisogna guardare se ci sono situazioni in cui il limite può tendere da destra o da sinistra, e quindi fare i limiti $\lim_{x \rightarrow 0^+}$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-}$.

Il procedimento sotto illustrato contiene tutti i passi per la risoluzione di un limite in questa forma, passi che devono essere eseguiti ricorsivamente, finchè non si arriva ad un risultato:

1. Provare a sostituire il valore del limite;
2. Provare a semplificare $f(x)$ con $g(x)$
3. Provare a razionalizzare;
4. Cercare possibili trasformazioni trigonometriche;
5. Cercare possibili limiti notevoli;
6. Fare la derivata;

3 Limiti e derivate dei seni e dei coseni

3.1 Derivate da ricordare

Funzioni	Derivate:
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

3.2 Trasformazioni trigonometriche da ricordare

- $\sin(2x) = 2 * \sin(x) * \cos(x)$
- $\cos(2x) = \sin^2 x + \cos^2 x$
- $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

4 Teorema dell'esistenza degli zeri e funzioni continue

4.1 Funzioni continue

Definizione di continuità:

$\forall \epsilon > 0$ e $\exists \delta > 0$ e $\forall x \in Dom(f)$ then

$$|x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Quindi $f(x) = \frac{1}{x}$, è una funzione continua, perchè $x_0 \notin Dom(f)$

Proprietà delle funzioni continue: Se f è una funzione continua, allora:

$$\lim_{x \rightarrow 0}(f(g(x))) = f(\lim_{x \rightarrow 0}(g(x)))$$

Le combinazioni di funzioni continue danno origine a funzioni continue.

Esempio: polinomi, esponenziali, e funzioni trigonometriche sono funzioni continue, quindi $\frac{\sin(x^3 + e^{x+2})}{x^2 + 1}$ è continua.

4.2 Teorema dell'esistenza degli zeri

Sia $[a, b]$ un intervallo chiuso, e $f : [a, b] \rightarrow R$, e sia che $f(a)$ e $f(b)$, abbiano segni opposti, allora $\exists x_s \in [a, b]$ tale che $f(x_s) = 0$

Per vedere se esiste uno zero, uso un algoritmo iterativo.

Ci sono due casi di partenza

1. $f(a_0) < 0$ e $f(b_0) > 0$
2. $f(a_0) > 0$ e $f(b_0) < 0$

Analizziamo il primo caso:

Troviamo un punto $c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$. A questo punto vediamo i casi:

$$f(c_i) = \begin{cases} < 0 \rightarrow \text{cerchiamo } c_{i+1} \text{ a destra, } I_{i+1} = [c_{i+1}, b] \\ = 0 \rightarrow \text{abbiamo finito} \\ > 0 \rightarrow \text{cerchiamo } c_{i+1} \text{ a sinistra, } I_{i+1} = [a, c_{i+1}] \end{cases}$$

Continuo a cercare c_i , dimezzando ogni volta l'intervallo e cercando a destra o a sinistra in base all'algoritmo sovrastante, finché non trovo $f(c_i) = 0$; a quel punto ho trovato che esiste uno zero.

Per dimostrare il teorema mi manca una cosa però, l'algoritmo potrebbe continuare all'infinito, devo dimostrare quando e perchè non è così. Vado a vedere la lunghezza dell'intervallo I_i . Guardo alcuni casi:

- $I_0 = [a_0, b_0]$ e quindi la lunghezza di I_0 è uguale a $\frac{b_0 - a_0}{1}$
- $I_1 = [a_1, b_1]$ e quindi la lunghezza di I_1 è uguale a $\frac{b_0 - a_0}{2}$
- $I_2 = [a_2, b_2]$ e quindi la lunghezza di I_2 è uguale a $\frac{b_0 - a_0}{4}$
- $I_3 = \dots$
- $I_n = [a_n, b_n]$ e quindi la lunghezza di I_n è uguale a $\frac{b_0 - a_0}{2^n}$

Visto che $I_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} = b_n - a_n$ possiamo riscriverlo come $b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$. Noi sappiamo che $a_i \leq a_{i+1}$ sarà sempre vero, e allo stesso modo $b_i \geq b_{i+1}$. Quindi possiamo concludere che la successione a_n è **debolmente crescente** (vuol dire che è non decrescente, ovvero che non cresce per forza sempre, ma può anche rimanere uguale), mentre b_n è **debolmente decrescente**.

Sappiamo che le successione monotone hanno sempre un limite, quindi

- $\lim_{x \rightarrow \infty} (a_n) = a_s$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} (b_n) = b_s$

$$a_0 \leq a_s \leq b_s \leq b_0$$

Riassumiamo le Proprietà dell'intervallo:

1. Visto che $I_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$, sappiamo che I_n tende a zero.
2. $f(a_i)$ e $f(b_i)$ hanno segni opposti
3. a_n è debolmente crescente
4. b_n è debolmente decrescente
5. Esiste $\lim_{x \rightarrow \infty} (a_n) = a_s$ ed è finito
6. Esiste $\lim_{x \rightarrow \infty} (b_n) = b_s$ ed è finito

Facciamo il limite di $b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$, per trovare il nostro x_s :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b_0 - a_0}{2^n} \right)$$

$$b_s - a_s = 0$$

$$a_s = b_s$$

Poniamo $x_s = a_s = b_s$

Inizio parte facoltativa (serve per dimostrare che x tocca tutti gli intervalli I_i)

Dobbiamo dimostrare che $a_s \leq x_s \leq b_s$.

Io so che $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n < b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_0$.

Preso $m < n$, allora $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_m \leq \dots \leq a_n < b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_m \leq \dots \leq b_0$, e quindi

$$a_m < b_n$$

Preso $m > n$, allora $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq a_m < b_m \leq b_{m-1} \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_0$, e quindi

$$a_n < b_m$$

Considero $a_n < b_m$ (o anche l'altra, a scelta). Ora posso dire che:

$$a_n < b_m$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) \leq b_m$$

$$x_s \leq b_m$$

e

$$a_n < b_m$$

$$a_n \leq \lim_{m \rightarrow \infty} (b_m)$$

$$a_n \leq x_s$$

Fine parte facoltativa

Ora che abbiamo dimostrato la formula possiamo usarla:

$$f(a_n) < 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(a_n)) \leq 0$$

$$f(x_s) \leq 0$$

e

$$\begin{aligned}f(b_n) &> 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (f(b_n)) &\geq 0 \\ f(x_s) &\geq 0\end{aligned}$$

Quindi, grazie a $f(x_s) \leq 0$ e $f(x_s) \geq 0$, posso dire che

$$f(x_s) = 0$$

Quindi esiste uno zero della funzione.

FINE DIMOSTRAZIONE

5 Studio di funzione

5.1 Asintoti verticali, orizzontali e obliqui

Quando dobbiamo cercare degli asintoti in una funzione, dobbiamo prima di tutto verificare se, e quali sono i buchi della funzione, ovvero quei punti dove la funzione non è definita, oltre che a $+\infty$ e $-\infty$, e bisogna cercare gli asintoti in quei punti.

Un **asintoto verticale** lo si trova quando $\lim_{x \rightarrow x_0^{+,-}} = + - \infty$.

Per esempio, se $\lim_{x \rightarrow 0^+} = \infty$ o $\lim_{x \rightarrow 0^+} = -\infty$ o $\lim_{x \rightarrow 0^-} = \infty$ o $\lim_{x \rightarrow 0^-} = -\infty$, allora abbiamo trovato un asintoto verticale.

Un **asintoto orizzontale** si trova quando $\lim_{x \rightarrow \infty} = l$.

Per esempio, se $\lim_{x \rightarrow +\infty} = l$ oppure $\lim_{x \rightarrow -\infty} = l$, allora abbiamo un asintoto orizzontale.

Per trovare i punti di intersezione tra l'asintoto orizzontale e la funzione posso mettere a sistema la funzione e l'equazione dell'asintoto:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = l \end{cases}$$

Un **asintoto obliquo** è tale se, data la retta $y = mx + q$, allora vale il limite $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx - q)$.

Quando bisogna vedere se c'è un asintoto obliquo bisogna procedere in questo modo:

1. dobbiamo calcolare $y = mx + q$, quindi calcoliamo $m = \lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{f(x)}{x})$; se $m \in R$, allora continuo (calcolo q), se $m = 0$ ho un asintoto orizzontale (calcolo q), altrimenti non ho un asintoto obliquo.
2. $q = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$. Se $q \in R$ allora ho un asintoto obliquo.

Esempio: $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$, trova se esiste $y = mx + q$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)/x)$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x^2}{x-1}/x)$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{1}{(1 - \frac{1}{x})}) = 1$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x^2}{x-1} - x)$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x}{x-1})$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{1}{1 - \frac{1}{x}}) = 1$$

$$y = mx + q = x + 1$$

5.2 Come affrontare una funzione con logaritmi o arctan e gli zeri della funzione

Affrontare questo tipo di funzioni non è poi tanto diverso dall'affrontare quelle polinomiali, ma con la differenza che bisogna stare più attenti sia nella parte di studio della funzione di partenza e nel determinare il dominio, che nella successiva parte delle derivate.

In questo tipo di esercizi, può essere chiesto di trovare gli zeri della funzione. Torna utile quindi il teorema di esistenza degli zeri.

Come lo applico? Una volta che ho fatto la derivata prima, e lo studio della crescita/descrescita, posso controllare ogni intervallo uno ad uno, e vedere se esiste uno zero. Ricorda che la funzione $f : [a, b] \rightarrow R$, deve essere continua nell'intervallo $[a, b]$. Per controllare posso usare le conoscenze che ho già acquisito nei passi precedenti, infatti andrò a vedere cosa vale la mia funzione nel punto a e cosa vale nel punto b, e da questo posso concludere se la funzione è passata per lo zero.

Per esempio se la mia tabella di crescita/descrescita è:

0	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	1:
−	−	+
+	+	+
−	−	+

e conosco che in 1 c'è un asintoto verticale, allora potrò dire che nell'intervallo $[\sqrt{\frac{1}{2}}, 1]$ c'è uno zero:

- $[-\infty, 0]$ no
- $[0, \sqrt{\frac{1}{2}}]$ no
- $[\sqrt{\frac{1}{2}}, 1]$ si
- $[1, \infty]$ no

6 Primitive e integrali

6.1 Primitive e tabella

L'operazione di antiderivazione è l'opposto della derivazione,

$$\int \left(\frac{d}{dx} f(x) \right) = f(x)$$

Vediamo un paio di trasformazioni da $f(x)$ a $\int f(x)$:

$f(x)$	$\int f(x)$
$k(\text{costante})$	kx
x^a	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$
$\text{sen}(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
a^x	$\frac{a^x}{\log(a)}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctg(x)$

Vediamo le proprietà delle operazioni tra integrali e le funzioni composte

- $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int (f(x)) dx \pm \int (g(x)) dx$
- $\int (k * f(x)) dx = k * \int (f(x)) dx$

Una regola fondamentale è quella che riguarda le funzioni composte:

$$\int f'(g(x)) * g'(x) = f(g(x))$$

Esempio:

$$\begin{aligned} \int (3 * x^2 * \sin(x^3)) \\ g'(x) * f'(g(x)) \\ -\cos(x^3) + c \end{aligned}$$

Da questa regola ne derivano varie:

Primitiva elementare	Primitiva composta
$f(x) = \frac{1}{x}$ e $\int f(x)dx = \ln(x) + c$	$\int (\frac{g'(x)}{g(x)}) = \ln g(x) + c$
$f(x) = x^n$ e $\int f(x)dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\int (g'(x) * g(x)^n) = \frac{g(x)^{n+1}}{n+1} + c$
...	...

6.2 Risoluzione delle primitive

Ci sono 4 tipi di primitive delle verifiche di gorni: 1 composta da polinomi, 2 composte da log(x), cos(x), sin(x), tan(x), arctan(x), ecc., e 1 per parti. Vediamo come risolvere queste tipologie separatamente.

Primitive composte da polinomi

Quando dobbiamo affrontare questo tipo di primitive, non possiamo partire in quarta e fare le primitive; prima bisogna fare la **Divisione del polinomio**. Ora vedremo questo primo procedimento:

1. Denominiamo $P(x)$ il polinomio numeratore e $D(x)$ il polinomio denominatore;
2. Scriviamo $P(x)|D(x)$;
3. Calcoliamo $gMax = \frac{\text{terminedigradomaxdi}P(x)}{\text{terminedigradomassimodi}D(x)}$;
4. Scriviamo $\frac{P(x)}{D(x)} \bigg| \frac{D(x)}{gMax}$
5. Moltiplichiamo gMax per ogni termine di P(x), e scriviamo i risultati, cambiati di segno, nella riga sotto P(x):

$$\frac{P(x)}{D(x) * gMax * (-1)} \bigg| \frac{D(x)}{gMax}$$

6. Sommiamo la riga $P(x)$ con la riga $P(x)*gMax*(-1)$ (somma termine per termine), e riportiamo il risultato nella riga sottostante:

$P(x)$	$D(x)$
$D(x) * gMax * (-1)$	$gMax$
$P(x) + D(x) * gMax * (-1)$	

7. Continuo finchè non arrivo ad avere un grado zero in $Q(x)$:

$P1(x)$	$D(x)$
$D(x)1 * gMax1 * (-1)$	$Q(x) = gMax1, gMax2, \dots, gMaxN$
$P1(x) + D(x)1 * gMax1 * (-1)$	
$D(x) * gMax2 * (-1)$	
$P2(x) + D2(x) * gMax2 * (-1)$	
\dots	
$PN(x) = \dots$	

8. Ora posso scrivere il risultato, che sarà $Q(x) + \frac{PN(x)}{D(x)}$

Facciamo un esempio: $f(x) = \frac{3x^3-2x^2+x}{6x^2+5x+1}$
 $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + x$ e $D(x) = 6x^2 + 5x + 1$.

1.

$3x^3 - 2x^2 + x$	$6x^2 + 5x + 1$
-------------------	-----------------
2.

$3x^3 - 2x^2 + x$	$6x^2 + 5x + 1$
	$\frac{x}{2}$
3.

$3x^3 - 2x^2 + x$	$6x^2 + 5x + 1$
$-3x^3 - \frac{5x^2}{2} - \frac{x}{2} + 0$	$\frac{x}{2}$
4.

$3x^3 - 2x^2 + x$	$6x^2 + 5x + 1$
$-3x^3 - \frac{5x^2}{2} - \frac{x}{2} + 0$	$\frac{x}{2}$
$0x^3 - \frac{9x^2}{2} + \frac{x}{2} + 0$	
5.

$3x^3 - 2x^2 + x$	$6x^2 + 5x + 1$
$-3x^3 - \frac{5x^2}{2} - \frac{x}{2} + 0$	$\frac{x}{2}, -\frac{3}{4}$
$0x^3 - \frac{9x^2}{2} + \frac{x}{2} + 0$	

$$6. \begin{array}{c|c} 3x^3 - 2x^2 + x & 6x^2 + 5x + 1 \\ \hline -3x^3 - \frac{5x^2}{2} - \frac{x}{2} + 0 & \frac{x}{2}, -\frac{3}{4} \\ \hline 0x^3 - \frac{9x^2}{2} + \frac{x}{2} + 0 & \\ \hline 0x^3 - \frac{18x^2}{4} + \frac{15x}{4} + 0 & \end{array}$$

$$7. \begin{array}{c|c} 3x^3 - 2x^2 + x & 6x^2 + 5x + 1 \\ \hline -3x^3 - \frac{5x^2}{2} - \frac{x}{2} + 0 & \frac{x}{2}, -\frac{3}{4} \\ \hline 0x^3 - \frac{9x^2}{2} + \frac{x}{2} + 0 & \\ \hline 0x^3 - \frac{18x^2}{4} + \frac{15x}{4} + 0 & \\ \hline 0x^3 + 0x^2 + \frac{17x}{4} + \frac{3}{4} & \end{array}$$

$$8. PN(x) = \frac{17x}{4} + \frac{3}{4} \text{ e } Q(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{4}.$$

Quindi possiamo riscrivere

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3x^3 - 2x^2 + x}{6x^2 + 5x + 1} \\ f(x) &= Q(x) + \frac{PN(x)}{D(x)} \\ f(x) &= \frac{x}{2} - \frac{3}{4} + \frac{\frac{17x}{4} + \frac{3}{4}}{6x^2 + 5x + 1} \end{aligned}$$