Materiale per il secondo compitino di gorni

Calabrigo Massimo

December 17, 2019

Contents

1 Numeri non generabili da algoritmi

Non tutti i numeri reali possono essere generati da algoritmi; Per dimostrare ciò ci serve l' **argomento diagonale**.
Rappresentiamo un elenco ordinato di tutti i numeri reali:

1. ....
2. 0.11111111...
3. 0.22222222...
4. 3.76535435...
5. 12.5454354...
6. 76.8479634...
7. ....

e prendiamo una "foto" finita dell'insieme dei numeri reali infiniti:

1. 0.11111
2. 0.22222
3. 3.76535
4. 12.54543

5. 76.84796

A questo punto prendiamo la n-esima cifra dopo la virgola alla n-esima riga, e diamogli un valore diverso da quella che ha:

1. 0.|7|1111
2. 0.2|5|222
3. 3.76|8|35
4. 12.545|3|3
5. 76.8479|1|

Abbiamo appena creato un nuovo numero che non esisteva nell'elenco precedente.

1. 0.11111
2. 0.22222
3. 0.75831
4. 3.76535
5. 12.54543
6. 76.84796

Ora aggiungiamo una cifra decimale ad ogni riga e otteniamo un nuovo gruppo finito, e da esso possiamo ricavare infiniti numeri che non facevano parte dell'elenco. La stessa cosa vale per l'insieme R dei numeri reali, poichè abbiamo un elenco con $n = +\infty$, perciò anche la diagonale e i numeri da essa generati saranno infiniti, e non generabili da algoritmi.

1. 0.111111
2. 0.222222
3. 0.758312
4. 3.765353
5. 12.545436

6. 76.847968

N.B.: la diagonale è solo un esempio per dimostrare che un algoritmo non può generare tutti i numeri reali, se al posto della diagonale, dicessimo di cambiare un valore casuale dopo la virgola per riga, ottenendo un nuovo numero, otterremmo lo stesso risultato di dimostrare l'impossibilità di generare tutti i numeri reali con gli algoritmi.

2 Disuguaglianza di Bernoulli

La disuguaglianza di Bernoulli è una formula che aiuta a risolvere certe dimostrazioni per induzioni che usano i simboli $\geq$ e $\leq$.
La disuguaglianza di Bermoulli dice che:

$$(1+x)^n \geq (1+nx); \forall n \in N, \forall x \geq 0$$

Dimostriamolo per induzione:

$$P(n) = ((1+x)^n \geq (1+nx)); \forall n \in N, \forall x \geq 0$$

Caso Base:

$$P(0) = 1 \geq 1$$

Tesi induttiva:

$$P(n+1) = ((1+x)^{n+1} \geq (1+(n+1)x))$$

Passo induttivo:

$$\begin{aligned}
&(1+x)^n * (1+x) \geq (1+(n+1)x) \\
&(1+nx) * (1+x) \geq (1+(n+1)x) \\
&1 + x + nx + nx^2 \geq 1 + nx + x \\
&nx^2 \geq 0
\end{aligned}$$

$nx^2 \geq 0$ è sempre vero $\forall n \in N, \forall x \in R$, quindi $(1+nx)*(1+x) \geq (1+(n+1)x)$ è vero, e per la proprietà transitiva, detti $A = ((1+x)^n * (1+x))$, $B = ((1+nx)*(1+x))$ e $C = ((1+(n+1)x))$ se $A \geq B \geq C$, allora $A \geq C$ per la proprietà transitiva.

FINE DIMOSTRAZIONE

3 Teorema del limite della somma di 2 funzioni aventi limite finito

Il teorema dice che

$(lim_{x \to x_0} f(x) = m) + (lim_{x \to x_0} g(x) = n) = (lim_{x \to x_0}(f(x) + g(x)) = m + n)$

Dobbiamo dimostrarlo:
Possiamo riscriverlo con i moduli $lim_{x \to x_0} f(x) = m$ è come scrivere $|f(x) - m| < \epsilon_1$ e $lim_{x \to x_0} g(x) = n$ è come scrivere $|f(x) - n| < \epsilon_2$.
Quindi possiamo riscrivere $(lim_{x \to x_0}(f(x) + g(x)) = m + n)$ come $|f(x) + g(x) - m - n| < \epsilon_1 + \epsilon_2$, che sarà la nostra ipotesi.
Dimostrazione:

$$
\begin{aligned}
& lim_{x \to x_0} f(x) + lim_{x \to x_0} g(x) = m + n \\
& |f(x) - m| < \epsilon_1, |g(x) - n| < \epsilon_2 \\
& |f(x) + g(x) - m - n| < |f(x) - m| + |g(x) - n| < \epsilon_1 + \epsilon_2 \\
& |f(x) + g(x) - m - n| < \epsilon_1 + \epsilon_2
\end{aligned}
$$

Quindi abbiamo dimostrato l'ipotesi.

FINE DIMOSTRAZIONE

4 La successione fondamentale $(1 + \frac{1}{x})^x$

4.1 crescenza della successione fondamentale

La successione fondamentale $(1 + \frac{1}{x})^x$ è crescente, dimostriamolo:
Detto $a_n = (1 + \frac{1}{x})^x$, scriviamo $a_n \leq a_{n+1}$.
Per motivi di calcoli, non dimostriamo la formula sovrastante, ma dimostriamo $a_{n-1} \leq a_n$ e riscriviamola come $\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1$ e dimostriamola.

$$\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}}$$
$$\frac{(\frac{n+1}{n})^n}{(\frac{n}{n-1})^n} * \frac{n}{n-1}$$
$$(\frac{n+1}{n} * \frac{n-1}{n})^n * \frac{n}{n-1}$$
$$(\frac{n^2-1}{n^2})^n * \frac{n}{n-1}$$
$$(1-\frac{1}{n^2})^n * \frac{n}{n+1}$$

Ora uso Bernoulli $(x+1)^n \geq 1+nx$, pongo $x=-\frac{1}{n^2}$:
Per applicare Bernoulli devo rispettare le condizioni: $n \in N, x \geq 0$, quindi nel nostro caso abbiamo come ipotesi iniziale $n \geq 2$, quindi sappiamo che $n \in N$, ora verifichiamo che $x \geq 0$, ovvero $-\frac{1}{n^2} \geq 0$.

$$-\frac{1}{n^2} \geq 0$$
$$\frac{1}{n^2} \leq 0$$
$$n^2 \geq 0 \forall n \in R$$

Abbiamo verificato di rispettare le condizioni di Bernoulli, quindi possiamo scrivere: $1-\frac{1}{x^2} \geq 1-\frac{1}{n^2} * n = 1-\frac{1}{n}$
$(1-\frac{1}{n}) * (\frac{n}{n-1}) = \frac{n-1}{n} * \frac{n}{n-1} = 1$
Quindi abbiamo ottenuto che $\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1$ è uguale a $1 \geq 1$, ed è vero.
Quindi abbiamo dimostrato il teorema

FINE DIMOSTRAZIONE

5 Limiti con l'Hopital

L'Hopital serve a gestire forme di limite indeterminate, altrimenti non risolvibili.
Possiamo risolvere le forme indeterminate: $\frac{\infty}{\infty}$ e $\frac{0}{0}$.
Se esiste un intervallo $I \to R$, due funzioni f e g continue in I e derivabili nei punti interni di I, e $g^{'}(x) \neq 0$. Allora

1. se $lim_{x\to x_0}f(x) = 0$ e $lim_{x\to x_0}g(x) = 0$ e $\frac{lim_{x\to x_0}f^{'}(x)}{lim_{x\to x_0}g^{'}(x)} = L$, allora $\frac{lim_{x\to x_0}f(x)}{lim_{x\to x_0}g(x)} = L$
2. se $lim_{x\to x_0}f(x) = \infty$ e $lim_{x\to x_0}g(x) = \infty$ e $\frac{lim_{x\to x_0}f^{'}(x)}{lim_{x\to x_0}g^{'}(x)} = L$, allora $\frac{lim_{x\to x_0}f(x)}{lim_{x\to x_0}g(x)} = L$

Dimostrazione:
Preso un intervallo I di questo tipo $[x_0, \infty)$, per ipotesi $lim_{x\to x_0}f(x) = lim_{x\to x_0}g(x) = 0$, vediamo 2 casi.
Se $x = x_0$, e x è estremo inferiore di I, allora $lim_{x\to x_0}f(x) = 0$, e visto che la funzione è continua nell'intervallo $lim_{x\to x_0}f(x) = f(x_0) = 0$, lo stesso vale per $lim_{x\to x_0}g(x) = g(x_0) = 0$
Se $x > x_0$, allora applico cauchy e dico che $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f^{'}c(x)}{g^{'}}c(x)$.
Ora vediamo che $x_0 < c(x) < x$, e per x che tende a 0, allora anche $c(x)$ tende a 0.
Quindi possiamo scrivere $lim_{x\to x_0}\frac{f^{'}c(x)}{g^{'}c(x)}$ con $t = c(x)$ e $c(x)$ che tende a zero, allora $lim_{t\to x_0}\frac{f^{'}(t)}{g^{'}(t)} = L$ per ipotesi, quindi anche $lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = L$ e abbiamo dimostrato la tesi.

FINE DIMOSTRAZIONE

5.1 Procedimento per affrontare i limiti con l'hopital

Quando affrontiamo i limiti con l'hopital, ci troveremo sempre davanti ad una situazione $f(x)/g(x)$, nel caso non fosse cosi basterà ricondurci a quella situazione facendo un denominatore comune.
Risolvere per prima $g(x)$, poichè potrebbe aiutare a capire quante volte io debba applicare poi l'hopital (per esempio se $g(x)$, si semplifica in x^3).
Bisogna guardare se ci sono situazioni in cui il limite può tendere da destra o da sinistra, e quindi fare i limiti $lim_{x->0^+}$ e $lim_{x->0^-}$.
Il procedimento sotto illustrato contiene tutti i passi per la risoluzione di un limite in questa forma, passi che devono essere eseguiti ricorsivamente, finchè non si arriva ad un risultato:

1. Provare a sostituire il valore del limite;
2. Provare a semplificare $f(x)$ con $g(x)$

3. Provare a razionalizzare;
4. Cercare possibili trasformazioni trigonometriche;
5. Cercare possibili limiti notevoli;
6. Fare la derivata;

6 Limiti e derivate dei seni e dei coseni

6.1 Definizione Derivata

Una derivata è definita come il limite del rapporto incremenetale, e si scrive

$$lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

oppure

$$lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Una funzione derivata è sempre continua, ma una funzione continua non è sempre derivabile; come esempio di funzione continua non derivabile abbiamo $f(x) = |x|$.
In questo caso, nel punto $x = 0$, derivata destra e sinistra differiscono, perciò la derivata non esiste.

6.2 Derivate da ricordare

Funzioni	Derivate:
$arcSin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arcCos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arcTan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

6.3 Trasformazioni trigonometriche da ricordare

- $sin(2x) = 2 * sin(x) * cos(x)$
- $cos(2x) = cos^2 x - sin^2 x$
- $tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$
- $sin^2 x + cos^2 x = 1$

7 Teorema dell'esisistenza degli zeri e funzioni continue

7.1 Funzioni continue

Definizione di continuità:
$\forall \epsilon > 0$ e $\exists \delta > 0$ e $\forall x \in Dom(f)$ then

$$|x - x_0| < \epsilon \rightarrow |f(x) - f(x_0| < \delta$$

.
Quindi $f(x) = \frac{1}{x}$, è una funzione continua, perchè $x_0 \notin Dom(f)$
Proprietà delle funzioni continue: Se f è una funzione continua, allora:

$$lim_{x \to 0}(f(g(x))) = f(lim_{x \to 0}(g(x)))$$

Le combinazioni di funzioni continue danno origine a funzioni continue.
Esempio: polinomi, esponenzioli, e funzioni trigonometriche sono funzioni continue, quindi $\frac{sin(x^3+e^{x+2})}{x^2+1}$ è continua.

7.2 Teorema dell'esisistenza degli zeri

Sia $[a, b]$ un intervallo chiuso, e $f : [a, b] \rightarrow R$, e sia che $f(a)$ e $f(b)$, abbiano segni opposti, allora $\exists x_s \in [a, b]$ tale che $f(x_s) = 0$
Per vedere se esiste uno zero, uso un algoritmo iterativo.
Ci sono due casi di partenza

1. $f(a_0) < 0$ e $f(b_0) > 0$
2. $f(a_0) > 0$ e $f(b_0) < 0$

Analizziamo il primo caso:
Troviamo un punto $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$. A questo punto vediamo i casi:

$$f(c_i) = \begin{cases} < 0 \rightarrow cerchiamoc_{i+1}adestra, I_{i+1} = [c_{i+1}, b] \\ = 0 \rightarrow abbiamofinito \\ > 0 \rightarrow cerchiamoc_{i+1}asinistra, I_{i+1} = [a, c_{i+1}] \end{cases}$$

Continuo a cercare c_i, dimezzando ogni volta l'intervallo e cercando a destra o a sinistra in base all'algoritmo sovrastante, finche non trovo $f(c_i) = 0$; a quel punto ho trovato che esiste uno zero.

Per dimostrare il teorema mi manca una cosa però, l'algoritmo potrebbe continuare all'infinito, devo dimostrare quando e perchè non è cosi. Vado a vedere la lunghezza dell'intervallo I_i.Guardo alcuni casi:

- $I_0 = [a_0, b_0]$ e quindi la lunghezza di I_0 è uguale a $\frac{b_0-a_0}{1}$
- $I_1 = [a_1, b_1]$ e quindi la lunghezza di I_1 è uguale a $\frac{b_0-a_0}{2}$
- $I_2 = [a_2, b_2]$ e quindi la lunghezza di I_2 è uguale a $\frac{b_0-a_0}{4}$
- $I_3 = ...$
- $I_n = [a_n, b_n]$ e quindi la lunghezza di I_n è uguale a $\frac{b_0-a_0}{2^n}$

Visto che $I_n = \frac{b_0-a_0}{2^n} = b_n - a_n$ possiamo riscriverlo come $b_n - a_n = \frac{b_0-a_0}{2^n}$
Noi sappiamo che $a_i <= a_{i+1}$ sarà sempre vero, e allo stesso modo $b_i >= b_{i+1}$. Quindi possiamo concludere che la successione a_n è **debolmente crescente** (vuol dire che è non decrescente, ovvero che non cresce per forza sempre, ma può anche rimanere uguale) , mentre b_n è **debolmente decrescente**.
Sappiamo che le successione monotone hanno sempre un limite, quindi

- $lim_{x\to\infty}(a_n) = a_s$
- $lim_{x\to\infty}(b_n) = b_s$

$$a_0 <= a_s <= b_s <= b_0$$

Riassumiamo le Proprietà dell'intervallo:

1. Visto che $I_n = \frac{b_0-a_0}{2^n}$, sappiamo che I_n tende a zero.
2. $f(a_i)$ e $f(b_i)$ hanno segni opposti
3. a_n è debolmente crescente
4. b_n è debolmente decrescente
5. Esiste $lim_{x\to\infty}(a_n) = a_s$ ed è finito
6. Esiste $lim_{x\to\infty}(b_n) = b_s$ ed è finito

Facciamo il limite di $b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$, per trovare il nostro x_s:

$$lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = lim_{n\to\infty}(\frac{b_0 - a_0}{2^n})$$
$$b_s - a_s = 0$$
$$a_s = b_s$$

Poniamo $x_s = a_s = b_s$
Inizio parte facoltativa (serve per dimostrare che x tocca tutti gli intervalli I_i)
Dobbiamo dimostrare che $a_s <= x_s <= b_s$.
Io so che $a_0 <= a_1 <= ... <= a_n < b_n <= b_{n-1} <= ... <= b_0$.

Preso $m < n$, allora $a_0 <= a_1 <= ... <= a_m <= ... <= a_n < b_n <= b_{n-1} <= ... <= b_m <= ... <= b_0$, e quindi

$$a_m < b_n$$

Preso $m > n$, allora $a_0 <= a_1 <= ... <= a_n <= ... <= a_m < b_m <= b_{m-1} <= ... <= b_n <= ... <= b_0$, e quindi

$$a_n < b_m$$

Considero $a_n < b_m$ (o anche l'altra, a scelta). Ora posso dire che:

$$a_n < b_m$$
$$lim_{n\to\infty}(a_n) <= b_m$$
$$x_s <= b_m$$

e

$$a_n < b_m$$
$$a_n <= lim_{m\to\infty}(b_m)$$
$$a_n <= x_s$$

Fine parte facoltativa
Ora che abbiamo dimostrato la formula possiamo usarla:

$$f(a_n) < 0$$
$$lim_{n\to\infty}(f(a_n)) <= 0$$
$$f(x_s) <= 0$$

e

$$f(b_n) > 0$$
$$lim_{n\to\infty}(f(b_n)) >= 0$$
$$f(x_s) >= 0$$

Quindi, grazie a $f(x_s) <= 0$ e $f(x_s) >= 0$, posso dire che

$$f(x_s) = 0$$

Quindi esiste uno zero della funzione.

FINE DIMOSTRAZIONE

8 Studio di funzione

8.1 Asintoti verticali, orizzontali e obliqui

Quando dobbiamo cercare degli asintoti in una funzione, dobbiamo prima di tutto verificare se, e quali sono i buchi della funzione, ovvero quei punti dove la funzione non è definita, oltre che a $+\infty$ e $-\infty$, e bisogna cercare gli asintoti in quei punti.
Un **asintoto verticale** lo si trova quando $lim_{x\to x_0^{+,-}} = +-\infty$.
Per esempio, se $lim_{x\to 0^+} = \infty$ o $lim_{x\to 0^+} = -\infty$ o $lim_{x\to 0^-} = \infty$ o $lim_{x\to 0^-} = -\infty$, allora abbiamo trovato un asintoto verticale.
Un **asintoto orizzontale** si trova quando $lim_{x\to\infty} = l$.
Per esempio, se $lim_{x\to+\infty} = l$ oppure $lim_{x\to-\infty} = l$, allora abbiamo un asintoto orizzontale.
Per trovare i punti di intersezione tra l'asintoto orizzontale e la funzione posso mettere a sistema la funzione e l'equazione dell'asintoto:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = l \end{cases}$$

Un **asintoto obliquio** è tale se, data la retta $y = mx + q$, allora vale il limite $lim_{x\to\infty}(f(x) - mx - q)$.
Quando bisogna vedere se c'è un asintoto obliquo bisogna procedere in questo modo:

1. dobbiamo calcolare $y = mx+q$, quindi calcoliamo $m = lim_{x\to\infty}(\frac{f(x)}{x})$; se $m \in R$, allora continuo (calcolo q), se $m = 0$ ho un asintoto orizzontale (calcolo q), altrimenti non ho un asintoto obliquo.
2. $q = lim_{x\to\infty}(f(x) - mx)$. Se $q \in R$ allora ho un asintoto obliquo.

Esempio:$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$, trova se esiste $y = mx + q$

$$m = lim_{x\to\infty}(f(x)/x)$$
$$m = lim_{x\to\infty}(\frac{x^2}{x-1}/x)$$
$$m = lim_{x\to\infty}(\frac{1}{(1-\frac{1}{x})}) = 1$$
$$q = lim_{x\to\infty}(f(x) - mx)$$
$$q = lim_{x\to\infty}(\frac{x^2}{x-1} - x)$$
$$q = lim_{x\to\infty}(\frac{x}{x-1})$$
$$q = lim_{x\to\infty}(\frac{1}{1-\frac{1}{x}}) = 1$$
$$y = mx + q = x + 1$$

8.2 Come affrontare una funzione con logaritmi o arctan e gli zeri della funzione

Affrontare questo tipo di funzioni non è poi tanto diverso dall'affrontare quelle polinomiali, ma con la differenza che bisogna stare più attenti sia nella parte di studio della funzione di partenza e nel determinare il dominio, che nella successiva parte delle derivate.
In questo tipo di esercizi, può essere chiesto di trovare gli zeri della funzione. Torna utile quindi il teorema di esistenza degli zeri.
Come lo applico? Una volta che ho fatto la derivata prima, e lo studio della crescenza/descrescenza, posso controllare ogni intervallo uno ad uno, e vedere se esiste uno zero. Ricorda che la funzione $f : [a, b] \to R$, deve essere continua nell'intervallo $[a, b]$. Per controllare posso usare le conoscenze che ho già acquisito nei passi precedenti, infatti andrò a vedere cosa vale la mia funzione nel punto a e cosa vale nel punto b, e da questo posso concludere se la funzione è passata per lo zero.
Per esempio se la mia tabella di crescenza/descrescenza è:

0	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	1:
$-$	$-$	$+$
$+$	$+$	$+$
$-$	$-$	$+$

e conosco che in 1 c'è un asintoto verticale, allora potrò dire che nell'intervallo $[\sqrt{\frac{1}{2}}, 1]$ c'è uno zero:

- $[-\infty, 0]$ no
- $[0, \sqrt{\frac{1}{2}}]$ no
- $[\sqrt{\frac{1}{2}}, 1]$ si
- $[1, \infty]$ no

9 Primitive e integrali

9.1 Primitive e tabella

L'operazione di antiderivazione è l'opposto della derivazione,

$$\int (\frac{d}{dx} f(x)) = f(x)$$

Vediamo un paio di trasformazioni da $f(x)$ a $\int f(x)$:

$f(x)$	$\int f(x)$
k(costante)	kx
x^a	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$
$\frac{1}{x}$	$ln(\|x\|)$
$sen(x)$	$-cos(x)$
$cos(x)$	$sin(x)$
a^x	$\frac{a^x}{log(a)}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$arctg(x)$

Vediamo le proprietà delle operazioni tra integrali e le funzioni composte

- $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int (f(x))dx \pm \int (g(x))dx$
- $\int (k * f(x))dx = k * \int (f(x))dx$

Una regola fondamentale è quella che riguarda le funzioni composte:

$$\int f^{'}(g(x)) * g^{'}(x) = f(g(x))$$

Esempio:

$$\int (3 * x^2 * sin(x^3))$$
$$g^{'}(x) * f^{'}(g(x))$$
$$-cos(x^3) + c$$

Da questa regola ne derivano varie:

Primitiva elementare	Primitiva composta
$f(x) = \frac{1}{x}$ e $\int f(x)dx = ln(\|x\|) + c$	$\int(\frac{g^{'}(x)}{g(x)}) = ln\|g(x)\| + c$
$f(x) = x^n$ e $\int f(x)dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\int(g^{'}(x) * g(x)^n) = \frac{g(x)^{n+1}}{n+1} + c$
...	...

9.2 Risoluzione delle primitive

Ci sono 4 tipi di primitive delle verifiche di gorni: 1 composta da polinomi, 2 composte da log(x), cos(x), sin(x), tan(x), arctan(x), ecc., e 1 per parti. Vediamo come risolvere queste tipologie separatamente.

Primitive composte da polinomi

Quando dobbiamo affrontare questo tipo di primitive, non possiamo partire in quarta e fare le primitive; prima bisogna fare la **Divisione del polinomio**. Ora vedremo questo primo procedimento:

1. Denominiamo $P(x)$ il polinomio numeratore e $D(x)$ il polinomio denominatore;
2. Scriviamo $P(x)|D(x)$;
3. Calcoliamo $gMax = \frac{terminedigradomaxdiP(x)}{terminedigradomassimodiD(x)}$;
4. Scriviamo $\begin{array}{c|c} P(x) & D(x) \\ \hline & gMax \end{array}$
5. Moltiplichiamo gMax per ogni termine di P(x), e scriviamo i risultati, cambiati di segno, nella riga sotto P(x):
   $\begin{array}{c|c} P(x) & D(x) \\ \hline D(x) * gMax * (-1) & gMax \end{array}$

6. Sommiamo la riga $P(x)$ con la riga $P(x)*gMax*(-1)$ (somma termine per termine), e riportiamo il risultato nella riga sottostante:

$P(x)$	$D(x)$
$D(x) * gMax * (-1)$	$gMax$
$P(x) + D(x) * gMax * (-1)$	

7. Continuo finchè non arrivo ad avere un grado zero in $Q(x)$:

$P1(x)$	$D(x)$
$D(x)1 * gMax1 * (-1)$	$Q(x) = gMax1,\, gMax2, \ldots, gMaxN$
$P1(x) + D(x)1 * gMax1 * (-1)$	
$D(x) * gMax2 * (-1)$	
$P2(x) + D2(x) * gMax2 * (-1)$	
$\ldots$	
$PN(x) = \ldots$	

8. Ora posso scrivere il risultato, che sarà $Q(x) + \frac{PN(x)}{D(x)}$

Facciamo un esempio: $f(x) = \frac{3x^3-2x^2+x}{6x^2+5x+1}$
$P(x) = 3x^3 - 2x^2 + x$ e $D(x) = 6x^2 + 5x + 1$.

1.

$3x^3 - 2x^2 + x$	$6x^2 + 5x + 1$

2.

$3x^3 - 2x^2 + x$	$6x^2 + 5x + 1$
	$\frac{x}{2}$

3.

$3x^3 - 2x^2 + x$	$6x^2 + 5x + 1$
$-3x^3 - \frac{5x^2}{2} - \frac{x}{2} + 0$	$\frac{x}{2}$

4.

$3x^3 - 2x^2 + x$	$6x^2 + 5x + 1$
$-3x^3 - \frac{5x^2}{2} - \frac{x}{2} + 0$	$\frac{x}{2}$
$0x^3 - \frac{9x^2}{2} + \frac{x}{2} + 0$	

5.

$3x^3 - 2x^2 + x$	$6x^2 + 5x + 1$
$-3x^3 - \frac{5x^2}{2} - \frac{x}{2} + 0$	$\frac{x}{2}, -\frac{3}{4}$
$0x^3 - \frac{9x^2}{2} + \frac{x}{2} + 0$	

6.

$3x^3 - 2x^2 + x$	$6x^2 + 5x + 1$
$-3x^3 - \frac{5x^2}{2} - \frac{x}{2} + 0$	$\frac{x}{2}, -\frac{3}{4}$
$0x^3 - \frac{9x^2}{2} + \frac{x}{2} + 0$	
$0x^3 - \frac{18x^2}{4} + \frac{15x}{4} + 0$	

7.

$3x^3 - 2x^2 + x$	$6x^2 + 5x + 1$
$-3x^3 - \frac{5x^2}{2} - \frac{x}{2} + 0$	$\frac{x}{2}, -\frac{3}{4}$
$0x^3 - \frac{9x^2}{2} + \frac{x}{2} + 0$	
$0x^3 - \frac{18x^2}{4} + \frac{15x}{4} + 0$	
$0x^3 + 0x^2 + \frac{17x}{4} + \frac{3}{4}$	

8. $PN(x) = \frac{17x}{4} + \frac{3}{4}$ e $Q(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$.
   Quindi possiamo riscrivere

$$f(x) = \frac{3x^3 - 2x^2 + x}{6x^2 + 5x + 1}$$
$$f(x) = Q(x) + \frac{PN(x)}{D(x)}$$
$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{4} + \frac{\frac{17x}{4} + \frac{3}{4}}{6x^2 + 5x + 1}$$

Ora abbiamo terminato con la prima semplificazione, se guardiamo il nostro esempio siamo nella situazione:

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{4} + \frac{\frac{17x}{4} + \frac{3}{4}}{6x^2 + 5x + 1}$$

La seconda parte è ancora troppo complicata per noi però. Ora il nostro obiettivo è semplificare $\frac{\frac{17x}{4} + \frac{3}{4}}{6x^2+5x+1}$.
Per farlo innanzitutto trasformiamo $6x^2 + 5x + 1$ in una moltiplicazione di polinomi. Usando la formula per i polinomi $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, oppure ruffini scomponiamola.
Qui salto i passaggi: $6x^2 + 5x + 1 = (2x + 1)(3x + 1)$. Quindi dobbiamo semplificare $\frac{1}{4} * \frac{17x+3}{(2x+1)(3x+1)}$.
Per farlo, suddivido la formula in questo modo, e risolvo il sistema:

1. $\frac{A}{(2x+1)} + \frac{B}{(3x+1)}$

2. $\frac{A(3x+1)+B(2x+1)}{(2x+1)(3x+1)}$

3. $\frac{(3A+2B)x+(A+B)}{(2x+1)(3x+1)}$

4. Risolvo il sistema:

$$\begin{cases} 3A+2B=17 \\ A+B=3 \end{cases} \quad \begin{cases} A=11 \\ B=-8 \end{cases}$$

5. Riscrivo l'equazione:
$f(x)=\frac{x}{2}-\frac{3}{4}+\frac{\frac{17x}{4}+\frac{3}{4}}{6x^2+5x+1}=\frac{x}{2}-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}*\left(\frac{11}{2x+1}-\frac{8}{3x+1}\right)$

9.3 Integrali per parti

Per risolvere un integrale per parti, uso questa formula

$$\int(f(x)*g^{'}(x))=f(x)*g(x)-\int(f^{'}(x)*g(x))$$

Gli integrali per parti possono essere particolarmente ostici, e richiedere trucchi aggiuntivi per essere risolti.
Nei compitini gli integrali per parti saranno ciclici. Un integrale ciclico è un integrale $\int(f(x)*g^{'}(x))$, che dopo averlo integrato per parti, fa arrivare ad una situazione $\int(f(x)*g^{'}(x))=f(x)*g(x)+h(x)*k(x)-\int(f(x)*g^{'}(x))$. In questo caso abbiamo un integrale ciclico, perchè abbiamo riottenuto l'integrale originale, e per risolvere la situazione portiamo l'integrale che abbiamo ottenuto al primo membro e risolviamo. Ora vediamo un esempio:

$$\int(f(x)*g^{'}(x))=f(x)*g(x)-\int(f^{'}(x)*g(x))$$

$$f(x)*g(x)+h(x)*k(x)-\int(h^{'}(x)*k(x));(h^{'}(x)=f^{'}(x),k(x)=g(x))$$

$$\int(f(x)*g^{'}(x))=f(x)*g(x)+h(x)*k(x)-\int(f(x)*g^{'}(x))$$

$$2*\int(f(x)*g^{'}(x))=f(x)*g(x)+h(x)*k(x)$$

$$\int(f(x)*g^{'}(x))=\frac{f(x)*g(x)+h(x)*k(x)}{2}$$

9.4 Integrali per sostituzione

Per risolvere gli integrali per sostituzione usiamo la formula

$$\int (f(g(x)) * g^{'}(x)) = \int_{g(a)}^{g(b)} (f(y)dy)$$

dove il punto del metodo per sotituzione è sostituire x con y, eliminando i termini scomodi dalla formula per poter integrarla.
Applicazione del metodo per sostituzione:

1. Sostituzione della x: $x = g(y)$
2. Sostituzione della dx: $dx = \frac{d}{dy}(g(y))dy$
3. Sostituzione degli intervalli dell'integrale (se presenti): $\int_a^b (f(x)dx)$: $\int_{g(a)}^{g(b)} (f(y)dy)$

10 Teorema di Fermat - Derivata di Massimi e Minimi

10.1 Punti interni di una funzione

Prima diamo la definizione di **punto interno**: un punto interno di una funzione è un punto $x_0 \in dom(f), \exists\delta > 0 : [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.
Quindi un punto interno è un punto all'interno del dominio di una funzione, tale che se andiamo leggermente a dx o a sx nel dominio, rimaniamo ancora nel dominio. Per esempio se il mio dominio è $dom(f) = [1, 3]$, il valore 1.1 è nel dominio perchè posso avere i valori 1.0 e 1.2, invece il valore 1, non è nel dominio poichè anche se posso avere il valore 1.1, non posso avere 0.9, o valori minori di 1, poichè sarebbero fuori dal dominio.
In breve possiamo riassumere i punti interni di una funzione come tutti quei punto che stanno dentro ai vari intervalli che compongono il dominio, e che non sono gli estremi di nessun intervallo.

10.2 Teorema di Fermat

Dato un punto interno x_0 della funzione f, dove x_0 è un max/min locale, e $f^{'}(x_0)$ esiste. Allora $f^{'}(x_0) = 0$.

DIMOSTRAZIONE
Faccio il caso in cui x_0 è un punto di max. Lo considero max globale quindi $\forall x, f(x) \leq f(x_0)$. Devo dimostrare $f^{'}(x_0) = 0$.
Faccio la derivata come limite del rapporto incrementale: $lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, e provo a fare i limiti dx e sx per vedere come si comporta la derivata.
Per dimostrare $lim_{x \to x_{0+}} \frac{f(x)-f(x_{0+})}{x-x_{0+}}$, suppongo che $x > 0$, allora studio il segno di $g(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}; x > x_0$ e ottengo che il numeratore è maggiore di zero, mentre il denominatore è maggiore di zero, quindi la funzione è minore di zero: $g(x) <= 0$. Quindi anche il $lim_{x \to x_{0+}} g(x_{0^+}) <= 0$
Facendo la stessa cosa per il limite sx ottengo:

- $lim_{x \to x_{0-}} = \frac{f(x)-f(x_{0-})}{x-x_{0-}}$
- $h(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}; x < x_0$, quindi sia numeratore che denominatore sono negativi, e la funzione è positiva $h(x) >= 0$
- Visto che $h(x) \geq 0$, allora anche $lim_{x \to x_{0^-}} g(x_{0-}) \geq 0 = f^{'}(x_{0-}) \geq 0$.

Quindi visto che $f^{'}(x_{0-}) \geq 0$ e $f^{'}(x_{0+}) \leq 0$, allora abbiamo dimostrato che $f^{'}(x_0) = 0$.

FINE DIMOSTRAZIONE

11 Teoremi del valore medio: Rolle, Cauchy e Lagrange

11.1 Teorema di Rolle

Data una funzione f definita su di un intervallo $[a, b]$, e con le seguenti condizioni:

- la funzione f è continua in $[a, b]$,
- l'intervallo aperto (a, b) è derivabile,
- $f(a) = f(b)$.

Allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$, tale che $f^{'}(c) = 0$.
Per dimostrare questo teorema ci serviremo del teorema dei valori estremi (teorema di weierstrass), e del teorema di Fermat.

- Teorema dei valori estremi: se ho f continua, definita in un intervallo $[a, b]$, allora $\exists c, \exists d$, tale che $f(c) \geq f(x) \geq f(d)$ con $c, d \in [a, b]$. (in breve ci sono ed esistono i massimi e minimi in una funzione continua in $[a, b]$).
- Teorema di Fermat: se ho f continua in $[a, b]$, preso un punto interno x_0 max o min locale/globale, allora $f^{'}(x_0) = 0$.

Dobbiamo verificare tre casi:

1. se $f(x) = f(c) \forall x$, allora il grafico è una retta orizzontale, e ogni punto $f^{'}(c) = 0$.
2. se $f(x) > f(a)$ per qualche $x \in (a, b)$, e f è una funzione continua definita in un intervallo $[a, b]$, allora esiste un valore c, compreso tra $[a, b]$, ed è un massimo. Ma visto che $f(x) > f(a)$ per qualche $x \in (a, b)$, allora $c \in (a, b)$ ed è un massimo. Se c è un massimo, allora per il teorema di Fermat, $f^{'}(c) = 0$.
3. se $f(x) < f(b)$ per qualche $x \in (a, b)$, e f è continua in $[a, b]$, allora esiste un valore $x = c$, tale che c è un minimo. Visto che $f(x) < f(b)$ per qualche $x \in (a, b)$, allora $c \in (a, b)$. Quindi per il teorema di Fermat, $f^{'}(c) = 0$, perchè c è un minimo.

FINE DIMOSTRAZIONE

11.2 Teorema di Cauchy

Date due funzioni f e g, continue in un intervallo $[a, b]$, e derivabili in (a, b), allora esiste almeno un punto interno x_0, tale che

$$[g(b) - g(a)] * f^{'}(x_0) = [f(b) - f(a)] * g^{'}(x_0)$$

Dimostrazione:
Per prima cosa scriviamo $h(x) = [f(b) - f(a)] * g(x) - [g(b) - g(a)] * f(x)$, e valutiamo $h(a)$ e $h(b)$.

$$h(a) = g(a) * f(b) - g(a) * f(a) - f(a) * g(b) + f(a) * g(a)$$
$$h(a) = g(a) * f(b) - f(a) * g(b)$$
$$h(b) = g(b) * f(b) - g(b) * f(a) - f(b) * g(b) + f(b) * g(a)$$
$$h(b) = g(b) * f(a) - f(b) * g(a)$$
$$h(a) = h(b)$$

Ora noi possiamo applicare il teorema di rolle, perchè rispettiamo le tre condizioni: continuità di f e g su $[a, b]$, derivabilità su (a, b), e $h(a) = h(b)$. Quindi se facciamo la derivata di $h(x)$ otteniamo

$$h^{'}(x) = [f(b) - f(a)] * g^{'}(x) - [g(b) - g(a)] * f^{'}(x)$$

e quindi se valutiamo la funzione h in x_0, possiamo dire:

$$\begin{aligned}
&h^{'}(x_0) = [f(b) - f(a)] * g^{'}(x_0) - [g(b) - g(a)] * f^{'}(x_0) \\
&0 = [f(b) - f(a)] * g^{'}(x_0) - [g(b) - g(a)] * f^{'}(x_0) \\
&[g(b) - g(a)] * f^{'}(x_0) = [f(b) - f(a)] * g^{'}(x_0)
\end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto l'ipotesi iniziale, e dimostrato il teorema.

FINE DIMOSTRAZIONE

11.3 Teorema di Lagrange

Date due funzioni f continua nell'intervallo $[a, b]$, e derivabili in (a, b), allora esiste un valore x_0 interno, tale che

$$f(b) - f(a) = f^{'}(x_0) * [b - a]$$

Per la dimostrazione usiamo la funzione ausiliaria $h(x) = f(x) - f(a) * -\frac{f(b)-f(a)}{b-a} * (x - a)$. Sappiamo che:

- $f(x)$ è continua e derivabile
- $f(a)$ è continua e derivabile perchè è una costante
- $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ è continua e derivabile perchè è una costante
- $(x - a)$ è continua e derivabile perchè è un polinomio

Per dimostrare $h^{'}(x_0) = 0$, dimostriamo $h(a) = h(b)$:

$$\begin{aligned}
&h(a) = f(a) - f(a) * -\frac{f(b) - f(a)}{b - a} * (a - a) = 0 \\
&h(b) = f(b) - f(a) * -\frac{f(b) - f(a)}{b - a} * (b - a) = 0 \\
&h(a) = h(b) = 0
\end{aligned}$$

Quindi per il teorema di Rolle, visto che h(x) è continua in $[a, b]$, derivabile in (a, b) e $h(a) = h(b)$, allora esiste x_0 tale che $h^{'}(x_[0]) = 0$.
Quindi se deriviamo $h^{'}(x)$, otteniamo $h^{'}(x) = f^{'}(x) - f^{'}(a) * -\frac{d}{dx}(\frac{f(b)-f(a)}{b-a} * (x - a))$, e sostituendo $x = x_0$, otteniamo $0 = f^{'}(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, e quindi abbiamo dimostrato la tesi perchè $f^{'}(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

FINE DIMOSTRAZIONE