אלגוריתמים 2020 – תרגיל 13 (אחרון ודי)

מועד הגשה: 21.1.21 עד ל-23:00 באתר הקורס (הגשה בזוגות)

1. **(DFT)** נתון ש-$DFT_n(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = (b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$. חשבו את:

   א. $DFT_n(a_0, 0,0, \ldots, 0)$

   ב. $DFT_{2n}(a_0, 0, a_1, 0, \ldots, a_{n-1}, 0)$

   ג. $DFT_n(a_1, a_0, a_3, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_{n-2})$

   הסבירו כיצד הגעתם לתוצאה. בהסבר מספק דיו יהיה שימוש בהגדרת DFT, או הדגמה של הרצת אלגוריתם FFT על הווקטור הנתון.

2. **(קונבולוציה)**

   א. הציעו אלגוריתם שמחשב את מספר הפעמים שיכול להתקבל **כל אחד** מהערכים $\{n, n+1, \ldots, 6n\}$ כסכום התוצאות בהטלת n קוביות שונות. הוכיחו את נכונותו ונתחו את זמן הריצה שלו.

   ב. הציעו אלגוריתם שמחשב את **ההסתברות** לקבלת כל אחד מהערכים $\{n, n+1, \ldots, 6n\}$ כסכום התוצאות בהטלת n קוביות בלתי תלויות, כאשר ההסתברות לקבלת הערך 1 בקוביה ה-i-ית היא p_1^i, ההסתברות לקבלת הערך 2 בקוביה ה-i-ית היא p_2^i, וכן הלאה עד p_6^i (אין מדובר בחזקה אלא באינדקס). הוכיחו את נכונותו ונתחו את זמן הריצה שלו.

3. **(gcd)**

   א. מצאו בעזרת אלגוריתם אוקלידס x המקיים $15 \cdot x = 1 \ (mod\ 26)$.

   ב. הוכיחו כי אם a, b הם מספרים טבעיים זוגיים, אזי $\gcd(a, b) = 2 \gcd\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$.

   ג. הוכיחו כי אם a, b הם מספרים טבעיים אי-זוגיים, אזי $\gcd(a, b) = \gcd\left(\frac{a-b}{2}, b\right)$.

4. **(אלגוריתם אוקלידס)**

   א. הניחו כי $a \geq b$ שני מספרים טבעיים. הראו כי אם אלגוריתם אוקלידס מבצע k קראיטרציות (k קריאות רקורסיביות) אזי $a \geq f_{k+1}$ ו-$b \geq f_k$ כאשר f_i הוא האיבר ה-i בסדרת פיבונצ׳י.
   תזכורת: סדרת פיבונצ׳י מוגדרת כך: $f_0 = f_1 = 1$ וכמו כן $f_{k+2} = f_{k+1} + f_k$.

   ב. הסיקו כי אלגוריתם אוקלידס מבצע לכל היותר $\log_\phi(b) + O(1)$ איטרציות, כאשר $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (או בשמו המסחרי, ״חתך הזהב״).