Le Mouvement Brownien Fractionnaire appliqué à la Log-Volatilité des actifs financiers (Rough Volatility)

Réda Bensahla - Université de Lille

September 23, 2021

Sommaire

1 Introduction

1.1 L'utilisation du mouvement brownien dans les modèles financiers modernes

Dans la modélisation financière moderne, les prix ont toujours été modélisés par des martingales semi-continues, de plus, il a toujours été nécessaire de présenter certaines hypothèses, qui aujourd'hui peuvent être remises en cause, notamment :

- L'hypothèse de normalité des rendements, ceux-ci présentent en général des asymétries et des queues épaisses.
- La continuité des cours, pour cela il suffit d'observer les sauts, plus communément appelés "gaps" entre deux instants de quotations de cours.
- Mais surtout, et le plus important, l'hypothèse d'indépendance des accroissements, en effet, il s'agit ici d'ignorer l'impacts des évènements réalisés dans le passé, pour cela, Mandelbrot préconise d'utiliser le mouvement Brownien Fractionnaire à la place du mouvement Brownien.

C'est donc ce point qui nous a amené à faire cette étude sur le mouvement Brownien Fractionnaire, de plus, la Log-Volatilité étant fractionnaire l'utilisation de ce mouvement Brownien nous donne donc des modèles assez consistant, cependant, comme nous le verrons par la suite, il est assez difficile à mettre en place.

1.2 Modélisation de la volatilité

Les Logs-prix sont souvent modélisés comme des semi-martingales continues. Pour un actif donné avec un Log-Prix Y_t, ce dernier peut être modélisé comme suit :

$$dY_t = \mu_t dt + \sigma_t dWt$$

où μ_t est le terme de drift et W_t est un mouvement brownien uni-dimensionnel. Le terme σ_t représente quant à lui le processus de volatilité du modèle. D'un côté nous avons des modèles comme le modèle de Black-Scholes où la volatilité est souvent constante ou est une fonction déterministe du temps, puis d'un autre côté, nous avons des modèles à volatilité stochastiques, la volatilité σ_t est modélisée par une semi-martingale brownienne, parmi ces modèles nous pouvons citer le modèle de Heston dont voici la dynamique de la volatilité :

$$d\nu_t = \kappa(\theta - \nu_t)dt + \xi\sqrt{\nu_t}dB_t$$

Ou encore le modèle CEV ("Constant Elasticity of Variance Model") dont la volatilité est stochastique mais déterministe, sa dynamique s'écrit comme suit :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t^{\gamma} dB_t$$

1.3 Le mouvement brownien fractionnaire

1.3.1 Définition

Dans cette section, nous allons définir le mouvement brownien fractionnaire, ses propriétés, comment le simuler et enfin comment estimer l'index de Hurst (H).

Le mouvement brownien fractionnaire noté $\{B_H(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ d'exposant de Hurst $H\in]0;1]$, est l'unique processus gaussien centré, nul en zéro, dont les accroissements sont stationnaires et auto-similaires, il est défini par :

$$B_H(t) := \int_{\mathbb{R}} [(t-s)_+^{H-\frac{1}{2}} - (-s)_+^{H-\frac{1}{2}}]\mathrm{d}B(s),$$

Où : $B_H(0) = 0$ et $B(s)$ représente le mouvement brownien standard

1.3.2 Fonction de covariance et d'auto-covariance

Sa fonction de covariance $\Gamma(t,s)$ et d'autocovariance $\gamma(t,s)$ sont données par :

$$\Gamma(t,s) = \mathbb{E}[B_H(s)B_H(t)] = \frac{C_H}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} + |t-s|^{2H}))$$

$$\gamma(t,s) = \frac{C_H}{2}(|t-s-1|^{2H} - 2|t-s|^{2H} + |t-s+1|^{2H}))$$

où

$$C_H = Var[B_H(1)]$$

Lorsque $C_H = 1$ ce processus est appelé Mouvement Brownien Fractionnaire standard, de plus lorsque H $= \frac{1}{2}$, le mouvement brownien fractionnaire correspond à un mouvement brownien standard
Le comportement du mouvement brownien fractionnaire dépend donc de ce paramètre H :

- Lorsque $H < \frac{1}{2}$ les trajectoires sont assez irrégulières (comparativement au mouvement brownien standard).
- Lorsque $H > \frac{1}{2}$ les trajectoires sont plus régulières, on constate l'effet de longue mémoire.

1.3.3 Simulation du mouvement brownien fractionnaire

Nous allons donc présenter ici une méthode de simulation du mouvement brownien fractionnaire : La méthode de Cholesky

Méthode de Cholesky Il s'agit ici d'une méthode qui est exacte en théorie, mais qui n'est malheureusement pas très utile en pratique car son execution nécessite beaucoup de temps.

Posons Γ la matrice de covariance du mouvement brownien discrétisé aux instants $\frac{i}{n}$, pour $i = 0, \ldots, n-1$.
La méthode de Cholesky consiste à déduire Γ' de Γ en supprimant la première ligne et la première colonne, la matrice Γ' est symétrique définie positive et admet donc une décomposition de Cholesky $\Gamma' = LL^t$ où L est est une matrice triangulaire inférieure.

Par la suite, on effectue le produit matriciel LZ où Z est un vecteur de $n-1$ variables aléatoires indépendantes gaussiennes centrées et réduite, le vecteur LZ est un vecteur gaussien centré et on a : $\mathbb{E}[(LZ)(LZ)^t] = \Gamma'$

Ainsi, le vecteur $B_H = (0, (LZ)^t)^t$ représente une trajectoire du mouvement brownien discrétisé.

1.3.4 Quelques simulations du mouvement brownien fractionnaire ...

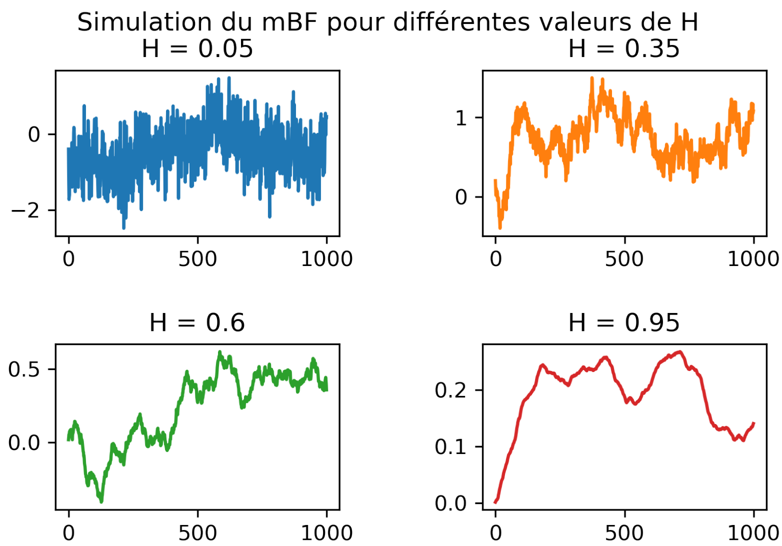

Figure 1 – Simulation du mouvement brownien fractionnaire pour différentes valeurs de H

1.4 La volatilité rugueuse

1.4.1 Définition

Les différents modèles historiques dans la modélisation financière moderne proposent deux approches concernant le processus de volatilité σ_t :

- Premièrement, des trajectoires assez régulières (constantes ou déterministes), dans le cas du modèle de Black-Scholes standard.
- Deuxièmement, dans le cas des modèles à volatilité locales ou stochastiques, comme le modèle de Heston, les trajectoires de volatilité modélisées correspondaient pratiquement à celles du mouvement brownien standard.

Dans l'article de Comte et Renault, les auteurs proposent, en partant du fait que la volatilité est un processus à mémoire-longue, de modéliser la log-volatilité en utilisant un mouvement brownien fractionnaire avec pour paramètre $H \in]\frac{1}{2}, 1[$, ce modèle est appelé Fractional Stochastic Volatility (FSV)

Dans l'article de Gatheral, Jaisson et Rosenbaum, un modèle plus complexe est proposé, le Rough Fractional Stochastic Volatility (RFSV), celui-ci est le même que le modèle FSV mais en prenant $H \in]0; \frac{1}{2}[$, nous détaillerons ces modèles dans la section ().

Nous utiliserons par la suite le mouvement brownien fractionnaire afin de modéliser les incréments de la log-volatilité, en partant du principe que les incréments stationnaires du mouvement brownien fractionnaire satisfont, pour tout $t \in \mathbb{R}, \Delta \geq 0, q > 0$:

$$\mathbb{E}[|B^H_{t+\Delta} - B^H_t|^q] = K_q \Delta^{qH}$$

Lorsque $H > \frac{1}{2}$, les incréments du mouvement brownien fractionnaire sont positivement corrélés et montre un effet de mémoire longue, en effet, la trajectoire de B^H_{t+1} dépend de B^H_t, et on a donc :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} Cov[W^H_1, W^H_k - W^H_{k-1}] = +\infty$$

En effet, $Cov[W^H_1, W^H_k - W^H_{k-1}]$ est de l'ordre k^{2H-2} avec $k \longrightarrow \infty$

Où K_q représente le moment d'ordre q de la valeur absolue d'une variable gaussienne centrée et réduite ; Δ représente la variation temporelle.

L'approche de Gatheral et Rosenbaum est de partir du principe que l'on a accès à différentes observations du processus de volatilité σ_t et de découper les instants de volatilités sur $[0; T]$ comme suit : $\sigma_0, \ldots, \sigma_\Delta, \ldots, \sigma_{k\Delta}, \ldots : k \in [0, N]$, où $N = \lfloor T/\Delta \rfloor$.

On définit donc, pour $q \geq 0$:

$$m(q, \Delta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} |log(\sigma_{k\Delta}) - log(\sigma_{(k-1)\Delta})|^q$$

1.4.2 Estimation de l'index de Hurst H

La méthode d'estimation du paramètre H proposée par Gatheral, Jaisson et Rosenbaum se construit comme suit :

Il faut comprendre le comportement de la quantité $\frac{log\ m(q,\Delta)}{log(\Delta)}$, on s'aperçoit que cette relation est linéaire, à un coefficient ζ_q près, on s'aperçoit (cf Figure 2) que pour tout q : $m(q, \Delta) \propto \Delta^{\zeta_q}$

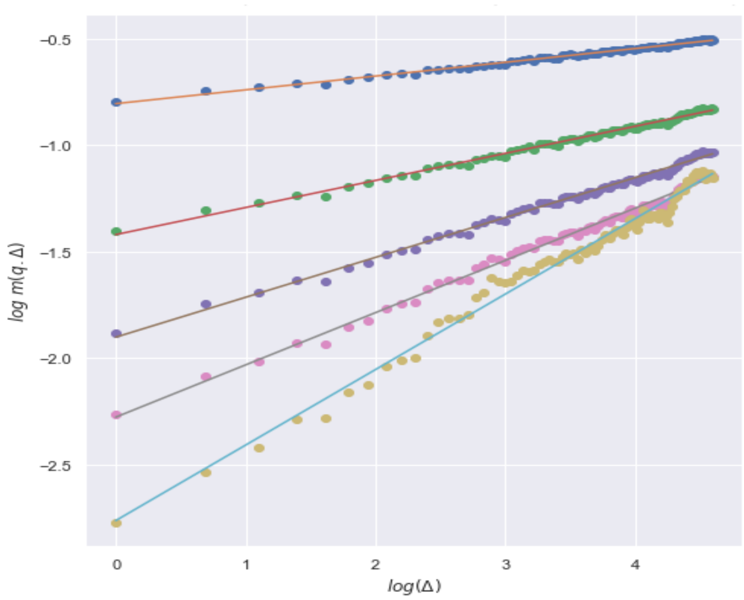

FIGURE 2 – Relation entre $log(m(q, \Delta))$ et $log(\Delta)$; Calculé sur l'indice CAC 40

Enfin il s'agit d'étudier le comportement de ζ_q en fonction de q, nos résultats nous montrent qu'il existe donc une relation linéaire entre ζ_q et q, de ce résultat est déduit la pente la droite qui correspond donc au paramètre H (cf Figure 3), et on déduit donc la relation d'échelle monofractal suivante :

$$\zeta_q = qH$$

Il convient de remarquer que H varie très peu en fonction du temps.

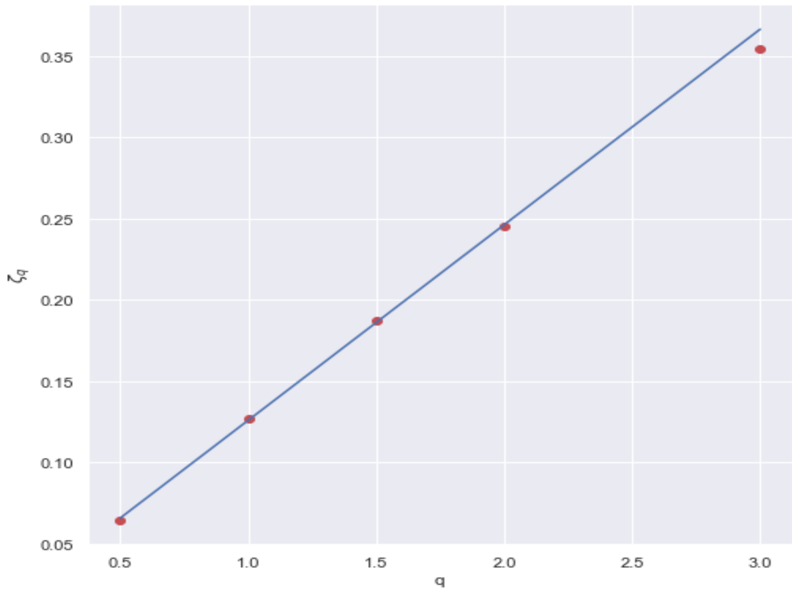

FIGURE 3 – Relation entre ζ_q et q

1.4.3 Application et estimation du paramètre de Hurst H sur d'autres indices

On applique la même méthode sur différentes volatilités de différents indices, les résultats sont les suivants :

	Indices	Estimation du paramètre H	Estimation du paramètre nu
0	.FCHI	0.122568	0.320464
1	.AEX	0.133145	0.320414
2	.STOXX50E	0.100548	0.397587
3	.BFX	0.125937	0.306290
4	.IBEX	0.112744	0.314685
5	.GDAXI	0.122359	0.331459
6	.AORD	0.071875	0.459212
7	.FTSE	0.109180	0.365529
8	.MXX	0.079091	0.414202
9	.IXIC	0.123072	0.350766
10	.SPX	0.131715	0.381304
11	.RUT	0.110748	0.387228
12	.SSMI	0.149400	0.278083
13	.DJI	0.123347	0.390174
16	.KS11	0.102043	0.319863
17	.BVSP	0.127826	0.333823
18	.HSI	0.084487	0.327221
19	.KSE	0.099285	0.444501
20	.N225	0.105592	0.372272
21	.SSEC	0.105825	0.360319
22	.OSEAX	0.107394	0.369890
23	.GSPTSE	0.110107	0.391804
24	.SMSI	0.109951	0.335748
25	.OMXHPI	0.107753	0.356045
26	.OMXSPI	0.116433	0.354460
27	.OMXC20	0.098222	0.364126
29	.FTMIB	0.114010	0.345525

FIGURE 4 – Estimation du paramètre H de différents indices

1.5 Équations Différentielles Stochastiques dirigées par un mBF

Dans cette section nous allons nous intéresser à la résolution théorique de certaines EDS ou lorsque la solution théorique n'est pas atteignable, nous présenterons un schéma de résolution numérique (Schéma de Milstein). Enfin, nous parlerons des équations dirigés par le mouvement brownien fractionnaire tels que le processus d'Ornstein-Uhlenbeck, le modèle CIR ou encore le modèle de Black Scholes fractionnaire.

1.5.1 Présentation sous la forme différentielle et sous la forme intégrale

L'équation différentielle stochastique dirigés par un mouvement brownien fractionnaire est donnée par :

$$dY_t = f(Y_t, t)dt + g(Y_t, t)dB_t^H$$

Où B_t^H est un mouvement brownien fractionnaire standard.
Une présentation alternative, sous forme d'intégrale :

$$Y_t = Y_s + \int_s^t f(Y_u, u)du + \int_s^t g(Y_u, u)dB_u^H \tag{1}$$

Pour le cas où $H = \frac{1}{2}$ l'intégrale stochastique de l'équation (1) est une martingale locale, ainsi le le processus Y_t est, au minimum, une semi-martingale, ainsi la formule d'Itô est applicable.
Cependant, dans le cas où $H \neq \frac{1}{2}$ il est nécessaire de discuter les cas en fonction de H :

- Dans le cas où $H > \frac{1}{2}$ sous certaines conditions de régularité, on peut définir l'intégrale de Stieltjes.
- Dans le cas où $H \in]\frac{1}{4}; \frac{1}{2}[$ on pourrait définir une notion de chemins rugueux pour définir des intégrales stochastiques fractionnaires.

1.5.2 Chemins rugueux

1.5.3 Schéma numérique de Milstein

Une EDS ne possède pas souvent une solution théorique explicite (formule fermée), et il est donc parfois nécessaire d'avoir recours à des Schémas numérique de calcul, dans le cas où nous avons une EDS dirigée par un mouvement brownien standard, il peut être judicieux d'utiliser un Schéma numérique d'Euler.

Le Schéma de Milstein est valable pour tout $H \in]0; 1[$, sa formule est donnée par :

$$\begin{aligned}\chi(t_{i+1}) = \chi(t_i) + f(\chi(t_i), ti)\Delta t + g(\chi(t_i), t_i)\Delta B_i^H \\ + \frac{1}{2} g(\chi(t_i), t_i) g\prime(\chi(t_i), ti)[(\Delta B_i^H)^2 - (t_{i+1}^{2H} - t_i^{2H})] + \epsilon_i \quad (1)\end{aligned}$$

ϵ_i représente un résidu (différence entre la solution théorique et la solution numérique donnée par la solution numérique de Milstein)

On peut donner une version plus courte et plus pratique de la formule, en partant du principe que : $t_{i+1}^{2H} = (t_i + \Delta t) \approx t_i^{2H} + 2Ht_i^{2H-1}\Delta t$

Ce qui nous donne donc :

$$\begin{aligned}\chi(t_{i+1}) = \chi(t_i) + f(\chi(t_i), ti) - g(\chi(t_i), t_i) g\prime(\chi(t_i), t_i) H t_i^{2H-1})\Delta t \\ + g(\chi(t_i), t_i)\Delta B_i^H + \frac{1}{2} g(\chi(t_i), t_i) g\prime(\chi(t_i), t_i)(\Delta B_i^H)^2 + \epsilon_i\prime \quad (2)\end{aligned}$$

$\epsilon_i\prime$ représente le résidu, et est supérieur à ϵ_i car l'approximation de t_{i+1}^{2H} accroît cette marge d'approximation.

1.6 Modèles et Processus construits sur le mouvement brownien fractionnaire

1.6.1 Linéarisation d'équations différentielles stochastiques unidimensionnelle

Pour pouvoir avancer dans la suite de notre étude (pour pouvoir donner une solution exacte du Processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire) nous avons besoin d'introduire, suivant la présentation de [UD07], une méthode de construction de solutions théoriques.

Théorème 1 Posons :

$$dx = f(x,t)dt + g(x,t)dB^H(t) \quad (1)$$

Où $x(0) = x_0, t \geq 0, H \in (0,1)$ et $dB^H(t)$ l'incrément du mouvement brownien fractionnaire $B^H(t)$, avec f et g, deux fonctions supposées assez régulières, l'équation (1) peut s'écrire sous la forme linéaire suivante :

$$dy = (a(t)y + b(t)dt)dt + (c(t)y + e(t))dB^H(t) \quad (2)$$

Via la transformation inverse $y = h(x,t)$ avec sa dérivée partielle par rapport à x non-nulle si et seulement si on a :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial}{\partial x}(g(x,t))\frac{\partial}{\partial x}(g(x,t)L)}{\frac{\partial}{\partial x}(g(x,t)L)}\right) = 0$$

Avec $L = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{g}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f}{g} - Ht^{2H-1}\frac{\partial g}{\partial x}\right)$
Les étapes de la linéarisation sont les suivantes, et dépendent de $c(t)$ de l'équation (2) :

— Si c(t) = 0 alors on a :

$$h(x,t) = \left(\int \alpha(t)dt\right)^{-1}\left(\int \frac{1}{g(x,t)}dx\right)$$

La condition $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial}{\partial x}(g(x,t))\frac{\partial}{\partial x}(g(x,t)L)}{\frac{\partial}{\partial x}(g(x,t)L)}\right) = 0$ est bien respectée et l'équation différentielle stochastique linéaire s'écrit donc :

$$dy = \beta(t)e(t)dt + e(t)dB^H$$

avec $e(t) = \left(\int \alpha(t)dt\right)^{-1}$, α et β sont définies par identification dans l'égalité :

$$\alpha(t)y + \beta(t) = \int \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{g}\right) + \frac{f}{g} - Ht^{2H-1}\frac{\partial g}{\partial x}$$

— Si $c(t) \neq 0$ alors on a :

$$h(x,t) = e^{-M(t)\int \frac{1}{g(x,t)}dx}$$

Avec $M(t) = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(g(x,t))\frac{\partial}{\partial x}(g(x,t)L)}{\frac{\partial}{\partial x}(g(x,t)L)}$

Nous avons maintenant une forme linéaire de notre équation, il faut maintenant la résoudre en utilisant la méthode du facteur intégrant, définit comme suit :

Définition 1 La fonction $F = F(t, B^H)$ vérifiant $d(Fy) = D_1(t, B^H)dt + D_2(t, B^H)dB^H$ est un facteur intégrant pour des équations différentielles stochastiques linéaires unidimensionnelles, on peut donc écrire :

$$F(t, W^H) = exp\left(-\int^t c(s)dB^H(s) + H\int^t s^{2H-1}c^2(s)ds - \int^t a(s)ds\right)$$

Par suite, on a donc la solution de l'équation différentielle stochastique linéaire suivante :

$$y(t) = \frac{1}{F}\left(\int^t F(s)b(s)ds - 2H\int^s s^{2H-1}F(s)c(s)e(s)ds + \int^t F(s)e(s)dB^H(s) + y_0\right)$$

1.6.2 Présentation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire

Le processus de Ornstein-Ulhenbeck associé au mouvement brownien fractionnaire associé est donné par l'équation suivante :

$$dx = \theta(t)(\mu(t)(t) - x)dt + \sigma(t)dB_t^H$$

Ce processus est souvent utilisé pour modéliser des taux en finance.

1.6.3 Solution théorique excacte

Pour donner une solution théorique exacte on utilise la méthode du facteur intégrant précédemment introduit (cf section 1.6.1) dont l'expression est la suivante : $F(t) = e^{\int^t \theta(s)ds}$
On a donc la solution suivante :

$$y(t) = e^{\int^t \theta(s)ds} \left(\int^t e^{\int \theta(s)ds} \theta(s)\mu(s)ds + \int^t e^{\int \theta(s)ds} \sigma(s)dB^H(s) + y_0 \right) \quad (3)$$

Il s'agit maintenant de donner une solution numérique à (3). Pour cela, on utilise le schéma de Milstein et on a donc, pour le paramètre de Hurst H quelconque :

$$X_{j+1} = X_j + \theta(\mu - X_j)\Delta t + \sigma \Delta B_j^H$$

Quelques simulations du processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire . . .

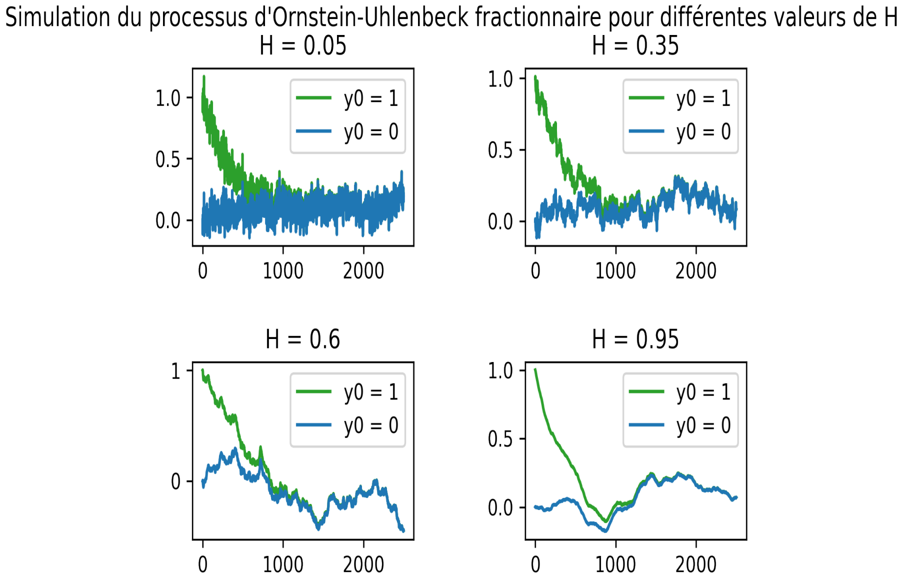

FIGURE 5 – Simulation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck pour différentes valeurs de H

1.6.4 Modèle de Cox-Ingersoll-Ross fractionnaire

Le modèle CIR dirigé par un mouvement brownien fractionnaire est défini par la dynamique suivante :

$$dx = \gamma(t)(\theta(t) - x)dt + \sigma(t)\sqrt{x}dB^H(t)$$

Ce modèle est utilisé afin de modéliser l'évolution de taux d'intérêts
On a : $f(x,t) = \gamma(t)(\theta(t) - x)$, $g(x,t) = \sigma(t)\sqrt{x}$. On a donc $L = \frac{1}{2}\frac{\sigma(t)}{\sqrt{x}} + \frac{\sigma(t)}{\sigma(t)}\frac{-1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\theta(t) - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - Ht^{2H-1}\frac{-\sigma(t)}{4}x^{-\frac{3}{2}}$

Puis on a : $\frac{\partial}{\partial x}g(x,t)L = x^{-2}(\frac{1}{2}\gamma(t)\theta(t) - \frac{\sigma(t)^2}{4}Ht^{2H-1}$

On remarque que pour $\sigma(t) = \sqrt{\frac{2\gamma(t)\theta(t)}{Ht^{2H-1}}}$, $\frac{\partial}{\partial x}g(x,t)L$ s'annule et donc d'après la méthode décrite dans 1.6.1 on peut écrire l'équation différentielle stochastique sous forme linéaire. Nous devons d'abord déterminer $\alpha(t)y$ comme décrit à la section 1.6.1 :

$$\alpha(t)y + \beta(t) = 2x^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\sigma(t)} + \frac{\gamma(t)}{\sigma(t)}(\theta(t)x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2}Ht^{2H-1}\sigma(t)x^{-\frac{1}{2}}$$

On a donc :

$$\alpha(t)y + \beta(t) = x^{\frac{1}{2}}(-\frac{\gamma(t)}{\sigma(t)} + 2\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\sigma(t)})$$

Or $\beta(t)$ vaut 0 on a donc :

$$(\int \alpha(t)dt)' + (\frac{\gamma(t)}{2} + \sigma(t)\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\sigma(t)})\int \alpha(t)dt = 0$$

On peut donc égaliser :

$$\int \alpha(t)dt = e^{-\int \frac{\gamma(t)}{2}dt}\sigma(t)^{-1}$$

On obtient finalement :

$$y = 2e^{\int \frac{\gamma(t)}{2}dt}\sqrt{x}$$

On peut donc écrire l'équation différentielle stochastique linéaire :

$$dy = e^{\int \frac{\gamma(t)}{2}}\sigma(t)dB^H(t)$$

On obtient la solution en intégrant :

$$y(t) = \int_0^t e^{\int \frac{\gamma(t)}{2}}\sigma(t)dB^H(t) + K$$

Enfin, on obtient donc la solution du modèle CIR :

$$x(t) = \left(\frac{1}{2}exp\left(-\int \frac{1}{2}\gamma(t)dt\right)\left(\int_0^t exp\left(\int \frac{1}{2}\gamma(t)dt\right)\sigma(t)dB^H(t) + \sqrt{x(0)}\right)\right)^2$$

On utilise maintenant un schéma numérique de Milstein afin de donner une solution numérique de l'expression plus haut, on a donc :

$$X_{j+1} = X_j + (\gamma(\theta - X_j) - \frac{1}{2}H\sigma^2 t_j^{2H-1})\Delta t + \sigma\sqrt{(X_j)}\Delta B_j^H + \frac{1}{4}\sigma^2(\Delta B_j^H)^2$$

Quelques simulations du modèle CIR fractionnaire . . .

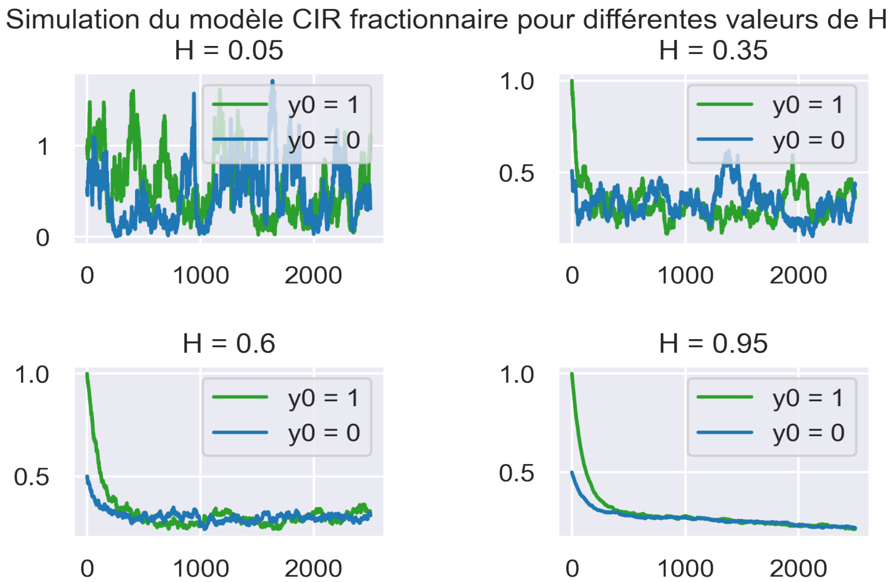

FIGURE 6 – Simulations du modèle CIR fractionnaire pour différentes valeurs de H

1.6.5 Le modèle de Black-Scholes fractionnaire

Le modèle de Black-Scholes existe aussi en version fractionnaire, la partie aléatoire est modélisée par un mouvement brownien fractionnaire.
Cependant, ce modèle n'est pas très utilisé en pratiqué car il écarte l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrages

1.6.6 Modélisation d'un actif sous-jacent sous Black-Scholes fractionnaire

La seule différence faite avec le modèle de Black Scholes classique se trouve au niveau du mouvement brownien utilisé, en effet on a :

$$dS_t = \mu S_t + \sigma S_t dB_t^H$$

Afin de simuler le modèle de Black-Scholes fractionnaire nous utiliserons le schéma de Milstein, on a donc :

$$S_{t_{i+1}} = S_{t_i} + rS_{t_i}\Delta t - \sigma^2 S_{t_i} H t_i^{2H-1}\Delta t + \sigma S_{t_i}\Delta B_i^H + \frac{1}{2}\sigma^2 S_{t_i}(\Delta B_i^H)^2$$

Quelques simulations du modèle de Black-Scholes fractionnaire . . .

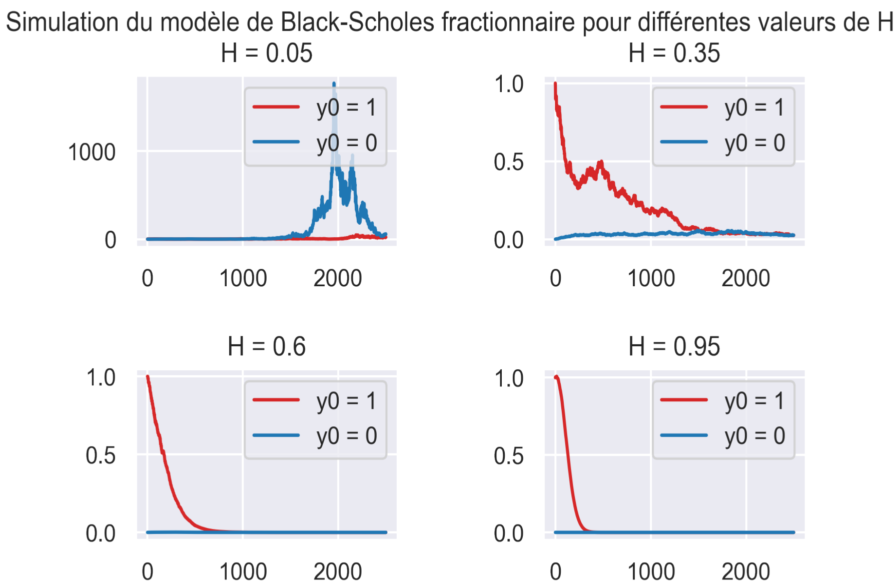

FIGURE 7 – Simulations du modèle de Black-Scholes fractionnaire pour différentes valeurs de H

1.7 Modèle Rough Heston

1.7.1 Modèle de Heston classique

Le Modèle de Heston standard est un modèle à volatilité stochastique très utilisé, il est définit par la dynamique de prix suivante :

$$dS_t = S_t \sqrt{V_t} dW_t$$

De plus, il est régit par un processus de variance décrit par l'équation différentielle suivante :

$$dV_t = \lambda(\theta - V_t)dt + \lambda\nu\sqrt{V_t}dB_t$$

avec $\langle dW_t, dB_t \rangle = \rho dt$, avec $\rho \in [-1; 1]$
W_t et B_t sont deux mouvement brownien standard

1.7.2 Modèle de Heston dirigé par un mouvement brownien fractionnaire

Dans le modèle de Heston fractionnaire, le processus de volatilité est dirigé par un mouvement brownien fractionnaire, comme vu précédemment, selon Gatheral et Rosenbaum la log-volatilité se comporte comme un mouvement brownien fractionnaire de paramètre de Hurst $H \in]0; 1[$.

De plus, cette modélisation (par un mBF) ne modifie en rien les propriétés statistiques de la volatilité.Ainsi l'équation différentielles sont données par :

$$dS_t = S_t \sqrt{V_t} dW_t^H$$

Où : B_t^H et W_t^H sont deux mouvements browniens fractionnaires

La solution donnée pour dV_t [Cours Rosenbaumm] est la suivante :

$$V_t = V_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \lambda(\theta - V_s) ds + \frac{\lambda\nu}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \sqrt{V_t} dB_s$$

Selon Alos, Fukasawa et Bayer, de tels modèles permettent de bien reproduire le comportement de la surface de volatilité implicite, en particulier la dépendance de la volatilité par rapport au strike (à la monnaie).

Dans le modèle de Heston classique la fonction caractéristique des log-prix (X_t) est donnée par : $X_t = log(S_t/S_0)$, en particulier cette équation satisfait :

$$\mathbb{E}[e^{iaX_t}] = exp(g(a,t) + V_0 h(a,t))$$

Où h est la solution de l'équation de Riccati suivante :

$$\partial_t h = \frac{1}{2}(-a^2 - ia) + \lambda(ia\rho\nu - 1)h(a,s) + \frac{(\lambda\nu)^2}{2} h^2(a,s), \quad h(a,0) = 0 \qquad (1)$$

$$L(t, \lambda, V_t, S_t) = \mathbb{E}[e^{i\lambda log(S_T)}|F_t]$$

Avec F_t la filtration engendrée par les browniens dirigeants la volatilité et le prix.
L étant une martingale, on a en appliquant la formule d'Itô l'équation suivante (les termes en dt doivent être nuls) :

$$\partial_t L + \lambda(\theta - V)\partial_V L + \frac{1}{2}(\lambda v)^2 V \partial^2_{VV} L + \frac{1}{2} S^2 V \partial_S L + \rho v \lambda S V \partial^2_{SV} L = 0$$

1.7.3 Construction du modèle Rough Heston

Nous reprendrons la construction du modèle Rough Heston tel que Rosenbaum l'a construit. On voudrait un modèle tick-by-tick qui prend en compte l'aspect fractionnaire des marchés et qui reproduit les propriétés importantes du modèle de Heston :

— L'effet de levier : La capacité d'amplification de la capacité d'investissement.
— Prendre en compte l'effet d'asymétrie (Kurtosis), de queue lourde.
— La modélisation permet de reproduire la dynamique du volatility smile (Dépendance de la volatilité implicite par rapport au Strike K), comme prévu par le modèle de Black-Scholes on remarque que la volatilité implicite n'est pas constante mais dépendante du strike K

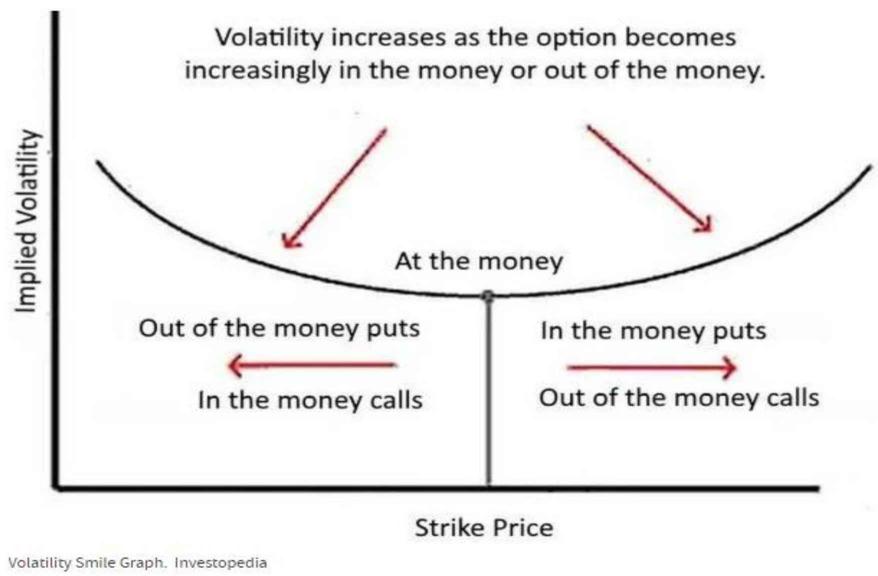

Figure 8 – Exemple de volatility smile

En pratique le modèle de Heston, et donc le modèle Rough Heston sont utilisés afin de pricer des options exotiques, mais cette modélisation tend à créer une divergence entre le pricing d'options vanilles (faussés) et la modélisation de ces derniers par un modèle à volatilité constante/déterministe (plus réel). Cependant un problème subsiste concernant le modèle Rough Heston, ce dernier n'est plus Markovien on ne peut donc plus utiliser l'approche classique utilisé dans les modèles à EDS dirigés par un mouvement brownien standard, c'est à dire utiliser la formule d'Itô, nous ne rentrerons pas dans les détails sur ce point.

L'approche qui a été utilisé par El Euch et Rosenbaum consiste à regarder des fonctionnelles de processus de Hawkes qui convergent vers le modèle de Rough Heston, l'idée étant que l'on connaît les fonctions caractéristiques des processus de Hawkes, on peut donc facilement à la limite et donc obtenir des formules pour le modèle Rough Heston. La fonction caractéristique du log-prix dans le modèle Rough Heston montre la même structure que la fonction caractéristique du modèle de Heston classique.
A l'exception que l'équation de Riccati (1) est remplacée par une équation de Riccati fractionnaire où une dérivée fractionnaire est utilisé à la place d'une dérivée classique, on a plus précisément :

$$\mathbb{E}[e^{iaX_t}] = exp(g_1(a,t) + V_0 g_2(a,t))$$

Avec :

$$g_1(a,t) = \theta\lambda \int_0^t h(a,s)ds, g_2(a,t) = I^{1-\alpha}h(a,t),$$

De plus, $h(a,.)$ est une solution de l'équation de Riccati fractionnaire suivant :

$$D^\alpha h(a,t) = \frac{1}{2}(-a^2 - ia) + \lambda(ia\rho v - 1)h(a,t) + \frac{(\lambda v)^2}{2}h^2(a,t), \quad I^{1-\alpha}h(a,0) = 0,$$

Avec D^α et $I^{1-\alpha}$ la dérivée fractionnaire et l'opérateur intégrant définit comme suit :

Intégrale fractionnaire Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ appartenant à $L^1(\mathbb{R})$ on peut définir l'opérateur intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ par :

$$I^{1-\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt$$

Dérivée fractionnaire Dans les mêmes conditions que pour l'intégrale fractionnaire, on peut définir l'opérateur de dérivée fractionnaire comme suit :

$$D^\alpha f(x) = \frac{d}{dx} f^{1-\alpha} f(x)$$

Il convient de remarquer que lorsque $\alpha = 1$, les résultats coïncident avec les résultats du modèle de Heston classique, cependant lorsque $\alpha < 1$ la solution de l'équation de Riccati ne peuvent être établis explicitement, cependant, elles peuvent être facilement numériquement résolue.
Finalement, la loi du processus $(S_t^{t_0}, V_t^{t_0})_{t\geq 0} = (S_{t+t_0}, V_{t+t_0})_{t\geq 0}$ est la loi du modèle Rough Heston dont les dynamiques de volatilités et de prix sont les suivants :

$$dS_t^{t_0} = S_t^{t_0}\sqrt{V_t^{t_0}}dW_t^{t_0}; \quad S_0^{t_0} = S_{t_0}$$

$$V_t^{t_0} = V_{t_0} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\lambda(\theta^{t_0}(s) - V_s^{t_0})ds + \frac{\lambda\nu}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\sqrt{V_s^{t_0}}dB_s^{t_0}$$

Avec : $(W_t^{t_0}, B_t^{t_0}) = (W_{t_0+t} + W_{t_0}, B_{t_0+t} + B_{t_0})$ et θ^{t_0} est un processus F_t-mesurable, dépendant de $(V_u)_{0\leq u\leq t_0}$.
On peut aussi donner une forme généralisée du modèle Rough Heston :

$$dS_t = S_t\sqrt{V_t}dW_t$$

$$V_t = V_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\lambda(\theta^0(s) - V_s)ds + \frac{\lambda\nu}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\sqrt{V_s}dB_s,$$

Avec $\langle dW_t, dB_t\rangle = \rho dt, \quad \alpha \in (1/2, 1)$.

1.7.4 Schéma numérique de calcul de la fonction caractéristique du log-prix dans le modèle Rough Heston

Comme l'on expliqué El Euch et Rosenbaum, l'objectif est de calculer numériquement la fonction caractéristique, nous avons :

$$D^\alpha h(a,t) = \frac{1}{2}(-a^2 - ia) + \lambda(ia\rho v - 1)h(a,t) + \frac{(\lambda v)^2}{2}h^2(a,t), \quad I^{1-\alpha}h(a,0) = 0, \tag{1}$$

Avec :

$$F(a,x) = \frac{1}{2}(-a^2 - ia) + \lambda(ia\rho\nu - 1)x + \frac{(\lambda\nu)^2}{2}x^2, \quad h(a,0) = 0$$

Bien qu'il existe plusieurs schéma numérique permettant de résoudre numériquement (1), l'approche utilisée est basée sur le fait que (1) implique l'équation de Volterra suivante :

$$h(a,t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}F(a, h(a,s))ds$$

Puis de développer un schéma nuémrique basé sur l'équation précédente. En utilisant la méthode fractionaire Adams, où l'idée est la suivante :
Posons : $g(a,t) = F(a,h(a,t))$, puis discrétisons la fonction h en utilisant un pas Δ tel que $(t_k = k\Delta)$, l'estimation de h :

$$h(a,t_{k+1}) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_{k+1}} (t_{k+1}-s)^{\alpha-1} g(a,s)ds$$

Est donnée par :

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_{k+1}} (t_{k+1}-s)^{\alpha-1} \hat{g}(a,s)ds$$

Avec :

$$\hat{g}(a,t) = \frac{t_{j+1}-t}{t_{j+1}-t_j}\hat{g}(a,t_j) + \frac{t-t_j}{t_{j+1}-t_j}\hat{g}(a,t_{j+1}), \quad t \in [t_j,t_{j+1}], \quad 0 \leq j \leq k$$

Cela nous amène au schéma suivant :

$$\hat{h}(a,t_{k+1} = \sum_{0\leq j\leq k} a_{j,k+1}F(a,\hat{h}(a,t_j)) + a_{k+1,k+1}F(a,\hat{h}(a,t_{k+1}))$$

Où :

$$a_{0,k+1} = \frac{\Delta^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)}(k^{\alpha+1} - (k-\alpha)(k+1)^\alpha)$$

$$a_{j,k+1} = \frac{\Delta^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)}((k-j+2)^{\alpha+1}+(k-j)^{\alpha+1}+(k-j)^{\alpha+1}-2(k-j+1)^{\alpha+1}), \quad 1 \leq j \leq k$$

De plus,

$$a_{k+1,k+1} = \frac{\Delta^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)}$$

On calcule ensuite une pre-estimation de $\hat{h}(a,t_{k+1})$ basée sur une somme de Riemann

$$\hat{h}^P(a,t_{k+1}) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\tilde{g}(a,s)ds,$$

Où :

$$\tilde{g}(a,t) = \tilde{g}(a,t_j), \quad t \in [t_j,t_{j+1}), \quad 0 \leq j \leq k$$

Donc on a :

$$\tilde{h}^P(a,t_{k+1}) = \sum_{0\leq j\leq k} b_{j,k+1}F(a,\hat{h}(a,t_j))$$

Avec :

$$b_{j,k+1} = \frac{\Delta^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}((k-j+1)^\alpha - (k-j)^\alpha), \quad 0 \leq j \leq k$$

Et finalement on a donc :

$$\hat{h}(a, t_{k+1}) = \sum_{0 \leq j \leq k} a_{j,k+1} F(a, \hat{h}(a, t_j)) + a_{k+1,k+1} F(a, \hat{h}^P(a, t_j)), \quad \hat{h}(a, 0) = 0,$$

En théorie, nous devons avoir les résultats de convergence suivants, pour $t > 0$ et $a \in \mathbb{R}$:

$$\max_{t_j \in [0,t]} |\hat{h}(a, t_j) - h(a, t_j)| = o(\Delta)$$

et, $\epsilon > 0$

$$\max_{t_j \in [\epsilon,t]} |\hat{h}(a, t_j) - h(a, t_j)| = o(\Delta^{2-\alpha})$$

Conclusion

A Code Python pour simulations et estimations

B Preuves

C Bibliographie