Stochastik Wintersemester 2009
Leibniz Universität Hannover
Vorlesungsmitschrift

Dozent: Prof. Dr. L. Baringhaus

Mitschrift von
Ronald Becher

12. Oktober 2009

Zusammenfassung

Diese Mitschrift wird erstellt im Zuge der Vorlesung Stochastik A im Wintersemester 2009 an der Leibniz Universität Hannover. Obwohl mit großer Sorgfalt geschrieben, werden sich sicherlich Fehler einschleichen. Diese bitte ich zu melden, damit sie korrigiert werden können. Ihr könnt euch dazu an jeden der genannten Autoren (mit Ausnahme des Dozenten) wenden.

Dieses Skript wird primär über Github verteilt und „gepflegt“. Dort kann man es auch forken, verbessern und dann (idealerweise) ein „Pull Request“ losschicken. Siehe auch Github Guides. Auch wenn ihr gute Grafiken zur Verdeutlichung beitragen könnt, dürft ihr diese gerne schicken oder selbst einfügen (am besten als LaTeX-geeignete Datei (Tikz, SVG, PNG, ...)).

Hinweis: Es wird o.B.d.A. davon abgeraten, die Vorlesung zu versäumen, nur weil eine Mitschrift angefertigt wird! Selbiges gilt für den Übungsbetrieb! Stochastik besteht ihr nur, wenn ihr auch zu der Veranstaltung geht!

Inhaltsverzeichnis

Teil I
Einführung / Organisatorisches

Die Klausur wird am **01.02.2010 von 9:15 - 10:45** stattfinden, es wird wöchentliche Haus- und Stundenübungen geben.
Die abgegebenen Hausübungen werden korrigiert und in den Übungsgruppen zurückgegeben werden, es gibt allerdings keine Bonuspunkteregelung. Übungsgruppen wird es folgende geben:

- Mo, 12:15 - 13:00 Uhr (F309)
- Mo, 14:15 - 15:00 Uhr (G123) [max. 20 Teilnehmer]
- Di, 10:15 - 11:00 Uhr (F428)
- Di, 12:15 - 13:00 (F442)
- Mi, 12:15 - 13:00 (B305)

Teil II
Wahrscheinlichkeitstheorie

„Was ist das richtige Modell, um ein Experiment zu beschreiben?“ ist die wichtigste Frage, die die mathematische Statistik zu beantworten hat, und diese Modelle an die Wirklichkeit anzupassen, ist die hauptsächliche Aufgabe der Stochastik. Der letzte Teil wird vor allem in der Vorlesung **Stochastik B** behandelt.

1 Wahrscheinlichkeitsräume

Zufallsexperimente werden beschrieben durch

- die Menge der möglichen Ergebnisse Ω
  Im **Würfelwurf** sei beispielsweise $\Omega := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- die Menge $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$[1] $:= \{A; A \subset \Omega\}$ als Menge der interessierenden Ergebnisse.
  $\mathfrak{A}$ ist eine so genannte σ-Algebra auf Ω, d.h.

  1.
  $$\Omega \in \mathfrak{A} \tag{1}$$
  (Die Grundmenge Ω ist in $\mathfrak{A}$ enthalten)

  2.
  $$A \in \mathfrak{A} \iff A^c \in \mathfrak{A} \tag{2}$$
  (Wenn $\mathfrak{A}$ eine Teilmenge $A \in \Omega$ als mögliches Ergebnis enthält, dann auch deren Komplement $A^c = \Omega \setminus A$)

  3.
  $$A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A} \tag{3}$$
  (Wenn für jede natürliche Zahl n die Menge $A_n \in \mathfrak{A}$ ist, so ist auch die abzählbare Vereinigung aller $A_n \in \mathfrak{A}$)

  Im **Würfelwurf** seien beispielsweise gültige Ereignisse:

  - $A := \{2, 4, 6\}$ das Ergeignis „Es fällt eine gerade Zahl“, und
  - $A := \{5, 6\}$ das Ergeignis „Es fällt eine Zahl größer gleich 5“.

- durch ein Wahrscheinlichkeitsmaß P (lat: „**P**robabilitas“=Glaubwürdigkeit) mit $P : \mathfrak{A} \to [0, 1]$, also eine Mengenfunktion auf $\mathfrak{A}$ mit den Eigenschaften

[1] Potenzmenge

1. $$P(\Omega) = 1 \tag{4}$$
   (Die so genannte "Normiertheit").
2. Für jede Folge von **paarweise disjunkten** $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{A}$ gilt:
   $$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \tag{5}$$
   σ-Additivität von P

   Für $A \in \mathfrak{A}$ ist $P(A)$ die Wahrscheinlichkeitsfunktion (für das Eintreten) von A

Das Tripel $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ heißt **Wahrscheinlichkeitsraum**.

$\omega \in \Omega$ nennen wir das Ergebnis des Zufallsexperimentes. Das Ereignis $A \in \mathfrak{A}$ tritt genau dann ein, wenn $\omega \in A$.

$$\omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \iff \exists n \in \mathbb{N} \land \omega \in A_n \tag{6}$$

Das durch $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ beschriebene Ereignis tritt genau dann ein, wenn mindestens eines der Ereignisse $A_n,\ n \in \mathbb{N}$ eintritt.
Auf die Frage, ob auch $\emptyset$ eine gültige Menge ist, sei gesagt, dass

$$\emptyset = \Omega^c \in \mathfrak{A}$$

das „unmögliche Ereignis" genannt wird (Die Antwort ist also "ja").

Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{A}$. Dann

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c \in \mathfrak{A} \tag{7}$$

Anmerkung: $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ tritt genau dann ein, wenn alle $A_n, n \in \mathbb{N}$ eintreten.

Wenn nun $A, B \in \mathfrak{A}$, dann gilt

- $$A \cup B = A \cup B \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots \in \mathfrak{A}$$
  (Die Vereinigung von A, B ist auch ein interessierendes Ereignis und steht für "das Ereignis A oder B treten ein")

- $$A \cap B = A \cap B \cap \Omega \cap \Omega \cap \dots \in \mathfrak{A}$$
  (Die Schnittmenge von A, B ist auch ein interessierendes Ereignis und steht für "das Ereignis A **und** B treten ein")

- $$A\Delta B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$$

  (Die "symmetrische Differenz" beschreibt das Ereignis "Entweder A oder B")

- $A \subseteq B$ heißt: "Das Ereignis A hat das Ereignis B zur Folge".
  (Kurz erklärt: Wenn A eintritt, folgt $\omega \in A \ \wedge \ A \subseteq B \Rightarrow \omega \in B$)

1.1 Eigenschaften von Wahrscheinlichkeits-Maßen

- Aus $P(\emptyset) = P(\emptyset \cup \emptyset \cup \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\emptyset)$ folgt $P(\emptyset) = 0$.

- Für $A, B \in \mathfrak{A}$ mit $A \subseteq B$ ist

  $$P(B) = P(A \cup B \cap A^c) = P(A \cup B \cap A^c \cup \emptyset \cup \dots) = P(A) + P(B \cap A^c) \geq P(A) \quad (8)$$

  Also gelten folgende Eigenschaften / Gesetzmäßigkeiten:

  - $$P(A) \leq P(B) \quad (9)$$

    (Isotonie)

  - $$P(B \cap A^c) = P(B) - P(A) \quad (10)$$

    (Subtraktivität)

1.2 Beispiel

$\emptyset \neq \Omega$ sei endlich, $|\Omega|$ Anzahl der Elemente von Ω und $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$.
Sei P definiert durch

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, \ A \subset \Omega \quad (11)$$

P heißt „diskretes Laplace'sches W-Maß„ auf Ω.
Es ist

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}, \ \omega \in \Omega \quad (12)$$

also folgert man: „Alle möglichen Ergebnisse sind **gleich wahrscheinlich**."

2 Grundformeln der Kombinatorik

$n, r \in \mathbb{N}$, M_n ist eine n-elementige Menge, o.B.d.A. $M_n = \{1, \dots, n\}$.

- $$P_n^r = \{(x_1, \dots, x_r);\ x_i \in M_n, 1 \leq i \leq r\} \tag{13}$$
  das sind die r-Permutationen aus M_n mit Wiederholung.

- $$P_n^{(r)} = \{(x_1, \dots, x_r);\ x_i \in M_n, 1 \leq i \leq r, \text{paarweise verschieden}\}\ (r \leq n) \tag{14}$$
  das sind die r-Permutationen aus M_n ohne Wiederholung.

- $$K_n^{(r)} = \{(x_1, \dots, x_r);\ x_i \in M_n, 1 \leq i \leq r,\ x_1 < x_2 < \dots < x_n\}\ (r \leq n) \tag{15}$$
  das sind die r-Kombinationen aus M_n ohne Wiederholung.

- $$K_n^r = \{(x_1, \dots, x_r);\ x_i \in M_n, 1 \leq i \leq r,\ x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n\}\ (r \leq n) \tag{16}$$
  das sind die r-Kombinationen aus M_n mit Wiederholung.

2.1 Zur Erklärung

1. Tupel in Permutationen sind nicht angeordnet, hier ist die Reihenfolge wichtig!
2. Tupel in Kombinationen sind o.B.d.A. angeordnet, wir können sie also "vergleichen".
3. Bei Varianten **mit Wiederholung**, dürfen also zwei Elemente "nebeneinander" auch gleich sein, bei Varianten **ohne Wiederholung** ist das nicht der Fall, hier müssen die Elemente also echt unterschiedlich sein.
4. Bei einer r-Permutation/Kombination haben wir eine r-elementige Teilmenge (die also kleiner oder gleich groß der "großen" Menge M_n ist).
5. "mit Wiederholung" nennt man auch "mit Zurücklegen"

2.2 Anschauliche Beispiele

- Bei Kombinationen interessiert uns ausschließlich, welche Elemente wir aus M_n bekommen, ein gutes Beispiel für eine Kombination

  ohne Wiederholung ist also das übliche Lotto-Spiel "6 aus 49". Hier ist es uns egal, ob die Reihenfolge $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ ist oder $(6, 5, 4, 3, 2, 1)$.

mit Wiederholung ist die Frage, ob wir mindestens zwei Mal in fünf Versuchen eine Zahl ≥ 5 würfeln

- Bei Permutationen interessiert uns neben der Auswahl auch die Anordnung (man sagt: die Elemente sind "unterscheidbar"). Eine Permutation

  ohne Wiederholung ist z.B. ein Kinobesuch. Ob Tim zwischen Tina und Claudia sitzt, ist für ihn nicht gleichwertig mit der Variante, zwischen Klaus und Jürgen zu sitzen.

  mit Wiederholung ist die Frage, ob ich beim Roulette einen aufsteigenden Run habe, also erst eine 0 fällt, dann eine 1, dann eine 2, usw. Das Standardbeispiel hierbei ist eine Urne, wo ich Kugeln oder Zettel heraushole und wieder hereinlege.

2.3 Rechnen mit Permutationen und Kombinationen

Es gilt

- $$|P_n^r| = n^r \tag{17}$$

  (Erklärung: Man greift r Mal in die Urne, schaut sich einen der n Zettel an und legt ihn wieder herein, es gibt also danach genauso viele Möglichkeiten zu ziehen (also n))

- $$|P_n^{(r)}| = \begin{cases} r \leq n & n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) \\ r = n & r! \end{cases} \tag{18}$$

  (Erklärung: Lege ich meine Zettel nicht wieder in die Urne zurück, habe ich beim nächsten Versuch natürlich eine Möglichkeit weniger, welche Zettel ich ziehen könnte)

- $$r! \cdot |K_n^{(r)}| = |P_n^{(r)}| \tag{19}$$

  $$\Updownarrow$$

  $$|K_n^{(r)}| = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!} = \binom{n}{r} \tag{20}$$

  $$\Downarrow$$

  $$|\{A; A \subset M_n, |A| = r\}|^r = \binom{n}{r} \tag{21}$$

  $$\Downarrow$$

  $$|\mathfrak{P}(M_n)| = \sum_{r=0}^{r} \binom{n}{r} 1^r 1^{n-r} = (1+1)^n = 2^n \tag{22}$$

(21) Gilt auch noch für $r = 0$.
Erklärungen:
(19) und äquivalent (20) kann man sich so vorstellen, dass man sich seine r-elementige Teilmenge (ohne Zurücklegen) zusammensuchen kann, aber die verschiedenen Möglichkeiten, sie zu permutieren ("die Kinobesucher umzusetzen"), interessieren den Betrachter hier nicht, also müssen wir die aus der Rechnung rausnehmen.
(21) ist die Anzahl aller r-elementigen Teilmengen von M_n hoch r, und wegen (20) ebenfalls $\binom{n}{r}$.
(22) ist die Länge der Potenzmenge, also aller möglichen Kombinationen von Elementen aus M_n

- $K_n^r \to (x_1, \ldots, x_r) \underbrace{\longrightarrow}_{\textit{ist bijektiv}} (x_1, x_1 + 1, \ldots, x_r + r - 1) \in K_{n+r-1}^{(r)}$
  $\Rightarrow |K_n^r| = |K_{n+r-1}^{(r)}| = \binom{n+r-1}{r}$
  Identifiziere $(x_1, \ldots, x_r) \in K_n^r$ mit dem Besetzungszahlvektor $(k_1, \ldots, k_n)$, wobei $k_i = |\{j \in \{1, \ldots, r\}; x_j = i\}|,\ 1 \leq i \leq n$. Dann ist $K - 1 + \cdots + k_n = r$.
  Dann ist $|\{(K_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n; k_1 + \cdots + k_n = r\}| = \binom{n+r-1}{r}$
  Folgerung: $|\{(K_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n; k_1 + \cdots + k_n = r\}| = \binom{n+(r-n)-1}{r-n} = \binom{r-1}{r-n} = \binom{r-1}{n-1}, r \geq n$