

Le Mouvement Brownien Fractionnaire appliqué
à la Log-Volatilité des actifs financiers (Rough
Volatility)

RÉDA BENSAHLA - UNIVERSITÉ DE LILLE

September 23, 2021

Sommaire

1	Introduction	3
1.1	L'utilisation du mouvement brownien dans les modèles financiers modernes	3
1.2	Modélisation de la volatilité	3
1.3	Le mouvement brownien fractionnaire	4
1.3.1	Définition	4
1.3.2	Fonction de covariance et d'auto-covariance	4
1.3.3	Simulation du mouvement brownien fractionnaire	4
1.3.4	Quelques simulations du mouvement brownien fractionnaire	5
1.4	La volatilité rugueuse	6
1.4.1	Définition	6
1.4.2	Estimation de l'index de Hurst H	7
1.4.3	Application sur un actif quelconque	7
1.5	Équations Différentielles Stochastiques dirigées par un mBF	7
1.5.1	Présentation sous la forme différentielle et sous la forme intégrale	7
1.5.2	Chemins rugueux	8
1.5.3	Schéma numérique de Milstein	8
1.6	Modèles et Processus construits sur le mouvement brownien fractionnaire	9
1.6.1	Linéarisation d'équations différentielles stochastiques unidimensionnelle	9
1.6.2	Présentation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire	10
1.6.3	Solution théorique exacte	10
1.6.4	Modèle de Cox-Ingersoll-Ross fractionnaire	11
1.6.5	Le modèle de Black-Scholes fractionnaire	12
	Conclusion	13
	A Preuves	13
	B Bibliographie	13

1 Introduction

1.1 L'utilisation du mouvement brownien dans les modèles financiers modernes

Dans la modélisation financière moderne, les prix ont toujours été modélisés par des martingales semi-continues, de plus, il a toujours été nécessaire de présenter certaines hypothèses, qui aujourd'hui peuvent être remises en cause, notamment :

- L'hypothèse de normalité des rendements, ceux-ci présentent en général des asymétries et des queues épaisses.
- La continuité des cours, pour cela il suffit d'observer les sauts, plus communément appelés "gaps" entre deux instants de quotations de cours.
- Mais surtout, et le plus important, l'hypothèse d'indépendance des accroissements, en effet, il s'agit ici d'ignorer l'impact des événements réalisés dans le passé, pour cela, Mandelbrot préconise d'utiliser le mouvement Brownien Fractionnaire à la place du mouvement Brownien.

C'est donc ce point qui nous a amené à faire cette étude sur le mouvement Brownien Fractionnaire, de plus, la Log-Volatilité étant fractionnaire l'utilisation de ce mouvement Brownien nous donne donc des modèles assez consistant, cependant, comme nous le verrons par la suite, il est assez difficile à mettre en place.

1.2 Modélisation de la volatilité

Les Logs-prix sont souvent modélisés comme des semi-martingales continues. Pour un actif donné avec un Log-Prix Y_t , ce dernier peut être modélisé comme suit :

$$dY_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

où μ_t est le terme de drift et W_t est un mouvement brownien uni-dimensionnel. Le terme σ_t représente quant à lui le processus de volatilité du modèle. D'un côté nous avons des modèles comme le modèle de Black-Scholes où la volatilité est souvent constante ou est une fonction déterministe du temps, puis d'un autre côté, nous avons des modèles à volatilité stochastiques, la volatilité σ_t est modélisée par une semi-martingale brownienne, parmi ces modèles nous pouvons citer le modèle de Heston dont voici la dynamique de la volatilité :

$$d\nu_t = \kappa(\theta - \nu_t)dt + \xi\sqrt{\nu_t}dB_t$$

Ou encore le modèle CEV ("Constant Elasticity of Variance Model") dont la volatilité est stochastique mais déterministe, sa dynamique s'écrit comme suit :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t^\gamma dB_t$$

1.3 Le mouvement brownien fractionnaire

1.3.1 Définition

Dans cette section, nous allons définir le mouvement brownien fractionnaire, ses propriétés, comment le simuler et enfin comment estimer l'index de Hurst (H).

Le mouvement brownien fractionnaire noté $\{B_H(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ d'exposant de Hurst $H \in]0; 1]$, est l'unique processus gaussien centré, nul en zéro, dont les accroissements sont stationnaires et auto-similaires, il est défini par :

$$B_H(t) := \int_{\mathbb{R}} [(t-s)_+^{H-\frac{1}{2}} - (-s)_+^{H-\frac{1}{2}}] dB(s),$$

Où : $B_H(0) = 0$ et $B(s)$ représente le mouvement brownien standard

1.3.2 Fonction de covariance et d'auto-covariance

Sa fonction de covariance $\Gamma(t, s)$ et d'autocovariance $\gamma(t, s)$ sont données par :

$$\Gamma(t, s) = \mathbb{E}[B_H(s)B_H(t)] = \frac{C_H}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} + |t-s|^{2H})$$

$$\gamma(t, s) = \frac{C_H}{2}(|t-s-1|^{2H} - 2|t-s|^{2H} + |t-s+1|^{2H})$$

où

$$C_H = \text{Var}[B_H(1)]$$

Lorsque $C_H = 1$ ce processus est appelé Mouvement Brownien Fractionnaire standard, de plus lorsque $H = \frac{1}{2}$, le mouvement brownien fractionnaire correspond à un mouvement brownien standard

Le comportement du mouvement brownien fractionnaire dépend donc de ce paramètre H :

- Lorsque $H < \frac{1}{2}$ les trajectoires sont assez irrégulières (comparativement au mouvement brownien standard).
- Lorsque $H > \frac{1}{2}$ les trajectoires sont plus régulières, on constate l'effet de longue mémoire.

1.3.3 Simulation du mouvement brownien fractionnaire

Nous allons donc présenter ici une méthode de simulation du mouvement brownien fractionnaire : La méthode de Cholesky

Méthode de Cholesky Il s'agit ici d'une méthode qui est exacte en théorie, mais qui n'est malheureusement pas très utile en pratique car son exécution nécessite beaucoup de temps.

Posons Γ la matrice de covariance du mouvement brownien discrétisé aux instants $\frac{i}{n}$, pour $i = 0, \dots, n-1$.

La méthode de Cholesky consiste à déduire Γ' de Γ en supprimant la première ligne et la première colonne, la matrice Γ' est symétrique définie positive et admet donc une décomposition de Cholesky $\Gamma' = LL^t$ où L est une matrice triangulaire inférieure.

Par la suite, on effectue le produit matriciel LZ où Z est un vecteur de $n-1$ variables aléatoires indépendantes gaussiennes centrées et réduite, le vecteur LZ est un vecteur gaussien centré et on a : $\mathbb{E}[(LZ)(LZ)^t] = \Gamma'$

Ainsi, le vecteur $B_H = (0, (LZ)^t)^t$ représente une trajectoire du mouvement brownien discrétisé.

1.3.4 Quelques simulations du mouvement brownien fractionnaire ...

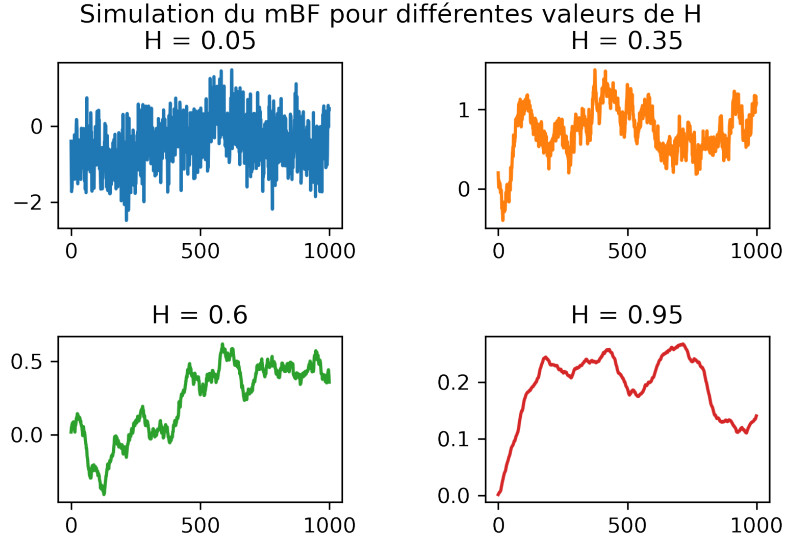


FIGURE 1 – Simulation du mouvement brownien fractionnaire pour différentes valeurs de H

1.4 La volatilité rugueuse

1.4.1 Définition

Les différents modèles historiques dans la modélisation financière moderne proposent deux approches concernant le processus de volatilité σ_t :

- Premièrement, des trajectoires assez régulières (constantes ou déterministes), dans le cas du modèle de Black-Scholes standard.
- Deuxièmement, dans le cas des modèles à volatilité locales ou stochastiques, comme le modèle de Heston, les trajectoires de volatilité modélisées correspondaient pratiquement à celles du mouvement brownien standard.

Dans l'article de Comte et Renault, les auteurs proposent, en partant du fait que la volatilité est un processus à mémoire-longue, de modéliser la log-volatilité en utilisant un mouvement brownien fractionnaire avec pour paramètre $H \in]\frac{1}{2}, 1[$, ce modèle est appelé Fractional Stochastic Volatility (FSV)

Dans l'article de Gatheral, Jaisson et Rosenbaum, un modèle plus complexe est proposé, le Rough Fractional Stochastic Volatility (RFSV), celui-ci est le même que le modèle FSV mais en prenant $H \in]0; \frac{1}{2}[$, nous détaillerons ces modèles dans la section ().

Nous utiliserons par la suite le mouvement brownien fractionnaire afin de modéliser les incréments de la log-volatilité, en partant du principe que les incréments stationnaires du mouvement brownien fractionnaire satisfont, pour tout $t \in \mathbb{R}, \Delta \geq 0, q > 0$:

$$\mathbb{E}[|B_{t+\Delta}^H - B_t^H|^q] = K_q \Delta^{qH}$$

Lorsque $H > \frac{1}{2}$, les incréments du mouvement brownien fractionnaire sont positivement corrélés et montre un effet de mémoire longue, en effet, la trajectoire de B_{t+1}^H dépend de B_t^H , et on a donc :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} Cov[W_1^H, W_k^H - W_{k-1}^H] = +\infty$$

En effet, $Cov[W_1^H, W_k^H - W_{k-1}^H]$ est de l'ordre k^{2H-2} avec $k \rightarrow \infty$

Où K_q représente le moment d'ordre q de la valeur absolue d'une variable gaussienne centrée et réduite ; Δ représente la variation temporelle.

L'approche de Gatheral et Rosenbaum est de partir du principe que l'on a accès à différentes observations du processus de volatilité σ_t et de découper les instants de volatilités sur $[0; T]$ comme suit : $\sigma_0, \dots, \sigma_\Delta, \dots, \sigma_{k\Delta}, \dots : k \in [0, N]$, où $N = \lfloor T/\Delta \rfloor$.

On définit donc, pour $q \geq 0$:

$$m(q, \Delta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |\log(\sigma_{k\Delta}) - \log(\sigma_{(k-1)\Delta})|^q$$

1.4.2 Estimation de l'index de Hurst H

(Graphiques à mettre pour appuyer les résultats)

La méthode d'estimation du paramètre H proposée par Gatheral, Jaisson et Rosenbaum se construit comme suit :

Il faut comprendre le comportement de la quantité $\frac{\log m(q, \Delta)}{\log(\Delta)}$, on s'aperçoit que cette relation est linéaire, à un coefficient ζ_q près, on conclut que pour tout q : $m(q, \Delta) \propto \Delta^{\zeta_q}$

Enfin il s'agit d'étudier le comportement de ζ_q en fonction de q , nos résultats nous montrent qu'il existe donc une relation linéaire entre ζ_q et q , de ce résultat est déduit la pente la droite qui correspond donc au paramètre H, et on déduit donc la relation d'échelle monofractal suivante :

$$\zeta_q = qH$$

Il convient de remarquer que H varie très peu en fonction du temps.

1.4.3 Application sur un actif quelconque

1.5 Équations Différentielles Stochastiques dirigées par un mBF

Dans cette section nous allons nous intéresser à la résolution théorique de certaines EDS ou lorsque la solution théorique n'est pas atteignable, nous présenterons un schéma de résolution numérique (Schéma de Milstein). Enfin, nous parlerons des équations dirigés par le mouvement brownien fractionnaire tels que le processus d'Ornstein-Uhlenbeck, le modèle CIR ou encore le modèle de Black Scholes fractionnaire.

1.5.1 Présentation sous la forme différentielle et sous la forme intégrale

L'équation différentielle stochastique dirigés par un mouvement brownien fractionnaire est donnée par :

$$dY_t = f(Y_t, t)dt + g(Y_t, t)dB_t^H$$

Où B_t^H est un mouvement brownien fractionnaire standard.

Une présentation alternative, sous forme d'intégrale :

$$Y_t = Y_s + \int_s^t f(Y_u, u)du + \int_s^t g(Y_u, u)dB_u^H \quad (1)$$

Pour le cas où $H = \frac{1}{2}$ l'intégrale stochastique de l'équation (1) est une martingale locale, ainsi le processus Y_t est, au minimum, une semi-martingale, ainsi la formule d'Itô est applicable.

Cependant, dans le cas où $H \neq \frac{1}{2}$ il est nécessaire de discuter les cas en fonction de H :

- Dans le cas où $H > \frac{1}{2}$ sous certaines conditions de régularité, on peut définir l'intégrale de Stieltjes.
- Dans le cas où $H \in]\frac{1}{4}; \frac{1}{2}[$ on pourrait définir une notion de chemins rugueux pour définir des intégrales stochastiques fractionnaires.

1.5.2 Chemins rugueux

1.5.3 Schéma numérique de Milstein

Une EDS ne possède pas souvent une solution théorique explicite (formule fermée), et il est donc parfois nécessaire d'avoir recours à des Schémas numérique de calcul, dans le cas où nous avons une EDS dirigée par un mouvement brownien standard, il peut être judicieux d'utiliser un Schéma numérique d'Euler.

Le Schéma de Milstein est valable pour tout $H \in]0; 1[$, sa formule est donnée par :

$$\begin{aligned} \chi(t_{i+1}) = \chi(t_i) &+ f(\chi(t_i), t_i)\Delta t + g(\chi(t_i), t_i)\Delta B_i^H \\ &+ \frac{1}{2}g(\chi(t_i), t_i)g'(\chi(t_i), t_i)[(\Delta B_i^H)^2 - (t_{i+1}^{2H} - t_i^{2H})] + \epsilon_i \end{aligned} \quad (1)$$

ϵ_i représente un résidu (différence entre la solution théorique et la solution numérique donnée par la solution numérique de Milstein)

On peut donner une version plus courte et plus pratique de la formule, en partant du principe que : $t_{i+1}^{2H} = (t_i + \Delta t) \approx t_i^{2H} + 2Ht_i^{2H-1}\Delta t$

Ce qui nous donne donc :

$$\begin{aligned} \chi(t_{i+1}) = \chi(t_i) &+ f(\chi(t_i), t_i) - g(\chi(t_i), t_i)g'(\chi(t_i), t_i)Ht_i^{2H-1}\Delta t \\ &+ g(\chi(t_i), t_i)\Delta B_i^H + \frac{1}{2}g(\chi(t_i), t_i)g'(\chi(t_i), t_i)(\Delta B_i^H)^2 + \epsilon_i' \end{aligned} \quad (2)$$

ϵ_i' représente le résidu, et est supérieur à ϵ_i car l'approximation de t_{i+1}^{2H} accroît cette marge d'approximation.

1.6 Modèles et Processus construits sur le mouvement brownien fractionnaire

1.6.1 Linéarisation d'équations différentielles stochastiques unidimensionnelle

Pour pouvoir avancer dans la suite de notre étude (pour pouvoir donner une solution exacte du Processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire) nous avons besoin d'introduire, suivant la présentation de [UD07], une méthode de construction de solutions théoriques.

Théorème 1 Posons :

$$dx = f(x, t)dt + g(x, t)dB^H(t) \quad (1)$$

Où $x(0) = x_0, t \geq 0, H \in (0, 1)$ et $dB^H(t)$ l'incrément du mouvement brownien fractionnaire $B^H(t)$, avec f et g , deux fonctions supposées assez régulières, l'équation (1) peut s'écrire sous la forme linéaire suivante :

$$dy = (a(t)y + b(t)dt)dt + (c(t)y + e(t))dB^H(t) \quad (2)$$

Via la transformation inverse $y = h(x, t)$ avec sa dérivée partielle par rapport à x non-nulle si et seulement si on a :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\frac{\partial}{\partial x}(g(x, t)) \frac{\partial}{\partial x}(g(x, t)L)}{\frac{\partial}{\partial x}(g(x, t)L)} \right) = 0$$

Avec $L = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{g} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f}{g} - Ht^{2H-1} \frac{\partial g}{\partial x} \right)$

Les étapes de la linéarisation sont les suivantes, et dépendent de $c(t)$ de l'équation (2) :

— Si $c(t) = 0$ alors on a :

$$h(x, t) = \left(\int \alpha(t)dt \right)^{-1} \left(\int \frac{1}{g(x, t)} dx \right)$$

La condition $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\frac{\partial}{\partial x}(g(x, t)) \frac{\partial}{\partial x}(g(x, t)L)}{\frac{\partial}{\partial x}(g(x, t)L)} \right) = 0$ est bien respectée et l'équation différentielle stochastique linéaire s'écrit donc :

$$dy = \beta(t)e(t)dt + e(t)dB^H$$

avec $e(t) = \left(\int \alpha(t)dt \right)^{-1}$, α et β sont définies par identification dans l'égalité :

$$\alpha(t)y + \beta(t) = \int \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{g} \right) + \frac{f}{g} - Ht^{2H-1} \frac{\partial g}{\partial x}$$

— Si $c(t) \neq 0$ alors on a :

$$h(x, t) = e^{-M(t) \int \frac{1}{g(x, t)} dx}$$

$$\text{Avec } M(t) = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(g(x, t)) \frac{\partial}{\partial x}(g(x, t)L)}{\frac{\partial}{\partial x}(g(x, t)L)}$$

Nous avons maintenant une forme linéaire de notre équation, il faut maintenant la résoudre en utilisant la méthode du facteur intégrant, définit comme suit :

Définition 1 La fonction $F = F(t, B^H)$ vérifiant $d(Fy) = D_1(t, B^H)dt + D_2(t, B^H)dB^H$ est un facteur intégrant pour des équations différentielles stochastiques linéaires unidimensionnelles, on peut donc écrire :

$$F(t, W^H) = \exp \left(- \int^t c(s)dB^H(s) + H \int^t s^{2H-1}c^2(s)ds - \int^t a(s)ds \right)$$

Par suite, on a donc la solution de l'équation différentielle stochastique linéaire suivante :

$$y(t) = \frac{1}{F} \left(\int^t F(s)b(s)ds - 2H \int^s s^{2H-1}F(s)c(s)e(s)ds + \int^t F(s)e(s)dB^H(s) + y_0 \right)$$

1.6.2 Présentation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire

Le processus de Ornstein-Uhlenbeck associé au mouvement brownien fractionnaire associé est donné par l'équation suivante :

$$dx = \theta(t)(\mu(t)(t) - x)dt + \sigma(t)dB_t^H$$

Ce processus est souvent utilisé pour modéliser des taux en finance.

1.6.3 Solution théorique exacte

Pour donner une solution théorique exacte on utilise la méthode du facteur intégrant précédemment introduit (cf section 1.6.1) dont l'expression est la suivante : $F(t) = e^{\int^t \theta(s)ds}$

On a donc la solution suivante :

$$y(t) = e^{\int^t \theta(s)ds} \left(\int^t e^{\int^s \theta(s)ds} \theta(s)\mu(s)ds + \int^t e^{\int^s \theta(s)ds} \sigma(s)dB^H(s) + y_0 \right) \quad (3)$$

Il s'agit maintenant de donner une solution numérique à (3). Pour cela, on utilise le schéma de Milstein et on a donc, pour le paramètre de Hurst H quelconque :

$$X_{j+1} = X_j + \theta(\mu - X_j)\Delta_t + \sigma B_j^H$$

Quelques simulations du processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire ...

Simulation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire pour différentes valeurs de H

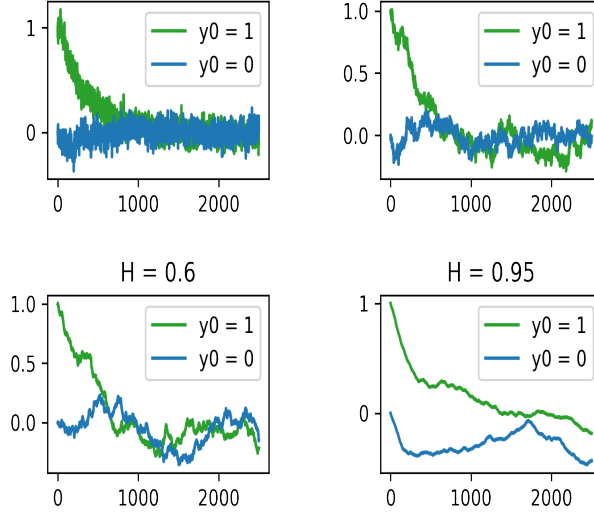


FIGURE 2 – Simulation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck pour différentes valeurs de H

1.6.4 Modèle de Cox-Ingersoll-Ross fractionnaire

Le modèle CIR dirigé par un mouvement brownien fractionnaire est défini par la dynamique suivante :

$$dx = \gamma(t)(\theta(t) - x)dt + \sigma(t)\sqrt{x}dB^H(t)$$

Ce modèle est utilisé afin de modéliser l'évolution de taux d'intérêts

On a : $f(x, t) = \gamma(t)(\theta(t) - x)$, $g(x, t) = \sigma(t)\sqrt{x}$. On a donc $L = \frac{1}{2} \frac{\sigma(t)}{\sqrt{x}} + \frac{\sigma(t)}{\sigma(t)} \frac{-1}{2} x^{-\frac{3}{2}} \theta(t) - \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} - H t^{2H-1} \frac{-\sigma(t)}{4} x^{-\frac{3}{2}}$

Puis on a : $\frac{\partial}{\partial x} g(x, t) L = x^{-2} (\frac{1}{2} \gamma(t) \theta(t) - \frac{\sigma(t)^2}{4} H t^{2H-1})$

On remarque que pour $\sigma(t) = \sqrt{\frac{2\gamma(t)\theta(t)}{H t^{2H-1}}}$, $\frac{\partial}{\partial x} g(x, t) L$ s'annule et donc d'après la méthode décrite dans 1.6.1 on peut écrire l'équation différentielle stochastique sous forme linéaire. Nous devons d'abord déterminer $\alpha(t)y$ comme décrit à la section 1.6.1 :

$$\alpha(t)y + \beta(t) = 2x^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\sigma(t)} + \frac{\gamma(t)}{\sigma(t)} (\theta(t)x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2} H t^{2H-1} \sigma(t) x^{-\frac{1}{2}}$$

On a donc :

$$\alpha(t)y + \beta(t) = x^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{\gamma(t)}{\sigma(t)} + 2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\sigma(t)} \right)$$

Or $\beta(t)$ vaut 0 on a donc :

$$\left(\int \alpha(t)dt\right)' + \left(\frac{\gamma(t)}{2} + \sigma(t)\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\sigma(t)}\right) \int \alpha(t)dt = 0$$

On peut donc égaliser :

$$\int \alpha(t)dt = e^{-\int \frac{\gamma(t)}{2}dt} \sigma(t)^{-1}$$

On obtient finalement :

$$y = 2e^{\int \frac{\gamma(t)}{2}dt} \sqrt{x}$$

On peut donc écrire l'équation différentielle stochastique linéaire :

$$dy = e^{\int \frac{\gamma(t)}{2}dt} \sigma(t)dB^H(t)$$

On obtient la solution en intégrant :

$$y(t) = \int_0^t e^{\int \frac{\gamma(t)}{2}dt} \sigma(t)dB^H(t) + K$$

Enfin, on obtient donc la solution du modèle CIR :

$$x(t) = \left(\frac{1}{2} \exp\left(-\int \frac{1}{2}\gamma(t)dt\right) \left(\int_0^t \exp\left(\int \frac{1}{2}\gamma(t)dt\right) \sigma(t)dB^H(t) + \sqrt{x(0)}\right)\right)^2$$

On utilise maintenant un schéma numérique de Milstein afin de donner une solution numérique de l'expression plus haut, on a donc :

$$X_{j+1} = X_j + (\gamma(\theta - X_j)) - \frac{1}{2}H\sigma^2 t_i^{2H-1} \Delta t + \sigma \sqrt{(X_j)} \Delta B_j^H + \frac{1}{4}\sigma^2 (\Delta B_j^H)^2$$

Quelques simulations du modèle CIR fractionnaire ...

1.6.5 Le modèle de Black-Scholes fractionnaire

Conclusion

A Preuves

B Bibliographie