Stochastik Wintersemester 2009
Leibniz Universität Hannover
Vorlesungsmitschrift

Dozent: Prof. Dr. R. Grübel

Mitschrift von
Ronald Becher
Evgenij Kiss

4. November 2010

Zusammenfassung

Diese Mitschrift wird erstellt im Zuge der Vorlesung Stochastik A im Wintersemester 2010 an der Leibniz Universität Hannover. Obwohl mit großer Sorgfalt geschrieben, werden sich sicherlich Fehler einschleichen. Diese bitte ich zu melden, damit sie korrigiert werden können. Ihr könnt euch dazu an jeden der genannten Autoren (mit Ausnahme des Dozenten) wenden.

Dieses Skript wird primär über Github verteilt und „gepflegt“. Dort kann man es auch forken, verbessern und dann (idealerweise) ein „Pull Request“ losschicken. Siehe auch Github Guides. Auch wenn ihr gute Grafiken zur Verdeutlichung beitragen könnt, dürft ihr diese gerne schicken oder selbst einfügen (am besten als LaTeX-geeignete Datei (Tikz, SVG, PNG, ...)).

Hinweis: Es wird o.B.d.A. davon abgeraten, die Vorlesung zu versäumen, nur weil eine Mitschrift angefertigt wird! Selbiges gilt für den Übungsbetrieb! Stochastik besteht ihr nur, wenn ihr auch zu der Veranstaltung geht!

Inhaltsverzeichnis

Teil I
Ein mathematisches Modell für Zufallsexperimente

Man fasst die möglichen Ergebnisse ω zu einer Menge Ω zusammen; man nennt Ω den *Ergebnisraum* oder auch *Stichprobenraum*. *Ereignisse* werden durch Teilmengen von Ω beschrieben. Eine *Aussage* über das Ergebnis wird zu der Menge A aller $\omega \in \Omega$, für diese die Aussage richtig ist.

1 Beispiel - Würfelwurf

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Das Ereignis "Es kommt eine gerade Zahl heraus" wird beschrieben durch

$$A = \{2, 4, 6\}$$

Das Ereignis "Es kommt eine 6 heraus" wird (in Mengenschreibweise) beschrieben durch $A = \{6\}$. Solche Ereignisse, die nur aus einem Element bestehen, nennt man *Elementarereignisse*. Aussagen über das Ergebnis können *logisch kombiniert* werden. Auf der Ereignisseite (also in Teilmengen von Ω) wird dies zu Mengenoperationen. Werden zwei Ereignisse A, B durch Mengen repräsentiert, so ist

$$\begin{aligned} A^c &: \text{ das Ereignis, dass } A \text{ nicht eintritt} \\ A \cap B &: \text{ das Ereignis, dass } A \textit{ und } B \text{ eintreten} \\ A \cup B &: \text{ das Ereignis, dass (mindestens) eines der Ereignisse } A, B \text{ eintritt} \end{aligned}$$

Hier kommt eine Grafik über eine Matrix .... oder ein Foto der Tafel A = Pasch
B = Augensumme kleiner 5
A geschnitten B

Man kann dies mit mehr als zwei Ereignissen machen. Wenn A, B, C Ereignisse sind, wodurch wird "genau eins davon tritt ein" beschrieben?

$$A \cap B^c \cap C^c + A^c \cap B \cap C^c + A^c \cap B^c \cap C$$

2 Was ist Wahrscheinlichkeit?

Unsere zentrale Frage lautet nun: "Was ist Wahrscheinlichkeit?"
Der Mathematiker wählt ein Axiomensystem (vgl. Geometrie/Raum). Ausgangspunkt hierfür

ist der Alltagsbegriff. Was bedeutet es also, wenn beim Wurf einer fairen Münze mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ das Ergebnis "Kopf" kommt?

2.1 Frequentistische Auffassung

Bezeichnet $N_n(A)$ die Anzahl der Versuche bei n Wiederholungen des Experiments, bei dem A kommt, so sollte die **relative Häufigkeit** $\frac{1}{n}N_n(A)$ bei großem n in der Nähe der Wahrscheinlichkeit p des Ereignisss A liegen.

2.2 Subjektivistische Auffassung

p drückt den "Grad meines Glaubens" an das Eintreten von A auf einer Skala von 0 ("kein Glaube") bis 1 ("Gewissheit") aus. Kann über Wetten formalisiert werden.
Anmerkung: Diese beiden Auffassungen sind nicht disjunkt!

Für relative Häufigkeiten gilt

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{1}{n}N_n(A) &\leq 1 \\ \frac{1}{n}N_n(\Omega) &= 1 \\ \frac{1}{n}N_n(\emptyset) &= 0 \\ \frac{1}{n}N_n(A+B) &= \frac{1}{n}N_n(A) + \frac{1}{n}N_n(B) \end{aligned}$$

3 Definition: Kolmogorov-Axiome

Gegeben seien ein (nicht leerer) Ergebnisraum Ω und ein System $\mathcal{A}$ von Teilmengen von Ω, das System der Ereignisse (bei endlichen oder abzählbar unendlichen Ω ist $\mathcal{A}$ einfach die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$, also die Menge **aller** Teilmengen von Ω). Eine **Wahrscheinlichkeit** oder besser ein **Wahrscheinlichkeitsmaß** (WMaß) ist eine Abbildung $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

(A1) $P(A) \geq 0 \ \forall A \in \mathcal{A}, \ P(\Omega) = 1$ (P steht für "probability")

(A2) Für alle paarweise disjunkten Ereignisse $A_1, A_2, A_3, \ldots$ gilt

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Dies nennt man "σ-Additivität".

4 Wahrscheinlichkeitsraum

Das Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ nennt man einen **Wahrscheinlichkeitsraum**.
Es folgen nun erste Folgerungen aus den Axiomen.

5 Satz

1. $P(\emptyset) = 0$

2. $P(A) \leq 1 \; \forall A \in \mathcal{A}$

3. $P(A^c) = 1 - P(A) \; \forall A \in \mathcal{A}$ (Übergang zum **Gegenereignis**)

4. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ (Monotonie)

5. $P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$ für paarweise disjunkte $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ (endliche Additivität)

6. Boolesche Ungleichung: $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \leq P(A_1) + \ldots + P(A_n)$

7. Die **Siebformel**

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\}, \\ |I|=k}} \mathsf{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$$

5.1 Beweis

1. Mit (A2) und $A_j = \emptyset \; \forall j$ erhält man $P(\emptyset) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\emptyset)$. Wegen $P(\emptyset) \in \mathbb{R}$ bedeutet dies $P(\emptyset) = 0$.

5. Verwende (A2) mit $A_j = \emptyset$ für $j > k$ und dann Teil (a):

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \ldots \cup A_k) &= P(A_1 \cup \ldots \cup A_k \cup \emptyset \cup \emptyset \ldots) \\ &= P(A_1) + \ldots + P(A_k) + P(\emptyset) + \ldots \\ &= P(A_1) + \ldots + P(A_k) \end{aligned}$$

3. $1 = P(\Omega) = P(A + A^c) = P(A) + P(A^c)$

4.

$$\begin{aligned} B &= A + B \cap A^c \\ P(B) &= P(A) + \underbrace{P(B \cap A^c)}_{\geq 0 \text{ nach (A1)}} \geq P(A) \end{aligned}$$

7. bei $n = 2$: $P(A \cup B) \neq P(A) + P(B)$

Teil II
Laplace-Experimente, elementare Kombinatorik

Unser Modell für ein Zufallsexperiment ist ein sogenannter *WRaum* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, wobei Ω die möglichen *Ergebnisse* des Experiments enthält, $\mathcal{A}$ ein System von Teilmengen von Ω ist, die *Ereignisse* (für uns in der Regel die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$), und P eine Funktion, die jedem Ereignis A eine Wahrscheinlichkeit $P(A)$ zuordnet.

Spezialfall Laplace-Experimente:

$$\#\Omega < \infty,\ \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega),\ P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

(vielleicht schon bekannt: Wahrscheinlichkeit als Anzahl der günstigen Ergebnisse durch die Anzahl der möglichen Ergebnisse)

Ergibt sich aus bzw. ist äquivalent zu der Aussage, dass alle Elementarereignisse dieselbe Wahrscheinlichkeit haben. Typische Anwendung: Werfen eines symmetrischen Gegenstandes (Würfel, Münze, etc.)

5.2 Beispiel: Würfelwurf

Ein Würfel wird zweimal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man Augensumme 7 bzw. 6?

Wir betrachten das Laplace-Experiment über

$$\begin{aligned}
\Omega &= \{(i,j) : 1 \leq i, h \leq 6\} = \{1, \ldots, 6\} \times \{1, \ldots, 6\} \\
\#\Omega &= 36 \\
A_7 &= \{(i,j) \in \Omega : i + j = 7\} = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\} \\
P(A_7) &= \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \\
A_6 &= \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\} \\
P(A_6) &= \frac{5}{36} (< P(A_7))
\end{aligned}$$

6 Die Kunst des Zählens

Bei Laplace-Experimenten läuft die Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten also auf die "Kunst des Zählens" (elementare Kombinatorik) hinaus. Zwei zentrale Regeln:

1. Gibt es eine bijektive Abbildung von A nach B, so gilt $\#A = \#B$

2. Sind A und B disjunkt, so gilt $\#(A \cup B) = \#A + \#B$

Regel 2 lässt sich auf mehr als zwei Mengen verallgemeinern: Sind $A_1, \dots, A_n$ disjunkt, so gilt $\#(A_1 + \ldots + A_n) = \#A_1 + \#A_2 + \ldots + \#A_n$.

Wichtige Folgerung: Im Falle $C \subset A \times B$ mit $\#\{y : (x, y) \in C\} = k$ fuer alle $x \in A$ gilt $\#C = k \cdot \#A$.

6.1 Beispiel: Hörsaal

Hörsaal mit n Reihen mit jeweils m Plätzen. In jeder Reihe sind k Plätze besetzt. Man hat insgesamt $n \cdot k$ Zuhörer.

Spezialfall: Bei $C = A \times B$ erhält man $\#(A \times B) = \#A \cdot \#B$.

7 Vier Standardfamilien

Permutationen/Kombinationen mit/ohne Wiederholung.

7.1 Permutationen mit Wiederholung

Wieviele Moeglichkeiten gibt es m Objekte (Kugeln) auf n Plätze (Urnen) zu verteilen? Man hat n Möglichkeiten für das 1. Objekt, wieder n fuer das 2. etc., also insgesamt n^m Möglichkeiten. Formal:

$$\{(i_1, \dots, i_m) : i_j \in \{1, \dots, n\} \text{ für } j = 1, \dots, m\} = n^m$$

Dabei bedeutet das Tupel $(i_1, \dots, i_m)$, dass Objekt j in Urne i_j gelegt wird. Allgemeiner: Bei endlichen Mengen A und B bezeichnet B^A die Menge aller Funktionen $f : A \to B$, also: $\#(B^A) = (\#B)^{\#A}$.

7.2 Permutationen ohne Wiederholung

Was passiert, wenn man nur *injektive* Funktionen zulässt? Klar: Man braucht $\#B \geq \#A$. Dies setzen wir voraus. Man hat n Möglichkeiten für das erste Objekt. Ist dieses ausgeteilt, so bleiben $n - 1$ Möglichkeiten fuer das zweite Objekt (Regel 2). Sind die ersten beiden ausgeteilt, so bleiben $n - 2$ für das dritte Objekt etc., man hat also

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!} = (n)_m$$

Möglichkeiten. Spezialfall: $A = B$. Dann ist jedes injektive f automatisch surjektiv, also bijektiv. Allgemein:

$$\#\{f \in B^A : f \text{ injektiv}\} = \frac{(\#B)!}{(\#B - \#A)!}$$
$$A = B : \#\{\underbrace{f : A \to A : f \text{ bijektiv}}_{\substack{\text{Die Elemente dieser Menge nennt} \\ \text{man } \textit{Permutationen} \text{ von } A}}\} = (\#A)!$$

Standardanwendung: Kartenmischen. Bei 32 Karten gibt es 32! Möglichkeiten fuer das Mischergebnis.

7.3 Kombination ohne Wiederholung

Formal: Wir führen auf B^A eine Äquivalenzrelation ein:

$$f \sim g :\Leftrightarrow \exists \pi : A \to A \text{ bijektiv} : f = g \circ \pi$$

$$\begin{array}{ll} (f \sim f\ ? & \text{wegen } f = f \circ \pi \text{ mit } \pi = id \\ \ f \sim f \Rightarrow g \sim f\ ? & f = g \circ \pi \text{ impliziert } g = f \circ \pi^{-1} \\ \ f \sim g, g \sim f \Rightarrow f \sim h\ ? & f = g \circ \pi, g = h \circ \sigma \Rightarrow f = h \circ \sigma \circ \pi) \end{array}$$

Führt auf Zerlegung von $\{f \in B^A : f \text{ injektiv}\}$ in Äquivalenzklassen. Wie viele gibt es? Alle haben dieselbe Anzahl von Elementen, nämlich $m!$ (bei $\#A = m$).

7.3.1 Beispiel: Lotto

Beim Lotto 6 aus 49 erhält man zunächst ein Tupel $(i_1, \ldots, i_6)$ mit $i_j \in \{1, \ldots, 49\}$ und $i_j \neq i_k$ fuer $j \neq k$ (eine injektive Abbildung von $A = \{1, \ldots, 6\}$ in $B = \{1, \ldots, 49\}$). Dies wird aufsteigend angeordnet:

$$k_1, \ldots, k_6 \text{ mit } k_1 < \ldots < k_6$$

Es gibt 6! Möglichkeiten. Formal gilt bei injektiven Funktionen $f : f \circ \pi = f \circ \sigma \Rightarrow \pi = \sigma$, d.h. die Anzahl der Elemente einer Äquivalenzklasse ist gleich der Anzahl der Permutationen (bij: Selbstabbildungen) der Menge A, also $(\#A)!$. Also:

$$\#\{f \in B^A : f \text{ injektiv}\} = \frac{(\#B)!}{(\#B - \#A)!}$$

Jeweils $(\#A)!$ Elemente werden zu einer Äquivalenzklasse zusammengefasst, d.h. die gesuchte Anzahl ist

$$\frac{(\#B)!}{(\#B - \#A)! \cdot (\#A)!} = \binom{\#B}{\#A}$$

Alternativ:

$$\{(i_1,\ldots,i_m) : 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leq n\} = \binom{n}{m}$$

Spezialfall: Wieviele Teilmengen vom Umfang m hat eine Menge von n Elementen? Antwort: $\binom{n}{m}$.

7.4 Kombinationen mit Wiederholung

$$\{(i_1,\ldots,i_m) : 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_m \leq n\} = \binom{n+m-1}{m}$$

Beweis mit Regel 1: Wir können die Menge der m-Kombinationen aus n *mit* Wiederholung bijektiv abbilden auf die Menge der m-Kombinationen aus $n+m-1$ *ohne* Wiederholung durch

$$(i_1,\ldots,i_m) \mapsto (i_1, i_2+1, i_3+2,\ldots,i_m+m-1)$$

7.5 Zusammenfassende Tabelle

	Permutationen	Kombinationen
mit Wdh.	n^m	$\binom{n+m-1}{m}$
ohne Wdh.	$\frac{n!}{(n-m)!}$	$\binom{n}{m}$

Grundmengen A, B mit $\#A = n$, $\#B = m$.

Hinweis: Jetzt seid ihr so weit in dieser Mitschrift gekommen, bitte gleicht diese mit eurer handschriftlichen Mitschrift ab und sendet mir eure Verbesserungen. Gerne auch gleich in LaTeX ;-)