Soutenance de mémoire de recherche :

L'utilisation du mouvement brownien fractionnaire pour la modélisation de la log-volatilité des actifs financiers (Rough Volatility)

Modélisation de la volatilité et Intérêt de l'utilisation du mouvement brownien fractionnaire

Log-prix Y_t : Semi-martingales souvent modélisées comme suit :

$$dY_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

Exemple : Modèle CEV("Constant Elasticity of Variance Model")

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t^{\gamma} dB_t$$

Avec W_t et B_t deux mouvements browniens standards

Le mouvement brownien fractionnaire : Définition

Le Mouvement Brownien Fractionnaire d'indice de Hurst $H \in]0;1]$ est l'unique processus Gaussien Centré dont les caractéristiques sont les suivantes :

- $B_0^H = 0$ (Nul en zéro)
- Les accroissements sont stationnaires et auto-similaires

Il est définit par sa fonction de covariance :

$$\Gamma(t,s) = \mathbb{E}[B^H(s)B^H(t)] = \frac{C(H)}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} + |t-s|^{2H}))$$

Le mouvement brownien fractionnaire : Une autre définition

Le Mouvement Brownien Fractionnaire peut aussi être définit par la représentation de Mandelbrot-Van-Ness

$$B_t^H := \frac{1}{C(H)} \int_{\mathbb{R}} [((t-s)^+)^{H-\frac{1}{2}} - ((-s)^+)^{H-\frac{1}{2}}] dB(s),$$

Le comportement du mouvement brownien fractionnaire dépend de l'index de Hurst H :

- Lorsque $H < \frac{1}{2}$ les trajectoires sont irrégulières
- Lorsque $H > \frac{1}{2}$ les trajectoires sont plus régulières, on constate l'effet de longue mémoire

Comparaison de deux mouvements browniens fractionnaires ($H = 0.2$ et $H = 0.8$)

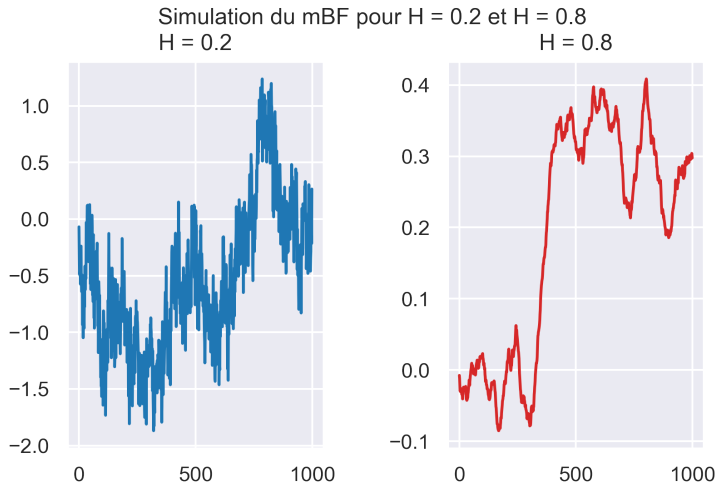

Figure: Comparaison de deux mouvements browniens fractionnaires

La volatilité rugueuse (Rough Volatility) : Partie 1

Au départ, la volatilité a été modélisée de deux façons :

- Dans un premier temps : La volatilité constante ou déterministe (Cf Modèle de Black-Scholes)
- Dans un second temps : La volatilité locale ou stochastiques (Cf Modèle de Heston)

La volatilité rugueuse (Rough Volatility) : Partie 2

Proposition de nouveaux modèles basés sur le mouvement brownien fractionnaire, cette fois ci avec le processus de volatilité dirigé par un mouvement brownien fractionnaire :

- Premier modèle : FSV (Fractional Stochastic Volatility), proposé par Eric Renault et Fabienne Comte en 1998, il ne prenne en considération que $H \in]\frac{1}{2}; 1[$ (On ne se concentrera pas sur celui-ci)
- Deuxième modèle : RFSV (Rough Stochastic Volatility), reprenant les travaux de Comte et Renault, proposé en 2016 par Jim Gatheral et Mathieu Rosenbaum, celui-ci prend en compte $H \in]0; \frac{1}{2}]$, nous reparlerons de ce modèle par la suite

La volatilité rugueuse (Rough Volatility) : Partie 3

Intérêt de l'utilisation du mouvement brownien fractionnaire :

Modéliser les incréments de la log-volatilité, en partant du principe que les incréments stationnaires du mouvement brownien fractionnaire satisfont, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Delta \geq 0$, $q > 0$:

$$\mathbb{E}[|B^H_{t+\Delta} - B^H_t|^q] = K_q \Delta^{qH}$$

Pour $H > \frac{1}{2} \Rightarrow$ Corrélation positive entre les incréments du mouvement brownien fractionnaire $\Rightarrow$ Effet mémoire longue

La trajectoire de B^H_{t+1} dépend de B^H_t, donc :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} Cov[W^H_1, W^H_k - W^H_{k-1}] = +\infty$$

On a : $Cov[W^H_1, W^H_k - W^H_{k-1}]$ est de l'ordre k^{2H-2} avec $k \longrightarrow \infty$

La volatilité rugueuse (Rough Volatility) : Partie 4

Technique de Rosenbaum et Gatheral :
Partir du principe que l'on a accès à différentes observations du processus de volatilité σ_t, puis découper les instants de volatilités sur $[0; T]$ tel que :

$$\sigma_0, \ldots, \sigma_\Delta, \ldots, \sigma_{k\Delta}, \cdots : k \in [0, N],$$

où $N = \lfloor T/\Delta \rfloor$ Puis, de définir donc, pour $q \geq 0$:

$$m(q, \Delta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} |log(\sigma_{k\Delta}) - log(\sigma_{(k-1)\Delta})|^q$$

(Moment d'ordre q empirique)

L'objectif est d'analyser comment se comporte cette précédente quantité en fonction de la variation Δ.

Estimation du paramètre de Hurst H : Partie 1

Gatheral et Rosenbaum procède en deux étapes :

1) Comprendre comment se comporte la quantité $\frac{log\ m(q,\Delta)}{log\ (\Delta)}$, on s'aperçoit, dans la figure suivante que cette relation est linéaire et on déduit donc que :

$$\forall q :\ m(q, \Delta) \propto \Delta^{\zeta_q}$$

Estimation du paramètre de Hurst H : Partie 2

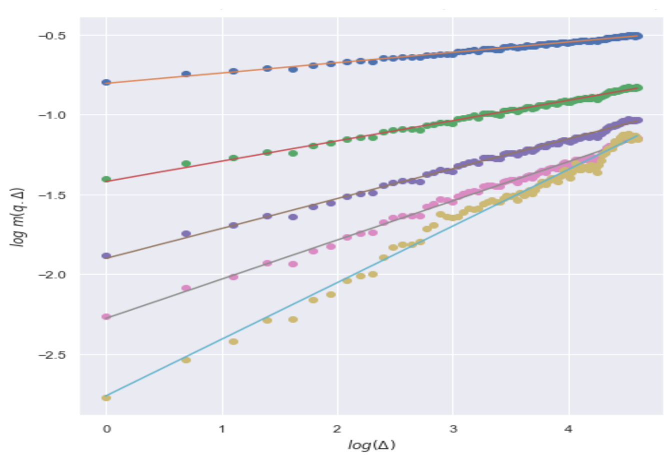

Figure: Relation entre $log(m(q, \Delta))$ et $log(\Delta)$; Calculé sur l'indice CAC 40

Estimation du paramètre de Hurst H : Partie 3

2)Etudier la fonction ζ_q en fonction de q :

On s'aperçoit qu'il existe une relation linéaire entre ces deux quantités (Cf Figure suivante), et on déduit enfin la pente de cette droite qui correspond donc à H $\Rightarrow$ Relation monofractal suivante :

$$\zeta_q = qH$$

Estimation du paramètre de Hurst H : Partie 4

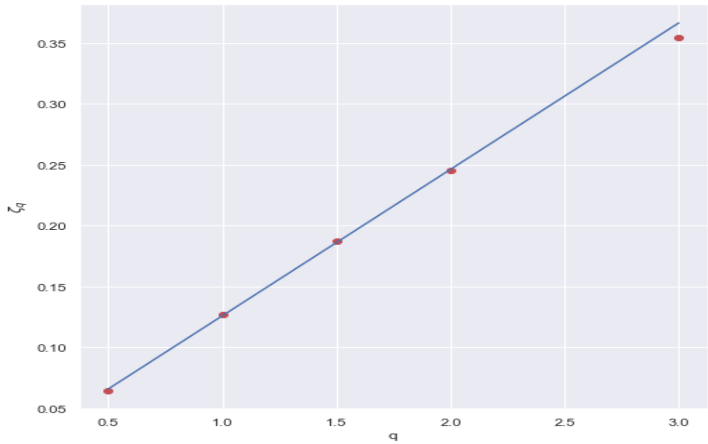

Figure: Relation entre ζ_q et q, $H \approx 0.12$

Application sur d'autres indices : Partie 1

En appliquant la même méthode à d'autres indices que celui du CAC-40, on obtient les résultats suivants :

Application sur d'autres indices : Partie 2

	Indices	Estimation du paramètre H	Estimation du paramètre nu
0	.FCHI	0.122568	0.320464
1	.AEX	0.133145	0.320414
2	.STOXX50E	0.100548	0.397587
3	.BFX	0.125937	0.306290
4	.IBEX	0.112744	0.314685
5	.GDAXI	0.122359	0.331459
6	.AORD	0.071875	0.459212
7	.FTSE	0.109180	0.365529
8	.MXX	0.079091	0.414202
9	.IXIC	0.123072	0.350766
10	.SPX	0.131715	0.381304
11	.RUT	0.110748	0.387228
12	.SSMI	0.149400	0.278083
13	.DJI	0.123347	0.390174
16	.KS11	0.102043	0.319863
17	.BVSP	0.127826	0.333823
18	.HSI	0.084487	0.327221
19	.KSE	0.099285	0.444501
20	.N225	0.105592	0.372272
21	.SSEC	0.105825	0.360319
22	.OSEAX	0.107394	0.369890
23	.GSPTSE	0.110107	0.391804
24	.SMSI	0.109951	0.335748
25	.OMXHPI	0.107753	0.356045
26	.OMXSPI	0.116433	0.354460
27	.OMXC20	0.098222	0.364126
29	.FTMIB	0.114010	0.345525

Application sur d'autres indices : Partie 3

	h_est	names	nu_est
0	0.133954	SPX2.rk	0.321337
1	0.142315	FTSE2.rk	0.270677
2	0.113366	N2252.rk	0.320396
3	0.150251	GDAXI2.rk	0.274873
4	NaN	RUT2.rk	NaN
5	0.083370	AORD2.rk	0.359025
6	0.131013	DJI2.rk	0.317327
7	NaN	IXIC2.rk	NaN
8	0.130485	FCHI2.rk	0.291967
9	0.103370	HSI2.rk	0.281453
10	0.125847	KS11.rk	0.274713
11	0.145671	AEX.rk	0.290187
12	0.178427	SSMI.rk	0.223249
13	0.128117	IBEX2.rk	0.281662
14	0.110092	NSEI.rk	0.324883
15	0.092252	MXX.rk	0.324180
16	0.106595	BVSP.rk	0.312907
17	NaN	GSPTSE.rk	NaN
18	0.119857	STOXX50E.rk	0.337045
19	0.127094	FTSTI.rk	0.228910
20	0.133361	FTSEMIB.rk	0.298712

Figure: Estimation du paramètre H de différents indices, en Mai 2016.

EDS dirigées par un mouvement brownien fractionnaire : Présentation, partie 1

Comme les équations différentielles dirigées par un mouvement brownien classique, les EDS peuvent-être présentées sous deux formes :
1) Différentielle :

$$dY_t = f(Y_t, t)dt + g(Y_t, t)dB_t^H$$

2) Intégrale :

$$Y_t = Y_s + \int_s^t f(Y_u, u)du + \int_s^t g(Y_u, u)dB_u^H \tag{1}$$

EDS dirigées par un mouvement brownien fractionnaire : Présentation, partie 2

Il est nécessaire de distinguer les cas en fonction de H :

- Pour $H = \frac{1}{2}$, l'intégrale stochastique de l'équation (1) est une martingale locale $\Rightarrow Y_t$ est au minimum une semi-martingale, et la formule d'Itô est applicable
- Pour $H > \frac{1}{2}$, sous certaines conditions, on peut définir l'intégrale de Stieltjes.
- Pour $H \in]\frac{1}{4}; \frac{1}{2}[$, cas le plus complexe, on pourrait définir une notion de chemins rugueux pour définir des intégrales stochastiques fractionnaires

Solution numérique : Le schéma de Milstein

Formule fermée non-nécessairement existante : Mouvement brownien standard $\Rightarrow$ Schéma numérique d'Euler Mouvement brownien fractionnaire $\Rightarrow$ Schéma numérique de Milstein
Ce schéma est donnée, pour tout $H \in]0;1[$, par :

$$\chi(t_{i+1}) = \chi(t_i) + f(\chi(t_i), ti)\Delta t + g(\chi(t_i), t_i)\Delta B_i^H + \frac{1}{2}g(\chi(t_i), t_i)g\prime(\chi(t_i), ti)[(\Delta B_i^H)^2 - (t_{i+1}^{2H} - t_i^{2H})] + \epsilon_i \quad (1)$$

Ou

$$\chi(t_{i+1}) = \chi(t_i) + f(\chi(t_i), ti) - g(\chi(t_i), t_i)g\prime(\chi(t_i), t_i)Ht_i^{2H-1})\Delta t + g(\chi(t_i), t_i)\Delta B_i^H + \frac{1}{2}g(\chi(t_i), t_i)g\prime(\chi(t_i), t_i)(\Delta B_i^H)^2 + \epsilon_i\prime \quad (2)$$

En partant du fait que : $t_{i+1}^{2H} = (t_i + \Delta t) \approx t_i^{2H} + 2Ht_i^{2H-1}\Delta t$

Le Processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire : Définition et Solution numérique

Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck associé au mouvement brownien fractionnaire associé est donnée par l'équation :

$$dX_t = \theta(t)(\mu(t) - X_t)dt + \sigma(t)dB_t^H$$

Sa solution numérique est donnée par :

$$X_{j+1} = X_j + \theta(\mu - X_j)\Delta t + \sigma \Delta B_j^H$$

Le Processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire : Simulations

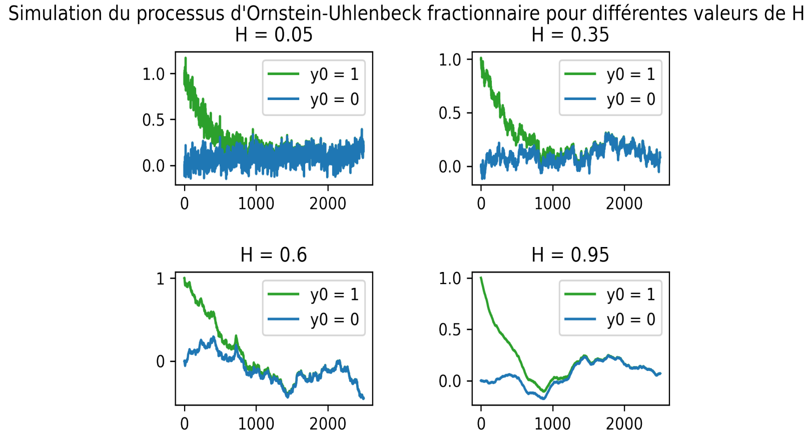

Figure: Simulation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck pour différentes valeurs de H

Les modèles fractionnaires : Le Modèle Rough Heston, la version classique

Dynamique de prix et de volatilité dans le modèle classique :

$$dS_t = S_t \sqrt{V_t} dW_t$$

$$dV_t = \lambda(\theta - V_t)dt + \lambda\nu\sqrt{V_t} dB_t$$

avec $\langle dW_t, dB_t \rangle = \rho dt$, avec $\rho \in [-1; 1]$
W_t et B_t sont deux mouvements browniens standards.

Les modèles fractionnaires : Le Modèle Rough Heston

Sa version Rough est donnée par la dynamique suivante :

$$dS_t = S_t \sqrt{V_t} dW_t$$

La solution donnée pour dV_t est donnée par :

$$V_t = V_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \lambda(\theta - V_s) ds + \frac{\lambda\nu}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \sqrt{V_t} dB_s$$

Selon Alos, Fukasawa et Bayer ce modèle permet une bonne représentation du comportement de la surface de volatilité implicite, et en particulier la dépendance de la volatilité par rapport au strike (à la monnaie).

Le modèle Rough Heston : Loi conditionnelle du couple $(S_t^{t_0}, V_t^{t_0})$ et forme généralisée, partie 1

La loi du processus conditionnellement à F_t, $(S_t^{t_0}, V_t^{t_0})_{t\geq 0} = (S_{t+t_0}, V_{t+t_0})_{t\geq 0}$ est la loi du modèle Rough Heston dont les dynamiques de volatilités et de prix sont les suivants :

$$dS_t^{t_0} = S_t^{t_0}\sqrt{V_t^{t_0}}dW_t^{t_0}; \quad S_0^{t_0} = S_{t_0}$$

$$V_t^{t_0} = V_{t_0} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\lambda(\theta^{t_0}(s) - V_s^{t_0})ds + \frac{\lambda\nu}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\sqrt{V_s^{t_0}}$$

Avec : $(W_t^{t_0}, B_t^{t_0}) = (W_{t_0+t} + W_{t_0}, B_{t_0+t} + B_{t_0})$ et θ^{t_0} est un processus F_t-mesurable, dépendant de $(V_u)_{0\leq u\leq t_0}$.

Le modèle Rough Heston : Loi conditionnelle du couple $(S_t^{t_0}, V_t^{t_0})$ et forme généralisée, partie 2

On peut aussi donner une forme généralisée du modèle Rough Heston :

$$dS_t = S_t\sqrt{V_t}dW_t$$

$$V_t = V_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\lambda(\theta^0(s) - V_s)ds + \frac{\lambda\nu}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\sqrt{V_s}dB_s,$$

Avec $\langle dW_t, dB_t\rangle = \rho dt, \quad \alpha \in (1/2, 1).$

Le modèle RFSV : Définition, Partie 1

Empiriquement, les incréments de la log-volatilité se rapproche de la distribution Gaussienne (démontré par Gatheral et Rosenbaum), de plus ces incréments possèdent une propriété d'échelle, Gatheral et Rosenbaum proposent le modèle de volatilité suivant :

$$log \sigma_{t+\Delta} - \log \sigma_t = \nu(B^H_{t+\Delta} - B^H_t),$$

Où : B^H_t est un mouvement brownien fractionnaire, $\nu > 0$ et H l'index de Hurst mesuré empiriquement, la volatilité peut donc s'écrire :

$$\sigma_t = \sigma exp(\nu W^H_t)$$

Le modèle RFSV : La nécessité de l'utilisation du Processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire, Partie 1

Le modèle précédant n'étant pas stationnaire $\Rightarrow$ Considérer la log-volatilité non plus comme un mouvement brownien fractionnaire mais comme un processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire (stationnaire) dont voici l'équation :

$$dX_t = \nu dB_t^H - \alpha(X_t - m)dt,$$

Sa forme explicite est donnée par :

$$X_t = \nu \int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha(t-s)} dB_t^H + m$$

Avec : $m \in \mathbb{R}$, ν et α sont des paramètres positifs.

Le modèle RFSV : La nécessité de l'utilisation du Processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire, Partie 2

On a maintenant :

$$\sigma_t = exp(X_t), \quad t \in [0; T]$$

Avec : $\nu > 0, \alpha > 0, m \in \mathbb{R}$ et $H < \frac{1}{2}$, ce modèle est stationnaire, de plus lorsque $\alpha << 1/T$ la log-volatilité se comporte (localement) comme un mouvement brownien fractionnaire, de plus, selon Gatheral et Rosenbaum, lorsque α tends vers 0 on a :

$$\mathbb{E}[\sup_{t \in [0,T]} |X_t^\alpha - X_0^\alpha - \nu B_t^H|] \to 0$$

Avec B_t^H un mouvement brownien fractionnaire et X_t^α un processus d'Ornstein-Uhlenbeck défini plus haut. Cette assertion implique que si la condition $\alpha << 1/T$ est respectée et que l'on se restreint à une étude sur $[0; T]$ on peut agir comme si la log-volatilité était un mouvement brownien fractionnaire.

Le modèle RFSV : Prévisions de la volatilité dans le modèle RFSV

Utilisation de la formule de Neuzmann-Poor :

$$\mathbb{E}[B^H_{t+\Delta}|F_t] = \frac{cos(H\pi)}{\pi}\Delta^{H+1/2}\int_{-\infty}^{t}\frac{B^H_s}{(t-s+\Delta)(t-s)^{H+1/2}}ds,$$

Avec : B^H_t un mouvement brownien fractionnaire avec un paramètre de Hurst $H < 1/2$ et F_t la filtration engendrée.

En approximant σ_t par : $2\nu B^H_t + C$, avec C et ν deux constantes, la formule de prédiction de la volatilité est donc donnée par :

$$\mathbb{E}[log\sigma^2_{t+\Delta}|F_t] = \frac{cos(H\pi)}{\pi}\Delta^{H+1/2}\int_{-\infty}^{t}\frac{log\,\sigma^2_s}{(t-s+\Delta)(t-s)^{H+1/2}}ds$$

Le modèle RFSV : Prévisions de la volatilité dans le modèle RFSV, resultats

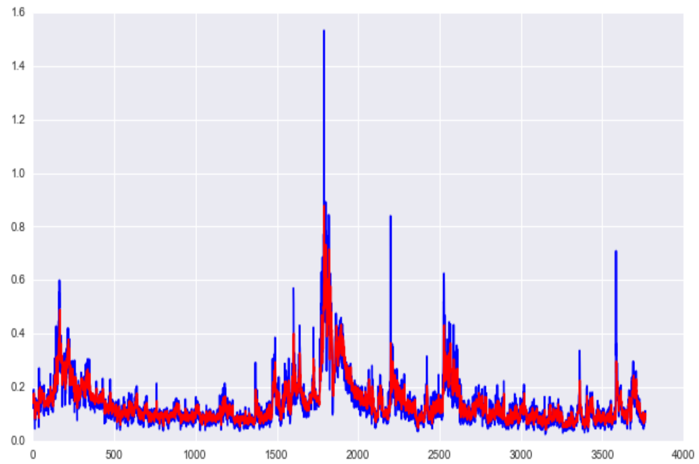

Figure: Prévision de volatilité en rouge; données empiriques en bleu, graphique de Jim Gatheral