

Esercizi sull'identificazione

1 Esercizio 1

Supponiamo di avere infiniti dati presi dal processo stocastico stazionario:

$$\mathcal{S} : y(t) = 2 \cdot e(t) + \frac{1}{2} \cdot e(t-1) + e(t-2) \qquad e(t) \sim WN(0, 1)$$

e i tre modelli:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1(a) : y(t) &= a \cdot y(t-1) + \eta(t) & \eta(t) &\sim WN(0, \lambda^2) \\ \mathcal{M}_2(a, b) : y(t) &= a \cdot y(t-1) + b \cdot y(t-2) + \eta(t) & \eta(t) &\sim WN(0, \lambda^2) \\ \mathcal{M}_3(a, b) : y(t) &= \eta(t) + a \cdot \eta(t-1) + b \cdot \eta(t-2) & \eta(t) &\sim WN(0, \lambda^2) \end{aligned}$$

Identificare il miglior modello in ogni classe usando la metodologia PEM.

2 Esercizio 2

Supponiamo di avere a disposizione il dataset

t	1	2	3	4
$y(t)$	-1	2	0	1

e i seguenti modelli:

$$\begin{array}{ll}
 \mathcal{M}_1(a) : y(t) = a \cdot y(t-1) + \eta(t) & \eta(t) \sim WN(0, \lambda^2) \\
 \mathcal{M}_2(a, b) : y(t) = a \cdot y(t-1) + b \cdot y(t-2) + \eta(t) & \eta(t) \sim WN(0, \lambda^2) \\
 \mathcal{M}_3(a) : y(t) = \eta(t) + a \cdot \eta(t-1) & \eta(t) \sim WN(0, \lambda^2)
 \end{array}$$

Identificare il miglior modello in ogni classe usando la metodologia PEM, con i dati a disposizione.

3 Esercizio 3

Consideriamo di avere infiniti dati presi dal processo stocastico stazionario a media nulla con la seguente funzione di autocovarianza:

$$\gamma_{yy}(\tau) = \begin{cases} 4 & \text{se } \tau = 0 \\ -2 & \text{se } |\tau| = 1 \\ 1 & \text{se } |\tau| = 2 \\ 0 & \text{se } |\tau| > 2 \end{cases}$$

Identificare il miglior modello per le seguenti classi usando la metodologia PEM:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1(a) : y(t) &= \eta_1(t) + a \cdot y(t-1) & \eta_1 &\sim WN(0, \lambda_1^2) \\ \mathcal{M}_2(b, c) : y(t) &= \eta_2(t) + b \cdot y(t-2) + c \cdot y(t-3) & \eta_2 &\sim WN(0, \lambda_2^2) \end{aligned}$$

4 Esercizio 4

Supponiamo di avere i dati:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \text{ è pari} \\ 2 & \text{se } t \text{ è dispari} \end{cases} \quad t = 1, \dots, 100$$
$$y(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } t \text{ è dispari} \end{cases} \quad t = 1, \dots, 100$$

Identificare il miglior modello per le seguenti classi usando la metodologia PEM:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1(a, b) : y(t) &= a \cdot y(t-1) + b \cdot u(t-1) + \eta(t) & \eta(t) &\sim WN(0, \lambda^2) \\ \mathcal{M}_2(a, b) : y(t) &= a \cdot u(t-1) + b \cdot u(t-2) + \eta(t) & \eta(t) &\sim WN(0, \lambda^2) \end{aligned}$$

5 Esercizio 5

Consideriamo di avere infiniti dati presi dal processo stocastico stazionario con funzione di autocovarianza definita nel seguente modo:

$$\gamma_{yy}(\tau) = \begin{cases} 5 & \text{se } \tau = 0 \\ 3 & \text{se } |\tau| = 1 \\ 1 & \text{se } |\tau| = 2 \\ 0 & \text{se } |\tau| > 2 \end{cases}$$

Identificare il miglior modello per la seguente classe usando la metodologia PEM:

$$\mathcal{M}_1(a) : y(t) = (1-a) \cdot y(t-1) + a \cdot y(t-2) + \eta(t) \qquad \eta(t) \sim WN(0, \lambda^2)$$

6 Esercizio 6

Supponiamo di avere il processo stocastico stazionario:

$$S : y(t) = 0.25 \cdot y(t-2) + 2 \cdot e(t) \qquad e(t) \sim WN(0, 1)$$

e la classe:

$$\mathcal{M}(a) : y(t) = (0.5 - a) \cdot y(t-1) + 0.5 \cdot a \cdot y(t-2) + \eta(t) \qquad \eta(t) \sim WN(0, \lambda^2)$$

Identificare il miglior modello per la classe usando la metodologia PEM, assumendo che si abbiano infiniti dati a disposizione ($N \rightarrow \infty$).

7 Esercizio 7

Si identifichi il miglior modello della seguente classe usando la metodologia PEM:

$$\mathcal{M}(a) : y(t) = \eta(t) + a \cdot \eta(t-1) \qquad \eta(t) \sim WN(0, \lambda^2)$$

avendo a disposizione tre misurazioni acquisite del sistema \mathcal{S} :

$$y(1) = 2$$

$$y(2) = 0$$

$$y(3) = 2$$

8 Esercizio 8

Si consideri il sistema:

$$\mathcal{S}_1 : y(t) = e(t) \qquad e(t) \sim WN(0, 1)$$

Identificare il miglior modello per la seguente classe usando la metodologia PEM:

$$\mathcal{M}(a) : y(t) = -ay(t-1) + \eta(t) + \frac{1}{2} \cdot \eta(t-1) \qquad \eta(t) \sim WN(0, \lambda^2)$$

Valutare cosa succede se il sistema fosse:

$$\mathcal{S}_2 : y(t) = e(t) + 2e(t-1) \qquad e(t) \sim WN(0, 1)$$