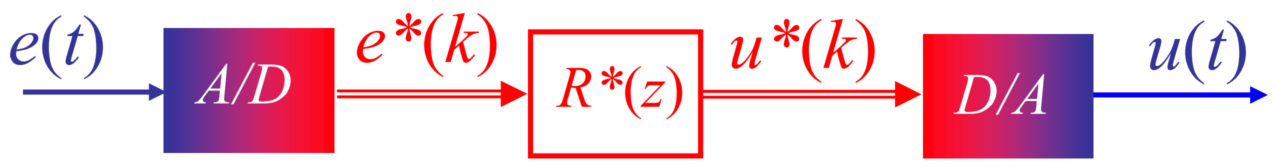
Richiami di analisi armonica

Schema della lezione

1. Introduzione
2. Serie di Fourier
3. Sviluppo di Fourier
4. Trasformazione di Fourier (di segnali a tempo continuo)
5. Trasformazione di Fourier (di segnali a tempo discreto)
6. Schema riassuntivo
7. Richiamo da IMAD
8. Matlab

1. Introduzione

Nell'approccio a tempo continuo alla progettazione dei sistemi di controllo digitale è fondamentale poter descrivere il sistema composto dalla serie di convertitore A/D, regolatore digitale e convertitore D/A come un unico sistema a tempo continuo.



A tal scopo è necessario descrivere accuratamente le relazioni definite dai **blocchi di conversione**.

Per comprendere i legami che intercorrono tra i segnali a tempo continuo e i corrispondenti segnali campionati si utilizzerà la trasformazione di Fourier.

Notazione

t tempo continuo $t \in \Re$

k tempo discreto $k \in Z$

T periodo a tempo continuo $T \in \Re^{+}$

N periodo a tempo discreto $N \in Z^{+}$

ω frequenza continua $\omega \in \Re$

n indice di armonica $n \in Z$

2. Serie di Fourier

$f(t) \qquad t \in \Re$

$f(t+T) = f(t) \ \forall t$

Segnale a tempo continuo periodico di periodo T

È possibile associare a f la seguente sequenza di coefficienti (complessi):

$$\boxed{F(n) = \frac{1}{T}\int_T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt}$$

per $n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

dove $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ è la pulsazione della funzione f

Nota 1

Gli scalari $F(n)$ si dicono **coefficienti di Fourier di** f.

Nota 2

La successione $\{F(n)\}_{n=\ldots,-1,0,1,\ldots}$ si dice **spettro di** f.

La relazione che fornisce lo spettro di f è invertibile:

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n) e^{jn\omega_0 t}}$$

Questa relazione si dice **serie di Fourier di *f***.

Nota 3

Se $f(t)$ è reale allora i coefficienti di Fourier godono della seguente proprietà:

$$F(-n) = \overline{F}(n)$$

per cui la serie di Fourier si può scrivere nella seguente forma:

$$f(t) = F(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[F(n) e^{jn\omega_0 t} + \overline{F}(n) e^{-jn\omega_0 t} \right]$$

Nota 4

Sempre nell'ipotesi che $f(t)$ sia reale, sfruttando l'espressione precedente, la serie di Fourier può essere espressa in forma trigonometrica:

$$f(t) = F(0) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} |F(n)| \cos((n\omega_0)t + \arg F(n))$$

Un segnale sviluppabile in serie di Fourier può essere quindi visto come la somma di una costante $F(0)$, la **componente a pulsazione nulla (o continua)**, e di una infinità numerabile di componenti cosinusoidali dette **armoniche**.

La componente con pulsazione ω_0 si dice **armonica fondamentale**.
La componente con pulsazione $n\omega_0$ si dice **armonica n-esima**.

$\{|F(n)|\}_{n=1,2,\ldots}$ Si dice **spettro di ampiezza** di f. I suoi elementi rappresentano il peso di ciascuna armonica nel segnale.

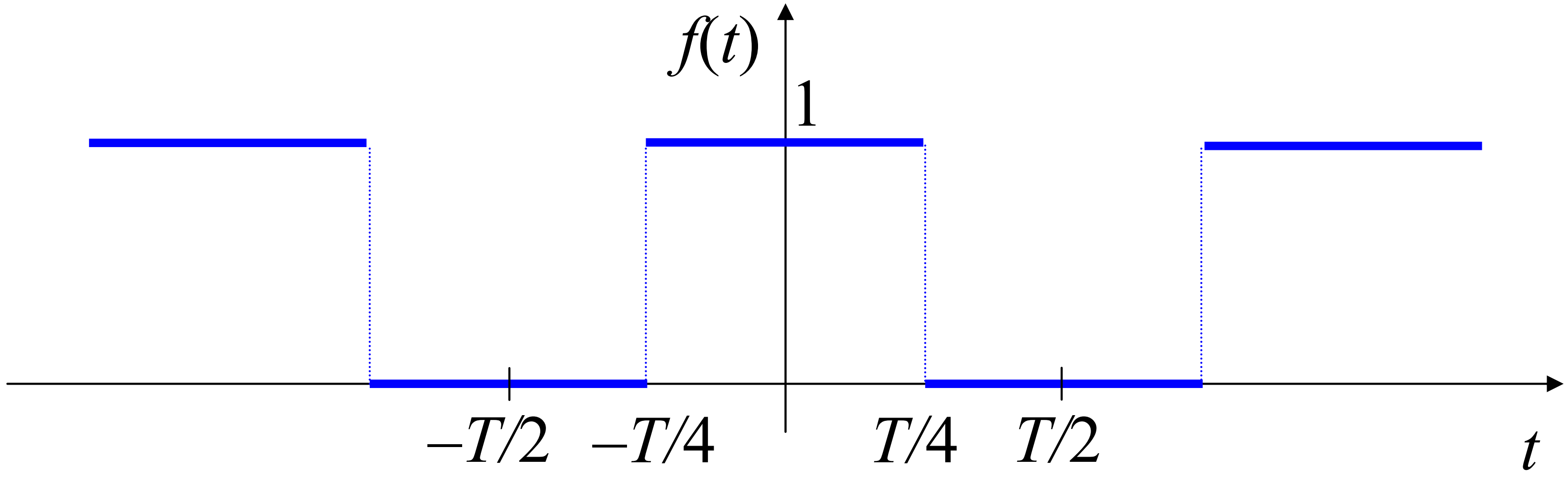
La **pulsazione minima** $\omega_{min} = n_{min}\omega_0$ di un segnale è quella corrispondente al minimo valore di n tale per cui $F(n) \neq 0$

La **pulsazione massima** $\omega_{max} = n_{max}\omega_0$ di un segnale è quella corrispondente all'estremo superiore dei valori di n tale per cui $F(n) \neq 0$

Se $\omega_{max} < \infty$ il segnale si dice **a banda limitata**.

Esempio

Serie di Fourier dell'onda quadra



Segnale (a tempo continuo) periodico di periodo T

$$f(t)=\begin{cases}0\,, & -T/2 \le t < -T/4 \\ 1\,, & -T/4 \le t < T/4 \\ 0\,, & T/4 \le t < T/2\end{cases}$$

$$\text{pulsazione } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

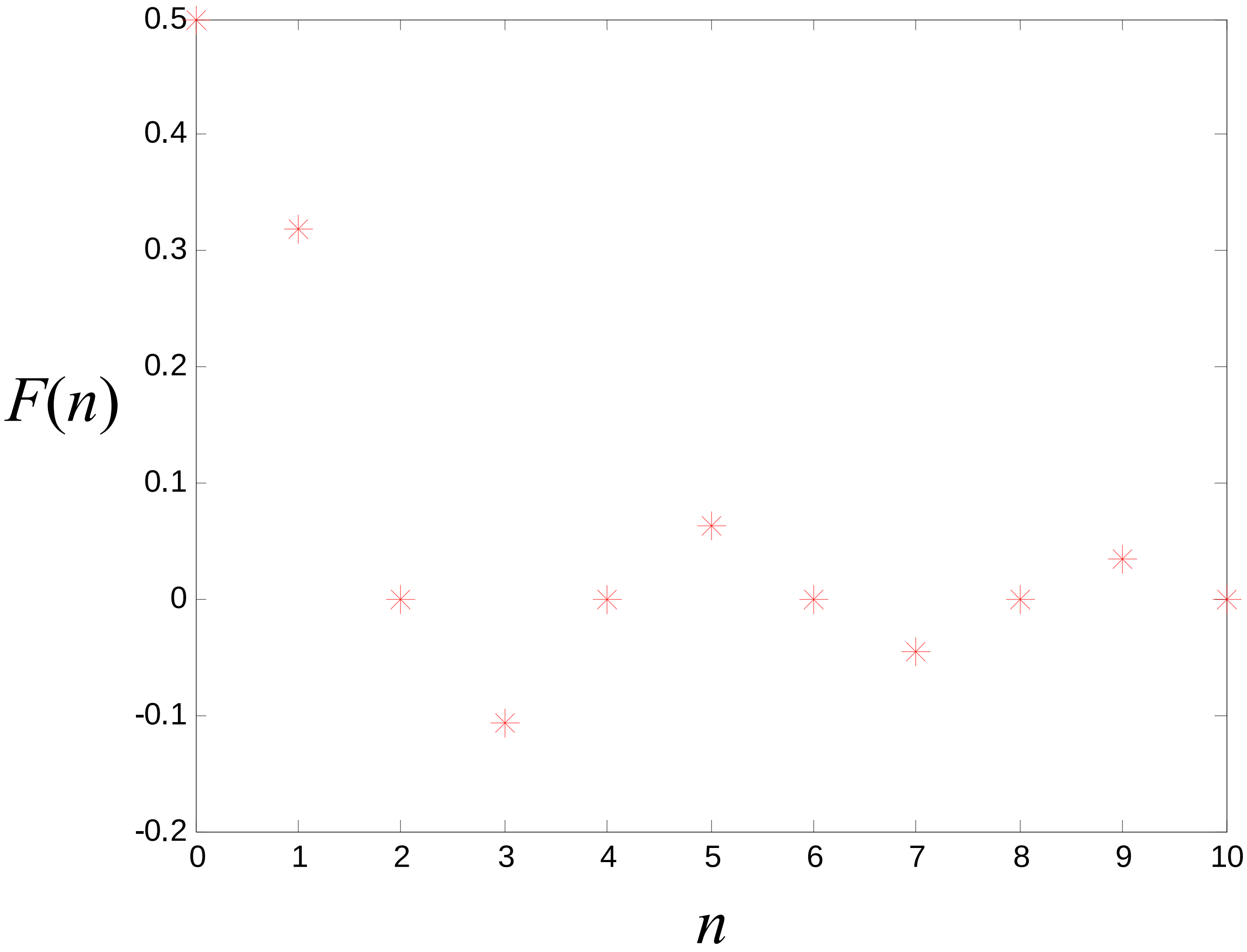
$$F(n)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}\int_{-T/4}^{T/4} e^{-jn\omega_0 t}dt \qquad \text{per } n=\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots$$

$$\text{con } \omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

$$F(n)=\frac{1}{T}\int_{-T/4}^{T/4} e^{-jn\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}\left[\frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0}\right]_{-T/4}^{T/4}=\frac{e^{-\frac{jn\pi}{2}}-e^{\frac{jn\pi}{2}}}{-jn2\pi}=\frac{1}{2}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}}$$

$$\text{per } n=\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots$$

per $n = 0, 1, 2, \ldots$



Pulsazione
armonica fondamentale $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$

Nota 1

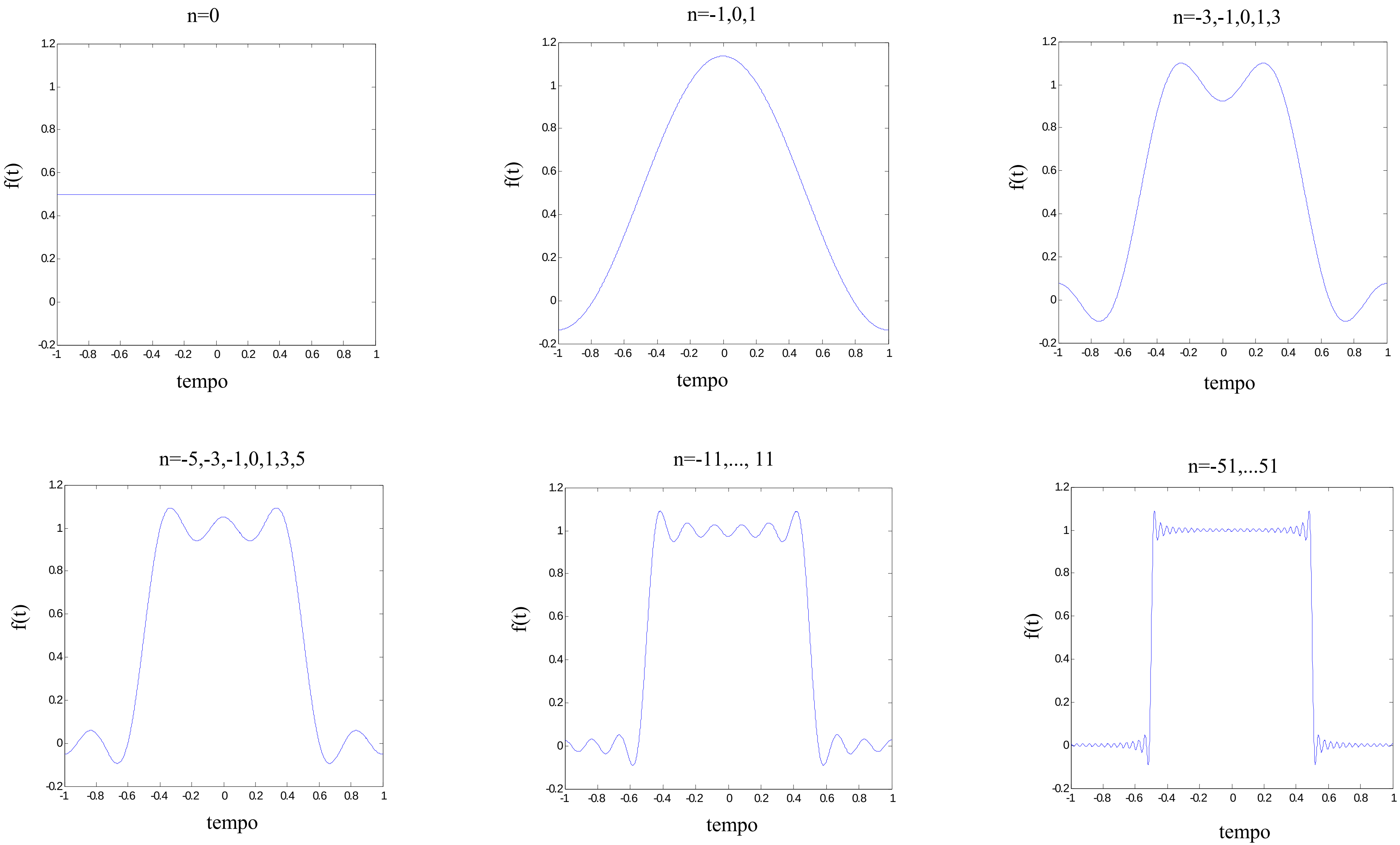
Non è un segnale a banda limitata, cioè contiene tutte le armoniche multiple intere della fondamentale.

Il peso delle armoniche diminuisce all'aumentare di n, quindi le armoniche in alta frequenza "contano meno".

Nota 2

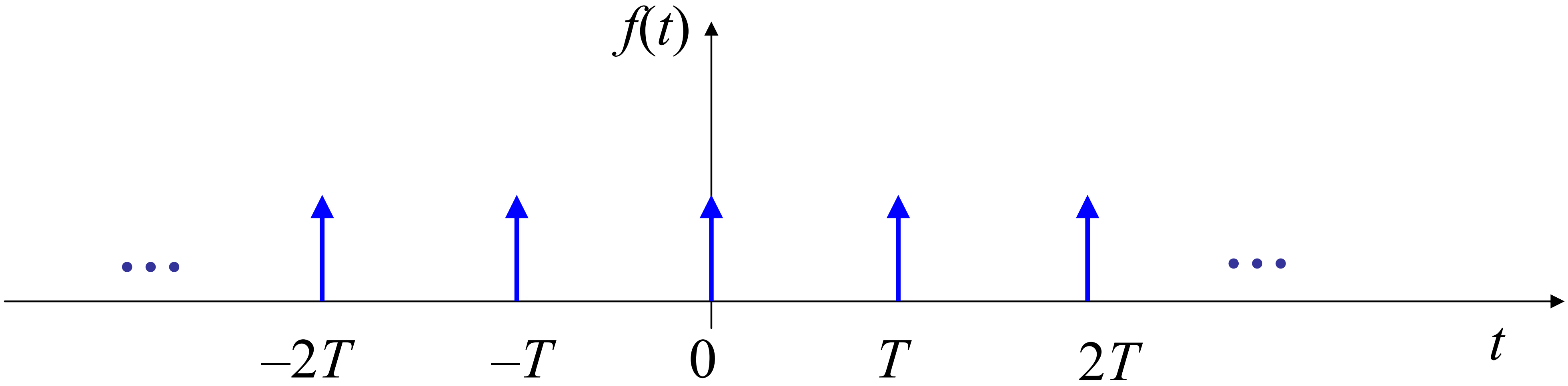
Si osservi che $F(0)=0.5$, cioè la **componente a pulsazione nulla (o continua)** è uguale al valor medio del segnale.

Si fissi T=2 e si provi a sommare gradualmente le armoniche (solo su un periodo; si osservi che le armoniche pari sono nulle)



Esempio

Serie di Fourier del treno di impulsi



Segnale (a tempo continuo) periodico di periodo T

$$f(t) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \mathrm{imp}(t - hT)$$

$$F(n) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \mathrm{imp}(t - hT) e^{-jn\omega_0 t} dt = \qquad \text{per } n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$$

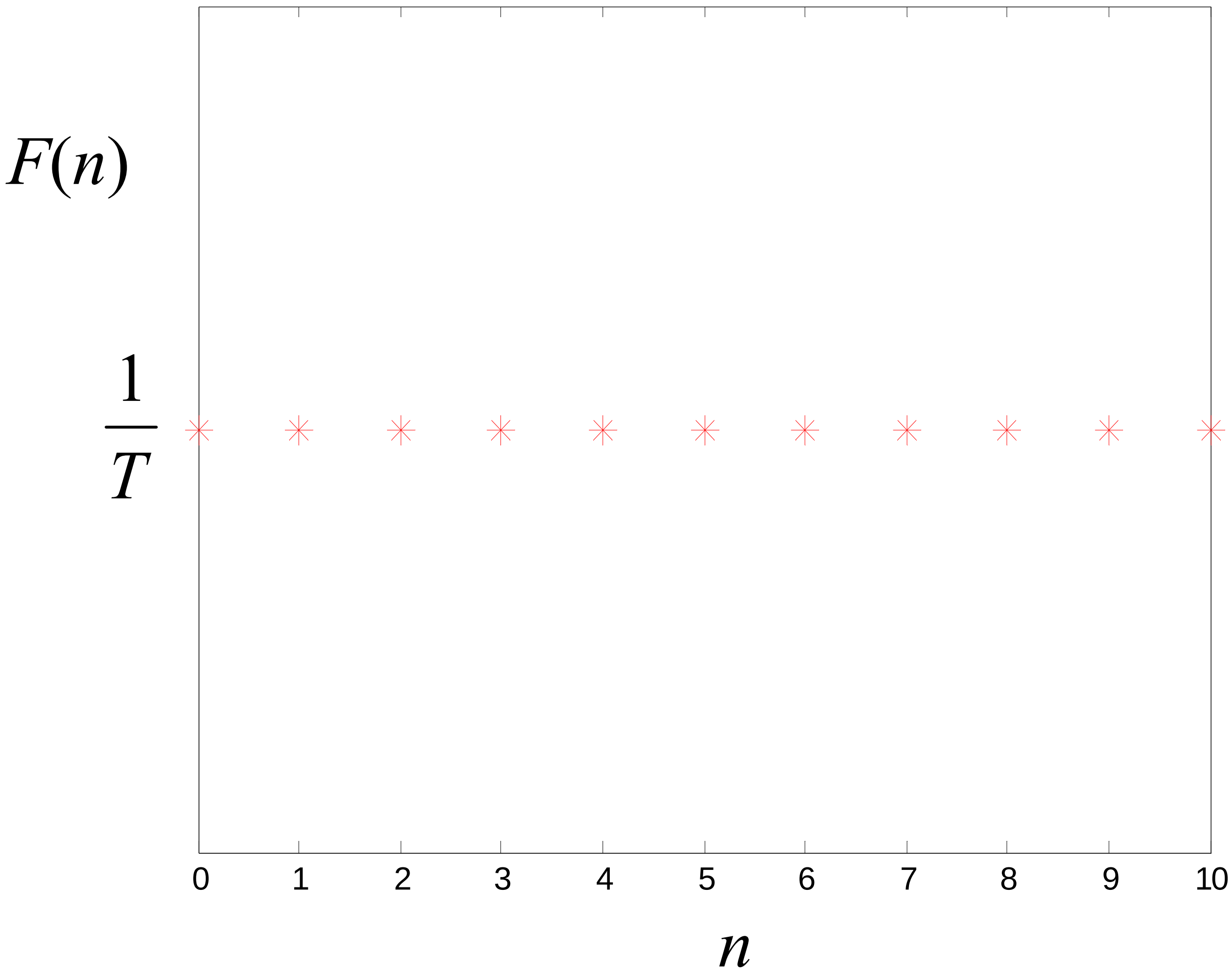
nell'intervallo $\left[-T/2, T/2\right]$ c'è solo il termine corrispondente a h=0

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{imp}(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Ricordando che $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \mathrm{imp}(x - x_0) dx = g(x_0)$ si ha

$$F(n) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{imp}(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} e^{-jn\omega_0 0} = \frac{1}{T}$$

per $n = 0,1,2,\ldots$



Nota 1

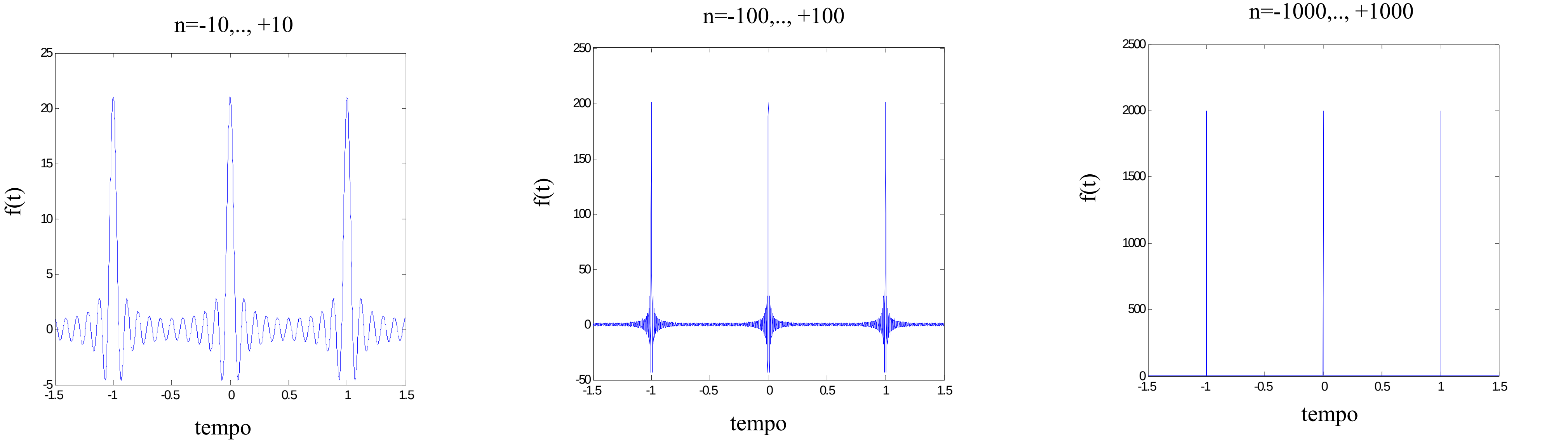
Il treno di impulsi può essere quindi rappresentato mediante la sua serie di Fourier:

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn\omega_0 t}$$

Nota 2

Non è un segnale a banda limitata.
Non solo: essendo il suo spettro costante, tutte le armoniche hanno la stessa importanza.

Come prima, si fissi T=1 e si provi a sommare gradualmente le armoniche



Conclusione (serie di Fourier)

$$f(t) \longrightarrow F(n) = \frac{1}{T}\int_T f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt \qquad n = \ldots,-1,0,1,\ldots$$

Segnale
a tempo continuo
periodico (T)

Sequenza
(a frequenza) discreta

$$F(n) \longrightarrow f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n)e^{jn\omega_0 t}$$

Serie di Fourier

Sequenza
(a frequenza) discreta

Segnale
a tempo continuo
periodico (T)

3. Sviluppo di Fourier

$f(k) \quad k \in Z$

$f(k+N) = f(k) \ \forall k$

Segnale a tempo discreto periodico di periodo N

È possibile associare a f la seguente sequenza di coefficienti (complessi):

$$\boxed{F(n) = \frac{1}{N}\sum_{N} f(k) e^{-jn\omega_0 k}}$$

per $n = \dots,-2,-1,0,1,2,\dots$

dove $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{N}$ è la pulsazione della funzione f

Nota 1

Gli scalari $F(n)$ si dicono **coefficienti di Fourier di** f.

Nota 2

La successione $\{F(n)\}_{n=\ldots,-1,0,1,\ldots}$ si dice **spettro di** f.

Nota 3

La funzione $F(n)$ è periodica di periodo N in quanto

$$e^{-j(n+N)\omega_0 k} = e^{-j(n+N)\frac{2\pi}{N}k} = e^{-jn\frac{2\pi}{N}k} e^{-j2\pi k} = e^{-jn\frac{2\pi}{N}k} = e^{-jn\omega_0 k}$$

La relazione che fornisce lo spettro di f è invertibile:

$$\boxed{f(k) = \sum_N F(n) e^{jn\omega_0 k}}$$

Questa relazione si dice **sviluppo di Fourier di f**.

Nota 4

Se $f(k)$ è reale allora i coefficienti di Fourier godono della seguente proprietà:

$$F(-n) = \overline{F}(n)$$

da cui risulta che per definire lo spettro bastano i valori di $F(n)$ per $0 \le n \le \hat{N} - 1$

dove $\hat{N}$ è il più piccolo intero maggiore o uguale di $\frac{N}{2}$

Nota 4

Sempre nell'ipotesi che $f(k)$ sia reale, sfruttando l'espressione precedente, lo sviluppo di Fourier può essere espressa in forma trigonometrica:

$$f(k) = F(0) + 2\sum_{n=1}^{\hat{N}-1} |F(n)| \cos((n\omega_0)k + \arg F(n))$$

Un segnale dotato di sviluppo di Fourier può essere quindi visto come la somma di una costante $F(0)$, la **componente a pulsazione nulla (o continua)**, e di $\hat{N}-1$ componenti cosinusoidali dette **armoniche**.

La componente con pulsazione ω_0 si dice **armonica fondamentale**. La componente con pulsazione $n\ \omega_0$ si dice **armonica n-esima**.

$\{|F(n)|\}_{n=1,2,...}$ Si dice **spettro di ampiezza** di f. I suoi elementi rappresentano il peso di ciascuna armonica nel segnale.

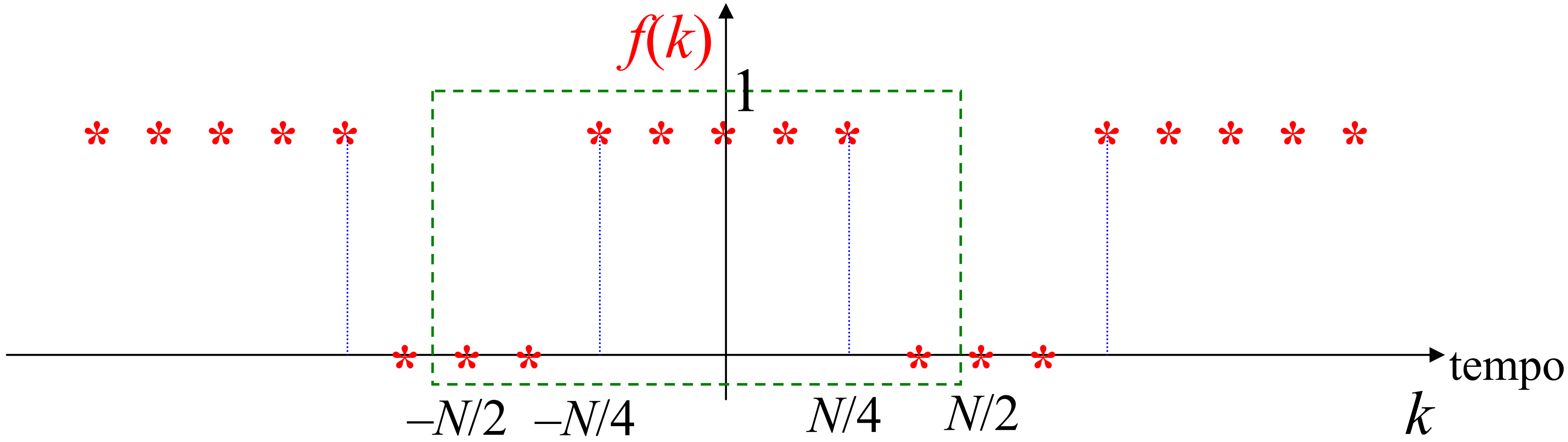
La **pulsazione minima** $\omega_{\min} = k_{\min}\omega_0$ di un segnale è quella corrispondente al minimo valore di n tale per cui $F(n) \neq 0$

La **pulsazione massima** $\omega_{\max} = k_{\max}\omega_0$ di un segnale è quella corrispondente all'estremo superiore dei valori di n tale per cui $F(n) \neq 0$

Se $\omega_{\max} < \infty$ il segnale si dice **a banda limitata**.

Esempio

Sviluppo di Fourier dell'onda quadra discreta



Segnale (a tempo discreto) periodico di periodo N

$$f(k)=\begin{cases}0\,, & -N/2 \le k < -N/4 \\ 1\,, & -N/4 \le k \le N/4 \\ 0\,, & N/4 < k < N/2\end{cases}$$

pulsazione $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{N}$

$$F(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=-N/2}^{N/2} f(k)e^{-jn\omega_0 k}=\frac{1}{N}\sum_{k=-N/4}^{N/4} e^{-jn\omega_0 k}=\frac{1}{N}\sum_{k=-N/4}^{N/4} e^{-j\frac{n}{N}2\pi k}$$

Quando <u>*n* è nullo o multiplo di *N*</u> si ha:

$$F(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=-N/4}^{N/4} e^{-j\frac{n}{N}2\pi k}=\frac{1}{N}\sum_{k=-N/4}^{N/4} 1=\frac{1+N/2}{N}$$

Quando <u>n non è multiplo di N</u> è utile sapere che:

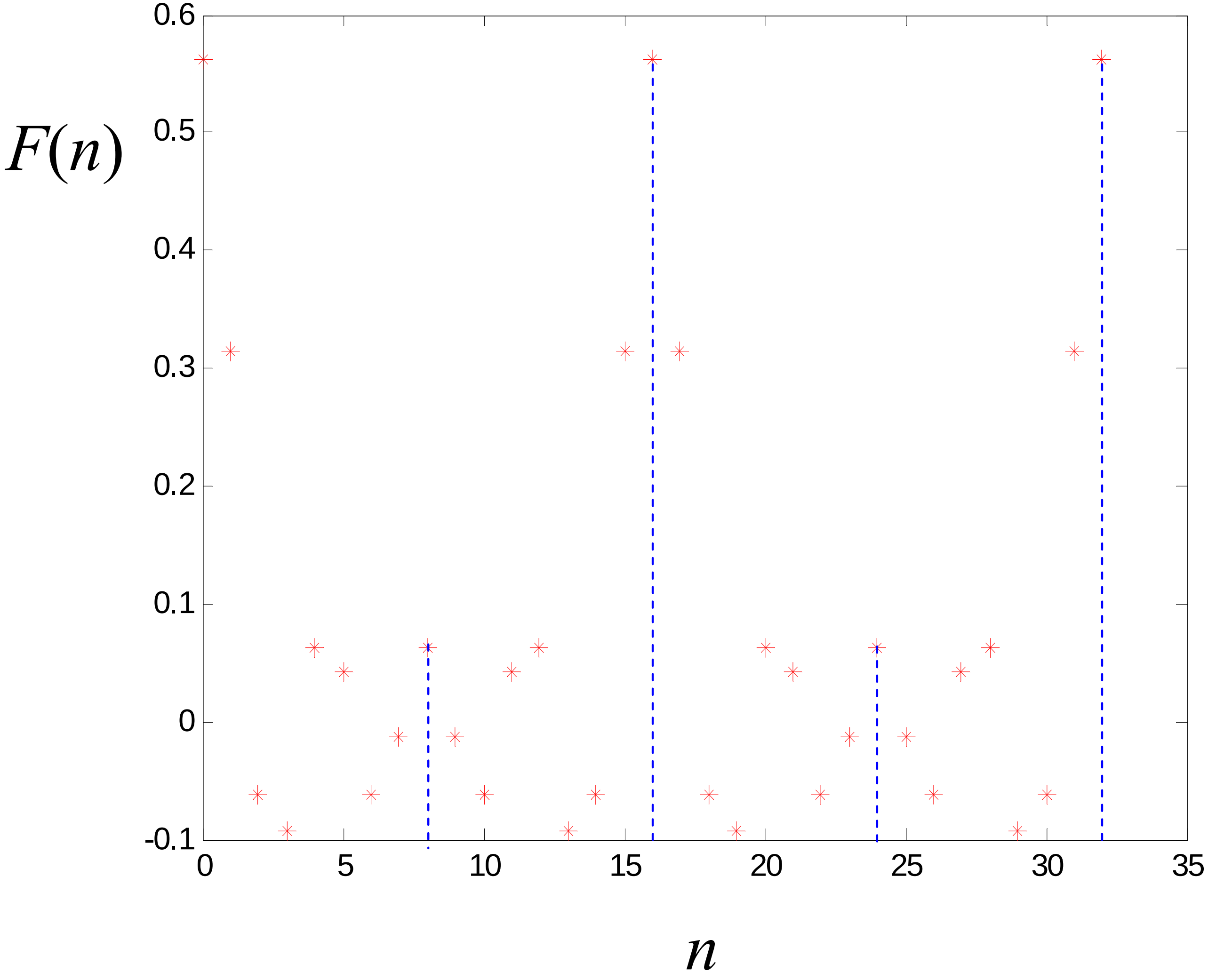
$$\sum_{i=\alpha}^{\beta} \gamma^i = \frac{\gamma^{\beta+1} - \gamma^{\alpha}}{\gamma - 1} \qquad \text{per } \gamma \neq 1$$

Quindi si ha che:

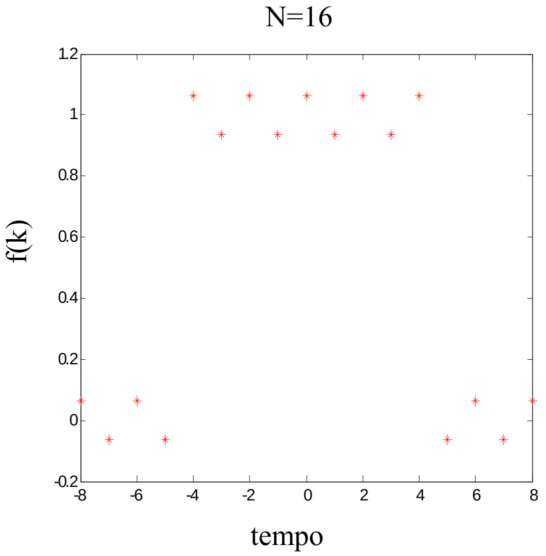
$$F(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/4}^{N/4} e^{-jn\omega_0 k} = \frac{e^{-jn\omega_0\left(\frac{N}{4}+1\right)} - e^{jn\omega_0 \frac{N}{4}}}{N\left(e^{-jn\omega_0} - 1\right)} = \frac{e^{-jn\frac{\omega_0}{2}}\left(e^{-jn\omega_0\left(\frac{N}{4}+\frac{1}{2}\right)} - e^{jn\omega_0\left(\frac{N}{4}+\frac{1}{2}\right)}\right)}{Ne^{-jn\frac{\omega_0}{2}}\left(e^{-jn\frac{\omega_0}{2}} - e^{jn\frac{\omega_0}{2}}\right)} =$$

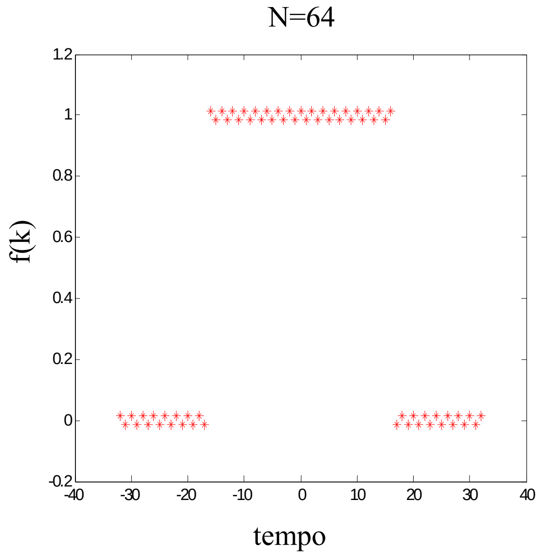
$$= \frac{\sin\left[n\omega_0\left(\frac{N}{4} + \frac{1}{2}\right)\right]}{N \sin\left(n\frac{\omega_0}{2}\right)} = \frac{\sin\left[\pi n\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{2}\right)\right]}{N \sin\left(\pi \frac{n}{N}\right)}$$

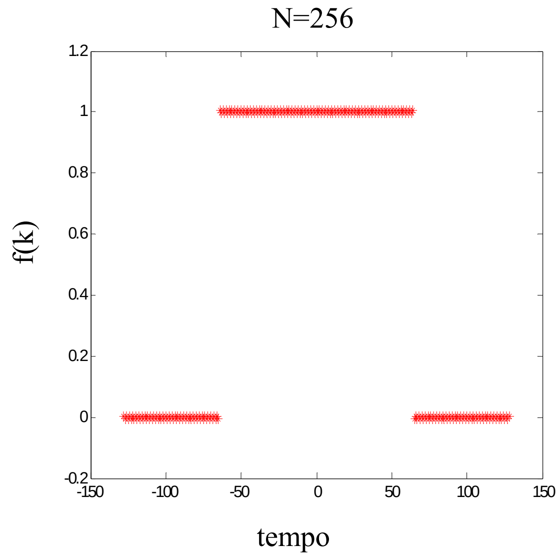
N=16



Si provi a calcolare lo sviluppo di Fourier al crescere di *N*







Conclusione (sviluppo di Fourier)

$$f(k) \longrightarrow F(n) = \frac{1}{N}\sum_{N} f(k)e^{-jn\omega_0 k} \qquad n = \ldots,-1,0,1,\ldots$$

Segnale
a tempo discreto
periodico (*N*)

Sequenza (discreta) di
"pesi" delle armoniche
periodica (*N*)

$$F(n) \longrightarrow f(k) = \sum_{N} F(n)e^{jn\omega_0 k}$$

Sviluppo di Fourier

Sequenza (discreta) di
"pesi" delle armoniche
periodica (*N*)

Segnale
a tempo discreto
periodico (*N*)

4. Trasformazione di Fourier (continua)

$f(t) \quad t \in \Re$ Segnale a tempo continuo

La seguente funzione complessa della variabile reale ω (frequenza), se esiste,

$$\boxed{F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt}$$

si dice **trasformata di Fourier** di f e si indica $F(j\omega) = \mathcal{F}\left[f(t)\right]$

La trasformazione di Fourier è invertibile e si ha:

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega}$$

Nota 1

La funzione $F(j\omega)$ si dice **spettro di** f.

Nota 2

Notazione: $F(j\omega) \equiv F(\omega)$

Nota 3

Se $f(t)$ è reale allora si ha che:

$$F(-j\omega) = \bar{F}(j\omega)$$

da cui risulta:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \left[F(j\omega) e^{j\omega t} + \bar{F}(j\omega) e^{-j\omega t} \right] d\omega$$

Nota 4

Sempre nell'ipotesi che $f(t)$ sia reale, sfruttando l'espressione precedente, l'antitrasformata di Fourier può essere espressa in forma trigonometrica:

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|F(j\omega)\right|\cos\left(\omega t+\arg F(j\omega)\right)d\omega$$

Un segnale continuo che ammette trasformata di Fourier può essere visto come la somma di una infinità non numerabile di componenti sinusoidali dette **armoniche**.

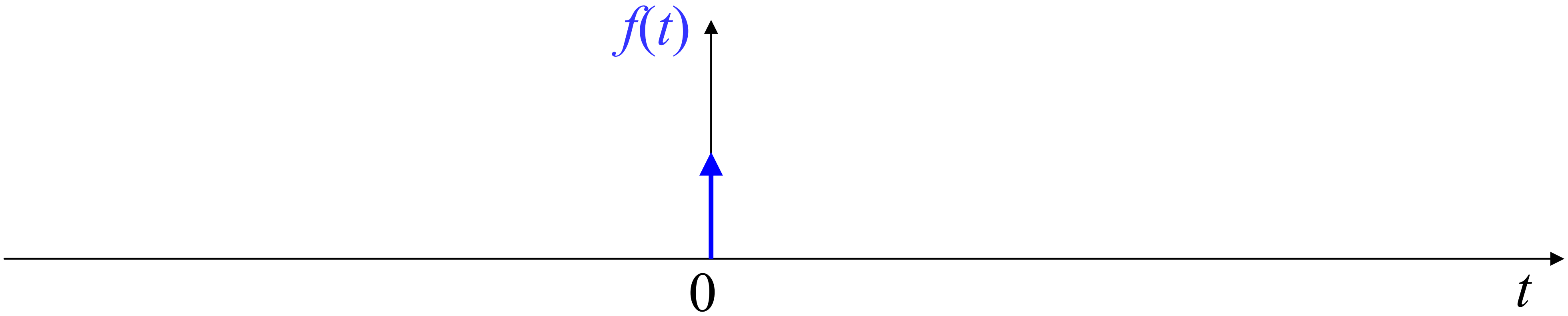
La **pulsazione minima** ω_{min} di un segnale è il minimo valore di ω tale per cui $F(j\omega) \neq 0$

La **pulsazione massima** ω_{max} di un segnale è l'estremo superiore dei valori di ω tali per cui $F(j\omega) \neq 0$

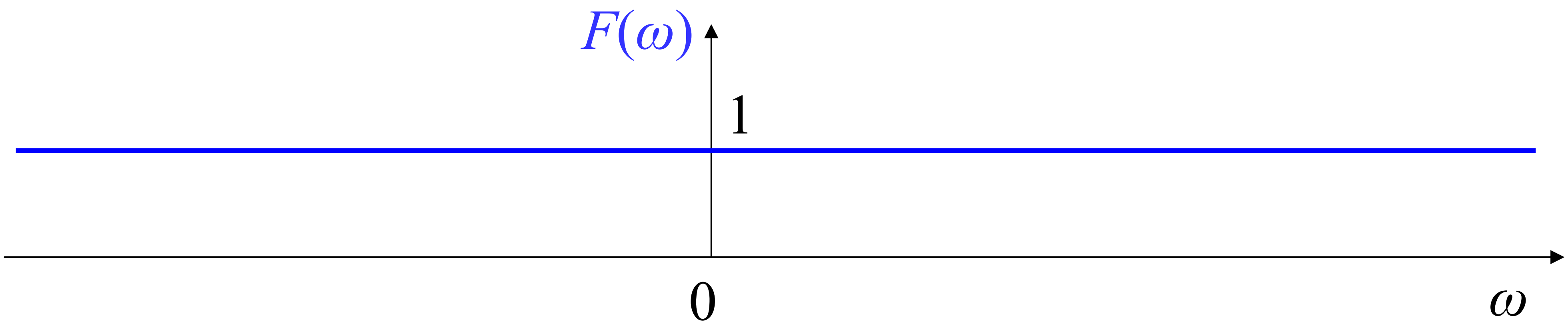
Se $\omega_{max} < \infty$ il segnale si dice **a banda limitata**.

Esempio

Trasformata di Fourier dell'impulso

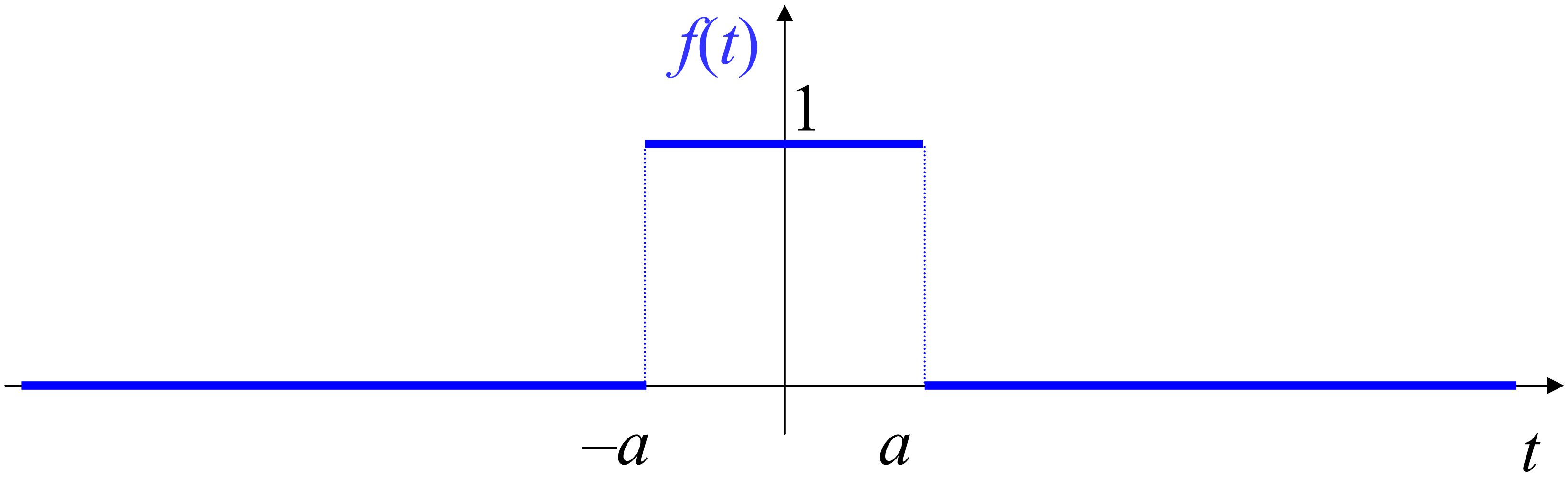


$$\mathcal{F}\left[\mathrm{imp}(t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{imp}(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = e^{-j\omega 0} = 1$$



Esempio

Trasformata di Fourier dell'impulso rettangolare

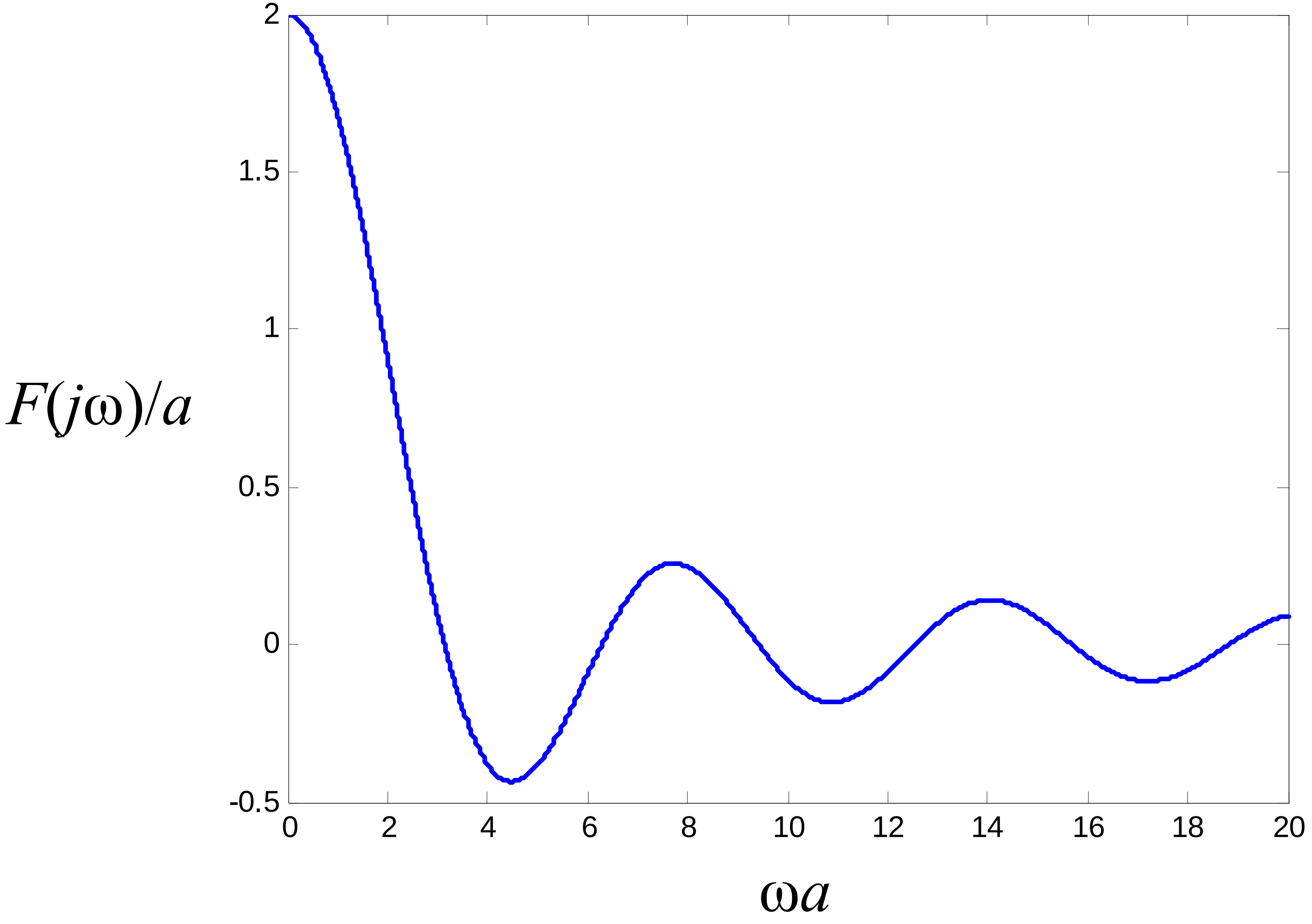


$$f(t) = \begin{cases} 1, & -a \le t < a \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-a}^{+a} e^{-j\omega t} dt =$$

$$= \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_{-a}^{+a} = \frac{e^{-j\omega a} - e^{j\omega a}}{-j\omega} = 2a \frac{\sin(\omega a)}{\omega a}$$

Non è un segnale a banda limitata (anche se il peso delle armoniche diminuisce all'aumentare di ω).


2
1.5
1
0.5
0
-0.5
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
F(jω)/a
ωa

Conclusione (trasformazione di Fourier continua)

$f(t) \longrightarrow F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$

Trasformazione di Fourier

Segnale
a tempo continuo

Funzione continua
(della frequenza)

$F(\omega) \longrightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$

Funzione continua
(della frequenza)

Segnale
a tempo continuo

5. Trasformazione di Fourier (discreta)

$f(k) \quad k \in Z$ Segnale a tempo discreto

La seguente funzione complessa della variabile reale ω, se esiste,

$$\boxed{F\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)\, e^{-j\omega k}}$$

si dice **trasformata di Fourier discreta** di f
e si indica $F\left(e^{j\omega}\right) = \mathcal{F}^*\left[f(k)\right]$

Nota 1

La funzione $F\left(e^{j\omega}\right)$ si dice **spettro di** f.

Nota 2

Notazione: $F\left(e^{j\omega}\right) \equiv F(\omega)$

Nota 3

La funzione $F\left(e^{j\omega}\right)$ è periodica di periodo 2π in quanto

$$e^{-j(\omega+2\pi)k} = e^{-j\omega k} e^{-j2\pi k} = e^{-j\omega k}$$

La trasformazione di Fourier è invertibile e si ha:

$$\boxed{f(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} F\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega k}\,d\omega}$$

Nota 4

Se $f(k)$ è reale allora si ha che:

$$F\left(e^{-j\omega}\right) = \overline{F}\left(e^{j\omega}\right)$$

da cui risulta che per definire lo spettro bastano i valori di $F\left(e^{j\omega}\right)$ per $0 \leq \omega \leq \pi$

Nota 5

Sempre nell'ipotesi che $f(k)$ sia reale, l'antitrasformata di Fourier può essere espressa in forma trigonometrica:

$$f(k) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left|F\left(e^{j\omega}\right)\right| \cos\left(\omega k + \arg F\left(e^{j\omega}\right)\right) d\omega$$

Un segnale discreto che ammette trasformata di Fourier può essere visto come la somma di una infinità non numerabile di componenti sinusoidali dette **armoniche**.

La **pulsazione minima** ω_{min} di un segnale è il minimo valore di ω tale per cui $F\left(e^{j\omega}\right) \neq 0$

La **pulsazione massima** ω_{max} di un segnale è l'estremo superiore dei valori di ω tali per cui $F\left(e^{j\omega}\right) \neq 0$

Se $\omega_{max} < \infty$ il segnale si dice **a banda limitata**.

Nota 6 (Densità spettrale di energia)

La serie

$$F\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)\, e^{-j\omega k}$$

converge se il segnale ha energia finita: $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|f(k)\right|^2 < +\infty$

Si definisce **densità spettrale di energia** la quantità:

$$\boxed{S(\omega)=\left|F\left(e^{j\omega}\right)\right|^2}$$

Teorema di Parseval

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)e^{-j\omega k}\sum_{s=-\infty}^{+\infty} f(s)e^{j\omega s}\right]d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{s=-\infty}^{+\infty} f(k)f(s)e^{-j\omega(k-s)}\right]d\omega = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{s=-\infty}^{+\infty} f(k)f(s)\int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega(k-s)}d\omega =$$

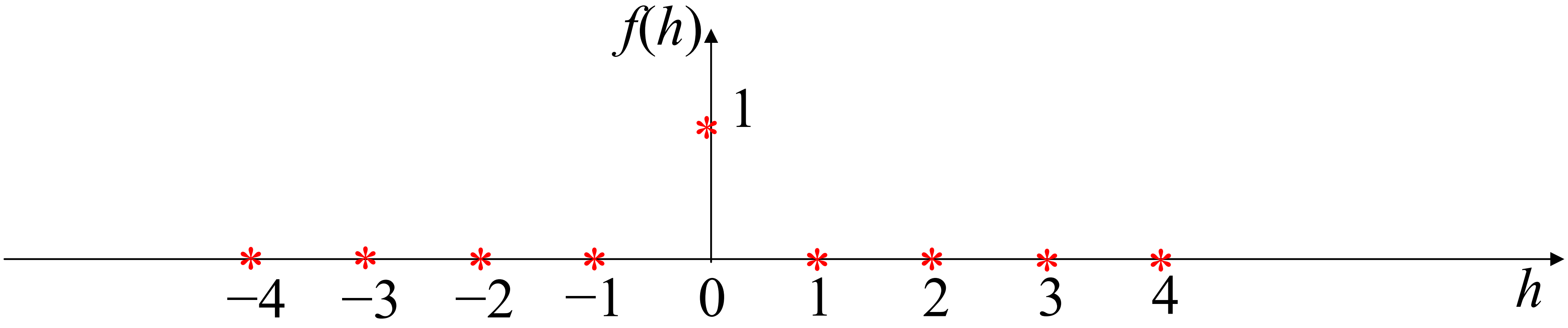
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{s=-\infty}^{+\infty} f(k)f(s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|f(k)\right|^2$$

Quindi

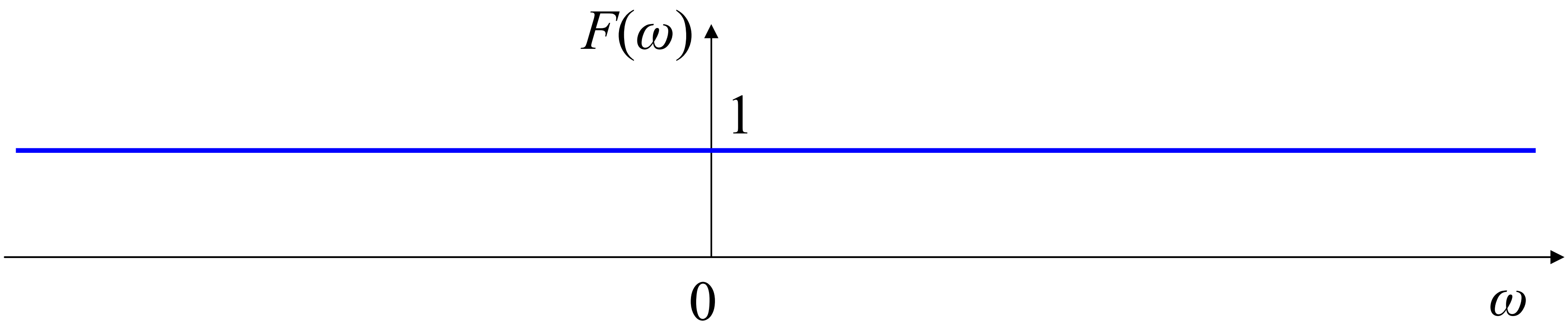
$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|f(k)\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(\omega)d\omega}$$

Esempio

Trasformata di Fourier dell'impulso (discreto)

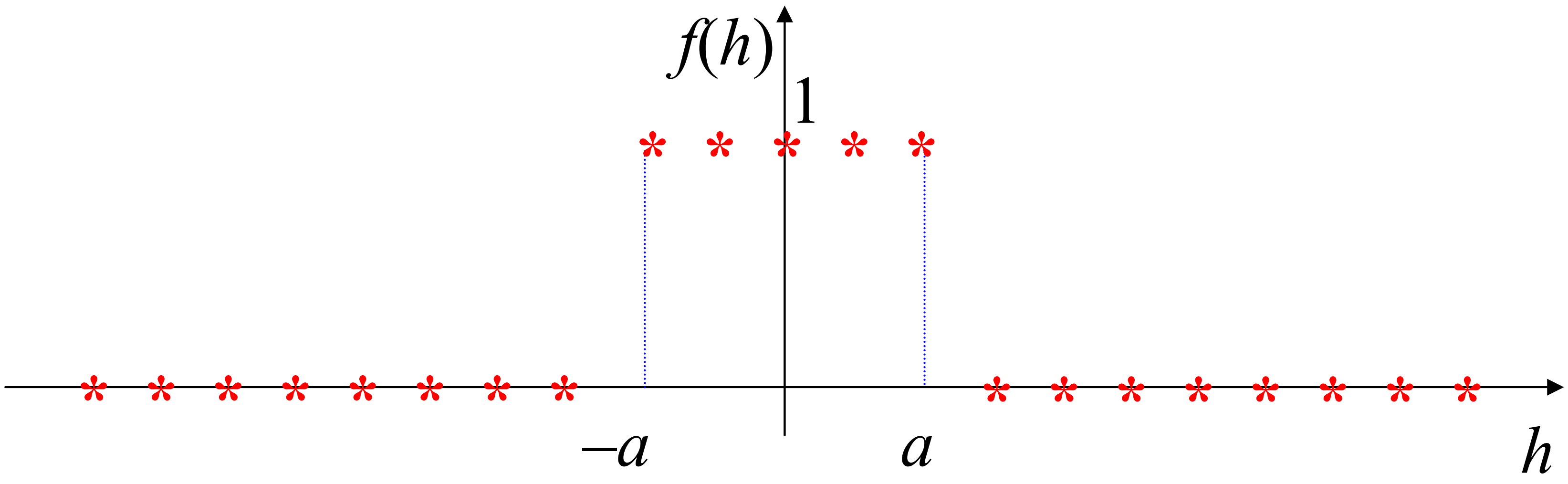


$$\mathrm{F}^* \left[\mathrm{imp}(h)\right] = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} f(h) e^{-j\omega h} = e^{-j\omega 0} = 1$$



Esempio

Trasformata di Fourier dell'impulso rettangolare (discreto)



$$f(h)=\begin{cases}1, & -a \le h \le a\\ 0, & \text{altrove}\end{cases}$$

$$F\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{h=-\infty}^{+\infty} f(h) e^{-j\omega h}=\sum_{h=-a}^{+a} e^{-j\omega h}$$

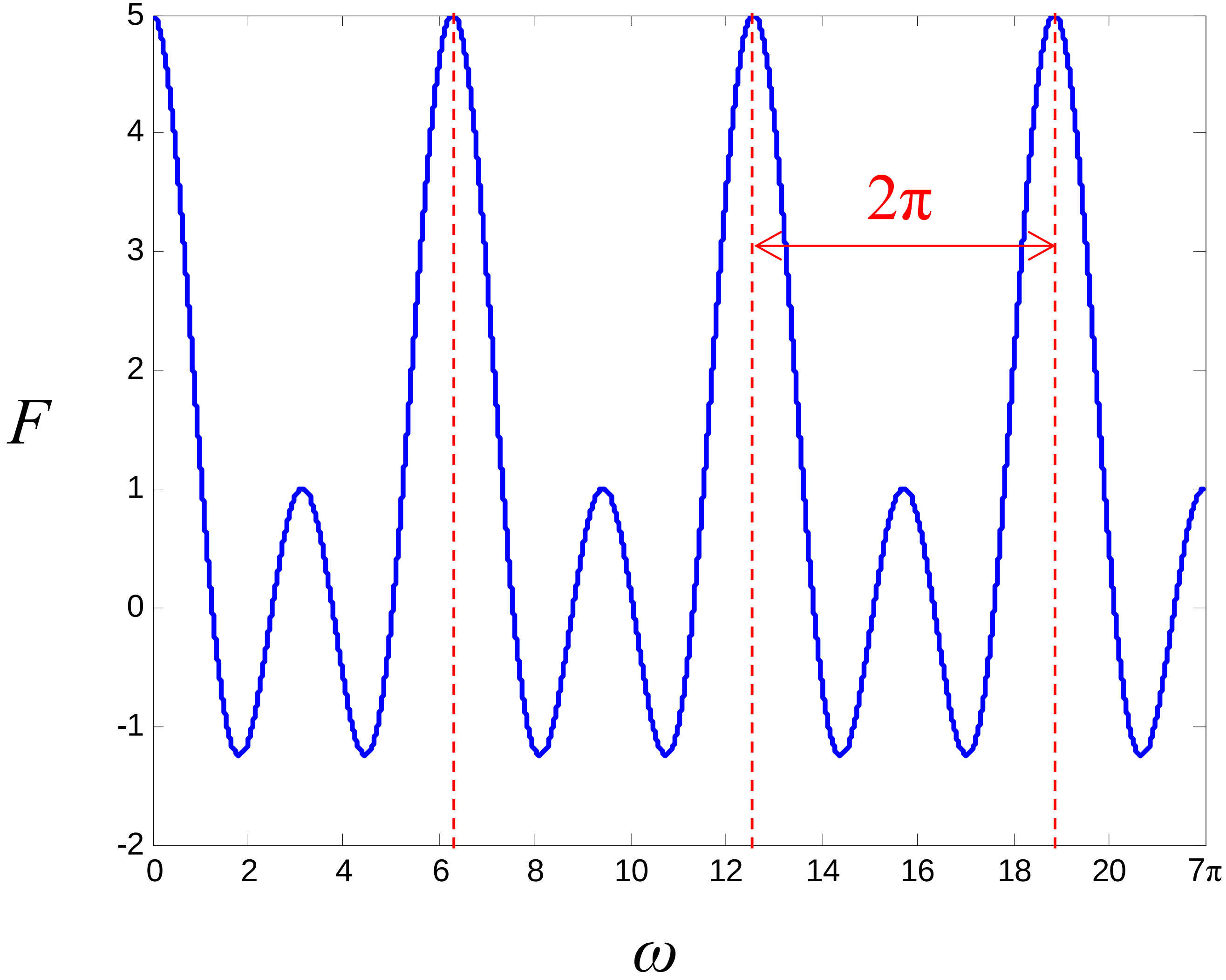
Per ω=0 si ha: $F\left(e^{j0}\right)=\sum_{h=-a}^{+a} 1=2a+1$

Per 0<ω≤π si ha:

$$F\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{h=-a}^{+a} e^{-j\omega h}=\frac{e^{-j\omega(a+1)}-e^{j\omega a}}{e^{-j\omega}-1}=\frac{e^{-j\frac{\omega}{2}}\left(e^{-j\omega\left(a+\frac{1}{2}\right)}-e^{j\omega\left(a+\frac{1}{2}\right)}\right)}{e^{-j\frac{\omega}{2}}\left(e^{-j\frac{\omega}{2}}-e^{j\frac{\omega}{2}}\right)}=$$

$$=\frac{\sin\left[\omega\left(a+\frac{1}{2}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

a=2



Conclusione (trasformazione di Fourier discreta)

$$f(h) \longrightarrow F(\omega) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} f(h) e^{-j\omega h}$$

Trasformazione di Fourier

Segnale
a tempo discreto

Funzione continua
(della frequenza)
periodica (2π)

$$F(\omega) \longrightarrow f(h) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} F(\omega) e^{j\omega h} d\omega$$

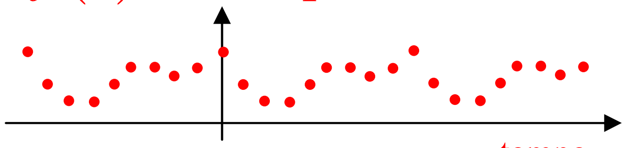
Funzione continua
(della frequenza)
periodica (2π)

Segnale
a tempo discreto

6. Schema riassuntivo

Sviluppo di Fourier

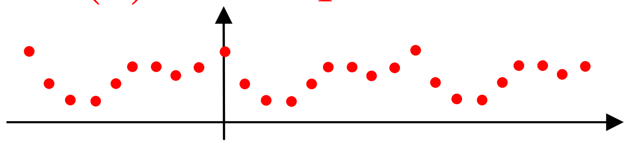
$f(h)\quad h \in Z$ periodica N



$\xrightarrow{\sum_N \text{(somma)}}$

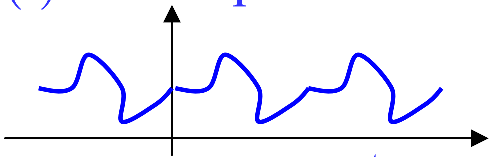
$\xleftarrow{\sum_N \text{(somma)}}$

$F(k)\quad k \in Z$ periodica N



Serie di Fourier

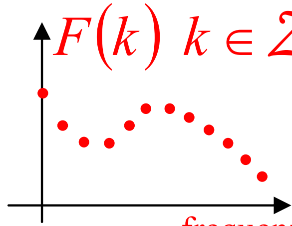
$f(t)\quad t \in \Re$ periodica T



$\xrightarrow{\int_T \text{(integrale finito)}}$

$\xleftarrow{\sum_Z \text{(serie)}}$

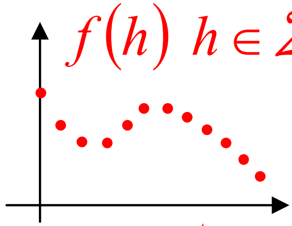
$F(k)\quad k \in Z$



Trasformata di Fourier (disc.)

a tempo discreto (DTFT)

$f(h)\quad h \in Z$

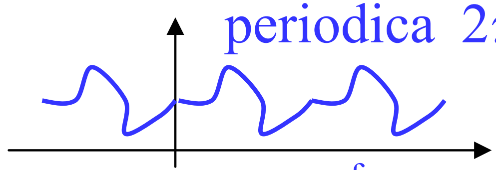


$\xrightarrow{\sum_Z \text{(serie)}}$

$\xleftarrow{\int_{2\pi} \text{(integrale finito)}}$

$F(e^{j\omega})\quad \omega \in \Re$

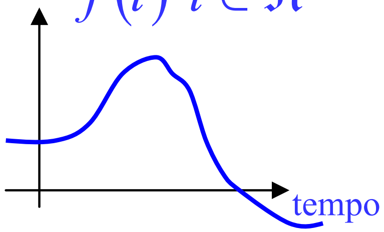
periodica 2π



La DFT è discreta, ed è un campionamento della DFTF (che è continua)

Trasformata di Fourier (cont.)

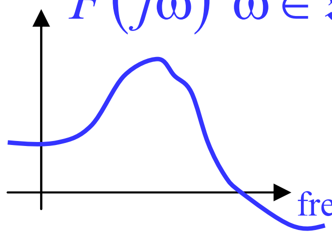
$f(t)\quad t \in \Re$



$\xrightarrow{\int_\Re \text{(integrale)}}$

$\xleftarrow{\int_\Re \text{(integrale)}}$

$F(j\omega)\quad \omega \in \Re$



7. Richiamo da IMAD

Si consideri un processo stocastico stazionario $y(k)$ (a media nulla).

Una realizzazione di un processo stocastico è (di fatto) un segnale a tempo discreto ma non ha energia finita.

Un processo stocastico ha potenza media finita.

Si definisce **densità spettrale di potenza (o spettro)**

$$\boxed{\Gamma_y(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \gamma_y(\tau) e^{-j\omega\tau}}$$

Essa è la trasformata di Fourier discreta
della funzione di covarianza $\gamma_y(\tau) = E[y(k)y(t-k)]$

Si consideri ora il problema di ottenere una **stima campionaria dello spettro** a partire da un numero finito di campioni di $y(k)$

$y(1), y(2), \ldots, y(N)$

I approx

II approx

Un possibile stimatore dello spettro è: $\hat{\Gamma}_{y,N}(\omega) = \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} \hat{\gamma}_{y,N}(\tau) e^{-j\omega\tau}$

dove $\hat{\gamma}_{y,N}(\tau) = \dfrac{1}{N-|\tau|} \sum_{k=1}^{N-|\tau|} y(k) y(k+|\tau|) \qquad |\tau| \le N-1$

E' uno stimatore **<u>asintoticamente corretto</u>** e **<u>non consistente</u>**.

Uno stimatore alternativo dello spettro è: $\hat{\Gamma}'_{y,N}(\omega) = \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} \hat{\gamma}'_{y,N}(\tau) e^{-j\omega\tau}$

dove $\quad \hat{\gamma}'_{y,N}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-|\tau|} y(k) y(k+|\tau|) \qquad |\tau| \leq N-1$

Si può dimostrare che $\hat{\Gamma}'_{y,N}(\omega) = \frac{1}{N} \left| \sum_{k=1}^{N} y(k) e^{-j\omega k} \right|^2$

Infatti $\hat{\Gamma}'_{y,N}(\omega) = \frac{1}{N} \left| \sum_{k=1}^{N} y(k) e^{-j\omega k} \right|^2 = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^{N} y(r) e^{-j\omega r} \left(\sum_{s=1}^{N} y(s) e^{-j\omega s} \right)^* =$

$$= \frac{1}{N} \sum_{r,s=1}^{N} y(r) y(s) e^{-j\omega(r-s)} \underset{\uparrow}{=} \sum_{\tau=-(N-1)}^{(N-1)} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-|\tau|} y(k) y(k+|\tau|) \right] e^{-j\omega\tau} = \sum_{\tau=-(N-1)}^{(N-1)} \hat{\gamma}'_{y,N}(\tau) e^{-j\omega\tau}$$

$\tau = r - s$

$k = r$

Quindi è possibile ottenere la stima dello spettro di un processo stocastico stazionario usando il seguente stimatore:

$$\boxed{\hat{\Gamma}'_{y,N}(\omega) = \frac{1}{N}\left|\sum_{k=1}^{N} y(k)e^{-j\omega k}\right|^2}$$

dove $\sum_{k=1}^{N} y(k)e^{-j\omega k}$ è uno stimatore della trasformata di Fourier discreta di $y(k)$

8. Matlab

Ci vuole una certa attenzione nell'utilizzare la funzione per il calcolo della DFT (Discrete Fourier Transform). Essa implementa un efficiente algoritmo noto come FFT (Fast Fourier Transform) che calcola la seguente funzione

$$F(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-jn\omega_0 k}$$

dove: $f(k)$ è un segnale composto di N campioni

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

Si può notare che l'espressione $F(n)$ è in realtà molto più simile a quella dello sviluppo di Fourier che non alla trasformata discreta (come era ragionevole aspettarsi).

```
>> t=0:.01:10;
>> y=sin(t)+0.5*randn(size(t));
```

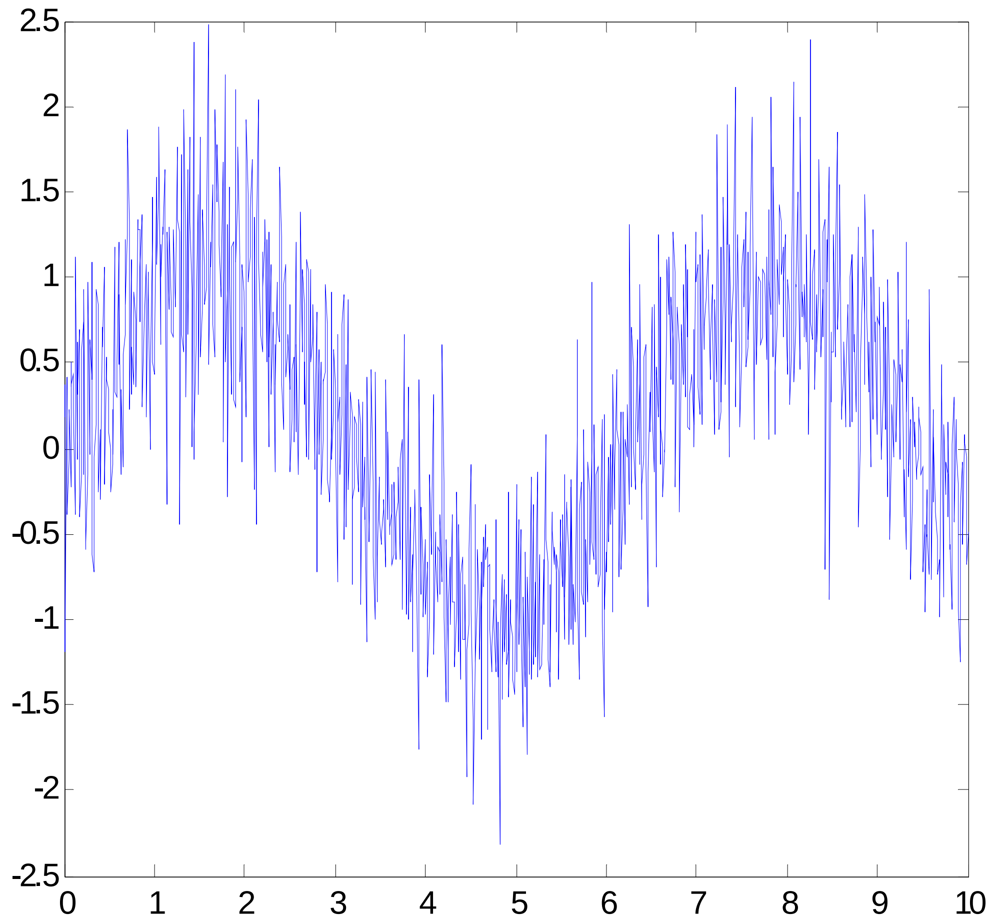
$$\overline{\omega}=1 \text{ rad/s}$$

N=1000

T_s=0.01 s

Il comando da usare è

```
>> Y=fft(y);
```



tempo [s]

Tempo di calcolo

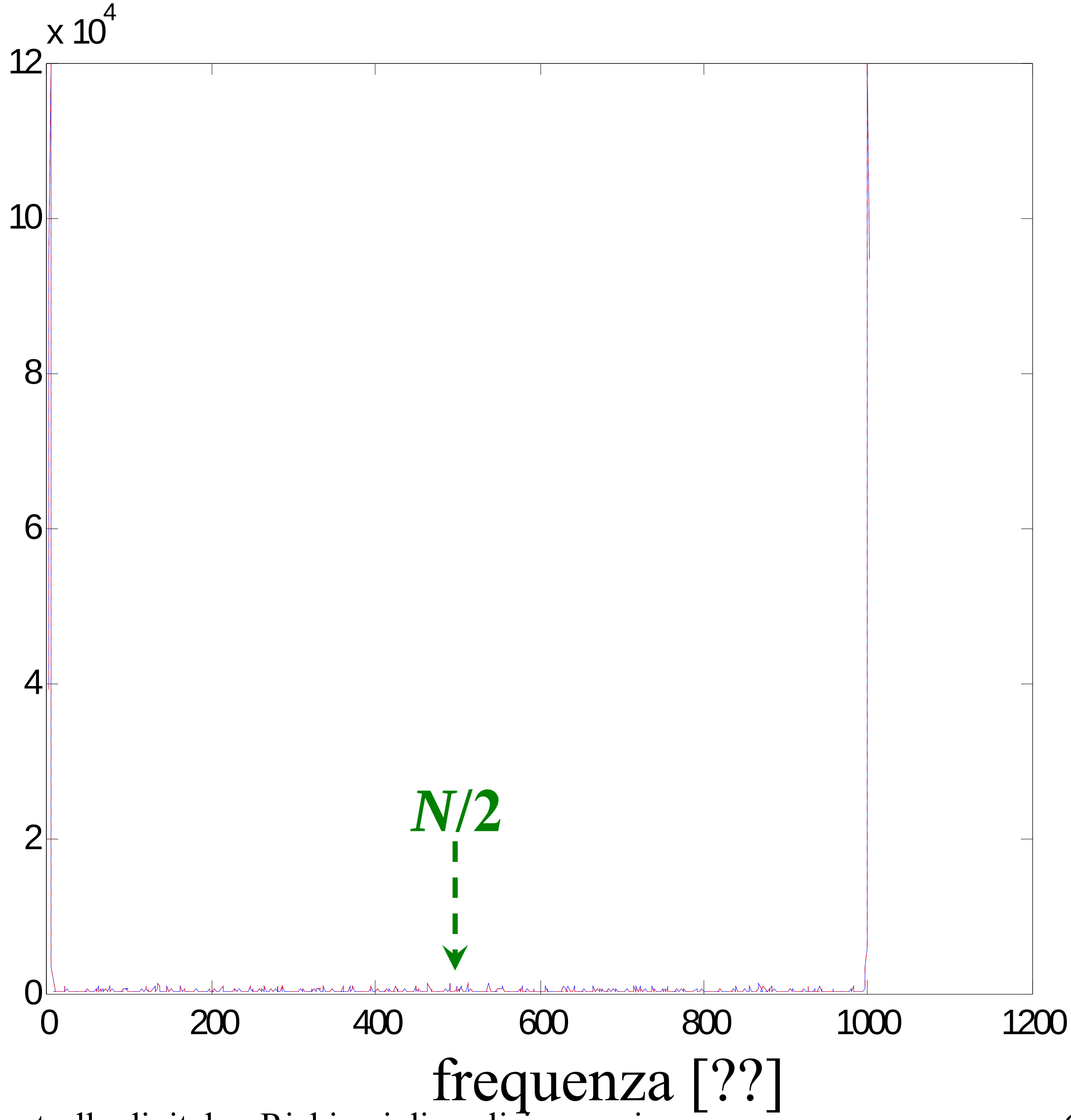
Usando fft: 0.000260 s

Eseguendo il calcolo diretto della definizione: 0.568 s (!!)

```
>> plot(abs(Y.^2))
>> hold
Current plot held
>> plot(abs(F.^2),'r:')
```

N=1000

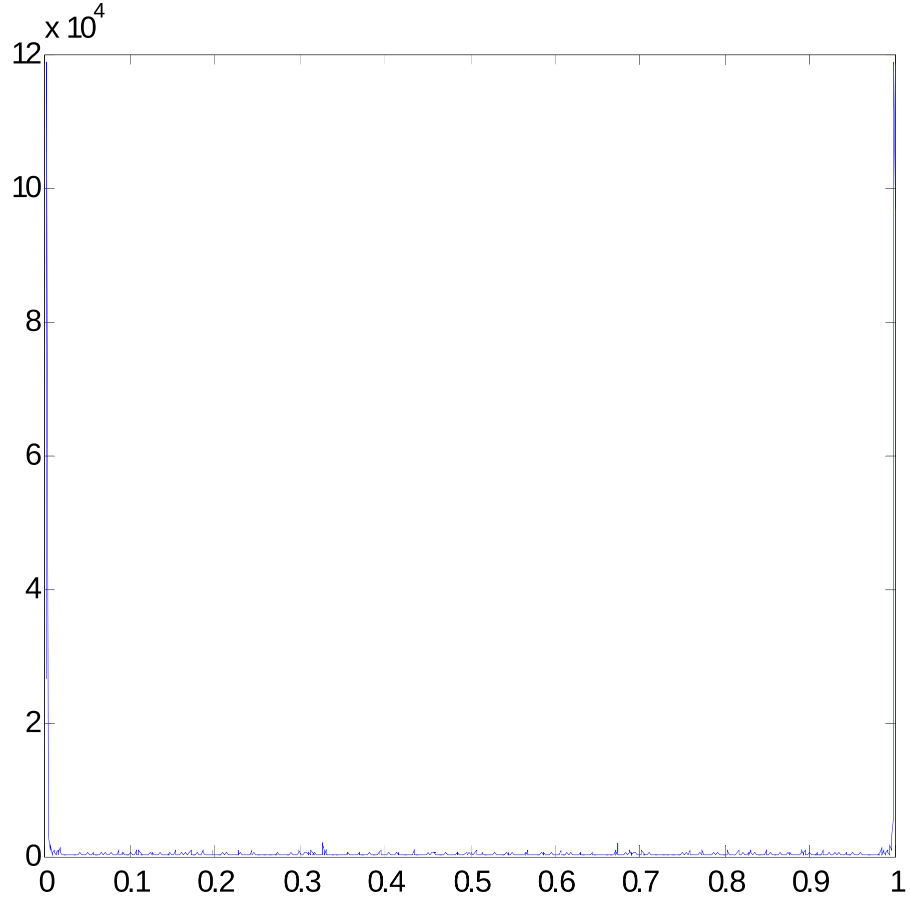
Lo spettro è periodico di periodo *N*. Essendo il segnale reale, bastano *N*/2 campioni per descriverlo.



Come si “tara” l’asse della frequenza?

Se si prescinde dal tempo di campionamento, la frequenza è espressa in “cicli per tempo di campionamento” e quindi i suoi limiti sono 0 ed 1.

Per avere la frequenza in “cicli al secondo” [Hz] è sufficiente dividere per il tempo di campionamento T_s (o moltiplicare per f_s)



Frequenza [Hz×T_s]

La frequenza assume quindi valori da 0 a $f_s=1/T_s$.
Questo intervallo è quindi diviso in N intervalli uguali di ampiezza pari a $f_s/N=1/(NT_s)=1/T$, la risoluzione in frequenza dello spettro.

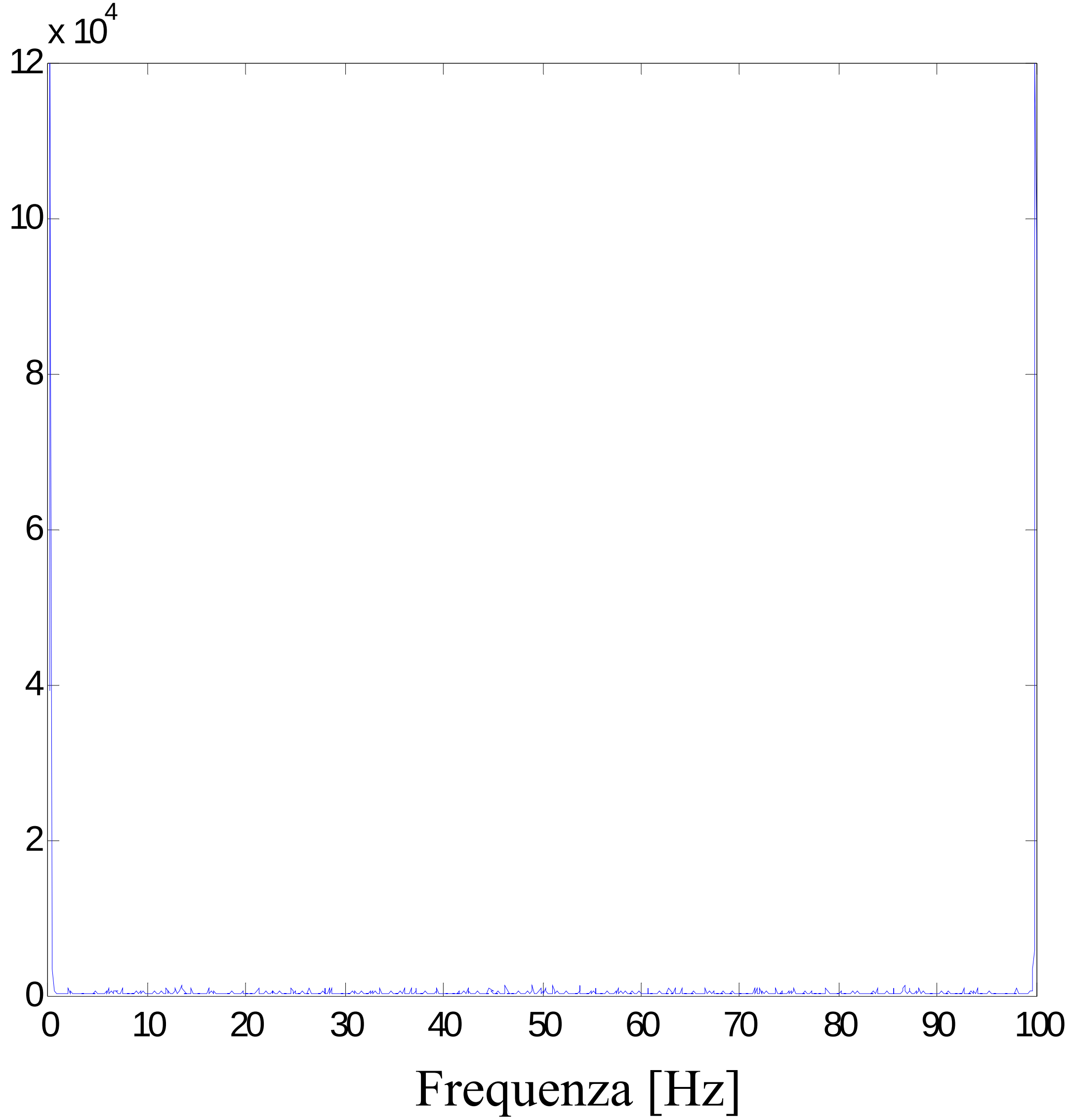
Quindi

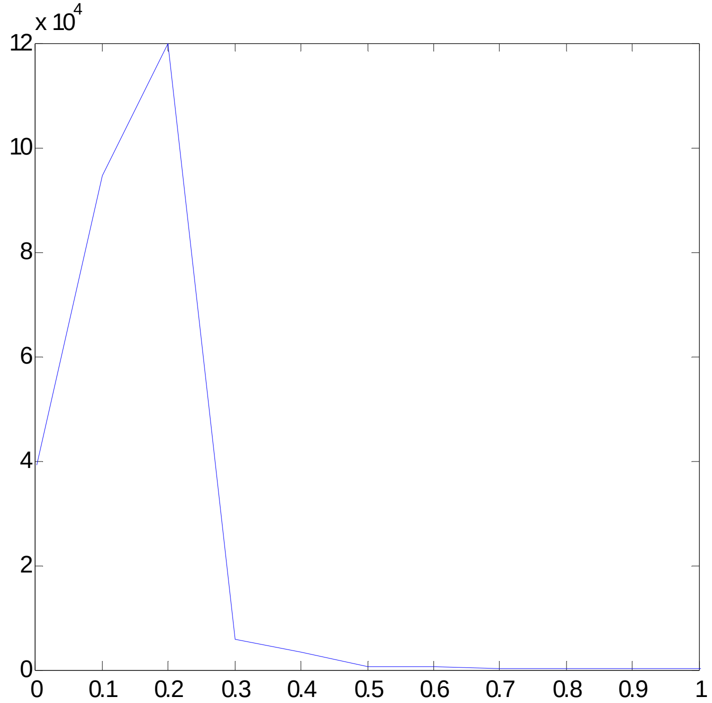
```
>> f=[0:1000]/(1000*Ts);
```

Di solito non si rappresenta fino a f_s, ma fino a $f_N=f_s/2$

Dov'è la sinusoide?

In $\overline{\omega}=1$ rad/s $\cong 0.15$ Hz





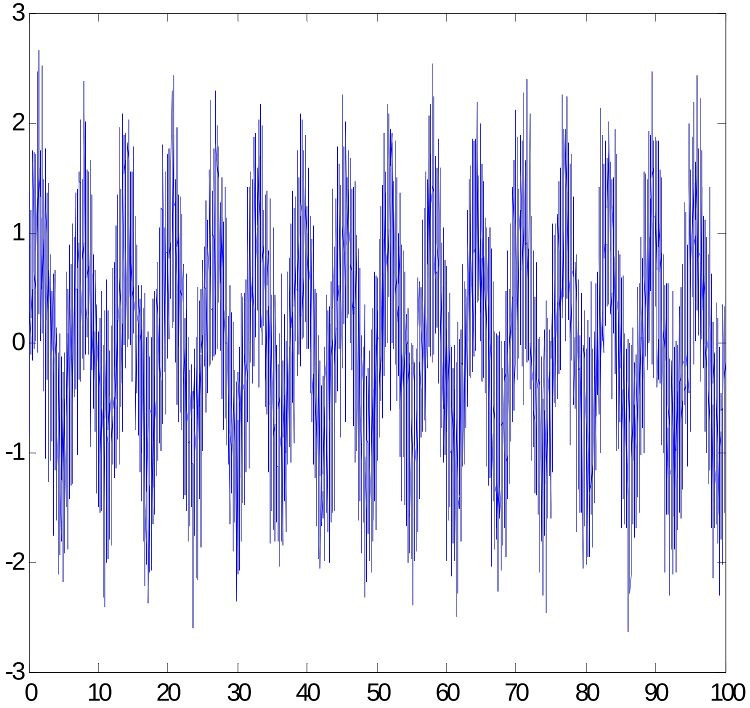
Frequenza [Hz]

Bassa risoluzione in frequenza.

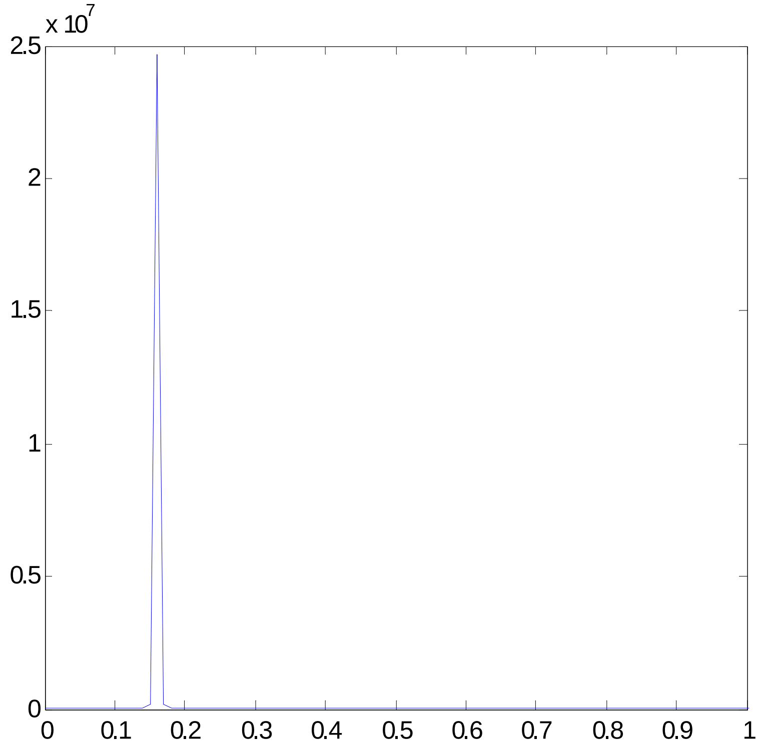
Essa infatti è: $\dfrac{1}{N} f_s = \dfrac{1}{NT_s} = \dfrac{1}{T}$

In questo caso $0.1\,\mathrm{Hz}$

Per migliorarla si deve aumentare *T*.



Tempo [s]

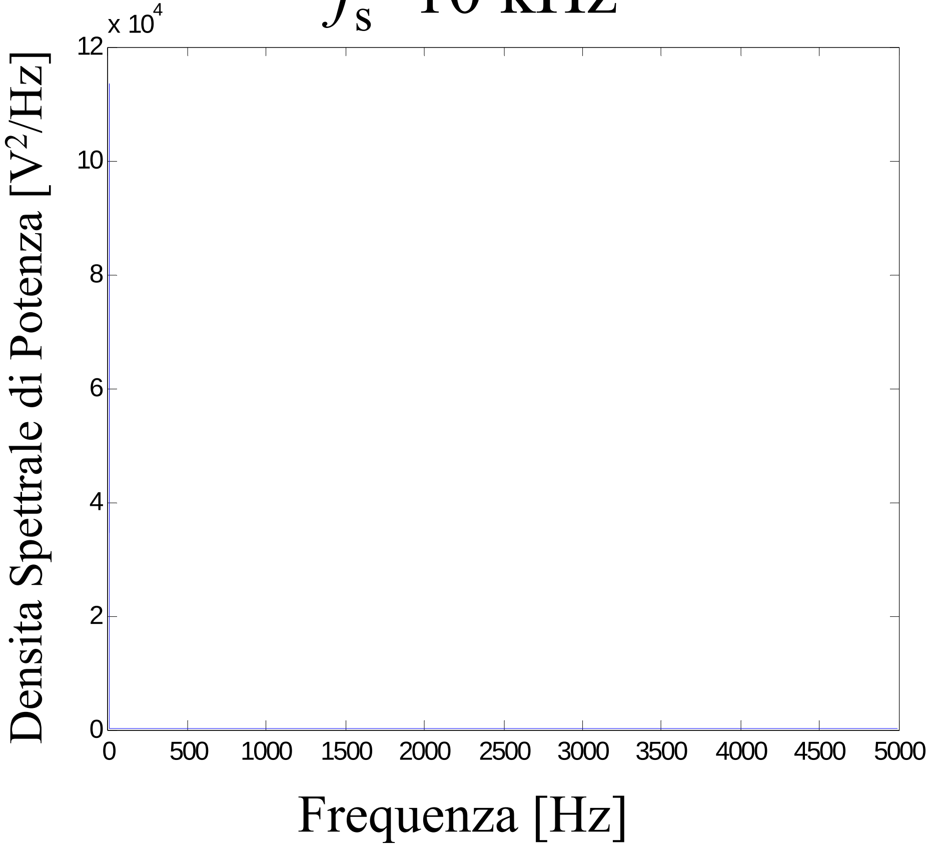


Frequenza [Hz]

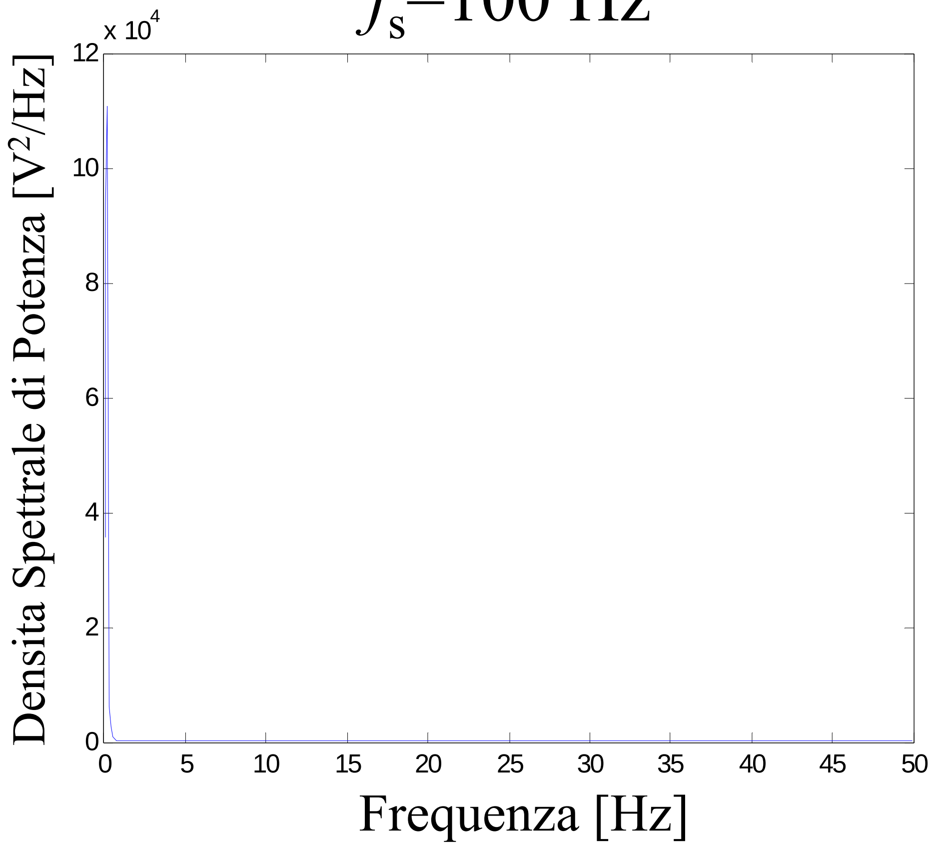
Tenendo conto del tempo di campionamento, la densità spettrale di potenza deve essere moltiplicata per T_s.

L'unità di misura dipende dall'unità di misura del segnale. Per esempio se esso è stato misurato in Volt, la densità spettrale di potenza sarà misurata in V^2/Hz.

f_s=10 kHz



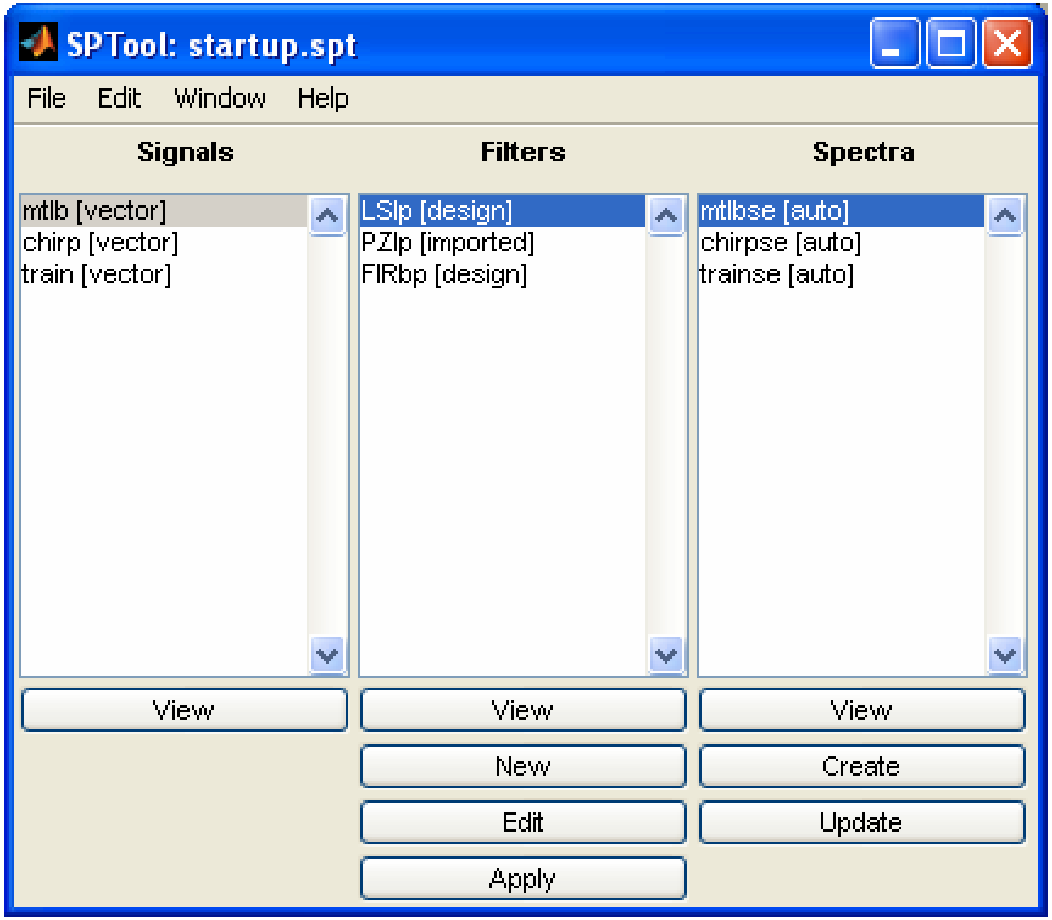
f_s=100 Hz

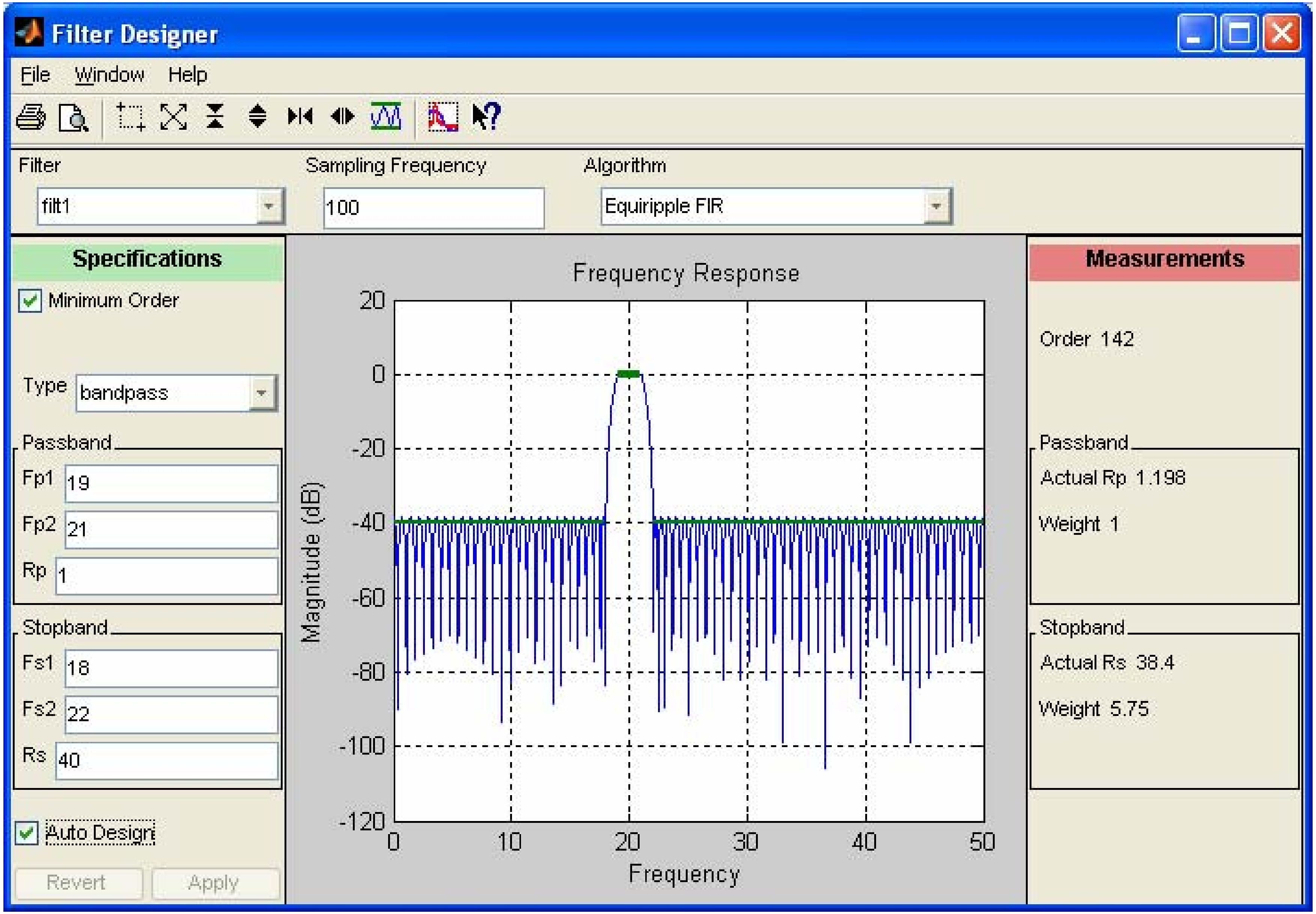


Nel Signal Processing Toolbox esistono delle GUI per l'analisi in frequenza e il filtraggio digitale dei segnali.

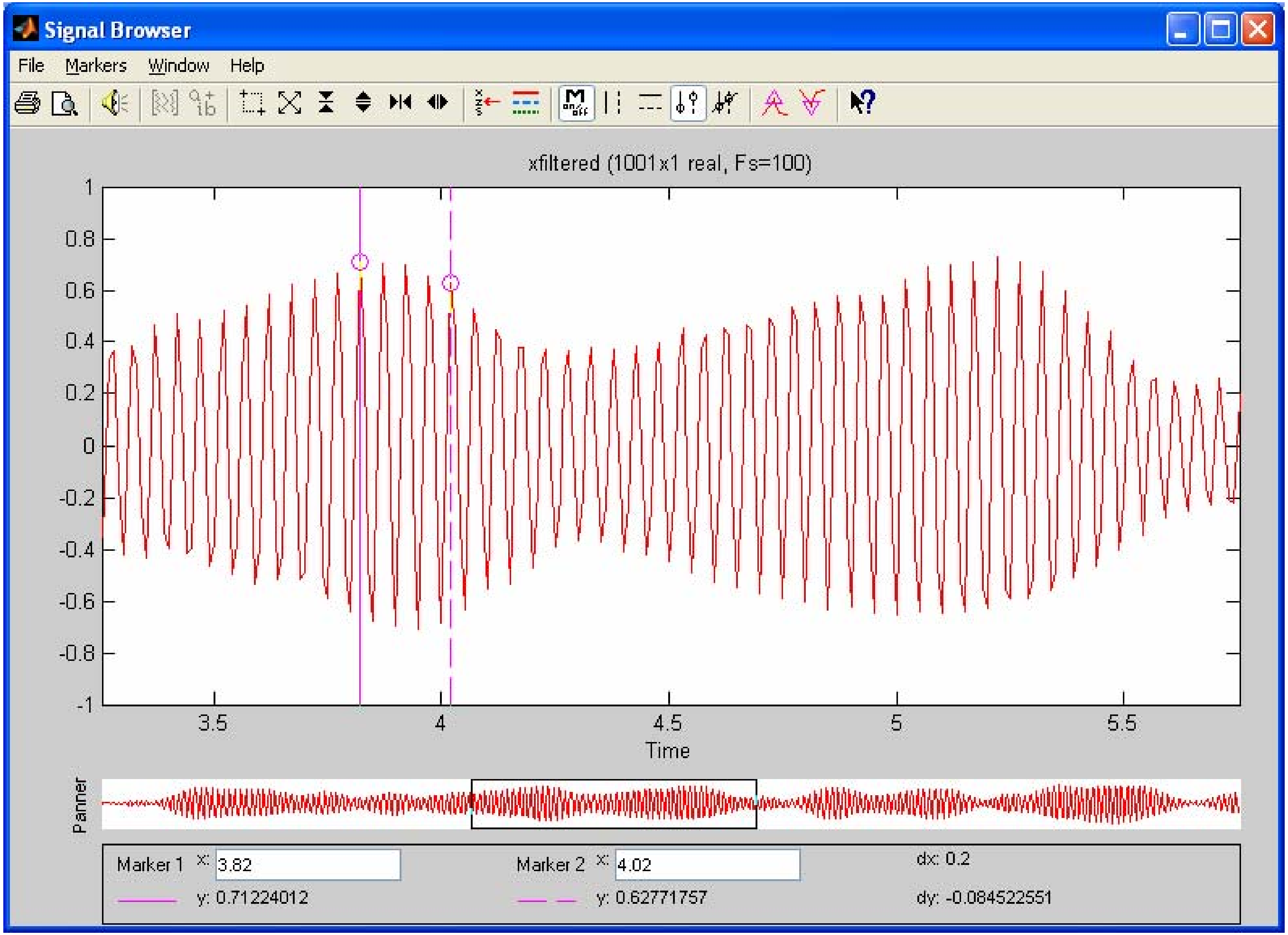
>> **sptool**

Consente di visualizzare un segnale, il suo spettro, progettare ed applicare un filtro digitale e confrontare gli spettri.





Filtraggio a banda stretta per isolare la componente a 20 Hz ...



Porzione del segnale filtrato: 4 periodi in 0.2 s, cioè 20 Hz

Esiste anche una GUI più evoluta e potente per la sola progettazione dei filtri digitali (che vanno poi esportati nel workspace ed applicati ai segnali)

>> **fdatool**