a

Modélisation de la volatilité et Intérêt de l'utilisation du mouvement brownien fractionnaire

Log-prix Y_t : Semi-martingales souvent modélisées comme suit :

$$dY_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

Exemple : Modèle CEV("Constant Elasticity of Variance Model")

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t^{\gamma} dB_t$$

Avec W_t et B_t deux mouvements browniens standards

Le mouvement brownien fractionnaire : Définition

Le Mouvement Brownien Fractionnaire d'indice de Hurst $H \in]0;1]$ est l'unique processus Gaussien Centré dont les caractéristiques sont les suivantes :

- $B_0^H = 0$ (Nul en zéro)
- Les accroissements sont stationnaires et auto-similaires

Il est aussi définit par sa fonction de covariance :

$$\Gamma(t,s) = \mathbb{E}[B^H(s)B^H(t)] = \frac{C(H)}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} + |t-s|^{2H}))$$

Le mouvement brownien fractionnaire : Une autre définition

Le Mouvement Brownien Fractionnaire peut aussi être définit par la représentation de Mandelbrot-Van-Ness

$$B^H(t) := \frac{1}{C(H)} \int_{\mathbb{R}} [((t-s)^+)^{H-\frac{1}{2}} - ((-s)^+)^{H-\frac{1}{2}}]dB(s),$$

Le comportement du mouvement brownien fractionnaire dépend de l'index de Hurst H :

- Lorsque $H < \frac{1}{2}$ les trajectoires sont irrégulières
- Lorsque $H > \frac{1}{2}$ les trajectoires sont plus régulières, on constate l'effet de longue mémoire

Comparaison de deux mouvements browniens fractionnaires ($H = 0.2$ et $H = 0.8$)

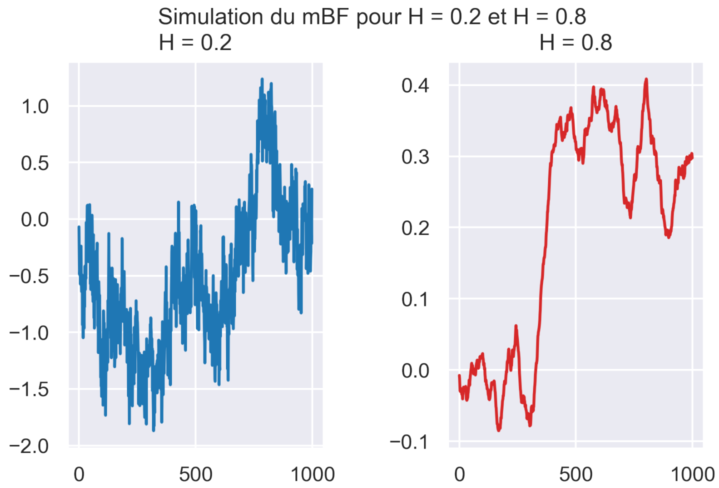

Figure: Comparaison de deux mouvements browniens fractionnaires

La volatilité rugueuse (Rough Volatility) : Part 1

Au départ, la volatilité a été modélisée de deux façons :

- Dans un premier temps : La volatilité constante ou déterministe (Cf Modèle de Black-Scholes)
- Dans un second temps : La volatilité locale ou stochastiques (Cf Modèle de Heston)

La volatilité rugueuse (Rough Volatility) : Part 2

Proposition de nouveaux modèles basés sur le mouvement brownien fractionnaire, cette fois ci avec le processus de volatilité dirigé par un mouvement brownien fractionnaire :

- Premier modèle : FSV (Fractional Stochastic Volatility), proposé par Eric Renault et Fabienne Comte en 1998, il ne prenne en considération que $H \in]\frac{1}{2}; 1[$ (On ne se concentrera pas sur celui-ci)
- Deuxième modèle : RFSV (Rough Stochastic Volatility), reprenant les travaux de Comte et Renault, proposé en 2016, celui-ci prend en compte $H \in]0; \frac{1}{2}]$, nous reparlerons de ce modèle par la suite

La volatilité rugueuse (Rough Volatility) : Part 3

Intérêt de l'utilisation du mouvement brownien fractionnaire :

Modéliser les incréments de la log-volatilité, en partant du principe que les incréments stationnaires du mouvement brownien fractionnaire satisfont, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Delta \geq 0$, $q > 0$:

$$\mathbb{E}[|B^H_{t+\Delta} - B^H_t|^q] = K_q \Delta^{qH}$$

Pour $H > \frac{1}{2} \Rightarrow$ Corrélation positive entre les incréments du mouvement brownien fractionnaire $\Rightarrow$ Effet mémoire longue

La trajectoire de B^H_{t+1} dépend de B^H_t, donc :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} Cov[W^H_1, W^H_k - W^H_{k-1}] = +\infty$$