

Soutenance de mémoire de recherche :

L'utilisation du mouvement brownien fractionnaire pour la
modélisation de la log-volatilité des actifs financiers (Rough
Volatility)

Modélisation de la volatilité et Intérêt de l'utilisation du mouvement brownien fractionnaire

Log-prix Y_t : Semi-martingales souvent modélisées comme suit :

$$dY_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

Exemple : Modèle CEV ("Constant Elasticity of Variance Model")

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t^\gamma dB_t$$

Avec W_t et B_t deux mouvements browniens standards

Le mouvement brownien fractionnaire : Une autre définition

Le Mouvement Brownien Fractionnaire peut aussi être défini par la représentation de Mandelbrot-Van-Ness

$$B_t^H := \frac{1}{C(H)} \int_{\mathbb{R}} [((t-s)^+)^{H-\frac{1}{2}} - ((-s)^+)^{H-\frac{1}{2}}] dB(s),$$

Le comportement du mouvement brownien fractionnaire dépend de l'index de Hurst H :

- ▶ Lorsque $H < \frac{1}{2}$ les trajectoires sont irrégulières
- ▶ Lorsque $H > \frac{1}{2}$ les trajectoires sont plus régulières, on constate l'effet de longue mémoire

Comparaison de deux mouvements browniens fractionnaires ($H = 0.2$ et $H = 0.8$)

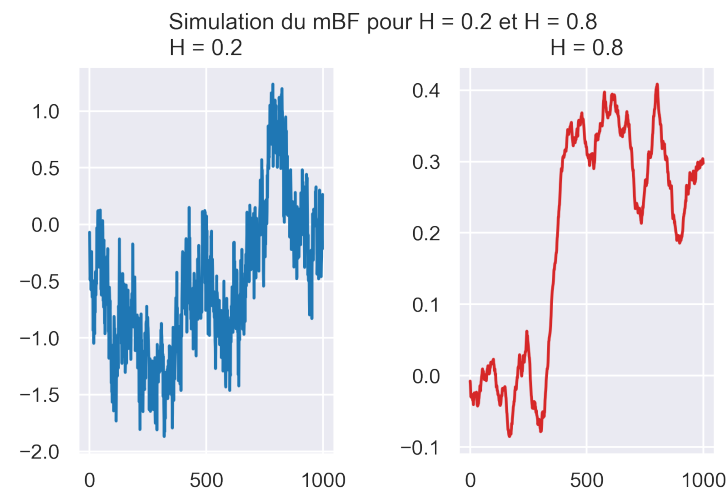


Figure: Comparaison de deux mouvements browniens fractionnaires

La volatilité rugueuse (Rough Volatility) : Partie 1

Au départ, la volatilité a été modélisée de deux façons :

- ▶ Dans un premier temps : La volatilité constante ou déterministe (Cf Modèle de Black-Scholes)
- ▶ Dans un second temps : La volatilité locale ou stochastiques (Cf Modèle de Heston)

La volatilité rugueuse (Rough Volatility) : Partie 3

Intérêt de l'utilisation du mouvement brownien fractionnaire :

Modéliser les incréments de la log-volatilité, en partant du principe que les incréments stationnaires du mouvement brownien fractionnaire satisfont, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Delta \geq 0$, $q > 0$:

$$\mathbb{E}[|B_{t+\Delta}^H - B_t^H|^q] = K_q \Delta^{qH}$$

Pour $H > \frac{1}{2} \Rightarrow$ Corrélation positive entre les incréments du mouvement brownien fractionnaire \Rightarrow Effet mémoire longue

La trajectoire de B_{t+1}^H dépend de B_t^H , donc :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \text{Cov}[W_1^H, W_k^H - W_{k-1}^H] = +\infty$$

On a : $\text{Cov}[W_1^H, W_k^H - W_{k-1}^H]$ est de l'ordre k^{2H-2} avec $k \rightarrow \infty$

Estimation du paramètre de Hurst H : Partie 2

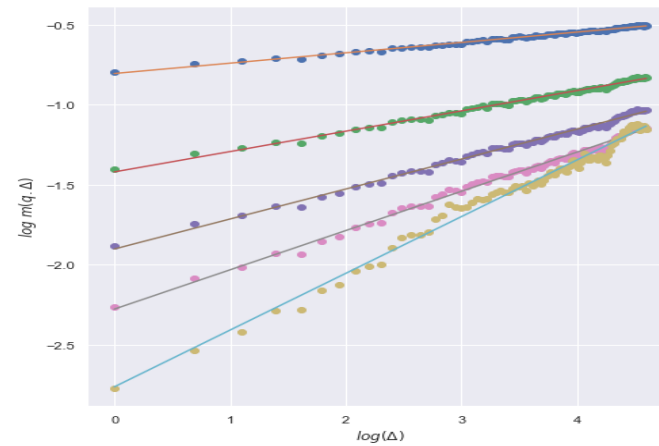


Figure: Relation entre $\log(m(q, \Delta))$ et $\log(\Delta)$; Calculé sur l'indice CAC
40

Estimation du paramètre de Hurst H : Partie 3

2) Etudier la fonction ζ_q en fonction de q :

On s'aperçoit qu'il existe une relation linéaire entre ces deux quantités (Cf Figure suivante), et on déduit enfin la pente de cette droite qui correspond donc à $H \Rightarrow$ Relation monofractal suivante :

$$\zeta_q = qH$$

Estimation du paramètre de Hurst H : Partie 4

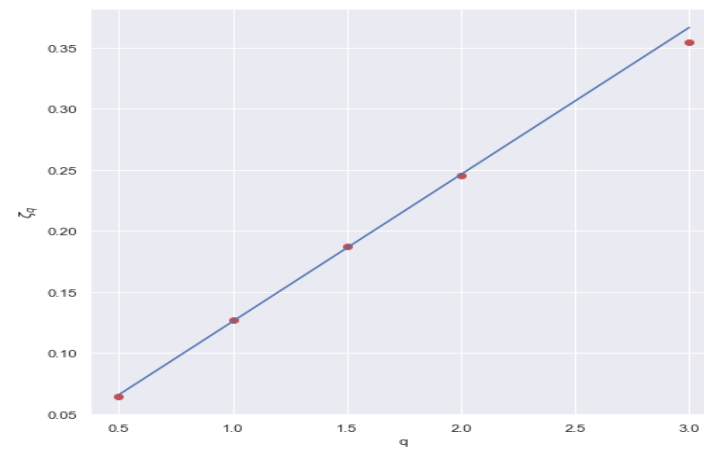


Figure: Relation entre ζ_q et q , $H \approx 0.12$

Application sur d'autres indices : Partie 1

En appliquant la même méthode à d'autres indices que celui du CAC-40, on obtient les résultats suivants :

Application sur d'autres indices : Partie 2

	Indices	Estimation du paramètre H	Estimation du paramètre nu
0	.FCHI	0.122568	0.320464
1	.AEX	0.133145	0.320414
2	.STOXX50E	0.100548	0.397587
3	.BFX	0.125937	0.306290
4	.IBEX	0.112744	0.314685
5	.GDAXI	0.122359	0.331459
6	.AORD	0.071875	0.459212
7	.FTSE	0.109180	0.365529
8	.MXX	0.079091	0.414202
9	.IXIC	0.123072	0.350766
10	.SPX	0.131715	0.381304
11	.RUT	0.110748	0.387228
12	.SSMI	0.149400	0.278083
13	.DJI	0.123347	0.390174
16	.KS11	0.102043	0.319863
17	.BVSP	0.127826	0.333823
18	.HSI	0.084487	0.327221
19	.KSE	0.099285	0.444501
20	.N225	0.105592	0.372272
21	.SSEC	0.105825	0.360319
22	.OSEAX	0.107394	0.369890
23	.GSPTSE	0.110107	0.391804
24	.SMI	0.109951	0.335748
25	.OMXHPI	0.107753	0.356045
26	.OMXSPI	0.116433	0.354460
27	.OMXC20	0.098222	0.364126
29	.FTMIB	0.114010	0.345525

Application sur d'autres indices : Partie 3

	h_est	names	nu_est
0	0.133954	SPX2.rk	0.321337
1	0.142315	FTSE2.rk	0.270677
2	0.113366	N2252.rk	0.320396
3	0.150251	GDAXI2.rk	0.274873
4	NaN	RUT2.rk	NaN
5	0.083370	AORD2.rk	0.359025
6	0.131013	DJI2.rk	0.317327
7	NaN	IXIC2.rk	NaN
8	0.130485	FCHI2.rk	0.291967
9	0.103370	HSI2.rk	0.281453
10	0.125847	KS11.rk	0.274713
11	0.145671	AEX.rk	0.290187
12	0.178427	SSMI.rk	0.223249
13	0.128117	IBEX2.rk	0.281662
14	0.110092	NSEI.rk	0.324883
15	0.092252	MXX.rk	0.324180
16	0.106595	BVSP.rk	0.312907
17	NaN	GSPTSE.rk	NaN
18	0.119857	STOXX50E.rk	0.337045
19	0.127094	FTSTI.rk	0.228910
20	0.133361	FTSEMIB.rk	0.298712

Figure: Estimation du paramètre H de différents indices. en Mai 2016.

Solution numérique : Le schéma de Milstein

Formule fermée non-nécessairement existante : Mouvement brownien standard \Rightarrow Schéma numérique d'Euler
Mouvement brownien fractionnaire \Rightarrow Schéma numérique de Milstein
Ce schéma est donnée, pour tout $H \in]0; 1[$, par :

$$\begin{aligned}\chi(t_{i+1}) &= \chi(t_i) + f(\chi(t_i), t_i)\Delta t + g(\chi(t_i), t_i)\Delta B_i^H \\ &\quad + \frac{1}{2}g(\chi(t_i), t_i)g'(\chi(t_i), t_i)[(\Delta B_i^H)^2 - (t_{i+1}^{2H} - t_i^{2H})] + \epsilon_i \quad (1)\end{aligned}$$

Ou

$$\begin{aligned}\chi(t_{i+1}) &= \chi(t_i) + f(\chi(t_i), t_i) - g(\chi(t_i), t_i)g'(\chi(t_i), t_i)Ht_i^{2H-1}\Delta t \\ &\quad + g(\chi(t_i), t_i)\Delta B_i^H + \frac{1}{2}g(\chi(t_i), t_i)g'(\chi(t_i), t_i)(\Delta B_i^H)^2 + \epsilon_{i'} \quad (2)\end{aligned}$$

En partant du fait que : $t_{i+1}^{2H} = (t_i + \Delta t)^{2H} \approx t_i^{2H} + 2Ht_i^{2H-1}\Delta t$

Le Processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire : Simulations

Simulation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire pour différentes valeurs de H

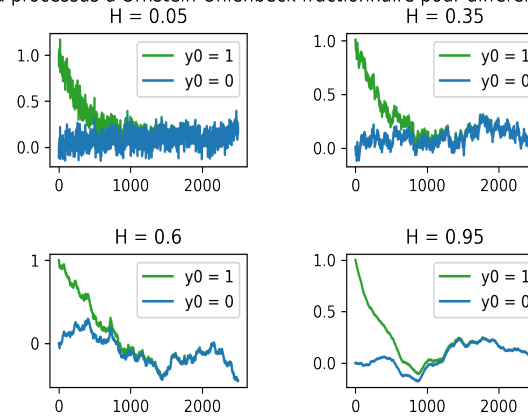


Figure: Simulation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck pour différentes valeurs de H

Le modèle RFSV : Définition, Partie 1

Empiriquement, les incréments de la log-volatilité se rapproche de la distribution Gaussienne (démontré par Gatheral et Rosenbaum), de plus ces incréments possèdent une propriété d'échelle, Gatheral et Rosenbaum proposent le modèle de volatilité suivant :

$$\log \sigma_{t+\Delta} - \log \sigma_t = \nu (B_{t+\Delta}^H - B_t^H),$$

Où : B_t^H est un mouvement brownien fractionnaire, $\nu > 0$ et H l'index de Hurst mesuré empiriquement, la volatilité peut donc s'écrire :

$$\sigma_t = \sigma \exp(\nu W_t^H)$$

Le modèle RFSV : Prévisions de la volatilité dans le modèle RFSV, resultats

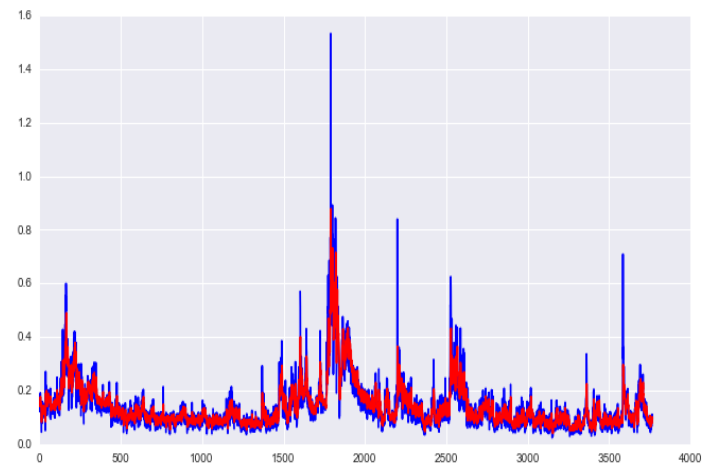


Figure: Prédiction de volatilité en rouge; données empiriques en bleu, graphique de Jim Gatheral