El mètode de les mitjanes per a l'estudi de l'escissió de separatrius per a un sistema amb un grau i mig de llibertat

Rubén Berenguel

Setembre 2007

Treball d'investigació per a la obtenció del Diploma d'Estudis Avançats realitzat sota la supervisió del Dr. Ernest Fontich i Julià al Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi. Convocatòria de Setembre del 2007.

Índex

1 Introducció

En aquesta secció introduirem conceptes i definicions bàsiques de la teoria de sistemes dinàmics posant èmfasi en els sistemes dinàmics continus. Tot seguit donarem una introducció breu al fenòmen d'escissió de varietats invariants i als mètodes de Melnikov i de les mitjanes, que seran aprofundits més endavant. També situarem aquests mètodes en el context històric en què es desenvolupen.

1.1 Sistemes dinàmics, objectes invariants

Primer introduirem uns conceptes bàsics en sistemes dinàmics

Anomenem sistema dinàmic a una terna (M, φ, T) on T és un grup additiu (o un monoide), M un conjunt i $\varphi : T \times M \to M$ una funció verificant

$$\begin{aligned} \varphi(0, x) &= x \\ \varphi(t_2, \varphi(t_1, x)) &= \varphi(t_1 + t_2, x), \quad \forall x \in M, \forall t_1, t_2 \in T. \end{aligned}$$

Anomenem a M l'espai de fases del sistema i φ la funció d'evolució del sistema.

En aquest context general, anomenem òrbita de x a $\gamma_x \subset M$ definit per

$$\gamma_x = \{\varphi(x, t), t \in T\}.$$

Direm que una òrbita és periòdica si $\varphi(x, t_1) = \varphi(x, t_2)$ amb $t_1 \neq t_2$, en particular diem que un punt és fix si $\varphi(x, t) = x$ per a qualsevol t. Anomenem conjunt invariant a qualsevol conjunt $X \subset M$ tal que $\varphi(x, t) \in X$ per a tot $x \in X$ i qualsevol $t \in T$. Observem que les òrbites periòdiques són invariants.

Centrarem ara aquesta exposició introductòria en sistemes dinàmics continus. En aquest cas, M serà una varietat diferenciable n-dimensional, $T = \mathbb{R}$ i φ el flux solució d'una equació diferencial

$$\dot{z} = f(z, t, \varepsilon), \quad z \in M, \, t \in \mathbb{R}, \, \varepsilon \geq 0 \text{ paràmetre}$$

A la variable t se l'anomenarà *temps*, i si l'equació diferencial no depèn del temps direm que el sistema és autònom.

En aquest cas apareixen certes definicions accessòries associades a la funció f i en particular a la seva diferencial. Donat un punt d'equilibri $x \in M$, podem descomposar $T_x M$ (l'espai tangent a x de M) en 3 subespais segons l'espectre de Df_x, E^s, E^u i E^c definits com les sumes d'espais propis associats a valors propis de part real negativa, positiva i zero respectivament. Aquests espais són tangents a les varietats W^s, W^u, W^c passant per x que anomenarem respectivament estable, inestable i central (on els super-índexs es refereixen a *stable*, *unstable* i *center* respectivament) . En el teorema següent, traslladem el punt fix a l'origen per simplificar l'enunciat.

Teorema 1. *Suposem que* $A_S : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$, $A_U : \mathbb{R}^u \to \mathbb{R}^u$ *i* $A_C : \mathbb{R}^c \to \mathbb{R}^c$ *són aplicacions lineals els valors propis de les quals tenen parts reals estrictament negatives, estrictament positives i zero respectivament. Si* $x = (u, v, w) \in$

$\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^c$ considerem el següent sistema de classe $\mathcal{C}^r$, $1 \leq r < \infty$,

$$\begin{aligned} \dot{u} &= A_S u + R_S(u,v,w), \\ \dot{v} &= A_U v + R_U(u,v,w), \\ \dot{w} &= A_C w + R_C(u,v,w), \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

on $R_{S,U,C}$ verifica $R_{S,U,C}(0) = 0$, $DR_{S,U,C}(0) = 0$, aleshores pel punt fix (0,0,0) de (1.1.1) hi passen 3 varietats W^s, W^u, W^c de classe $\mathcal{C}^r$ tangents en 0 als espais propis de A_S, A_U i A_C de dimensions s,u i c les dimensions corresponents als respectius espais de vectors propis. Les varietats W^s i W^u són úniques. A més els punts de les varietats W^s i W^u tenen el següent comportament asimptòtic respecte el flux $\varphi(t,u,v,w)$ del sistema:

$$\begin{aligned} d(\varphi(t,x),x) &\leq Ce^{-\alpha t}, \quad t \geq 0 \text{ si } x \in W^s, \\ d(\varphi(t,x),x) &\leq Ce^{\alpha t}, \quad t \leq 0 \text{ si } x \in W^u, \end{aligned}$$

per algunes $\alpha > 0$, $C > 0$. A més, si el sistema és $\mathcal{C}^\infty$ o analític les varietats estable i inestable són $\mathcal{C}^\infty$ o analítiques.

Les nocions de varietats invariants estable, inestable i central associades a punts d'equilibri es poden estendre a altres objectes invariants com tors invariants o òrbites periòdiques.

1.2 Escissió de varietats invariants

En la nostra situació, considerarem un sistema dinàmic amb un objecte invariant i varietats estable i inestable tals que coincideixen totalment o bé ho fan en part. Si pertorbem aquest sistema, genèricament desapareixerà aquesta coincidència, obtenint un fenomen anomenat escissió de separatrius (*separatrix splitting*) o en general escissió de varietats invariants. Aquest estudi de l'escissió es concreta estudiant els objectes invariants que només tenen varietats estable i inestable.

L'escissió de separatrius es troba genèricament en equacions diferencials en el pla amb un punt fix hiperbòlic que tenen una connexió homoclínica. Una connexió és una branca d'una varietat invariant enllaçant dos punts fixos, l'adjectiu homoclínic es refereix a que enllaça un punt amb si mateix i heteroclínic que n'enllaça dos diferents. Observem que les varietats invariants d'un punt fix hiperbòlic en el pla són corbes 1-dimensionals.

Considerem doncs un sistema autònom en el pla

$$\dot{z} = f(z), \qquad z \in \mathbb{R}^2, \qquad f \in \mathcal{C}^r,$$

amb un punt fix hiperbòlic en $z = 0$ i una connexió homoclínica en aquest punt. Si pertorbem aquest sistema amb una pertorbació periòdica en el temps

$$\dot{z} = f(z) + \varepsilon g(z,t,\varepsilon), \quad z \in U \subset \mathbb{R}^2,\ g(z,t,\varepsilon)\ T\text{-periòdica en } t,\ \varepsilon << 1,$$

el punt fix esdevé una òrbita periòdica hiperbòlica, amb varietats invariants 2-dimensionals en l'espai $(z, t) \in \mathbb{R}^3$ que genèricament ja no coincideixen.

Aquesta escissió es pot estudiar mitjançant teoria de pertorbacions de primer ordre, mesurant la distància entre les dues varietats associada a un punt p en un pla $t = t_0$ ortogonal a la connexió no pertorbada. La teoria de Poincaré-Melnikov diu que aquesta distància vindrà donada per

$$d(t_0, \varepsilon) = \frac{M(t_0)}{\|f(p_0)\|}\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \tag{1.2.1}$$

on $M(t_0)$ és l'anomenada funció de Poincaré-Melnikov. A la secció 3 donarem més detalls d'aquest mètode.

En sistemes anomenats de dinàmica lenta ($\dot{z} = \varepsilon f(z, t, \varepsilon)$, ε petit) es pot demostrar ([Fon95]) que la funció de Melnikov verifica

$$|M(t_0)| \leq Ae^{-B/|\varepsilon|}$$

on A i B són independents de ε (i estan relacionades amb les singularitats per a t complex de les solucions del camp no pertorbat), de manera que en el desenvolupament de (1.2.1) el terme dominant podria estar contingut en $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ i llavors aquesta aproximació no dóna prou informació.

Un mètode per obtenir expressions asimptòtiques rigoroses és introduir un nou paràmetre i estudiar el sistema:

$$\dot{z} = f(z) + \mu g(z, t/\varepsilon, \mu).$$

D'aquesta manera

$$d(t_0, \mu, \varepsilon) = \frac{M(t_0, \varepsilon)}{\|f(p)\|}\mu + \mathcal{O}(\mu^2)$$

i en aquest cas si μ és prou petit comparat amb $M(t_0, \varepsilon)$ (que és exponencialment petit en ε), tenim $d \sim M(t_0, \varepsilon)\mu/\|f(p)\|$. Aquest mètode no és capaç de donar resultats rigorosos en tots els casos, sinó només en un conjunt petit de l'espai de paràmetres.

L'escissió de separatrius exponencialment petita va ser descoberta per Poincaré estudiant una pertorbació del pèndol matemàtic. També es troba associada a tors parcialment hiperbòlics, fet que va descobrir Arnold ([Arn64]) quan estudiava la difusió de les variables d'acció en sistemes propers a integrables.

També podem estudiar aplicacions properes a la identitat, que apareixen com aplicacions de Poincaré de sistemes de dinàmica lenta.

Lazutkin va estudiar l'aplicació estàndard $F(x, y) = (x + y + \varepsilon \sin x, y + \varepsilon \sin x)$ i en va determinar una fórmula per a l'angle d'escissió a [Laz03] (a un article editat en rus al 1984, reeditat en anglès al 2003). Va ser el primer en donar una fórmula explícita en un problema no trivial, introduint noves tècniques analítiques en l'àmbit del problema.

Fontich i Simó estudien l'escissió de separatrius per famílies de difeomorfismes en entorns de la identitat de classe $\mathcal{C}^\omega$ (analítiques) i $\mathcal{C}^r$ a [FS90b], [FS90a] respectivament. En el cas analític, sota certes hipòtesis que es poden considerar generals es troben fites exponencialment petites per a la distància entre varietats invariants. En el cas diferenciable són del tipus $c\varepsilon^s$ amb s depenent del grau de diferenciabilitat r.

Una gran quantitat d'autors han estudiat sistemes del tipus

$$\dot{z} = f(z) + \mu\varepsilon^p g(z, t/\varepsilon, \mu), \quad \varepsilon > 0,$$

cercant valors òptims de p per als quals es poden provar fites exponencialment petites per a l'escissió. Per exemple, a [Fon93] es troben cotes superiors exponencialment petites per $p > -1/2$. Holmes, Marsden i Scheurle estudien ([HMS88]) fites superiors i inferiors per a l'escissió per a sistemes prou generals i $p > 8$.

L'estudi de sistemes particulars permet millorar les fites. Un dels sistemes més estudiats és la pertorbació del pèndol

$$\ddot{x} + \sin x = \mu\varepsilon^p \sin t/\varepsilon,$$

per al qual s'han donat diversos refinaments.

El nostre estudi serà sobre una pertorbació del pèndol matemàtic, més general que l'estudiada per Poincaré, que n'és un cas particular. Donarem una fórmula asimptòtica per a la distància entre les separatrius que serà exponencialment petita.

1.3 El mètode de les mitjanes

La teoria de les mitjanes o d'*averaging* es basa en l'estudi d'equacions del tipus

$$\dot{z} = \varepsilon f(t, z), \quad z(t_0) = z_0$$

on f és T-periòdica en t. Aquest estudi es basa en considerar la mitjana en el temps de la funció f

$$f^0(z) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t, z)\, dt$$

i comparar les solucions de l'equació diferencial que en resulta

$$\dot{y} = f^0(y), \quad y(t_0) = y_0 \tag{1.3.1}$$

amb les de l'equació original.

El teorema més bàsic sobre mitjanes és el següent, en que aproximem a primer ordre per a temps d'ordre ε^{-1}. La prova es pot trobar a [SV85].

Teorema (de mitjanes amb una freqüència, 1)**.** *Si $f(t,z)$ és contínua i Lipschitz respecte z en $D \subset \mathbb{R}^n$ per a $t \geq 0$, i $y(t)$ és solució de (1.3.1) i verifica $y(t) \in D$ per a tot $0 \leq t \leq L/\varepsilon$ llavors*

$$z(t) - y(t) = \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \textit{quan } \varepsilon \to 0, \ \textit{per a } 0 \leq t \leq L'/\varepsilon$$

El següent teorema s'aplica en contexts més relacionats amb la mecànica.

Teorema (de mitjanes amb una freqüència, 2)**.** *Considerem el següent sistema d'$n+1$ equacions diferencials:*

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \omega(I) + \varepsilon f(I,\varphi) \\ \dot{I} &= \varepsilon g(I,\varphi) \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

on les funcions f i g són 2π periòdiques respecte φ, $\varphi \in S^1$ i $I \in G \subset \mathbb{R}^n$. Considerem el sistema

$$\dot{J} = \varepsilon g^0(J), \qquad \textit{on} \quad g^0(J) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(J,\varphi)\, d\varphi. \tag{1.3.3}$$

Siguin $I(t), \varphi(t)$ solucions del sistema (1.3.2) amb condicions inicials $I(0)$, $\varphi(0)$ i sigui $J(t)$ solució del sistema (1.3.3) amb condició inicial $J(0) = I(0)$. Suposem que es verifiquen

(i) les funcions ω, f i g estan definides a G una regió acotada, i tant elles com les seves derivades fins a ordre dos estan acotades,

(ii) en la regió G tenim

$$\omega(I) \geq c > 0,$$

(iii) per a $0 \leq t \leq \varepsilon_0^{-1}$, un entorn de radi d del punt $J(t)$ pertany a G.

Aleshores per a un $\varepsilon < \varepsilon_0$ prou petit

$$|I(t) - J(t)| < c_2\varepsilon, \textit{per a tot } 0 \leq t \leq \varepsilon^{-1}$$

on c_2 depèn de c_1, c i d però és independent de ε.

Aquests mètodes per estudiar pertorbacions van tenir el seu origen en el segle XVIII en obres de Lagrange i Laplace. En els seus treballs intentaven determinar l'efecte dels moviments seculars (canvis en els perihelis) deguts a les pertorbacions sobre un planeta degudes a la interacció amb tots els altres.

Aquests mètodes van anar prenent rigor al llarg del segle XIX amb els treballs en dinàmica celest de Poincaré i finalment al segle XX, on Fatou va donar la primera prova asimptòtica. A partir d'aquests resultats s'han anat succeint nous resultats i noves proves, on la influència de l'escola russa ha estat notable, sobretot gràcies a la referència clàssica deguda a Bogoliubov i Mitropolski (Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillation).

En els darrers anys l'interès s'ha centrat en l'estudi del residu que resulta de l'aplicació del mètode, en particular s'han donat canvis transformant sistemes d'una freqüència com l'anterior en sistemes del tipus

$$\dot{z} = \varepsilon(g(z,\varepsilon) + r(z,t,\varepsilon)), \quad \varepsilon > 0,$$

on el residu r compleix una fita del tipus

$$|r| < Ae^{-B/\varepsilon^c},$$

i més endavant es va estendre aquest resultat al cas multifreqüència. Resultats d'aquest tipus així com les eines per demostrar-los tenen un gran interès en l'estudi de l'escissió de separatrius, ja que residus de tipus exponencialment petit es relacionen amb distància exponencialment petita.

1.4 Nocions bàsiques de mecànica hamiltoniana

La mecànica hamiltoniana és juntament amb la lagrangiana la formulació de la mecànica clàssica més estesa.

Els seus elements constituents bàsics són una varietat simplèctica, que és una varietat diferenciable amb una forma simplèctica no degenerada definida sobre el fibrat tangent i una funció (hamiltonià) en la varietat.

Definició. *Una forma simplèctica sobre una varietat diferenciable M de dimensió $2n$ és una forma sobre el fibrat tangent T^*M. En certes coordenades locals (p,q) es pot escriure com:*

$$w^2 = dp \wedge dq = dp_1 \wedge dq_1 + \ldots + dp_n \wedge dq_n.$$

A les funcions coordenades p, q se les anomena coordenades simplèctiques o coordenades canòniques (o canòniques conjugades).

Un hamiltonià serà una funció $H(p,q) : M \to \mathbb{R}$. Partint d'ell i de l'estructura simplèctica, podem definir les equacions de Hamilton de la mecànica, que es poden expressar per

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}.$$

És possible construir funcions coordenades (p,q) canòniques per a qualsevol forma w^2 de manera que $w^2 = dp \wedge dq$. Aquest procés permet donada p construir q, o recíprocament.

2 Mètode de *continuous averaging* de Treschev

El mètode de *continuous averaging* de Treschev [Tre96] és una extensió del mètode de Neishtadt a [Neĭ84] per l'estudi de la mitjana de sistemes analítics d'una freqüència amb freqüència ràpida. Més endavant C. Simó a [Sim94] va utilitzar aquesta idea de Neishtadt per a sistemes multifreqüència.

El mètode de Neishtadt es basa en realitzar un nombre $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ de canvis propers a la identitat successius al sistema pertorbat, de manera que al final del procés iteratiu el residu amb dependència del temps es veu reduït a un terme exponencialment petit. Ambdós autors utilitzen aquest mètode per l'estudi de l'escissió de separatrius.

El mètode de *continuous averaging* es basa en determinar aquest canvi proper a la identitat com el desplaçament al llarg de les solucions d'una equació diferencial, és a dir, com una família de canvis definits com solució d'una certa equació diferencial per diferents valors del "temps", de manera que en augmentar aquest temps s'efectua una mitjana.

A continuació donarem una visió general del mètode amb un raonament heurístic per entendre'n l'origen, i tot seguit el teorema de mitjanes per sistemes analítics amb una freqüència. L'eina bàsica en aquest teorema seran les funcions majorants. L'apèndix és dedicat a la seva definició, propietats i algunes aplicacions.

Finalment a l'última secció del treball determinarem exactament l'escissió de les separatrius per al sistema considerat, de manera que majorarem amb molta precisió les equacions i particularitzarem els càlculs per a sistemes hamiltonians.

2.1 Mètode, raonament heurístic

Sigui $\hat{a}$ un camp vectorial analític respecte z i considerem el sistema

$$\dot{z} = \hat{a}(z), \qquad z \in M,$$

on $\cdot$ indica derivació respecte t. M serà l'espai de fases, una varietat diferenciable m-dimensional. Volem transformar aquest sistema mitjançant un canvi

$$z \mapsto w(z, \hat{\delta}), \qquad \hat{\delta} \geq 0,$$

que vindrà definit com desplaçament sobre les solucions del sistema

$$w' = F(w, \delta), \quad w(z, 0) = z, \quad 0 \leq \delta \leq \hat{\delta},$$

on $'$ indica derivació respecte δ. Un cop efectuat el canvi de coordenades, obtindrem una nova família de sistemes transformats

$$\dot{w} = a(w, \delta).$$

Volem trobar una expressió per a a. Per fer-ho derivem aquesta expressió respecte δ. Observem que:

$$\frac{d}{d\delta}\left(\frac{dw(z,\delta)}{dt}\right) = \frac{dF(w(z,\delta),\delta)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial w}(w(z,\delta),\delta)\frac{dw}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial w}a,$$
$$\frac{d}{d\delta}a(w(z,\delta),\delta) = \frac{\partial a}{\partial w}(w(z,\delta),\delta)\frac{dw}{d\delta} + \frac{\partial v}{\partial \delta}(w(z,\delta),\delta) = \frac{\partial a}{\partial w}F + \frac{\partial a}{\partial \delta}.$$

Podem simplificar aquesta expressió com

$$a_\delta = -[F,a],$$

on $[v_1, v_2] = \partial_{v_2} v_1 - \partial_{v_1} v_2$ és el commutador de camps vectorials. D'aquesta manera obtenim una expressió per a l'equació transformada com solució d'una equació diferencial.

En el cas que el sistema sigui no autònom, $\hat{a} = \hat{a}(z,t)$, afegim una nova variable τ tal que $\dot{\tau} = 1$. D'aquesta manera el sistema $\dot{z} = \hat{a}, \dot{\tau} = 1$ serà autònom en $M \times \mathbb{R}$. Per simplificar les equacions en aquest cas, suposem que τ no varia en fer el procés de mitjanes (o sigui $\tau = t + \mathrm{const}$). En aquest cas la funció auxiliar F dependrà explícitament del temps, $F = F(z,t)$. Ara l'equació anterior guanya el terme $\frac{\partial F}{\partial t}$:

$$a_\delta = \frac{\partial F}{\partial t} - [F,a].$$

Tenim un cert marge en l'elecció de la funció F, que és pràcticament arbitrària. Treschev tria per aquest mètode $F = \xi a$ amb ξ un operador lineal.

En particular, suposem que el camp prové d'un sistema periòdic amb freqüència ràpida i hem re-escalat els temps, de manera que $\hat{a} = \varepsilon\hat{v}$ i $a = \varepsilon v$. Si considerem el següent desenvolupament de Fourier

$$v(z,t,\varepsilon,\delta) = v^0 + \sum_{k>0} v^k(z,\varepsilon,\delta)e^{ikt} + \sum_{k<0} v^k(z,\varepsilon,\delta)e^{ikt} = v^0 + v^+ + v^-,$$

aleshores una possibilitat és prendre $\xi v = i(v^+ - v^-)$. Aquest operador és l'anomenat operador de Hilbert.

Hi ha uns certs arguments que semblen indicar prèviament a la demostració del teorema que aquest operador ha de realitzar la seva feina de fer mitjanes, en particular considerem el sistema que estudiem:

$$v_\delta = (\xi v)_t - \varepsilon[\xi v, v], \qquad v(z,t,\varepsilon,0) = \hat{v}(z,t,\varepsilon).$$

Podem desenvolupar aquest sistema terme a terme, obtenint un conjunt numerable de problemes de Cauchy:

$$\begin{aligned} v^k_\delta = -|k|v^k + i\varepsilon\,\mathrm{sgn}\,(k)\,[v^0, v^k] + \varepsilon[\xi v, v^k], \quad k \in \mathbb{Z}, \\ v^k(z,\varepsilon,0) = \hat{v}^k(z,\varepsilon), \quad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

on $\operatorname{sgn}(k)$ és la funció signe, tal que $\operatorname{sgn}(0) = 0$. Si aquí menyspreem els termes $\mathcal{O}(\varepsilon)$ i considerem com condició inicial el sistema no pertorbat, tindrem

$$v^k(z, \varepsilon, \delta) = e^{-|k|\delta} \hat{v}^k(z), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Observem que a mesura que el paràmetre δ creix, redueix els coeficients de Fourier del camp solució, de manera que els termes a freqüència alta en el desenvolupament passen a ser menyspreables.

Evidentment el sistema que considerem és més complex i no admet una reducció tan dràstica. Si fem una simplificació més raonable, eliminant els termes d'ordre alt $\varepsilon[\xi v, v^k]$, també podem resoldre aquest sistema:

$$v^k(z, \varepsilon, \delta) = e^{-|k|\delta} \hat{v}^k \circ g^{i\varepsilon\delta \operatorname{sgn}(k)}(z),$$

on g^t és el flux de $\dot{z} = \hat{v}^0(z)$. Notem que aquí apareixen temps complexos en el flux, i per tant es posa de manifest que en aquest mètode és essencial que el sistema inicial sigui analític. Per verificar que aquesta expressió és solució, hem de tenir present que el flux g^t prové d'un hamiltonià (i per tant, conserva àrea) i efectuar operacions bàsiques.

D'aquesta expressió resulta evident que no podem fer indefinidament gran δ, ja que g^t pot tenir singularitats per a temps complex, de forma que podrem arribar a $\delta \sim \alpha/\varepsilon$ on α és la part imaginària de la singularitat de g respecte t més propera a l'eix real.

2.2 El teorema de les mitjanes

En aquesta secció enunciarem i provarem el teorema de *continuous averaging* de Treschev.

Considerem el sistema

$$\dot{z} = \varepsilon \hat{v}(z, t, \varepsilon), \qquad z \in M,$$

amb M una varietat analítica real de dimensió m i $\hat{v}(z, t, \varepsilon)$ analític en z, ε, t i 2π- periòdic en t. Definim

$$\hat{v}^0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{v}(z, t, 0)\, dt.$$

Siguin $M_{\mathbb{C}}$ un entorn complex de l'espai de fases (extenem les cartes real-analítiques a complexes analítiques de manera que l'espai que parametritzen és $M_{\mathbb{C}}$), $z^0 \in M$ i $V \subset M_{\mathbb{C}}$ un entorn de z^0. Sigui també g^t el flux solució del següent sistema, definit en el seu domini maximal $\mathcal{D} \subset \mathbb{C} \times M_{\mathbb{C}}$

$$\dot{z} = \hat{v}^0(z). \tag{2.2.1}$$

Definim els conjunts

$$U_\alpha = \bigcup_{-\alpha<s<\alpha} g^{is}(V),$$
$$\Sigma_\rho = \{t \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}\, t\,| < \rho\}.$$

Sota aquestes condicions tenim el següent resultat local, ometem l'enunciat i prova del cas global en ser trivial partint d'aquest teorema.

Teorema 2. *Suposem que es verifiquen*

(1) El punt z^0 és no singular pel camp $\hat{v}^0$.

Les constants $\alpha, \rho, \varepsilon_0$ són tals que

(2) El conjunt U_α està ben definit, és a dir $\{is\} \times V \subset \mathcal{D}$, $\forall s \in (-\alpha, \alpha)$.

(3) El camp vectorial $\hat{v}$ és analític en el conjunt $U_\alpha \times \Sigma_\rho \times [0, \varepsilon_0)$.

Aleshores, si ε_0 és prou petit, existeix un canvi de variables $f : V' \times \Sigma_\rho \times (0, \varepsilon_0) \to V$ 2π-periòdic en t, analític real on $z^0 \in V' \subseteq V$ tal que es verifiquen:

(i) La funció f és $\mathcal{C}^\infty$ en ε i a més és propera a la identitat: $f(z, t, \varepsilon) = z + \mathcal{O}(\varepsilon)$.

(ii) El canvi f transforma el camp vectorial $\varepsilon\hat{v}$ en

$$\varepsilon\hat{v}^0(z) + \varepsilon^2\hat{v}_*(z, \varepsilon) + \tilde{v}(z, t, \varepsilon)$$

i a més existeix una constant C_0 tal que

$$|\tilde{v}(z, t, \varepsilon)| \leq C_0 e^{-\alpha/\varepsilon}, \quad z \in V', \quad t \in \Sigma_\rho, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Demostració. Com a primer pas passem a coordenades $\tau, \theta_1, \ldots, \theta_{m-1}$ tals que $z^0 = (0, \ldots, 0)$, el canvi de coordenades $z \mapsto (\tau, \theta)$ és analític i g^t actua en elles com $(\tau + t, \theta)$. Dit en altres paraules θ són integrals primeres locals del sistema (2.2.1) i τ el temps corresponent. Podem obtenir unes coordenades verificant aquestes condicions aplicant el teorema del flux tubular (veure [PdM82] per la prova en el cas $\mathcal{C}^r$ real, la prova en el cas analític complex és completament anàloga).

Per les condiciones de l'enunciat, aquestes coordenades estan definides en

$$W_\kappa = \{(\tau, \theta) \mid |\mathrm{Im}\, \tau\,| \leq \alpha + \kappa, |\mathrm{Re}\, \tau\,| \leq \kappa, |\theta_j| \leq \kappa\, j = 1, \ldots, m-1\}$$

si la constant κ és prou petita (aquesta constant prové de la naturalesa local del teorema del flux tubular). Evidentment $\hat{v}(\tau, \theta, t, \varepsilon)$, el camp sota el canvi de coordenades, serà analític en $W_\kappa \times \Sigma_\rho$.

Considerem la descomposició en sèrie de Fourier de $\hat{v}$,

$$\hat{v}(\tau, \theta, t, \varepsilon) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{v}^k(\tau, \theta, \varepsilon) e^{ikt},$$

llavors el següent lema ens dóna majorants pels coeficients del desenvolupament.

Lema 1. *Per a tot $s \in [-\alpha, \alpha]$ els coeficients $\hat{v}^k, k \neq 0$, en les coordenades (τ, θ) definides en W_κ verifiquen les majorants:*

$$\hat{v}^k(\tau - is, \theta, \varepsilon) \ll \frac{\beta e^{-\rho|k|}}{w_*(\kappa)}(1, \ldots, 1)^T, \quad w_*(\kappa) = \frac{\kappa - \tau - \theta_1 - \ldots - \theta_{m-1}}{\kappa},$$

on β és una constant.

Demostració. Sigui $\beta = \max_{W_\kappa \times \Sigma_\rho} |\hat{v}|$. Aleshores, pel lema (16), tenim $\max_{W_\kappa} |\hat{v}^k| \leq \beta e^{-\rho|k|}$. Si usem la propietat de majorants (5.1.6) tindrem

$$\hat{v}^k(\tau - is, \theta, \varepsilon) \ll \frac{\beta e^{-\rho|k|}}{w(\kappa)}, \quad w(\kappa) = \frac{(\kappa - \tau)(\kappa - \theta_1) \cdots (\kappa - \theta_{m-1})}{\kappa^m}.$$

Ara per acabar cal comprovar que $1/w \ll 1/w_*$. Observem que

$$\begin{aligned}
\frac{\kappa}{\kappa - \tau - \theta_1 - \ldots - \theta_{m-1}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\tau + \theta_1 + \ldots + \theta_{m-1}}{\kappa} \right)^n, \\
\frac{\kappa^m}{(\kappa - \tau)(\kappa - \theta_1) \cdots (\kappa - \theta_{m-1})} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)^n \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\theta_1}{\kappa} \right)^n \cdots \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\theta_{m-1}}{\kappa} \right)^n,
\end{aligned}$$

de manera que és evident que el desenvolupament de $1/w_*$ té tots els termes positius i porten un coeficient $\kappa^{-n} C_n \geq 1$ on $C_n \geq 1$ resultat d'elevar la suma $\tau + \theta_1 + \ldots + \theta_{m-1}$ a n, mentre que $1/w$ té tots els coeficients κ^{-n}.

□

Seguint l'esquema del raonament heurístic del mètode de les mitjanes de la secció anterior, considerem un canvi de coordenades tal que el nou sistema verifica l'equació

$$v_\delta = -[F, v],$$

on com abans prenem $F = \xi v$ amb ξ l'operador de Hilbert. Considerem doncs el desenvolupament de Fourier de v per obtenir el següent sistema d'equacions en derivades parcials

$$\begin{aligned}
v_\delta^0 &= -2i\varepsilon \sum_{k>0} [v^k, v^{-k}], \\
v_\delta^n &= -nv^n + i\varepsilon[v^0, v^n] - 2i\varepsilon \sum_{k>0} [v^{n+k}, v^{-k}], \\
v_\delta^{-n} &= -nv^{-n} - i\varepsilon[v^0, v^{-n}] - 2i\varepsilon \sum_{k>0} [v^k, v^{-n-k}],
\end{aligned}$$

amb les condicions inicials

$$v^k(\tau, \theta, 0) = \hat{v}^k(\tau, \theta).$$

Definim les funcions auxiliars u^0, u^k per les següents relacions:

$$
\begin{aligned}
v^0(\tau,\theta,\delta) &= (1,0,\ldots,0)^{\mathrm{T}} + u^0(\tau,\theta,\delta),\\
v^k(\tau,\theta,\delta) &= u^k(\tau + i\varepsilon\delta\,\mathrm{sgn}\,(k)\,,\theta,\delta)e^{-(\rho+\delta)|k|}, \quad k \neq 0.
\end{aligned}
$$

Ara, aquestes funcions u^k satisfan un sistema d'equacions en derivades parcials auxiliar,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u^0}{\partial\delta}(\tau,\theta,\delta) = {} & -2i\varepsilon\sum_{k>0}[u^k(\tau+i\varepsilon\delta,\theta,\delta),u^{-k}(\tau-i\varepsilon\delta,\theta,\delta)]e^{-2(\rho+\delta)k},\\
\frac{\partial u^n}{\partial\delta}(\tau+i\varepsilon\delta,\theta,\delta) = {} & i\varepsilon[u^0(\tau,\theta,\delta),u^n(\tau+i\varepsilon\delta,\theta,\delta)]\\
& -2i\varepsilon\sum_{k>0}[u^{n+k}(\tau+i\varepsilon\delta,\theta,\delta),u^{-k}(\tau-i\varepsilon\delta,\theta,\delta)]e^{-2(\rho+\delta)k},\\
\frac{\partial u^{-n}}{\partial\delta}(\tau-i\varepsilon\delta,\theta,\delta) = {} & -i\varepsilon[u^0(\tau,\theta,\delta),u^{-n}(\tau-i\varepsilon s,\theta,\delta)]\\
& -2i\varepsilon\sum_{k>0}[u^{n+k}(\tau+i\varepsilon\delta,\theta,\delta),u^{-n-k}(\tau-i\varepsilon\delta,\theta,\delta)]e^{-2(\rho+\delta)k},
\end{aligned}
\tag{2.2.2}
$$

amb les condicions inicials

$$
u^0(\tau,\theta,0)=0, \qquad u^k(\tau,\theta,0)=\hat{v}^k(\tau,\theta), \quad k\in\mathbb{Z}.
$$

Observem que les derivades són derivades parcials, i.e. respecte la tercera component només.

Per a dos camps vectorials

$$
W'(z) = (W'_1(z),\ldots,W'_m(z)), \qquad W''(z) = (W''_1(z),\ldots,W''_m(z))
$$

on $z=(\tau,\zeta)$, definim

$$
[[W',W'']] = \sum_{s=1}^{m}(W'_s\frac{\partial W''}{\partial z_s} + W''_s\frac{\partial W'}{\partial z_s}).
$$

Aquesta expressió depèn de les coordenades triades, però majora al commutador de camps vectorials. Si $W_1 \ll W'$, $W_2 \ll W''$ aleshores

$$
[W_1,W_2] \ll [[W',W'']]
$$

.

Considerem el sistema auxiliar següent

$$
\begin{aligned}
U^0_\delta &= 2\varepsilon\Sigma_{k>0}[[U^k,U^{-k}]]e^{-2(\rho+\delta)k},\\
U^n_\delta &= \varepsilon[[U^0,U^n]] + 2\varepsilon\Sigma_{k>0}[[U^{n+k},U^{-k}]]e^{-2(\rho+\delta)k}, \quad n>0\\
U^{-n}_\delta &= \varepsilon[[U^0,U^{-n}]] + 2\varepsilon\Sigma_{k>0}[[U^k,U^{-n-k}]]e^{-2(\rho+\delta)k}, \quad n>0
\end{aligned}
$$

amb condicions inicials

$$U^0(\tau,\theta,0)=0, \qquad U^k(\tau,\theta,0)=\beta w_*^{-1}(\kappa), \quad k\neq 0.$$

La proposició següent ens donarà una majorant per a u^k partint de les solucions d'aquest sistema.

Proposició 1. *Sigui U^k la solució del sistema anterior i definida per a $0\leq\delta\leq\hat{\delta}$, amb $\hat{\delta}$ verificant $\hat{\delta}\varepsilon\leq\alpha$. Aleshores la solució del problema de Cauchy per a les funcions u^k està definida per a $0\leq\delta\leq\hat{\delta}$. A més per a qualsevol nombre real r tal que $|r|\leq\alpha-\varepsilon\delta$ es verifiquen*

$$u^k(\tau+i\varepsilon\delta\,\mathrm{sgn}\,(k)+ir,\theta)\ll U^k(\tau,\theta,\delta), \qquad k\in\mathbb{Z},$$

on la majorant és respecte les variables τ,θ.

Demostració. Pel fet que el commutador majorant majora al commutador habitual, tenim que l'expressió a la dreta de l'equació en derivades parcials que verifiquen U_s^k majoren les corresponents expressions en les equacions per $u_s^k(\tau+i\varepsilon\delta\,\mathrm{sgn}\,(k)+ir,\theta)$, i les condicions inicials respectives també són majorades gràcies al lema 1. □

Podem imposar que la solució del sistema que defineix les U^k, $k\neq 0$, no depengui de k, això és, demanem que tots els termes de Fourier siguin iguals, i que la dependència en τ,θ sigui de la forma $x=\tau+\theta_1+\ldots+\theta_{m-1}$. A més podem imposar també que totes les seves components siguin iguals, i.e. $U^0=(y^0(x,\delta),\ldots,y^0(x,\delta)),U^k=(y(x,\delta),\ldots,y(x,\delta))$. Ara faltarà veure que una tal solució existeix. Si existeix serà majorant de u per la proposició anterior.

Si imposem totes aquestes condicions sobre el sistema per a les U^k, obtenim un nou sistema,

$$\begin{aligned} y_\delta^0 &= 4m\varepsilon\frac{e^{-2(\rho-\delta)}}{1-e^{-2(\rho-\delta)}}yy_x, \\ y_\delta &= m\varepsilon(y^0y)_x+4m\varepsilon\frac{e^{-2(\rho-\delta)}}{1-e^{-2(\rho-\delta)}}yy_x, \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

amb condicions inicials

$$y^0(x,0)=0, \qquad y(x,0)=\frac{\beta}{\kappa-x}.$$

Podem aconseguir-ne una lleugera simplificació prenent un terme més gran a la dreta de l'equació, mitjançant

$$\frac{4me^{-2\rho}}{1-e^{-2(\rho-\delta)}}\leq 2\frac{4me^{-2\rho}}{1-e^{-2(\rho)}}=2a, \qquad \text{on } a=\frac{4me^{-2\rho}}{1-e^{-2(\rho)}}$$

obtenint:

$$y^0_\delta = a\varepsilon e^{-2\delta}(y^2)_x,$$
$$y_\delta = m\varepsilon(y^0y)_x + a\varepsilon e^{-2\delta}(y^2)_x$$

amb les mateixes condicions inicials que abans. En l'anàlisi d'aquest sistema estudiarem dos casos, dividint l'interval $[0, \alpha/\varepsilon]$ en dos subintervals:

Lema. *Per a $\delta \in [0, \log(\varepsilon^{-1})]$ la solució del sistema (2.2.3) verifica:*

$$y^0(x, \delta) \ll y(x, \delta) \ll Y(\kappa, \beta, x, 2(m + a)\varepsilon\delta),$$

on

$$Y(\kappa, \beta, x, \lambda) = \frac{2\beta\kappa}{\kappa - x + \sqrt{(\kappa - x)^2 - 4\beta\kappa\lambda}}.$$

Lema. *Per a $\varepsilon > 0$ prou petit i $\delta \in [\log(\varepsilon^{-1}), \alpha/\varepsilon]$ la solució del sistema (2.2.3) verifica:*

$$y^0(x, \delta) \ll y(x, \delta) \ll Y(\kappa/2, \beta_*, x, 4m\varepsilon^2 \log \varepsilon^{-1}\delta),$$

on

$$\beta_* = \max\{4\beta, 256\beta^2 a/\kappa\},$$
$$Y(\kappa, \beta, x, \lambda) = \frac{2\beta\kappa}{\kappa - x + \sqrt{(\kappa - x)^2 - 4\beta\kappa\lambda}}.$$

Ometrem la prova d'aquests dos lemes, en ser massa tècnica i no ser estrictament necessària per a l'exposició posterior. La podem trobar a [Tre97a]. Vegem ara que impliquen el teorema de les mitjanes. Les funcions y^0 i y són analítiques en $x = 0$ per a tot $\delta \in [0, \alpha/\varepsilon]$ ja que són majorades per una funció que ho és, de manera que

$$U^k(\tau, \theta, \delta) \ll y(x, \delta), \qquad 0 \leq \delta \leq \alpha/\varepsilon.$$

Per la proposició 1 tenim:

$$u^k(\tau + i\varepsilon\delta \operatorname{sgn}(k), \theta, \alpha/\varepsilon) \ll U^k(\tau, \theta, \alpha/\varepsilon).$$

Llavors això implica

$$\begin{aligned} v^0(\tau, \theta, \delta) - (1, 0, \ldots, 0) &\ll y(x, \alpha/\varepsilon), \\ v^k(\tau, \theta, \delta) &\ll y(x, \alpha/\varepsilon)e^{-(\rho+\alpha/\varepsilon)|k|}, \qquad k \neq 0, \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

de manera que en tornar a les variables originals tenim

$$|v^0(z, \alpha/\varepsilon) - \hat{v}^0(z)| \leq C$$

en un cert domini $V' \times \Sigma_\rho \times (0, \varepsilon_0)$. Sumant els coeficients del desenvolupament,

$$|v(z, \alpha/\varepsilon)| \leq C_0 e^{-\alpha/\varepsilon}.$$

Amb això queda demostrat el teorema d'averaging de Treschev. □

2.3 Sistema a estudiar, aplicació del mètode

Observem que a partir d'ara $|\cdot|$ indicarà el mòdul o norma 2, i $\|\cdot\|$ indicarà la norma 1. El nostre objectiu és estudiar l'escissió de separatrius en una pertorbació del pèndol matemàtic, definit pel hamiltonià

$$\hat{H}^0(x,y) = y^2/2 - \cos x - 1.$$

Aquest sistema té un punt fix de tipus centre en $(x,y) = (0,0)$ i dos punts fixos hiperbòlics en $(x,y) = (\pm\pi, 0)$. Aquests dos punts fixos tenen una connexió homoclínica si considerem la coordenada $x \mod 2\pi$, tal i com es pot veure al diagrama (1) on es representa esquemàticament l'espai de fase del pèndol. Considerem el sistema definit per un hamiltonià del tipus

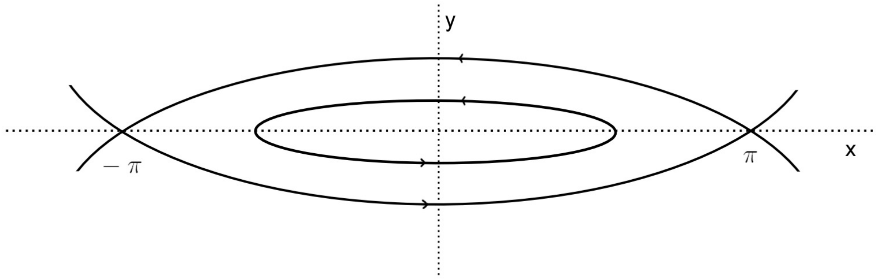

Figura 1: Esquema de l'espai de fases del pèndol

següent:

$$\hat{H} = \hat{H}^0(x,y) + e^{it/\varepsilon}\hat{H}^+(x,y) + e^{-it/\varepsilon}\hat{H}^-(x,y) \tag{2.3.1}$$

On $y \in \mathbb{R}$ i $x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ i el paràmetre ε és petit. En concret prenem:

$$\hat{H}^0 = y^2/2 - \cos x - 1, \qquad \hat{H}^\pm = B_+^\pm e^{ix} + B_-^\pm e^{-ix}, \quad B_\pm^\pm \in \mathbb{C}, \tag{2.3.2}$$

on

$$\bar{B}_+^+ = B_-^-, \quad \bar{B}_-^+ = B_+^-.$$

Observem que aquestes condicions sobre $B_\pm^\pm$ fan que el sistema sigui real, a més quan ε és prou petit, les trajectories del nostre hamiltonià són properes al pèndol matemàtic:

$$\dot{x} = \partial\hat{H}^0/\partial y, \qquad \dot{y} = -\partial\hat{H}^0/\partial x. \tag{2.3.3}$$

Denotem per g^t al flux diferencial de (2.3.3), i γ a la branca separatriu (com a conjunt de punts, encara no la parametritzem) del punt fix hiperbòlic $(0,\pi)$ per $y > 0$.

Fem la transformació $t \mapsto \varepsilon t$, de manera que ara el sistema quedarà:

$$\hat{H} = \hat{H}^0(x,y) + e^{it}\hat{H}^+(x,y) + e^{-it}\hat{H}^-(x,y) \tag{2.3.4}$$

Per abreujar, anomenarem també t al nou temps d'aquí en endavant.

Considerem el hamiltonià (2.3.1), volem efectuar un canvi de variables definit com translació al llarg de les solucions del sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \delta} &= \frac{\partial F}{\partial y}, \\ \frac{\partial y}{\partial \delta} &= -\frac{\partial F}{\partial x}, \qquad \text{amb } F = F(x,y,t,\varepsilon,\delta). \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Com hem fet als raonaments previs, prenem

$$F = \xi H = i\varepsilon(e^{it}H^+ - e^{-it}H^-)$$

on ξ és l'operador de Hilbert, i el desplaçament al llarg de les trajectories del sistema (2.3.5) ens passa de $\varepsilon\hat{H}$ a εH, on

$$H(x,y,t,\varepsilon,\delta) = H^0(x,y,\varepsilon,\delta) + e^{it}H^+(x,y,\varepsilon,\delta) + e^{-it}H^-(x,y,\varepsilon,\delta).$$

La funció H verifica l'equació en derivades parcials següent:

$$H_\delta = (\xi H)_t - \{\xi H, H\},$$

amb les condicions inicials

$$H(x,y,t,\varepsilon,0) = \hat{H}(x,y,t,\varepsilon).$$

Aquesta darrera equació és equivalent al següent sistema d'equacions per als coeficients de Fourier (observem que només tenim 3 coeficients)

$$H^0_\delta = -2i\varepsilon\{H^+, H^-\}, \qquad H^\pm_\delta + H^\pm = \pm i\varepsilon\{H^0, H^\pm\}, \tag{2.3.6}$$

amb les condicions inicials

$$H^0(x,y,\varepsilon,0) = \hat{H}^0(x,y), \qquad H^\pm(x,y,\varepsilon,0) = \hat{H}^\pm(x,y). \tag{2.3.7}$$

2.3.1 Coordenades temps energia

La separatriu $\hat{\gamma}(t) = (x_\gamma(t), y_\gamma(t))$ del pèndol (2.3.3) parametritzada de manera que $\hat{\gamma}(0) = (0,2)$ està continguda al nivell d'energia $\hat{H}(x,y) = \hat{H}(0,2) = 0$, i es pot determinar per quadratures, aïllant $y = \dot{x}$:

$$t = \int_0^x f(0,u)\,du, \qquad f(h,u) = \frac{1}{\sqrt{2(1+h+\cos u)}}.$$

Aquí suposem que f és positiva per u positiu i proper a zero. Si x_γ té una singularitat per a $t = \alpha$, aleshores $\alpha = \int_0^{i\infty} f(0,u)\,du$, on α depèn del camí d'integració triat.

Volem determinar la singularitat amb menor part imaginària positiva, ja que serà una obstrucció per poder continuar les solucions. Aquesta singularitat amb menor part imaginària es correspon amb el raig $R = \{x \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} x = 0, \operatorname{Im} x \geq 0\}$. Es calcula fàcilment $\int_R f(0,u)\,du = i\pi/2$. Per provar que és la que té menor part imaginària només cal partir d'aquesta integral i integrar per residus qualsevol altre camí de 0 a infinit. Les solucions del sistema (2.3.3) amb condicions inicials properes a les de la separatriu, $(0,2)$, tindràn singularitats properes a α.

Volem ara estudiar el comportament de les coordenades (x,y), així com el de les coordenades temps-energia al voltant d'aquestes singularitats. Sigui doncs $(x(t), y(t))$ una solució d'aquest tipus, i t_s la seva corresponent singularitat. Sigui $\nu = e^{ix/2}$. Llavors, per valors grans de $\operatorname{Im} x$ tenim:

$$\begin{aligned} f(h,x) &= \sqrt{\frac{1}{2(1+h+\cos x)}} = e^{ix/2}\left(\frac{1}{\sqrt{2e^{ix}+2he^{ix}+e^{2ix}+1}}\right) = \\ &= e^{ix/2}\left(1 - \frac{1}{2}\left(2+2h+e^{ix}\right)\cdot e^{ix} + \mathcal{O}\left(e^{ix}\right)\right) = \\ &= \nu(1+\mathcal{O}(\nu)). \end{aligned}$$

De manera que, per valors de temps t propers a t_s, $x(t)$ serà proper a infinit i per tant:

$$t_s - t = \int_x^{+i\infty} f(h,u)\,du = 2i\nu(t)\left(1+\mathcal{O}(\nu)\right).$$

Si $\nu(t) = e^{ix(t)/2}$, de l'expressió anterior en podem deduir:

$$\nu(t) = \frac{t_s - t}{2i(1+\mathcal{O}(\nu(t))} = \frac{t_s - t}{2i}\left(1 - \mathcal{O}(t_s - t)\right).$$

Derivant l'expressió per $\nu(x)$ obtenim:

$$y(t) = \dot{x}(t) = \frac{2}{i}\nu(t)^{-1}\dot{\nu}(t) = \frac{2i}{t_s - t}\left(1 - \mathcal{O}(t_s - t)\right).$$

D'aquestes expressions podem concloure que:

$$\lim_{t\to t_s} \nu(t) = 0, \qquad \lim_{t\to t_s} y(t) = \infty, \qquad \lim_{t\to t_s} y(t)\nu(t) = 1. \tag{2.3.8}$$

Necessitem ara coordenades τ, h, temps-energia per seguir l'esquema de la prova del teorema de les mitjanes que hem donat anteriorment. Com el sistema no pertorbat és integrable, podem estudiar aquestes coordenades directament, sense requerir que siguin locals amb el teorema del flux tubular. Definim h com:

$$h = \hat{H}^0 = (y^2 - \nu^{-2} - \nu^2)/2 - 1, \tag{2.3.9}$$

i prenem la variable τ com la canònicament conjugada d'h, tal que $\tau(x,y) = 0$ per $\nu = 0$. A més, per les identitats de (2.3.8) podem afirmar que

$$\lim_{\tau\to 0} y(\tau,h)\nu(\tau,h) = 1.$$

Hem de determinar ara la forma del hamiltonià després d'aquest canvi de variables, així com determinar les funcions inverses $\nu(\tau,h)$ i $y(\tau,h)$.

Proposició 2. *Les funcions ν, y verifiquen*

$$\nu^{-1} = -\frac{\sqrt{2h}i}{\sin(\tau\sqrt{h/2}) + F_1(\tau,h\tau^2)} \tag{2.3.10}$$

$$y = -\frac{\sqrt{2h}i}{\tan(\tau\sqrt{h/2})} + F_2(\tau,h\tau^2) \tag{2.3.11}$$

on $F_1(\tau,\sigma)$ i $F_2(\tau,\sigma)$ són analítiques en $(0,0)$.

Corol·lari 1. *En les variables τ, h les funcions $\hat{H}^0$ i $\hat{H}^\pm$ s'expressen com*

$$\hat{H}^0 = h, \quad \hat{H}^\pm = -4hB_-^\pm\left(1-\cos(\tau\sqrt{2h})\right)^{-1} + \tau^{-1}F^\pm(\tau,h\tau^2) \tag{2.3.12}$$

on les funcions $F^\pm(\tau,\sigma)$ són analítiques en $(0,0)$.

Observació. *Les funcions $\tau\nu^{-1}$ i τy evidentment són analítiques en τ i $\sigma = h\tau^2$ ja que les dues tenen només termes senars en el seu desenvolupament de Taylor que es simplifiquen en els quocients.*

Demostració. L'equació (2.3.9) es pot resoldre explícitament per y, obtenint:

$$y = \pm\nu^{-1}\sqrt{1+2h\nu^2+2\nu^2+\nu^4}. \tag{2.3.13}$$

Suposem que per valors petits de $|\tau|$ i $|h\tau^2|$, el valor de $|\nu|$ és també petit, i el valor de $y\nu$ és proper a 1. Per tant hem de prendre el valor positiu de l'arrel quadrada, sinó tenim -1. Desenvolupant per Taylor al voltant de $1+h\nu^2$ obtenim:

$$\begin{aligned} y &= \nu^{-1}\left(\sqrt{1+h\nu^2} - \frac{1}{2\sqrt{1+h\nu^2}}(h\nu^2+2\nu^2+\nu^4) + \mathcal{O}\left((h\nu^2)^2\right)\right) \\ &= \nu^{-1}\sqrt{1+h\nu^2} + \varphi_1(\nu,h\nu^2), \end{aligned} \tag{2.3.14}$$

on la funció φ_1 és òbviament analítica en $(0,0)$. Sigui $S = S(x,h)$ la funció generatriu de la transformació canònica que envia $(x,y)\mapsto(\tau,h)$. Sabem que $y = \partial S/\partial x$ (per la teoria de funcions generatrius), de manera que (després de fer el canvi de variables $\nu\mapsto x$):

$$S = \frac{2}{i}\int_0^\nu \nu^{-2}\sqrt{1+2h\nu^2}\,d\nu + \varphi_2(\nu,h\nu^2) + \varphi_3(h) \tag{2.3.15}$$

on φ_2 és analítica en (0,0), i φ_3 és arbitrària. Prenem-la zero per simplificar. Aleshores, derivant respecte h i integrant respecte ν:

$$\tau = \frac{\partial S}{\partial h} = \frac{2}{i}\int_0^\nu \frac{d\nu}{\sqrt{1+2h\nu^2}} + \nu^2\varphi_4(\nu, h\nu^2) = \frac{2\text{arcsinh}(\sqrt{2h}\nu)}{i\sqrt{2h}} + \nu^2\varphi_4(\nu, h\nu^2) \tag{2.3.16}$$

on φ_4 és analítica en (0,0). Provem ara d'aplicar el teorema de la funció implícita a (2.3.16) per aïllar ν. Farem servir el següent lema, que provarem en acabar la demostració actual.

Lema. *Sigui l'equació*

$$\nu = \tau - \nu F(\nu, h\nu^2) \tag{2.3.17}$$

amb $F(z,w)$ analítica al voltant de zero i tal que $F(0,0) = 0$. Aleshores existeix una funció $\nu(\tau, h\tau^2)$ que verifica (2.3.17).

Es compleixen els requeriments de l'enunciat, ja que $\frac{2\text{arcsinh}(\sqrt{2h}\nu)}{i\sqrt{2h}}$ es pot expressar com funció de ν i $h\nu^2$ (es pot comprovar trivialment amb el desenvolupament de Taylor d'arcsin, ja que treballem amb h i ν propers a zero), de manera que podem aplicar el lema, obtenint

$$\nu = \tau\varphi_5(\tau, h\tau^2), \tag{2.3.18}$$

on hem tret un τ factor comú, ja que $\nu|_{\tau=0} = 0$. Definim el quocient ν/τ com $\phi_5(\tau, h\tau^2)$. Volem ara determinar quant val $\varphi_5(0, h\tau^2)$, ja que ens servirà per determinar (2.3.10) i (2.3.11).

Per fer-ho, siguin $\nu = \tilde{\nu}\beta$, $\tau = \tilde{\tau}\beta$, $h = \tilde{h}\beta^{-2}$ on β és un paràmetre petit. De (2.3.16) i (2.3.18) en podem deduir:

$$i\tilde{\tau}\sqrt{\tilde{h}/2} = \text{arcsinh}\left(\sqrt{2\tilde{h}}\tilde{\nu}\right) + i\beta\tilde{\nu}^2\sqrt{\tilde{h}/2}\varphi_4(\beta\tilde{\nu}, \tilde{h}\tilde{\nu}^2), \quad \tilde{\nu} = \tilde{\tau}\varphi_5(\beta\tilde{\tau}, \tilde{h}\tilde{\tau}^2).$$

Apliquem la funció sinh a les dues bandes de la primera expressió, i usant

$$\begin{aligned} \sinh(ix) &= i\sin x, \\ \sinh(x+\varepsilon) &= \sinh x + \cosh x \cdot \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \cosh \text{arcsinh} x &= \sqrt{1+x^2}, \end{aligned}$$

obtenim

$$\tilde{\nu} = i\left(\sqrt{2\tilde{h}}\right)^{-1}\sin\left(\tau\sqrt{\tilde{h}/2}\right) + \mathcal{O}(\beta) = \tilde{\varphi}_5(\beta\tilde{\tau}, \tilde{h}\tilde{\tau}^2). \tag{2.3.19}$$

Aïllem aquest residu,

$$\mathcal{O}(\beta) = \tilde{\tau}\varphi_5(\beta\tilde{\tau}, \tilde{h}\tilde{\tau}^2) - i\left(\sqrt{2\tilde{h}}\right)^{-1}\sin\left(\tau\sqrt{\tilde{h}/2}\right), \tag{2.3.20}$$

però

$$\tilde{\nu}|_{\beta=0} = i\left(\sqrt{2\tilde{h}}\right)^{-1} \sin\left(\tau\sqrt{\tilde{h}/2}\right) = \tilde{\tau}\varphi_5(0, \tilde{h}\tilde{\tau}^2),$$

de manera que podem reescriure (2.3.20) de la següent manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\beta) &= \tilde{\tau}\varphi_5(\beta\tilde{\tau}, \tilde{h}\tilde{\tau}^2) - \tilde{\tau}\varphi_5(0, \tilde{h}\tilde{\tau}^2) = \\ &= \beta\tilde{\tau}^2 \underbrace{\left(\frac{\varphi_5(\beta\tilde{\tau}, \tilde{h}\tilde{\tau}^2) - \varphi_5(0, \tilde{h}\tilde{\tau}^2)}{\beta\tilde{\tau}}\right)}_{:=\varphi_6(\beta\tilde{\tau}, \tilde{h}\tilde{\tau}^2)}. \end{aligned}$$

Finalment obtenim:

$$\tilde{\nu} = \left(i\sqrt{2\tilde{h}}\right)^{-1} \sin\left(\tau\sqrt{\tilde{h}/2}\right) + \beta\tilde{\tau}^2\varphi_6(\beta\tilde{\tau}, \tilde{h}\tilde{\tau}^2),$$

on evidentment la funció φ_6 és analítica en 0 (teorema del valor mig). Si passem altre cop a les variables originals obtenim (2.3.10) i amb aquesta igualtat i (2.3.13) trobem (2.3.11).

□

Observem que podem definir unes altres coordenades temps-energia, h, τ_* al voltant d'un entorn de la part real de la separatriu γ de la següent manera. Prenem la superfície $\Phi := \{(x, y) \mid x = 0, |y-2| < c\}$ en l'espai de fase complex $P_{\mathbb{C}} = (\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}) \times \mathbb{C} = \{x, y\}$. Llavors definim h com abans per (2.3.9) i definim $\tau_* = 0$ en Φ. Podem continuar aquestes coordenades a un obert de $P_{\mathbb{C}}$ mitjançant el flux g^t. Prenem seccions d'energia fixada, i definim el nou temps com el temps en arribar al punt amb la mateixa energia.

Els dominis on les coordenades τ, h i τ_*, h estan definides, es tallen, i a la intersecció es compleix

$$\tau(h) = \tau_*(h) - T(h), \qquad T(0) = i\pi/2.$$

Definim

$$\hat{H}^0_*(\tau_*, h) = \hat{H}^0(x, y), \qquad \hat{H}^\pm_*(\tau_*, h) = \hat{H}^\pm(x, y)$$

$$\hat{H}^0_*(\tau_*, h, \delta) = \hat{H}^0(x, y, \delta), \qquad \hat{H}^\pm_*(\tau_*, h, \delta) = \hat{H}^\pm(x, y, \delta), \tag{2.3.21}$$

on en aquestes darreres expressions (x, y) representa $x(\tau_*), y(\tau_*)$. Farem servir la notació de (2.3.21) per abreujar.

Lema 2. *Sigui*

$$\nu = \tau - \nu F(\nu, h\nu^2) \tag{2.3.22}$$

amb $F(z, w)$ analítica al voltant de zero i tal que $F(0, 0) = 0$. Aleshores existeix una funció $\nu(\tau, h\tau^2)$ que verifica (2.3.22).

Demostració. Reescrivim l'equació que volem resoldre com

$$\Phi = \tau - \Phi F(\Phi, h\Phi^2),$$

i definim $\Phi(h,\tau) = \tau\Psi(\tau, h\tau^2)$. D'aquesta manera ara volem resoldre

$$1 - \Psi F(z\Psi, w\Psi^2(z,w)),$$

on $z = \tau$, $w = h\tau^2$. Definim l'operador

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{F}: & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ & \Psi & \longmapsto & 1 - \Psi F(z\Psi, w\Psi^2) \end{array}$$

on

$$\mathcal{A} = \{a : \mathbb{D}(0,\rho)^2 \to \mathbb{C} \mid a(0,0) = 1,\ a \text{ analítica},\ |a(\zeta,\xi)| \leq 2\}.$$

Per tal que estigui ben definit considerarem ρ prou petit, simplement. Observem que en 0 és ben definit per a qualsevol F. Un punt fix d'aquest operador ens defineix una funció Φ que és solució del sistema. Veiem que l'operador és contracció. Siguin Ψ, $\tilde{\Psi} \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}(\Psi) - \mathcal{F}(\tilde{\Psi})| &= |\Psi F(z\Psi, w\Psi^2) - \tilde{\Psi} F(z\tilde{\Psi}, w\tilde{\Psi}^2)| \leq \\ &\leq |F(z\Psi, w\Psi^2)||\Psi - \tilde{\Psi}| + |\tilde{\Psi}||F(z\Psi, w\Psi^2) - F(z\tilde{\Psi}, w\tilde{\Psi}^2)|. \end{aligned}$$

Ara,

$$\begin{aligned} &|F(z\Psi, w\Psi^2) - F(z\tilde{\Psi}, w\tilde{\Psi}^2)| \\ &\qquad \leq \sup_{\xi} |F_z(\xi, w\Psi^2)||z||\Psi - \tilde{\Psi}| + \sup_{\zeta} |F_w(z\tilde{\Psi}, \zeta)||w||\Psi - \tilde{\Psi}||\tilde{\Psi} + \Psi|. \end{aligned}$$

Només hem de prendre ara un ρ prou petit, de manera que

$$\begin{aligned} |F_z(\xi, w\Psi^2)||z| &\leq \frac{\delta}{3}, \\ |F_w(z\tilde{\Psi}, \zeta)||w| &\leq \frac{\delta}{12}, \\ |F(z\Psi, w\Psi^2)| &\leq \frac{\delta}{3}, \end{aligned}$$

amb $\delta < 1$. D'aquesta manera,

$$|\mathcal{F}(\Psi) - \mathcal{F}(\tilde{\Psi})| \leq \frac{2\delta}{3}|\Psi - \tilde{\Psi}| + \frac{\delta}{12} \cdot 4|\Psi - \tilde{\Psi}| = \delta|\Psi - \tilde{\Psi}| < |\Psi - \tilde{\Psi}|.$$

Per tant pel teorema del punt fix trobem un únic punt fix Ψ de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{A}$, i la funció $\Phi(h,\tau) = \tau\Psi$ és la funció buscada.

$\square$

2.3.2 Canvis i equacions del mètode de les mitjanes

Ara que disposem de les coordenades temps-energia, efectuem el canvi

$$\begin{gathered}\tau = \varepsilon\tilde{\tau}, \qquad h = \varepsilon^{-2}\tilde{h}, \\ H^0 = \varepsilon^{-2}\tilde{H}^0, \qquad H^\pm = \varepsilon^{-2}\tilde{H}^\pm\end{gathered} \tag{2.3.23}$$

i denotarem

$$\{f, g\}^\sim = f_{\tilde{h}} g_{\tilde{\tau}} - g_{\tilde{h}} f_{\tilde{\tau}}$$

per qualssevol dues funcions analítiques $f = f(\tilde{\tau}, \tilde{h})$, $g = g(\tilde{\tau}, \tilde{h})$. Ara el sistema (2.3.6)-(2.3.7) es pot escriure com

$$\begin{aligned}\tilde{H}^0_\delta &= -2i\{\tilde{H}^+, \tilde{H}^-\}^\sim, \\ \tilde{H}^\pm_\delta + \tilde{H}^\pm &= \pm i\{\tilde{H}^0, \tilde{H}^\pm\}^\sim,\end{aligned} \tag{2.3.24}$$

i podem determinar les condicions inicials partint de (2.3.12) si descartem el terme $\tau^{-1}F^\pm$, que després del canvi (2.3.23) tindrà ordre ε. Aleshores les condicions inicials que prendrem per al sistema (2.3.24) seran

$$\begin{aligned}&\tilde{H}^0(\tilde{\tau}, \tilde{h}, 0) = \tilde{h}, \\ &\tilde{H}^\pm(\tilde{\tau}, \tilde{h}, 0) = -4\tilde{h}B^\pm_- \left(1 - \cos(\tilde{\tau}\sqrt{2\tilde{h}})\right)^{-1}.\end{aligned} \tag{2.3.25}$$

Observem que la funció (2.3.25) és analítica en el domini complex $\{\tilde{\tau} \neq 0, |\tilde{h}\tilde{\tau}^2| < 2\pi^2\}$.

3 Mètode de Poincaré

3.1 Mètode de Poincaré-Melnikov

El mètode de Melnikov, o Poincaré-Melnikov és una eina per provar que existeixen punts d'intersecció transversal entre les varietats estable i inestable en aplicacions de Poincaré de certs fluxos sobre varietats 3-dimensionals.

L'existència d'aquests punts d'intersecció transversal és una propietat genèrica en l'espai $\mathcal{Diff}^r(M)$, d'aplicacions r-diferenciables de M a M. Recordem que anomenem una propietat en un espai de funcions $\mathcal{A}$ és *genèrica* si es verifica en un obert dens del conjunt $\mathcal{A}$ sota una topologia fixada.

Teorema (de Kupka-Smale). *Sigui $\mathcal{Diff}^r(M)$ el conjunt d'aplicacions r-diferenciables de M a M i definim $\mathcal{K} - \mathcal{S}$ com el conjunt de $f \in \mathcal{Diff}^r$ satisfent*

1. *Els punts periòdics de f són hiperbòlics.*

2. *Si p i q són punts periòdics de f, aleshores $W^s(p)$ és transversal a $W^u(q)$*

El conjunt $\mathcal{K}-\mathcal{S}$ és intersecció numerable d'oberts densos en $\mathcal{X}^r(M)$. En particular és dens. [1]

El teorema de Birkhoff-Smale ens dóna informació sobre la dinàmica al voltant del punt d'intersecció.

Teorema (de Birkhoff-Smale)**.** *Donada $f \in \mathcal{K}-\mathcal{S} \subset \mathcal{D}iff^r(\mathbb{R}^2)$ amb $r \geq 1$ i un punt d'intersecció transversal per a les seves varietats estable i inestable, existeix $n \geq 1$ tal que $f^n = f \circ \overset{n}{\cdots} \circ f$ té un conjunt invariant cantorià en el que f^n és topològicament conjugada al $shift$ de 2 símbols.*

La prova als teoremes anteriors es poden trobar a [PdM82].

Definició 1. *Un sistema dinàmic discret $F: X \to X$ és sensible respecte condicions inicials en $U \subset X$ si existeix un $\varepsilon > 0$ tal que per a tot $x \in X$ i tot obert $x \in N \subset U$, existeix un punt $y \in N$ per al que $|F^n(x) - F^n(y)| > \varepsilon$ per algun $n \in \mathbb{N}$.*

El fet de ser conjugada topològicament al $shift$ de 2 símbols implica que a prop de la intersecció trobem una dinàmica caòtica. No entrarem en detalls al respecte, simplement remarquem que aquest conjunt invariant implica sensibilitat respecte condicions inicials per a punts propers a ell.

Considerem un sistema autònom en $\mathbb{R}^2$

$$\dot{x} = f_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}^2,$$

amb un punt fix hiperbòlic en $x = 0$ i una connexió homoclínica Γ. Estenem aquest sistema a $\mathbb{R}^2 \times S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ definint-lo com

$$\dot{x} = f_0(x), \qquad \dot{\theta} = 1, \qquad x \in \mathbb{R}^2,\, \theta \in S^1.$$

Ara el punt fix hiperbòlic es transforma en una òrbita periòdica hiperbòlica

$$\gamma_0 = \{(x,\theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1 \mid x = 0, \theta \in S^1\},$$

i les seves varietats estable i inestable $W^s(\gamma_0), W^u(\gamma_0)$ es tallen, $W^s(\gamma_0) \cap W^u(\gamma_0) \supset \Gamma \times S^1$. Observem que aquesta intersecció no és transversal, i la seva aplicació de Poincaré tampoc tindrà doncs intersecció transversal. El mètode de Melnikov s'aplica a sistemes que resulten de pertorbar el sistema anterior:

$$\begin{aligned} \dot{x} = f_0(x) + \varepsilon f_1(x,\theta), \qquad \dot{\theta} = 1,& \\ x \in \mathbb{R}^2,\ \theta \in S^1,\ \varepsilon \ll 1,& \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

amb $f_1(x,\theta+2\pi) = f_1(x,\theta)$. Si ε és prou petit, (3.1.1) encara tindrà una òrbita periòdica hiperbòlica γ_ε propera a γ_0 pel teorema següent.

[1]Per ser $\mathcal{X}^r(M)$ un espai de Baire.

Definició 2. *Donat* $X \in \mathcal{D}iff^r(M)$ *i* $p \in M$ *diem que* X *és* localment estable *en* p *si per qualsevol entorn* U *de* p *existeix un entorn* $\mathcal{N}_X$ *de* X *en* $\mathcal{D}iff^r(M)$ *tal que per a tot* $Y \in \mathcal{N}_X$*,* X *en* p *és topològicament equivalent a* Y *en* q *per algun* $q \in U$*.*

Teorema. *Sigui* $X \in \mathcal{D}iff^r(M)$ *un element del conjunt d'aplicacions* r*-diferenciables sobre la varietat diferenciable* M *tal que* $p \in M$ *és un punt singular hiperbòlic de* X*. Aleshores* X *és localment estable.*

La prova d'aquest teorema es pot trobar a [PdM82].

Ara, si hi ha intersecció, pot ser transversal. La teoria defineix la funció de Melnikov i prova que mesura la distància entre les varietats i serveix per detectar transversalitat. Veiem com es construeix aquesta funció.

Sigui $x_0 \in \Gamma \subset \mathbb{R}^2$ un punt sobre la connexió del sistema no pertorbat. Prenem una secció L perpendicular a la connexió en aquest punt x_0 situada sobre el pla $\Sigma_{\theta_0} = \{\theta = \theta_0\}$. Considerem ara el sistema pertorbat i les interseccions de γ_ε, $W^u(\gamma_\varepsilon)$ i $W^s(\gamma_\varepsilon)$ amb Σ_{θ_0}. En particular considerem l'aplicació de Poincaré

$$P := P_{\varepsilon,\theta_0} : \Sigma_{\theta_0} \to \Sigma_{\theta_0}$$

del sistema pertorbat. L'aplicació P tindrà un punt fix hiperbòlic (per definició una òrbita periòdica hiperbòlica es correspon a un punt fix hiperbòlic de l'aplicació de Poincaré del sistema) $x^* := x^*_{\varepsilon,\theta_0}$ proper a $x = 0$, i les seves corresponents varietats estable i inestable seran $W^{s,u}(x^*) = W^{s,u}(\gamma_\varepsilon) \cap \Sigma_{\theta_0}$, també properes a Γ en Σ_{θ_0}.

Mesurem la distància entre $W^u(\gamma_\varepsilon)$ i $W^s(\gamma_\varepsilon)$ al llarg de la secció transversal L. Aquesta distància doncs dependrà de θ_0, ja que les interseccions de les varietats amb Σ_{θ_0} depenen de θ_0, si $\varepsilon > 0$ (ja que per $\varepsilon = 0$ totes les distàncies coincideixen i són zero). Les varietats $W^u(\gamma_\varepsilon)$ i $W^s(\gamma_\varepsilon)$ tallaran la secció transversal L més d'una vegada, però un nombre finit, de manera que hi haurà un únic punt d'intersecció $A^{u,s}$ que serà el més proper a x_0.

Siguin $(x^{u,s}(t, \theta_0, \varepsilon), t)$ amb $t \in \mathbb{R}$ les dues úniques solucions del sistema pertorbat que passen per $A^{u,s}$ per $t = \theta_0$, aleshores definim la següent funció distància en funció de t:

$$\Delta_\varepsilon(t, \theta_0) = f_0(x_0(t - \theta_0)) \wedge (x^u(t, \theta, \varepsilon) - x^s(t, \theta_0, \varepsilon)) \tag{3.1.2}$$

on $x_0(t)$ és la connexió homoclínica del sistema no pertorbat, amb $x_0(0) = x_0$. Observem que $a \wedge b = a_1 b_2 - a_2 b_1$ per dos vectors $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$. Per tant, $\Delta_\varepsilon(t, \theta_0)$ és $\|f_0(x_0(t - \theta_0))\|$ vegades la component del vector $(x^u(t, \theta, \varepsilon) - x^s(t, \theta_0, \varepsilon))$ perpendicular a $f_0(x_0(t - \theta_0))$, i aquest darrer vector és òbviament tangent a Γ en $x_0(t - \theta_0)$, Γ és solució del sistema que defineix. Per tant,

$$\frac{\Delta_\varepsilon(t, \theta_0)}{\|f_0(x_0)\|}$$

és la distància entre $W^u(\gamma_\varepsilon)$ i $W^s(\gamma_\varepsilon)$ mesurada sobre L en Σ_{θ_0}.

Estudiem millor (3.1.2), per obtenir una expressió més útil. Siguin

$$x^u(t, \theta_0, \varepsilon) = x_0(t - \theta_0) + \varepsilon x_1^u(t, \theta_0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$
$$x^s(t, \theta_0, \varepsilon) = x_0(t - \theta_0) + \varepsilon x_1^s(t, \theta_0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

on $x_1^{u,s}$ són les primeres variacionals del sistema respecte ε,

$$\dot{x}_1^{u,s}(t, \theta_0) = Df_0(x_0(t - \theta_0))x_1^{u,s}(t, \theta_0) + f_1(x_0(t - \theta_0), t).$$

Definim ara la funció auxiliar

$$\Delta_\varepsilon^{u,s}(t, \theta_0) = f_0(x_0(t - \theta_0)) \wedge \varepsilon x_1^{u,s}(t, \theta_0),$$

de manera que

$$\Delta_\varepsilon(t, \theta_0) = \Delta_\varepsilon^u(t, \theta_0) - \Delta_\varepsilon^s(t, \theta_0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

És un càlcul senzill (però llarg) determinar les equacions diferencials ordinàries per a $\Delta_\varepsilon^{u,s}$, fent servir que $\dot{x}_0(t - \theta_0) = f_0(x_0(t - \theta_0))$ (només donem l'expressió per $\dot{\Delta}_\varepsilon^u$ per simplificar):

$$\begin{aligned}\dot{\Delta}_\varepsilon^u(t, \theta_0) = \varepsilon(&\mathrm{Tr}(Df_0(x_0(t - \theta_0)))\, f_0(x_0(t - \theta_0)) \wedge x_1^u(t, \theta_0) \\ &+ f_0(x_0(t - \theta_0)) \wedge f_1(x_0(t - \theta_0), t)).\end{aligned}$$

Si el sistema no pertorbat és hamiltonià la darrera expressió es simplifica, ja que per a un sistema d'aquest tipus $\mathrm{Tr}(Df_0(x)) \equiv 0$. Llavors si integrem aquesta equació diferencial per $t = -\infty$ fins $t = \theta_0$:

$$\Delta_\varepsilon^u(\theta_0, \theta_0) = \varepsilon \int_{-\infty}^{\theta_0} f_0(x_0(t - \theta_0)) \wedge f_1(x_0(t - \theta_0), t)\, dt$$

on hem usat que $\Delta_\varepsilon^u(-\infty, \theta_0) = 0$ ja que $x_0(-\infty) = f_0(0) = 0$. Podem obtenir un càlcul similar per la branca estable i sumant les dues expressions recuperem la funció distància:

$$\Delta_\varepsilon(\theta_0, \theta_0) = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} f_0(x_0(t - \theta_0)) \wedge f_1(x_0(t - \theta_0), t)\, dt + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Definim la funció de Melnikov per

$$M(\theta_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(x_0(t - \theta_0)) \wedge f_1(x_0(t - \theta_0), t)\, dt,$$

de manera que

$$\Delta_\varepsilon(\theta_0, \theta_0) = \varepsilon M(\theta_0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

La importància d'aquesta funció es veu reflectida en la següent proposició, la prova de la qual es pot trobar a [AP90].

Proposició. *Si $M(\theta_0)$ té zeros simples, aleshores per un $\varepsilon > 0$ prou petit les varietats invariants $W^s(x^*)$, $W^u(x^*)$ es tallen transversalment per algun $\theta_0 \in [0, 2\pi]$. D'altra banda, si $|M(\theta_0)| \geq c > 0$ les varietats invariants no es tallen.*

3.2 Càlcul explícit de l'àrea per al nostre sistema

Sigui el següent sistema hamiltonià:

$$\dot{x} = \partial H/\partial y, \quad \dot{y} = -\partial H/\partial x,$$

amb

$$H = \varepsilon \left(\mathcal{H}^0(x, y, \varepsilon) + \sigma \mathcal{H}^*(x, y, t, \varepsilon)\right), \tag{3.2.1}$$

H analítica real i

$$\mathcal{H}^* = e^{it}\mathcal{H}^+(x, y, \varepsilon) + e^{-it}\mathcal{H}^-(x, y, \varepsilon),$$

on $\sigma \ll \varepsilon$. Suposem que aquest sistema prové de $\varepsilon\hat{H}$ després del procediment de mitjanes, de manera que $\sigma \sim \exp(-\pi\varepsilon^{-1}/2)$, i suposem per valors petits d'ε el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \partial(\varepsilon\mathcal{H}^0)/\partial y, \\ \dot{y} &= -\partial(\varepsilon\mathcal{H}^0)/\partial x \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

té un punt fix hiperbòlic $(x^0_\varepsilon, y^0_\varepsilon)$ amb separatriu $\gamma_\varepsilon(t)(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))$. Les separatrius corresponents al sistema general s'escindeixen, i mesurem la seva escissió mitjançant l'àrea $\mathcal{A}$ que envolten els seus segments. Sigui

$$P^\pm(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\lambda} \left(\mathcal{H}^\pm(\gamma_\varepsilon(\lambda, \varepsilon) - \mathcal{H}^\pm(x^0_\varepsilon, y^0_\varepsilon, \varepsilon)\right) d\lambda. \tag{3.2.3}$$

Lema 3. *L'àrea $\mathcal{A}$ es pot estimar per:*

$$\mathcal{A} = 4\sigma\varepsilon|P^+(\varepsilon)| + \mathcal{O}(\sigma^2).$$

Demostració. De moment suposem que γ_ε es projecta 1-1 sobre l'eix x, el cas en que no ho fa és completament anàleg. Podem definir la separatriu mitjançant una funció generatriu $S_\pm(x, \varepsilon)$, o sigui, la corba γ_ε es pot definir per $y = \partial S_\pm/\partial x$ i es compleix la següent igualtat (com veurem una mica més endavant)

$$\mathcal{H}^0(x, \partial S_\pm/\partial x, \varepsilon) = \mathcal{H}^0(x^0_\varepsilon, y^0_\varepsilon, \varepsilon). \tag{3.2.4}$$

Per a $0 < \sigma \ll 1$, el nostre sistema té una solució hiperbòlica i 2π periòdica, propera al punt fix del sistema reduït. Les seves varietats invariants corresponents són formades per dues branques, en general, la separatriu estable Γ^+ i la inestable, Γ^-. Les seves equacions es poden escriure com:

$$\begin{aligned} y &= \partial S^\pm/\partial x, \\ S^\pm(x, t, \varepsilon, \sigma) &= S_0(x) + \sigma S^\pm_1(x, \varepsilon) + \sigma^2 S^\pm_2(x, t, \varepsilon, \sigma), \end{aligned}$$

suposant que la solució que cerquem és analítica. Observem que les funcions $S^{\pm}$ satisfan les següents equacions (de Hamilton-Jacobi)

$$\partial S^{\pm}/\partial t + H(x, \partial S^{\pm}/\partial x, t, \varepsilon, \sigma) = \varepsilon \mathcal{H}^0(x_\varepsilon^0, y_\varepsilon^0, \varepsilon) + \sigma f^{\pm}(t, \varepsilon, \sigma),$$

on $f^{\pm}$ són funcions arbitràries 2π periòdiques en t. Desenvolupant en sèrie de potències trobem (3.2.4) com a ordre zero. A ordre 1 trobem:

$$\frac{\partial S_1^{\pm}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial y}\left(x, \frac{\partial S_0}{\partial x}, \varepsilon\right) \frac{\partial S_1^{\pm}}{\partial x} + \varepsilon \mathcal{H}^*\left(x, \frac{\partial S_0}{\partial x}, t\varepsilon\right) = f^{\pm}(t, \varepsilon, 0). \quad (3.2.5)$$

Com que σ ha de ser exponencialment petit, podem menysprear els termes $\sigma^2 S_2^{\pm}$ en les funcions generatrius. Substituint en l'equació (3.2.5) la funció $x_\varepsilon(t-s)$, que és la primera component de la separatriu $\gamma_\varepsilon(t-s)$, obtenim:

$$dS_1^{\pm}(x_\varepsilon(t-s), t, \varepsilon)/dt = -\varepsilon \mathcal{H}^*(\gamma(t-s), t, \varepsilon) + f^{\pm}(t, \varepsilon, 0), \quad (3.2.6)$$

on la derivada d/dt es pren al llarg de les solucions del sistema (3.2.2). Prenem:

$$f^{\pm}(t, \varepsilon, 0) = \varepsilon \mathcal{H}^*(x_\varepsilon^0, y_\varepsilon^0, t, \varepsilon), \qquad \varepsilon \tilde{\mathcal{H}}^* = \varepsilon \mathcal{H}^* - f^{\pm}(t, \varepsilon, 0). \quad (3.2.7)$$

De les dues equacions anteriors en podem deduir:

$$\begin{aligned} S_1^+(x_\varepsilon(t-s), t, \varepsilon) - S_1^+(x_\varepsilon^0, t, \varepsilon) &= \varepsilon \int_t^{\infty} \tilde{\mathcal{H}}^*(\gamma_\varepsilon(r-s), r, \varepsilon)\, dr, \\ S_1^-(x_\varepsilon(t-s), t, \varepsilon) - S_1^-(x_\varepsilon^0, t, \varepsilon) &= \varepsilon \int_{-\infty}^{t} \tilde{\mathcal{H}}^*(\gamma_\varepsilon(r-s), r, \varepsilon)\, dr. \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Les dues integrals convergeixen, ja que $\tilde{\mathcal{H}}(x_\varepsilon^0, y_\varepsilon^0, t, \varepsilon) = 0$ i $\gamma^{\pm}$ convergeix exponencialment cap al punt fix.

L'àrea $\mathcal{A}$ és acotada al cilindre $\Pi = \{x \mod 2\pi, y; t = \text{const}\}$ per dos segments de corba $\Gamma^{\pm} \cap \Pi$, situats entre dos punts d'intersecció consecutius (x', y') i (x'', y''). Els punts (x', y', t), (x'', y'', t) tenen en general la forma:

$$(x', y', t) = (x', \frac{\partial S^{\pm}}{\partial x}(x, t, \varepsilon), t).$$

Llavors, podem determinar l'àrea mitjançant:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \left| \int_{x'}^{x''} \frac{\partial}{\partial x} \left(S^+(x, t, \varepsilon, \sigma) - S^-(x, t, \varepsilon, \sigma) \right) dx \right| \\ &= \left| \sigma \int_{x'}^{x''} \frac{\partial}{\partial x} \left(S_1^+(x, t, \varepsilon) - S_1^-(x, t, \varepsilon) \right) dx \right| + \mathcal{O}(\sigma^2) \\ &= \sigma \left| \left(S_1^+(x'', t\varepsilon) - S_1^-(x'', t\varepsilon) \right) - \left(S_1^+(x', t\varepsilon) - S_1^-(x', t\varepsilon) \right) \right| + \mathcal{O}(\sigma^2). \end{aligned}$$

Com que $\tilde{H}^*$ és 2π periòdica en el temps, la funció

$$P(s,\varepsilon) := \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathcal{H}}^*(\gamma_\varepsilon(r-s), r, \varepsilon)\, dr = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathcal{H}}^*(\gamma_\varepsilon(r), r+s, \varepsilon)\, dr \quad (3.2.9)$$

és 2π periòdica en s. A més, per (3.2.8)

$$S_1^- - S_1^+(x(t-s), t) = -\varepsilon P(s\varepsilon),$$

de manera que

$$\mathcal{A} = \sigma\varepsilon(P(s'', \varepsilon)) - P(s', \varepsilon)) + \mathcal{O}(\sigma^2),$$

on s' i s'' venen determinats per $x_\varepsilon(t-s') = x'$, $x_\varepsilon(t-s'') = x''$. Aquests dos punts, s', s'' són arrels consecutives de l'equació $\frac{\partial P(s,\varepsilon)}{\partial s} = 0$, $s' < s''$. A més satisfan:

$$\frac{\partial S^+}{\partial x}(x_\varepsilon(t-s), t, \varepsilon) - \frac{\partial S^-}{\partial x}(x_\varepsilon(t-s), t, \varepsilon) = 0.$$

Que es pot reescriure per:

$$0 = \{\mathcal{H}^0, S_1^+ - S_1^-\}(\gamma_\varepsilon(t-s), t, \varepsilon) \equiv \varepsilon \frac{\partial P(s,\varepsilon)}{\partial s},$$

ja que $\{f, g\} = f_y g_x - f_x g_y$, que S_1 és independent de y i que $\mathcal{H}^0$ és hamiltonià de (3.2.2) Recordem també que:

$$\tilde{\mathcal{H}}^* = e^{it}\left(\mathcal{H}^+(x,y,\varepsilon) - \mathcal{H}^+(x_\varepsilon^0, y_\varepsilon^0, \varepsilon)\right) + e^{-it}\left(\mathcal{H}^-(x,y,\varepsilon) - \mathcal{H}^-(x_\varepsilon^0, y_\varepsilon^0, \varepsilon)\right).$$

La funció P es pot escriure doncs com

$$P(s,\varepsilon) = e^{is}P^+(\varepsilon) + e^{-is}P^-(\varepsilon),$$

mitjançant (3.2.2) i (3.2.9). Com H és analítica real, P^+ i P^- han de ser conjugades, d'aquesta manera s' i s'' han de complir la identitat següent:

$$ie^{is}P^+(\varepsilon) - ie^{-is}P^-(\varepsilon) = 0,$$

que té per solucions

$$e^{is} = \pm\left(P^-(\varepsilon)/P^+(\varepsilon)\right)^{1/2}.$$

I finalment obtenim l'expressió que cercàvem,

$$\mathcal{A} = 4\sigma\varepsilon|P^+(\varepsilon)| + \mathcal{O}(\sigma^2).$$

□

4 Càlcul de l'escissió del sistema

4.1 Enunciats dels resultats

En aquesta secció farem servir un conjunt de resultats que majoren el sistema de mitjanes per determinar una expressió asimptòtica de l'escisió de separatrius per al sistema 2.3.1. Això ho farem mesurant l'àrea compresa entre dos punts d'intersecció transversal de les varietats estable i inestable .

Teorema 3. *Per a $\varepsilon > 0$ petit, l'àrea $\mathcal{A}$ compresa entre dos punts d'intersecció transversal de les varietats estable i inestable es pot estimar per:*

$$\mathcal{A} = 4\varepsilon^{-1} e^{\pi\varepsilon^{-1}/2} \left(|J(B_-^+, B_-^-)| + \mathcal{O}(\varepsilon \log \varepsilon^{-1}) \right), \tag{4.1.1}$$

on J queda definida al teorema (8) i prové de resoldre un sistema no lineal independent de ε, i compleix:

$$J(B_-^+, B_-^-) = 2B_-^+ f(4B_-^+ B_-^-), \qquad f(0) = 4\pi,$$

on $f(z)$ és entera, real i analítica en la variable $z \in \mathbb{C}$.

Per la prova es necessiten uns quants resultats auxiliars. Un d'ells és el teorema 8, els altres els enunciarem a continuació. La idea és provar que el sistema:

$$H_\delta^0 = -2i\varepsilon\{H^+, H^-\}, \qquad H_\delta^\pm + H^\pm = \pm i\{H^0, H^\pm\}$$

amb les condicions inicials

$$H^0(x, y, \varepsilon, 0) = \hat{H}^0(x, y), \qquad H^\pm(x, y, \varepsilon, 0) = \hat{H}^\pm(x, y)$$

té solució en un entorn de la separatriu, i pot ser majorada de manera que trobem certes fites que ens permeten una expressió asimptòtica de l'escisió de les separatrius. Recordem que aquest sistema és el que ens dóna la mitjana del sistema amb hamiltonià $\hat{H}$. Provarem que aquest sistema té solució en un entorn complex de la separatriu real γ per $0 \le \delta \le \hat{\delta} = \varepsilon^{-1}(\pi/2 - c_1)$, on $0 < c_1 < \pi/4$, i aplicarem el lema 3 al sistema de hamiltonià $H(x, y, \hat{\delta})$ (recordem que donat un hamiltonià obtingut pel mètode de les mitjanes, el lema (3) ens dóna una mesura de l'escissió de les separatrius del sistema).

Provarem l'existència de solucions del sistema (2.3.6)-(2.3.7) en 3 dominis que cobreixen completament la separatriu real (veure figura 2).

Aquests dominis són:

$$D_1^\delta = \{|\mathrm{Im}\,\tau_*(x,y)\,| \le c_2^{-1} + \pi/2 - \varepsilon\delta,\ c_3^{-1} \le |\mathrm{Re}\,\tau_*(x,y)\,| \le c_3,\ |h(x,y)| \le c_2^{-1}\},$$
$$D_2 = \{|x - \pi| \le c_4^{-1} \mathrm{mod}\, 2\pi,\ |y| \le c_4^{-1}\},$$
$$D_3^\delta = \{0 \le \mathrm{Im}\,\tau_*(x,y)\ \le \pi/2 - \varepsilon\delta - c_5\varepsilon,\ |\mathrm{Re}\,\tau_*(x,y)\,| \le 2c_3^{-1},\ |h(x,y)| \le c_6\varepsilon\}.$$

Triem les constants $c_1, \ldots, c_6$ prou grans com perquè la unió d'aquests tres dominis contingui la separatriu γ. Ara enunciarem els resultats auxiliars, que seran provats a seccions posteriors :

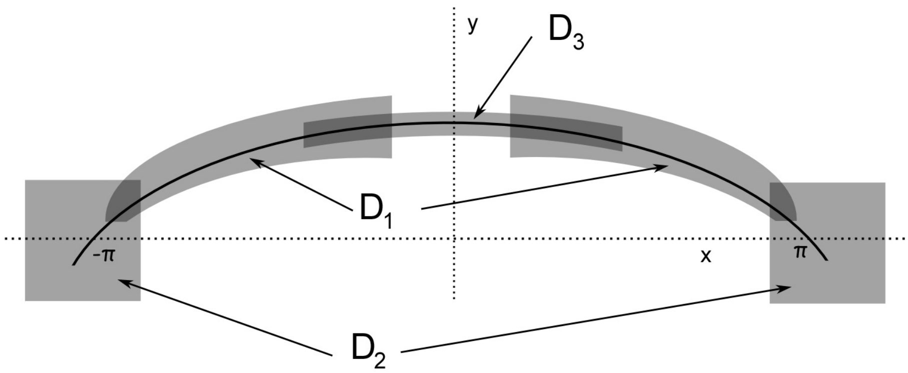

Figura 2: Esquema dels dominis.

Teorema 4. *Existeix una solució del sistema (2.3.6),(2.3.7) per a* $0 \le \delta \le \pi\varepsilon^{-1}/2$ *en el domini* D_1^δ*, i a més a* D_1^δ *es verifica:*

$$|H^{\pm}(x, y, \delta)| \le Ae^{-\delta}, \tag{4.1.2}$$

$$|H^0(x, y, \delta) - \hat{H}^0(x, y)| \le \varepsilon^2 A', \tag{4.1.3}$$

per a certs $A, A' > 0$.

Teorema 5. *Existeix una solució del sistema (2.3.6),(2.3.7) per a* $0 \le \delta \le \pi\varepsilon^{-1}/2$ *en el domini* D_2*, i a més a* D_2 *es verifiquen (4.1.2),(4.1.3).*

Recordem que

$$\hat{H}^0_*(\tau_*, h) = \hat{H}^0(x, y), \qquad \hat{H}^{\pm}_*(\tau_*, h) = \hat{H}^{\pm}(x, y)$$

$$\hat{H}^0_*(\tau_*, h, \delta) = \hat{H}^0(x, y, \delta), \qquad \hat{H}^{\pm}_*(\tau_*, h, \delta) = \hat{H}^{\pm}(x, y, \delta), \tag{4.1.4}$$

on en aquestes darreres expressions (x, y) representa $x(\tau_*), y(\tau_*)$. Seguint aquesta notació, $H_*(\tau_*, h, \delta) = H(x, y, \delta)$ i equivalentment per $\tilde{H}(\tilde{\tau}, \tilde{h}, \delta) = H(x, y, \delta)$.

Teorema 6. *Per qualsevol constant* $c_1 > 0$ *existeix solució del sistema (2.3.6), (2.3.7) per a* $0 \le \delta \le (\pi/2 - c_1)/\varepsilon$ *en el domini* D_3^δ*. A més, si* $\delta \sim \varepsilon^{-1}$*, a* D_3^δ *es verifica:*

$$|H^0_* - h| \le c_7\varepsilon^2, \qquad |(H^0_*)_h| \le \frac{c_7\varepsilon}{1 + \varepsilon^{-1}|\mathrm{Re}\,\tau\,|}.$$

El teorema següent afirma que les funcions $\tilde{H}^+$ i H^+_* són properes en un cert sentit, si les escribim en les mateixes variables. Recordem que $\tilde{H}^+ = \tilde{H}^+(\tilde{\tau}, \tilde{h}, \delta)$ i $H^+_* = H^+_*(\tau_*, h, \delta)$.

Teorema 7. *Sigui* $\hat{\delta} = (\pi/2 - c_1)/\varepsilon$ *i* $t_\gamma = t + i\pi\varepsilon^{-1}/2 - i\hat{\delta} - ic_5$. *Llavors per a qualssevol parell de funcions* $\tilde{p}_1(t), \tilde{p}_2(t)$ *tals que*

$$|\tilde{p}_1(t)| \leq c' \log(1 + |t|), \quad |\tilde{p}_2(t)| \leq c'', \quad -c_3^{-1}/\varepsilon \leq t \leq c_3^{-1}/\varepsilon$$

es verifica

$$\begin{aligned}\int_{-c_3^{-1}/\varepsilon}^{c_3^{-1}/\varepsilon} e^{it} & \left(H_*^+ \left(\varepsilon t_\gamma + \varepsilon^2 \tilde{p}_1(t), \varepsilon^2 p_2(t), \hat{\delta} \right) \right. \\ & \left. -\varepsilon^{-2} \tilde{H}^+ \left(t_\gamma + \varepsilon \tilde{p}_1(t) - \varepsilon^{-1} T(\varepsilon^2 \tilde{p}_2(t)), \varepsilon^4 \tilde{p}_2(t), \hat{\delta} \right) \right) dt \\ & = e^{-\delta} \mathcal{O} \left(\varepsilon^{-1} \log \varepsilon^{-1} \right). \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

Tots aquests teoremes seran provats en seccions posteriors, a continuació provarem la mesura de l'escissió del sistema fent servir aquestes resultats.

4.2 Prova del teorema 3

L'àrea $\mathcal{A}$ queda determinada per $\mathcal{H}^+ = H^+(x, y, \varepsilon, \hat{\delta})e^{\hat{\delta}}$ i $\sigma = e^{-\hat{\delta}}, \hat{\delta} = (\pi/2 - c_1)/\varepsilon$. Per avaluar la funció P^+, necessitem la separatriu γ_ε del sistema amb hamiltonià $\varepsilon H^0(x, y, \varepsilon, \hat{\delta})$.

El punt fix hiperbòlic del sistema pertorbat proper a $(\pi, 0)$, (x^e, y^e) satisfà l'equació $\mathrm{grad} H^0(x^e, y^e, \varepsilon, \hat{\delta}) = 0$. Pel teorema 5:

$$(x^e, y^e) = (\pi, 0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \tag{4.2.1}$$

El nivell d'energia $h' = \varepsilon H^0(x^e, y^e, \hat{\delta})$, corresponent a la separatriu γ_ε es pot representar per:

$$h' = \varepsilon \hat{H}^0(x^e, y^e) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) = \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

fent servir (4.2.1) i que $(\pi, 0)$ és crític per $\hat{H}^0$. Definim $H_e^+ = H^+(x^e, y^e, \hat{\delta})$, i llavors pel teorema 5, $H_e^+ \leq Ae^{\hat{\delta}}$.

Les equacions de la separatriu γ_ε en les variables τ_*, h són

$$\dot{\tau}_* = \varepsilon \left(H_*^0 \right)_h (\tau_*, h, \hat{\delta}), \quad H_*^0(\tau_*, h, \hat{\delta}) = \varepsilon^{-1} h' = \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Si fem servir les estimacions dels teoremes 6, 5 i 4 per a les funcions H_*^0, H^0 i posem $\tau_*(0) = 0$, la solució $\gamma_\varepsilon(t)$ és analítica per a $0 \leq \mathrm{Im}\, t \leq \pi\varepsilon^{-1}/2 - \hat{\delta} - c_5$, i a més

$$\tau_*(t) = \varepsilon t + \varepsilon^2 p_1(t), \quad h(t) = \varepsilon^2 p_2(t) \tag{4.2.2}$$

on $|p_1(t)| \leq c_8 \log(1 + |t|), |p_2(t)| \leq c_8$ en el domini

$$\{t \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}\, t| \leq c_3/\varepsilon, 0 \leq \mathrm{Im}\, t \leq \pi\varepsilon^{-1}/2 - \hat{\delta} - c_5\}.$$

Sigui t_γ determinat per (4.3.3) més endavant. Com que la funció $H^+(\gamma_\varepsilon(t_\gamma),\hat\delta)-H_e^+$ està ben definida i d'ordre $\mathrm{const}\cdot e^{-\hat\delta}$, tenim:

$$\begin{aligned}
P^+ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\hat\delta+it}\left(H^+(\gamma_\varepsilon(t),\hat\delta)-H_e^+\right)dt\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi\varepsilon^{-1}/2+2\hat\delta+c_5+it}\left(H^+(\gamma_\varepsilon(t),\hat\delta)-H_e^+\right)dt\\
&= \int_{-c_3^{-1}/\varepsilon}^{c_3^{-1}/\varepsilon} e^{-\pi\varepsilon^{-1}/2+2\hat\delta+c_5+it}H^+(\gamma_\varepsilon(t_\gamma),\hat\delta)\,dt+e^{-\pi\varepsilon^{-1}/2+\hat\delta}\mathcal{O}(1).
\end{aligned}$$

Pel teorema 7, sabem que $|P^+-I_1|\le e^{-\pi\varepsilon^{-1}/2+2\hat\delta}$, on:

$$I_1=\varepsilon^{-2}\int_{-c_3^{-1}/\varepsilon}^{c_3^{-1}/\varepsilon} e^{-\pi\varepsilon^{-1}/2+2\hat\delta+c_5+it}\tilde H\left(t_\gamma+\varepsilon p_1(t_\gamma)-\varepsilon^{-1}T(\varepsilon^2p_2(t_\gamma)),\varepsilon^4p_2(t_\gamma),\hat\delta\right)dt.$$

Per l'apartat 3 del teorema 8, $|I_1^+-I_2|\le e^{-\pi\varepsilon^{-1}/2+2\hat\delta}$ on

$$I_1=\varepsilon^{-2}\int_{-c_3^{-1}/\varepsilon}^{c_3^{-1}/\varepsilon} e^{-\pi\varepsilon^{-1}/2+2\hat\delta+c_5+it}\tilde H\left(t-i\hat\delta-ic_5,0,\hat\delta\right)dt.$$

Per l'apartat 4 del teorema 8, $I_2=\varepsilon^{-2}e^{-\pi\varepsilon^{-1}/2+\hat\delta}\left(J+\mathcal{O}(\varepsilon)\right)$ i per tant

$$P^+=\varepsilon^{-2}e^{-\pi\varepsilon^{-1}/2+\hat\delta}\left(J+\mathcal{O}(\varepsilon\log\varepsilon^{-1})\right).$$

Llavors fent servir les fites del lema 3 obtenim:

$$\mathcal{A}=4e^{-\hat\delta}|\varepsilon^{-1}e^{-\pi\varepsilon^{-1}/2+\hat\delta}\left(J+\varepsilon\log\varepsilon^{-}\right)|=4\varepsilon^{-1}e^{-\pi\varepsilon^{-1}/2}|J+\mathcal{O}(\varepsilon\log\varepsilon^{-1})|.$$

4.3 Prova del teorema 8

Teorema 8. *Siguin $\tilde c,\tilde c_1,\tilde c_2,\tilde c_3$ nombres reals prou grans. Aleshores es verifiquen*

1. *Per qualsevol $\hat\delta\ge 0$ i $0\le\delta\le\hat\delta$ el sistema*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\tilde H^0}{\partial\delta}&=-2i\{\tilde H^+,\tilde H^-\}, &\quad \frac{\partial\tilde H^\pm}{\partial\delta}+\tilde H^\pm&=\pm i\{\tilde H^0,\tilde H^\pm\},\\
\tilde H^0(\tilde\tau,\tilde h,0)&=\tilde h, & \tilde H^\pm(\tilde\tau,h,0)&=-4\tilde hB_-^\pm\left(1-\cos\left(\tilde\tau\sqrt{2\tilde h}\right)\right)
\end{aligned}\tag{4.3.1}$$

té solució $\tilde H^0(\tilde\tau,\tilde h,\delta)$, $\tilde H^\pm(\tilde\tau,\tilde h,\delta)$ analítica en $\tilde\tau$ i $\tilde h$ en el domini

$$D_0^{\hat\delta}:=\{\operatorname{Im}\tilde\tau\le-\tilde c-\hat\delta,|\tilde h(\tilde\tau+i\hat\delta)^2|\le\tilde c_1^{-1}\}.$$

2. *Per* $\tilde\tau \in D_0^{\hat\delta}$ *i* $0 \le \delta \le \hat\delta$ *es compleix:*

$$\|\tilde H^+(\tilde\tau, \tilde h, \delta)\| \le \tilde c_2 e^{-\delta}(\tilde\tau + i\delta)^{-2}.$$

3. *Per constants arbitràries* $c_3 > 0$, $c_5 \ge \tilde c$ *i funcions arbitràries* $\tilde p_1(t), \tilde p_2(t)$ *complint*

$$|\tilde p_1(t)| \le \tilde c' \log(1+|t|), \quad |\tilde p_2(t)| \le \tilde c'', \quad -c_3^{-1}/\varepsilon \le t \le c_3^{-1}/\varepsilon$$

es verifica

$$\begin{aligned}\int_{-c_3^{-1}/\varepsilon}^{c_3^{-1}/\varepsilon} & e^{it}\big(\tilde H^+(t - i\hat\delta - ic_5, 0, \hat\delta) \\ & - \tilde H^+(t_\gamma + \varepsilon\tilde p_1(t) - \varepsilon^{-1}T(\varepsilon^2\tilde p_2(t)), \varepsilon^4\tilde p_2(t), \hat\delta)\big)\, dt \\ & \le e^{-\hat\delta}\tilde c_3 \varepsilon \log \varepsilon^{-1},\end{aligned} \tag{4.3.2}$$

on

$$t_\gamma = t + i\pi\varepsilon^{-1}/2 - i\hat\delta - ic_5, \tag{4.3.3}$$

si $\hat\delta \le \mathrm{const}/\varepsilon$.

4. *La integral*

$$\tilde I(\delta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\delta + i(t - i\Theta)}\tilde H^+(t - i\Theta - i\delta, 0, \delta)\, dt, \quad \Theta \ge \tilde c \tag{4.3.4}$$

existeix i és independent de $\Theta \in \mathbb{R}$. *A més,* $\tilde I(\delta) = J + \mathcal{O}(\delta^{-1})$, *on*

$$J = \lim_{\delta\to+\infty} \tilde I(\delta), \qquad J = J(B_-^+, B_-^-). \tag{4.3.5}$$

Definim les funcions $\tilde q^0$, $\tilde q^\pm$ com:

$$\tilde H^0(\tilde\tau, \tilde h, \delta) = \tilde h + \tilde q^0(\tilde\tau, \tilde h, \delta), \qquad \tilde H^\pm(\tilde\tau, \tilde h, \delta) = \tilde q^\pm(\tilde\tau, \tilde h, \delta)e^{-\delta}.$$

Ara el sistema (2.3.24)-(2.3.25) es transforma en

$$\tilde q^0_\delta = -2ie^{-2\delta}\{\tilde q^+, \tilde q^\cdot\}^\sim, \qquad \tilde q^\pm_\delta = \pm i\tilde q^\pm_{\tilde\tau} \pm i\{\tilde q^0, \tilde q^\pm\}^\sim, \tag{4.3.6}$$

amb condicions inicials

$$\tilde q^0(\tilde\tau, \tilde h, 0) = 0, \qquad \tilde q^\pm(\tilde\tau, \tilde h, 0) = -4\tilde h B_-^\pm\left(1 - \cos(\tilde\tau\sqrt{2\tilde h})\right)^{-1}.$$

D'ara endavant en aquesta secció ometrem les tildes als parèntesis de Poisson. Per la prova del teorema 8 necessitem un lema tècnic auxiliar, que enunciem ara i demostrem a la propera secció.

Lema 4. *Suposem que per a alguns $\Delta \geq 0$, $v > 0$ i per a tot $s \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Im} s \geq u > 0$ es verifiquen:*

$$\tilde{q}^0(\tilde{\tau} - s - i\Delta, \tilde{h}, \Delta) \ll \frac{B\|s\|}{\|s + i\Delta\|^4 \|s + 2i\Delta\|^2 Y(s, 2\Delta)},$$
$$\tilde{q}^{\pm}(\tilde{\tau} - s - i\Delta, \tilde{h}, \Delta) \ll \frac{C}{\|s\| \|s + 2i\Delta\|^2 Y(s, 2\Delta)}, \qquad (4.3.7)$$

$$\tilde{q}^{\pm}(\tilde{\tau} - s - i\Delta, \tilde{h}, \Delta) - \tilde{q}^{\pm}(\tilde{\tau} - s - i\Delta \pm i\Delta, \tilde{h}, 0) \ll \frac{C}{\|s\|^2 \|s + 2i\Delta\|^2 Y(s, 2\Delta)},$$

$$Y(\alpha, \beta) = (v\|\alpha\| - \tilde{\tau})(v\|\alpha + i\beta\|^{-2} - \tilde{h}), \qquad C \geq \tilde{N}, \qquad 0 < v \leq 1/4,$$

on $\tilde{N}$ és la constant que apareix en el lema 5. Siguin una constant positiva μ i definim $\Delta' = \Delta + \mu$, $b = \max\{B, C^2A^2, 1/16\}$, on $A \geq 1$ és una constant que verifica:

$$A \geq \frac{2 \cdot 27\|s + 2i\Delta'\|^8(\Delta + 1)e^{-\Delta}}{v\|s\|^8}, \quad A \geq \frac{27\|s + 2i\Delta'\|^7 e^{-\Delta}}{\|s\|^7}.$$

Aleshores, per a qualssevol r i M on:

$$r \geq \tilde{\rho}, \quad \tilde{\rho} = \sqrt[4]{\frac{16b\gamma\mu\sigma}{\|s + 2i\Delta'\|}}, \quad \sigma = \max\{\|s + 2i\Delta\|^{-1}, e^{-\Delta/2}\}$$

es verifiquen:

$$\tilde{q}^0(\tilde{\tau} - s - i\Delta', \tilde{h}, \Delta') \ll \frac{B'\|s\|}{\|s + i\Delta'\|^4 \|s + 2i\Delta'\|^2 Y'(s, 2\Delta')},$$
$$\tilde{q}^{\pm}(\tilde{\tau} - s - i\Delta', \tilde{h}, \Delta') \ll \frac{C}{\|s\|^2 \|s + 2i\Delta'\|^2 Y'(s, 2\Delta')},$$

$$\tilde{q}^{\pm}(\tilde{\tau} - s - i\Delta', \tilde{h}, \Delta') - \tilde{q}^{\pm}(\tilde{\tau} - s - i\Delta' \pm i\Delta', \tilde{h}, 0) \ll \frac{C}{\|s\|^2 \|s + 2i\Delta'\|^2 Y'(s, 2\Delta')}, \qquad (4.3.8)$$

on

$$B' = B + 16b\gamma\mu\sigma e^{-\Delta/2} A^{-1} r^{-4},$$
$$Y'(\alpha, \beta) = (v'\|\alpha\| - \tilde{\tau})(v'\|\alpha + i\beta\|^{-2} - \tilde{h}),$$
$$Y'(\alpha, \beta) = (v\|\alpha\|/2 - \tilde{\tau})(v\|\alpha + i\beta\|^{-2}/2 - \tilde{h}),$$

$$v' = v - r, K = 128b\gamma w^{-4}.$$

$$\tilde{q}^{\pm}(\tilde{\tau} - s - i\Delta - iM, \tilde{h}, \Delta + M) - \tilde{q}^{\pm}(\tilde{\tau} - s - i\Delta \pm i\Delta, \tilde{h}, 0) \ll \frac{KC}{\Delta\|s\|^2\|s + 2i(2\Delta + M)\|^2 Y''(s, 2(\Delta + M))}. \tag{4.3.9}$$

La majorant (4.3.9) és vàlida sempre que $\Delta \geq K$ i la constant γ és definida a (4.6.6).

Provarem ara el teorema 8, i a la següent secció provarem el lema 4.

Provarem el teorema descomposant el domini en δ en un cert nombre d'intervals. Definim

$$\Delta_m = 2^m - 1, \quad \mu_m = \Delta_{m+1} - \Delta_m = 2^m, \quad v_0(m+1)^{-2}/4.$$

Al pas m de la demostració, considerem la solució en l'interval $[\Delta_m, \Delta_{m+1}]$. Per $m = 0$ $\Delta_m = 0$ i el següent lema ens dóna els requeriments del lema 4.

Lema 5. *Suposem que $\|s\| > 1$. Aleshores es verifica la següent majorant en $\tilde{\tau}$, $\tilde{h}$:*

$$\tilde{q}^{\pm}(\tilde{\tau} - s, \tilde{h}, 0) = \tilde{H}^{\pm}(\tilde{\tau} - s, \tilde{h}) \ll \frac{\tilde{N}\|s\|^3}{(\|s\|/2 - \tilde{\tau})(\|s\|^{-2}/4 - \tilde{h})}, \tag{4.3.10}$$

on $\tilde{N} > 0$.

Demostració. Recordem que $\tilde{H}^{\pm}(\tilde{\tau}, \tilde{h}, 0) = -4\tilde{h}B^{\pm}_{-}\left(1 - \cos(\tilde{\tau}\sqrt{2\tilde{h}})\right)^{-1}$ i per tant podem escriure:

$$\tilde{H}(\tilde{\tau}, \tilde{h}, 0) - 4\tilde{h}B^{\pm}_{-}\left(1 - \cos(\tilde{\tau}\sqrt{2\tilde{h}})\right)^{-1} = \tilde{\tau}^{-2}\Psi(\tilde{h}\tilde{\tau}^2),$$

on la funció $\Psi(z)$, és analítica per a $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leq \pi^2$ i per tant per aquests valors de z tenim $|\Psi(z)| \leq M$. D'aquesta manera, $\tilde{H}^{\pm}(\tilde{\tau} - s, \tilde{h}, 0)$ serà analítica en el domini

$$\left\{|\tilde{\tau}| \leq |s|/2, \, |\tilde{h}| \leq \frac{4\pi^2}{|s|^2}\right\}.$$

Recordem una propietat de les normes 1 i 2, $|s| \leq \|s\| \leq \sqrt{2}|s|$, d'aquesta manera en aquest domini es verifica trivialment:

$$|\tilde{H}^{\pm}(\tilde{\tau}, \tilde{h}, 0)| \leq \tilde{M}|s|^{-2}, \qquad \tilde{M} = 4M.$$

D'aquesta manera, per la propietat (5.1.6),

$$|\tilde{H}^{\pm}(\tilde{\tau}, \tilde{h}, 0)| \ll \frac{\tilde{N}\|s\|^2|s|/2 \cdot 4\pi^2|s|^{-2}}{(\|s\|/2 - \tilde{\tau})(\|s\|^{-2}/4 - \tilde{h})}.$$

Per veure la majorant de l'enunciat, observem que $\frac{1}{4|s|^2} < \frac{4\pi^2}{|s|^2}$ i per tant l'aplicació directa de la propietat (5.1.12) ens dóna el resultat desitjat, amb $\tilde{N} = M/2$.

$\square$

Suposem ara per hipòtesi d'inducció que es verifiquen les majorants (4.3.7), on

$$Y(s, 2\Delta) = Y_m(s, 2\Delta_m) = (v_m\|s\| - \tilde{\tau})\left(v_m\|s + 2i\Delta_m\|^{-2} - \tilde{h}\right),$$

$$A = A_m, \quad B = B_m, \quad C = C_m, .$$

Considerem ara les següents recurrències:

$$\begin{aligned} B_0 = 0, \quad & B_{m+1} = B_m + 16b_m\gamma\mu_m\sigma_m e^{-\Delta_m/2}A_m^{-1}r_m^{-4}, \\ & C_{m+1} = C_m = \tilde{N}, \end{aligned}$$

i prenem

$$\begin{aligned} r_m &= v_0(m+1)^{-2}/4, \\ \tilde{\rho}_m &= \left(\frac{16b_m\gamma\mu_m\sigma_m}{\|s + 2i\Delta_{m+1}\|}\right)^{1/4}. \end{aligned} \tag{4.3.11}$$

Aquestes recurrències seran certes si les constants (4.3.11) verifiquen les condicions per poder aplicar el lema 4, ja que el lema 5 ens dóna $B_0 = 0$, $C_0 = \tilde{N}$ Veiem que efectivament les verifiquen.

Per a $m > 0$, $m \in \mathbb{Z}$ són certes les desigualtats següents

$$\frac{\mu_m\sigma_m}{\|s + 2i\Delta_{m+1}\|} \leq 2\frac{2^m(\|s + 2(2^m - 1)\|^{-1} + \exp(-2^{m-1} + 1/2))}{\|s + 2i(2^{m+1} - 1)\|} \leq \frac{6}{\|s\| + 2^m}, \tag{4.3.12}$$

on la primera desigualtat és per la definició inicial de σ_m i per a la segona només fitar $2^{m-1}\exp 2^{m-1}$. Fent servir aquesta fita,

$$\tilde{\rho}_m^4 \leq \frac{16(\tilde{B} + \tilde{N}^2\tilde{A}^2 + 1/16)\gamma\mu_m\sigma_m}{\leq}\frac{const}{\tilde{c} + 2^m}\|s + 2i\Delta_{m+1}\|.$$

Ara tenim prou de recordar

$$r_m^4 = v_0^4 2^{-8}(m+1)^{-8},$$

de manera que si prenem $\tilde{c}$ prou gran, es verifica $r_m \geq \tilde{\rho}_m$. Recordem també que $\|s\| \geq \tilde{c}$ amb $\tilde{c}$ prou gran.

Amb r_m triats de la manera anterior,

$$v_{m+1} = v_0 \left(1 - \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \right) > v_0/2,$$

de manera que el domini final no és buit. Volem ara provar les següents desigualtats, que impliquen l'existència de solució en tot el domini.

$$A_m \leq \tilde{A} < \infty, \quad B_m \leq \tilde{B} < \infty, \quad r_m \geq \tilde{\rho}_m. \tag{4.3.13}$$

Això ho provarem per $\operatorname{Im} s \geq \tilde{c} > 0$, on $\tilde{c}$ serà una constant prou gran. La primera desigualtat és força simple per la pròpia definició de la constant A_m, ja que podem posar:

$$A_m = \max \left\{ 1, \frac{4 \cdot 27 \|s + 2i\Delta_{m+1}\|^8 (\Delta_m + 1) e^{-\Delta_m}}{v_0 \|s\|}, \frac{27 \|s + 2i\Delta_{m+1}\|^7 e^{-\Delta_m}}{\|s\|^7} \right\}.$$

Evidentment per a $\|s\| \geq \text{const} > 0$ fixada, l'expressió anterior per a A_m ens assegura que és acotada per a tot m. Acotem ara B_m, observant que $B_m \leq \beta_m$ on

$$\beta_m = 0, \quad \beta_{m+1} = \beta_m + 2^{12} (\beta_m + \tilde{N}^2 \tilde{A}^2 + 1/16) \gamma \mu_m \sigma_m e^{-\Delta_m/2} v_0^{-4} (m+1)^8.$$

Si definim $s_m = 2^{12} \gamma \mu_m \sigma_m e^{-\Delta_m/2} v_0^{-4} (m+1)^8$ podem reescriure aquesta expressió com:

$$\beta_{m+1} = \beta_m (1 + s_m) + (\tilde{N}^2 \tilde{A}^2 + 1/16) s_m, \tag{4.3.14}$$

d'on es dedueix que β_m és convergent si $\prod (1 + s_j)$ és convergent, recordem que un producte infinit és convergent si ho és el seu logaritme, de manera que hem d'estudiar la convergència de $\sum \log(1 + s_j)$. Com $\log(1 + s_j) = s_j + {}_{|}$ per j prou gran (observem que s_j decreix exponencialment en j), $\sum \log(1 + s_j) = K + \sum_j s_j$ que és convergent. D'aquesta manera, B_m queda també acotat.

D'aquesta manera queden provades les dos primeres afirmacions del teorema 8.

Provem ara les dos darreres afirmacions. Per a $-c_3^{-1} \leq t \leq c_3^{-1}$ tenim

$$t_\gamma + \varepsilon \tilde{p}_1(t) - \varepsilon^{-1} T(\varepsilon^2 \tilde{p}_2(t)) = t - i\hat{\delta} - ic_5 + \phi(t), \quad \text{on } |\phi(t)| \leq \text{const} \varepsilon \log \varepsilon^{-1},$$

de manera que

$$\begin{aligned} &\left| \tilde{H}^+(t - i\hat{\delta} - ic_5, 0, \hat{\delta}) - \tilde{H}^+(t_\gamma + \varepsilon \tilde{p}_1(t) - \varepsilon^{-1} T(\varepsilon^2 \tilde{p}_2(t), \varepsilon^4 \tilde{p}_2(t), \hat{\delta})) \right| \\ &\qquad \leq \text{const} \left(m_1(t) \varepsilon \log \varepsilon^{-1} + m_2(t) \varepsilon^4 \right), \end{aligned}$$

on

$$m_1 = \max \tilde{H}_{\tilde{\tau}}(\tilde{\tau}, \tilde{h}, \hat{\delta}), \qquad m_2 = \max \tilde{H}_{\tilde{h}}(\tilde{\tau}, \tilde{h}, \hat{\delta}),$$

i els màxims estan considerats en els segments

$$\tilde{\tau} \in [t - i\hat{\delta} - ic_5, t - i\hat{\delta} - ic_5 + \phi(t)] \subset \mathbb{C}, \quad \tilde{h} \in [0, \varepsilon^4 \tilde{p}_2(t)] \subset \mathbb{C}.$$

Ara si prenem $\tilde{c} \geq c_5$, podem fitar usant les majorants del lema 4:

$$m_1 \leq \text{const}(1 + |t|)^{-3}, \quad m_2 \leq \text{const}\hat{\delta}^2(1 + |t|)^{-2} \leq \text{const}\varepsilon^{-2}(1 + |t|)^{-2}.$$

Amb aquestes fites, acotem la integral de (4.3.2) per

$$\int_{-c_3^{-1}/\varepsilon}^{c_3^{-1}/\varepsilon} \frac{\text{const}e^{-\hat{\delta}\varepsilon \log \varepsilon^{-1}}}{(1 + |t|)^2} \leq \text{const}e^{\hat{\delta}}\varepsilon \log \varepsilon^{-1}.$$

Ara, la integral (4.3.4) existeix pels primers apartats del teorema, que impliquen l'existència de $\tilde{H}^+$, i la fiten. No dependrà de Θ, ja que equival a un simple canvi en la corba sobre la que integrem. Finalment, si δ és prou gran la majorant (4.3.8) implica que per qualsevol $M > 0$ es verifica

$$\begin{aligned} &\left|\tilde{H}^+(t - i\Theta - i\delta - iM, 0, \delta + M) - \tilde{H}^+(t - i\Theta - i\delta, 0, \delta)\right| \\ &\qquad \leq \text{const}e^{-\delta}\delta^{-1}(1 + |t|)^{-2}. \end{aligned} \tag{4.3.15}$$

Així el límit J existeix i a més $\tilde{I}(\delta) = J + \delta^-$. Amb això acaba la prova del teorema 8.

Corol·lari 2. *La funció J es pot expressar com funció d'un sol argument complex, $J(B_-^+, B_-^-) = J(B_*)$.*

Demostració. Definim

$$G_0 = \tilde{H}^0, \qquad G_\pm = \tilde{H}^\pm/(2B_-^\pm), \qquad B_* = 4B_-^+ B_-^-.$$

Ara el sistema (2.3.24)-(2.3.25) es pot escriure com

$$G_\delta^0 = -2iB_*\{G^+, G^+\}^\sim, \qquad G_\delta^\pm + G^\pm = \pm i\{G^0, G^\pm\},$$

amb condicions inicials

$$G^0(\tilde{\tau}, \tilde{h}, 0) = \tilde{h}, \qquad G^\pm(\tilde{\tau}, \tilde{h}, 0) = -2\tilde{h}\left(1 - \cos(\tilde{\tau}\sqrt{2\tilde{h}})\right)^{-1}. \tag{4.3.16}$$

Aquest sistema només depèn d'un paràmetre, B_*. A més, per $B_* = 0$ $G^0 \equiv \tilde{h}$, $G^+(\tilde{\tau}, \tilde{h}, \delta) = e^{-\delta}G^+(\tilde{\tau} + i\delta, \tilde{h}, 0)$. En aquest cas obtindriem

$$\tilde{I}(\delta) = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t-i\Theta)} 4B_-^+(t - i\Theta)^{-2}\, dt = 8\pi B_-^+. \tag{4.3.17}$$

I així $J(B_-^+, B_-^-) = 2B_-^+ f(B_*)J(B_*)$ amb $f(0) = 4\pi$ i f és entera en B_* ja que és una sèrie uniformement convergent de funcions que depenen analíticament de B_*, com a conseqüència del teorema 8. □

4.4 Prova del lema 4

Per resoldre el sistema (4.3.6) considerem el següent sistema infinit numerable d'equacions en derivades parcials:

$$q_\delta^{(0)0} = 0, \qquad q_\delta^{(n+1)0} = -2ie^{-2\delta} \sum_{l+m=n} \{q^{(l)+}, q^{(m)-}\},$$
$$q_\delta^{(0)\pm} = \pm i q_\tau^{(0)}, \qquad q_\delta^{(n+1)\pm} = \pm i q_\tau^{(n+1)\pm} \pm i \sum_{l+m=n} \{q^{(l)0}, q^{(m)\pm}\}, \tag{4.4.1}$$

amb les condicions inicials per a $\delta = \Delta$:

$$q^{(0)0}(\tau, h, \Delta) = q^0(\tau, h, \Delta), \qquad q^{(n)0}(\tau, h, \Delta) = 0 \quad (n > 0),$$
$$q^{(0)\pm}(\tau, h, \Delta) = q^\pm(\tau, h, \Delta), \qquad q^{(n)\pm}(\tau, h, \Delta) = 0 \quad (n > 0).$$

Si podem trobar una solució d'aquest sistema, les funcions definides per

$$q^0 = q^{(0)0} + q^{(1)0} + \dots, \qquad q^\pm = q^{(0)\pm} + q^{(1)\pm} + \dots, \tag{4.4.2}$$

seran solució de (4.3.6) si aquesta sèrie és convergent, observem que formalment ja ho són. El que demostrarem és que aquesta sèrie convergeix i la funció que en resulta verifica les acotacions de l'enunciat.

Es verifiquen les següents relacions:

$$q^{(0)0}(\tau - s - i\Delta', h, \Delta') = q^0(\tau - s - i\Delta), \tag{4.4.3}$$
$$q^{(0)\pm}(\tau - s - i\Delta', h, \Delta') = q^\pm(\tau - s - i\Delta' \pm i\mu, h, \Delta), \tag{4.4.4}$$

$$\begin{aligned} &q^{(n+1)0}(\tau - s - i\Delta', h, \Delta') \\ &\qquad = -2i \sum_{l+m=n} \int_0^\mu e^{-2\Delta+\lambda} \{q^{(l)+}, q^{(m)-}\}(\tau - s - i\Delta', h, \Delta + \lambda)\, d\lambda, \end{aligned} \tag{4.4.5}$$

$$\begin{aligned} &q^{(n+1)+}(\tau - s - i\Delta', h, \Delta') \\ &\qquad = i \sum_{l+m=n} \int_0^\mu \{q^{(l)0}, q^{(m)\pm}\}(\tau - s - i\Delta - i\lambda, h, \Delta + \lambda)\, d\lambda, \end{aligned} \tag{4.4.6}$$

$$\begin{aligned} &q^{(n+1)-}(\tau - s - i\Delta', h, \Delta') \\ &\qquad = \pm i \sum_{l+m=n} \int_0^\mu \{q^{(l)0}, q^{(m)\pm}\}(\tau - s - i\Delta + i\lambda - i\mu, h, \Delta + \lambda)\, d\lambda. \end{aligned} \tag{4.4.7}$$

La relació (4.4.3) és trivialment certa, donades les equacions (4.4.1). Per la prova de (4.4.4), observem que tenim una expressió per totes les derivades de la funció:

$$\frac{\partial^n q^{(0)0}}{\partial^n \delta} = (\pm i\varepsilon)^n \frac{\partial^n q^{(0)0}}{\partial^n \tau}.$$

Per tant usant la fórmula de Taylor (observem que hem obviat el Δ en τ per simplificar l'expressió simplement),

$$\begin{aligned}
q^{(0)0}(\tau, h, \Delta+\mu) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^n q^{(0)0}}{\partial^n \delta}(\tau, h, \Delta)\cdot \mu^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (\pm i\varepsilon)^n \frac{\partial^n q^{(0)0}}{\partial^n \tau}(\tau, h, \Delta)\cdot \mu^n \\
&= q^{(0)0}(\tau \pm i\mu, h, \Delta+\mu).
\end{aligned}$$

L'expressió (4.4.6) es pot deduir de la identitat

$$\begin{aligned}
q^{(n+1)+}(\tau - s - & i\Delta - i\mu, h, \Delta+\mu) - q^{(n+1)+}(\tau - s - i\Delta, h, \Delta) \\
&= q^{(n+1)+}(\tau - s - i\Delta - i\mu, h, \Delta+\mu) \\
&= \int_0^{\mu} (-i q_\tau^{(n+1)+}(\tau - s - i\Delta - i\lambda, h, \Delta+\lambda) \\
&+ q_\delta^{(n+1)+}(\tau - s - i\Delta - i\lambda, h, \Delta+\lambda)). \qquad (4.4.8)
\end{aligned}$$

Per les expressions (4.4.5) i (4.4.7) procedim de la mateixa manera.

El lema següent ens servirà per majorar els sumands de (4.4.2).

Proposició 3. *Siguin les constants C, b, γ i A satisfent l'enunciat del lema 4. Seguint la notació del lema (4) es verifiquen per a tot $k > 0$:*

$$q^{(k)0}(\tau - s - i\Delta', h, \Delta') \ll \frac{(16b\gamma\mu\sigma)^k \|s\|^{2k+2} e^{-\Delta/2}}{A(2k+1)^3 \|s+2i\Delta'\|^{5k+6} Y^{2k+1}(s, 2\Delta')}$$

$$q^{(k)\pm}(\tau - s - i\Delta', h, \Delta') \ll \frac{C(16b\gamma\mu\sigma)^k \|s\|^{2k-2}}{A(2k+1)^3 \|s+2i\Delta'\|^{5k+6} Y^{2k+1}(s, 2\Delta')}$$

Provarem aquesta proposició a l'acabar la prova del lema. La usem de moment per acabar-ne la prova.

Tenim

$$\begin{aligned}
q^{(0)0}(\tau - s - i\Delta', h, \Delta') &= q^0(\tau - (s+i\mu) - i\Delta, h, \Delta+\mu) \\
&= q^{(0)0}(\tau - s - i\Delta', h, \Delta') \\
&= q^0(\tau - (s+i\mu) - i\Delta, h, \Delta) \ll \star
\end{aligned}$$

on hem aplicat la primera de les relacions integrals (4.4.3). Ara usant les condicions de l'enunciat amb $s = s + i\mu$ podem majorar

$$\begin{aligned}
\star &\ll \frac{B\|s+i\mu\|}{\|s+i\Delta'\|^4 \|s+2i\Delta+i\mu\|^2 Y(s+i\mu, 2\Delta)} \\
&= \frac{B\|s+i\mu\|}{\|s+i\Delta'\|^4 \|s+2i\Delta+i\mu\|^2 (v\|s+i\mu\| - \tau)(v\|s+i\mu+2\Delta\|^{-2} - h)} = \star.
\end{aligned}$$

Ara com $\|s\| \leq \|s+i\mu\|$ i $\|s+i\mu+2\Delta\|^2 \leq \|s+2i\Delta'\|^2$ apliquem la propietat 5.1.12 per transformar l'expressió anterior en

$$\begin{aligned}
\star &= \frac{B\|s+i\mu\|\,\|s\|\,\|s+i\mu+2\Delta\|^{-2}|s+2i\Delta'\|^2}{\|s+i\Delta'\|^4\|s\|\|s+2i\Delta'\|^2(v\|s+i\mu\|-\tau)(v\|s+i\mu+2\Delta\|^{-2}-h)} \\
&\ll \frac{B\|s\|}{\|s+i\Delta'\|^4\|s+2i\Delta'\|^2(v\|s\|-\tau)(v\|s++2\Delta'\|^{-2}-h)}. \\
&= \frac{B\|s\|}{\|s+i\Delta'\|^4\|s+2i\Delta'\|^2 Y(s,2\Delta')}
\end{aligned}$$

Posem $Y = Y(s, 2\Delta')$ per simplificar la notació allà on calgui. Fent servir aquesta majorant i la proposició 3, majorem l'expressió en sèrie de la qual intentem demostrar la convergència:

$$\begin{aligned}
q^0(\tau - s - i\Delta', h, \Delta') \ll & \\
& \frac{B\|s\|}{\|s+i\Delta'\|^4\|s+2i\Delta'\|^2 Y} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(16b\gamma\mu\sigma)^k\|s\|^{2k+2}e^{-\Delta/2}}{A\|s+2i\Delta'\|^{5k+6}Y^{2k+1}} \\
\ll & \frac{\|s\|}{\|s+i\Delta'\|^4\|s+2i\Delta'\|^2} \\
& \times \left(\frac{B}{Y} + \frac{16b\gamma\mu\sigma\|s\|^3 e^{-\Delta/2}}{A\|s+2i\Delta'\|^5 Y^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{\rho}^{4k}\|s\|^{2k}}{\|s+2i\Delta'\|^{4k}Y^{2k}} \right).
\end{aligned}$$

Observem que el segon pas majorem eliminant termes del dividend a la sèrie, passant l'exponent $5k-1$ (després de treure tots els termes factor comú) a $4k$, tenint en compte que $\|s+2i\Delta'\| \geq 1$ de manera que el coeficient en qüestió creix. Ara, aquesta última suma la podem majorar per la que té tots els termes i no només els parells, i aquesta darrera veurem a continuació que la podrem sumar

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{\rho}^{2k}\|s\|^k}{\|s+2i\Delta'\|^{2k}Y^k} = \left(1 - \frac{\tilde{\rho}^2\|s\|}{\|s+2i\Delta'\|^2 Y}\right)^{-1}.$$

Si considerem $\tau = h = 0$, el terme general de la sèrie queda $\frac{\tilde{\rho}^{2k}}{v^{2k}}$. Com $v > r$ i $\tilde{\rho} \leq r$ el terme general és menor estricte que 1 i podem sumar. A més com la desigualtat per v és estricta, serà cert en un entorn de $(\tau, h) = (0, 0)$. Així, l'expressió majorant queda

$$\begin{aligned}
q^0(\tau - s - i\Delta', h, \Delta') \ll & \frac{\|s\|}{\|s+i\Delta'\|^4\|s+2i\Delta'\|^2} \\
& \times \left(\frac{B}{Y} + \frac{16b\gamma\mu\sigma\|s\|^3 e^{-\Delta/2}}{A\|s+2i\Delta'\|^5 Y^2 (Y - \tilde{\rho}^2\|s\|\|s+2i\Delta'\|^{-2})} \right).
\end{aligned}$$

Es verifica la següent majorant

$$\frac{1}{(v-\tilde{\rho})\|s\|-\tau} \ll \frac{1}{(v-r)\|s\|-\tau},$$

fent servir la propietat (5.1.12) tenint present $r \geq \rho$ i per tant $1 \leq \frac{v-r}{v-\rho}$. Amb aquesta majorant ara podem provar

$$\begin{aligned} \frac{\|s\|^3}{\|s+2i\Delta'\|^5 Y^2 (Y - \tilde{\rho}^2 \|s\| \|s+2i\Delta'\|^{-2})} &\ll \frac{\|s\|^3}{\|s+2i\Delta'\|^5 Y^2 Y'} \\ &\ll \frac{1}{r^4 Y'}, \end{aligned}$$

aplicant (5.1.9) amb $b_1 = \tilde{\rho}\|s\|$, $b_2 = \tilde{\rho}\|s+2i\Delta'\|^{-2}$, obtenim la primera majorant, i l'aplicació directa de (5.1.10) ens dóna la segona.

D'aquesta manera,

$$\begin{aligned} q^0(\tau - s - i\Delta', h, \Delta') &\ll \frac{\|s\|}{\|s+i\Delta'\|^4 \|s+2i\Delta'\| Y'} \left(B + \frac{16 b\gamma\mu\sigma e^{-\Delta/2}}{A r^4} \right) \\ &= \frac{\|s\|}{\|s+i\Delta'\|^4 \|s+2i\Delta'\| Y'} B', \end{aligned}$$

com volíem veure.

Majorem ara les funcions $q^{\pm}$. Procedint com en el cas per $q^{(0)0}$, apliquem (5.1.12) i la segona de les relacions integrals (4.4.4):

$$\begin{aligned} q^{(0)\pm}(\tau - s - i\Delta', h, \Delta') &\ll \frac{C}{\|s\| \, \|s + 2i\Delta + i\mu \pm i\mu\|^2 Y(s + i\mu \pm i\mu, 2\Delta)} \\ &\ll \frac{C}{\|s\| \, \|s+2i\Delta'\|^2 Y}, \end{aligned}$$

observem que $\|s\| \geq 1$ i per tant no cal tenir en compte el terme $\|s\|^{-2}$, només $\|s\|$, de manera que aplicant (3) i seguint el mateix procediment emprat per q^0 arribem a:

$$\begin{aligned} q^{\pm}(\tau - s - i\Delta', h, \Delta') &\ll \frac{C}{\|s\|\|s+2i\Delta'\|^2 Y} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{\rho}^{4k}\|s\|^{2k}}{\|s+2i\Delta\|^{4k} Y^{2k}} \\ &\ll \frac{C}{\|s\|\|s+2i\Delta'\|^2 Y'}. \end{aligned}$$

Per acabar la prova del lema, necessitem estimar dues distàncies

$$d^{\pm} = q^{\pm}(\tau - s - i\Delta', h, \Delta') - q^{\pm}(\tau - s - i\Delta' \pm i\Delta', h, 0)$$

Per fer-ho, observem que per les condicions del lema,

$$\begin{aligned} q^{(0)\pm}(\tau - s - i\Delta', h, \Delta') &- q^{\pm}(\tau - s - i\Delta' \pm i\Delta', h, 0) \\ &= q^{\pm}(\tau - s - i\Delta' \pm i\mu, h, \Delta) - q^{\pm}(\tau - s - i\Delta' \pm i\Delta', h, 0) \\ &\ll \frac{C}{\|s\|^2 \|s+2i\Delta'\|^2 Y} \end{aligned}$$

prenent $s = s + i\mu \mp i\mu$ i aplicant (5.1.12). D'aquesta manera obtenim

$$d^{\pm} \ll \frac{C}{\|s\|^2\|s+2i\Delta'\|^2 Y}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tilde{\rho}^{4k}\|s\|^{2k}}{\|s+2i\Delta\|^{4k}Y^{2k}}$$
$$\ll \frac{C}{\|s\|^2\|s+2i\Delta'\|^2 Y'}.$$

Per acabar hem d'estimar la següent diferència

$$d_1^+ = q^+(\tau - s - i\Delta - iM, h, \Delta + M) - q^+(\tau - s - i\Delta, h, \Delta).$$

Per fer-ho, considerem les següents desigualtats

$$\frac{16b\gamma M\sigma}{\|s+2i(\Delta+M)\|} \le 16b\gamma\sigma \le \frac{8b\gamma}{\Delta} \le \frac{Kw^4}{16\Delta},$$

i recordem que $16\sigma \le \frac{1}{\|s+2i\Delta\|}$, $\Delta \ge K = \frac{128b\gamma}{w^4}$, on w és una constant prou gran per verificar la desigualtat. Ara, si definim $Y = Y(s, 2(\Delta + M))$ i seguim els mateixos passos que hem fet servir per majorar q^0:

$$d_1^{\pm} \ll \sum_{k=1}^{\infty}\frac{C(16b\gamma\sigma M)^k\|s\|^{2k-2}}{\|s+2i(\Delta+M)\|^{5k+2}Y^{2k+1}}$$
$$\ll \sum_{k=1}^{\infty}\frac{C(Kw^4)^k\|s\|^{2k-2}}{16^k\Delta^k\|s+2i(\Delta+M)\|^{4k+2}Y^{2k+1}}$$
$$\ll \frac{CKw^4}{16\Delta\|s\|^2\|s+2i(\Delta+M)\|^6Y^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{w^{2k}\|s\|^k}{2^{2k}\|s+2i(\Delta+M)\|^{2k}Y^k}$$
$$\ll \frac{CKw^4}{16\Delta\|s\|^2\|s+2i(\Delta+M)\|^6Y^2Y''}$$
$$\ll \frac{CK}{\Delta\|s\|^2\|s+2i(\Delta+M)\|^2Y''}.$$

I així queda provat el lema.

4.4.1 Prova del lema 3

En aquesta secció fins que no es defineixi altrament,

$$Y(\alpha,\beta) = (v\|\alpha\| - \tilde{\tau})(v\|\alpha + i\beta\|^{-2} - \tilde{h}).$$

Per la relació integral (4.4.3),

$$q^{(0)0}(\tau - s - i\Delta, h, \Delta + \lambda) = q^0(\tau - s - i\Delta, h, \Delta)$$

i com que $\|s+i\Delta\| \geq \frac{1}{2}\|s+2i\Delta\|$, per les condicions inicials del lema 4

$$\begin{aligned} q^0(\tau - s - i\Delta, h, \Delta) &\ll \frac{B\|s\|}{\|s+i\Delta\|^4\|s+2i\Delta\|^2 Y(s,2\Delta)} \\ &= \frac{16b\|s\|}{\|s+2i\Delta\|^6 Y(s,2\Delta)}. \end{aligned} \tag{4.4.9}$$

Anàlogament,

$$\begin{aligned} q^{(0)\pm}(\tau - s - i\Delta, h, \Delta+\lambda) &\equiv q^{\pm}(\tau - s - i\Delta \pm i\lambda, h, \Delta) \\ &\ll \frac{C}{\|s \mp i\lambda\|\,\|s+2i\Delta \mp i\lambda\|^2 Y(s \mp i\lambda, 2\Delta)} \end{aligned} \tag{4.4.10}$$

on com abans, hem aplicat l'enunciat del lema 4 i la relació integral (4.4.4).

Observem que en l'enunciat calia $\operatorname{Im} s \geq u > 0$ i això ens dóna una cota per a la λ que podem fer servir aquí ($\operatorname{Im} s \pm \lambda \geq u > 0$).

Partint de les dos majorants anteriors provem el cas $k=1$ del lema. De l'equació diferencial que satisfà $q^{(1)0}$ obtenim

$$\begin{aligned} & q^{(1)0}(\tau - s - i\Delta', h, \Delta') \\ &= -2i\int_0^{\mu} e^{-2\Delta-2\lambda}\{q^{(0)+}, q^{(0)-}\}(\tau - s - i\Delta', h, \Delta+\lambda)\, d\lambda. \end{aligned}$$

Descomposem aquesta integral en $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$:

$$I_1 = -2i\int_0^{\mu} e^{-2\Delta-2\lambda}\{\check{q}^+, \check{q}^-\}\, d\lambda, \qquad I_2 = -2i\int_0^{\mu} e^{-2\Delta-2\lambda}\{Q^+, \check{q}^-\}\, d\lambda,$$

$$I_3 = -2i\int_0^{\mu} e^{-2\Delta-2\lambda}\{\check{q}^+, Q^-\}\, d\lambda, \qquad I_4 = -2i\int_0^{\mu} e^{-2\Delta-2\lambda}\{Q^+, Q^-\}\, d\lambda,$$

on

$$\begin{aligned} \check{q}^{\pm} &= q^{\pm}(\tau - s - i\Delta' \pm i(\Delta+\lambda), h, \Delta'), \\ Q^{\pm} &= q^{(0)\pm}(\tau - s - i\Delta', h, \Delta+\lambda) - \check{q}^{\pm}. \end{aligned} \tag{4.4.11}$$

Pel lema 5 sabem que

$$q^{\pm}(\tau - s, h, 0) \ll \tilde{N}\|s\|^{-3}(2v_0\|s\| - \tau)^{-1}(v_0\|s\|^2 - h)^{-1}$$

i a més $\{\tilde{q}^+(\tilde{\tau}, \tilde{h}, 0), \tilde{q}^-(\tilde{\tau}, \tilde{h}, 0)\} = 0$ ja que $0 = \{q^+, q^-\} = \varepsilon\{\tilde{q}^+, \tilde{q}^-\}$. (recordem $\tilde{H}(\tilde{\tau}, \tilde{h}) = H(\tau, h)$, $\tilde{q}(\tilde{\tau}, \tilde{h}) = q(\tau, h)$ i $\tau = \varepsilon\tilde{\tau}, h = \varepsilon^{-2}\tilde{h}$). Sigui $Y_1 = Y(s + i\mu - i\lambda, 2\Delta + 2\lambda)$. Apliquem la propietat (5.1.15) a $\tilde{q}^{\pm}$, obtenint:

$$\begin{aligned} I_1 &\ll \int_0^{\mu} \frac{2e^{-2\Delta-2\lambda}4(\Delta+\lambda)v_0^{-1}}{\|s+i\Delta'+i\lambda+i\Delta\|^3\|s+i\Delta'-i\Delta-i\lambda\|^4 Y_1^3}\, d\lambda \\ &\ll \int_0^{\mu} \frac{8e^{-2\Delta-2\lambda}(\Delta+\lambda)v_0^{-1}\tilde{N}^2}{\|s+i\Delta'\|^3\|s\|^4 Y^3}\, d\lambda \\ &\ll \frac{4b\gamma\mu\sigma\|s\|^4 e^{-\Delta/2}}{27A\|s+2i\Delta'\|^{11} Y^3} \end{aligned} \tag{4.4.12}$$

on en aquestes desigualtats hem fet servir que $\lambda, \mu, \mu - \lambda > 0$, $\sigma \geq e^{-\Delta/2}$, $C \geq \tilde{N}$, $(\Delta + \lambda)e^{-\Delta - 2\lambda} \leq (\Delta + 1)e^{-\Delta}$ i la definició d'A. Així:

$$\frac{8 \cdot 27(\Delta + \lambda \tilde{N}^2 \|s + 2i\Delta'\|^8 e^{-3\Delta/2 - 2\lambda})}{v\gamma\sigma\|s\|^8} \leq 4C^2 A \leq \frac{4b}{A}. \qquad (4.4.13)$$

Les següents majorants seran usades per majorar la integral I_2 :

$$\begin{aligned} Q^{\pm} &= q^{\pm}(\tau - s - i\Delta' \pm i\lambda, h, \Delta) - \check{q}^{\pm}(\tau - s - i\Delta' \pm (i\Delta + i\lambda), h, 0) \\ &\ll \frac{C}{\|s + i\mu \pm i\lambda\|^2 \|s + i\mu \pm i\lambda 2i\Delta\|^2 Y(s + i\mu \pm i\lambda, 2\Delta)} \\ &\ll \frac{C}{\|s\|^2 \|s + 2i\Delta\|^2 Y(s, 2\Delta')}. \end{aligned}$$

Observem que $0 \leq \lambda < \mu$ i que aplicant la propietat (5.1.12) tenim:

$$\frac{v\|s + i\mu \pm i\lambda\|}{v\|s + i\mu \pm i\lambda\| - \tilde{\tau}} \ll \frac{v\|s\|}{v\|s\| - \tilde{\tau}},$$

$$\frac{v/\|s + i\mu \pm i\lambda + i2\Delta\|^2}{v/\|s + i\mu \pm i\lambda + i2\Delta\|^2 - \tilde{h}} \ll \frac{v\|s + 2i\Delta\|}{v\|s + 2i\Delta\| - \tilde{h}}.$$

Amb un argument similar,

$$\begin{aligned} \check{q}^{\pm} &= q^{\pm}(\tau - s - i\Delta' \pm (i\Delta + i\lambda), h, 0) \\ &\ll \frac{\tilde{N}}{\|s + i\mu \pm i\lambda\|^3 Y(s + i\mu \pm i\lambda, 0)} \ll \frac{C}{\|s\| \|s + 2i\Delta'\|^2 Y(s, 2\Delta')}. \end{aligned}$$

Fent servir aquestes desigualtats, obtenim

$$I_2 \ll 2\int_0^{\mu} \frac{e^{-2\Delta - 2\lambda} 2C^2}{\|s\|^3 \|s + 2i\Delta'\|^4 Y(s, 2\Delta)^3}\, d\lambda \ll \frac{b\gamma\mu\sigma\|s\|^4 e^{-\Delta/2}}{27A\|s + 2i\Delta'\|^{11} Y(s, 2\Delta')^3}$$

on, anàlogament al cas anterior hem fet servir que

$$\frac{4 \cdot 27C^2 \|s + 2i\Delta'\|^7 e^{-3\Delta/2 - 2\lambda}}{\gamma\sigma\|s\|^7} \leq 4C^2 A \leq \frac{16b}{4A}.$$

De la mateixa manera podem fitar I_3 i I_4, obtenint així la majorant per a $q^{(1)0}$. Per provar la majorant per a $q^{(1)\pm}$ usem (4.4.9) i (4.4.10) i les propietats (5.1.12), (5.1.8), de manera que:

$$\begin{aligned} q(1){+}(\tau - s - i\Delta', h, \Delta') &= i\int_0^{\mu} \{q^{(0)0}, q^{(0)+}\}(\tau - s - i\Delta' + i(\mu - \lambda), h, \Delta + \lambda)\, d\lambda \\ &\ll \int_0^{\mu} \frac{16bC\|s + i\lambda\|}{\|s + 2i\Delta + i\lambda\|^6 \|s\| \|s + 2i\Delta\|^2 Y(s + i\lambda, 2\Delta) Y(s, 2\Delta) Y(s, 2\Delta + i\lambda)}\, d\lambda \\ &\ll \int_0^{\mu} \frac{16bC}{\|s + 2i\Delta + i\lambda\|^2 \|s + 2i\Delta'\|^6 Y^3}\, d\lambda \\ &\ll \frac{16bC\mu}{\|s + 2i\Delta\| \|s + 2i\Delta + i\mu\| \|s + 2i\Delta'\|^6 Y^3} \\ &\ll \frac{16bC\gamma\mu\sigma}{27\|s + 2i\Delta'\|^7 Y^3}, \end{aligned}$$

on l'exponent 6 de la primera majorant prové dels 4 que es corresponen al terme $Y(s, 2\Delta + i\lambda)$ en l'aplicació de les propietats. D'altra banda el terme $\|s+i\lambda\|$ del numerador va associat a $Y(s+i\lambda, 2\Delta)$ en aplicar les propietats. Fent servir els mateixos arguments podem provar la majorant corresponent a $q^{(1)-}$ i per tant tenim provat el cas $k=1$. Procedim per inducció sobre k. Suposem cert l'enunciat per $k \leq n$, llavors:

$$q^{(n+1)0}(\tau - s - i\Delta', h, \Delta') \ll \int_0^{\mu} \sum_{l+m=n} \frac{2e^{-2\Delta-2\lambda} 2C^2 (16b\gamma\lambda\sigma)^n \|s + i\mu - i\lambda\|^{2n-3}}{(2l+1)^2(2m+1)^2 \|s + 2i\Delta + i\mu + i\lambda\|^{5n+4} Y_1^{2n+3}} \, d\lambda = \star.$$

Observem que en el cas que $l, m \neq 0$, l'exponent de $\|s + i\mu - i\lambda\|$ és $2n-4$ i no $2n-3$, però podem acotar superiorment per aquesta darrera potència, ja que $\|s + i\mu - i\lambda\| \geq 1$. Apliquem ara la propietat (5.1.12),

$$\star \ll \int_0^{\mu} \frac{e^{-2\Delta-2\lambda} 4C^2 (16b\gamma\lambda\sigma)^n \|s\|^{2n-3}}{(2l+1)^2(2m+1)^2 \|s + 2i\Delta + i\mu + i\lambda\|^{n-2} \|s + 2i\Delta'\|^{4n+6} Y^{2n+3}} \, d\lambda = \star \tag{4.4.14}$$

i usant les següents condicions, que demanem a l'enunciat del lema 4:

$$\begin{aligned} e^{-\Delta-2\lambda} &\leq \frac{A\|s\|^7}{\|s + 2i\Delta + i\mu + i\lambda\|^4 \|s + 2i\Delta'\|^3}, \\ e^{-\Delta/2} &\leq \sigma \end{aligned} \tag{4.4.15}$$

i podem majorar:

$$\star \ll \frac{4C^2 A (16b\gamma)^n \sigma^{n+1} \|s\|^{2n+4} e^{-\Delta/2}}{\|s + 2i\Delta'\|^{4n+9} Y(s, 2\Delta)^{2n+3}} \int_0^{\mu} \frac{\lambda^n}{\|s + 2i\Delta + i\mu + i\lambda\|^{n+2}} \, d\lambda \cdot \sum_{l+m=n} \frac{1}{(2l+1)^2(2m+1)^2} = \star$$

Ara si apliquem el lema 17, la definició de γ i la desigualtat $8C^2 A \leq 16b/A$:

$$\begin{aligned} \star &\ll \frac{(16b\mu\sigma)^{n+1} \gamma^n \|s\|^{2n+4} e^{-\Delta/2}}{2A(n+1) \|s + 2i\Delta + i\mu\| \|s + 2i\Delta'\|^{5n+10} Y(s, 2\Delta)^{2n+3}} \\ &\ll \frac{(16b\gamma\mu\sigma)^{n+1} \|s\|^{2n+4} e^{-\Delta/2}}{A(2n+3)^3 \|s + 2i\Delta'\|^{5n+11}}. \end{aligned} \tag{4.4.16}$$

Finalment, majorem $q^{(n+1)+}$:

$$
\begin{aligned}
&q^{(n+1)+}(\tau - s - i\Delta', h, \Delta') \\
&\quad = i\int_0^{\mu} \Big(\{q^{(0)0}, q^{(m)+}\} \\
&\quad + \{q^{(n)0}, q^{(0)+}\} + \sum_{\substack{l+m=n,\\ l>0,m>0}} \{q^{(l)0}, q^{(m)+}\} \Big) (\tau - s - i\Delta - i\lambda, h, \Delta + \lambda)\, d\lambda \\
&\quad \ll \int_0^{\mu} \Bigg(\frac{2 \cdot 16bC(16b\gamma\lambda\sigma)^n \|s\|^{2n-1}}{(2n+1)^2 \|s + 2i\Delta + 2i\lambda\|^{5n+8} Y^{2n+3}(s, 2\Delta + 2\lambda)} \\
&\quad + \frac{2C(16b)^{n+1}(\gamma\lambda\sigma)^n \|s\|^{2n+1} e^{-\Delta/2}}{(2n+1)^2 \|s + 2i\Delta + 2i\lambda\|^{5n+8} Y^{2n+3}(s, 2\Delta + 2\lambda)} \\
&\quad + \sum_{\substack{l+m=n,\\ l>0,m>0}} \frac{2C(16b)^{n+1}(\gamma\lambda\sigma)^n \|s\|^{2n+1} e^{-\Delta/2}}{(2l+1)^2(2m+1)^2 \|s + 2i\Delta + 2i\lambda\|^{n+2} \|s + 2i\Delta'\|^{4n+6} Y^{2n+3}(s, 2\Delta + 2\lambda)} \Bigg) d\lambda \\
&\quad \ll \int_0^{\mu} \sum_{l+m=n} \frac{2C(16b)^{n+1}(\gamma\lambda\sigma)^n \|s\|^{2n+1} \max\{1, e^{-\Delta/2}\}\, d\lambda}{(2l+1)^2(2m+1)^2 \|s + 2i\Delta + 2i\lambda\|^{n+2} \|s + 2i\Delta'\|^{4n+6} Y^{2n+3}(s, 2\Delta + 2\lambda)} \\
&\quad \ll \frac{C(16b\gamma\mu\sigma)^{n+1} \|s\|^{2n}}{(2n+3)^3 \|s + 2i\Delta'\|^{5n+7} Y^{2n+3}}.
\end{aligned}
$$

Amb un argument similar podem majorar $q^{(n+1)-}$. Així queda provat el lema.

Segueixen dos corol·laris a la demostració del lema 4

Corol·lari 3. . *Suposem que es verifiquen totes les condicions del lema 4 i $s \in \mathbb{C}$ verifica les desigualtats addicionals*

$$\operatorname{Im} s \le U_1, \qquad |\operatorname{Re} s\,| \le U_2.$$

Aleshores es verifiquen tots els resultats de 4 per a $s \in \mathbb{C}$ tal que $u \le \operatorname{Im} s \le U_1 - 2\mu$ i $4|\operatorname{Re} s\,| \le U_2$.

Corol·lari 4. *Si considerem el sistema*

$$\tilde{q}^0_{\delta} = -6ie^{-2\delta}\{\tilde{q}^+, \tilde{q}^-\}, \qquad \tilde{q}^{\pm}_{\delta} = \pm i\tilde{q}^{\pm}_{\tilde{\tau}} \pm 3i\{\tilde{q}^0, \tilde{q}^{\pm}\} \tag{4.4.17}$$

en comptes del sistema (4.3.6) però amb les mateixes condicions inicials, es verifiquen tots els resultats del lema 4 reemplaçant γ per 3γ.

Les proves d'aquests dos corol·laris són immediates partint de la demostració del lema 4.

4.5 Solució al domini D_3

Teorema (6). *Per qualsevol constant $c_1 > 0$ existeix solució del sistema (2.3.6), (2.3.7) per a $0 \le \delta \le (\pi/2 - c_1)/\varepsilon$ en el domini D_3^δ. A més, si $\delta \sim \varepsilon^{-1}$, a D_3^δ es verifica:*

$$|H_*^0 - h| \le c_7\varepsilon^2, \quad |(H_*^0)_h| \le \frac{c_7\varepsilon}{1 + \varepsilon^{-1}|\mathrm{Re}\,\tau\,|}.$$

Demostració. Considerem el sistema (2.3.6), (2.3.7) en les variables $\tilde{\tau}$, $\tilde{h}$. Té la forma

$$\check{H}_\delta^0 = -2i\{\check{H}^+, \check{H}^-\}^\sim, \quad \check{H}_\delta^\pm + \check{H}^\pm = \pm i\{\check{H}^0, \check{H}^\pm\}^\sim \tag{4.5.1}$$

on denotem

$$\check{H}^0(\tilde{\tau}, \tilde{h}, \delta) = \varepsilon^2 H_*^0(\tau_*, h, \delta), \quad \check{H}^\pm(\tilde{\tau}, \tilde{h}, \delta) = \varepsilon^2 H_*^\pm(\tau_*, h, \delta). \tag{4.5.2}$$

Aquest sistema coincidex amb el sistema (2.3.24), i les condicions inicials verifiquen la majorant (5.4.1). Observem que aquest sistema (2.3.6), (2.3.7) en aquestes variables és completament anàleg al sistema (2.3.24),(2.3.25) per a $0 \le \delta \le (\pi/2 - c_1)/\varepsilon$. Per tant podem provar el lema següent, seguint una prova similar a la donada per al lema 4 i el corol·lari 3.

Lema 6. *El sistema (4.5.1) té solució $\check{H}^0(\tilde{\tau}, \tilde{h}, \delta)$, $\check{H}^\pm(\tilde{\tau}, \tilde{h}, \delta)$ per a $0 \le \delta \le (\pi - c_1)/\varepsilon$. A més per a $s \in \mathbb{C}$ verificant*

$$c' \le \mathrm{Im}\, s \le (\pi - c_1)/\varepsilon - 2\delta, \quad |\mathrm{Re}\, s\,| \le 2c_3/\varepsilon, \quad |\tilde{h}| \le c''|s + i\delta|^{-2}$$

es verifiquen les següents majorants

$$\check{H}^0(\tilde{\tau} - s - i\delta, \tilde{h}, \delta) \le \check{B}\|s\|\|s + i\delta\|^{-4}\|s + 2i\delta\|^{-2}\check{Y}^{-1}(s, 2\delta), \tag{4.5.3}$$
$$\check{H}^\pm(\tilde{\tau} - s - i\delta, \tilde{h}, \delta) \le \check{C}\|s\|^{-1}\|s + 2i\delta\|^{-2}\check{Y}^{-1}(s, 2\delta), \tag{4.5.4}$$

on

$$\check{Y}(\alpha, \beta) = (\check{w}\|\alpha\| - \tilde{\tau})(\check{w}\|\alpha + i\beta\|^{-2} - \tilde{h}).$$

Si desfem ara el canvi de variables i passem aquesta solució que ens dóna el lema 6 a les coordenades τ_*, h usant les relacions

$$\tilde{\tau} = \varepsilon^{-1}\tau = \varepsilon^{-1}(\tau_* - T(h)), \quad \tilde{h} = \varepsilon^2 h,$$

on $T(h)$ és la funció analítica que hem definit a la secció 2.3.1, obtenim

$$H_*^0(\tau_* h, \delta) = \varepsilon^{-2}\check{H}^0(\varepsilon^{-1}\tau_* - \varepsilon^{-1}T(h), \varepsilon^2 h, \delta),$$
$$H_*^\pm(\tau_* h, \delta) = \varepsilon^{-2}\check{H}^0(\varepsilon^{-1}\tau_* - \varepsilon^{-1}T(h), \varepsilon^2 h, \delta).$$

Suposem que $(\tau_*, h) \in D_3^\delta$, així $|T(h) - i\pi/2| \leq c_9|h|$. Posem $s = -\varepsilon^{-1}\tau_* + \varepsilon^{-1}T(h) - i\delta$ i com podem suposar que c_5 és molt més gran que c_6,

$$c' \leq c_5 - c_9c_6 \leq \operatorname{Im} s \ \leq \pi/\varepsilon - 2\delta + c_9c_6 - c_5, \quad \operatorname{Re} s \ \leq 2c_3/\varepsilon + c_9c_6.$$

Apliquem ara la fita (4.5.3) amb $\tilde{\tau} = 0$, $|\tilde{h}| = |\varepsilon^2 h| \leq \varepsilon^3 c_6$, llavors

$$H_*^0(\tau_*, h, \delta) \leq \frac{\varepsilon^{-2}\check{B}\|s\|}{\|s+i\delta\|^4\|s+2i\delta\|^2\,\check{w}\|s\|\,\check{w}\|s+2i\delta\|^{-2}/2} \leq \frac{2\varepsilon^{-2}\check{B}}{\check{w}^2\|s+i\delta\|^4}.$$

Aquesta darrera expressió serà d'ordre ε^2 per a $\delta \geq \text{const}\varepsilon^{-1}$. Anàlogament

$$\begin{aligned}(H_*^0)_h(\tau_*, h, \delta) &= \left(-\varepsilon^3 T_{\tilde{h}}\check{H}_{\tilde{\tau}}^0 + \check{H}_{\tilde{h}}^0\right)(\varepsilon^{-1}\tau_* - \varepsilon^{-1}T(h), \varepsilon^2 h, \delta) \\ &\quad \frac{\varepsilon^{-3}c_9c_6\check{B}\|s\|}{\|s+i\delta\|^4\|s+2i\delta\|^2\,\check{w}^2\|s\|^2\,\check{w}\|s+2i\delta\|^{-2}/2} \\ &\quad + \frac{\check{B}\|s\|}{\|s+i\delta\|^4\|s+2i\delta\|^2\,\check{w}\|s\|\,\check{w}^2\|s+2i\delta\|^{-4}/2}.\end{aligned}$$

Ara aquesta suma és acotada per $\text{const}\varepsilon/\|s\| \leq \text{const}\varepsilon/(1+\varepsilon^{-1}|\operatorname{Re}\tau_*\,|)$ com voliem demostrar.

□

4.6 Solució als dominis D_1 i D_2

4.6.1 Solució del sistema de les mitjanes en D_1

Teorema 9 (4)**.** *Existeix una solució del sistema*

$$\frac{\partial}{\partial\delta}H^0 = -2i\varepsilon\{H^+, H^-\}, \qquad \frac{\partial}{\partial\delta}H^\pm + H^\pm = \pm i\varepsilon\{H^0, H^\pm\},$$

amb les condicions inicials

$$H^0(x, y, \varepsilon, 0) = \hat{H}^0(x, y), \qquad H^\pm(x, y, \varepsilon, 0) = \hat{H}^\pm(x, y),$$

per a $0 \leq \delta \leq \pi\varepsilon^{-1}/2$ en el domini

$$D_1^\delta = \{|\operatorname{Im}\tau_*(x,y)\,| \leq c_2^{-1} + \pi/2 - \varepsilon\delta,\ c_3^{-1} \leq |\operatorname{Re}\tau_*(x,y)\,| \leq c_3,\ |h(x,y)| \leq c_2^{-1}\}$$

i a més a D_1^δ es verifica:

$$|H^\pm(x, y, \delta)| \leq Ae^{-\delta}, \tag{4.6.1}$$

$$|H^0(x, y, \varepsilon, \delta) - \hat{H}^0(x, y)| \leq \varepsilon^2 A', \tag{4.6.2}$$

per a certs $A, A' > 0$.

Demostració. Per a simplificar la notació a partir d'ara no posarem dependència explícita en ε.

Com a primer pas, passem a coordenades temps-energia (τ_*, h), recordem que denotem el hamiltonià transformat per $H_*(\tau_*, h) = H(x, y)$,. Introduïm les funcions q^0, $q^\pm$ per les relacions següents:

$$H_*^0(\tau_*, h, \delta) = h + q^0(\tau_*, h, \delta), \qquad H_*^\pm(\tau_*, h, \delta) = q^\pm(\tau_*, h, \delta)e^{-\delta}, \tag{4.6.3}$$
$$q^0(\tau_*, h, 0) = 0, \qquad q^\pm(\tau_*, h, 0) = \hat{q}^\pm(\tau_*, h) = \hat{H}_*^\pm(\tau_*, h). \tag{4.6.4}$$

Fixem d'ara endavant $c_3 \leq |\mathrm{Re}\, s\,| \leq c_3^{-1}$. Volem obtenir un sistema d'equacions en derivades parcials per les funcions q^0, $q^\pm$ definides anteriorment, i a més volem majorar les condicions inicials, això és, majorar les funcions $q^0(\tau_*, h, 0)$, $q^\pm(\tau_*, h, 0)$. Evidentment, la primera és 0 i no cal que la majorem. Per majorar la segona utilitzarem el següent lema, i per obtenir el sistema d'equacions, el lema 8.

Lema 7. *Donat* $m \in \{c_3 \leq |\mathrm{Re}\, m\,| \leq c_3^{-1}, |\mathrm{Im}\, m\,| \leq \pi/2\}$ *existeixen* $k_0, N > 0$ *tals que*

$$\hat{H}_*(p - m, h) \ll \frac{N}{(k_0 - p)(k_0 - h)}.$$

Demostració. Recordem que

$$\hat{H}(x, y) = \hat{H}^0(x, y) + e^{it}\hat{H}^+(x, y) + e^{-it}\hat{H}^-(x, y),$$
$$\hat{H}^\pm = B_+^\pm e^{ix} + B_-^\pm e^{-ix}$$

i definiem $\nu(x) = e^{ix/2}$. Sigui $\nu_*(\tau_*, h) = \nu(x, y)$, llavors

$$\hat{H}^\pm(p - m, h) = B_+^\pm \nu_*^2(p - m, h) + B_-^\pm \nu_*^{-2}(p - m, h).$$

Si $k_0 < c_3$ prou petit, la funció anterior serà analítica en $\{|p| \leq k_0, |h| \leq k_0\}$ i m en el domini de l'enunciat, ja que les singularitats de $y(\tau_*, h)$ i $\nu_*(\tau_*, h)$ per h petit es troben properes a $(i\pi/2 + i\pi k, 0)_{k\in\mathbb{Z}}$, ja que justament es corresponen amb les singularitats de $x(t)$. D'aquesta manera podem aplicar (5.1.6) i trobem

$$\hat{H}^\pm \ll \frac{N}{(k_0 - p)(k_0 - h)}.$$

□

Lema 8. *Les funcions* q^0 *i* $q^\pm$ *definides anteriorment verifiquen el següent sistema d'equacions en derivades parcials*

$$q_\delta^0 = -2i\varepsilon e^{-2\delta}\{q^+, q^-\},$$
$$q_\delta^\pm = \pm i\varepsilon q_{\tau_*}^\pm \pm i\varepsilon\{q^0, q^\pm\}, \tag{4.6.5}$$

amb condicions inicials definides per (4.6.4).

Demostració. És un càlcul elemental partint de les equacions (4.6.3) el veure que es verifiquen les equacions de l'enunciat fent sirver propietats elementals del parèntesi de Poisson.

□

El nostre objectiu és estimar les solucions del sistema (4.6.5) en els intervals $\Delta_n \leq \delta \leq \Delta_{n+1}$ on $\Delta_n = 2^n - 1 = \mu_n - 1$. Estimarem aquestes solucions inductivament, i el pas d'inducció vindrà donat en part pel següent lema. La seva prova la posposarem fins al final de la secció juntament amb altres resultats accessoris.

Lema 9. *Suposem que per a algun $\Delta \geq 0$ es verifiquen*

$$q^0(\tau_* - s, h, \Delta) \ll \varepsilon B Z^{-1}, \qquad q^{\pm}(\tau_* - s, h, \Delta) \ll C Z^{-1},$$

on $|\mathrm{Im}\, s| \leq \alpha$ i $Z = (k - \tau_*)(k - h)$. Definim $\rho = \sqrt{\varepsilon^2 B^2 + 2e^{-2\Delta} C^2}$. Aleshores per qualssevol r, s, μ satisfent:

$$\sqrt[4]{\gamma\mu\varepsilon\rho} \leq r < k, \quad |\mathrm{Im}\, s| \leq \alpha - \varepsilon\mu, \quad 0 \leq \mu \leq \alpha/\varepsilon$$

es verifiquen

$$\begin{aligned} q^0(\tau_* - s, h, \Delta + \mu) &\ll \varepsilon(B + \mu\gamma 2e^{-2\Delta} C^2 r^{-4} \tilde{Z}^{-1}), \\ q^{\pm}(\tau_* - s, h, \Delta + \mu) &\ll C\tilde{Z}^{-1}, \end{aligned}$$

on $\tilde{Z} = (k - r - \tau_*)(k - r - h)$ i

$$\gamma = \max_{M \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \sum_{u+v=M} \frac{2(2M+3)^3}{(M+1)(2u+1)^2(2v+1)^2} \tag{4.6.6}$$

és una constant que intervé en la prova del lema, observem que $54 \leq \gamma < \infty$.

Suposem ara per hipòtesi d'inducció que al pas n es verifiquen les majorants

$$\begin{aligned} q^0(\tau_* - s, h, \Delta_n) &\ll \varepsilon B_n Z_n^{-1} \\ q^{\pm}(\tau_* - s, h, \Delta_n) &\ll C_n Z_n^{-1} \\ Z_n &= (k_n - \tau_*)(k_n - h), \end{aligned} \tag{4.6.7}$$

i es verifiquen les recurrències

$$\begin{aligned} B_0 = 0, \quad B_{n+1} &= B_n + 2^n \gamma 2e^{-2\Delta_n} C_n^2 r_n^{-4}, \quad C_{n+1} = C_n = N, \\ \alpha_n &= \pi/2 - \varepsilon\Delta_n. \end{aligned}$$

Prenem

$$\rho_n = \sqrt{\varepsilon^2 B_n^2 + 2e^{-2\Delta_n} C_n^2},$$
$$r_n = \frac{k_0}{4(n+1)^2},$$
$$k_{n+1} = k_n - r_n. \tag{4.6.8}$$

Les recurrències (4.6.7) seran certes si a cada pas podem aplicar el lema 9 i per a això cal que es verifiqui

$$r_n \geq \sqrt[4]{\mu_n \varepsilon \gamma \rho_n}.$$

Veiem que es dóna aquesta darrera desigualtat. La següent fita és evident per la definició de totes les constants que intervenen en l'expressió,

$$\gamma \mu_n \varepsilon \rho_n \leq \gamma 2^n \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 \hat{B} + 2e^{-2\Delta_n} N^2}.$$

Volem provar doncs

$$\gamma 2^n \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 \hat{B} + 2e^{-2\Delta_n} N^2} \leq r_n^4.$$

Veiem perquè es verifica la darrera desigualtat. Si $2n < \log_2 \varepsilon^{-1}$, aleshores $2^n \varepsilon < \sqrt{\varepsilon}$ i per tant tota l'expressió a l'esquerra és d'ordre $\sqrt{\varepsilon}$ com a mínim, de manera que prenent un ε prou petit es verifica la desigualtat requerida. Si $2n \geq \log_2 \varepsilon^{-1}$, el terme $2e^{-2\Delta_n} N^2$ és menyspreable per ε prou petit i com que $2^n - 1 = \Delta_n \leq \pi \varepsilon^{-1}$, el primer terme queda a ordre ε^2 de manera que com abans, es verificarà la desigualtat desitjada prenent un ε prou petit.

La tria de r_k ens assegura que es verifica

$$k_n = k_0 \left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4}(k+1)^{-2} \right) \geq k_0/2,$$

ja que $\sum \frac{1}{(k+1)^2} \leq 2$. D'aquesta manera el domini no es redueix indefinidament.

Podem acotar la successió $B_n \leq \hat{B} < \infty$,

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} 2^k \gamma e^{-2\Delta_k} N^2 r_k^{-4} \leq \gamma N^2 2^9 k_0^{-4} \sum_{k=0}^{\infty} 2^k (k+1)^8 e^{-2\Delta_k} \equiv \hat{B} < \infty,$$

observem que la cota és independent de n i per tant els termes de la successió són uniformement acotats.

D'aquesta manera, a cada pas podem aplicar el lema d'inducció anterior, obtenint

$$q^{\pm}(\tau_* - s, h, \delta) \ll N \hat{Z}^{-1}, \tag{4.6.9}$$
$$q^{0}(\tau_* - s, h, \delta) \ll \varepsilon \hat{B} \hat{Z}^{-1}, \tag{4.6.10}$$
$$\text{on} \quad \hat{Z} = (k_0/2 - \tau_*)(k_0/2 - h),$$

per $0 \leq \delta \leq \frac{\pi}{2\varepsilon}$, $c_3 \leq |\mathrm{Re}\, s\,| \leq c_3^{-1}$, $|\mathrm{Im}\, s\,| \leq \pi/2 - \varepsilon\delta$. Ara, (4.6.1) prové directe de (4.6.9).

Provem doncs la majorant (4.6.2) de l'enunciat. Per fer-ho, prenem l'expressió integral següent

$$H^0(\tau_*, h, \delta) - h = q^0(\tau_*, h, \delta) = -2i\varepsilon \int_0^\delta e^{-2\lambda}\{q^+, q^-\}(\tau_*, h\lambda)\, d\lambda \quad (4.6.11)$$

Recordem que $\{q^+, q^-\}(\tau_*, h, 0) = 0$ de manera que podem descomposar

$$H^0(\tau_*, h, \delta) - h = I_1 + I_2$$

on

$$\begin{aligned} I_1 &= -2i\varepsilon \int_0^\delta e^{-2\lambda}\{q^+(\tau_*, h, \lambda) - q^+(\tau_*, h, 0), q^-(\tau_*, h, \lambda)\}\, d\lambda \\ I_2 &= -2i\varepsilon \int_0^\delta e^{-2\lambda}\{q^+(\tau_*, h, \lambda), q^-(\tau_*, h, \lambda) - q^-(\tau_*, h, 0)\}\, d\lambda \end{aligned} \quad (4.6.12)$$

Per les següents fites ens faran falta les dues majorants següents (en les quals s'apliquen (5.1.7) i (5.1.8)):

$$\begin{aligned} q^{\pm}_{\tau_*} &\ll \frac{N}{\hat{Z}^2} \\ \{q^0, q^{\pm}\} &\ll \frac{2\hat{B}N}{\hat{Z}^3} \end{aligned} \quad (4.6.13)$$

Ara, fitem un dels termes en el parèntesi de Poisson de l'integrand en (4.6.12):

$$\begin{aligned} q^{\pm}(\tau_* - s, h, \lambda) - q^{\pm}(\tau_* - s, h, 0) &= \int_0^\lambda (\pm i\varepsilon q^{\pm}_{\tau_*} \pm i\varepsilon\{q^0, q^{\pm}\})(\tau_* - s, h, u)\, du \\ &\ll \varepsilon \int_0^\lambda (N\hat{Z}^{-2} + 2\varepsilon\hat{B}N\hat{Z}^{-3})\, du \\ &= \varepsilon\lambda(NZ^{-2} + 2\varepsilon\hat{B}N\hat{Z}^{-3}) \end{aligned} \quad (4.6.14)$$

Majorem I_1 i introduïm $Z_1 = (k_0/4 - \tau_*)(k_0/4 - h)$

$$\begin{aligned} I_1 &\ll 2\varepsilon \int_0^\delta e^{-2\lambda}\varepsilon\lambda 2(2N^2\hat{Z}^{-4} + 6\varepsilon\hat{B}N^2\hat{Z}^{-5})\, d\lambda \\ &\ll \left|\delta e^{-2\delta} - e^{-2\delta}\right| 4\varepsilon^2(N^2\hat{Z}^{-4} + 3\varepsilon\hat{B}N^2\hat{Z}^{-5}) \\ &\ll 2\varepsilon^2\hat{Z}_1^{-1}(N^2(k_0/4)^{-6} + 3\varepsilon\hat{B}N^2(k_0/4)^{-8}) \\ &\ll 4\varepsilon^2\hat{Z}_1^1 N^2(k_0/4)^{-6}, \end{aligned}$$

on per a l'últim pas hem aplicat la propietat (5.1.13). Si fitem de la mateixa manera I_2, tenim

$$I_1 + I_2 \ll 2^{15}N^2k_0^{-6}\varepsilon^2\hat{Z}_1^{-1}.$$

El teorema 4 queda provat. □

Provem ara el lema 9.

Lema 9. *Suposem que per algún* $\Delta \geq 0$ *es verifiquen*

$$q^0(\tau_* - s, h, \Delta) \ll \varepsilon B Z^{-1}, \quad q^\pm(\tau_* - s, h, \Delta) \ll C Z^{-1}$$

on $|\mathrm{Im}\, s| \leq \alpha$ *i* $Z = (k - \tau_*)(k - h)$*. Definim* $\rho = \sqrt{\varepsilon^2 B^2 + 2e^{-2\Delta} C^2}$*. Aleshores per qualsevol* r, s, μ *satisfent:*

$$\sqrt[4]{\gamma\mu\varepsilon\rho} \leq r < k, \quad |\mathrm{Im}\, s| \leq \alpha - \varepsilon\mu, \quad 0 \leq \mu \leq \alpha/\varepsilon$$

es verifiquen

$$q^0(\tau_* - s, h, \Delta + \mu) \ll \varepsilon(B + \mu\gamma 2e^{-2\Delta} C^2 r^{-4} \tilde{Z}^{-1} \tag{4.6.15}$$

$$q^\pm(\tau_* - s, h, \Delta + \mu) \ll C\tilde{Z}^{-1} \tag{4.6.16}$$

on

$$\tilde{Z} = (k - r - \tau_*)(k - r - h)$$

i γ *és una constant definida en (4.6.23) a través de la prova d'aquest lema (*$54 \leq \gamma < \infty$*).*

Suposem que es verifica el següent sistema infinit numerable d'equacions en derivades parcials:

$$q_\delta^{(0)0} = 0, \qquad q_\delta^{(n+1)0} = -2i\varepsilon e^{-2\delta} \sum_{l+m=n} \{q^{(l)+}, q^{(m)-}\},$$

$$q_\delta^{(0)\pm} = \pm i\varepsilon q_{\tau_*}^{(0)}, \qquad q_\delta^{(n+1)\pm} = \pm i\varepsilon q_{\tau_*}^{(n+1)\pm} \pm \varepsilon i \sum_{l+m=n} \{q^{(l)0}, q^{(m)\pm}\},$$

amb condicions inicials per a $\delta = \Delta$

$$q^{(0)0}(\tau_*, h, \Delta) = q^0(\tau_*, h, \Delta), \qquad q^{(n)0}(\tau_*, h, \Delta) = 0 \quad (n > 0)$$

$$q^{(0)\pm}(\tau_*, h, \Delta) = q^\pm(\tau_*, h, \Delta), \qquad q^{(n)\pm}(\tau_*, h, \Delta) = 0 \quad (n > 0).$$

Considerem ara les funcions suma que resulten de sumar les expressions anteriors

$$q^0 = q^{(0)0} + q^{(1)0} + \dots \qquad q^\pm = q^{(0)\pm} + q^{(1)\pm} + \dots.$$

Aquestes funcions seran una solució formal del sistema que defineix q^0 i $q^\pm$, i si és convergent serà solució. Caldrà veure doncs que són convergents i verifiquen les majorants de l'enunciat, usant aquesta descomposició en sèrie.

Podem provar les següents identitats seguint una prova similar al lema 4:

$$q^{(0)0}(\tau_* - s, h, \Delta + \mu) = q^0(\tau_* - s, h, \Delta), \tag{4.6.17}$$

$$q^{(0)\pm}(\tau_* - s, h, \Delta + \mu) = q^\pm(\tau_* - s \pm i\varepsilon\mu, h, \Delta), \tag{4.6.18}$$

$$q^{(n+1)0}(\tau_*, h, \Delta+\mu) = -2i\varepsilon \sum_{l+m=n} \int_0^\mu e^{-2(\Delta+\lambda)}\{q^{(l)+}, q^{(m)-}\}(\tau_*, h, \Delta+\lambda)\, d\lambda,$$

$$q^{(n+1)\pm}(\tau_*, h, \Delta+\mu) = \pm i\varepsilon \sum_{l+m=n} \int_0^\mu \{q^{(l)0}, q^{(m)\pm}\}(\tau_* \pm i\varepsilon(\mu-\lambda), h, \Delta+\lambda)\, d\lambda.$$

Usant les condicions de l'enunciat i les dos primeres relacions,

$$q^{(0)0}(\tau_* - s, h, \Delta+\mu) = q^0(\tau_* - s, h, \Delta) \ll \varepsilon B Z^{-1}, \tag{4.6.19}$$

$$q^{(0)\pm}(\tau_* - s, h, \Delta+\mu) = q^\pm(\tau_* - s \pm i\varepsilon\mu, h, \Delta) \ll C Z^{-1}. \tag{4.6.20}$$

Requerim ara d'un lema auxiliar:

Lema 10. *Per a $0 \le \mu \le \alpha/\varepsilon$, $s \in \mathbb{C}$, $c_3 \le |\mathrm{Re}\, s\,| \le c_3^{-1}$ i $|\mathrm{Im}\, s\,| \le \alpha - \varepsilon\mu$ es verifica:*

$$q^{(n)0}(\tau_* - s, h, \Delta+\mu) \ll \frac{2e^{-2\Delta} C^2 (\mu\varepsilon\gamma)^n \rho^{n-1}}{(2n+1)^3 Z^{2n+1}}, \quad n \ge 1, n \in \mathbb{Z}, \tag{4.6.21}$$

$$q^{(n)\pm}(\tau_* - s, h, \Delta+\mu) \ll \frac{C(\mu\varepsilon\gamma\rho)^n}{(2n+1)^3 Z^{2n+1}}, \quad n \ge 0, n \in \mathbb{Z}, \tag{4.6.22}$$

on les funcions q^0, $q^\pm$ són les definides a (4.6.4) i

$$\gamma = \max_M \sum_{u+v=M} \frac{2(2M+3)^3}{(M+1)(2u+1)^2(2v+1)^2}. \tag{4.6.23}$$

Demostració. El provarem per inducció sobre n fent inducció a dos passos. . Es comprova immediatament que (4.6.22) és cert per $n = 0$, suposem cert per $n \le k$ i passem a provar el cas $k+1$ en (4.6.21) , usant les relacions integrals (4.6.19) i (4.6.20).

$$\begin{aligned} &q^{(k+1)0}(\tau_* - s, h, \Delta+\mu) = \\ &\qquad - 2i\varepsilon \sum_{l+m=k} \int_0^\mu e^{-2(\Delta+\lambda)}\{q^{(l)+}, q^{(m)-}\}(\tau_* - s, h, \Delta+\lambda) d\lambda = \star \end{aligned}$$

Ara, l i m en el sumatori són menors que k, apliquem (5.1.8) i observem que el factor $e^{-2\lambda}$ és menyspreable.

$$\begin{aligned} \star &\ll 2\varepsilon \int_0^\mu e^{-2\Delta} \sum_{l+m=k} \frac{2(2l+1)(2m+1)C^2(\gamma\varepsilon\lambda\rho)^k}{(2l+1)^3(2m+1)^3 Z^{2k+3}}\, d\lambda \\ &\ll \frac{2(\varepsilon\mu)^{k+1}(\gamma\rho)^k C^2 e^{-2\Delta}}{(k+1)Z^{2k+3}} \cdot \sum_{l+m=k} \frac{2}{(2l+1)^2(2m+1)^2} \ll (4.6.21) \end{aligned}$$

per la definició que tenim de γ. Fem servir ara aquesta fita per provar (4.6.22) de la mateixa manera:

$$q^{(k+1)\pm}(\tau_* - s, h, \Delta + \mu) = \\ \pm i\varepsilon \int_0^\mu \sum_{l+m=k} \{q^{(l)0}, q^{(m)\pm}\}(\tau_* - s \pm i\varepsilon(\mu - \lambda), h, \Delta)\, d\lambda. \quad (4.6.24)$$

□

Continuem ara amb la prova del lema 9.

Amb el resultat del lema 10 obtenim:

$$q^0(\tau_* - s, h, \Delta + \mu) \ll \varepsilon \left(\frac{B}{Z} + \frac{2e^{-2\Delta} C^2 \mu \gamma}{Z^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu^{4k}}{Z^{2k}} \right) = \star$$

On $\nu = \sqrt[4]{\mu\varepsilon\gamma\rho}$. Aquest últim sumatori es pot majorar per $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu^{2k}}{Z^k} = \frac{Z}{Z-\nu^2}$, per τ_*, h en un entorn petit de 0, ja que $\nu^2 < k^2$ i la desigualtat és estricta.

$$\star \ll \varepsilon \left(\frac{B}{Z} + \frac{2e^{-2\Delta} C^2 \mu\gamma}{Z^2(Z - \nu^2)} \right) \\ \ll \varepsilon \left(\frac{B}{Z - r^2} + \frac{2e^{-2\Delta} C^2 \mu\gamma}{Z^2(Z - r^2)} \right),$$

on la última majorant és deguda a que pel lema 9 tenim que $r \geq \nu$. Fent servir ara les propietats (5.1.9) i (5.1.10),

$$\frac{1}{Z^2(Z - r^2)} \ll \frac{1}{Z^2 \tilde{Z}^2} \ll \frac{1}{r^4 \tilde{Z}}$$

de manera que

$$q^0(\tau_* - s, h, \Delta + \mu) \ll \varepsilon \frac{B + 2e^{-2\Delta} C^2 \mu\gamma}{r^4 \tilde{Z}}$$

tal i com voliem veure. Anàlogament,

$$q^{\pm}(\tau_* - s, h, \Delta + \mu) \ll \frac{C}{Z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu^{4k}}{Z^{2k}} \ll \frac{C}{\tilde{Z}}.$$

Així acabem la prova del lema 9.

4.6.2 Solució del sistema en D_2

Teorema (5). *Existeix una solució del sistema (2.3.6),(2.3.7) per a* $0 \leq \delta \leq \pi\varepsilon^{-1}/2$ *en el domini*

$$D_2 = \{|x - \pi| \leq c_4^{-1} mod 2\pi,\ |y| \leq c_4^{-1}\}, \quad (4.6.25)$$

i a més a D_2 *es verifiquen (4.1.2),(4.1.3).*

Demostració. Com a primer pas, passem el sistema no pertorbat a forma normal de Birkhoff en un entorn de $(x, y) = (\pi, 0)$. Les noves variables (x_N, y_N) s'expressen com

$$x - \pi = (y_N + x_N)/\sqrt{2} + \mathcal{O}(x_N^2 + y_N^2), \qquad y = (-y_N + x_N)/\sqrt{2} + \S_{\mathcal{N}} + {}_{\mathcal{N}}.$$

Amb aquest canvi de coordenades podem expressar el hamiltonià com

$$\hat{H}^0 = \xi(xy) = xy + \xi_1(xy)^2 + \dots,$$

i el canvi que passa d'un sistema a l'altre és canònic.

Ara definim certes funcions auxiliars, per donar al sistema pertorbat una estructura similar a la prova de l'existència de solució a D_1,

$$\begin{aligned} H^0(x, y, \delta) &= xy + p^0(x, y, \delta), \quad p^0(x, y, 0) = \xi(xy) - xy \\ H^\pm &= \left(p^\pm(x, y, \delta) - H^\pm(0, 0, 0)\right) e^{-\delta}, \quad p^\pm(x, y, 0) = \hat{H}^\pm(x, y) - \hat{H}^\pm(0, 0). \end{aligned} \tag{4.6.26}$$

Aquestes funcions $p^{0,\pm}$ seran analítiques en x, y en el polidisc $D = D(0, \chi_0) \times D(0, \chi_0)$ per un χ_0 prou petit. Evidentment podem factoritzar p^0 de la manera següent

$$p^0(x, y, \delta) = (xy)^2 \tilde{p}(x, y).$$

Aplicant la propietat (5.1.6)

$$|p^0(x, y, 0)| \le \chi_0^4 |\tilde{p}(x, y)| \ll \chi_0^4 A_0 \chi_0^2 W_0^{-1}, \quad W_0 = (\chi_0 - x)(\chi_0 - y) \tag{4.6.27}$$

i de la mateixa manera

$$|p^\pm(x, y, 0)| \ll \chi_0^3 A_\pm W_0^{-1}, \qquad W_0 = (\chi_0 - x)(\chi_0 - y). \tag{4.6.28}$$

Si substituïm (4.6.26) en el sistema (2.3.6),(2.3.7) les funcions $p^{0,\pm}$ verificaran el següent sistema d'equacions en derivades parcials

$$p^0_\delta = -2i\varepsilon e^{-2\delta}\{p^+, p^-\}, \qquad p^\pm_\delta = \pm i\varepsilon\{xy, p^\pm\} \pm i\varepsilon\{p^0, p^\pm\}, \tag{4.6.29}$$

amb condicions inicials similars a les de (4.6.26). El nostre objectiu és provar que aquest sistema té solució per $0 \le \delta \le \pi\varepsilon^{-1}/2$, $|x|, |y| \le \chi_0/2$ amb χ_0 prou petit i que aquesta solució verifica certes majorants que impliquen les de l'enunciat. Provarem l'existència i les majorants per inducció sobre els intervals $\Delta_n \le \delta \le \Delta_{n+1}$ on $\Delta_n = 2^n - 1$. El pas d'inducció d'un interval al següent ens el donarà el següent lema auxiliar, que provarem més endavant.

Lema 11. *Suposem que per a algun $\Delta \ge 0$ es verifiquen*

$$p^0(x, y, \Delta) \ll BW^{-1}, \quad p^\pm(x, y, \Delta) \ll CW^{-1}$$

on $W = (\chi - x)(\chi - y)$, *i sigui* $\rho = (B^2 + 2C^2 \exp(-2\Delta))^{1/2}$. *Aleshores per a tot* $(\mu\varepsilon\gamma\rho)^{1/4} \leq r < \chi$ *es verifiquen*

$$\begin{aligned} p^0(x, y, \Delta + \mu) &\ll (B + 2\exp(-2\Delta)C^2\mu\varepsilon\gamma r^{-4})\tilde{W}^{-1}, \\ p^{\pm}(x, y, \Delta + \mu) &\ll C\tilde{W}, \end{aligned}$$

on

$$\begin{aligned} \tilde{W} &= (\chi - r - x)(\chi - r - y), \\ \gamma &= \max_{M \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \sum_{u+v=M} \frac{2(2M+3)^3}{(M+1)(2u+1)^2(2v+1)^2} \end{aligned} \tag{4.6.30}$$

Suposem que al pas n-èssim d'inducció tenim majorants del tipus

$$p^0(x, y, \Delta_n) \ll \chi_0^6 b_n W_n^{-1}, \quad p^{\pm}(x, y, \Delta_n) \ll \chi_0^3 A_{\pm} W_n^{-1},$$

$$W_n = (\chi_n - x)(\chi_n - y),$$

i recurrències

$$B := \chi_0^6 b_n, \quad C := \chi_0^3 A_{\pm}, b_{n+1} = b_n + 2\exp(-2\Delta)A_{\pm}^2 \mu_n \varepsilon\gamma r_n^{-4}.$$

Prenem

$$\begin{aligned} \rho_n &= (\chi_0^{12} b_n^2 + 2\chi_0^6 A_{\pm}^2 e^{-2\Delta_n}), \\ r_n &:= \chi_0 (n+1)^{-2}/8, \chi_{n+1} = \chi_n - r_n. \end{aligned}$$

Per les majorants (4.6.27) i (4.6.28), tenim majorants d'aquest estil per al pas $n = 0$ amb $b_0 = A_0$.

Observem que podem acotar b_n per la sèrie,

$$b_n \leq A_0 + 2\sum_{k=0}^{\infty} e^{-2\Delta_k} A_{\pm}^2 2^{k+12} \varepsilon\gamma\chi_0^4 (k+1)^8,$$

i aquesta sèrie és evidentment convergent, per $\varepsilon \geq 0$ prou petit tenim doncs $b_n \leq 2A_0$.

Notem també que $\chi_n \geq 3\chi_0$ sumant la sèrie recurrent que resulta de l'expressió de χ_n i r_n.

Per poder aplicar el lema iterativament cal que es verifiqui

$$r_n^4 \geq \mu_n \varepsilon\gamma\rho_n$$

Primer ho provarem per a tot $n \geq 0$ tal que $\Delta_n \leq 2\varepsilon^{-1/2} + 1$. Recordem que hem pres

$$r_n^4 = \chi_0^4 2^{-12} (n+1)^8,$$

i fitant directament:

$$\mu_n \varepsilon \gamma \rho_n \leq 2^n \varepsilon \gamma (\chi_0^{12} 4A_0 + \chi_0^6 2A_\pm^2 \exp(-2\Delta_n))^{1/2} = \star.$$

Observem que la condició que hem imposat sobre n implica que $2^n\varepsilon \leq 2(\sqrt{\varepsilon}+\varepsilon)$ de manera que

$$\star \leq 2\sqrt{\varepsilon}\gamma(\chi_0^{12} 4A_0 + \chi_0^6 2A_\pm^2 \exp(-2\Delta_n))^{1/2}.$$

Aquesta darrera expressió és decreixent respecte n i $n < \text{const}|\log \varepsilon|$, de manera que per a un ε prou petit es verificara $r_n^4 \geq \mu_n \varepsilon \gamma \rho_n$.

Sigui ara n^* el màxim n verificant $\Delta_n \leq 2\varepsilon^{-1/2}+1$. És un simple càlcul el comprovar que si n^* és maximal, $\Delta_{n^*} \geq \varepsilon^{-1/2}$. Ara per aplicar el lema, podem arribar justament fins aquest n^*, i tenim les fites

$$\begin{gathered} p^0(x,y,\Delta_{n^*}) \ll 2\chi_0^6 A_0 W_*^{-1}, \quad p^\pm(x,y,\Delta_{n^*}) \ll \chi_0^3 A_\pm W_*^{-1}, \\ W_* = (3\chi_0/4 - x)(3\chi_0/4 - y). \end{gathered}$$

Tornem a aplicar el lema, prenent $r = \chi_0/4$, $\mu = \pi\varepsilon^{-1}/2 - \Delta_{n^*}$, cosa que podem fer ja que $\mu \sim \sqrt{\varepsilon}$ i podem repetir els arguments anteriors per veure l'aplicabilitat. D'aquesta manera per a tot $\delta \in [0, \pi\varepsilon^{-1}/2]$

$$\begin{aligned} &p^0(x,y,\delta) \ll \chi_0^6(2A_0 + 2\exp(-2\Delta_{n^*})A_\pm^2(\pi/2)\gamma(\kappa_0/4)^{-4})\tilde{W}_*^{-1} \ll 3\chi_0^6 A_0 \tilde{W}_*^{-1} \\ &p^\pm(x,y,\delta) \ll \chi_0^3 A_\pm \tilde{W}_*^{-1} \end{aligned}$$

on

$$\tilde{W}_* = (\chi_0/2 - x)(\chi_0/2 - y).$$

Per tant per a $0 \leq \delta \leq \pi\varepsilon^{-1}/2$ tenim les següents majorants

$$\begin{aligned} p^0(x,y,\delta) &\ll 2\chi_0^6 A_0 \tilde{W}_*^{-1}, \\ p^\pm(x,y,\delta) &\ll \chi_0^3 A_\pm \tilde{W}_*^{-1}, \\ &\text{on } \tilde{W}_* = (\chi_0/2 - x)(\chi_0/2 - y). \end{aligned} \tag{4.6.31}$$

D'aquesta manera,

$$\begin{aligned} |H^\pm(x,y,\delta)| &= |(p^\pm(x,y,\delta) - H^\pm(0,0,0))|e^{-\delta} \\ &\leq (|p^\pm(x,y,\delta)| + |H^\pm(0,0,0)|)e^{-\delta} \end{aligned} \tag{4.6.32}$$

i $|p^\pm(x,y,\delta) \leq |\chi_0^3 A_\pm \tilde{W}_*^{-1}| \leq$ const ja que $\tilde{W}_*^{-1}$ és acotada per a x, y propers a 0, i en particular també per a $|x|$, $|y| \leq \chi/2$. Per l'altre resultat, com $h = \tilde{H}^0(x,y)$

$$H^0 - h = H^0 - \hat{H}^0 = p^0(x,y,\delta) - p^0(x,y,0).$$

En les noves coordenades de la forma normal de Birkhoff es verifica

$$\{p^+(x,y,0), p^-(x,y,0)\} = 0$$

ja que el canvi és canònic i

$$\{\hat{H}^+, \hat{H}^-\} = 0$$

en les coordenades originals, ja que només depenen de x i no de y. Així podem factoritzar

$$H^0 - h = p^0(x, y, \delta) - p^0(x, y, 0) = I_1 + I_2,$$

on

$$I_1 = -2i\varepsilon \int_0^\delta \exp(-2\lambda)\{p^+(x, y, \lambda) - p^+(x, y, 0), p^-(x, y, \lambda)\}\, d\lambda$$
$$I_1 = -2i\varepsilon \int_0^\delta \exp(-2\lambda)\{p^+(x, y, \lambda), p^-(x, y, \lambda) - p^-(x, y, 0), \}\, d\lambda.$$

Ara considerem la següent identitat

$$p^\pm(x, y, \lambda) - p^\pm(x, y, 0) = \int_0^\lambda \pm i\varepsilon\{xy, p^\pm\} \pm i\varepsilon\{p^0, p^\pm\}\, d\lambda$$

i majorem-la fent servir la propietat (5.1.8) en els termes de la integral:

$$\{xy, p^\pm\} = |p^\pm_x - p^\pm_y| \ll 2\chi_0^3 A_\pm \tilde{W}_*^{-2}$$
$$\{p^0, p^\pm\} \ll 2\chi_0^3 A_\pm 3\chi_0^6 A_0 \tilde{W}_*^{-3},$$

de manera que

$$p^\pm(x, y, \lambda) - p^\pm(x, y, 0) \ll \lambda\varepsilon \left(2\chi_0^3 A_\pm \tilde{W}_*^{-2} + 6\chi_0^9 A_\pm A_0 \tilde{W}_*^{-3}\right)$$

i ara podem acotar I_1 i I_2 seguint els arguments de la prova del teorema 5. □

Provem ara el lema auxiliar

Lema 12. *Suposem que per algun $\Delta \geq 0$ es verifiquen*

$$p^0(x, y, \Delta) \ll BW^{-1}, \quad p^\pm(x, y, \Delta) \ll CW^{-1}$$

on $W = (\chi - x)(\chi - y)$, i sigui $\rho = (B^2 + 2C^2 \exp(-2\Delta))^{1/2}$. Aleshores per a tot $(\mu\varepsilon\gamma\rho)^{1/4} \leq r < \chi$ es verifiquen

$$p^0(x, y, \Delta + \mu) \ll (B + 2\exp(-2\Delta)C^2\mu\varepsilon\gamma r^{-4})\tilde{W}^{-1},$$
$$p^\pm(x, y, \Delta + \mu) \ll C\tilde{W},$$

on

$$\tilde{W} = (\chi - r - x)(\chi - r - y),$$
$$\gamma = \max_{M\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \sum_{u+v=M} \frac{2(2M+3)^3}{(M+1)(2u+1)^2(2v+1)^2} \tag{4.6.33}$$

Demostració. Suposem que existeixen funcions p^0, $p^\pm$ verificant el següent sistema d'equacions en derivades parcials

$$p_\delta^{(0)0} = 0, \qquad p_\delta^{(n+1)0} = -2i\varepsilon e^{-2\delta} \sum_{l+m=n} \{p^{(l)+}, p^{(m)-}\}, \tag{4.6.34}$$
$$p_\delta^{(0)\pm} = \pm i\varepsilon\{xy, p^{(0)\pm}\}, \quad p_\delta^{(n+1)\pm} = \pm\{xy, p^{(n+1)\pm}\} \pm i\varepsilon \sum_{l+m=n} \{p^{(l)0}, p^{(m)\pm}\},$$

amb condicions inicials

$$p^{(0)0}(x,y,\Delta) = p^0(x,y,\Delta), \quad p^{(n)0}(x,y,\Delta) = 0,$$
$$p^{(0)\pm}(x,y,\Delta) = p^\pm(x,y,\Delta), \quad p^{(n)\pm}(x,y,\Delta) = 0.$$

Si podem trobar unes funcions verificant aquest sistema llavors les funcions suma

$$p^0 = p^{(0)0} + p^{(1)0} + \dots \qquad p^\pm = p^{(0)\pm} + p^{(1)\pm} + \dots$$

seran una solució formal del sistema (4.6.29). sistema que defineix p^0 i $p^\pm$. Si les sèries són convergents, les sumes seran solució. El nostre objectiu és provar que són convergents, i que terme a terme verifiquen l'enunciat del lema.

Les funcions verifiquen les següents relacions integrals,

$$p^{(0)0}(x,y,\Delta+\mu) = p^0(x,y,\Delta), \quad p(0)\pm(x,y,\Delta+\mu) = p^\pm(x,y,\Delta), \tag{4.6.35}$$

$$p^{(0)0}(x,y,\Delta+\mu) = -2i\varepsilon \sum_{l+m=n} \int_0^\mu e^{2(\Delta+\lambda)}\{p^{(l)+}, p^{(m)-}(x,y,\Delta+\lambda)\}\, d\lambda,$$
$$p^{(0)\pm}(x,y,\Delta+\mu) = \pm i\varepsilon \sum_{l+m=n} \int_0^\mu \{p^{(l)0}, p^{(m)-}(e^{\pm i\varepsilon(\mu-\lambda)}x, e^{\mp i\varepsilon(\mu-\lambda)}y, \Delta+\lambda)\}\, d\lambda. \tag{4.6.36}$$

Observem que podem majorar (4.6.35) mitjançant l'enunciat del lema. Per provar (4.6.36) procedim com a la prova del lema 9.

Requerim una proposició auxiliar, igual que en la demostració anterior, ometrem la prova ja que és molt similar a la corresponent al lema 9.

Proposició 4. *Per qualsevol $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ es verifiquen*

$$p^{(n)0}(x,y,\Delta+\mu) \ll \frac{2e^{-2\Delta}C^2(\mu\varepsilon\gamma)^n\rho^{n-1}}{(2n+1)^3 W^{2n+1}}$$
$$p^{(n)0}(x,y,\Delta+\mu) \ll \frac{C(\mu\varepsilon\gamma\rho)}{(2n+1)^3 W^{2n+1}}$$

D'aquí podem deduir

$$p^0(x,y,\Delta+\mu) \ll \frac{B}{W} + \frac{2e^{-2\Delta}C^2\mu\varepsilon\gamma}{W^3}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\mu\varepsilon\gamma\rho)^l}{W^{2l}}.$$

Observem que aquest últim sumatori es pot acotar com vàrem fer en la prova del lema 9, obtenint

$$p^0(x,y,\Delta+\mu) \ll \frac{B}{W} + \frac{2e^{-2\Delta}C^2\mu\varepsilon\gamma}{(W-\nu^2)W^2} \ll \frac{B}{W-r^2} + \frac{2e^{-2\Delta}C^2\mu\varepsilon\gamma}{(W-r^2)W^2}, \quad (4.6.37)$$

i amb els mateixos arguments respecte les funcions W^{-1},

$$p^0(x,y,\Delta+\mu) \ll (B + 2e^{-2\Delta}C^2\mu\varepsilon\gamma r^{-4})\tilde{W}^{-1}. \quad (4.6.38)$$

Finalment, d'una manera anàloga obtenim les majorants per a $p^{\pm}$. □

4.7 Prova del teorema 7

Teorema (7). *Sigui $\hat{\delta} = (\pi/2 - c_1)/\varepsilon$ i $t_\gamma = t + i\pi\varepsilon^{-1}/2 - i\hat{\delta} - ic_5$. Llavors per qualsevol a parell de funcions $\tilde{p}_1(t), \tilde{p}_2(t)$ tals que*

$$|\tilde{p}_1(t)| \le c'\log(1+|t|), \quad |\tilde{p}_2(t)| \le c'', \quad \textit{per a } -c_3^{-1}/\varepsilon \le t \le c_3^{-1}/\varepsilon$$

es verifica

$$\begin{aligned}\int_{-c_3^{-1}/\varepsilon}^{c_3^{-1}/\varepsilon} e^{it}\Big(H_*^+\left(\varepsilon t_\gamma + \varepsilon^2\tilde{p}_1(t), \varepsilon^2 p_2(t), \hat{\delta}\right)\\ -\varepsilon^{-2}\tilde{H}^+\left(t_\gamma + \varepsilon\tilde{p}_1(t) - \varepsilon^{-1}T(\varepsilon^2\tilde{p}_2(t)), \varepsilon^4\tilde{p}_2(t), \hat{\delta}\right)\Big)\,dt\\ = e^{-\delta}\mathcal{O}\left(\varepsilon^{-1}\log\varepsilon^{-1}\right).\end{aligned} \quad (4.7.1)$$

En la prova d'aquest teorema ometrem les tildes a τ i h, però les posarem explícitament en els parèntesis de Poisson que ho requereixin. La prova d'aquest teorema es basa en estimar les diferències següents

$$\begin{aligned}\xi^0(\tau,h,\delta) &= \check{H}^0(\tau,h,\delta) - \tilde{H}^0(\tau,h,\delta),\\ \xi^{\pm}(\tau,h,\delta) &= \check{H}^{\pm}(\tau,h,\delta) - \tilde{H}^{\pm}(\tau,h,\delta),\end{aligned}$$

on les funcions $\tilde{H}$ verifiquen el sistema (2.3.24)-(2.3.25) i les funcions $\check{H}$ verifiquen el sistema (4.5.1)-(4.5.2), a la prova del teorema 6. Fent servir aquest fet obtenim les següents equacions en derivades parcials

$$\begin{aligned}\xi^0_\delta &= -2i\left(\{\tilde{H}^+,\xi^-\}^\sim + \{\xi^+,\tilde{H}^-\}^\sim + \{\xi^+,\xi^-\}^\sim\right),\\ \xi^{\pm}_\delta + \xi^{\pm} &= \pm i\left(\{\tilde{H}^0,\xi^{\pm}\}^\sim + \{\xi^0,\tilde{H}^{\pm}\}^\sim + \{\xi^0,\xi^{\pm}\}^\sim\right)\end{aligned}$$

A continuació enunciarem un parell de lemes que provarem abans de donar la prova de l'enunciat del teorema 7. El primer d'ells és

Lema 13. *Per certes constants β^0, β i qualsevol $s \in \mathbb{C}$ tal que $c_5 \leq \operatorname{Im} s \leq (\pi - c_1)\varepsilon^{-1}$, $|\operatorname{Re} s\,| \leq 2c_3^{-1}\varepsilon$ es verifiquen*

$$\xi^0(\tau - s, h, \delta) \ll \frac{\varepsilon\beta^0\|s\|}{\|s + i\delta\|^4\|s + 2i\delta\|\check{Y}(s, 2\delta)},$$
$$\xi^\pm(\tau - s, h, \delta) \ll \frac{\varepsilon\beta e^{-\delta}}{\|s|\,\|s + 2i\delta\|\check{Y}(s, 2\delta)}.$$

Demostració. Definim les funcions $\eta^{0,\pm}(\tau, h, \delta)$ per les relacions

$$\tilde{H}^0 = h + \tilde{q}^0, \quad \tilde{H}^\pm = e^{-\delta}\tilde{q}^\pm, \quad \eta^0 = \xi^0, \quad \eta^\pm = e^\delta\xi^\pm.$$

Observem que les funcions $\tilde{q}$ són les mateixes que a la prova del teorema 8 i per tant verifiquen el sistema d'equacions en derivades parcials (4.3.6). En canvi les funcions η verifiquen:

$$\xi^0_\delta = -2i\left(\{\tilde{q}^+, \eta^-\}^\sim + \{\eta^+, \tilde{q}^-\}^\sim + \{\eta^+, \eta^-\}^\sim\right),$$
$$\eta^\pm_\delta \mp i\eta^\pm_\tau = \pm i\left(\{\tilde{q}^0, \eta^\pm\}^\sim + \{\eta^0, \tilde{q}^\pm\}^\sim + \{\eta^0, \eta^\pm\}^\sim\right).$$

Per la proposició 5, les condicions inicials per aquests sistemes es poden majorar com

$$\tilde{q}^0(\tau, h, 0) = 0, \quad \tilde{q}^\pm(\tau - s, h, 0) \ll \check{N}\|s\|^{-3}\check{Y}_0^{-1}(s), \tag{4.7.2}$$
$$\xi^0(\tau, h, 0) = 0, \quad \xi^\pm(\tau - s, h, 0) \ll \check{N}_2\|s\|^{-2}\check{Y}_0^{-1}(s). \tag{4.7.3}$$

Observem que si $s \in \{1 \leq \operatorname{Im} s \leq \Lambda,\ |\operatorname{Re} s\,| \leq \Lambda\}$, com $\|s\| \leq 2\Lambda$ podem reescriure la fita (4.7.3) com

$$\xi^\pm(\tau - s, h, 0) \ll 2\varepsilon\check{N}_2\Lambda\|s\|^{-3}\check{Y}_0^{-1}(s). \tag{4.7.4}$$

Considerem ara el sistema auxiliar següent,

$$f^0_\delta = -6i\varepsilon e^{-2\delta}\{f^+, f^-\}^\sim, \quad f^\pm_\delta = \pm i f^\pm_\tau \pm 3i\{f^0, f^\pm\}^\sim$$
$$f^0(\tau, h, 0) = 0, \quad f^\pm(\tau - s, h, 0) \ll L\|s\|^3\check{Y}_0^{-1}(s),$$
$$\{f^+(\tau, h, 0), f^-(\tau, h, 0)\} = 0$$

on s es troba en el domini definit anteriorment. Per les observacions posteriors al lema 4, aquest sistema té solució i amb els arguments usats a la prova es pot demostrar que té solució per $0 \leq \delta \leq \Lambda/2$ verificant

$$f^0(\tau - s - \delta, h, \delta) \ll B^*\|s\|\,\|s + i\delta\|^{-4}\|s + 2i\delta\|^{-2}\check{Y}^{-1}(s, 2\delta),$$
$$f^\pm(\tau - s - \delta, h, \delta) \ll C^*\|s\|^{-1}\|s + 2i\delta\|^{-2}\check{Y}^{-1}(s, 2\delta),$$

on $s \in \{s_* \leq \operatorname{Im} s \leq \Lambda - 2\delta,\ |\operatorname{Re} s\,| \leq \Lambda\}$, i la funció $\check{Y}(\alpha, \beta)$ està definida a la prova del teorema 6. Com en aquesta prova només hi intervenen majorants i no constants específiques, podem suposar que $L \geq \max\{\tilde{N}, 2\varepsilon\check{N}_2\Lambda\}$. A més, les majorants que usem per a les funcions f, també seran majorants de les funcions $\tilde{q}$, i a més, aquest sistema majorarà les funcions (4.7.2), (4.7.3) ja que està construït per fer-ho.

Com la part dreta de les majorants (4.7.2) és com a mínim lineal en η^0 i $\eta^{\pm}$, en reduir el paràmetre que usem a la majorant, $\varepsilon\Lambda$, la reducció serà proporcional com a mínim en η^0 i $\eta^{\pm}$ i per tant tindrem les següents majorants:

$$\begin{aligned} \eta^0(\tau - s - \delta, h, \delta) &\ll \varepsilon\Lambda B_1^* \|s\| \, \|s + i\delta\|^{-4} \|s + 2i\delta\|^{-2} \check{Y}^{-1}(s, 2\delta), \\ \eta^{\pm}(\tau - s - \delta, h, \delta) &\ll \varepsilon\Lambda B_1^* \|s\|^{-1} \|s + 2i\delta\|^{-2} \check{Y}^{-1}(s, 2\delta), \end{aligned} \tag{4.7.5}$$

$$s \in \{c_* \leq \operatorname{Im} s \ \leq \Lambda - 2\delta, \quad |\operatorname{Re} s\,| \leq \Lambda\}$$

Triant $\Lambda = \max\{\operatorname{Im} s \ + 2\delta, |\operatorname{Re} s\,|\}$ tenim doncs $2\Lambda \geq \operatorname{Im} s \ + 2\delta + |\operatorname{Re} s\,| = \|s + 2i\delta\|$, i aquest resultat juntament amb (4.7.5) impliquen el lema.

□

La prova del teorema 7 requereix una majorant més precisa per majorar ξ^+, que aconseguim amb el següent lema:

Lema 14. *Suposem que es verifiquen les majorants (4.7.5), amb* $c_5 \geq 8\sqrt{3\check{B}}$. *Aleshores*

$$\xi^+(\tau - s, h, \delta) \ll \frac{\check{c}\varepsilon e^{-\delta}(1 + \|s\|^{-2} \log(\|s + i\delta\| \, \|s\|^{-1}))}{\|s + 2i\delta\|^2 Y'(s, 2\delta)},$$

on

$$Y'(\alpha, \beta) = (\check{w}\|s\|/2 - \tau)(\check{w}\|s + 2i\delta\|^{-2} - h).$$

Demostració. A la prova d'aquest lema obviem les tildes als parèntesis de Poisson. La funció η^+ verifica l'equació

$$\eta^+_\delta = i\eta^+_\tau + i(\{\check{q}^0, \eta^+\} + \{\eta^0, \tilde{q}^+\}), \quad \check{q}^0 = \tilde{q}^0 - \eta^0. \tag{4.7.6}$$

Per la proposició 18 i el lema 13, tenim les següents majorants:

$$\begin{aligned} \eta^+(\tau - s, h, 0) \ll \varepsilon\check{N}_2 \|s\|^{-2} \check{Y}_0^{-1}(s, 0), &\eta^0(\tau - s - i\delta, h, \delta) \\ &\ll \varepsilon\beta\|s\|\|s + i\delta\|^{-4}\|s + 2i\delta\|^{-1}\check{Y}^{-1}(s, 2\delta) \end{aligned} \tag{4.7.7}$$

i podem estimar les funcions $\check{q}^0$, $\tilde{q}^+$ per

$$\begin{aligned} \check{q}^0(\tau - s - i\delta, h, \delta) &\ll \check{B}\|s\| \, \|s + i\delta\|^{-4} \|s + 2i\delta\|^{-2} \check{Y}^{-1}(s, 2\delta) \\ \tilde{q}^+(\tau - s - i\delta, h, \delta) &\ll \check{C}\|s\|^{-1} \|s + 2i\delta\|^{-2} \check{Y}^{-1}(s, 2\delta). \end{aligned} \tag{4.7.8}$$

Considerem el següent sistema d'equacions en derivades parcials:

$$\eta^{(0)+}_\delta = i\eta^{(0)+}_\tau + i\{\eta^0, \tilde{q}^+\}, \quad \eta^{(m+1)}_\delta = i\eta^{(m+1)+}_\tau + i\{\check{q}^0, \eta^{(m)+}\}, \quad m \geq 0,$$

amb les condicions inicials

$$\eta^{(0)+}(\tau,h,0)=\eta^{+}(\tau,h,0),\quad \eta^{(m+1)+}(\tau,h,0)=0.$$

Si la sèrie $\sum_{i=0}^{\infty}\eta^{(i)}$ és convergent, la funció suma que denotarem per η^{+} serà solució del sistema (4.7.6).

Tenim les següents relacions integrals:

$$\begin{aligned}\eta^{(0)+}(\tau,h,\mu)&=\eta^{+}(\tau+i\mu,h,0)+i\int_0^{\mu}\{\eta^0,\tilde q^{+}\}(\tau+i(\mu-\lambda),h,\lambda)\,d\lambda,\\ \eta^{(m+1)+}(\tau,h,\mu)&=i\int_0^{\mu}\{\check q^0,\eta^{(m)+}\}(\tau+i(\mu-\lambda),h,\lambda)\,d\lambda,\end{aligned}\tag{4.7.9}$$

que podem provar seguint altres demostracions similars anteriors. Primer majorem la funció $\eta^{(0)+}$. Usant les relacions (4.7.7)-(4.7.8) per majorar els termes i la condició inicial, i les propietats (5.1.8) (per majorar l'integrand), (5.1.12) (per simplificar) obtenim la majorant:

$$\begin{aligned}\eta^{(0)+}(\tau-s-i\mu,h,\mu)&\ll\frac{\varepsilon\check N_2}{\|s\|^2\check Y_0(s)}+\int_0^{\mu}\frac{\varepsilon\beta\check C\,d\lambda}{\|s+i\lambda\|^4\|s+i2\lambda\|^3\check Y^3(s,2\lambda)}\\ &\ll\frac{\varepsilon\check N_2}{\|s+2i\mu\|^2\check Y_0(s,2\mu)}+\int_0^{\mu}\frac{8\varepsilon\beta\check C\,d\lambda}{\|s+i\lambda\|\|s+i2\mu\|^6\check Y^3(s,2\mu)}\\ &\ll\frac{\varepsilon\check N_2}{\|s+2i\mu\|^2\check Y_0(s,2\mu)}+\frac{8\varepsilon\beta\check C\log(\|s+i\mu\|/\|s\|)}{\|s+i2\mu\|^6\check Y^3(s,2\mu)}.\end{aligned}\tag{4.7.10}$$

Per acabar enunciem un lema que ens majora les funcions $\eta^{(m)+}$, $m>0$.

Proposició 5. *Per a qualsevol $m>0$ es verifica la majorant*

$$\begin{aligned}\eta^{(m)+}(\tau-s-i\mu,h,\mu)\ll\frac{\varepsilon(4\check B)^m\mu^m}{\|s+i\mu\|^m}\Bigg(&\frac{2^m\check N_2}{\|s+2i\mu\|^{4m+2}\check Y^{2m+1}(s,2\mu)}\\ &+\frac{8\cdot 3^m\beta\check C}{\|s+2i\mu\|^{4m+6}\check Y^{2m+3}(s,2\mu)}\Bigg)\end{aligned}$$

Demostració. Per simplificar la prova, sigui $\check Y_*:=\check Y(s,2\mu)$. Fent servir la relació integral (4.7.9) i les majorants (4.7.8) i (4.7.10) juntament amb les propietats (5.1.8) i (5.1.12) (observem que $\|s+i\lambda\|,\|s+2i\lambda\|\le\|s+2i\mu\|$) podem majorar $\eta^{(1)+}(\tau-s-i\mu,h,\mu)$:

$$\begin{aligned}&\eta^{(1)+}(\tau-s-i\mu,h,\mu)\\ &\ll\int_0^{\mu}\left(\frac{\varepsilon\check N_2\|s\|\check B}{\|s+i\lambda\|^4\|s+2i\lambda\|^4\check Y^3(s,2\lambda)}+\frac{8\cdot3\varepsilon\beta\check C\check B\|s\|\log(\|s+i\lambda\|/\|s\|)}{\||s+i\lambda\|^4\|s+i2\mu\|^8\check Y^5(s,2\mu)}\right)d\lambda\\ &\ll\int_0^{\mu}\left(\frac{4\varepsilon\check N_2\|s\|\check B}{\|s+i\lambda\|^2\|s+2i\mu\|^6\check Y_*^3}+\frac{8\cdot3\cdot4\varepsilon\beta\check C\check B\|s\|\log(\|s+i\lambda\|/\|s\|)}{\|s+i\lambda\|^2\|s+i2\mu\|^{10}\check Y_*^5}\right)d\lambda\\ &\ll\left(\frac{4\varepsilon\check N_2\check B\mu}{\|s+i\mu\|\|s+2i\mu\|^6\check Y_*^3}+\frac{8\cdot3\cdot4\varepsilon\beta\check C\check B\mu}{\|s+i\mu\|^2\|s+i2\mu\|^{10}\check Y_*^5}\right).\end{aligned}\tag{4.7.11}$$

Observem que en integrar la primera fracció es simplifiquen els termes $\|s\|$ i apareix un factor μ al numerador, per a l'altra fracció

$$\int_0^\mu \frac{\log(\|s+i\lambda\|/\|s\|)}{\|s+i\lambda\|^2}\,d\lambda \le \frac{\mu}{\|s\|\|s+\mu\|}.$$

Per acabar la prova de la lema fem servir inducció respecte m. Suposem que el lema és certa fins m, aleshores $\eta^{(m+1)+}(\tau - s - i\mu, h, \mu)$ es pot majorar fent servir les propietats que hem fet servir anteriorment, el cas m i la proposició 17 per calcular la integral, per

$$\begin{aligned}
&\int_0^\mu \frac{\varepsilon(4\check{B})^m\lambda^m}{\|s+i\lambda\|^m}\left(\frac{(2m+1)\check{N}_2\check{B}2^m\|s\|}{\|s+i\lambda\|^4\|s+2i\lambda\|^{4m+4}\check{Y}^{2m+3}(s,2\lambda)}\right.\\
&\quad\left. + \frac{8(2m+3)3^m\beta\check{B}\check{C}\|s\|}{\|s+i\lambda\|^4\|s+2i\lambda\|^{4m+8}\check{Y}^{2m+5}(s,2\lambda)}\right)d\lambda\\
&\quad\ll \left(\varepsilon(4\check{B})^{m+1}\|s\|\int_0^\mu \frac{\lambda^m\,d\lambda}{\|s+i\lambda\|^{m+2}}\right)\\
&\quad\times\left(\frac{(2m+1)\check{N}_2 2^m}{\|s+2i\mu\|^{4m+6}\check{Y}_*^{2m+3}} + \frac{8(2m+3)3^m\beta\check{C}}{\|s+2i\mu\|^{4m+10}\check{Y}_*^{2m+5}}\right)\\
&\quad\ll \frac{\varepsilon(4\check{B})^{m+1}\mu^{m+1}}{(m+1)\|s+2i\mu\|^{m+1}}\left(\frac{(2m+1)\check{N}_2 2^m}{\|s+2i\mu\|^{4m+6}\check{Y}_*^{2m+3}}\right.\\
&\quad\left. + \frac{8(2m+3)3^m\beta\check{C}}{\|s+2i\mu\|^{4m+10}\check{Y}_*^{2m+5}}\right).
\end{aligned}$$

Per acabar la prova de la proposició, observem que $(2m+1)/(m+1) < 2$ i $(2m+3)/(m+1) \le 3$ per $m \ge 0$ □

Acabem la prova del lema 13 usant el lema 5 per majorar η^+. Per simplificar aquesta prova, definim $\check{Y} = \check{Y}(s, 2\delta)$. Aleshores, sumant els termes que composen η:

$$\begin{aligned}
\eta^+(\tau - s - i\delta, h, \delta) \ll{}& \frac{8\varepsilon\beta\check{C}\log(\|s+i\delta\|/\|s\|)}{\|s+2i\delta\|^6\check{Y}^3}\\
&+ \frac{\varepsilon\check{N}_2}{\|s+2i\delta\|^2\check{Y}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{8\check{B}\delta}{\|s+2i\delta\|^m\|s+2i\delta\|^{4m}\check{Y}^{2m}}\\
&+ \frac{8\varepsilon\beta\check{C}}{\|s+2i\delta\|^6\check{Y}^3}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(12\check{B}\delta)^m}{\|s+i\delta\|^m\|s+2i\delta\|^{4m}\check{Y}^{2m}}.
\end{aligned}$$

Tenim les següents desigualtats,

$$\frac{\delta}{\|s+i\delta\|} < 1, \tag{4.7.12}$$

$$\log(\|s+i\delta\|/\|s\|) \leq 2\log\varepsilon^{-1} \tag{4.7.13}$$

$$\check{Y}^{-1} \ll (Y')^{-1} \tag{4.7.14}$$

$$(\check{Y}Y')^{-1} \ll \frac{4\|s+2i\delta\|^2}{w^2\|s\|Y'} \tag{4.7.15}$$

$$\begin{aligned}\check{Y}^{-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{K^{2m}}{\|s+2i\delta\|^{4m}\check{Y}^{2m}} &\ll Y^{-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{K^{m}}{\|s+2i\delta\|^{2m}\check{Y}^{m}}\\ &= \left(\check{Y}-\frac{K}{\|s+2i\delta\|^2}\right)^{-1} \ll (Y')^{-1}.\end{aligned} \tag{4.7.16}$$

Les dues primeres desigualtats (4.7.12), (4.7.14) són clarament trivials, i la desigualtat (4.7.14) és aplicació de la propietat (5.1.10) a les variables τ i h successivament. Finalment per majorar aquesta sèrie procedim igual que al teorema 8. Ara tenim que si $\|s\| \geq 4\sqrt{12\check{B}}$

$$\eta^+(\tau-s-i\delta) \ll \frac{\varepsilon\check{N}_2}{\|s+2i\delta\|^2Y'} + \frac{2^8\varepsilon\beta\check{C}\log\varepsilon^{-1}}{\hat{w}\|s+2i\delta\|^2Y'} + \frac{2^7\varepsilon\beta\check{C}}{\check{w}^4\|s+2i\delta\|Y'}$$

I aquesta majorant implica l'enunciat del lema. □

Finalment provem el teorema 7. Definim

$$I = \int_{-c_3^{-1}\varepsilon^{-1}}^{c_3^{-1}\varepsilon^{-1}} \varepsilon^{-2}e^{it}\left(\check{H}^+ - \tilde{H}^+\right)(t_\gamma + \varepsilon^2\tilde{p}_1(t) - \varepsilon^{-1}T(\varepsilon^2\tilde{p}_2(t)), \varepsilon^4\tilde{p}_2(t), \hat{\delta})\,dt.$$

Per les propietats que han de verificar $\tilde{p}_{1,2}$:

$$I = \int_{-c_3^{-1}\varepsilon^{-1}}^{c_3^{-1}\varepsilon^{-1}} \varepsilon^{-2}e^{it}\left(\check{H}^+ - \tilde{H}^+\right)(t - i\hat{\delta} - ic_5 + \Phi_1(t), \Phi_2(t), \hat{\delta})\,dt,$$

on

$$|\Phi_1(t)| \leq \text{const}\varepsilon\log\varepsilon^{-1}, \quad |\Phi_2(t)| \leq \text{const}\varepsilon^4, \quad -c_3^{-1}\varepsilon^{-1} \leq t \leq c_3^{-1}\varepsilon^{-1}.$$

Podem estimar l'integrand de I usant el lema 14, i prenent $s = -t - ic_5 - \Phi_1(t), \tau = 0, h = \Phi_2(t)$, ja que $\check{H}^+ - \tilde{H}^+ = \xi^+$:

$$\begin{aligned}&\left|\left(\check{H}^+ - \tilde{H}^+\right)(-s - i\hat{\delta}, \Phi_2(t), \hat{\delta})\right|\\ &\qquad\leq \frac{\check{c}\varepsilon e^{-\hat{\delta}}\left(1 + \|s\|^{-2}\log(\|s+i\delta\|/\|s\|)\right)}{\|s+2i\delta\|^2(\check{w}\|s\|/2)(\check{w}\|s+2i\delta\|^{-2}/2 - \Phi_2(t))}\\ &\qquad\leq \frac{16\check{c}\varepsilon e^{-\hat{\delta}}\left(1 + 2(|t|+c_5)^{-2}\log\varepsilon^{-1}\right)}{\check{w}^2(|t|+c_5)}.\end{aligned} \tag{4.7.17}$$

D'aquesta manera,

$$\begin{aligned}|I| &\leq \frac{16\check{c}}{\varepsilon\check{w}^2}e^{-\hat{\delta}-L}\int_{-c_3^{-1}\varepsilon^{-1}}^{c_3^{-1}\varepsilon^{-1}}\left(\frac{1}{|t|+c_5}+\frac{2\log\varepsilon^{-1}}{(|t|+c_5)^3}\right)dt\\ &\leq \operatorname{const}\exp(-\pi\varepsilon^{-1}/2)\varepsilon^{-1}\log\varepsilon^{-1},\end{aligned} \tag{4.7.18}$$

i per tant el teorema queda provat.

5 Apèndix

5.1 Majorants

En aquesta secció descriurem les propietats elementals de les funcions majorants, així com algunes aplicacions a la resolució d'equacions diferencials. Aquestes propietats són bàsiques per a les proves de les seccions anteriors.

Definició 3. *Siguin $f(z)$, $g(z) : D \subset \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$, amb $z = (z_1, \ldots, z_m)$ dues funcions analítiques en un polidisc $D = D(w_1, \rho_1) \times \cdots \times D(w_m, \rho_m) \subset \mathbb{C}^m$ amb el següent desenvolupament en sèrie de potències:*

$$f(z) = \sum_\beta f_\beta z^\beta, \quad g(z) = \sum_\beta g_\beta z^\beta,$$

on

$$\beta = (|\beta_1, \ldots, \beta_m) \in \mathbb{Z}^m,\ \beta_j \geq 0,$$

són multi-indexs i $z^\beta = z_1^{\beta_1} \cdots z_m^{\beta_m}$. Direm que $g(z)$ és una funció majorant de $f(z)$ i ho denotarem per $f \ll g$ si $g_\beta \geq 0$ i

$$|f_\beta| \ll g_\beta.$$

En el cas que f i g siguin funcions de $\mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$, $n > 1$ direm que g majora f si totes les components de f són majorades per les corresponents components de g.

D'aquesta definició en resulta obvi per a funcions d'una variable que si el radi de convergència de g és R, el de f serà com a mínim R.

Les funcions majorants resulten útils en equacions diferencials a causa del següent teorema. Observem que la notació $g[z]$ indica que g és un element de l'anell de sèries formals $\mathbb{C}[[z]]$.

Teorema 10. *Siguin*

$$F(z, w) = \sum_{j=0}^\infty \sum_{k=0}^\infty f_{jk} z^j w^k,$$

$$G(z, w) = \sum_{j=0}^\infty \sum_{k=0}^\infty g_{jk} z^j w^k$$

amb G una majorant de F. Suposem que el sistema

$$W'(z) = G[z, W(z)], \qquad W(0) = 0 \tag{5.1.1}$$

té una solució

$$W(z) = \sum_{j=1}^{\infty} W_j z^j$$

convergent per a $|z| < r$. Sigui

$$w(z) = \sum_{j=1}^{\infty} w_j z^j \tag{5.1.2}$$

una solució formal del sistema

$$w'(z) = F[z, w(z)], \qquad w(0) = 0. \tag{5.1.3}$$

Aleshores

$$w(z) \ll W(z)$$

i per tant la sèrie (5.1.2) és absolutament per a $|z| < r$ i és l'única solució analítica a l'equació (5.1.3).

Demostració. Busquem una fórmula recurrent formal per als coeficients de w, dit en altres paraules, busquem els coeficients sense preocupar-nos de si la sèrie és absolutament convergent o no, de moment. Hem de resoldre terme a terme l'expressió

$$\sum_{j=1}^{\infty} j w_j z^{j-1} = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} F_{jk} z^j \left(\sum_{p=1}^{\infty} w_p z^p\right)^k .$$

Suposem que la solució és absolutament convergent, i per tant reordenem i multipliquem les sèries com si ho fossin fent servir la fórmula pel producte de sèries absolutament convergents de Cauchy i reordenant les sumes amb el teorema de Weierstrass. D'aquesta manera obtenim

$$\sum_{j=1}^{\infty} j w_j z^{j-1} = \sum_{j=0} m_j[F_{jk}, w_p] z^j.$$

Cal determinar doncs aquests coeficients m_n, que vindran donats com a sumes i productes finits dels coeficients F_{jk}, w_p. Observem que cada equació és del tipus

$$(n+1) w_{n+1} = m_n(F_j k, w_p) \tag{5.1.4}$$

i a la banda dreta $p \leq n$. Així cada coeficient de la solució queda determinat a partir dels de F i els anteriors i és possible doncs trobar una solució formal al problema.

Si efectuem aquest procediment al sistema (5.1.1), obtindrem exactament les mateixes expressions, però amb coeficients W_n, G_n, M_n en comptes de w_n, F_n, m_n. Llavors, és evident que la solució de (5.1.1) majora la solució del sistema (5.1.3), ja que a banda de ser positius, $|m_n| \leq M_n$ de manera evident. Per tant $w(z)$ és absolutament convergent per a $|z| < r$. Com que els coeficients w_n estan unívocament determinats per les relacions (5.1.4), $w(z)$ és l'única solució holomorfa en un entorn de $z = 0$.

□

Proposició 6. *Suposem que $f(z)$, $g(z)$ són analítiques respecte $z = z_1, \ldots, z_m$ en un cert domini que conté l'origen. Llavors la relació $\ll$ verifica les següents propietats*

(1) Si $f_1(z) \ll g_1(z)$ i $f_2(z) \ll g_2(z)$, aleshores $f_1 + f_2 \ll g_1 + g_2$ i $f_1 f_2 \ll g_1 g_2$.

(2) Siguin $f(z, \lambda)$, $g(z, \lambda) : \mathbb{C}^m \times I \to \mathbb{C}$, integrables respecte λ amb $I = [a, b]$. Suposem que per tot $\lambda \in I$ tenim $f(z, \lambda) \ll g(z, \lambda)$, aleshores

$$\int_a^b f(z, \lambda)\, d\lambda \ll \int_a^b g(z, \lambda)\, d\lambda \tag{5.1.5}$$

(3) Sigui $f(z)$ analítica en un obert contenint el domini $\{|z_1| \leq c_1, |z_2| \leq c_2, \ldots, |z_m| \leq c_m\}$ i tal que en aquest domini $|f| \leq M$. Aleshores

$$f \ll \frac{c_1 \cdots c_m M}{(c_1 - z_1) \cdots (c_m - z_m)}. \tag{5.1.6}$$

(4) Si $f(z) \ll g(z)$, aleshores

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} \ll \frac{\partial g}{\partial z_j}. \tag{5.1.7}$$

(5) Siguin $f(z_1, z_2), g(z_1, z_2) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ analítiques i suposem que $f(z_1, z_2) \ll W^{-m}$, $g(z_1, z_2) \ll W^{-l}$ on $W = (c' - z_1)(c'' - z_2)$. Aleshores el parèntesi de Poisson definit com $\{f, g\} = f_y g_x - f_x g_y$ es pot majorar,

$$\{f, g\} \ll \frac{2ml}{W^{1+m+l}}. \tag{5.1.8}$$

(6) Per qualsevol parell de constants a i b tals que $0 < a < b$, es verifica la relació (observem que aquí $z \in \mathbb{C}$

$$(a - z)^{-1}(b - z)^{-1} \ll (b - a)^{-1}(a - z)^{-1} \tag{5.1.9}$$

(7) *Siguin* $a_i > b_i > 0$, $1 \le i \le 2$. *Llavors les funcions*

$$\phi_1 = ((a_1 - z_1)(a_2 - z_2) - b_1 b_2)^{-1}\,,$$
$$\phi_2 = ((a_1 - b_1 - z_1)(a_2 - b_2 - z_2))^{-1}$$

verifiquen que

$$\phi_1(z) \ll \phi_2(z). \tag{5.1.10}$$

(8) *Suposem que* $f(z) \ll g(z)$. *Aleshores, per a qualsevol parell de nombres reals* r,s*:*

$$f(e^{ir}z_1, e^{is}z_2) \ll g(z_1, z_2). \tag{5.1.11}$$

(9) *Si* $0 < b_i \le a_i$, $1 \le i \le m$, *llavors es verifica*

$$\frac{a_1 \cdots a_m}{(a_1 - z_1)\cdots(a_m - z_m)} \ll \frac{b_1 \cdots b_m}{(b_1 - z_1)\cdots(b_m - z_m)}. \tag{5.1.12}$$

(10) *Siguin* $0 < a < b$ *i* $z \in \mathbb{C}$, *aleshores es verifica*

$$\frac{1}{(b-z)^2} \ll \frac{a}{b(b-a)(a-z)}. \tag{5.1.13}$$

Demostració. (1) És trivialment cert.

(2) Les funcions es poden expressar com $f(z,\lambda) = \sum_\beta f_\beta(\lambda) z^\beta$ $g(z,\lambda) = \sum_\beta f_\beta(\lambda) z^\beta$, de manera que (per tenir convergència dominada)

$$\int_a^b f(z,\lambda)\,d\lambda = \int_a^b \sum f(z,\lambda)\,d\lambda).$$

Ara la majorant és trivial.

(3) Usem la fórmula integral de Cauchy per trobar la següent acotació pels coeficients del desenvolupament,

$$|f_\beta| \le M c^{-\beta},$$

on $c^{-\beta} = c_1^{-\beta_1} \cdots c_m^{-\beta_m}$. Ara és un càlcul rutinari el comprovar

$$\frac{\partial^\beta}{\partial z^\beta} \frac{Mc'c''}{(c_1 - z_1)\cdots(c_m - z_m)}\bigg|_{z=0} = g_\beta = \frac{l!m!M}{c^\beta}$$

de manera que tenim $|f_{l,m}| \le g_{l,m}$.

(4) Aquesta propietat és trivial, simplement derivant la sèrie terme a terme.

(5) Per la propietat anterior i l'expressió pel parèntesi de Poisson, obtenim

$$\{f,g\} = \partial f/\partial z_2 \cdot \partial g/\partial z_1 - \partial g/\partial z_2 \cdot \partial f/\partial z_1 \ll 2mlW^{-(1+m+l)},$$

i ara per majorar l'expressió només hem de fer servir la propietat (1).

(6) Considerem la següent identitat:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(b-z)(a-z)} &= \frac{1}{(b-a)(a-z)} - \frac{1}{(b-a)(b-z)}\\ &= \frac{1}{b-a}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{a^{j+1}} - \frac{1}{b^{j+1}}\right) z^j,\end{aligned}$$

observem per acabar que $\frac{1}{a^{j+1}} - \frac{1}{b^{j+1}} \leq \frac{1}{a^{j+1}}$ per les condicions de l'enunciat.

(7) És fàcil comprovar que tots els coeficients del desenvolupament de Taylor de ϕ_1 i ϕ_2 són positius de manera que obtenim l'afirmació de l'enunciat de l'expressió:

$$\phi_2 = \phi_1 + \left(b_1(a_1 - b_1 - z_1)^{-1} + b_2(a_2 - b_2 - z_2)^{-1}\right)\phi_1 \gg 0.$$

(8) Evidentment, $|e^{ir}| = |e^{is}| = 1$, per tant a l'hora de prendre valors absoluts no afecta.

(9) De l'expressió,

$$\frac{a_1}{a_1 - z_1}\cdots\frac{a_m}{a_m - z_m} = \sum_i^{\infty}\left(\frac{z_1}{a_1}\right)^n \cdots \sum_i^{\infty}\left(\frac{z_m}{a_m}\right)^n,$$

resulta evident que tots els coeficients han de ser menors que els de la corresponent expressió amb b_j.

(10) Aplicant les propietats (5.1.12) i (5.1.9) consecutivament obtenim

$$\frac{1}{(b-z)^2} = \frac{b}{b(b-z)(b-z)} \ll \frac{a}{b(a-z)(b-z)} \ll \frac{a}{b(b-a)(a-z)}. \quad (5.1.14)$$

□

Lema 15. *Siguin les variables τ i h canòniques conjugades, suposem que es verifiquen per certs a, v positius les següents relacions per les funcions $\Phi^{\pm}(\tau, h)$:*

$$\{\Phi^+, \Phi^-\} = 0, \qquad \Phi^{\pm}(\tau - s, h) \ll a|s|^{-3}X^{-1}(s),$$

on

$$X(s) = (2v|s| - \tau)(v|s|^{-2} - h)$$

on $s \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}s \geq u > 0$. Aleshores per a qualssevol $\lambda > 0$ i $s \in \mathbb{C}$ tals que $\mathrm{Im}s - \lambda \geq u$ es compleix:

$$\{\Phi^+(\tau - s + i\lambda, h), \Phi^-(\tau - s - i\lambda, h)\} \ll \frac{4\lambda v^{-1}a^2}{|s+i\lambda|^3|s-i\lambda|^4 X_0^3(s-i\lambda, 2\lambda)} \tag{5.1.15}$$

on $X_0(\alpha, \beta) = (v|\alpha| - \tau)(v|\alpha + i\beta|^{-2} - h)$

Demostració. Sigui $\Phi_*^+ = \Phi^+(\tau-s+i\lambda, h) - \Phi^+(\tau-s-i\lambda, h)$, podem llavors majorar:

$$\Phi_*^+ = \int_{-\lambda}^{\lambda} \Phi_\tau^+(\tau - s + i\zeta, h)\, d\zeta \ll$$
$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{a}{|s-i\zeta|^3(2v|s-i\zeta| - \tau)^2(v|s-i\zeta|^{-2} - h)}\, d\zeta$$
$$\ll \frac{2\lambda a}{|s-i\zeta|^3(2v|s-i\zeta| - \tau)^2(v|s-i\zeta|^{-2} - h)}$$

on obtenim la primera majorant de la propietat (5.1.7), derivant l'expressió de l'enunciat respecte τ, i la segona simplement de prendre l'amplitud de l'interval, i el valor màxim ,que tenim en un extrem qualsevol. Per (5.1.8) i si recordem que $X_0(\alpha, \beta) = (v|\alpha| - \tau)(v|\alpha + i\beta|^{-2} - h)$, veiem que l'expressió anterior és majorada per:

$$\frac{2\lambda a}{|s-i\lambda|^3(2v|s-i\lambda| - \tau)X_0(s-i\lambda, 2\lambda)} \ll \frac{2\lambda a v^{-1}}{|s-i\lambda|^4 X_0(s-i\lambda, 2\lambda)}$$

On la segona majorant s'obté de (5.1.9).

Ara, simplement

$$\{\Phi^+(\tau - s + i\lambda, h), \Phi^-(\tau - s - i\lambda, h)\} = \{\Phi_*^+, \Phi^-\}$$

i podem aplicar l'apartat (2), la majorant obtinguda anteriorment i la majorant de l'enunciat per a Φ^-. □

5.2 Resultats auxiliars

5.3 Un lema sobre els coeficients de Fourier

Enunciarem aquí un resultat molt conegut per fitar coeficients de Fourier.

Lema 16. *Sigui $\varphi(z)$ una funció analítica i 2π-periòdica real en la variable $z \in \mathbb{C}$, i $|\varphi(z)| \leq N$ per $z \in \Sigma_\rho$, on*

$$\Sigma_\rho = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z \leq \rho\}.$$

Si $\varphi(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi^k e^{ikz}$ és el seu desenvolupament de Fourier, llavors els coeficients d'aquest desenvolupament verifiquen

$$\left|\varphi^k\right| \leq e^{-|k|\rho} N, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

5.4 Lemes auxiliars

Lema 17. *Suposem que* $z \in \mathbb{C}$ *i* $\mu \in \mathbb{R}$ *verifiquen* $\operatorname{Im} z > 0$, $\mu \geq 0$. *Aleshores per a tot* $n \geq 0$, $n \in \mathbb{Z}$:

$$\int_0^\mu \frac{\lambda^n \, d\lambda}{\|z + i\lambda\|^{n+2}} = \frac{\mu^{n+1}}{(n+1)\|z\|\|z + i\mu\|^{n+1}}$$

Demostració. És immediat per la igualtat

$$\int_0^\mu \frac{\lambda \, d\lambda}{(x+\lambda)^{n+2}} = \frac{\mu^{n+1}}{(n+1)x(x+\mu)^{n+1}}, \quad x = |\operatorname{Re} z\,| + \operatorname{Im} z\,,$$

que es prova trivialment per inducció.

□

Lema 18. *Existeixen constants positives* $\check{N}_1$, $\check{N}_2$, $\check{w}$ *tals que per a qualsevol* $s \in \mathbb{C}$, $1 \leq \operatorname{Im} s \leq (\pi - c_1)/\varepsilon$, $|\operatorname{Re} s\,| \leq 2c_3^{-1}/\varepsilon$ *les funcions* $\check{H}\pm$ *definides per* $\check{H}^\pm(\tilde{\tau}, \tilde{h}, \delta) = \varepsilon^2 H^\pm(x, y, \delta)$ *verifiquen les majorants*

$$\check{H}^\pm(\tilde{\tau} - s, \tilde{h}, 0) \ll \check{N}_1 \|s\|^{-3} \check{Y}_0^{-1}(s), \tag{5.4.1}$$

$$\check{H}^\pm(\tilde{\tau} - s, \tilde{h}, 0) - \tilde{H}^\pm(\tilde{\tau} - s, \tilde{h}, 0) \ll \varepsilon \check{N}_2 \|s\|^2 \check{Y}_0^{-1}(s), \tag{5.4.2}$$

on

$$\check{Y}_0(s) = (4\check{w}\|s\| - \tilde{\tau})(2\check{w}\|s\|^{-2} - \tilde{h}).$$

Demostració. Recordem que podem escriure

$$\check{H}^\pm(\tilde{\tau}, \tilde{h}, 0) = \tilde{H}^\pm(\tilde{\tau}, \tilde{h}, 0) + \varepsilon\tilde{\tau}^{-1} F^\pm(\varepsilon\tilde{\tau}, \tilde{h}\tilde{\tau}^2)$$

per (2.3.12). Mitjançant aquesta expressió, és evident que es verifiquen (5.4.2) i 17 per a

$$s \in D' = \{s \leq \operatorname{Im} s \leq \lambda^{-1}/\varepsilon, \, |\operatorname{Re} s\,| \leq \lambda^{-1}/\varepsilon\},$$

ja que recordem que les funcions $F^\pm$ són analítiques en (0,0).

Per qualsevol

$$s \in D'' = \{1 \leq \operatorname{Im} s \leq (\pi - c_1)/\varepsilon, \, |\operatorname{Re} s\,| \leq 2c_3^{-1}/\varepsilon\} \backslash D'$$

les funcions $\tilde{H}^\pm(\tilde{\tau} - s, \tilde{h}, 0)$ i $\varepsilon(\tilde{\tau} - s)^{-1} F^\pm(\varepsilon(\tilde{\tau} - s), \tilde{h}(\tilde{\tau} - s)^2)$ són analítiques en el domini $D''' = \{|\tilde{\tau}| \leq c'/\varepsilon, \, |\tilde{h}| \leq c''\varepsilon^2\}$. A més el seu mòdul és acotat en D''' per $M\varepsilon^{-2}$ on M és independent de $s \in D'''$. Com que podem determinar una constant $w > 0$ tal que $c'/\varepsilon \geq 4w\|s\|$, $c''\varepsilon^2 \geq 2w\|s\|^{-2}$, $s \in D''$, el lema queda demostrat. □

Lema 19. *Considerem les funcions $\hat{H}_*^\pm$ definides a (2.3.21) i*

$$s \in \{c_3 \le |\mathrm{Re}\, s\,| \le c_3^{-1}, |\mathrm{Im}\, s\,| \le \pi/2\}$$

Llavors existeixen κ_0 i N positius tals que

$$\hat{H}_*^\pm(\tau_* - s, h) \ll N\left((\kappa_0 - \tau_*)(\kappa_0 - h)\right)^{-1}.$$

Demostració. Sigui $\nu_*(\tau_*, h) = \nu(x, y)$. Si $0 < \kappa_0 < c_3$ és prou petit, les funcions

$$\hat{H}^\pm(\tau_* - s, h) = B_+^\pm \nu^2(\tau_* - s, h) + B_-^\pm \nu^{-2}(\tau_* - s, h)$$

seràn analítiques en el domini $\{|\tau_*| \le \kappa_0,\ |h| \le \kappa_0\}$ per a qualsevol s del domini de l'enunciat, ja que les singularitats d'$y(\tau_*, h)$ i $\nu(\tau_*, h)$ per $|h|$ prou petit es troben properes a $(\tau_*, h) = (i\pi/2 + i\pi k, 0)$ o bé en el domini $|\mathrm{Re}\,\tau_*\,| > 2c_3^{-1}$, de manera que fent servir la propietat (5.1.6) demostrem el lema. □

Referències

[AKN06] Vladimir I. Arnold, Valery V. Kozlov, and Anatoly I. Neishtadt. *Mathematical aspects of classical and celestial mechanics*, volume 3 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2006. [Dynamical systems. III], Translated from the Russian original by E. Khukhro.

[AP90] D. K. Arrowsmith and C. M. Place. *An introduction to dynamical systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[Arn64] V. I. Arnol′d. Instability of dynamical systems with many degrees of freedom. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 156:9–12, 1964.

[Arn84] V. Arnol′d. *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*. "Mir", Moscow, 1984. Translated from the Russian by Djilali Embarek, Reprint of the 1980 edition.

[BF04] Inmaculada Baldomá and Ernest Fontich. Exponentially small splitting of invariant manifolds of parabolic points. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 167(792):x–83, 2004.

[Chi06] Carmen Chicone. *Ordinary differential equations with applications*, volume 34 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2006.

[DGJS97] Amadeu Delshams, Vassili Gelfreich, Àngel Jorba, and Tere M. Seara. Lower and upper bounds for the splitting of separatrices of the pendulum under a fast quasiperiodic forcing. *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.*, 3:1–10 (electronic), 1997.

[DJSG99] Amadeu Delshams, Àngel Jorba, Tere M. Seara, and Vassili Gelfreich. Splitting of separatrices for (fast) quasiperiodic forcing. In *Hamiltonian systems with three or more degrees of freedom (S'Agaró, 1995)*, volume 533 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 367–371. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.

[Fon93] E. Fontich. Exponentially small upper bounds for the splitting of separatrices for high frequency periodic perturbations. *Nonlinear Anal.*, 20(6):733–744, 1993.

[Fon95] E. Fontich. Rapidly forced planar vector fields and splitting of separatrices. *J. Differential Equations*, 119(2):310–335, 1995.

[FS90a] E. Fontich and C. Simó. Invariant manifolds for near identity differentiable maps and splitting of separatrices. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 10(2):319–346, 1990.

[FS90b] E. Fontich and C. Simó. The splitting of separatrices for analytic diffeomorphisms. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 10(2):295–318, 1990.

[Gel97] V. G. Gelfreich. Reference systems for splittings of separatrices. *Nonlinearity*, 10(1):175–193, 1997.

[Hil76] Einar Hille. *Ordinary differential equations in the complex domain.* Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1976. Pure and Applied Mathematics.

[HMS88] Philip Holmes, Jerrold Marsden, and Jürgen Scheurle. Exponentially small splittings of separatrices with applications to KAM theory and degenerate bifurcations. In *Hamiltonian dynamical systems (Boulder, CO, 1987)*, volume 81 of *Contemp. Math.*, pages 213–244. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.

[Laz03] V. F. Lazutkin. Splitting of separatrices for the Chirikov standard map. *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)*, 300(Teor. Predst. Din. Sist. Spets. Vyp. 8):25–55, 285, 2003.

[LM88] P. Lochak and C. Meunier. *Multiphase averaging for classical systems*, volume 72 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1988. With applications to adiabatic theorems, Translated from the French by H. S. Dumas.

[Neĭ84] A. I. Neĭshtadt. The separation of motions in systems with rapidly rotating phase. *Prikl. Mat. Mekh.*, 48(2):197–204, 1984.

[PdM82] Jacob Palis, Jr. and Welington de Melo. *Geometric theory of dynamical systems*. Springer-Verlag, New York, 1982. An introduction, Translated from the Portuguese by A. K. Manning.

[PT97] Andrei V. Pronin and Dmitry V. Treschev. On the inclusion of analytic maps into analytic flows. *Regul. Khaoticheskaya Din.*, 2(2):14–24, 1997.

[PT00] A. V. Pronin and D. V. Treschev. Continuous averaging in multi-frequency slow-fast systems. *Regul. Chaotic Dyn.*, 5(2):157–170, 2000.

[RS96] Jean-Pierre Ramis and Reinhard Schäfke. Gevrey separation of fast and slow variables. *Nonlinearity*, 9(2):353–384, 1996.

[Sim94] Carles Simó. Averaging under fast quasiperiodic forcing. In *Hamiltonian mechanics (Torún, 1993)*, volume 331 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys.*, pages 13–34. Plenum, New York, 1994.

[SMH91] Jürgen Scheurle, Jerrold E. Marsden, and Philip Holmes. Exponentially small estimates for separatrix splittings. In *Asymptotics beyond all orders (La Jolla, CA, 1991)*, volume 284 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys.*, pages 187–195. Plenum, New York, 1991.

[SV85] J. A. Sanders and F. Verhulst. *Averaging methods in nonlinear dynamical systems*, volume 59 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1985.

[Tre96] Dmitry V. Treschev. An averaging method for Hamiltonian systems, exponentially close to integrable ones. *Chaos*, 6(1):6–14, 1996.

[Tre97a] D. V. Treschev. The method of continuous averaging in the problem of separation of fast and slow motions. *Regul. Chaotic Dyn.*, 2(3):9–20, 1997.

[Tre97b] Dmitry V. Treschev. Splitting of separatrices for a pendulum with rapidly oscillating suspension point. *Russian J. Math. Phys.*, 5(1):63–98 (1998), 1997.

[Tre99] Dmitry V. Treschev. Continuous averaging in Hamiltonian systems. In *Hamiltonian systems with three or more degrees of freedom (S'Agaró, 1995)*, volume 533 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 244–253. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.

[Tre02] D. Treschev. Continuous averaging in dynamical systems. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol.*

III (Beijing, 2002), pages 383–392, Beijing, 2002. Higher Ed. Press.