

Transformações Geométricas

Chessman Kennedy

Escala (Redimensionamento)

- Tem como finalidade mudar o tamanho do objeto.
- As posições dos vértices do objeto são multiplicados por um determinado valor.
- Valores de escala maiores que um aumentam o tamanho do objeto.
- Valores de escala maiores que zero e menores que um diminuem o tamanho do objeto.
- Valores de escala negativo invertem o objeto,

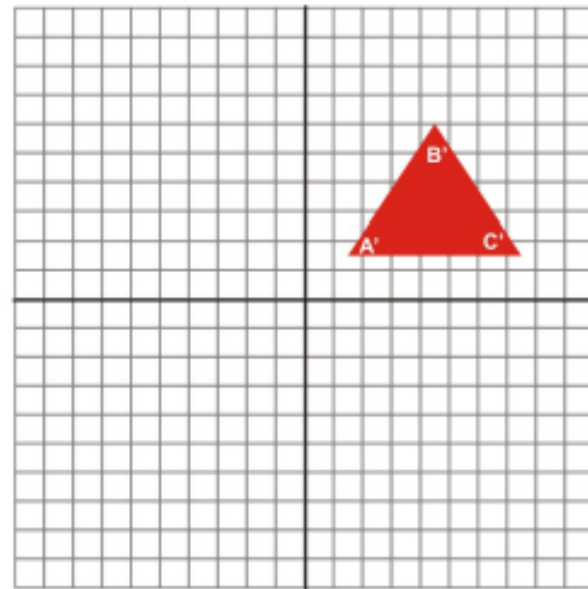
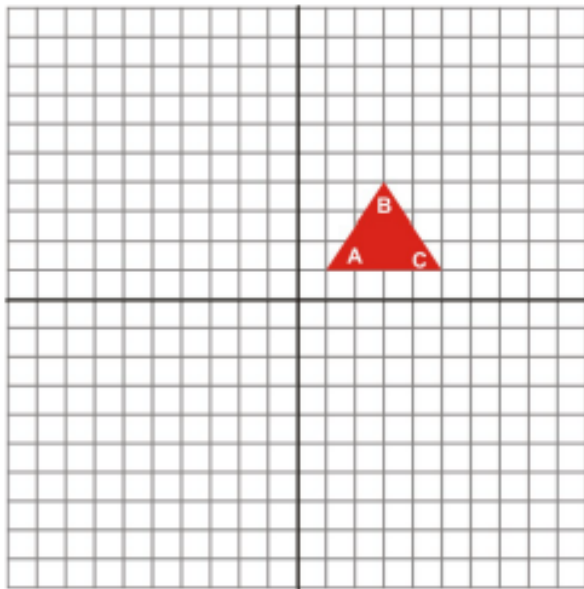
Escala

fator de escala > 1

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = [1.0 \ 1.0] \begin{bmatrix} 1.5 & 0.0 \\ 0.0 & 1.5 \end{bmatrix} = \boxed{[1.5 \ 1.5]}$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} \cdot \mathbf{E} = [3.0 \ 4.0] \begin{bmatrix} 1.5 & 0.0 \\ 0.0 & 1.5 \end{bmatrix} = \boxed{[4.5 \ 6.0]}$$

$$\mathbf{C}' = \mathbf{C} \cdot \mathbf{E} = [5.0 \ 1.0] \begin{bmatrix} 1.5 & 0.0 \\ 0.0 & 1.5 \end{bmatrix} = \boxed{[7.5 \ 1.5]}$$



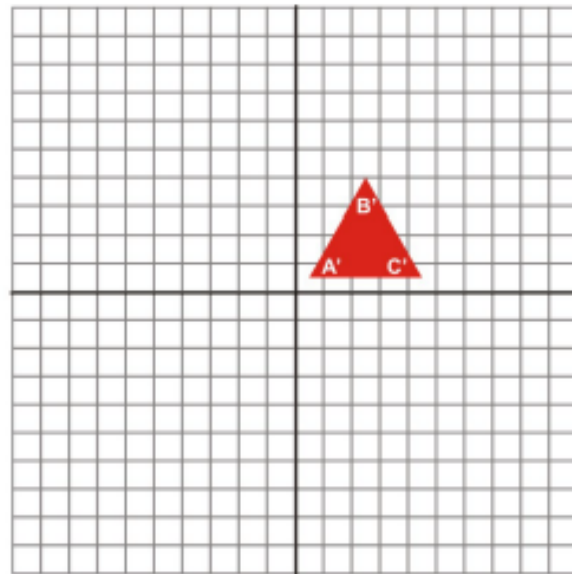
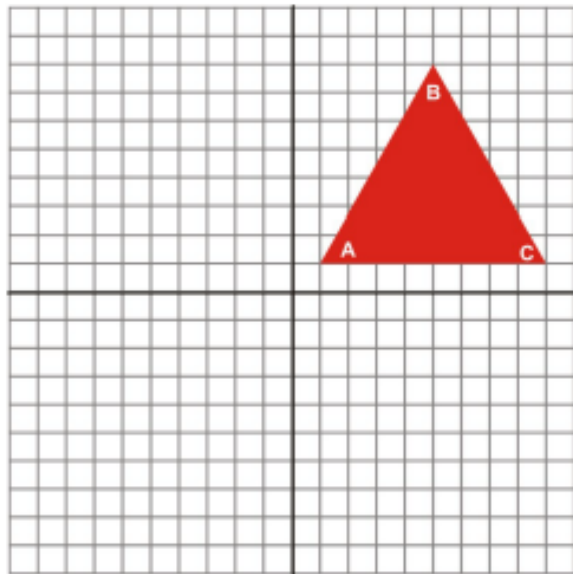
Escala

fator de escala < 1 e > 0

$$A' = A \cdot E = [1.0 \ 1.0] \begin{bmatrix} 0.5 & 0.0 \\ 0.0 & 0.5 \end{bmatrix} = [0.5 \ 0.5]$$

$$B' = B \cdot E = [5.0 \ 8.0] \begin{bmatrix} 0.5 & 0.0 \\ 0.0 & 0.5 \end{bmatrix} = [2.5 \ 4.0]$$

$$C' = C \cdot E = [9.0 \ 1.0] \begin{bmatrix} 0.5 & 0.0 \\ 0.0 & 0.5 \end{bmatrix} = [4.5 \ 0.5]$$



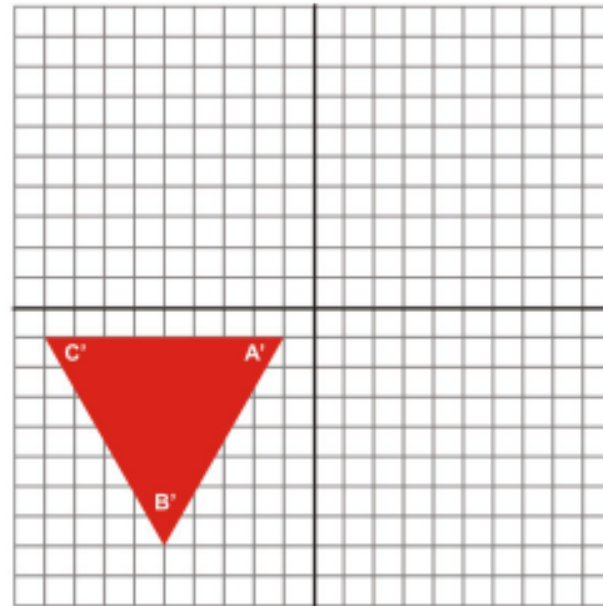
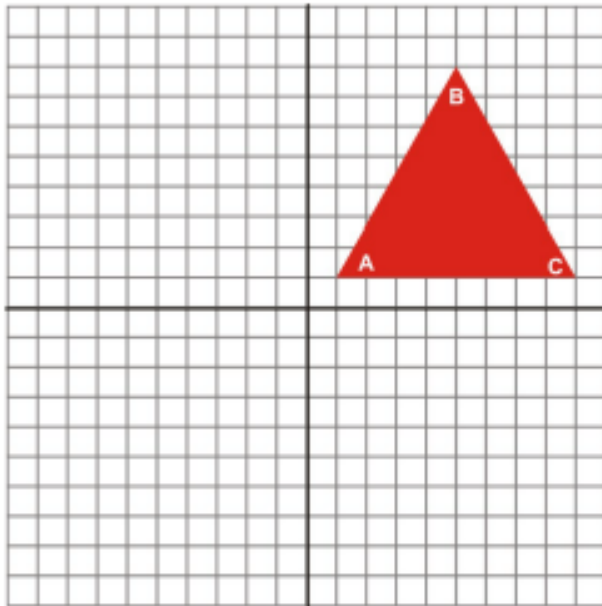
Escala

fator de escala = -1

$$A' = A \cdot E = [1.0 \ 1.0] \begin{bmatrix} -1.0 & 0.0 \\ 0.0 & -1.0 \end{bmatrix} = \boxed{[-1.0 \ -1.0]}$$

$$B' = B \cdot E = [5.0 \ 8.0] \begin{bmatrix} -1.0 & 0.0 \\ 0.0 & -1.0 \end{bmatrix} = \boxed{[-5.0 \ -8.0]}$$

$$C' = C \cdot E = [9.0 \ 1.0] \begin{bmatrix} -1.0 & 0.0 \\ 0.0 & -1.0 \end{bmatrix} = \boxed{[-9.0 \ -1.0]}$$



Rotação

- Tem como finalidade rotacionar o objeto.

Matriz de Rotação:

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

onde θ é o ângulo de rotação desejado.

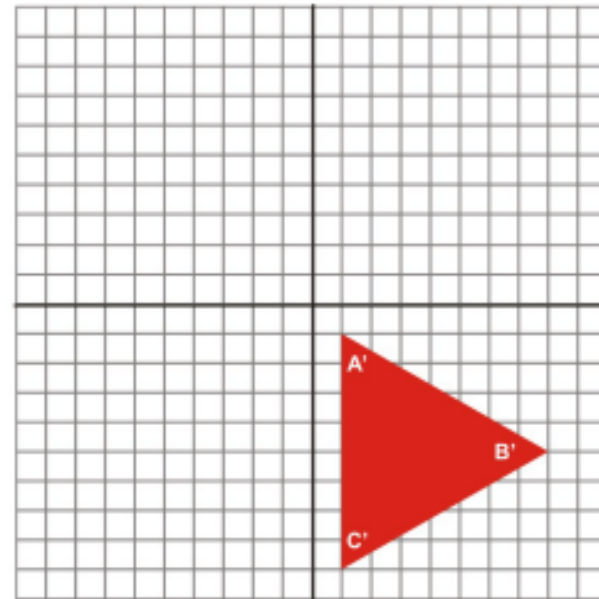
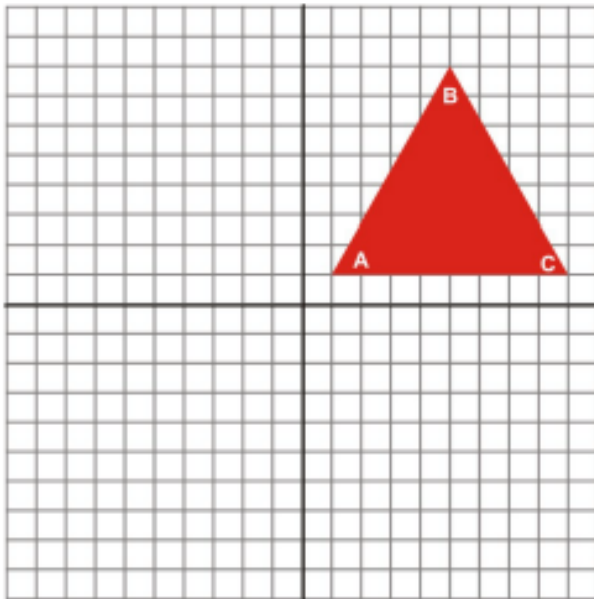
Rotação

rotação de $\theta = 90$ ($\cos(\theta) = 0$ e $\sin(\theta) = 1$)

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{R} = [1.0 \ 1.0] \begin{bmatrix} 0.0 & -1.0 \\ 1.0 & 0.0 \end{bmatrix} = \boxed{[1.0 \ -1.0]}$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} \cdot \mathbf{R} = [5.0 \ 8.0] \begin{bmatrix} 0.0 & -1.0 \\ 1.0 & 0.0 \end{bmatrix} = \boxed{[8.0 \ -5.0]}$$

$$\mathbf{C}' = \mathbf{C} \cdot \mathbf{R} = [9.0 \ 1.0] \begin{bmatrix} 0.0 & -1.0 \\ 1.0 & 0.0 \end{bmatrix} = \boxed{[1.0 \ -9.0]}$$



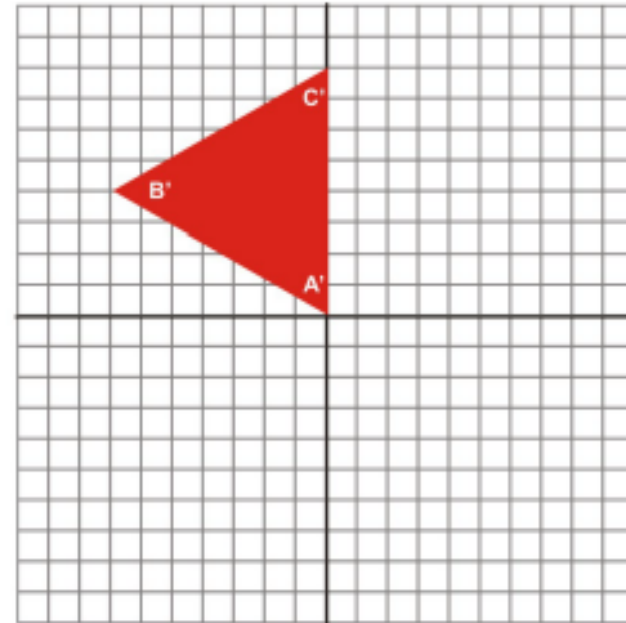
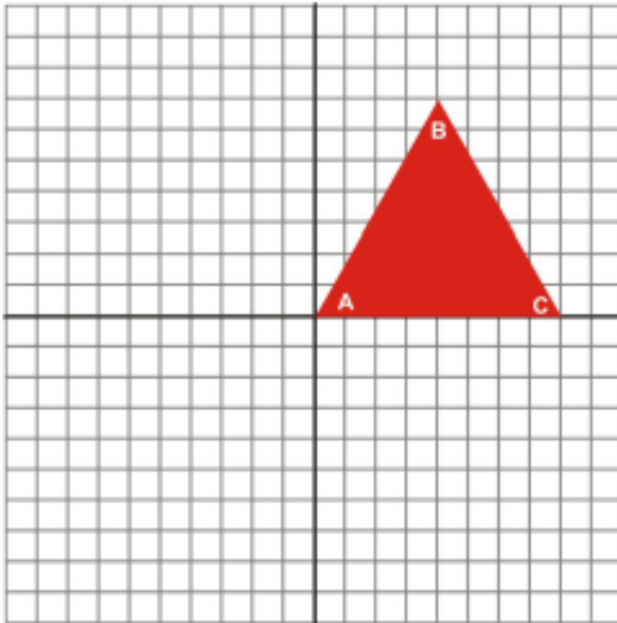
Rotação

rotação de $\theta = 90$ com um dos vértices na origem

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{R} = [0.0 \ 0.0] \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 \\ -1.0 & 0.0 \end{bmatrix} = \boxed{[0.0 \ 0.0]}$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} \cdot \mathbf{R} = [4.0 \ 7.0] \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 \\ -1.0 & 0.0 \end{bmatrix} = \boxed{[-7.0 \ 4.0]}$$

$$\mathbf{C}' = \mathbf{C} \cdot \mathbf{R} = [8.0 \ 0.0] \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 \\ -1.0 & 0.0 \end{bmatrix} = \boxed{[0.0 \ 8.0]}$$



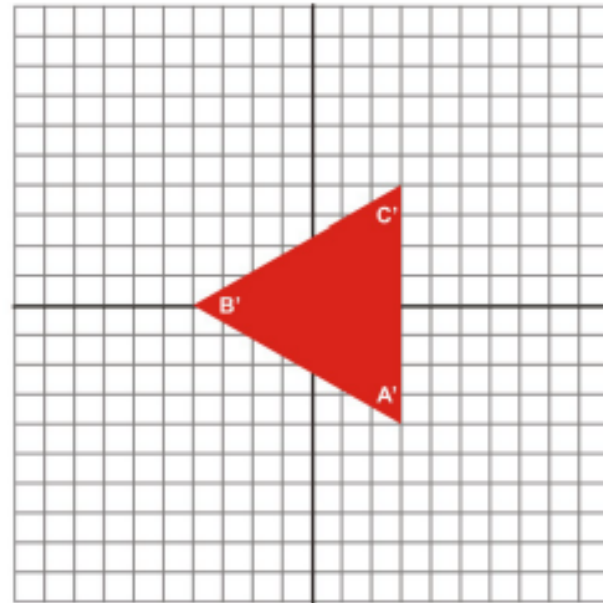
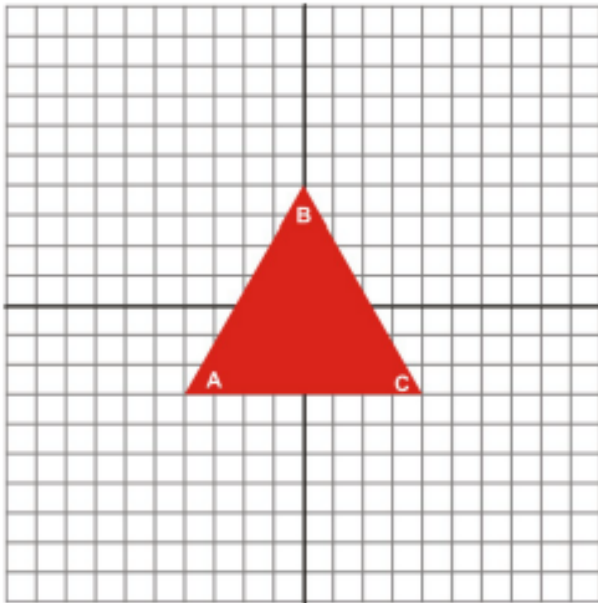
Rotação

rotação de $\theta = 90$ com centro do objeto na origem

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{R} = [-4.0 \quad -3.0] \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 \\ -1.0 & 0.0 \end{bmatrix} = \boxed{[3.0 \quad -4.0]}$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} \cdot \mathbf{R} = [0.0 \quad 4.0] \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 \\ -1.0 & 0.0 \end{bmatrix} = \boxed{[-4.0 \quad 0.0]}$$

$$\mathbf{C}' = \mathbf{C} \cdot \mathbf{R} = [4.0 \quad -3.0] \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 \\ -1.0 & 0.0 \end{bmatrix} = \boxed{[3.0 \quad 4.0]}$$



Translação

- Tem como finalidade mover o objeto de uma posição para outra.

$$[x' \ y'] = [x \ y] + [d_x \ d_y] = [x + d_x \ y + d_y]$$

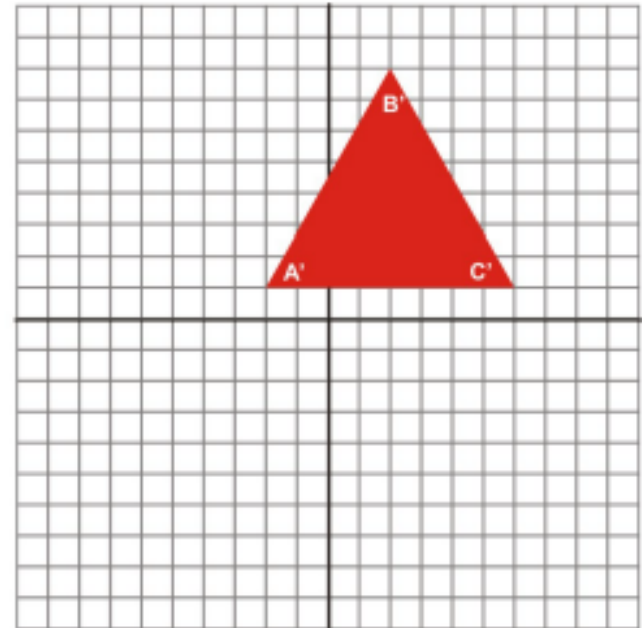
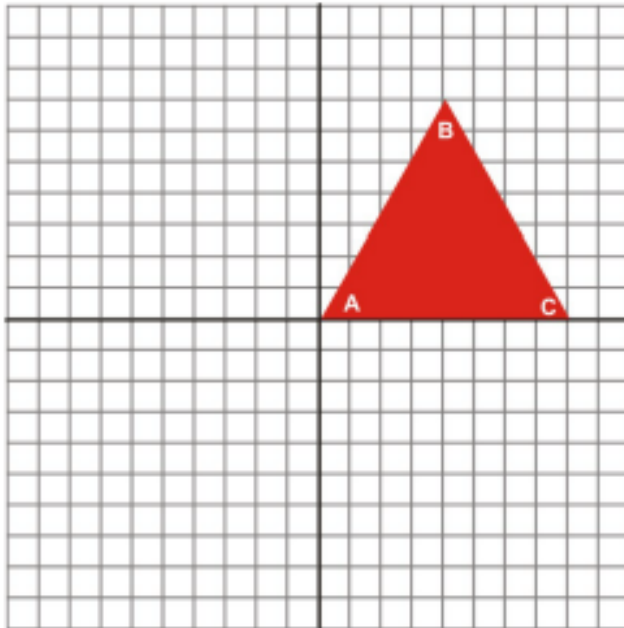
Translação

translação de $d_x = -2.0$ e $d_y = 1.0$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \mathbf{T} = [0.0 \ 0.0] + [-2.0 \ 1.0] = \boxed{[-2.0 \ 1.0]}$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} + \mathbf{T} = [4.0 \ 7.0] + [-2.0 \ 1.0] = \boxed{[2.0 \ 8.0]}$$

$$\mathbf{C}' = \mathbf{C} + \mathbf{T} = [8.0 \ 0.0] + [-2.0 \ 1.0] = \boxed{[6.0 \ 1.0]}$$



Sistema de Coordenadas Homogêneas

- Tem como finalidade facilitar a execução de transformações a partir da matrizes com a mesma quantidade de linhas e colunas.
- No espaço 2D, utilizam-se matrizes 3×3 .
- No espaço 3D, utilizam-se matrizes 4×4 .

Sistema de Coordenadas Homogêneas

Escala

$$E = \begin{bmatrix} E_x & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & E_y & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Exemplo: seja o vértice $\mathbf{A} = (2.0, 0.5)$ e fatores de escala $E_x = 2.0$ e $E_y = 1.0$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} \cdot E = [2.0 \ 0.5 \ 1.0] \begin{bmatrix} 2.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} = \boxed{[4.0 \ 0.5 \ 1.0]}$$

Sistema de Coordenadas Homogêneas

Rotação

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0.0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Exemplo: seja o vértice $\mathbf{A} = (2.0, 0.5)$ e rotação de 90° ($\cos(\theta) = 0$ e $\sin(\theta) = 1$)

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} \cdot R = [2.0 \ 0.5 \ 1.0] \begin{bmatrix} 0.0 & -1.0 & 0.0 \\ 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} = \boxed{[0.5 \ -2.0 \ 1.0]}$$

Sistema de Coordenadas Homogêneas

Translação

$$T = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ d_x & d_y & 1.0 \end{bmatrix}$$

Exemplo: seja o vértice $\mathbf{A} = (2.0, 0.5)$ e fatores de translação $d_x = -5.0$ e $d_y = 2.0$

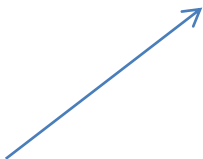
$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} \cdot T = [2.0 \ 0.5 \ 1.0] \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ -5.0 & 2.0 & 1.0 \end{bmatrix} = \boxed{[-3.0 \ 2.5 \ 1.0]}$$

Aplicando os Matrizes do Sistema de Coordenadas Homogêneas

- Multiplique cada vértice do objeto pela matriz.

$$\boxed{\text{vértice} \cdot \text{matriz}}$$

- **Exemplo:** Dado um vértice $A = (2, 5)$, calcular A' a partir da escala de fatores $E_x = 2$ e $E_y = 1$.

$$A' = A \cdot E = [2.0 \quad 0.5 \quad 1.0] \begin{bmatrix} 2.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} = \boxed{[4.0 \quad 0.5 \quad 1.0]}$$


Observe que o vértice é representado por uma matriz linha, com o terceiro valor = 1.

Composição de Transformações

- A partir das matrizes do sistema de coordenadas homogêneas, é possível aplicar todas as transformações de uma única vez.
- **Exemplo:** Dado um vértice $A = (2, 5)$, calcular A' a partir da escala de fatores $E_x = 2$ e $E_y = 1$ e uma translação $d_x = -5$ e $d_y = 2$.

$$\begin{aligned} A' &= A \cdot E \cdot T = [2.0 \quad 0.5 \quad 1.0] \begin{bmatrix} 2.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \cdot T = \\ &= [4.0 \quad 0.5 \quad 1.0] \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ -5.0 & 2.0 & 1.0 \end{bmatrix} = \boxed{[-1.0 \quad 2.5 \quad 1.0]} \end{aligned}$$

Composição de Transformações

- **Atenção: a ordem da multiplicação das matrizes de transformação geram resultados diferentes.**

Transformações Tridimensionais

Escala

$$P' = P \cdot E = [xE_x \ yE_y \ zE_z \ 1]$$

$$E = \begin{bmatrix} E_x & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & E_y & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & E_z & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Transformações Tridimensionais

Rotação

$$R_x = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0.0 \\ 0.0 & \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$R_y = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0.0 & -\text{sen}(\theta) & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ \text{sen}(\theta) & 0.0 & \cos(\theta) & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0.0 & 0.0 \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Transformações Tridimensionais

Translação

$$T = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ d_x & d_y & d_z & 1.0 \end{bmatrix}$$

Escala em OpenGL

- Use função:
void glScalef(GLfloat ex, GLfloat ey, GLfloat ez)
- Passe 1 para ez quando no caso de 2D.

Rotação em OpenGL

- Use função:

`void glRotatef(GLfloat angulo, GLfloat x, GLfloat y, GLfloat z)`

- Passe 0 para dz quando no caso de 2D.
- Quando o ângulo é positivo, a rotação é realizado no sentido anti-horário.

Translação em OpenGL

- Use função:

`void glTranslatef(GLfloat dx, GLfloat dy, GLfloat dz)`

- Passe 0 para dz quando no caso de 2D.

Considerações sobre Transformações em OpenGL

- **Chame as funções de transformação antes das funções de desenho.**
- Para combinar transformações, basta executar as funções correspondentes na sequência desejada.
- As transformações são aplicadas a todos os objetos desenhados após as chamadas das funções.
- Para voltar o openGL ao estado anterior das transformações, use `glPushMatrix` antes de realizar as transformações e `glPopMatrix` após a execução dos desenhos.

Exemplo Escala

```
#include <gl/glut.h>
```

```
float escalaX;
```

```
float escalaY;
```

```
// Inicializa parâmetros de rendering
```

```
void inicializar (void)
```

```
{
```

```
// Define a cor de fundo da janela de visualização como preta
```

```
glClearColor(0.0f, 0.0f, 0.0f, 1.0f);
```

```
// Determina a região onde a imagem pode ser exibida.
```

```
// O desenho não aparece se esta função não for usada
```

```
gluOrtho2D (0.0f, 250.0f, 0.0f, 250.0f);
```

```
}
```

Exemplo Escala

```
void desenhar(void)
{
    glPushMatrix();

    glClear(GL_COLOR_BUFFER_BIT);
    glColor3f(1.0f, 0.0f, 0.0f);

    glScalef(escalaX, escalaY, 1);

    glBegin(GL_QUADS);
        glVertex2i(100, 150);
        glVertex2i(100, 100);
        glVertex2i(150, 100);
        glVertex2i(150, 150);
    glEnd();

    glPopMatrix();
    glFlush();
}
```

Exemplo Escala

```
void eventoTeclado(unsigned char tecla, int x, int y){  
    switch (tecla){  
        case '+': escalaX += 0.1;  
                escalaY += 0.1;  
                break;  
        case '-': escalaX -= 0.1;  
                escalaY -= 0.1;  
                break;  
        case 27: exit(0);  
                break;  
    }  
    glutPostRedisplay();  
}
```

Exemplo Escala

```
// Programa Principal  
int main(void)  
{  
    escalaX = 1;  
    escalaY = 1;  
    glutInitDisplayMode(GLUT_SINGLE | GLUT_RGB);  
    glutInitWindowSize(400, 350);  
    glutInitWindowPosition(10, 10);  
    glutCreateWindow("Escala de um Quadrado");  
    glutDisplayFunc(desenhar);  
    glutKeyboardFunc(eventoTeclado);  
    inicializar();  
    glutMainLoop();  
}
```

Exercícios

- Altere o exemplo para fazer a rotação do objeto.
- Altere o exemplo para fazer a translação do objeto.
- Faça um programa para fazer a escala, translação e rotação da casinha desenhada na aula anterior.