Materiale per il secondo compitino di gorni

Calabrigo Massimo

December 2, 2019

Contents

1 Numeri non generabili da algoritmi 1

2 Limiti con l'Hopital 3
2.1 Procedimento per affrontare i limiti con l'hopital 3

3 Limiti e derivate dei seni e dei coseni 4
3.1 Derivate da ricordare 4
3.2 Trasformazioni trigonometriche da ricordare 4

4 Teorema dell'esisistenza degli zeri e funzioni continue 4
4.1 Funzioni continue 4
4.2 Teorema dell'esisistenza degli zeri 5

1 Numeri non generabili da algoritmi

Non tutti i numeri reali possono essere generati da algoritmi; Per dimostrare ciò ci serve l' **argomento diagonale**.
Rappresentiamo un elenco ordinato di tutti i numeri reali:

1. ....
2. 0.11111111...
3. 0.22222222...
4. 3.76535435...
5. 12.5454354...
6. 76.8479634...

7. ....

e prendiamo una "foto" finita dell'insieme dei numeri reali infiniti:

1. 0.11111
2. 0.22222
3. 3.76535
4. 12.54543
5. 76.84796

A questo punto prendiamo la n-esima cifra dopo la virgola alla n-esima riga, e diamogli un valore diverso da quella che ha:

1. 0.|7|1111
2. 0.2|5|222
3. 3.76|8|35
4. 12.545|3|3
5. 76.8479|1|

Abbiamo appena creato un nuovo numero che non esisteva nell'elenco precedente.

1. 0.11111
2. 0.22222
3. 0.75831
4. 3.76535
5. 12.54543
6. 76.84796

Ora aggiungiamo una cifra decimale ad ogni riga e otteniamo un nuovo gruppo finito, e da esso possiamo ricavare infiniti numeri che non facevano parte dell'elenco. La stessa cosa vale per l'insieme R dei numeri reali, poichè abbiamo un elenco con $n = +\infty$, perciò anche la diagonale e i numeri da essa generati saranno infiniti, e non generabili da algoritmi.

1. 0.111111
2. 0.222222
3. 0.758312
4. 3.765353
5. 12.545436
6. 76.847968

N.B.: la diagonale è solo un esempio per dimostrare che un algoritmo non può generare tutti i numeri reali, se al posto della diagonale, dicessimo di cambiare un valore casuale dopo la virgola per riga, ottenendo un nuovo numero, otterremmo lo stesso risultato di dimostrare l'impossibilità di generare tutti i numeri reali con gli algoritmi.

2 Limiti con l'Hopital

L'Hopital serve a gestire forme di limite indeterminate, altrimenti non risolvibili.
Possiamo risolvere le forme indeterminate: $\frac{\infty}{\infty}$ e $\frac{0}{0}$.

1. se $lim_{x \to 0} f(x) = 0$ e $lim_{x \to 0} g(x) = 0$ e $\frac{lim_{x \to 0} f^{'}(x)}{lim_{x \to 0} g^{'}(x)} = L$,
   allora $\frac{lim_{x \to 0} f(x)}{lim_{x \to 0} g(x)} = L$
2. se $lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ e $lim_{x \to \infty} g(x) = 0$ e $\frac{lim_{x \to \infty} f^{'}(x)}{lim_{x \to \infty} g^{'}(x)} = L$,
   allora $\frac{lim_{x \to \infty} f(x)}{lim_{x \to \infty} g(x)} = L$

2.1 Procedimento per affrontare i limiti con l'hopital

Quando affrontiamo i limiti con l'hopital, ci troveremo sempre davanti ad una situazione $f(x)/g(x)$, nel caso non fosse cosi basterà ricondurci a quella situazione facendo un denominatore comune.
Risolvere per prima $g(x)$, poichè potrebbe aiutare a capire quante volte io debba applicare poi l'hopital (per esempio se $g(x)$, si semplifica in x^3).
Bisogna guardare se ci sono situazioni in cui il limite può tendere da destra o da sinistra, e quindi fare i limiti $lim_{x->0^+}$ e $lim_{x->0^-}$.
Il procedimento sotto illustrato contiene tutti i passi per la risoluzione di

un limite in questa forma, passi che devono essere eseguiti ricorsivamente, finchè non si arriva ad un risultato:

1. Provare a sostituire il valore del limite;
2. Provare a semplificare $f(x)$ con $g(x)$
3. Provare a razionalizzare;
4. Cercare possibili trasformazioni trigonometriche;
5. Cercare possibili limiti notevoli;
6. Fare la derivata;

3 Limiti e derivate dei seni e dei coseni

3.1 Derivate da ricordare

Funzioni	Derivate:
$arcSin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arcCos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arcTan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

3.2 Trasformazioni trigonometriche da ricordare

- $sin(2x) = 2 * sin(x) * cos(x)$
- $cos(2x) = sin^2x + cos^2x$
- $tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$
- $sin^2x + cos^2x = 1$

4 Teorema dell'esisistenza degli zeri e funzioni continue

4.1 Funzioni continue

Definizione di continuità:
$\forall\epsilon > 0$ e $\exists\delta > 0$ e $\forall x \in Dom(f)$ then

$$|x - x_0| < \epsilon \rightarrow |f(x) - f(x_0| < \delta$$

.
Quindi $f(x) = \frac{1}{x}$, è una funzione continua, perchè $x_0 \notin Dom(f)$
Proprietà delle funzioni continue: Se f è una funzione continua, allora:

$$lim_{x\to 0}(f(g(x))) = f(lim_{x\to 0}(g(x)))$$

Le combinazioni di funzioni continue danno origine a funzioni continue.
Esempio: polinomi, esponenzioli, e funzioni trigonometriche sono funzioni continue, quindi $\frac{sin(x^3+e^{x+2})}{x^2+1}$ è continua.

4.2 Teorema dell'esisistenza degli zeri

Sia $[a, b]$ un intervallo chiuso, e $f : [a, b] \to R$, e sia che $f(a)$ e $f(b)$, abbiano segni opposti, allora $\exists x_s \in [a, b]$ tale che $f(x_s) = 0$
Per vedere se esiste uno zero, uso un algoritmo iterativo.
Ci sono due casi di partenza

1. $f(a_0) < 0$ e $f(b_0) > 0$
2. $f(a_0) > 0$ e $f(b_0) < 0$

Analizziamo il primo caso:
Troviamo un punto $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$. A questo punto vediamo i casi:

$$f(c_i) = \begin{cases} < 0 \to cerchiamo c_{i+1} adestra, I_{i+1} = [c_{i+1}, b] \\ = 0 \to abbiamofinito \\ > 0 \to cerchiamo c_{i+1} asinistra, I_{i+1} = [a, c_{i+1}] \end{cases}$$

Continuo a cercare c_i, dimezzando ogni volta l'intervallo e cercando a destra o a sinistra in base all'algoritmo sovrastante, finche non trovo $f(c_i) = 0$; a quel punto ho trovato che esiste uno zero.

Per dimostrare il teorema mi manca una cosa però, l'algoritmo potrebbe continuare all'infinito, devo dimostrare quando e perchè non è cosi. Vado a vedere la lunghezza dell'intervallo I_i.Guardo alcuni casi:

- $I_0 = [a_0, b_0]$ e quindi la lunghezza di I_0 è uguale a $\frac{b_0-a_0}{1}$
- $I_1 = [a_1, b_1]$ e quindi la lunghezza di I_1 è uguale a $\frac{b_0-a_0}{2}$
- $I_2 = [a_2, b_2]$ e quindi la lunghezza di I_2 è uguale a $\frac{b_0-a_0}{4}$

- $I_3 = ...$
- $I_n = [a_n, b_n]$ e quindi la lunghezza di I_n è uguale a $\frac{b_0-a_0}{2^n}$

Visto che $I_n = \frac{b_0-a_0}{2^n} = b_n - a_n$ possiamo riscriverlo come $b_n - a_n = \frac{b_0-a_0}{2^n}$
Noi sappiamo che $a_i <= a_{i+1}$ sarà sempre vero, e allo stesso modo $b_i >= b_{i+1}$. Quindi possiamo concludere che la successione a_n è **debolmente crescente** (vuol dire che è non decrescente, ovvero che non cresce per forza sempre, ma può anche rimanere uguale) , mentre b_n è **debolmente decrescente**.
Sappiamo che le successione monotone hanno sempre un limite, quindi

- $lim_{x\to\infty}(a_n) = a_s$
- $lim_{x\to\infty}(b_n) = b_s$

$$a_0 <= a_s <= b_s <= b_0$$

Riassumiamo le Proprietà dell'intervallo:

1. Visto che $I_n = \frac{b_0-a_0}{2^n}$, sappiamo che I_n tende a zero.
2. $f(a_i)$ e $f(b_i)$ hanno segni opposti
3. a_n è debolmente crescente
4. b_n è debolmente decrescente
5. Esiste $lim_{x\to\infty}(a_n) = a_s$ ed è finito
6. Esiste $lim_{x\to\infty}(b_n) = b_s$ ed è finito

Facciamo il limite di $b_n - a_n = \frac{b_0-a_0}{2^n}$, per trovare il nostro x_s:

$$lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = lim_{n\to\infty}(\frac{b_0 - a_0}{2^n}) \tag{1}$$
$$b_s - a_s = 0 \tag{2}$$
$$a_s = b_s \tag{3}$$

Poniamo $x_s = a_s = b_s$
Inizio parte facoltativa (serve per dimostrare che x tocca tutti gli intervalli I_i**)**
Dobbiamo dimostrare che $a_s <= x_s <= b_s$.
Io so che $a_0 <= a_1 <= ... <= a_n < b_n <= b_{n-1} <= ... <= b_0$.

Preso $m < n$, allora $a_0 <= a_1 <= ... <= a_m <= ... <= a_n < b_n <= b_{n-1} <= ... <= b_m <= ... <= b_0$, e quindi

$$a_m < b_n$$

Preso $m > n$, allora $a_0 <= a_1 <= ... <= a_n <= ... <= a_m < b_m <= b_{m-1} <= ... <= b_n <= ... <= b_0$, e quindi

$$a_n < b_m$$

Considero $a_n < b_m$ (o anche l'altra, a scelta). Ora posso dire che:

$$a_n < b_m \tag{4}$$
$$lim_{n\to\infty}(a_n) <= b_m \tag{5}$$
$$x_s <= b_m \tag{6}$$

e

$$a_n < b_m \tag{7}$$
$$a_n <= lim_{m\to\infty}(b_m) \tag{8}$$
$$a_n <= x_s \tag{9}$$

Fine parte facoltativa
Ora che abbiamo dimostrato la formula possiamo usarla:

$$f(a_n) < 0 \tag{10}$$
$$lim_{n\to\infty}(f(a_n)) <= 0 \tag{11}$$
$$f(x_s) <= 0 \tag{12}$$

e

$$f(b_n) > 0 \tag{13}$$
$$lim_{n\to\infty}(f(b_n)) >= 0 \tag{14}$$
$$f(x_s) >= 0 \tag{15}$$

Quindi, grazie a $f(x_s) <= 0$ e $f(x_s) >= 0$, posso dire che

$$f(x_s) = 0$$

Quindi esiste uno zero della funzione.

FINE DIMOSTRAZIONE