

Leibniz Universität Hannover  
Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät  
Institut für Produktionswirtschaft  
Prof. Dr. Stefan Helber

Hausarbeit im Rahmen der Veranstaltung  
Entwicklung von Anwendungssystemen im WiSe 2014/2015  
(Veranstaltungs-Nr. 173610)

RCPSP  
RCPSP

Andreas Hipp	Robert Matern
Adresse	Plathnerstr. 49
PLZ Ort	30175 Hannover
Matr.-Nr. ???	Matr.-Nr. 2798160

Abgabedatum: 24.03.2015

# Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	iii
Tabellenverzeichnis	iii
Abkürzungsverzeichnis	iv
Symbolverzeichnis	v
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Mathematische Modellformulierung des ressourcenbeschränkten Projektplanungsproblems</b>	<b>2</b>
<b>3 Implementierung des RCPSP mittels Ruby on Rail</b>	<b>4</b>
<b>4 Kritische Würdigung des Anwendungssystems</b>	<b>4</b>
<b>5 Fazit</b>	<b>4</b>
<b>Literatur</b>	<b>5</b>
<b>A Anhang</b>	<b>6</b>
A.1 GAMS-Implementierung des Beispiels . . . . .	6
A.2 Ruby on Rails Programmcode . . . . .	6

**Abbildungsverzeichnis**

**Tabellenverzeichnis**

# Abkürzungsverzeichnis

RCPSp	Resource-Constrained Project Scheduling
RoR	Ruby on Rails
SGS	Schedule Generation Scheme

# Symbolverzeichnis

$d_i$	Dauer von Vorgang $i$
$FE_i$	frühestes Ende von Vorgang $i$
$i, h = 1, \dots, I$	Vorgänge
$k_{ir}$	Kapazitätsbedarf von Vorgang $i$ auf Ressource $r$
$kp_r$	verfügbare Kapazität von Ressource $r$ je Periode
$\mathcal{N}_i$	Menge der direkten Nachfolger von Vorgang $i$
$r = 1, \dots, R$	Ressourcen
$SE_i$	spätestes Ende von Vorgang $i$
$t, \tau = 1, \dots, T$	Perioden
$\mathcal{V}_i$	Menge der direkten Vorgänger von Vorgang $i$
$X_{jt} \in \{0, 1\}$	gleich 1, falls Vorgang $j$ in Periode $t$ endet, sonst 0

# 1 Einleitung

Einem Projekt bedarf es aufgrund seiner Schwierigkeit und Bedeutung meist ein gesondertes Planung, da es sich um eine zeitlich befristete, relativ innovative und risikobehaftete Aufgabe von erheblicher Komplexität handelt.<sup>1</sup> Dementsprechend von großer Bedeutung ist die Planung von Projekten.<sup>2</sup> Projektplanung ist die Planung aller Arbeitsgänge eines Projekts durch Zuweisung eines Startzeitpunktes, so dass die Zeitbeziehung zwischen den Vorgängen eingehalten und knappe Ressourcenkapazitäten nicht überschritten werden.<sup>2</sup> Durch das Zerlegen des Projekts in einzelne Arbeitsgänge wird versucht die Komplexität zu reduzieren und eine geordnete Abfolge der Arbeitsgänge zu erstellen, um das Projektziel zu erreichen.<sup>3</sup> Projektziele können unterschiedlich kategorisiert werden, z. B. in Sach-, Termin- oder Kostenziele.<sup>4</sup>

Nach DIN 69900 hat ein Arbeitsgang oder ein einzelner Vorgang eines Projekts einen definierten Anfang sowie ein definiertes Ende und dient für das Projekt als Ablaufelement zur Beschreibung eines bestimmten Geschehens.<sup>5</sup> Trotz der Zerlegung besitzen die einzelnen Arbeitsgänge des Projekts eine Beziehung, mit der die Reihenfolge der Ablauffolge bestimmbar ist.<sup>6</sup> Oft wird zur Darstellung der Vorgangsbeziehung ein Vorgangsknoten-Netzplan verwendet.<sup>7</sup> Ein Arbeitsgang ist i. d. R. verbunden mit dem Einsatz von Ressourcen, welche wiederum mit Kosten verbunden sind. Eine Möglichkeit, das Projektziel unter minimaler Ressourcenverwendung zu erreichen, ist die effiziente Planung der Ablauffolge der Arbeitsgänge eines Projekts.<sup>8</sup> Damit ist es möglich, mehrere Projekte bei einer gegebenen Zeitvorgabe unter Einhaltung von Ressourcenrestriktionen fertigzustellen bzw. bei konstanter Ressourcenkapazität ein Projekt in kürzerer Zeit abzuschließen.

Zur Bestimmung der optimalen Ablauffolge der einzelnen Arbeitsgänge eines Projekts kann ein Optimierungsmodell verwendet werden, bei der für eine festgelegten Ablauffolge eines Projekts und unter Berücksichtigung der Ressourcenbeschränkung die Fertigstellungszeit minimiert wird. Im Kapitel 2 wird eine solche Modellformulierung für das ressourcenbeschränkte Projektplanungsproblem vorgestellt. Das Projektplanungsproblem unter Einhaltung der Ressourcenbeschränkung wird oft mit der aus dem Englischen stammenden Abkürzung RCPSP beschrieben.<sup>9</sup> Bei dem RCPSP handelt es sich um die abstrakte mathematische Modellformulierung. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es das RCPSP in Ruby on Rails (RoR) zu

---

<sup>1</sup>Vgl. Voigt und Schewe (2014)

<sup>2</sup>Vgl. Zimmermann et al. (2006), S. VI

<sup>3</sup>Vgl. Zimmermann et al. (2006), S. 4

<sup>4</sup>Vgl. Felkai und Beiderwieden (2011), S. 52

<sup>5</sup>Vgl. DIN 69900 (2009), S. 15

<sup>6</sup>Vgl. Kellenbrink (2014), S. 6-7

<sup>7</sup>?????

<sup>8</sup>Vgl. Bartels (2009), S. 11-12

<sup>9</sup>Resource-Constrained Project Scheduling Problem

implementieren. Bei RoR handelt es sich um ein Framework zur Entwicklung von Webdokumenten bzw. Internetseiten.<sup>10</sup> Es baut auf der Programmiersprache Ruby auf und ist ursprünglich von David Heinemeier Hansson entwickelt.<sup>11</sup> Die Implementierung bedarf einer Verknüpfung von RoR und GAMS<sup>12</sup>. Unter GAMS wird eine algebraische Modellierungssprache für mathematische Optimierungsprobleme verstanden, mit der das RCPSP gelöst wird.<sup>13</sup> Im Kapitel 3 wird die Entwicklung des Anwendungssystems zum Lösen des RCPSP ausführlich beschrieben. Ergänzt wird diese Arbeit durch eine kritische Würdigung des Anwendungssystems in Kapitel 4 sowie einem Fazit in Kapitel 5.

## 2 Mathematische Modellformulierung des ressourcenbeschränkten Projektplanungsproblems

Zur Sicherstellung des Planungserfolgs mittels Terminierung eines Projekts muss neben der Reihenfolgerestriktion auch der Ressourcenbedarf der unterschiedlichen Arbeitsgänge sichergestellt werden, da Projekte meist ein beschränktes Ressourcenkontingent haben.<sup>14</sup> Mit der Einhaltung des Ressourcenbedarfs ist es für das Projekt möglich, alle in Bearbeitung befindlichen Arbeitsgänge auszuführen und folgerichtig das Projekt abzuschließen. Neben limitierten Ressourcen, die während des gesamten Projekts nur ein Mal zur Verfügung stehen, wie bspw. das Projektbudget, gibt es Ressourcen, die nach einer bestimmten Anzahl von Perioden erneuert werden können.<sup>15</sup> Erneuerbare Ressourcen sind bspw. die Produktionskapazität einer Maschine oder der Personaleinsatz für ein Projekt. In dieser Arbeit wird der Fokus auf erneuerbare Ressourcen gelegt.

Zur Lösung des ressourcenbeschränkten Projektplanungsproblems kann das Modell *Resource-Constrained Project Scheduling Problem (RCPSP)* genutzt werden. Das Modell RCPSP legt durch Festlegung der Aktivitätsstartzeitpunkte unter Einhaltung der Startzeitpunkt- bzw. der Vorrangsbedingung der einzelnen Arbeitsgänge sowie der Kapazitätsbeschränkung der erneuerbaren Ressourcen den Projektgrundablauf zur Zielerreichung der Minimierung der Projektdauer fest.<sup>16</sup> Die Zielfunktion des RCPSP zur Minimierung der Projektdauer ist weit verbreitet,<sup>17</sup> andere Varianten sind aber ebenfalls möglich.<sup>18</sup>

Nachfolgend wird das deterministische RCPSP in diskreter Zeit formuliert.<sup>19</sup> Da es sich

---

<sup>10</sup>???

<sup>11</sup>???

<sup>12</sup>General Algebraic Modeling System

<sup>13</sup>???

<sup>14</sup>Vgl. Kellenbrink (2014), S. 11

<sup>15</sup>Vgl. Neumann-Braun et al. (2003), S. 21-22

<sup>16</sup>Vgl. Demeulemeester und Herroelen (2011), S. 23

<sup>17</sup>Vgl. Drexel et al. (1997), S. 98

<sup>18</sup>Vgl. Talbot (1982), S. 1200

<sup>19</sup>???

um eine mathematische Modellformulierung in diskreter Zeit handelt, sind die Zeiteinheiten gleich den Perioden  $t, \tau$ .

### Modell RCPSP

$$\min Z = \sum_{t=FE_I}^{SE_I} t \cdot X_{I,t} \quad (1)$$

unter Beachtung der Restriktionen

$$\sum_{t=FE_i}^{SE_i} X_{it} = 1 \quad i = 1, \dots, I \quad (2)$$

$$\sum_{t=FE_h}^{SE_h} t \cdot X_{ht} \leq \sum_{t=FE_i}^{SE_i} (t - d_i) \cdot X_{it} \quad i = 1, \dots, I; h \in \mathcal{V}_i \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^I \sum_{\tau=\max(t, FE_i)}^{\tau=\min(t+d_i-1, SE_i)} k_{ir} \cdot X_{i\tau} \leq kp_r \quad r = 1, \dots, R; t = 1, \dots, T \quad (4)$$

$$X_{it} \in \{0, 1\} \quad i \in \mathcal{I}; t \in \{FE_i, \dots, SE_i\} \quad (5)$$

Ein Projekt hat  $I$  unterschiedliche Arbeitsgänge. Jeder Arbeitsgang  $i$  hat eine definierte Menge von zu erledigenden Vorgängerarbeitsgängen  $h \in \mathcal{V}_i$  und die Arbeitsgänge müssen zur Fertigstellung des Projekts topologisch abgearbeitet werden. D. h. der Vorgänger  $h$  hat stets eine kleinere Ordnungszahl als sein Nachfolger  $i$  ( $h < i$ ) und muss für den weiteren Projektverlauf beendet sein. Die Bearbeitungsdauer eines Arbeitsgangs  $i$  wird mit dem Parameter  $d_i$  festgelegt. Bei dem RCPSP in diskreter Zeit wird die Annahme getroffen, dass die Dauer ganzzahlig ist. Der Startzeitpunkt des Projekts ist  $t = 0$  und erstreckt sich über einen Gesamtzeitraum von  $T$  Perioden. Um die Reihenfolgebedingungen einzuhalten, werden einem Projekt die zwei Dummy-Arbeitsgänge „Beginn“ ( $i = 1$ ) und „Ende“ ( $i = I$ ) hinzugefügt, welche mit einer Dauer von 0 Zeiteinheiten bewertet werden.<sup>20</sup> Die benötigten Kapazitäten der erneuerbaren Ressource  $r$  bei Durchführung von Arbeitsgang  $i$  wird durch  $k_{ir}$  definiert. Die Ressourcen  $r \in R$  sind in einer Periode innerhalb des Umfangs ihrer Kapazität  $kp_r$  nutzbar. Da es sich um erneuerbare Ressourcen handelt, sind diese zu jeder neuen Periode in vollem Umfang erneut nutzbar, wobei nichtverbrauchte Ressourcen nicht auf nachfolgende Perioden übertragbar sind.<sup>21</sup> Der Modellformulierung in diskreter Zeit wird die binäre

<sup>20</sup>Vgl. Zimmermann et al. (2006), S. 66

<sup>21</sup>Vgl. Kellenbrink (2014), S. 12



Entscheidungsvariable  $X_{it}$  hinzugefügt, damit der Fertigstellungszeitpunkt der einzelnen Arbeitsgänge  $i$  festgelegt werden kann.<sup>22</sup>

Mit der Zielfunktion (1) wird der Fertigstellungszeitpunkt des Projekts minimiert. Die Nebenbedingung (2) sorgt dafür, dass ein Arbeitsgang  $i$  nur jeweils zwischen dem frühesten und dem spätesten Fertigstellungszeitpunkt einmalig durchgeführt wird. Die Reihenfolgerestriktion wird mit der Nebenbedingung (3) eingehalten. Sie stellt sicher, dass jeder Vorgänger  $h \in \mathcal{V}_i$  beendet ist, bevor der Arbeitsgang  $i$  startet. Der Parameter  $kp_r$  legt die Kapazitätsgrenze für eine erneuerbare Ressource  $r$  je Periode  $t$  fest. Mit der Nebenbedingung (4) wird dieses zum einen formal dargestellt und zum anderen wird der Ressourcenverzehr während der gesamten Bearbeitungsdauer der Fertigstellung beachtet. Mit der Nebenbedingung (5) wird die Binärvariable  $X_{it}$  für den Zeitraum  $t = \{FE_i, \dots, SE_i\}$  definiert, da aufgrund der Reihenfolgebeziehung (3) der jeweils betrachtete Arbeitsgang nur in diesem Zeitraum fertiggestellt werden kann. Die gemischt-ganzzahlige Modellformulierung lässt sich durch Standard-Lösungsverfahren exakt lösen.<sup>23</sup>

### **3 Implementierung des RCPSP mittels Ruby on Rail**

### **4 Kritische Würdigung des Anwendungssystems**

### **5 Fazit**

---

<sup>22</sup>Vgl. Pritsker et al. (1969), S. 94

<sup>23</sup>z. B. mittels eines Branch-and-Bound-Verfahrens, Vgl. Kellenbrink (2014), S. 14

# Literatur

- Bartels, J.H. (2009): Projektplanung–Grundlagen und Anwendungsbeispiele. In: Anwendung von Methoden der ressourcenbeschränkten Projektplanung mit multiplen Ausführungsmodi in der betriebswirtschaftlichen Praxis. Springer, S. 7–42.
- Demeulemeester, E. und Herroelen, W. (2011): Robust project scheduling. Bd. 3. Now Publishers Inc.
- DIN 69900 (2009): Projektmanagement - Netzplantechnik; Beschreibung und Begriffe. In: Berlin: Beuth.
- Drexl, A.; Kolisch, R. und Sprecher, A. (1997): Neuere Entwicklungen in der Projektplanung. In: Schmalenbachs Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, S. 95–120.
- Felkai, R. und Beiderwieden, A. (2011): Analysieren und Formulieren von Projektzielen. In: Projektmanagement für technische Projekte. Springer, S. 45–64.
- Hering, E. (2014): Projektmanagement für Ingenieure. Springer-Verlag.
- Kellenbrink, C. (2014): Einführung in die ressourcenbeschränkte Projektplanung. In: Ressourcenbeschränkte Projektplanung für flexible Projekte. Springer, S. 5–18.
- Neumann-Braun, K.; Schwindt, C. und Zimmermann, J. (2003): Project scheduling with time windows and scarce resources: temporal and resource-constrained project scheduling with regular and nonregular objective functions. Springer.
- Pritsker, A.A.B.; Waiters, L.J. und Wolfe, P.M. (1969): Multiproject scheduling with limited resources: A zero-one programming approach. In: Management science. Bd. 16, Nr. 1, S. 93–108.
- Talbot, F.B. (1982): Resource-constrained project scheduling with time-resource tradeoffs: The nonpreemptive case. In: Management Science. Bd. 28, Nr. 10, S. 1197–1210.
- Voigt, K.I. und Schewe, G. (2014): Definition Projekt Version 7 - Gabler Wirtschaftslexikon.
- Zimmermann, J.; Stark, C.; Rieck, J. et al. (2006): Projektmanagement. In: Projektplanung. Springer Berlin Heidelberg, S. 1–113.

## A Anhang

### A.1 GAMS-Implementierung des Beispiels

### A.2 Ruby on Rails Programmcode