Esercizi sulla Predizione

1 Esercizio 1

Consideriamo il seguente processo stocastico:

$$y(t) = 3e(t) - \frac{9}{4}e(t-1) - \frac{15}{8}e(t-2) + \frac{2}{3}y(t-1) \qquad e(t) \sim WN(0,2)$$

1.1 Controllare la stazionarietà

Per controllare la stazionarietà del processo bisogna ricavare la funzione di trasferimento del processo:

$$\begin{aligned}
y(t) &= 3e(t) - \frac{9}{4}e(t-1) - \frac{15}{8}e(t-2) + \frac{2}{3}y(t-1) \\
y(t) &= 3e(t) - \frac{9}{4}e(t) \cdot z^{-1} - \frac{15}{8}e(t) \cdot z^{-2} + \frac{2}{3}y(t) \cdot z^{-1} \\
y(t) - \frac{2}{3}y(t) \cdot z^{-1} &= 3e(t) - \frac{9}{4}e(t) \cdot z^{-1} - \frac{15}{8}e(t) \cdot z^{-2} \\
y(t)\left(1 - \frac{2}{3}z^{-1}\right) &= e(t)\left(3 - \frac{9}{4}z^{-1} - \frac{15}{8}z^{-2}\right) \\
y(t) &= \frac{3 - \frac{9}{4}z^{-1} - \frac{15}{8}z^{-2}}{1 - \frac{2}{3}z^{-1}} \cdot e(t) \\
y(t) &= \underbrace{\frac{3z^2 - \frac{9}{4}z - \frac{15}{8}}{z^2 - \frac{2}{3}z}}_{H_1(z)} \cdot e(t)
\end{aligned}$$

Il processo $y(t)$ è stazionario se e solo se:

- $e(t)$ è un processo stocastico stazionaro. Lo è per definizione.
- $H_1(z)$ è un sistema dinamico asintoticamente stabile. Dato che i poli sono:

$$\begin{aligned}
p_1 &= 0 \\
p_2 &= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

  quindi è asintoticamente stabile.

Quindi $y(t)$ è un processo stazionario.

1.2 Forma canonica

Per poter controllare che il sistema sia in forma canonica è necessario decomporre sia il numeratore che il denominatore:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \frac{3z^2 - \frac{9}{4}z - \frac{15}{8}}{z^2 - \frac{2}{3}z} \cdot e(t) \\
&= \frac{3 \cdot \left(z^2 - \frac{3}{4}z - \frac{5}{8}\right)}{z \cdot \left(z - \frac{2}{3}\right)} \cdot e(t)
\end{aligned}$$

$$z_{1,2} = \frac{\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + 4 \cdot 1 \cdot \frac{5}{8}}}{2} = \frac{\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{49}{16}}}{2} = \frac{\frac{3}{4} \pm \frac{7}{4}}{2}$$

$$z_1 = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$
$$z_2 = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$$

quindi:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{3z^2 - \frac{9}{4}z - \frac{15}{8}}{z^2 - \frac{2}{3}z} \cdot e(t) \\ &= \frac{3 \cdot \left(z - \frac{5}{4}\right) \cdot \left(z + \frac{1}{2}\right)}{z \cdot \left(z - \frac{2}{3}\right)} \cdot e(t) \end{aligned}$$

ora è possibile notare che c'è uno zero fuori dal cerchio di raggio unitario, quindi è necessario applicare un filtro passa-tutto in modo da «spostarlo» all'interno:

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{5}{4} \cdot \frac{z - \frac{4}{5}}{\cancel{z - \frac{5}{4}}} \cdot \frac{3 \cdot \cancel{\left(z - \frac{5}{4}\right)} \cdot \left(z + \frac{1}{2}\right)}{z \cdot \left(z - \frac{2}{3}\right)} \cdot e(t) \\ &= -\frac{15}{4} \cdot \frac{\left(z - \frac{4}{5}\right) \cdot \left(z + \frac{1}{2}\right)}{z \cdot \left(z - \frac{2}{3}\right)} \cdot e(t) \\ &= \frac{\left(z - \frac{4}{5}\right) \cdot \left(z + \frac{1}{2}\right)}{z \cdot \left(z - \frac{2}{3}\right)} \cdot \underbrace{\left(-\frac{15}{4} \cdot e(t)\right)}_{\eta(t)} \end{aligned}$$

dove:

$$\eta(t) \sim WN\left(0, 2 \cdot \frac{15^2}{4^2}\right) = WN\left(0, \frac{225}{8}\right)$$

quindi:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{\left(z - \frac{4}{5}\right) \cdot \left(z + \frac{1}{2}\right)}{z \cdot \left(z - \frac{2}{3}\right)} \cdot \eta(t) \\ &= \frac{z^2 - \frac{4}{5}z + \frac{1}{2}z - \frac{4}{10}}{z^2 - \frac{2}{3}z} \cdot \eta(t) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{z^2 - \frac{3}{10}z - \frac{2}{5}}{z^2 - \frac{2}{3}z} \cdot \eta(t) \\
&= \frac{1 - \frac{3}{10}z^{-1} - \frac{2}{5}z^{-2}}{1 - \frac{2}{3}z^{-1}} \cdot \eta(t)
\end{aligned}
$$

ora tutti gli zeri e poli sono all'interno del cerchio di raggio unitario, numeratore e denominatore sono monici, hanno lo stesso grado (0) e non ci sono semplificazioni. Quindi il processo è in forma canonica.

1.3 Predittore a un passo

Il metodo più diretto per trovare il predittore a k passi consiste nel scrivere il processo come la somma di due parti:

- Una calcolabile utilizzando solo i dati presi a tempi noti, ossia quelli prima di $t - k$;
- Una non calcolabile che deve avere media 0 ed essere un processo $MA(k)$

Il modo più semplice per farlo è utilizzare la lunga divisione:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= H(z) \cdot \eta(t) \\
&= \frac{C(z)}{A(z)} \cdot \eta(t) \\
&= \left(E(z) + \frac{R(z)}{A(z)} \right) \cdot \eta(t) \\
&= \underbrace{E(z) \cdot \eta(t)}_{\text{non predicibile}} + \underbrace{\frac{R(z)}{A(z)} \cdot \eta(t)}_{\text{predicibile}}
\end{aligned}
$$

in questo modo, il predittore è:

$$
\begin{aligned}
\hat{y}(t|t-h) &= \frac{R(z)}{A(z)} \cdot \eta(t) \\
&= \frac{R(z)}{C(z)} \cdot y(t)
\end{aligned}
$$

1.3.1 Primo metodo: lunga divisione

Per quanto riguarda il predittore a un passo:

$$
\begin{array}{rccc|ccl}
C(z) = & 1 & -\frac{3}{10}z^{-1} & -\frac{2}{5}z^{-2} & 1 & -\frac{2}{3}z^{-1} & = A(z) \\
\hline
& -1 & +\frac{2}{3}z^{-1} & & 1 & & = E_1(z) \\
R_1(z) = & 0 & \frac{11}{30}z^{-1} & -\frac{2}{5}z^{-2} & & &
\end{array}
$$

quindi:

$$
\begin{aligned}
R_1(z) &= \frac{11}{30}z^{-1} - \frac{2}{5}z^{-2} \\
E_1(z) &= 1
\end{aligned}
$$

infine:

$$\begin{aligned}
\hat{y}(t|t-1) &= \frac{R_1(z)}{C(z)} \cdot y(t) \\
&= \frac{\frac{11}{30}z^{-1} - \frac{2}{5}z^{-2}}{1 - \frac{3}{10}z^{-1} - \frac{2}{5}z^{-2}} \cdot y(t) \\
&= \frac{\frac{11}{30} - \frac{2}{5}z^{-1}}{1 - \frac{3}{10}z^{-1} - \frac{2}{5}z^{-2}} \cdot y(t-1)
\end{aligned}$$

1.3.2 Secondo metodo: formule note

Un modo alternativo consiste nel ricordarsi che:

$$\begin{aligned}
R_1(z) &= C(z) - A(z) \\
E_1(z) &= 1
\end{aligned}$$

quindi:

$$\begin{aligned}
R_1(z) &= 1 - \frac{3}{10}z^{-1} - \frac{2}{5}z^{-2} - \left(1 - \frac{2}{3}z^{-1}\right) \\
&= \cancel{1} - \frac{3}{10}z^{-1} - \frac{2}{5}z^{-2} - \cancel{1} + \frac{2}{3}z^{-1} \\
&= \frac{11}{30}z^{-1} - \frac{2}{5}z^{-2}
\end{aligned}$$

infine:

$$\begin{aligned}
\hat{y}(t|t-1) &= \frac{R_1(z)}{C(z)} \cdot y(t) \\
&= \frac{\frac{11}{30}z^{-1} - \frac{2}{5}z^{-2}}{1 - \frac{3}{10}z^{-1} - \frac{2}{5}z^{-2}} \cdot y(t) \\
&= \frac{\frac{11}{30} - \frac{2}{5}z^{-1}}{1 - \frac{3}{10}z^{-1} - \frac{2}{5}z^{-2}} \cdot y(t-1)
\end{aligned}$$

1.4 Valutare la varianza dell'errore di predizione a un passo

Vogliamo calcolare:

$$\begin{aligned}
Var[\varepsilon_1(t)] &= \mathbb{E}\left[(y(t) - \hat{y}(t|t-1))^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(E_1(z) \cdot \eta(t))^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\eta(t)^2\right] = \frac{225}{8} = 28.125
\end{aligned}$$

1.5 Predittore a due passi

Per trovare il predittore a due passi è necessario continuare con la lunga divisione:

$$
\begin{array}{rccc|ccl}
C(z) = & 1 & -\frac{3}{10}z^{-1} & -\frac{2}{5}z^{-2} & 1 & -\frac{2}{3}z^{-1} & = A(z) \\
\hline
 & -1 & +\frac{2}{3}z^{-1} & & 1 & & = E_1(z) \\
R_1(z) = & 0 & \frac{11}{30}z^{-1} & -\frac{2}{5}z^{-2} & 1 & +\frac{11}{30}z^{-1} & = E_2(z) \\
 & & -\frac{11}{30}z^{-1} & +\frac{11}{45}z^{-2} & & & \\
R_2(z) = & & 0 & -\frac{7}{45}z^{-2} & & &
\end{array}
$$

quindi:

$$
\begin{aligned}
R_2(z) &= -\frac{7}{45}z^{-2} \\
E_2(z) &= 1 + \frac{11}{30}z^{-1}
\end{aligned}
$$

infine:

$$
\begin{aligned}
\hat{y}(t|t-2) &= \frac{R_2(z)}{C(z)} \cdot y(t) \\
&= \frac{-\frac{7}{45}z^{-2}}{1 - \frac{3}{10}z^{-1} - \frac{2}{5}z^{-2}} \cdot y(t) \\
&= \frac{-\frac{7}{45}}{1 - \frac{3}{10}z^{-1} - \frac{2}{5}z^{-2}} \cdot y(t-2)
\end{aligned}
$$

1.6 Valutare la varianza di predizione a due passi

Vogliamo calcolare:

$$
\begin{aligned}
Var[\varepsilon_2(t)] &= \mathbb{E}\left[(y(t) - \hat{y}(t|t-2))^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(E_2(z) \cdot \eta(t))^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\left(1 + \frac{11}{30} \cdot z^{-1}\right) \cdot \eta(t)\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\eta(t) + \frac{11}{30} \cdot \eta(t-1)\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\eta(t)^2\right] + \frac{121}{900} \cdot \mathbb{E}\left[\eta(t-1)^2\right] + \frac{22}{30}\cancel{\mathbb{E}\left[\eta(t)\,\eta(t-1)\right]} \\
&= \frac{225}{8} + \frac{121}{900} \cdot \frac{225}{8} = \frac{225}{8} + \frac{121}{36} \cdot \frac{9}{8} = \frac{225}{8} + \frac{121}{4} \cdot \frac{1}{8} = \\
&= \frac{1021}{32} \simeq 31.91
\end{aligned}
$$

1.7 Ricavare il valore della predizione $\hat{y}(5|4)$

Consideriamo il seguente dataset:

$$
y(1) = 5 \qquad y(2) = -6 \qquad y(3) = 2 \qquad y(4) = 7
$$

calcolare $\hat{y}(5|4)$ (supponendo che $y(t) = 0$ se $t \leq 0$). Come prima cosa è necessario calcolare l'equazione ricorsiva:

$$\left(1 - \frac{3}{10}z^{-1} - \frac{2}{5}z^{-2}\right) \cdot \hat{y}(t|t-1) = \left(\frac{11}{30} - \frac{2}{5}z^{-1}\right) \cdot y(t-1)$$

$$\hat{y}(t|t-1) - \frac{3}{10}z^{-1} \cdot \hat{y}(t|t-1) - \frac{2}{5}z^{-2} \cdot \hat{y}(t|t-1) = \frac{11}{30} \cdot y(t-1) - \frac{2}{5}z^{-1} \cdot y(t-1)$$

$$\hat{y}(t|t-1) - \frac{3}{10}\hat{y}(t-1|t-2) - \frac{2}{5}\hat{y}(t-2|t-3) = \frac{11}{30}y(t-1) - \frac{2}{5}y(t-2)$$

$$\hat{y}(t|t-1) = \frac{11}{30}y(t-1) - \frac{2}{5}y(t-2) + \frac{3}{10}\hat{y}(t-1|t-2) + \frac{2}{5}\hat{y}(t-2|t-3)$$

dato che è una equazione ricorsiva, è necessario avere una condizione iniziale. Solitamente si pone:

$$\hat{y}(-1|-2) = \hat{y}(-2|-3) = m_y = 0$$

se non si sa la media vera si può usare lo stimatore campionario:

$$\hat{y}(-1|-2) = \hat{y}(-2|-3) = \frac{1}{4}\sum_{t=1}^{4} y(t) = \frac{5-6+2+7}{4} = 2$$

ma in questo caso la media è nota. Quindi:

t	$y(t-1)$	$y(t-2)$	$\hat{y}(t-1\|t-2)$	$\hat{y}(t-2\|t-3)$	$\hat{y}(t\|t-1)$
0	0	0	0	0	$\frac{11}{30}\cdot 0 - \frac{2}{5}\cdot 0 + \frac{3}{10}\cdot 0 + \frac{2}{5}\cdot 0 = 0$
1	0	0	0	0	$\frac{11}{30}\cdot 0 - \frac{2}{5}\cdot 0 + \frac{3}{10}\cdot 0 + \frac{2}{5}\cdot 0 = 0$
2	5	0	0	0	$\frac{11}{30}\cdot 5 - \frac{2}{5}\cdot 0 + \frac{3}{10}\cdot 0 + \frac{2}{5}\cdot 0 = \frac{11}{6}$
3	-6	5	$\frac{11}{6}$	0	$\frac{11}{30}\cdot(-6) - \frac{2}{5}\cdot 5 + \frac{3}{10}\cdot\frac{11}{6} + \frac{2}{5}\cdot 0 = \frac{-44-40+11}{20} = -\frac{73}{20}$
4	2	-6	$-\frac{73}{20}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{11}{30}\cdot 2 - \frac{2}{5}\cdot(-6) + \frac{3}{10}\cdot\left(-\frac{73}{20}\right) + \frac{2}{5}\cdot\frac{11}{6} = \frac{440+1440-657+440}{600} = \frac{1663}{600}$
5	7	2	$\frac{1663}{600}$	$-\frac{73}{20}$	$\frac{11}{30}\cdot 7 - \frac{2}{5}\cdot 2 + \frac{3}{10}\cdot\frac{1663}{600} + \frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{73}{20}\right) = \frac{15400-4800+4989-8760}{6000} = \frac{6829}{6000}$

quindi:

$$\hat{y}(5|4) = \frac{6829}{6000} \simeq 1.14$$

2 Esercizio 2

Consideriamo il processo:

$$w(t) = \frac{z^2 - \frac{11}{6}z + \frac{1}{2}}{\left(5z^2 - \frac{10}{3}z + \frac{10}{9}\right)\left(z - \frac{1}{3}\right)} \cdot e(t) \qquad e(t) \sim WN(1, 1)$$

2.1 Controllo stazionarietà

Il processo $y(t)$ è stazionario se e solo se:

- $e(t)$ è un processo stocastico stazionaro. Lo è per definizione.
- $H(z)$ è un sistema dinamico asintoticamente stabile.

Per trovare i poli è trovare le radici del denominatore:

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= \frac{\frac{10}{3} \pm \sqrt{\frac{100}{9} - 4 \cdot 5 \cdot \frac{10}{9}}}{10} = \frac{\frac{10}{3} \pm \sqrt{-\frac{100}{9}}}{10} = \frac{\frac{10}{3} \pm j\frac{10}{3}}{10} \\ &= \frac{1}{3} \pm j\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\left\|p_{1,2}\right\| = \left\|\frac{1}{3} \pm j\frac{1}{3}\right\| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3} < 1$$

$$p_3 = \frac{1}{3} < 1$$

Quindi $y(t)$ è un processo stazionario.

2.2 Forma canonica

Per poter calcolare i predittori è necessario portare in forma canonica il processo. Per prima cosa decomponiamo il numeratore:

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{\frac{11}{6} \pm \sqrt{\frac{121}{36} - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}}}{2} = \frac{\frac{11}{6} \pm \sqrt{\frac{49}{36}}}{2} = \frac{\frac{11}{6} \pm \frac{7}{6}}{2} \\ &= \frac{11}{12} \pm \frac{7}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \\ z_2 &= \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

quindi:

$$w(t) = \frac{\left(z - \frac{3}{2}\right) \cdot \cancel{\left(z - \frac{1}{3}\right)}}{5 \cdot \left(z^2 - \frac{2}{3}z + \frac{2}{9}\right) \cdot \cancel{\left(z - \frac{1}{3}\right)}} \cdot e(t)$$

$$= \frac{z - \frac{3}{2}}{z^2 - \frac{2}{3}z + \frac{2}{9}} \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot e\left(t\right)\right)$$

lo zero è fuori dal cerchio di raggio unitario e quindi utilizziamo un filtro passa-tutto:

$$w\left(t\right) = \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \frac{z - \frac{2}{3}}{\cancel{z - \frac{3}{2}}} \cdot \frac{\cancel{z - \frac{3}{2}}}{z^2 - \frac{2}{3}z + \frac{2}{9}} \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot e\left(t\right)\right)$$

$$= \frac{z^{-2}}{z^{-2}} \cdot \frac{z - \frac{2}{3}}{z^2 - \frac{2}{3}z + \frac{2}{9}} \cdot \left(-\frac{3}{10} \cdot e\left(t\right)\right)$$

$$= \frac{z^{-1} - \frac{2}{3}z^{-2}}{1 - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{2}{9}z^{-2}} \cdot \left(-\frac{3}{10} \cdot e\left(t\right)\right)$$

ora si può notare che il numeratore ha grado -1 e il denominatore ha grado 0. Per risolvere il problema è possible introdurre un ritardo sul rumore:

$$w\left(t\right) = \frac{z^{-1} - \frac{2}{3}z^{-2}}{1 - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{2}{9}z^{-2}} \cdot \frac{z}{z}\left(-\frac{3}{10} \cdot e\left(t\right)\right)$$

$$w\left(t\right) = \frac{1 - \frac{2}{3}z^{-1}}{1 - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{2}{9}z^{-2}}\left(-\frac{3}{10}z^{-1} \cdot e\left(t\right)\right)$$

$$w\left(t\right) = \frac{1 - \frac{2}{3}z^{-1}}{1 - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{2}{9}z^{-2}} \cdot \left(-\frac{3}{10} \cdot e\left(t-1\right)\right)$$

ora possiamo ridefinire il rumore:

$$\eta\left(t\right) = -\frac{3}{10} \cdot e\left(t-1\right)$$

$$\eta\left(t\right) \sim WN\left(-\frac{3}{10} \cdot 1, \frac{3^2}{10^2} \cdot 1\right) = WN\left(-\frac{3}{10}, \frac{9}{100}\right)$$

ottenendo la forma canonica:

$$w\left(t\right) = \frac{1 - \frac{2}{3}z^{-1}}{1 - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{2}{9}z^{-2}} \cdot \eta\left(t\right)$$

2.3 Predittore a un passo e varianza

Per trovare il predittore a un passo è necessario usare con la lunga divisione:

$$\begin{array}{r|ccc|cccl}
C\left(z\right) = & 1 & -\frac{2}{3}z^{-1} & & 1 & -\frac{2}{3}z^{-1} & \frac{2}{9}z^{-2} & = A\left(z\right) \\
\cline{2-8}
 & -1 & +\frac{2}{3}z^{-1} & -\frac{2}{9}z^{-2} & 1 & & & = E_1\left(z\right) \\
R_1\left(z\right) = & 0 & 0 & -\frac{2}{9}z^{-2} & & & &
\end{array}$$

quindi:

$$R_1(z) = -\frac{2}{9}z^{-2}$$
$$E_1(z) = 1$$

infine:

$$\hat{y}(t|t-1) = \frac{R_1(z)}{C(z)} \cdot y(t) = \frac{-\frac{2}{9}z^{-2}}{1 - \frac{2}{3}z^{-1}} \cdot y(t) = \frac{-\frac{2}{9}}{1 - \frac{2}{3}z^{-1}} \cdot y(t-2)$$

Purtroppo questo predittore non è corretto:

$$\mathbb{E}[\varepsilon_1(t)] = \mathbb{E}[E_1(z) \cdot \eta(t)] = \mathbb{E}[\eta(t)] = -\frac{3}{10} \neq 0$$

per risolvere il problema conviene modificare il sistema in modo che sia un ARMAX nel seguente modo:

$$w(t) = \frac{1 - \frac{2}{3}z^{-1}}{1 - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{2}{9}z^{-2}} \cdot (\tilde{\eta}(t) + u(t))$$

dove

$$\tilde{\eta}(t) = \eta(t) - u(t) = \eta(t) - m_\eta = \eta(t) + \frac{3}{10}$$
$$\tilde{\eta}(t) \sim WN\left(0, \frac{9}{100}\right)$$

è il segnale depolarizzato,invece $u(t) = u(t-1) = u(t-2) = \ldots = m_\eta = -\frac{3}{10}$. Quindi si ottiene:

$$w(t) = \frac{1 - \frac{2}{3}z^{-1}}{1 - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{2}{9}z^{-2}} \cdot \tilde{\eta}(t) + \frac{1 - \frac{2}{3}z^{-1}}{1 - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{2}{9}z^{-2}} \cdot u(t)$$

questo è:

$$A(z) = 1 - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{2}{9}z^{-2}$$
$$B(z) = 1 - \frac{2}{3}z^{-1}$$
$$C(z) = 1 - \frac{2}{3}z^{-1}$$

in questo modo si possono utilizzare le formule per il predittore ARMAX con $u(t)$costante:

$$\begin{aligned}\hat{y}(t|t-1) &= \frac{\cancel{B(z)} \cdot E_1(z)}{\cancel{C(z)}} \cdot u(t-1) + \frac{R_1(z)}{C(z)} \cdot y(t) \\ &= 1 \cdot u(t-1) + \frac{R_1(z)}{C(z)} \cdot y(t) \\ &= u(t-1) + \frac{-\frac{2}{9}}{1 - \frac{2}{3}z^{-1}} \cdot y(t-2)\end{aligned}$$

$$= \frac{-\frac{2}{9}}{1-\frac{2}{3}z^{-1}} \cdot y\,(t-2) - \frac{3}{10}$$

che è corretto:

$$\mathbb{E}\,[\varepsilon_1\,(t)] = \mathbb{E}\,[E_1\,(z)\cdot\tilde{\eta}\,(t)] = \mathbb{E}\,[\tilde{\eta}\,(t)] = 0$$

e la cui varianza è:

$$\mathbb{E}\left[\varepsilon_1\,(t)^2\right] = \mathbb{E}\left[\tilde{\eta}\,(t)^2\right] = \frac{9}{100}$$

2.4 Predittore a due passi e varianza

Si può notare che il predittore a un passo può essere usato anche come predittore a due passi

$$\hat{y}\,(t|t-1) = \frac{-\frac{2}{9}}{1-\frac{2}{3}z^{-1}} \cdot y\,(t-2) - \frac{3}{10}$$

di conseguenza il predittore a due passi è uguale:

$$\hat{y}\,(t|t-2) = \frac{-\frac{2}{9}}{1-\frac{2}{3}z^{-1}} \cdot y\,(t-2) - \frac{3}{10}$$

e la sua varianza è uguale:

$$\mathbb{E}\left[\varepsilon_2\,(t)^2\right] = \frac{9}{100}$$

Osservazione:
Solitamente per ottenere predittori a τ passi si devono svolgere τ passi di lunga divisione (minori nel caso in cui si ottiene prima il resto $R_i\,(z) = 0$, esempio es 3.1). Questo esercizio, è un caso particolare, poichè, applicando il secondo colpo di lunga divisione si ottiene il predittore ad un passo (poichè $R_1\,(z) = R_2\,(z)$). Questo è facilmente osservabile dal fatto che in $\hat{y}\,(t|t-1)$ non è presente l'elemento $y\,(t-2)$. Se si volesse trovare il predittore a 3 passi si dovrebbe fare 3 colpi di lunga divisione e quindi ottenere $R_3\,(z)$.

3 Esercizio 3

Si consideri il seguente processo:

$$y(t) = 2 \cdot u(t-1) + \frac{1}{2} \cdot u(t-2) + e(t) + \frac{2}{3} \cdot e(t-1) + \frac{13}{36} \cdot e(t-2) \qquad e(t) \sim WN(0,1)$$

3.1 Calcolare il predittore ad un passo e varianza

Per prima cosa, conviene scrivere il processo in forma dinamica:

$$\begin{aligned} y(t) &= 2z^{-1} \cdot u(t) + \frac{1}{2}z^{-2} \cdot u(t) + e(t) + \frac{2}{3}z^{-1} \cdot e(t) + \frac{13}{36}z^{-2} \cdot e(t) \\ &= \underbrace{\left(2 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)}_{B(z)} \cdot u(t-1) + \underbrace{\left(1 + \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{13}{36}z^{-2}\right)}_{C(z)} \cdot e(t) \end{aligned}$$

è in forma canonica?

- $C(z)$ e $A(z)$ hanno lo stesso grado, sono monici e coprimi

bisogna solo controllare che le radici di $C(z)$ siano all'interno del raggio unitario.

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{C(z)}{A(z)} \\ &= \frac{z^2}{z^2} \cdot \frac{1 + \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{13}{36}z^{-2}}{1} \\ &= \frac{z^2 + \frac{2}{3}z + \frac{13}{36}}{z^2} \end{aligned}$$

$$z_{1,2} = \frac{-\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} - 4 \cdot \frac{13}{36}}}{2} = \frac{-\frac{2}{3} \pm \sqrt{-1}}{2} = -\frac{1}{3} \pm \frac{j}{2}$$

$$\left\|z_{1,2}\right\| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{13}{36}} \simeq 0.601 < 1$$

quindi il sistema è stabile e il processo è in forma canonica. Applicando la lunga divisione, si nota che:

$$\begin{array}{rccc|cc} C(z) = & 1 & +\frac{2}{3}z^{-1} & +\frac{13}{36}z^{-2} & 1 & = A(z) \\ \hline & -1 & & & 1 & = E_1(z) \\ R_1(z) = & 0 & +\frac{2}{3}z^{-1} & +\frac{13}{36}z^{-2} & & \end{array}$$

proseguendo tutti i quozienti rimangono uguali e i resti saranno sempre 0. Quindi:

$$R_1(z) = \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{13}{36}z^{-2}$$

$$E_1(z) = 1$$

quindi i predittori sono:

$$\hat{y}(t|t-1) = \frac{B(z) \cdot E_1(z)}{C(z)} \cdot u(t-1) + \frac{R_1(z)}{C(z)} \cdot y(t)$$

$$= \frac{\left(2+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\cdot 1}{1+\frac{2}{3}z^{-1}+\frac{13}{36}z^{-2}}\cdot u\left(t-1\right)+\frac{\frac{2}{3}z^{-1}+\frac{13}{36}z^{-2}}{1+\frac{2}{3}z^{-1}+\frac{13}{36}z^{-2}}\cdot y\left(t\right)$$

$$= \frac{2+\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{2}{3}z^{-1}+\frac{13}{36}z^{-2}}\cdot u\left(t-1\right)+\frac{\frac{2}{3}+\frac{13}{36}z^{-1}}{1+\frac{2}{3}z^{-1}+\frac{13}{36}z^{-2}}\cdot y\left(t-1\right)$$

Le varianza è:

$$\mathbb{E}\left[\varepsilon_1\left(t\right)^2\right]=\mathbb{E}\left[\left(E_1\left(z\right)\cdot e\left(t\right)\right)^2\right]=\mathbb{E}\left[e\left(t\right)^2\right]=1$$

3.2 Calcolare l'ESR del predittore a un passo

per trovare l'ESR è necessario calcolare la varianza della parte stocastica del processo:

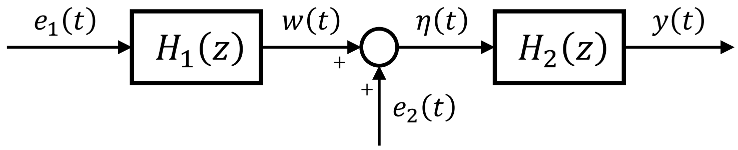
$$Var\left[y\left(t\right)\right]=\mathbb{E}\left[\tilde{y}\left(t\right)^2\right]=\mathbb{E}\left[\left(\frac{C\left(z\right)}{A\left(z\right)}e\left(t\right)\right)^2\right]=\mathbb{E}\left[\left(\left(1+\frac{2}{3}z^{-1}+\frac{13}{36}z^{-2}\right)\cdot e\left(t\right)\right)^2\right]=\frac{2041}{1296}$$

con $\tilde{y}\left(t\right)$ processo depolarizzato.
quindi:

$$\text{ESR}=\frac{1}{\frac{2041}{1296}}=\frac{1296}{2041}\simeq 0.64$$

4 Esercizio 4

Consideriamo il seguente processo stocastico $y(t)$



con:

$$e_1(t) \sim WN(0,1) \qquad e_2(t) \sim WN(1,1)$$

con $e_1(t) \perp e_2(t)$ e

$$H_1(z) = \frac{5z+25}{5z+1} \qquad H_2(z) = \frac{3z+12}{6z^2+5z+1}$$

4.1 Classificazione

Iniziamo considerando il segnale $w(t)$:

$$\begin{aligned} w(t) &= H_1(z) \cdot e(t) = \frac{5z+25}{5z+1} \cdot e_1(t) \\ &= \frac{5}{5} \cdot \frac{z+5}{z+\frac{1}{5}} \cdot e_1(t) = 5 \cdot \underbrace{\frac{1}{5} \cdot \frac{z+5}{z+\frac{1}{5}}}_{\text{passa-tutto}} \cdot e_1(t) = 5 \cdot e_1(t) \end{aligned}$$

quindi:

$$\eta(t) = w(t) + e_2(t) = 5 \cdot e_1(t) + e_2(t)$$

si può notare che:

$$\begin{aligned} m_\eta &= \mathbb{E}[\eta(t)] = \mathbb{E}[5 \cdot e_1(t) + e_2(t)] \\ &= 5 \cdot \mathbb{E}[e_1(t)] + \mathbb{E}[e_2(t)] = 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

Per quanto riguarda la funzione di autocovarianza, per semplificare i conti si può procedere considerando il processo già depolarizzato (utilizzando la stessa notazione $\eta(t)$ ma facendo attenzione a considerare $m_\eta = 0$ per il calcolo che segue):

$$\begin{aligned} \gamma_{\eta\eta}(0) &= \mathbb{E}\left[\eta(t)^2\right] = \mathbb{E}\left[(5 \cdot e_1(t) + e_2(t))^2\right] \\ &= 25 \cdot \mathbb{E}\left[e_1(t)^2\right] + 10 \cdot \cancel{\mathbb{E}[e_1(t) \cdot e_2(t)]} + \mathbb{E}\left[e_2(t)^2\right] \\ &= 25 \cdot 1 + 1 = 26 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\eta\eta}(h \neq 0) &= \mathbb{E}[\eta(t) \cdot \eta(t-h)] = \mathbb{E}[(5 \cdot e_1(t) + e_2(t)) \cdot (5 \cdot e_1(t-h) + e_2(t-h))] \\ &= 25 \cdot \cancel{\mathbb{E}[e_1(t) \cdot e_1(t-h)]} + 5 \cdot \cancel{\mathbb{E}[e_1(t) \cdot e_2(t-h)]} + 5 \cdot \cancel{\mathbb{E}[e_2(t) \cdot e_1(t-h)]} + \cancel{\mathbb{E}[e_2(t) \cdot e_2(t-h)]} \\ &= 0 \end{aligned}$$

In modo alternativo, si potrebbe considerare il processo originale non depolarizzato e procedere applicando la definizione di funzione di autovarianza:

$$\gamma_{\eta\eta}(0) = \mathbb{E}\left[\left(\eta(t) - m_\eta\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[(5 \cdot e_1(t) + e_2(t) - 1)^2\right]$$

$$= 25 \cdot \mathbb{E}\left[e_1(t)^2\right] + 10 \cdot \cancel{\mathbb{E}\left[e_1(t) \cdot e_2(t)\right]} + \mathbb{E}\left[e_2(t)^2\right] + 1 - 10 \cdot \cancel{\mathbb{E}\left[e_1(t)\right]} - 2 \cdot \mathbb{E}\left[e_2(t)\right]$$
$$= 25 \cdot \mathbb{E}\left[e_1(t)^2\right] + \mathbb{E}\left[e_2(t)^2\right] + 1 - 2 \cdot 1 = 25 \cdot \mathbb{E}\left[e_1(t)^2\right] + \mathbb{E}\left[e_2(t)^2\right] - 1$$
$$= 25 \cdot \underbrace{\mathbb{E}\left[e_1(t)^2\right]}_{Var[e_1(t)]=\lambda_{e_1}^2=1} + \underbrace{\left[\mathbb{E}\left[e_2(t)^2\right] - \mathbb{E}\left[e_2(t)\right]^2\right]}_{Var[e_2(t)]=\lambda_{e_2}^2=1} = 25 \cdot 1 + 1 = 26$$

$$\gamma_{\eta\eta}(h \neq 0) = \mathbb{E}\left[\left(\eta(t) - m_\eta\right) \cdot \left(\eta(t-h) - m_\eta\right)\right] = \ldots = 0$$

Si conclude quindi che $\eta(t)$ è un white noise:

$$\eta(t) \sim WN(1, 26)$$

infine:

$$y(t) = \frac{3z + 12}{6z^2 + 5z + 1} \cdot \eta(t)$$

quindi il processo è un $ARMA(2,1)$.

4.2 Stazionarietà

Poichè $\eta(t)$ è un white noise, per controllare la stazionarietà di $y(t)$, è necessario calcolare i poli del sistema:

$$p_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6 \cdot 1}}{12} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{12} = \frac{-5 \pm 1}{12}$$

$$p_1 = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3}$$
$$p_2 = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2}$$

che sono entrambi all'interno del cerchio di raggio unitario. Quindi $y(t)$ è un processo stazionario.

4.3 Forma canonica

Prima di trovare i predittori è necessario portare il processo in forma canonica. Per prima cosa bisogna scomporre:

$$y(t) = \frac{3z + 12}{6z^2 + 5z + 1} \cdot \eta(t) = \frac{3(z+4)}{6\left(z + \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{1}{3}\right)} \cdot \eta(t)$$

dato che c'è uno zero fuori dal cerchio di raggio unitario è necessario applicare un filtro passa-tutto:

$$y(t) = 4 \cdot \frac{z + \frac{1}{4}}{\cancel{z+4}} \cdot \frac{3\cancel{(z+4)}}{6\left(z + \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{1}{3}\right)} \cdot \eta(t)$$

$$= \frac{z + \frac{1}{4}}{\left(z + \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{1}{3}\right)} \cdot \left(4 \cdot \frac{3}{6} \cdot \eta(t)\right)$$

$$= \frac{z^{-2}}{z^{-2}} \cdot \frac{z + \frac{1}{4}}{z^2 + \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}} \cdot (2 \cdot \eta(t))$$

$$= \frac{z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}}{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}} \cdot (2 \cdot \eta(t))$$

dato che il numeratore ha grado -1 e il denominatore ha grado 0:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}}{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}} \cdot z \cdot z^{-1} \cdot (2 \cdot \eta(t)) \\ &= \frac{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}} \cdot (2 \cdot \eta(t-1)) \end{aligned}$$

definendo:

$$d(t) = 2 \cdot \eta(t-1)$$

si ottiene la forma canonica:

$$y(t) = \frac{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}} \cdot d(t)$$

dove:

$$\begin{aligned} d(t) &\sim WN\left(2 \cdot 1, 2^2 \cdot 26\right) \\ d(t) &\sim WN(2, 104) \end{aligned}$$

4.4 Predittore a un passo e varianza

Dato che la media è diversa da 0, conviene trasformarlo in un ARMAX:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}} \cdot d(t) \\ &= \frac{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}} \cdot \left(\tilde{d}(t) + u(t)\right) \end{aligned}$$

dove

$$\tilde{d}(t) = d(t) - m_d = d(t) - 2$$

$$\tilde{d}(t) \sim WN(0, 104)$$

Quindi l'ingresso è costante ed uguale a $u(t) = u(t-1) = u(t-2) = \ldots = m_d = -2$
quindi:

$$y(t) = \frac{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}} \cdot u(t) + \frac{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}} \cdot \tilde{d}(t)$$

che è un ARMAX con:

$$A(z) = 1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}$$

$$B(z) = 1 + \frac{1}{4}z^{-1}$$

$$C(z) = 1 + \frac{1}{4}z^{-1}$$

Facendo la lunga divisione:

$$\begin{array}{rccc|cccr}
C(z) = & 1 & +\frac{1}{4}z^{-1} & & 1 & +\frac{5}{6}z^{-1} & +\frac{1}{6}z^{-2} & = A(z) \\
\hline
 & -1 & -\frac{5}{6}z^{-1} & -\frac{1}{6}z^{-2} & 1 & & & = E_1(z) \\
R_1(z) = & 0 & -\frac{7}{12}z^{-1} & -\frac{1}{6}z^{-2} & & & &
\end{array}$$

quindi:

$$R_1(z) = -\frac{7}{12}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2}$$
$$E_1(z) = 1$$

si applica la formula del il predittore di un *ARMAX* con $u(t)$ costante:

$$\begin{aligned}
\hat{y}(t|t-1) &= \frac{B(z) \cdot E_1(z)}{C(z)} \cdot u(t-1) + \frac{R_1(z)}{C(z)} \cdot y(t) \\
&= \frac{\cancel{\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1}\right)} \cdot 1}{\cancel{\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1}\right)}} \cdot u(t-1) + \frac{-\frac{7}{12}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}} \cdot y(t) \\
&= u(t) - \frac{\frac{7}{12} + \frac{1}{6}z^{-1}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}} \cdot y(t-1) \\
&= 2 - \frac{\frac{7}{12} + \frac{1}{6}z^{-1}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}} \cdot y(t-1)
\end{aligned}$$

con la varianza:

$$Var[\varepsilon_1(t)] = \mathbb{E}\left[(y(t) - \hat{y}(t|t-1))^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(E_1(t) \cdot \tilde{d}(t)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\tilde{d}(t)^2\right] = 104$$

4.5 Predittore a due passi e varianza

Riprendendo la forma ARMAX:

$$y(t) = \frac{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}} \cdot u(t) + \frac{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}} \cdot \tilde{d}(t)$$

con:

$$A(z) = 1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}$$

$$B(z) = 1 + \frac{1}{4}z^{-1}$$

$$C(z) = 1 + \frac{1}{4} z^{-1}$$

Continuando la lunga divisione:

$$\begin{array}{rcccc|cccr}
C(z) = & 1 & +\frac{1}{4}z^{-1} & & & 1 & +\frac{5}{6}z^{-1} & +\frac{1}{6}z^{-2} & = A(z) \\
\hline
 & -1 & -\frac{5}{6}z^{-1} & -\frac{1}{6}z^{-2} & & 1 & & & = E_1(z) \\
R_1(z) = & 0 & -\frac{7}{12}z^{-1} & -\frac{1}{6}z^{-2} & & 1 & -\frac{7}{12}z^{-1} & & = E_2(z) \\
 & & +\frac{7}{12}z^{-1} & +\frac{35}{72}z^{-2} & +\frac{7}{72}z^{-3} & & & & \\
R_2(z) = & & 0 & +\frac{23}{72}z^{-2} & +\frac{7}{72}z^{-3} & & & &
\end{array}$$

quindi:

$$R_2(z) = \frac{23}{72} z^{-2} + \frac{7}{72} z^{-3}$$

$$E_2(z) = 1 - \frac{7}{12} z^{-1}$$

si applica la formula di un *ARMAX* con $u(t)$ costante:

$$\begin{aligned}
\hat{y}(t|t-2) &= \frac{B(z) \cdot E_2(z)}{C(z)} \cdot u(t-2) + \frac{R_2(z)}{C(z)} \cdot y(t) \\
&= \frac{\cancel{\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1}\right)} \cdot \left(1 - \frac{7}{12}z^{-1}\right)}{\cancel{\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1}\right)}} \cdot u(t-2) + \frac{\frac{23}{72}z^{-2} + \frac{7}{72}z^{-3}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}} \cdot y(t) \\
&= \left(1 - \frac{7}{12}z^{-1}\right) \cdot u(t-2) + \frac{\frac{23}{72} + \frac{7}{72}z^{-1}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}} \cdot y(t-2) \\
&= \left(u(t-2) - \frac{7}{12}z^{-1} \cdot u(t-2)\right) + \frac{\frac{23}{72} + \frac{7}{72}z^{-1}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}} \cdot y(t-2) \\
&= \left(u(t-2) - \frac{7}{12} \cdot u(t-3)\right) + \frac{\frac{23}{72} + \frac{7}{72}z^{-1}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}} \cdot y(t-2) \\
&= \left(2 - \frac{7}{12} \cdot 2\right) + \frac{\frac{23}{72} + \frac{7}{72}z^{-1}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}} \cdot y(t-2) \\
&= \frac{5}{6} + \frac{\frac{23}{72} + \frac{7}{72}z^{-1}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}} \cdot y(t-2)
\end{aligned}$$

con la varianza:

$$Var\left[\varepsilon_2(t)\right] = \mathbb{E}\left[\left(y(t) - \hat{y}(t|t-2)\right)^2\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left[\left(E_2(t) \cdot \tilde{d}(t)\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\left(1 - \frac{7}{12}z^{-1}\right) \cdot \tilde{d}(t)\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\tilde{d}(t) - \frac{7}{12} \cdot \tilde{d}(t-1)\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\tilde{d}(t)^2\right] + \frac{49}{144} \cdot \mathbb{E}\left[\tilde{d}(t-1)^2\right] - \frac{14}{12} \cdot \cancel{\mathbb{E}\left[\tilde{d}(t) \cdot \tilde{d}(t-1)\right]} \\
&= 104 + \frac{49}{144} \cdot 104 = \frac{193}{144} \cdot 104 = \frac{193}{18} \cdot 13 \\
&= \frac{2509}{18} \simeq 139.39
\end{aligned}
$$

5 Esercizio 5

Consideriamo il seguente processo:

$$y(t) = \frac{1}{3} \cdot y(t-3) + u(t-1) + 3 \cdot u(t-2) + e(t) + \frac{1}{2} \cdot e(t-1) \qquad e(t) \sim WN(0,1)$$

5.1 Forma canonica

Prima di calcolare i predittori bisogna trovare la forma canonica. Per prima cosa ricaviamo la forma dinamica:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \frac{1}{3}z^{-3} \cdot y(t) + z^{-1} \cdot u(t) + 3z^{-2} \cdot u(t) + e(t) + \frac{1}{2}z^{-1} \cdot e(t) \\
y(t) - \frac{1}{3}z^{-3} \cdot y(t) &= z^{-1} \cdot u(t) + 3z^{-2} \cdot u(t) + e(t) + \frac{1}{2}z^{-1} \cdot e(t) \\
y(t) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}z^{-3}\right) &= u(t) \cdot \left(z^{-1} + 3z^{-2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right) \cdot e(t) \\
y(t) &= \frac{1 + 3z^{-1}}{1 - \frac{1}{3}z^{-3}} \cdot u(t-1) + \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{3}z^{-3}} \cdot e(t)
\end{aligned}$$

che è un $ARMAX$ $\left(y(t) = \frac{B(z)}{A(z)}u(t-k) + \frac{C(z)}{A(z)}e(t)\right)$ con:

$$\begin{aligned}
A(z) &= 1 - \frac{1}{3}z^{-3} \\
B(z) &= 1 + 3z^{-1} \\
C(z) &= 1 + \frac{1}{2}z^{-1}
\end{aligned}$$

con $k = 1$
è già in forma canonica.

5.2 Predittore a un passo e varianza

Si applica la formula di un predittore per un $ARMAX$:

$$\hat{y}(t|t-k) = \frac{B(z)\,E_k(z)}{C(z)} \cdot u(t-k) + \frac{R_k(z)}{C(z)} \cdot y(t)$$

con $k = 1$
Si calcola la lunga divisione ad un passo.

$$\begin{array}{r|cccc|ccc}
C(z) = & 1 & +\frac{1}{2}z^{-1} & & & 1 & -\frac{1}{3}z^{-3} & = A(z) \\
\hline
 & -1 & 0 & 0 & +\frac{1}{3}z^{-3} & 1 & & = E_1(z) \\
R_1(z) = & 0 & +\frac{1}{2}z^{-1} & 0 & +\frac{1}{3}z^{-3} & & &
\end{array}$$

ottenendo il predittore:

$$\tilde{y}(t|t-1) = \frac{B(z) \cdot 1}{C(z)} \cdot u(t-1) + \frac{\frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-3}}{C(z)} \cdot y(t)$$

$$= \frac{\left(1 + 3z^{-1}\right) \cdot 1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \cdot u\left(t-1\right) + \frac{\frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-3}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \cdot y\left(t\right)$$

$$= \frac{1 + 3z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \cdot u\left(t-1\right) + \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}z^{-2}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \cdot y\left(t-1\right)$$

infine è possibile ricavare la varianza dell'errore di predizione:

$$Var\left[\varepsilon_1\left(t\right)\right] = \mathbb{E}\left[\left(E_1\left(z\right) \cdot e\left(t\right)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[1 \cdot e\left(t\right)^2\right] = 1$$

6 Esercizio 6

Dato il seguente modello a tempo discreto definito nello spazio di stati, come:

$$\begin{cases} x_1(t+1) & = 0.8x_1(t) + u(t) + e(t) \\ x_2(t+1) & = x_1(t) + 0.5x_2(t) + 4e(t) \\ y(t) & = x_2(t) \end{cases}$$

dove $e(t) \sim WN(0,1)$ e $u(t)$è una variabile esogena.

6.1 Trovare il modello ARMAX corrispondente

Trovo le forme dinamiche

$$\begin{cases} z \cdot x_1(t) & = 0.8x_1(t) + u(t) + e(t) \\ z \cdot x_2(t) & = x_1(t) + 0.5x_2(t) + 4e(t) \\ y(t) & = x_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (z-0.8) \cdot x_1(t) & = u(t) + e(t) \\ (z-0.5) \cdot x_2(t) & = x_1(t) + 4e(t) \\ y(t) & = x_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(t) & = \frac{1}{z-0.8}u(t) + \frac{1}{z-0.8}e(t) \\ x_2(t) & = \frac{1}{z-0.5}x_1(t) + \frac{4}{z-0.5}e(t) \\ y(t) & = x_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(t) & = \frac{1}{z-0.8}u(t) + \frac{1}{z-0.8}e(t) \\ x_2(t) & = \frac{1}{(z-0.5)(z-0.8)}u(t) + \frac{1}{(z-0.5)(z-0.8)}e(t) + \frac{4}{z-0.5}e(t) \\ y(t) & = x_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(t) & = \frac{1}{z-0.8}u(t) + \frac{1}{z-0.8}e(t) \\ x_2(t) & = \frac{1}{(z-0.5)(z-0.8)}u(t) + \frac{1+4(z-0.8)}{(z-0.5)(z-0.8)}e(t) \\ y(t) & = x_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(t) & = \frac{1}{z-0.8}u(t) + \frac{1}{z-0.8}e(t) \\ x_2(t) & = \frac{1}{(z-0.5)(z-0.8)}u(t) + \frac{4z-2.2}{(z-0.5)(z-0.8)}e(t) \\ y(t) & = x_2(t) \end{cases}$$

quindi:

$$y(t) = x_2(t) = \frac{1}{(z-0.5)(z-0.8)}u(t) + \frac{4z-2.2}{(z-0.5)(z-0.8)}e(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{z^2-1.3z+0.4}u(t) + \frac{4z-2.2}{z^2-1.3z+0.4}e(t)$$

$$y(t) = \frac{z^{-2}}{1-1.3z^{-1}+0.4z^{-2}}u(t) + \frac{4z^{-1}-2.2z^{-2}}{1-1.3z^{-1}+0.4z^{-2}}e(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{1-1.3z^{-1}+0.4z^{-2}}u(t-2) + \frac{4z^{-1}-2.2z^{-2}}{1-1.3z^{-1}+0.4z^{-2}}e(t)$$

applicando la definizione di ARMAX $y(t) = \frac{B(z)}{A(z)} u(t-k) + \frac{C(z)}{A(z)} e(t)$, si definiscono:

$$\begin{aligned} A(z) &= \left(1 - 1.3z^{-1} + 0.4z^{-2}\right) \\ B(z) &= 1 \\ C(z) &= \left(4z^{-1} - 2.2z^{-2}\right) \end{aligned}$$

6.2 Forma canonica

$$y(t) = \frac{1}{1 - 1.3z^{-1} + 0.4z^{-2}} u(t-2) + \frac{4z^{-1} - 2.2z^{-2}}{1 - 1.3z^{-1} + 0.4z^{-2}} e(t)$$

si calcolano poli e zeri solo della parte stocastica $\frac{C(z)}{A(z)}$:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{2.2}{4} = 0.55 \\ p_{1,2} &= \frac{1.3 \pm \sqrt{1.3^2 + 4 \cdot 0.4 \cdot -1}}{2} = \frac{1.3 \pm \sqrt{1.69 - 1.6}}{2} = \frac{1.3 \pm 0.3}{2} \\ p_1 &= 0.5 \\ p_2 &= 0.8 \end{aligned}$$

Sia i poli che gli zeri sono all'interno del cerchio unitario. La rappresentazione non è comunque canonica dato che:

- $C(z)$ non è monica
- $C(z)$ e $A(z)$ non hanno lo stesso grado

$$\frac{C(z)}{A(z)} = \frac{4z^{-1} - 2.2z^{-2}}{1 - 1.3z^{-1} + 0.4z^{-2}} \cdot z \cdot z^{-1} \cdot \frac{4}{4} e(t)$$

$$\frac{C(z)}{A(z)} = \frac{1 - 0.55z^{-1}}{1 - 1.3z^{-1} + 0.4z^{-2}} \cdot z^{-1} \cdot 4e(t)$$

$$\frac{C(z)}{A(z)} = \frac{1 - 0.55z^{-1}}{1 - 1.3z^{-1} + 0.4z^{-2}} \cdot 4e(t-1)$$

Definendo:

$$\eta(t) = 4e(t-1)$$

si ottiene la forma canonica:

$$\frac{C(z)}{A(z)} = \frac{1 - 0.55z^{-1}}{1 - 1.3z^{-1} + 0.4z^{-2}} \cdot \eta(t)$$

dove:

$$\begin{aligned} \eta(t) &\sim WN\left(0, 4^2 \cdot 1\right) \\ &\sim WN(0, 16) \end{aligned}$$

6.3 Predittore a 2 passi e varianza

Per trovare il predittore a 2 passi è necessario usare con la lunga divisione:

$$\begin{array}{rcccc|cccr}
C(z) = & 1 & -0.55z^{-1} & & & 1 & -1.3z^{-1} & +0.4z^{-2} & = A(z) \\
\hline
 & -1 & +1.3z^{-1} & -0.4z^{-2} & & 1 & & & = E_1(z) \\
R_1(z) = & 0 & +0.75z^{-1} & -0.4z^{-2} & & 1 & +0.75z^{-1} & & = E_2(z) \\
 & & -0.75z^{-1} & +0.975z^{-2} & -0.3z^{-3} & & & & \\
R_2(z) = & & 0 & +0.575z^{-2} & -0.3z^{-3} & & & &
\end{array}$$

Sapendo che vale $R(z) = z^{-k}\tilde{R}(z)$, quindi:

$$\begin{aligned}
k &= 2 \\
\tilde{R}_2(z) &= 0.575 - 0.3z^{-1}
\end{aligned}$$

Quindi il predittore ottimo a 2 passi, applicando la formula del predittore per un $ARMAX$ $\left(\hat{y}(t|t-k) = \frac{B(z)E_k(z)}{C(z)}u(t-k) + \frac{\tilde{R}_k(z)}{C(z)}y(t-k)\right)$, è:

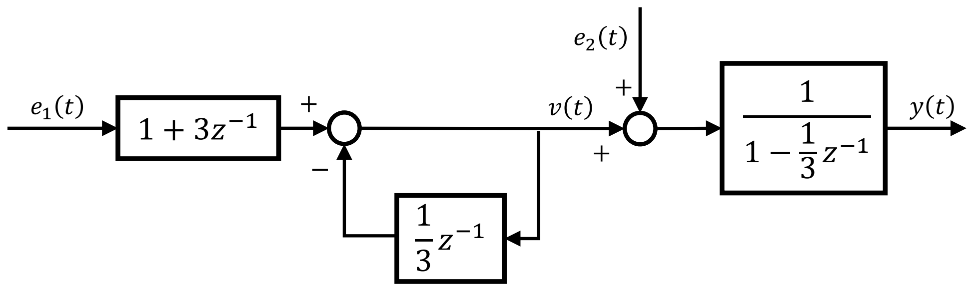
$$\begin{aligned}
\hat{y}(t|t-2) &= \frac{B(z)E_2(z)}{C(z)}u(t-2) + \frac{\tilde{R}_2(z)}{C(z)}y(t-2) \\
\hat{y}(t|t-2) &= \frac{1 \cdot \left(1 + 0.75z^{-1}\right)}{1 - 0.55z^{-1}}u(t-2) + \frac{0.575 - 0.3z^{-1}}{1 - 0.55z^{-1}}y(t-2)
\end{aligned}$$

con varianza

$$\begin{aligned}
Var[\varepsilon_2(t)] &= \mathbb{E}\left[(y(t) - \hat{y}(t|t-2))^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(E_2(z) \cdot \eta(t))^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\left(1 + 0.75z^{-1}\right) \cdot \eta(t)\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(\eta(t) + 0.75 \cdot \eta(t-1))^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\eta(t)^2\right] + 0.5625 \cdot \mathbb{E}\left[\eta(t-1)^2\right] + 1.5 \cdot \cancel{\mathbb{E}[\eta(t) \cdot \eta(t-1)]} \\
&= 16 + 0.562 \cdot 16 \cong 16 + 9 = 25
\end{aligned}$$

7 Esercizio 7

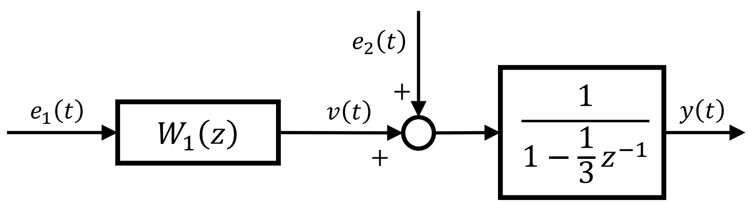
Si consideri il processo $y(t)$ generato secondo il seguente schema:



dove $e_1(t) \sim WN(1,1)$ e $e_2(t) \sim WN(1,2)$ e sono incorrelati $e_1(t) \perp e_2(t)$

7.1 Predittore a 3 passi con varianza e media

Si noti che lo schema può essere scritto come:



Dove la funzione di trasferimento $W_1(z)$ è:

$$W_1(z) = \frac{v(t)}{e_1(t)} = \left(1+3z^{-1}\right) \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{z+3}{z+\frac{1}{3}}$$

Si noti che il polo è il reciproco dello zero, quindi moltiplicando e dividendo $W_1(z)$ per 3 è possibile definire il filtro passa tutto $T(z) = \frac{1}{3}W_1(z)$, ovvero:

$$\begin{aligned} v(t) = W_1(z)\,e_1(t) &= \frac{z+3}{z+\frac{1}{3}} \cdot \frac{3}{3} \cdot e_1(t) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{z+3}{z+\frac{1}{3}} \cdot 3 \cdot e_1(t) \\ &= T(z) \cdot 3 \cdot e_1(t) \end{aligned}$$

Quindi lo spettro di $v(t)$è il medesimo di $3 \cdot e_1(t)$. Definiamo:

$$\eta(t) = 3e_1(t)$$

Il quale la media e la varianza sono:

$$m_\eta = \mathbb{E}[\eta(t)] = 3\mathbb{E}[e_1(t)] = 3$$

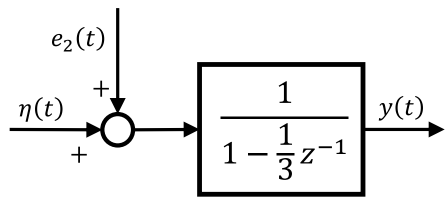
$$\gamma_{\eta\eta}(0) = \mathbb{E}\left[(\eta(t)-3)^2\right] = \mathbb{E}\left[(3e_1(t)-3)^2\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= 9\mathbb{E}\left[(e_1(t)-1)^2\right] = 9Var\left[e_1(t)\right] \\
&= 9
\end{aligned}
$$

Quindi:

$$\eta(t) \sim WN(3,9)$$

Lo schema può essere ridisegnato come:



Si noti che, definendo:

$$e(t) = e_2(t) + \eta(t)$$

$e(t)$ è un white noise dato che deriva dalla somma di white noise incorrelati, con media e varianza:

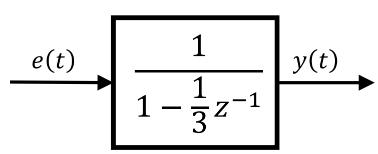
$$m_e = \mathbb{E}[e(t)] = \mathbb{E}[e_2(t)+\eta(t)] = \mathbb{E}[e_2(t)] + \mathbb{E}[\eta(t)] = 1+3 = 4$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_{ee}(0) &= \mathbb{E}\left[(e(t)-4)^2\right] = \mathbb{E}\left[(e_2(t)+\eta(t)-4)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[((e_2(t)-1)+(\eta(t)-3))^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[((\tilde{e}_2(t))+(\tilde{\eta}(t)))^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(\tilde{e}_2(t))^2\right] + \mathbb{E}\left[(\tilde{\eta}(t))^2\right] + 2\underbrace{\cancel{\mathbb{E}\left[(\tilde{e}_2(t))(\tilde{\eta}(t))\right]}}_{e_2(t)\perp e_1(t)} \\
&= 2+9 = 11
\end{aligned}
$$

Quindi:

$$e(t) \sim WN(4,11)$$

Lo schema così diventa:



Si noti che il processo è un $AR(1)$ con media non nulla, difatti la rappresentazione ricorsiva è:

$$y(t) = \tfrac{1}{3}y(t-1) + e(t), \qquad e(t) \sim WN(4,11)$$

Con media:

$$
\begin{aligned}
m_y = \mathbb{E}\left[y\left(t\right)\right] &= \frac{1}{3}m_y + m_e \\
m_y\left(1 - \frac{1}{3}\right) &= 4 \\
m_y &= 4 \cdot \frac{3}{2} = 6
\end{aligned}
$$

Dato che la media è diversa da 0, conviene trasformarlo in un ARMAX, depolarizzando $e\left(t\right)$:

$$
y\left(t\right) = \frac{1}{3}y\left(t-1\right) + \left(\tilde{e}\left(t\right) + u\left(t\right)\right)
$$

dove:

$$
\tilde{e}\left(t\right) = e\left(t\right) - m_e \Longrightarrow e\left(t\right) = \tilde{e}\left(t\right) + 4 \qquad \tilde{e}\left(t\right) \sim WN\left(0, 11\right)
$$

Quindi $u\left(t\right) = u\left(t-1\right) = \ldots = 4$.

$$
\begin{aligned}
y\left(t\right) &= \frac{1}{3}y\left(t-1\right) + \tilde{e}\left(t\right) + u\left(t\right), \qquad \tilde{e}\left(t\right) \sim WN\left(0, 11\right) \\
y\left(t\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right) &= \tilde{e}\left(t\right) + u\left(t\right) \\
y\left(t\right) &= \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}u\left(t\right) + \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}\tilde{e}\left(t\right)
\end{aligned}
$$

Quindi:

$$
\begin{aligned}
A\left(z\right) &= 1 - \frac{1}{3}z^{-1} \\
B\left(z\right) &= 1 \\
C\left(z\right) &= 1
\end{aligned}
$$

La parte stocastica è già in forma canonica, quindi si procede con la lunga divisione a 3 passi:

$$
\begin{array}{rcccc|cccl}
C\left(z\right) = & 1 & & & & 1 & -\frac{1}{3}z^{-1} & & = A\left(z\right) \\
\hline
 & -1 & +\frac{1}{3}z^{-1} & & & 1 & & & = E_1\left(z\right) \\
R_1\left(z\right) = & 0 & +\frac{1}{3}z^{-1} & & & 1 & +\frac{1}{3}z^{-1} & & = E_2\left(z\right) \\
 & & -\frac{1}{3}z^{-1} & +\frac{1}{9}z^{-2} & & 1 & +\frac{1}{3}z^{-1} & +\frac{1}{9}z^{-2} & = E_3\left(z\right) \\
R_2\left(z\right) = & & 0 & +\frac{1}{9}z^{-2} & & & & & \\
 & & & -\frac{1}{9}z^{-2} & +\frac{1}{27}z^{-3} & & & & \\
R_3\left(z\right) = & & & 0 & +\frac{1}{27}z^{-3} & & & &
\end{array}
$$

Sapendo che vale $R\left(z\right) = z^{-k}\tilde{R}\left(z\right)$:

$$
\begin{aligned}
k &= 3 \\
\tilde{R}_3\left(z\right) &= \frac{1}{27}
\end{aligned}
$$

Quindi il predittore ottimo a 3 passi di un *ARMAX*, con $u\left(t\right)$ costante, è:

$$
\hat{y}\left(t|t-3\right) = \frac{B\left(z\right)E_3\left(z\right)}{C\left(z\right)}u\left(t-3\right) + \frac{\tilde{R}_3\left(z\right)}{C\left(z\right)}y\left(t-3\right)
$$

$$\hat{y}(t|t-3) = \left(1 + \frac{1}{3}z^{-1} + \frac{1}{9}z^{-2}\right) u(t-3) + \frac{1}{27} y(t-3)$$
$$\hat{y}(t|t-3) = u(t-3) + \frac{1}{3}u(t-4) + \frac{1}{9}u(t-5) + \frac{1}{27}y(t-3)$$

Sostituendo $u(t) = u(t-1) = \ldots = 4$, si ottiene:

$$\begin{aligned}
\hat{y}(t|t-3) &= \left(4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{9}\right) + \frac{1}{27}y(t-3) \\
\hat{y}(t|t-3) &= \frac{108 + 36 + 12}{27} + \frac{1}{27}y(t-3) \\
\hat{y}(t|t-3) &= \frac{156}{27} + \frac{1}{27}y(t-3) \\
\hat{y}(t|t-3) &= \frac{52}{9} + \frac{1}{27}y(t-3)
\end{aligned}$$

Si noti che:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\hat{y}(t|t-3)] &= \frac{1}{27}\mathbb{E}[y(t-3)] + \frac{52}{9} \\
&= \frac{1}{27} \cdot m_y + \frac{52}{9} \\
&= \frac{6}{27} + \frac{52}{9} = 6 = \mathbb{E}[y(t)]
\end{aligned}$$

La media del predittore deve essere uguale alla media del processo (per ogni predittore per ogni processo).
Media dell'errore del predittore a 3 passi:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\varepsilon_3(t)] &= \mathbb{E}[y(t) - \hat{y}(t|t-3)] \\
&= \mathbb{E}[E_3(z)\tilde{e}(t)] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(1 + \frac{1}{3}z^{-1} + \frac{1}{9}z^{-2}\right)\tilde{e}(t)\right] = 0
\end{aligned}$$

La media dell'errore del predittore deve essere uguale a 0 (per ogni predittore per ogni processo).
La varianza dell'errore del predittore a 3 passi:

$$\begin{aligned}
Var[\varepsilon_3(t)] &= \mathbb{E}\left[(y(t) - \hat{y}(t|t-3))^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(E_3(z)\tilde{e}(t))^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\left(1 + \frac{1}{3}z^{-1} + \frac{1}{9}z^{-2}\right)\tilde{e}(t)\right)^2\right] = \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{81}\right)11 = \frac{91}{81}11 \\
&= \frac{1001}{81}
\end{aligned}$$

La varianza dell'errore del predittore deve essere uguale o minore alla varianza del processo (per ogni predittore per ogni processo).
Per dimostrare ciò si calcola $\gamma_{yy}(0)$.
Per semplicità si depolarizzano sia $y(t)$ che $e(t)$:

$$\begin{aligned}
\tilde{y}(t) &= y(t) - m_y = y(t) - 6 \\
\tilde{e}(t) &= e(t) - m_e = e(t) - 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{y}(t) + 6 &= \tfrac{1}{3}\tilde{y}(t-1) + \tfrac{6}{3} + \tilde{e}(t) + 4 \\
\tilde{y}(t) &= \tfrac{1}{3}\tilde{y}(t-1) + \tilde{e}(t), \qquad \tilde{e}(t) \sim WN(0, 11)
\end{aligned}$$

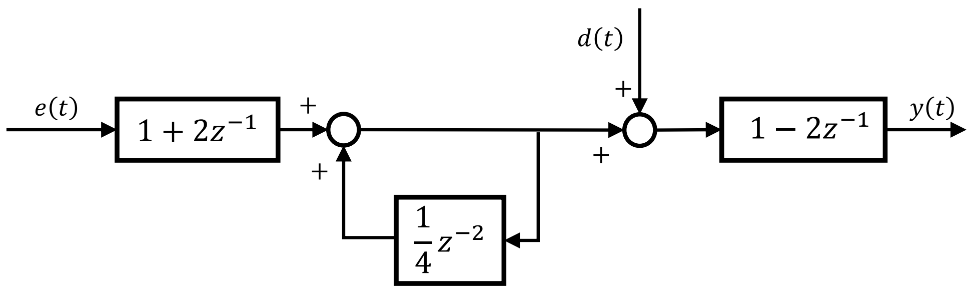
$$
\begin{aligned}
\gamma_{yy}(0) = \gamma_{\tilde{y}\tilde{y}}(0) &= \mathbb{E}\left[\tilde{y}(t)^2\right] \\
\gamma_{\tilde{y}\tilde{y}}(0) &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{3}\tilde{y}(t-1) + \tilde{e}(t)\right)^2\right] \\
\gamma_{\tilde{y}\tilde{y}}(0) &= \frac{1}{9}\mathbb{E}\left[\tilde{y}(t-1)^2\right] + \mathbb{E}\left[\tilde{e}(t)^2\right] + \frac{2}{3}\cancel{\mathbb{E}\left[\tilde{y}(t-1)\tilde{e}(t)\right]} \\
\gamma_{\tilde{y}\tilde{y}}(0) &= \frac{1}{9}\gamma_{\tilde{y}\tilde{y}}(0) + 11 + 0 \\
\gamma_{\tilde{y}\tilde{y}}(0)\left(1 - \frac{1}{9}\right) &= 11 \\
\gamma_{\tilde{y}\tilde{y}}(0) &= 11 \cdot \frac{9}{8} = \frac{99}{8}
\end{aligned}
$$

Sostituendo, si dimostra quanto detto.

$$
\gamma_{yy}(0) = \frac{99}{8} \sim 12.38 > 12.36 \sim \frac{1001}{81} = \mathbb{E}\left[\varepsilon_3(t)^2\right]
$$

8 Esercizio 8

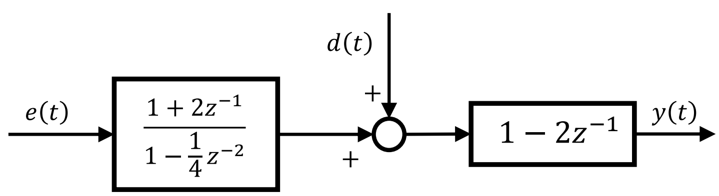
Si consideri il processo $y(t)$ generato dal sequente schema:



dove $e(t) \sim WN(0,1)$, $\quad d(t) = 2 \quad \forall t$

8.1 Predittore a un passo con varianza e media

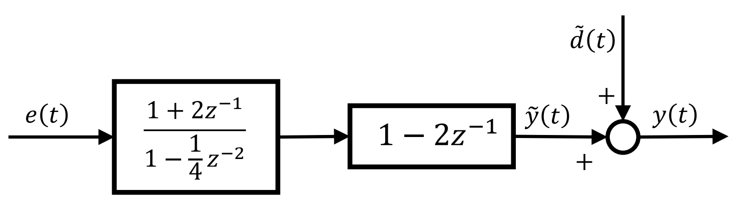
Lo schema a blocchi equivale a:



Si noti che $d(t)$ è costante, quindi l'effetto di questo segnale su $y(t)$ è:

$$\tilde{d}(t) = \left(1 - 2z^{-1}\right) d(t) = d(t) - 2d(t-1) = 2 - 4 = -2$$

Muovendo il blocco $1 - 2z^{-1}$ alla sinistra del nodo sommatore lo schema diventa:



Quindi, il sistema può essere visto come un *ARMAX*:

$$y(t) = \tilde{d}(t) + \frac{\left(1 + 2z^{-1}\right)\left(1 - 2z^{-1}\right)}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}} e(t), \qquad e(t) \sim WN(0,1), \quad \tilde{d}(t) = -2 \qquad \forall t$$

Definendo $W(z) = \frac{\left(1+2z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}$, si ottiene:

$$y(t) = \tilde{d}(t) + W(z)\, e(t) = \tilde{d}(t) + \tilde{y}(t)$$

Si noti che:

$$\tilde{y}(t) = W(z)\, e(t) = \frac{\left(1 + 2z^{-1}\right)\left(1 - 2z^{-1}\right)}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}} \cdot e(t)$$

$$= \frac{\left(1+2z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)} \cdot e\left(t\right)$$

$$= \frac{1+2z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \cdot e\left(t\right)$$

$$= \frac{1+2z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{-4}{-4} e\left(t\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\frac{1+2z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right) \cdot \left(-4\right) e\left(t\right)$$

$$= T_1\left(z\right) \cdot T_2\left(z\right) \cdot \left(-4\right) e\left(t\right)$$

Dove $T_1\left(z\right)$ e $T_2\left(z\right)$ sono filtri passa tutto.
Definendo:

$$\eta\left(t\right) = -4e\left(t\right)$$
$$\eta\left(t\right) \sim WN\left(0, 16\right)$$

Il processo diventa:

$$y\left(t\right) = u\left(t-1\right) + \eta\left(t\right)$$

con $u\left(t\right) = u\left(t-1\right) = \tilde{d}\left(t\right) = -2 \qquad \forall t$
Il processo è un *ARMAX*, con:

$$A\left(z\right) = 1$$
$$B\left(z\right) = 1$$
$$C\left(z\right) = 1$$

Dato che l'input esogeno è completamente conosciuto (costante), la media del processo m_y vale:

$$\begin{aligned} m_y &= \mathbb{E}\left[y\left(t\right)\right] = \mathbb{E}\left[u\left(t-1\right) + \eta\left(t\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[u\left(t-1\right)\right] + \mathbb{E}\left[\eta\left(t\right)\right] = -2 \end{aligned}$$

Il predittore ottimo ad un passo del processo è il predittore banale:

$$\hat{y}\left(t|t-1\right) = u\left(t-1\right) = -2$$

Si noti che:

$$m_{\hat{y}} = \mathbb{E}\left[\hat{y}\left(t|t-1\right)\right] = -2 = m_y$$

Quindi, la media dell'errore di predizione a un passo è:

$$\mathbb{E}\left[\varepsilon_1\left(t\right)\right] = \mathbb{E}\left[y\left(t\right) - \hat{y}\left(t|t-1\right)\right] = m_{\hat{y}} - m_y = 0$$

Con varianza dell'errore di predizione a un passo:

$$\mathbb{E}\left[(\varepsilon_1(t))^2\right] = \mathbb{E}\left[(\eta(t))^2\right] = 16$$

Ovviamente, il predittore a k- passi è ancora il predittore banale:

$$\hat{y}(t|t-k) = -2$$

la varianza dell'errore a k-passi è uguale alla varianza del rumore.

9 Esercizio 9

Si consideri il processo

$$y(t) = e(t-1) + 2e(t-2) + e(t-4) + 2e(t-5) + 1, \qquad e(t) \sim WN(1,1)$$

9.1 Calcolare e disegnare la varianza dell'errore di predizione in funzione dell'orizzonte del predittore

Si noti che il processo è un $MA(5)$ in forma non canonica, con media:

$$\begin{aligned} m_y &= \mathbb{E}[y(t)] = \mathbb{E}[e(t-1) + 2e(t-2) + e(t-4) + 2e(t-5) + 1] \\ &= \mathbb{E}[e(t-1)] + 2\mathbb{E}[e(t-2)] + \mathbb{E}[e(t-4)] + 2\mathbb{E}[e(t-5)] + 1 \\ &= 1 + 2 + 1 + 2 + 1 = 7 \end{aligned}$$

Per calcolare la varianza $\gamma_{yy}(0)$ si depolarizza il processo:

$$\begin{cases} \tilde{y}(t) & = y(t) - m_y = y(t) - 7 \\ \tilde{e}(t) & = e(t) - m_e = e(t) - 1 \end{cases}$$

così diventa:

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t) + 7 &= \tilde{e}(t-1) + 1 + 2\tilde{e}(t-2) + 2 + \tilde{e}(t-4) + 1 + 2\tilde{e}(t-5) + 2 + 1 \\ \tilde{y}(t) &= \tilde{e}(t-1) + 2\tilde{e}(t-2) + \tilde{e}(t-4) + 2\tilde{e}(t-5) \end{aligned}$$

con $\tilde{e}(t) \sim WN(0,1)$.
Quindi:

$$\begin{aligned} \gamma_{yy}(0) &= \gamma_{\tilde{y}\tilde{y}}(0) = \mathbb{E}\left[\tilde{y}(t)^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\tilde{e}(t-1) + 2\tilde{e}(t-2) + \tilde{e}(t-4) + 2\tilde{e}(t-5)\right)^2\right] \\ &= 1 + 4 + 1 + 4 = 10 \end{aligned}$$

Per semplicità, definiamo:

$$\eta(t) = e(t-1)$$

quindi il processo diventa:

$$y(t) = \eta(t) + 2\eta(t-1) + \eta(t-3) + 2\eta(t-4) + 1, \qquad \eta(t) \sim WN(1,1)$$

e depolarizzando $\eta(t)$:

$$\tilde{\eta}(t) = \eta(t) - 1$$

$$y(t) = \tilde{\eta}(t) + 2\tilde{\eta}(t-1) + \tilde{\eta}(t-3) + 2\tilde{\eta}(t-4) + 7, \qquad \eta(t) \sim WN(0,1)$$

Che è un MA(4), sempre in forma non canonica (bias +7).
La varianza dell'errore di predizione del predittore a k-passi può quindi essere calcolata considerando il predittore dal rumore.
Predittore a un passo dal rumore:

$$\hat{y}(t|t-1) = 2\tilde{\eta}(t-1) + \tilde{\eta}(t-3) + 2\tilde{\eta}(t-4) + 7$$

$$Var[\varepsilon_1(t)] = \mathbb{E}\left[(y(t) - \hat{y}(t|t-1))^2\right] = \mathbb{E}\left[\tilde{\eta}(t)^2\right] = 1$$

Predittore a 2 passi dal rumore:

$$\hat{y}(t|t-2) = \tilde{\eta}(t-3) + 2\tilde{\eta}(t-4) + 7$$

$$\begin{aligned} Var[\varepsilon_2(t)] &= \mathbb{E}\left[(y(t) - \hat{y}(t|t-2))^2\right] = \mathbb{E}\left[(\tilde{\eta}(t) + 2\tilde{\eta}(t-1))^2\right] \\ &= 1 + 4 = 5 \end{aligned}$$

Predittore a 3 passi dal rumore:

$$\hat{y}(t|t-3) = \tilde{\eta}(t-3) + 2\tilde{\eta}(t-4) + 7$$

$$\begin{aligned} Var[\varepsilon_3(t)] &= \mathbb{E}\left[(y(t) - \hat{y}(t|t-3))^2\right] = \mathbb{E}\left[(\tilde{\eta}(t) + 2\tilde{\eta}(t-1))^2\right] \\ &= 1 + 4 = 5 \end{aligned}$$

Predittore a 4 passi dal rumore:

$$\hat{y}(t|t-4) = 2\tilde{\eta}(t-4) + 7$$

$$\begin{aligned} Var[\varepsilon_4(t)] &= \mathbb{E}\left[(y(t) - \hat{y}(t|t-4))^2\right] = \mathbb{E}\left[(\tilde{\eta}(t) + 2\tilde{\eta}(t-1) + \tilde{\eta}(t-3))^2\right] \\ &= 1 + 4 + 1 = 6 \end{aligned}$$

Predittore a 5 passi dal rumore:

$$\hat{y}(t|t-5) = 7$$

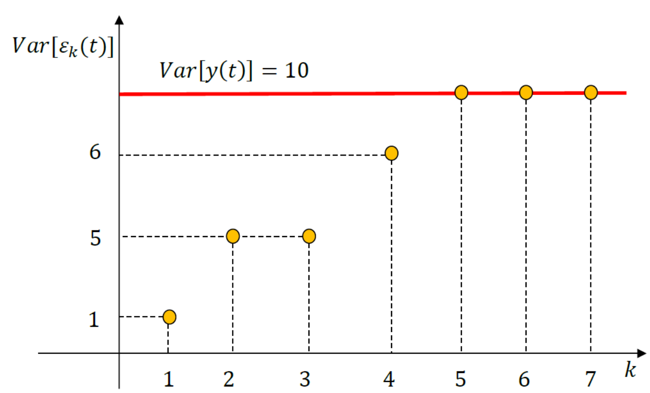
$$\begin{aligned} Var[\varepsilon_5(t)] &= \mathbb{E}\left[(y(t) - \hat{y}(t|t-5))^2\right] = \mathbb{E}\left[(\tilde{\eta}(t) + 2\tilde{\eta}(t-1) + \tilde{\eta}(t-3) + 2\tilde{\eta}(t-4))^2\right] \\ &= 1 + 4 + 1 + 4 = 10 \end{aligned}$$

Predittore a k passi dal rumore (con $k \geq 6$):

$$\hat{y}(t|t-k) = 7$$

$$\begin{aligned} Var[\varepsilon_k(t)] &= \mathbb{E}\left[(y(t) - \hat{y}(t|t-k))^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(\tilde{\eta}(t) + 2\tilde{\eta}(t-1) + \tilde{\eta}(t-3) + 2\tilde{\eta}(t-4))^2\right] \\ &= 10 \end{aligned}$$

La varianza del predittore a k passi dal rumore, con $k \geq 6$, coincide quindi con la varianza del processo $y(t)$. Quindi la varianza dell'errore di predizione $\varepsilon_k(t)$ in funzione dell'orizzonte di predizione k è:



La media del predittore è sempre uguale alla media del processo, per ogni orizzonte di predizione k, quindi:

$$\mathbb{E}[\hat{y}(t|t-k)] = m_y = 7, \qquad \forall k$$