

Solução Numérica da Difusão de Calor 2D

Relatório do 2º Trabalho Computacional - Regime Permanente

Aluno: Romulo de Aguiar Beninca

1. Definição do Problema e Organização do Trabalho

O objetivo deste trabalho é desenvolver um código computacional para resolver a equação de difusão de calor bidimensional em regime permanente, utilizando o Método de Volumes Finitos (MVF). Conforme especificado na tarefa, o problema físico consiste em uma placa quadrada unitária onde a temperatura é prescrita na **face superior**, enquanto as demais faces são mantidas a 0°C .

Este relatório está organizado de maneira a apresentar a metodologia e os resultados de forma estruturada:

Seção 2 (Desenvolvimento Matemático): Detalha a discretização da equação governante, o tratamento das condições de contorno via volumes fictícios e a dedução da solução analítica por separação de variáveis.

Seção 3 (Correspondência Algébrica): Relaciona as equações matemáticas deduzidas com a lógica de programação implementada.

Seção 4 (Resultados): Apresenta a simulação interativa, gráficos de convergência, perfis de temperatura comparativos, mapas de calor e cálculos de integrais (temperatura média e fluxos de calor).

Seção 5 (Listagem do Programa): Disponibiliza o código fonte completo em JavaScript utilizado para a solução do problema.

ITENS SOLICITADOS NA ESPECIFICAÇÃO

- Item 1:** Número de iterações e gráfico da variação de $T(1/2, 1/2)$ (escala log/decimal).
- Item 2:** Tabela com solução analítica, numérica e erro para o perfil vertical em $X = 1/2$.
- Item 3:** Gráfico de Y versus T para $X = 1/2$ (Perfil Vertical).
- Item 4:** Tabela com solução analítica, numérica e erro para o perfil horizontal em $Y = 1/2$.
- Item 5:** Gráfico de T versus X para $Y = 1/2$ (Perfil Horizontal).
- Item 6:** Temperatura média da placa (Analítica vs Numérica).
- Item 7:** Taxa de transferência de calor no contorno leste (Analítica vs Numérica).
- Item 8:** Taxa de transferência de calor no contorno norte (Analítica vs Numérica).
- Item 9:** Listagem impressa do programa computacional implementado.

Dinâmica de fluidos computacionais I

Questão unica: Implementar um programa computacional para resolver com o método de volumes finitos o problema definido por:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad T(0, y) = T(1, y) = T(x, 0) = 0, \quad T(x, 1) = \sin(\pi x)$$

Dados:

$$K = 1 \text{ W/m.K} \quad N_x = N_y = 13 \text{ volumes de controle}$$

solver: Gauss-Seidel. Estimativa inicial da temperatura: 0°

Malha uniforme (dimensão unitária em z)

Condições de contorno aplicada com volumes fictícios

Funções de interpolação lineares (CDS) para T

Interpretação do problema

O trabalho trata da difusão de calor 2D em regime permanente, abordado no capítulo 5 da unidade curricular CFD. Como ilustrado no módulo do capítulo 5, o problema consiste em calcular a distribuição de temperatura em uma placa quadrada, tendo como condição inicial o lado direito uma fonte de calor com distribuição $T(1, y) = \sin(\pi y)$ e as demais bordas a 0°C.

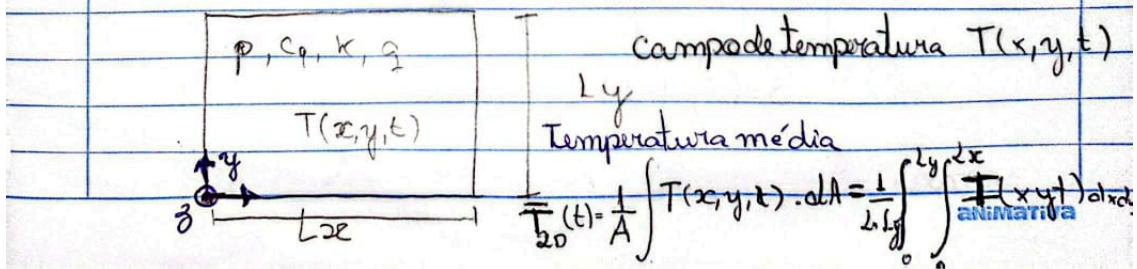


Figura 1: Definição dos parâmetros de malha ($N = 13$) e equações iniciais.

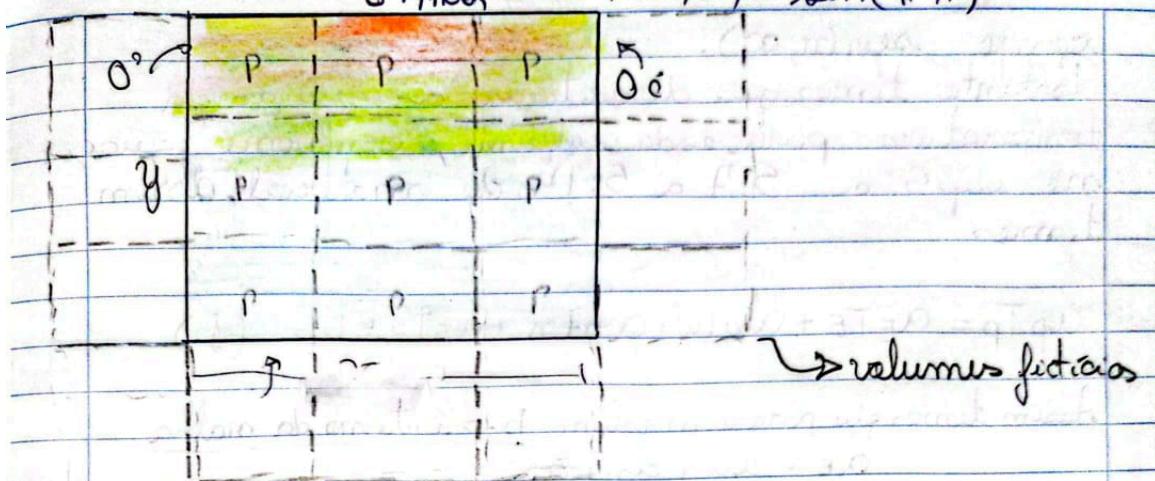
2. Desenvolvimento Matemático (Dedução)

2.1. Interpretação Física e Malha

A discretização espacial é realizada dividindo o domínio em volumes de controle. O comportamento esperado é um fluxo de calor partindo da região de maior temperatura (fonte senoidal) em direção às regiões mais frias ($0^{\circ}C$).

Fig 1

$$t_{\max} = T(\alpha e, 1) = \sin(\pi x)$$



→ volumes fictícios

Ainda discutido sobre a interpretação do problema na figura 1, está ilustrado de uma placa plana com condições de contorno descritas no enunciado. Em que temos a fonte de calor na borda superior as bordas esquerda, direita e inferiores tem temperatura 0°C .

Assim para cada volume da malha temos

$$N = (i, j + 1)$$

$$W = (i - 1, j) \quad P = i, j \quad E = (i + 1, j)$$

$$S = (i, j - 1)$$

Ainda temos que considerar que para os volumes nas bordas superior a fonte de calor se distribui

animativa

Figura 2: Interpretação física e esquema da malha com nomenclatura dos pontos cardeais (P, N, S, E, W).

2.2. Discretização para Volumes Internos

Para os volumes de controle internos, onde não há contato direto com as bordas prescritas, aplicamos o balanço de energia considerando condutividade constante e malha uniforme ($\Delta x = \Delta y$). Isso resulta na simplificação onde a soma dos coeficientes vizinhos é igual ao coeficiente central.

$$\frac{1}{4}(\pi) \Delta x = (1.55)T = \Delta x m + f$$

como $\sin(\pi x)$.

Por tanto temos que discretizar a equação da temperatura para cada volume, conforme equação no cap 5 a 5.7 a 5.14 do material, assim temos

$$a_p T_p = a_E T_E + a_W T_W + a_N T_N + a_S T_S + b_p \quad (1)$$

Assim temos que para um volume b_p interno da malha

$$a_E = a_W + a_N + a_S$$

$$a_p = 4$$

Logo temos que:

$$4 T_p = T_E + T_W + T_N + T_S \quad (2)$$

$$T_p = \frac{T_E + T_W + T_N + T_S}{4} \quad (3)$$

Já na borda superior ~~temos~~ temos

$$T(2, j) = \sin(\pi x)$$



Na face superior entre P e o volume fictício N a temperatura ~~será~~ será

$$T_{face} = \frac{T_p + T_N}{2}$$

Entretanto pela condição de contorno deve ser igual a temperatura de parede

$$T_{face} = T_{parede} = \sin(\pi x)$$

$$T_N = 2 \sin(\pi x) - T_p \quad (4)$$

Figura 3: Dedução da equação para nós internos, resultando na média aritmética dos 4 vizinhos.

2.3. Tratamento da Condição de Contorno

Para tratar a condição de contorno prescrita (fonte de calor), utiliza-se a técnica de volumes fictícios

Agora substituindo a equação 4 em 2 termos

$$4T_p = T_E + T_W + (2 \operatorname{sen}(\pi x) - T_p) + T_S$$

$$4T_p = T_E + T_W + T_S + (2 \operatorname{sen}(\pi x)) - T_p$$

$$5T_p = T_E + T_W + T_S + 2 \operatorname{sen}(\pi, x)$$

$$T_p = \frac{T_E + T_W + T_S + 2 \operatorname{sen}(\pi, x)}{5}$$

Para as demais bordas

$$T(0, y), T(x, 0), T(1, y) = 0$$

$$T_p = 0$$

Figura 4: Dedução do coeficiente modificado (divisor 5) utilizando volumes fictícios (Adaptação para o problema atual).

2.4. Resumo do Algoritmo (Gauss-Seidel)

Para a solução do sistema de equações algébricas, optou-se pelo método iterativo de Gauss-Seidel. O algoritmo varre a malha atualizando a temperatura T_P com base nos valores mais recentes dos vizinhos.

Agora usando Gauss Seidel para modelar o nosso modelo numérico temos

Para os volumes internos

$$T_{i,j}^{(k+1)} = \frac{T_{i+1,j}^{(k)} + T_{i-1,j}^{(k+1)} + T_{i,j+1}^{(k)} + T_{i,j-1}^{(k+1)}}{4}$$

Para a borda direita

$$T_{1,j}^{(k+1)} = \frac{T_{1,j}^{(k+1)} + T_{2,j}^{(k+1)} + T_{3,j}^{(k+1)} + 2 \sin(\pi x f)}{5}$$

Para as demais bordas

$$T = 0$$

Para volume superior direito e volume inferior direito

$$T_P = \frac{T_W + T_N + 0 + 2 \sin \pi (x f)}{5}$$

$$T_P = \frac{T_W + T_N + 0 + 2 \sin (\pi x f)}{5}$$

Figura 5: Resumo das equações iterativas implementadas no código para varredura do domínio.

2.5. Solução Analític

Para fins de validação dos resultados numéricos, deduziu-se a solução exata da equação nas condições de contorno apresentadas. O método utilizado foi a Separação de Variáveis, assumindo que $T(x, y) = X(x)Y(y)$.

O processo inicia-se dividindo a EDP em duas EDOs e aplicando as condições homogêneas nas bordas $x = 0$, $x = 1$ e $y = 0$.

1

Solução analítica

Considerando a equação

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

Com as condições de contorno

$$T(0, y) = 0$$

$$T(1, y) = 0$$

$$T(x, 0) = 0$$

$$T(x, 1) = \operatorname{sen}(x) \quad (2)$$

Procuramos uma solução na forma

$$T(x, y) = X(x)Y(y) = 0 \quad (3)$$

Dividindo por $X(x)Y(y)$ ($x \neq y$)

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0 \quad (4)$$

$$-\lambda = \frac{Y''(y)}{Y(y)} \quad \lambda = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad (5)$$

ENGRANARIA

Figura 6: Início da dedução analítica: separação de variáveis e aplicação das condições de contorno homogêneas.

Em seguida, determina-se os autovalores λ_n e as autofunções associadas para $X(x)$ e $Y(y)$, resultando em uma solução na forma de série infinita.

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

(6)

Das condições de contorno em x

$$T(0; y) = 0 \Rightarrow X(0) Y(y) = 0 \Rightarrow X(0) = 0 \quad (7)$$

$$\lambda_n = (n\pi)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

$$X_n(x) = \sin(n\pi x) \quad (9)$$

$$\lambda_n = (n\pi)^2 \quad y$$

$$Y_n''(y) - (n\pi)^2 Y_n(y) = 0 \quad (10)$$

com solução geral

$$Y_n(y) = A_n \sin(n\pi y) + B_n \cosh(n\pi y) \quad (11)$$

Aplicando a condição geral temos, $y=0$

$$T(x, 0) = 0 \quad X_n(x) Y_n(0) = 0 \quad (12)$$

$$Y_n(0) = A_n \sin(0) + B_n \cosh(0) = B_n \cdot 1$$

logo

$$Y_n(y) = A_n \sinh(n\pi y) \quad (13)$$

Como uma série

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh(n\pi y) \sin(n\pi x) \quad (14)$$

animativa

Figura 7: Determinação dos autovalores e da solução geral em série.

Por fim, aplica-se a condição de contorno não-homogênea na face superior ($T(x, 1) = \sin(\pi x)$) para encontrar os coeficientes da série. Devido à natureza da função seno, a série colapsa em um único termo (modo fundamental $n = 1$).

Então na face superior temos $T(x, 1) = \sin(\pi x)$

$$T(x, 1) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh(n\pi) \sin(n\pi x) = \sin(\pi x) \quad (15)$$

$$\sin(\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\pi x) \quad (16)$$

$$B_n = A_1 \sinh(n\pi) \quad (17)$$

$$\text{Logo } A_1 \sinh(\pi) = 1 \Rightarrow A_1 = \frac{1}{\sinh(\pi)} \quad (18)$$

$$A_n \sin(n\pi) = 0 \Rightarrow A_n = 0 \quad (19)$$

Substituindo temos (18 em 14)

$$T(x, y) = A_1 \sinh(\pi y) \sin(\pi x) = \frac{\sinh(\pi y)}{\sinh(\pi)}$$

$$T(x, y) = \frac{\sinh(\pi y)}{\sinh(\pi)} \cdot \sin(\pi x)$$

Solução analítica

Figura 8: Aplicação da condição da face superior e obtenção da equação final fechada.

3. Correspondência Algébrica vs. Implementação

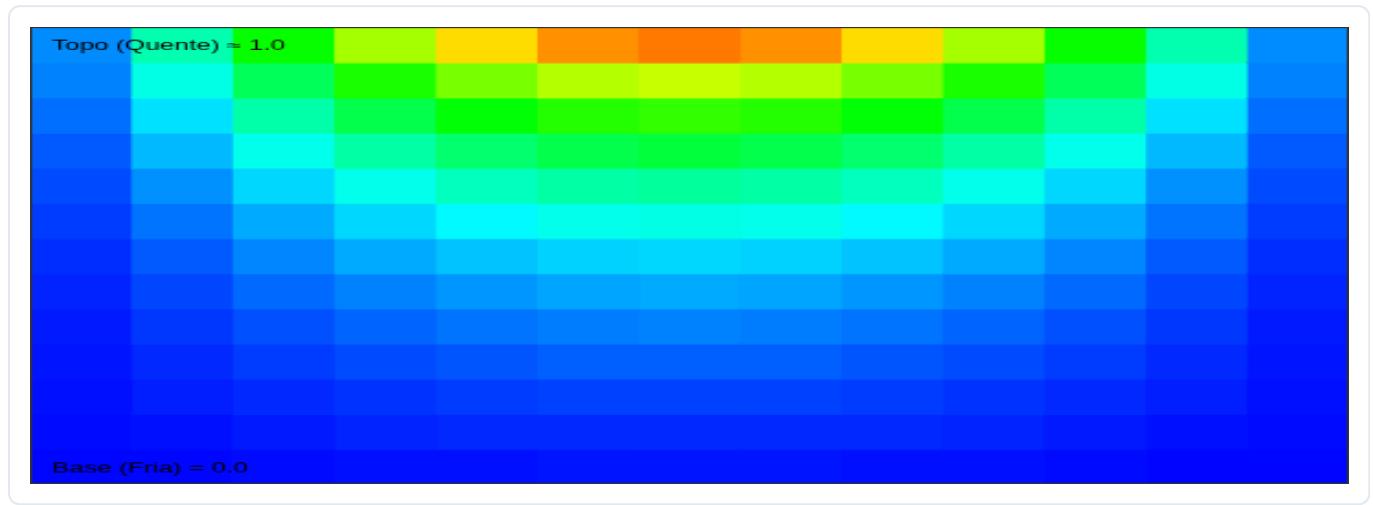
A implementação utiliza JavaScript puro. A tabela abaixo relaciona as equações deduzidas com a lógica de código utilizada no loop iterativo:

Tipo de Volume	Expressão Algébrica (Dedução)	Lógica no Código (JS)
Interno (Longe da borda superior)	$T_P^{(k+1)} = \frac{T_E^{(k)} + T_W^{(k+1)} + T_N^{(k)} + T_S^{(k+1)}}{4}$	$T[i][j] = (T[i+1][j] + T[i-1][j] + T[i][j+1] + T[i][j-1]) / 4.0$
Borda Superior ($j = Ny - 1$)	$T_P = \frac{T_E + T_W + T_S + 2\sin(\pi x)}{5}$	<pre>fonte = 2.0 * Math.sin(Math.PI * x) T[i][j] = (T[i+1][j] + T[i-1][j] + T[i][j-1] + fonte) / 5.0</pre>

4. Resultados da Simulação

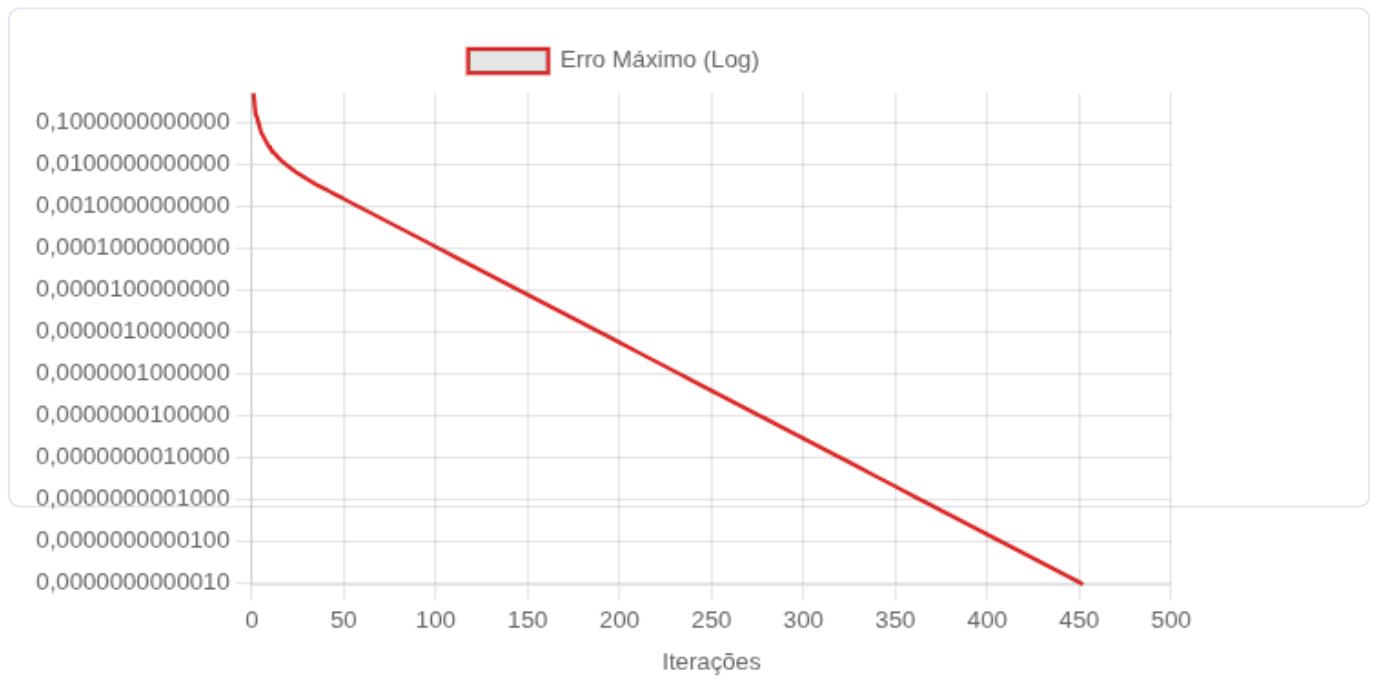
4.1. Campo de Temperatura (Visualização)

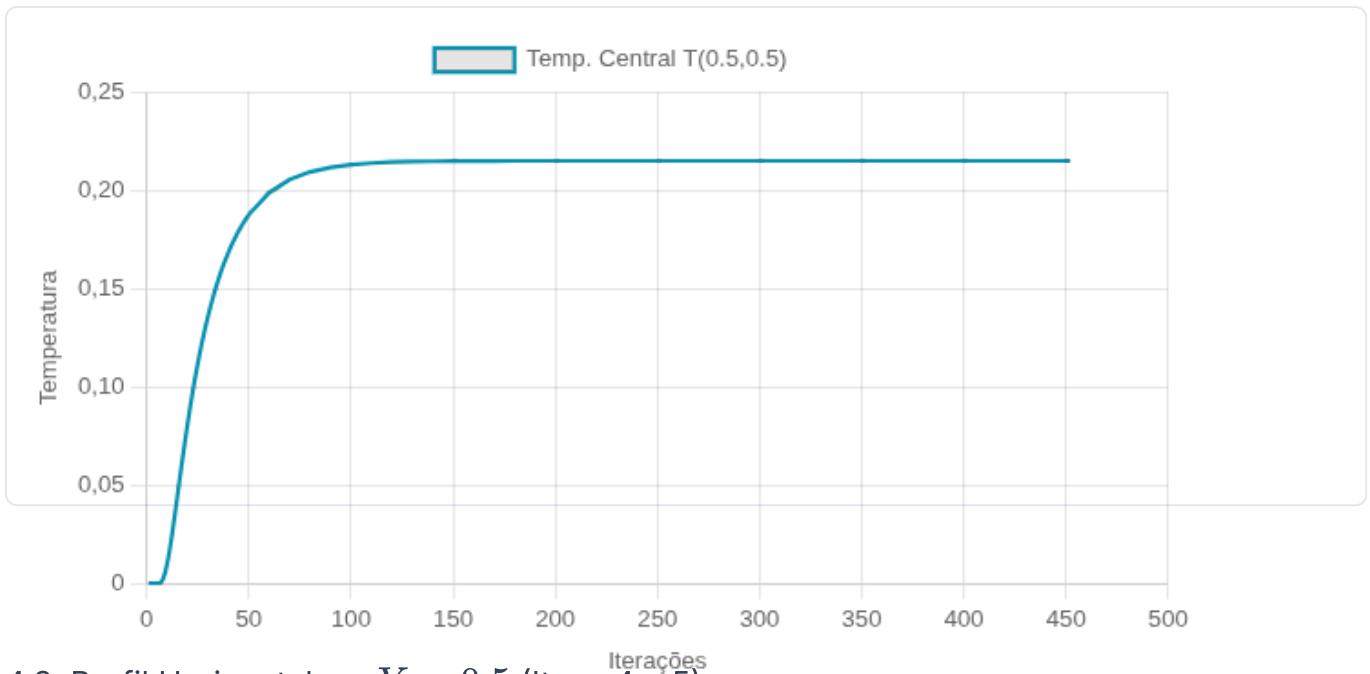
Distribuição de temperatura na placa. O gradiente parte da face superior (quente) para as demais faces (frias).



4.2. Convergência e Monitoramento (Item 1 do trabalho)

Variação da temperatura no ponto central $T(0.5, 0.5)$ e do erro máximo a cada iteração.





4.3. Perfil Horizontal em $Y = 0.5$ (Itens 4 e 5)

Comparação entre solução numérica e analítica ao longo da linha central horizontal.

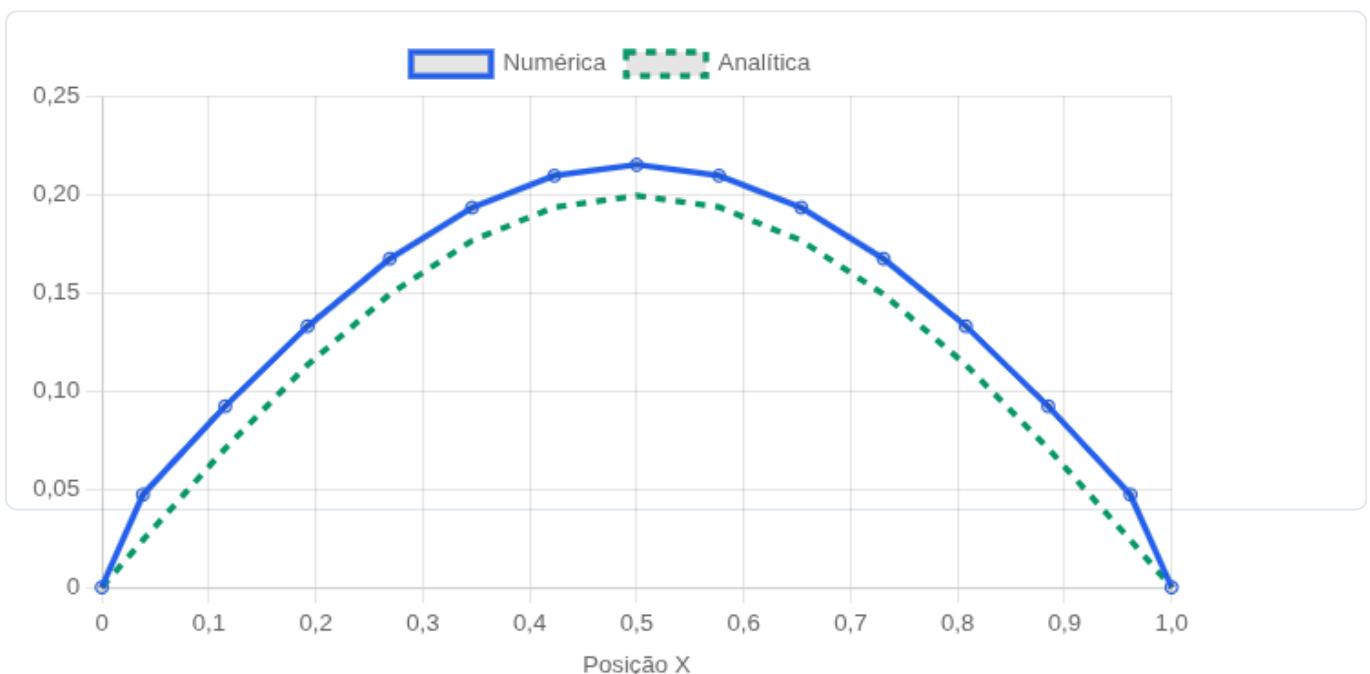


Tabela Saída em X

Esta tabela exibe os dados do Perfil Horizontal cortando a placa exatamente no meio ($Y = 0.5$). O que ela mostra: A variação da temperatura da esquerda para a direita ($0 \leq x \leq 1$) na altura média da placa.

i	x	Numérica	Analítica	Erro
BC	0.0000	0.000000	0.000000	0.00e+0

i	x	Numérica	Analítica	Erro
2	0.1154	0.092160	0.070662	2.15e-2
4	0.2692	0.167195	0.149155	1.80e-2
6	0.4231	0.209483	0.193478	1.60e-2
8	0.5769	0.209483	0.193478	1.60e-2
10	0.7308	0.167195	0.149155	1.80e-2
12	0.8846	0.092160	0.070662	2.15e-2
BC	1.0000	0.000000	0.000000	0.00e+0

4.4. Perfil Vertical em $X = 0.5$ (Itens 2 e 3)

Comparação entre solução numérica e analítica ao longo da linha central vertical.

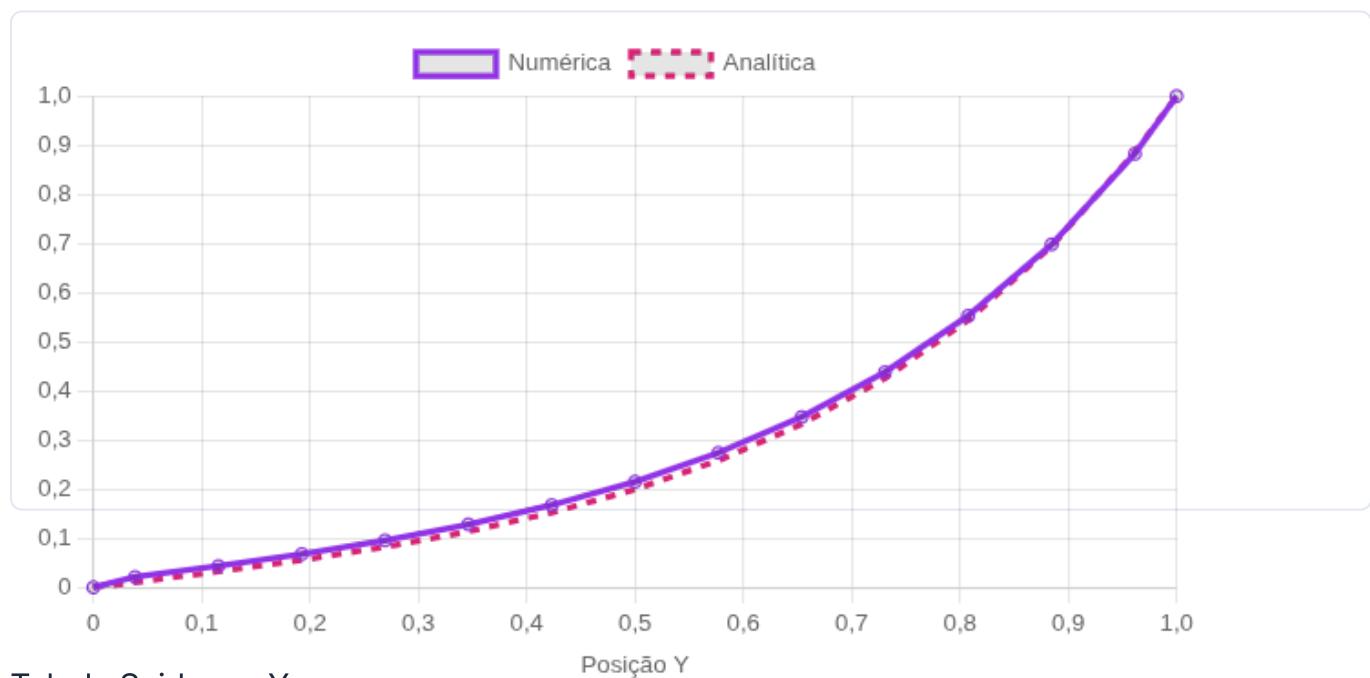


Tabela Saída em Y

Esta tabela exibe os dados do Perfil Vertical cortando a placa exatamente no meio ($X = 0.5$). O que ela mostra: A variação da temperatura de baixo para cima ($0 \leq y \leq 1$) na largura média da placa.

j	y	Numérica	Analítica	Erro
BC	0.0000	0.000000	0.000000	0.00e+0
2	0.1154	0.043344	0.032080	1.13e-2
4	0.2692	0.095540	0.082289	1.33e-2
6	0.4231	0.167326	0.152098	1.52e-2
8	0.5769	0.273751	0.258133	1.56e-2
10	0.7308	0.437972	0.425652	1.23e-2
12	0.8846	0.697919	0.694554	3.36e-3
BC	1.0000	1.000000	1.000000	0.00e+0

4.5. Médias e Taxas de Transferência (Itens 6, 7 e 8)

ITEM 6: TEMPERATURA MÉDIA DA PLACA

Numérica: **0.201298** °C | Analítica: **0.185854** °C | Erro: **1.54e-2**

ITEM 7: TAXA DE CALOR NO CONTORNO LESTE (RESFRIADO)

Numérica: **1.542568** W/m | Analítica: **0.917152** W/m | Erro: **6.25e-1**

ITEM 8: TAXA DE CALOR NO CONTORNO NORTE (FONTE)

Numérica: **-1.730053** W/m | Analítica: **-2.007484** W/m | Erro: **2.77e-1**

5. Listagem do Programa (Item 9)

Código JavaScript completo utilizado para a simulação, traduzido e comentado.

```
(function() {
    // Variáveis globais para os gráficos (para poder destruir/recriar)
    let graficoConv = null, graficoCentro = null, graficoProfX = null, graficoProfY = null;

    // --- SOLUÇÃO ANALÍTICA (FONTE NO TOPO) ---
    //  $T(x,y) = \sin(\pi \cdot x) \cdot \sinh(\pi \cdot y) / \sinh(\pi)$ 
    function solucaoAnalitica(x, y) {
        return (Math.sin(Math.PI * x) * Math.sinh(Math.PI * y)) / Math.sinh(Math.PI);
    }

    // Média Analítica: Integral dupla de  $T(x,y)$  dx dy
    // Integral  $\sin(\pi \cdot x)$  de 0 a 1 =  $2/\pi$ 
    // Integral  $\sinh(\pi \cdot y)$  de 0 a 1 =  $(\cosh(\pi) - 1)/\pi$ 
    // Constante  $1/\sinh(\pi)$ 
    // Resultado:  $(2 * (\cosh(\pi) - 1)) / (\pi^2 * \sinh(\pi))$ 
    function mediaAnalitica() {
        return (2.0 * (Math.cosh(Math.PI) - 1.0)) / (Math.pow(Math.PI, 2) * Math.sinh(Math.PI));
    }

    // Fluxo Leste ( $x=1$ ): Integral de  $-k * dT/dx$  dy de 0 a 1
    //  $dT/dx = \pi * \cos(\pi \cdot x) * \sinh(\pi \cdot y) / \sinh(\pi)$ 
    // Em  $x=1$ :  $\cos(\pi) = -1$ . Logo  $dT/dx = -\pi * \sinh(\pi \cdot y) / \sinh(\pi)$ 
    // Fluxo  $q' = -k * (-\pi * \dots) = k * \pi * \sinh(\pi \cdot y) / \sinh(\pi)$ 
    // Integral dy de  $\sinh(\pi \cdot y)$  é  $(\cosh(\pi) - 1)/\pi$ 
    // Integral Total =  $k * (\cosh(\pi) - 1) / \sinh(\pi) = k * \tanh(\pi/2)$ 
    function fluxoLesteAnalitico(k=1.0) {
        return k * Math.tanh(Math.PI / 2.0);
    }

    // Fluxo Norte ( $y=1$ ): Integral de  $-k * dT/dy$  dx de 0 a 1
    //  $dT/dy = \pi * \sin(\pi \cdot x) * \cosh(\pi \cdot y) / \sinh(\pi)$ 
    // Em  $y=1$ :  $\cosh(\pi)$ . Logo  $dT/dy = \pi * \sin(\pi \cdot x) * \coth(\pi)$ 
    // Fluxo  $q' = -k * \pi * \sin(\pi \cdot x) * \coth(\pi)$ 
    // Integral dx de  $\sin(\pi \cdot x)$  é  $2/\pi$ 
    // Integral Total =  $-k * 2 * \coth(\pi)$ 
    function fluxoNorteAnalitico(k=1.0) {
        return -k * 2.0 * (1.0 / Math.tanh(Math.PI));
    }

    // Função Principal chamada pelo botão na UI
    window.executarSimulacaoPeloUI = function() {
        // Obter valores dos inputs do HTML
        const Nx = parseInt(document.getElementById('entrada_Nx').value);
        const Ny = parseInt(document.getElementById('entrada_Ny').value);
        const maxIter = parseInt(document.getElementById('entrada_MaxIter').value);
        const tol = parseFloat(document.getElementById('entrada_Tol').value);

        // 1. Executar o Solver Numérico
        const resultado = executarSolver(Nx, Ny, maxIter, tol);

        // 2. Gerar Gráficos de Convergência (Item 1 do PDF)
        plotarConvergencia(resultado.histErro);
        plotarHistoricoCentro(resultado.histCentro);
    }
})
```

```

// 3. Gerar Perfis e Tabelas (Itens 2, 3, 4, 5 do PDF)
gerarPerfilHorizontal(resultado.T, Nx, Ny);
gerarPerfilVertical(resultado.T, Nx, Ny);

// 4. Desenhar Mapa de Calor (Heatmap)
desenharMapaCalor(resultado.T, Nx, Ny);

// 5. Calcular Integrais e Fluxos (Itens 6, 7, 8 do PDF)
calcularIntegrals(resultado.T, Nx, Ny);

// 6. Exibir o próprio código fonte na página (Item 9 do PDF)
document.getElementById('exibicao-codigo-fonte').textContent = document.getElementById('exibicao-codigo-fonte').innerHTML;
}

// Solver Gauss-Seidel
function executarSolver(Nx, Ny, maxIter, tol) {
    // Inicializar matriz T com zeros
    let T = Array(Nx).fill(0).map(()=>Array(Ny).fill(0.0));
    let erroMax = 1.0, iteracao = 0;
    let histErro = [], histCentro = [];

    let meioX = Math.floor(Nx/2);
    let meioY = Math.floor(Ny/2);

    // Loop Iterativo
    while(iteracao < maxIter && erroMax > tol) {
        erroMax = 0.0;
        // Varredura da malha
        for(let i=0; i<Nx; i++) {
            for(let j=0; j<Ny; j++) {
                let T_antigo = T[i][j];

                // Vizinhos (Se forá do domínio, T=0, exceto topo que é tratado na eq)
                let Tw = (i > 0) ? T[i-1][j] : 0.0;      // Oeste
                let Te = (i < Nx-1) ? T[i+1][j] : 0.0;    // Leste
                let Ts = (j > 0) ? T[i][j-1] : 0.0;      // Sul
                let Tn = (j < Ny-1) ? T[i][j+1] : 0.0;    // Norte

                let T_novo = 0;

                // Condição de Contorno no Topo (j = Ny-1)
                // Fonte: T(x,1) = sin(pi*x)
                if(j === Ny-1) {
                    let x = (i + 0.5) / Nx;
                    let fonte = 2.0 * Math.sin(Math.PI * x);
                    // Eq. deduzida: (Tw + Te + Ts + fonte) / 5
                    // Nota: Tn é o vizinho fictício incorporado na fonte
                    T_novo = (Tw + Te + Ts + fonte) / 5.0;
                } else {
                    // Volumes Internos
                    // Eq. deduzida: (Tw + Te + Tn + Ts) / 4
                    T_novo = (Tw + Te + Tn + Ts) / 4.0;
                }

                T[i][j] = T_novo; // Atualização Gauss-Seidel (imediata)

                let erroLocal = Math.abs(T_novo - T_antigo);
                if(erroLocal > erroMax) erroMax = erroLocal;
            }
        }
    }
}

```

```

    }
    iteracao++;

    // Salvar dados para os gráficos
    // Salva apenas a cada 10 iterações ou no final para performance
    if(iteracao < 50 || iteracao % 10 === 0 || erroMax <= tol) {
        histErro.push({x: iteracao, y: erroMax});
        histCentro.push({x: iteracao, y: T[meioX][meioY]});
    }
}

return {T, histErro, histCentro, iteracao};
}

// Cálculo das integrais (Média e Fluxos)
function calcularIntegrais(T, Nx, Ny) {
    let dx = 1.0/Nx, dy = 1.0/Ny;
    let k = 1.0; // Condutividade térmica

    // --- Item 6: Temperatura Média (Regra do Retângulo) ---
    let somaT = 0;
    for(let i=0; i<Nx; i++) {
        for(let j=0; j<Ny; j++) {
            somaT += T[i][j];
        }
    }
    // Área total = 1.0 * 1.0 = 1.0
    let mediaNum = (somaT * dx * dy) / 1.0;
    let mediaAna = mediaAnalitica();
    let erroMedia = Math.abs(mediaNum - mediaAna);

    document.getElementById('res-media').innerHTML =
        `Numérica: <b>${mediaNum.toFixed(6)}</b> °C | Analítica: <b>${mediaAna.toFixed(6)}`;

    // --- Item 7: Fluxo Leste (x=1) ---
    // Fronteira fria (T=0).
    // q'' = -k dT/dx. Usando UDS (Two-point backward): dT/dx ~ (T_parede - T_P) / (dx/2)
    // T_parede = 0. T_P = T[Nx-1][j]. Distância = dx/2.
    let fluxoLeste = 0;
    for(let j=0; j<Ny; j++) {
        let T_parede = 0.0;
        let T_P = T[Nx-1][j];
        let gradiente = (T_parede - T_P) / (dx/2.0);
        fluxoLeste += (-k * gradiente) * dy; // Integral de q'' dy
    }
    let flAna = fluxoLesteAnalitico();
    let errFL = Math.abs(fluxoLeste - flAna);

    document.getElementById('res-fluxo-leste').innerHTML =
        `Numérica: <b>${fluxoLeste.toFixed(6)}</b> W/m | Analítica: <b>${flAna.toFixed(6)}`;

    // --- Item 8: Fluxo Norte (y=1) ---
    // Fronteira quente (T=sin(pi*x)).
    // q'' = -k dT/dy. Usando UDS: dT/dy ~ (T_parede - T_P) / (dy/2)
    // T_parede = sin(pi*x). T_P = T[i][Ny-1].
    let fluxoNorte = 0;
    for(let i=0; i<Nx; i++) {
        let x = (i + 0.5) * dx;
        let T_parede = Math.sin(Math.PI * x);
        let T_P = T[i][Ny-1];
        let gradiente = (T_parede - T_P) / (dy/2.0);
    }
}

```

```

    fluxoNorte += (-k * gradiente) * dx; // Integral de q'' dx
}

let fnAna = fluxoNorteAnalitico();
let errFN = Math.abs(fluxoNorte - fnAna);

document.getElementById('res-fluxo-norte').innerHTML =
`Numérica: <b>${fluxoNorte.toFixed(6)}</b> W/m | Analítica: <b>${fnAna.toFixed(6)}</b> W/m
`}

// Gerar Perfil Horizontal (T vs X)
function gerarPerfilHorizontal(T, Nx, Ny) {
    let meioY = Math.floor(Ny/2);
    let coordY = (meioY + 0.5) / Ny;
    let htmlTabela = "<table style='width:100%><thead><tr><th>i</th><th>x</th><th>Numér
    let dadosNum = [], dadosAna = [];

    // Adicionar contorno esquerdo (x=0, T=0)
    htmlTabela += `<tr><td>BC</td><td>0.0000</td><td>0.000000</td><td>0.000000</td><td>0.
    dadosNum.push({x:0, y:0}); dadosAna.push({x:0, y:0});

    for(let i=0; i<Nx; i++) {
        let x = (i + 0.5) / Nx;
        let valNum = T[i][meioY];
        let valAna = solucaoAnalitica(x, coordY);
        dadosNum.push({x:x, y:valNum}); dadosAna.push({x:x, y:valAna});
        htmlTabela += `<tr><td>${i+1}</td><td>${x.toFixed(4)}</td><td>${valNum.toFixed(6)}</td><td>${valAna.toFixed(6)}</td></tr>
    }

    // Adicionar contorno direito (x=1, T=0)
    htmlTabela += `<tr><td>BC</td><td>1.0000</td><td>0.000000</td><td>0.000000</td><td>0.
    dadosNum.push({x:1, y:0}); dadosAna.push({x:1, y:0});

    document.getElementById('saida-tabela-x').innerHTML = htmlTabela;

    const ctx = document.getElementById('graficoPerfilX').getContext('2d');
    if(graficoProfX) graficoProfX.destroy();
    graficoProfX = new Chart(ctx, {
        type: 'line',
        data: { datasets: [
            { label:'Numérica', data:dadosNum, borderColor:'#2563eb', pointRadius:3 },
            { label:'Analítica', data:dadosAna, borderColor:'#059669', borderDash:[5,5], }
        ]},
        options: { responsive:true, maintainAspectRatio:false, scales:{x:{type:'linear'},
    });

}

// Gerar Perfil Vertical (T vs Y)
function gerarPerfilVertical(T, Nx, Ny) {
    let meioX = Math.floor(Nx/2);
    let coordX = (meioX + 0.5) / Nx;
    let htmlTabela = "<table style='width:100%><thead><tr><th>j</th><th>y</th><th>Numér
    let dadosNum = [], dadosAna = [];

    // Contorno Inferior (y=0, T=0)
    dadosNum.push({x:0, y:0}); dadosAna.push({x:0, y:0});
    htmlTabela += `<tr><td>BC</td><td>0.0000</td><td>0.000000</td><td>0.000000</td><td>0.

    for(let j=0; j<Ny; j++) {
        let y = (j + 0.5) / Ny;
        let valNum = T[meioX][j];
        let valAna = solucaoAnalitica(meioX, y);
        dadosNum.push({x:y, y:valNum}); dadosAna.push({x:y, y:valAna});
        htmlTabela += `<tr><td>${j+1}</td><td>${y.toFixed(4)}</td><td>${valNum.toFixed(6)}</td><td>${valAna.toFixed(6)}</td></tr>
    }

    document.getElementById('saida-tabela-y').innerHTML = htmlTabela;
}

```

```

let valAna = solucaoAnalitica(coordX, y);
dadosNum.push({x:y, y:valNum}); dadosAna.push({x:y, y:valAna});
htmlTabela += `<tr><td>${j+1}</td><td>${y.toFixed(4)}</td><td>${valNum.toFixed(6)}`;
}

// Contorno Superior (y=1, T=sin(pi*x))
let tParede = Math.sin(Math.PI * coordX);
dadosNum.push({x:1, y:tParede}); dadosAna.push({x:1, y:tParede});
htmlTabela += `<tr><td>BC</td><td>1.0000</td><td>${tParede.toFixed(6)}</td><td>${tParede.toFixed(6)}`;

document.getElementById('saida-tabela-y').innerHTML = htmlTabela;

const ctx = document.getElementById('graficoPerfilY').getContext('2d');
if(graficoProfY) graficoProfY.destroy();
graficoProfY = new Chart(ctx, {
    type: 'line',
    data: { datasets: [
        { label:'Numérica', data:dadosNum, borderColor:'#9333ea', pointRadius:3 },
        { label:'Analítica', data:dadosAna, borderColor:'#db2777', borderDash:[5,5],
    ]},
    options: { responsive:true, maintainAspectRatio:false, scales:{x:{type:'linear'},
}};

}

// Gráfico de Convergência do Erro
function plotarConvergencia(dados) {
    const ctx = document.getElementById('graficoConvergencia').getContext('2d');
    if(graficoConv) graficoConv.destroy();
    graficoConv = new Chart(ctx, {
        type: 'line',
        data: { datasets: [{ label: 'Erro Máximo (Log)', data: dados, borderColor: '#dc2726' }],
        options: { responsive:true, maintainAspectRatio:false, scales:{ x:{type:'log'} } };
    });
}

// Gráfico do Histórico do Ponto Central
function plotarHistoricoCentro(dados) {
    const ctx = document.getElementById('graficoPontoCentral').getContext('2d');
    if(graficoCentro) graficoCentro.destroy();
    graficoCentro = new Chart(ctx, {
        type: 'line',
        data: { datasets: [{ label: 'Temp. Central T(0.5,0.5)', data: dados, borderColor: '#28a745' }],
        options: { responsive:true, maintainAspectRatio:false, scales:{ x:{type:'linear'} } };
    });
}

// Mapa de Calor (Heatmap)
function desenharMapaCalor(T, Nx, Ny) {
    const c = document.getElementById('canvasMapaCalor');
    const ctx = c.getContext('2d');
    const w = c.parentElement.clientWidth;
    const h = c.parentElement.clientHeight;
    c.width = w; c.height = h;
    const cw = w/Nx, ch = h/Ny;

    for(let i=0; i<Nx; i++) {
        for(let j=0; j<Ny; j++) {
            let val = T[i][j];
            // Escala de cor: Azul (frio) → Vermelho (quente)
            // O máximo analítico é 1.0 (seno de pi/2 * sinh/sinh)

```

```
let matiz = (1.0 - val) * 240;
ctx.fillStyle = `hsl(${matiz}, 100%, 50%)`;
// Inverter Y para desenhar de baixo para cima
ctx.fillRect(i*cw, h - (j+1)*ch, cw+1, ch+1);
}
}
// Borda
ctx.strokeStyle = "#333"; ctx.lineWidth=2; ctx.strokeRect(0,0,w,h);

// Legenda Simples
ctx.fillStyle = "black"; ctx.font = "12px sans-serif";
ctx.fillText("Topo (Quente) ≈ 1.0", 10, 20);
ctx.fillText("Base (Fria) = 0.0", 10, h - 10);
}

// Executar automaticamente ao carregar a página
setTimeout(window.executarSimulacaoPeloUI, 500);
})();
```