Soutenance de mémoire de recherche :

# L'utilisation du mouvement brownien fractionnaire pour la modélisation de la log-volatilité des actifs financiers (Rough Volatility)

## Modélisation de la volatilité et Intérêt de l'utilisation du mouvement brownien fractionnaire

Log-prix $Y_t$ : Semi-martingales souvent modélisées comme suit :

$$dY_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

Exemple : Modèle CEV("Constant Elasticity of Variance Model")

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t^{\gamma} dB_t$$

Avec $W_t$ et $B_t$ deux mouvements browniens standards

## Le mouvement brownien fractionnaire : Définition

Le Mouvement Brownien Fractionnaire d'indice de Hurst $H \in ]0;1]$ est l'unique processus Gaussien Centré dont les caractéristiques sont les suivantes :

- $B_0^H = 0$ (Nul en zéro)
- Les accroissements sont stationnaires et auto-similaires

Il est aussi définit par sa fonction de covariance :

$$\Gamma(t,s) = \mathbb{E}[B^H(s)B^H(t)] = \frac{C(H)}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} + |t-s|^{2H}))$$

## Le mouvement brownien fractionnaire : Une autre définition

Le Mouvement Brownien Fractionnaire peut aussi être définit par la représentation de Mandelbrot-Van-Ness

$$B^H(t) := \frac{1}{C(H)} \int_{\mathbb{R}} [((t-s)^+)^{H-\frac{1}{2}} - ((-s)^+)^{H-\frac{1}{2}}]dB(s),$$

Le comportement du mouvement brownien fractionnaire dépend de l'index de Hurst H :

- Lorsque $H < \frac{1}{2}$ les trajectoires sont irrégulières
- Lorsque $H > \frac{1}{2}$ les trajectoires sont plus régulières, on constate l'effet de longue mémoire

## Comparaison de deux mouvements browniens fractionnaires ($H = 0.2$ et $H = 0.8$)

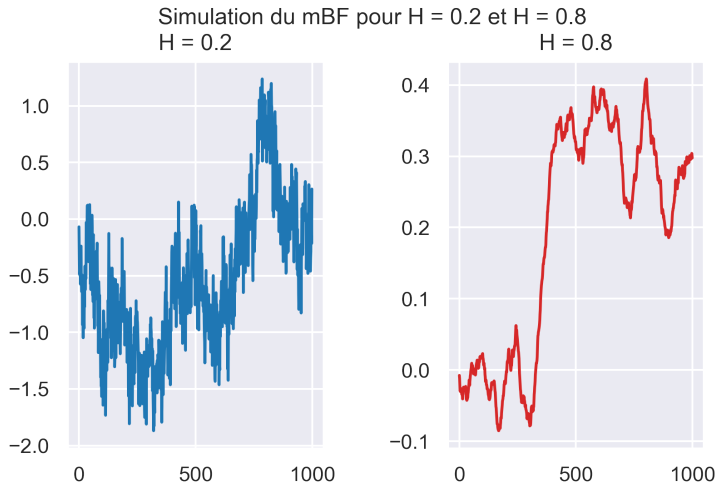



Figure: Comparaison de deux mouvements browniens fractionnaires

## La volatilité rugueuse (Rough Volatility) : Partie 1

Au départ, la volatilité a été modélisée de deux façons :

- Dans un premier temps : La volatilité constante ou déterministe (Cf Modèle de Black-Scholes)
- Dans un second temps : La volatilité locale ou stochastiques (Cf Modèle de Heston)

## La volatilité rugueuse (Rough Volatility) : Partie 2

Proposition de nouveaux modèles basés sur le mouvement brownien fractionnaire, cette fois ci avec le processus de volatilité dirigé par un mouvement brownien fractionnaire :

- Premier modèle : FSV (Fractional Stochastic Volatility), proposé par Eric Renault et Fabienne Comte en 1998, il ne prenne en considération que $H \in ]\frac{1}{2}; 1[$ (On ne se concentrera pas sur celui-ci)
- Deuxième modèle : RFSV (Rough Stochastic Volatility), reprenant les travaux de Comte et Renault, proposé en 2016, celui-ci prend en compte $H \in ]0; \frac{1}{2}]$, nous reparlerons de ce modèle par la suite

## La volatilité rugueuse (Rough Volatility) : Partie 3

Intérêt de l'utilisation du mouvement brownien fractionnaire :

Modéliser les incréments de la log-volatilité, en partant du principe que les incréments stationnaires du mouvement brownien fractionnaire satisfont, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Delta \geq 0$, $q > 0$ :

$$\mathbb{E}[|B^H_{t+\Delta} - B^H_t|^q] = K_q \Delta^{qH}$$

Pour $H > \frac{1}{2} \Rightarrow$ Corrélation positive entre les incréments du mouvement brownien fractionnaire $\Rightarrow$ Effet mémoire longue

La trajectoire de $B^H_{t+1}$ dépend de $B^H_t$, donc :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} Cov[W^H_1, W^H_k - W^H_{k-1}] = +\infty$$

On a : $Cov[W^H_1, W^H_k - W^H_{k-1}]$ est de l'ordre $k^{2H-2}$ avec $k \longrightarrow \infty$

## La volatilité rugueuse (Rough Volatility) : Partie 4

Technique de Rosenbaum et Gatheral :
Partir du principe que l'on a accès à différentes observations du processus de volatilité $\sigma_t$, puis découper les instants de volatilités sur $[0; T]$ tel que :

$$\sigma_0, \dots, \sigma_\Delta, \dots, \sigma_{k\Delta}, \dots : k \in [0, N],$$

où $N = \lfloor T/\Delta \rfloor$ Puis, de définir donc, pour $q \geq 0$ :

$$m(q, \Delta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} |log(\sigma_{k\Delta}) - log(\sigma_{(k-1)\Delta})|^q$$

(Moment d'ordre $q$ empirique)

L'objectif est d'analyser comment se comporte cette précédente quantité en fonction de la variation $\Delta$.

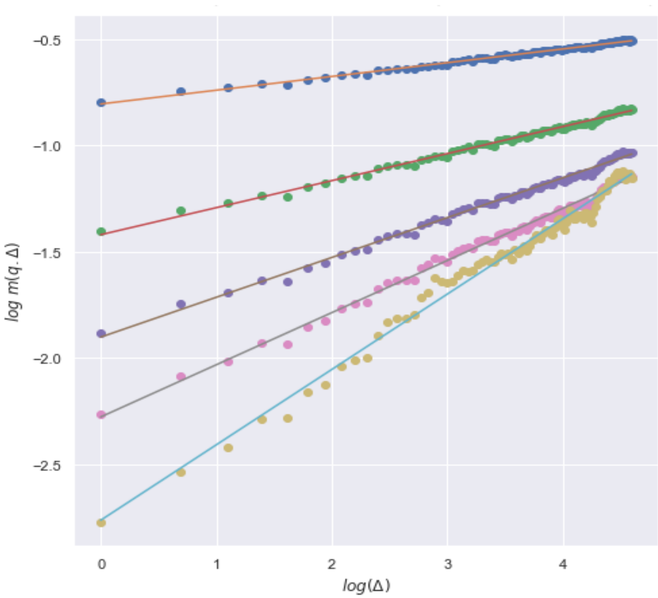
## Estimation du paramètre de Hurst H : Partie 1

Gatheral et Rosenbaum procède en deux étapes :

1) Comprendre comment se comporte la quantité $\frac{log\ m(q,\Delta)}{log\ (\Delta)}$, on s'aperçoit, dans la figure suivante que cette relation est linéaire et on déduit donc que :

$$\forall q : \ m(q, \Delta) \propto \Delta^{\zeta_q}$$

# Estimation du paramètre de Hurst H : Partie 2



## Estimation du paramètre de Hurst H : Partie 3

2)Etudier la fonction $\zeta_q$ en fonction de $q$ :

On s'aperçoit qu'il existe une relation linéaire entre ces deux quantités (Cf Figure suivante), et on déduit enfin la pente de cette droite qui correspond donc à H $\Rightarrow$ Relation monofractal suivante :

$$\zeta_q = qH$$

# Estimation du paramètre de Hurst H : Partie 4