



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI BERGAMO

Dipartimento  
di Ingegneria Gestionale,  
dell'Informazione e della Produzione



# IDENTIFICAZIONE DEI MODELLI E ANALISI DEI DATI (IMAD)

## Lezione 13: Identificazione – valutazione del modello

Corso di Laurea Magistrale in  
INGEGNERIA INFORMATICA

SPEAKER

Prof. Mirko Mazzoleni

PLACE

Università degli Studi di  
Bergamo

# Syllabus

## Parte II: sistemi dinamici

### 8. Processi stocastici

- 8.1 Processi stocastici stazionari (pss)
- 8.3 Rappresentazione spettrale di un pss
- 8.4 Stimatori campionari media\covarianza
- 8.5 Densità spettrale campionaria

### 9. Famiglie di modelli a spettro razionale

- 9.1 Modelli per serie temporali (MA, AR, ARMA)
- 9.2 Modelli per sistemi input/output (ARX, ARMAX)

### 10. Predizione

- 10.1 Filtro passa-tutto

10.2 Forma canonica

10.3 Teorema della fattorizzazione spettrale

10.4 Soluzione al problema della predizione

### 11. Identificazione

11.3 Identificazione di modelli ARX

11.4 Identificazione di modelli ARMAX

11.5 Metodo di Newton

### 12. Identificazione: analisi e complementi

12.1 Analisi asintotica metodi PEM

12.2 Identificabilità dei modelli

12.3 Valutazione dell'incertezza di stima

### 13. Identificazione: valutazione



# IMAD

## Parte I: sistemi statici

## Parte II: sistemi dinamici

### Stima parametrica $\hat{\theta}$

- $\theta$  deterministico

- ***NO assunzioni su ddp dei dati***

- ✓ Stima parametri popolazione
- ✓ Stima modello lineare: minimi quadrati

- ***SI assunzioni su ddp dei dati***

- ✓ Stima massima verosimiglianza parametri popolazione
- ✓ Stima modello lineare: massima verosimiglianza
- ✓ Regressione logistica

- $\theta$  variabile casuale

- ***SI assunzioni su ddp dei dati***

- ✓ Stima Bayesiana

### Machine learning

### Stima parametrica $\hat{\theta}$

- $\theta$  deterministico

- ***NO assunzioni su ddp dei dati***

- ✓ Modelli lineari di pss
- ✓ Predizione
- ✓ Identificazione
- ✓ Persistente eccitazione
- ✓ Analisi asintotica metodi PEM
- ✓ Analisi incertezza stima (numero dati finito)

- ✓ Valutazione del modello



# Outline

1. Scelta della struttura e complessità del modello
2. Validazione o formule di complessità per la scelta della complessità
3. Analisi dei residui
4. Analisi dell'incertezza della stima
5. Simulazione, predizione del modello identificato
6. Confronto con stima nonparametrica
7. Considerazioni pratiche

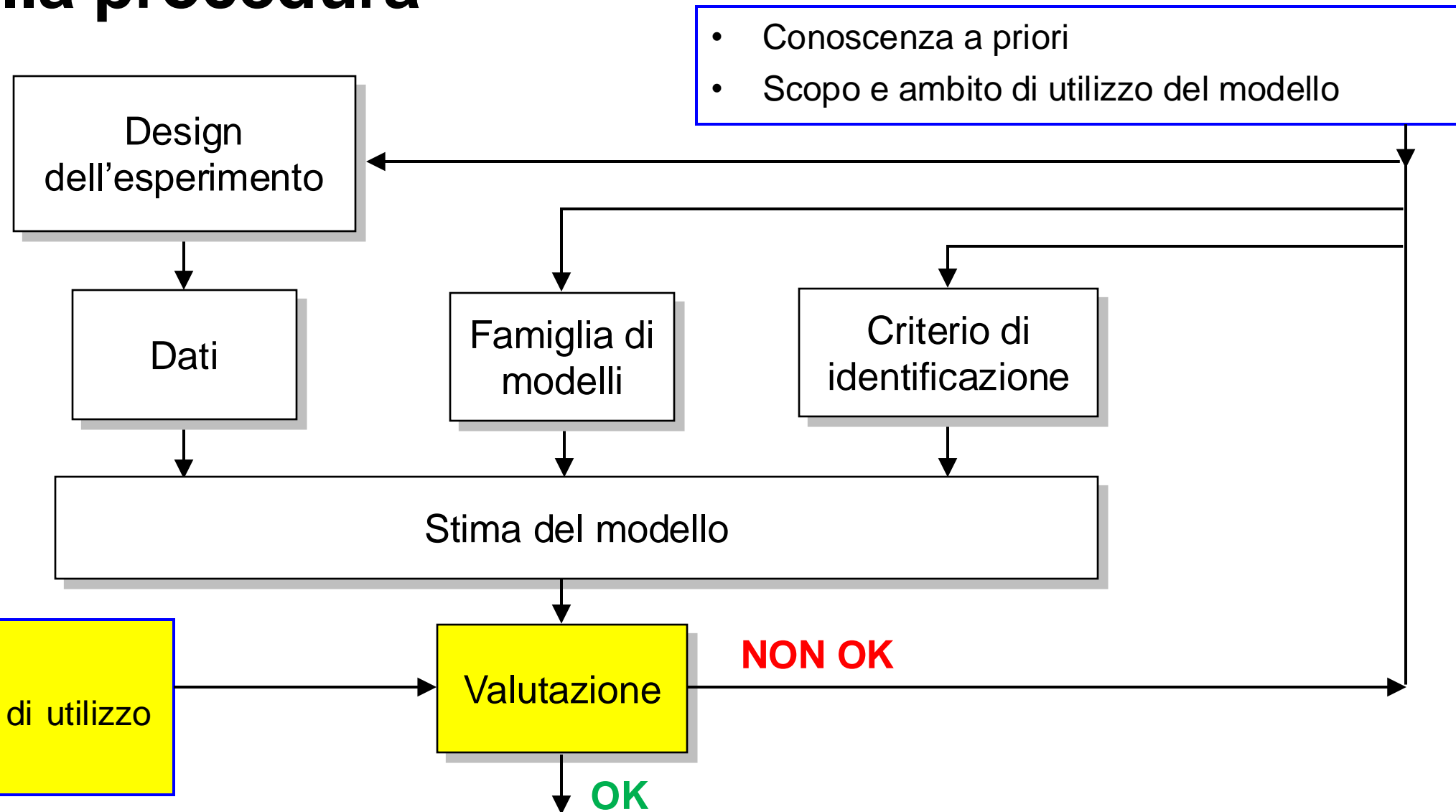


# Outline

- 1. Scelta della struttura e complessità del modello**
2. Validazione o formule di complessità per la scelta della complessità
3. Analisi dei residui
4. Analisi dell'incertezza della stima
5. Simulazione, predizione del modello identificato
6. Confronto con stima nonparametrica
7. Considerazioni pratiche



# I passi della procedura



# Scelta struttura e complessità del modello

La scelta della **famiglia di modelli**  $\mathcal{M}(\theta)$  appropriata può essere scomposta in due diversi aspetti:

1. **Scelta dalla struttura del modello:** concerne la scelta della struttura delle funzioni di trasferimento  $G(z, \theta)$  e  $H(z, \theta)$
2. **Scelta dalla complessità del modello:** concerne la scelta degli ordini dei polinomi delle funzioni di trasferimento

L'obiettivo è quello di trovare un «**buon modello**» ad un «**prezzo ragionevole**»

Nel caso **generale**, un modello è buono se ha poco bias e poca varianza: nel caso **specifico**, un modello deve essere buono per **l'utilizzo** che se ne deve fare

# Scelta struttura e complessità del modello

Per «prezzo ragionevole» si intende quanto sforzo è necessario per **identificare** e **utilizzare** il modello:

- Quanto **tempo** ci vuole per trovare la stima e se la stima dipende da inizializzazioni
- Quanto un modello è di **ordine ridotto**, per poter essere utilizzato in ambito real-time

Vi è un tradeoff tra bontà e prezzo del modello. In particolare, due aspetti sono importanti:

- La **complessità computazionale** dei metodi di ottimizzazione iterativi, e il vantaggio di usare schemi di regressione lineare
- L'abilità di **modellare bene**  $G_0(z)$  anche se  $H_0(z)$  non è modellato bene



# Considerazioni generali

- In base alla **fisica** del processo che deve essere modellato, è possibile avere informazioni sul **minimo ordine del modello** necessario (e.g. un sistema massa-molla-smorzatore sarà almeno di ordine 2)
- In base alla **fisica** del processo che deve essere modellato, è possibile avere informazioni su come **pre-processare** i segnali a disposizione. Per esempio, potrebbe essere utile elevare al quadrato o fare il logaritmo di certi segnali e poi usare una regressione lineare con le variabili trasformate, stimando un ARX
- Se ho pochi dati, non posso usare un modello di ordine elevato, pena overfitting

**Rule-of-thumb:**  $N \gg 10 \cdot d$



# Considerazioni generali

- L'analisi **nonparametrica** tramite ETFE può dare importanti informazioni sull'ordine del modello soprattutto per quanto riguarda la posizione di **risonanze**
- Un modello dovrebbe limitarsi a modellare al massimo **3 decenni in frequenza**:
  - ✓ Per un modello che usa dati campionati ad **alta frequenza**, le dinamiche lente vengono viste come integratori
  - ✓ Per un modello a **bassa frequenza**, le dinamiche veloci vengono viste come relazioni statiche. In questo caso, si può introdurre un termine senza delay  $b_o u(t)$
  - ✓ Se necessario, costruire più modelli con dati campionati a frequenze diverse

# Considerazioni generali

- Una volta stimati i parametri di un modello, guardiamo le loro **deviazioni standard**. Se la deviazione standard è tale da **includere lo zero**, allora quel parametro potrebbe **non essere significativo**
- ✓ Questa analisi permette di scegliere il **ritardo puro**  $k$  più opportuno, identificando diversi modelli (di solito ARX) con diversi valori di  $k$ , e scegliendo quello per cui tutti i coefficienti  $B(z)$  sono significativi
- Per rendersi conto del **ritardo** del sistema e della sua **linearità** (e anche della dinamica dominante) è possibile effettuare una **risposta allo scalino**, con diverse ampiezze di scalino

# Considerazioni generali

- La **bontà** di un modello può essere valutata:
  - ✓ Analizzando i residui (cioè gli errori di predizione a un passo), meglio con dati di **validazione**
  - ✓ Confrontando l'uscita **simulata** o **predetta** con l'uscita **misurata**, su dati di **validazione**, e calcolandone un indicatore di «**FIT**»
  - ✓ Rappresentando un grafico di **poli-zeri** con rispettive **bande di confidenza**, per vedere se vi sono cancellazioni (e quindi se si può semplificare il modello)
  - ✓ Rappresentando i **diagrammi di Bode** di diversi modelli e confrontandoli con la ETFE

# Outline

1. Scelta della struttura e complessità del modello
- 2. Validazione o formule di complessità per la scelta della complessità**
3. Analisi dei residui
4. Analisi dell'incertezza della stima
5. Simulazione, predizione del modello identificato
6. Confronto con stima nonparametrica
7. Considerazioni pratiche



# Validazione o formule di complessità

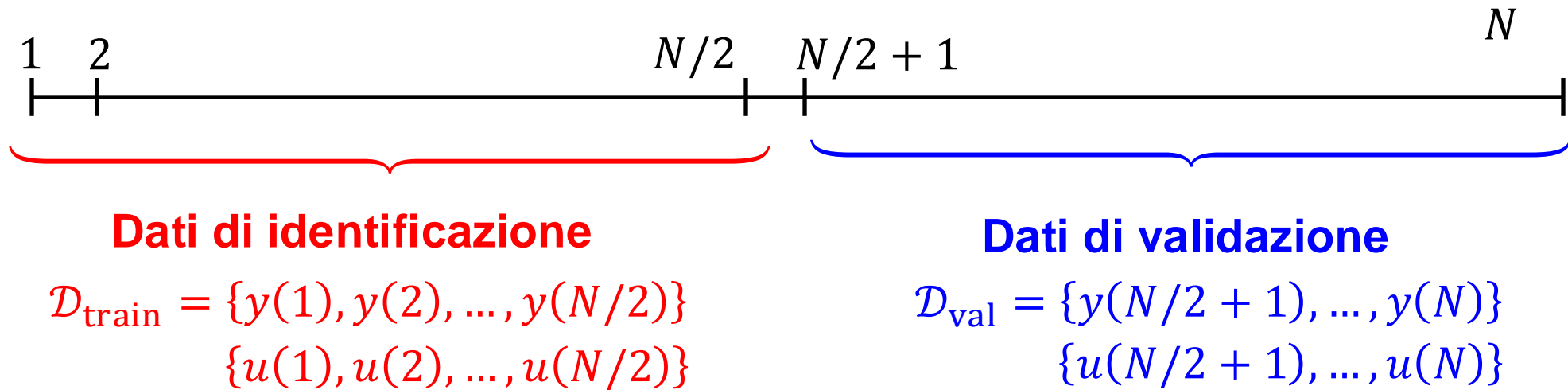
Fissata la struttura di una famiglia di modelli  $\mathcal{M}(\theta)$ , dobbiamo poi scegliere la **complessità del modello** (numero di parametri)

Un metodo semplice ma efficace consiste nell'identificare un insieme di modelli di diversa complessità utilizzando un dataset di **identificazione**, e confrontarne la bontà (e.g. calcolando il valore di  $J(\hat{\theta}_N)$ ) su un dataset di **validazione**

Il problema è **multidimensionale**: per esempio, se usassimo un modello ARMAX dovremmo scegliere il valore di  $n_a, n_b, n_c$ . Per **semplicità**, si pone  $n_a = n_b = n_c \equiv m$ , facendo quindi variare solo il valore del parametro  $m$ . In questo caso avremmo  $d = 3 \cdot m$

# Validazione

Il metodo della **validazione** è molto simile a quello visto per i sistemi statici. Supponiamo di avere  $N$  dati, e dividiamoli in 2 sotto-sequenze



Per ogni ordine  $m = 1, \dots, M$ , identifichiamo un modello minimizzando  $J(\boldsymbol{\theta}, \mathcal{D}_{\text{train}})$  e calcoliamo  $J(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N/2}, \mathcal{D}_{\text{val}})$  sui dati di validazione. Scegliamo l'ordine  $m^*$  che minimizza  $J(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N/2}, \mathcal{D}_{\text{val}})$

# Validazione

A differenza del caso statico, con i sistemi dinamici non è possibile «estrarre» i dati di identificazione e di validazione in modo casuale dal dataset completo, perché **rompere la causalità temporale** dei dati!

Anche in questo caso dinamico, la validazione è una procedura che da risultati molto buoni, ma richiedere **tanti dati**

In alternativa, se i dati sono pochi si possono usare le **formule di complessità ottima** già viste in [Lezione 06](#)





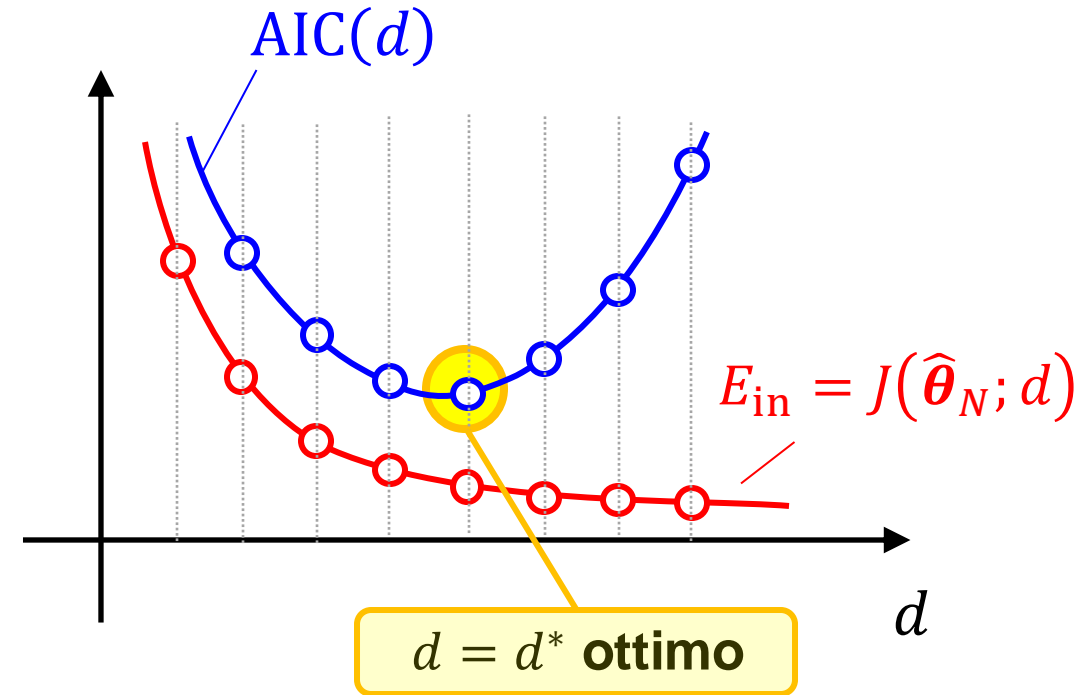
# Formule di complessità

## Akaike Information Criterion (AIC)

$$AIC(d) = 2 \cdot \frac{d}{N} + \ln[ J(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N; d) ]$$

## Final prediction error (FPE)

$$FPE(d) = \frac{N + d}{N - d} \cdot J(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N; d)$$

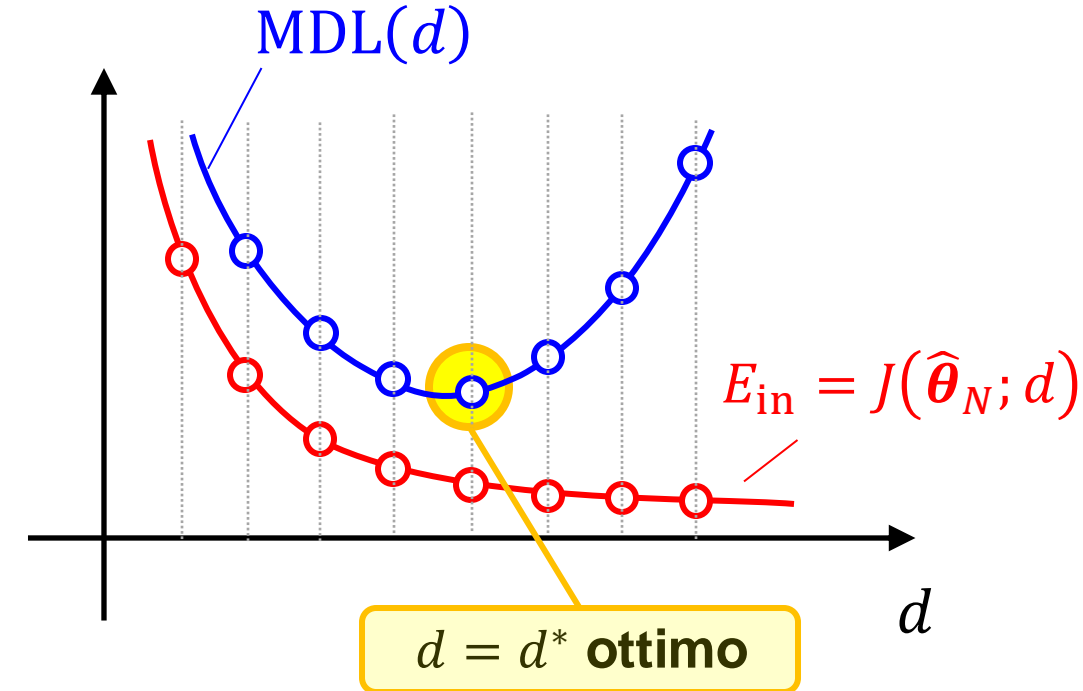


Se  $d \ll N$ , il criterio FPE è equivalente al criterio AIC

# Formule di complessità

## Minimum Description Length (MDL)

$$\text{MDL}(d) = \ln[N] \cdot \frac{d}{N} + \ln[J(\hat{\theta}_N; d)]$$



In Matlab:

- `V = arxstruc(data_ident, data_val, NN)` Calcola la funzione di costo per ARX di struttura diversa definita in `NN`
- `order = selstruc(V, 'AIC');` Seleziona l'ordine migliore del modello ARX usando il criterio selezionato

# Outline

1. Scelta della struttura e complessità del modello
2. Validazione o formule di complessità per la scelta della complessità
- 3. Analisi dei residui**
4. Analisi dell'incertezza della stima
5. Simulazione, predizione del modello identificato
6. Confronto con stima nonparametrica
7. Considerazioni pratiche



# Interpretazione in frequenza del costo PEM

Ricordiamo che (Lezione 10 - slide 75)

$$\varepsilon_1(t; \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{H(z, \boldsymbol{\theta})} \left[ (G_0(z) - G(z, \boldsymbol{\theta}))u(t) + H_0(z)e(t) \right] \quad e(t) \sim \text{WN}(0, \lambda^2) \quad \text{è il rumore sul sistema vero}$$

Sommiamo e sottraiamo  $e(t)$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(t; \boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{H(z, \boldsymbol{\theta})} \left[ (G_0(z) - G(z, \boldsymbol{\theta}))u(t) + H_0(z)e(t) \right] - e(t) + e(t) \\ &= \frac{1}{H(z, \boldsymbol{\theta})} \left[ (G_0(z) - G(z, \boldsymbol{\theta}))u(t) + (H_0(z) - H(z, \boldsymbol{\theta}))e(t) \right] + e(t) \end{aligned}$$

$$= \frac{G_0(z) - G(z, \boldsymbol{\theta})}{H(z, \boldsymbol{\theta})} u(t) + \frac{H_0(z) - H(z, \boldsymbol{\theta})}{H(z, \boldsymbol{\theta})} e(t) + e(t)$$

Se  $\exists \boldsymbol{\theta}^0$  t.c.  $G(\boldsymbol{\theta}^0) = G_0$   
e  $H(\boldsymbol{\theta}^0) = H_0$ , allora  
 $\varepsilon_1(t, \boldsymbol{\theta}^0) = e(t)$

# Interpretazione in frequenza del costo PEM

La stima asintotica può quindi essere ottenuta come  $\bar{\boldsymbol{\theta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} \bar{J}(\boldsymbol{\theta}) = \arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} \mathbb{E}[\varepsilon_1(t; \boldsymbol{\theta})^2]$

In frequenza,  $\bar{J}(\boldsymbol{\theta})$  è esprimibile come

$$\bar{J}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|G_0(e^{j\omega}) - G(e^{j\omega}, \boldsymbol{\theta})|^2 \cdot \Gamma_{uu}(\omega) + |H_0(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega}, \boldsymbol{\theta})|^2 \cdot \lambda^2}{|H(e^{j\omega}, \boldsymbol{\theta})|^2} \cdot d\omega$$

L'espressione mette in risalto come la stima è ottenuta minimizzando l'errore di stima del modello  $\backslash O$  e del modello del rumore, pesati per la densità spettrale del rispettivo segnale di ingresso. Inoltre, vi è una pesatura pari all'inverso del modello del rumore

# Interpretazione in frequenza del costo PEM

Con il **prefiltraggio** tramite filtro  $L(z)$  dei dati

$$u_F(t) = L(z)u(t)$$

$$y_F(t) = L(z)y(t)$$

la funzione di costo asintotica diventa

$$\bar{J}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|G_0(e^{j\omega}) - G(e^{j\omega}, \boldsymbol{\theta})|^2 \cdot \Gamma_{uu}(\omega) + |H_0(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega}, \boldsymbol{\theta})|^2 \cdot \lambda^2}{|H(e^{j\omega}, \boldsymbol{\theta})|^2} \cdot |L(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

# Analisi dei residui

Dopo aver selezionato un modello  $\mathcal{M}(\boldsymbol{\theta})$  e averne effettuato l'identificazione PEM, è possibile **validarne** (a-posteriori) la **struttura** e la **complessità** tramite analisi dei residui

**Obiettivo:** avendo la stima  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_N$  e i dati  $\{u(t), y(t)\}_{t=1}^N$ , determinare se  $\mathcal{M}(\boldsymbol{\theta})$  è tale che

- $\mathcal{S} \in \mathcal{M}(\boldsymbol{\theta})$
- $\mathcal{S} \notin \mathcal{M}(\boldsymbol{\theta})$  con  $G_0(z) \in \mathcal{G}(\boldsymbol{\theta})$
- $\mathcal{S} \notin \mathcal{M}(\boldsymbol{\theta})$  con  $G_0(z) \notin \mathcal{G}(\boldsymbol{\theta})$

Dove  $\mathcal{G}$  è l'insieme dei modelli che descrivono la relazione input-output del sistema

Il caso  $\mathcal{S} \notin \mathcal{M}(\boldsymbol{\theta})$  con  $G_0 \in \mathcal{G}(\boldsymbol{\theta})$  è di **molto interesse nella pratica**, in cui vogliamo che  $G(z, \hat{\boldsymbol{\theta}}_N) \rightarrow G_0(z)$  anche se il modello dell'errore è sbagliato

# Analisi dei residui

Consideriamo il caso asintotico  $N \rightarrow +\infty$ , in cui  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_N \rightarrow \bar{\boldsymbol{\theta}}$ . Abbiamo che

$$\varepsilon_1(t; \bar{\boldsymbol{\theta}}) = H^{-1}(z; \bar{\boldsymbol{\theta}}) \left( y(t) - G(z, \bar{\boldsymbol{\theta}})u(t) \right) = \frac{G_0(z) - G(z, \bar{\boldsymbol{\theta}})}{H(z, \bar{\boldsymbol{\theta}})} u(t) + \frac{H_0(z)}{H(z, \bar{\boldsymbol{\theta}})} e(t)$$

con  $e(t) \sim \text{WN}(0, \lambda^2)$

La scelta della **struttura** e della **complessità** del modello  $\mathcal{M}(\boldsymbol{\theta})$  può essere effettuata osservando:

- la funzione di **autocovarianza** dei **residui**:  $\gamma_{\varepsilon\varepsilon}(\tau)$
- la funzione di **cross-covarianza** tra i **residui** ed il segnale di **ingresso**:  $\gamma_{\varepsilon u}(\tau)$



# Analisi dei residui

Avendo definito l'obiettivo come in precedenza, possiamo incorrere in tre situazioni:

- **Situazione A:**  $\gamma_{\varepsilon\varepsilon}(\tau) = \lambda^2 \cdot \delta(\tau)$  e  $\gamma_{\varepsilon u}(\tau) = 0 \forall \tau$
- **Situazione B:**  $\gamma_{\varepsilon\varepsilon}(\tau) \neq \lambda^2 \cdot \delta(\tau)$  e  $\gamma_{\varepsilon u}(\tau) = 0 \forall \tau$
- **Situazione C:**  $\gamma_{\varepsilon\varepsilon}(\tau) \neq \lambda^2 \cdot \delta(\tau)$  e  $\exists \tau \text{ t.c. } \gamma_{\varepsilon u}(\tau) \neq 0$

dove  $\delta(\tau)$  è un delta di Dirac centrata in  $\tau$

Studiamo le tre situazioni singolarmente

# Analisi dei residui: Situazione A

Supponiamo di osservare:

$$\gamma_{\varepsilon\varepsilon}(\tau) = \begin{cases} \lambda^2 & \text{se } \tau = 0 \\ 0 & \text{se } \tau \neq 0 \end{cases} \quad \gamma_{\varepsilon u}(\tau) = 0 \quad \forall \tau$$

Questa situazione accade quando

$$\varepsilon_1(t; \bar{\theta}) = \frac{G_0(z) - G(z, \bar{\theta})}{H(z, \bar{\theta})} u(t) + \frac{H_0(z)}{H(z, \bar{\theta})} e(t) = 0 \cdot u(t) + 1 \cdot e(t)$$

Ovvero **se e solo se**  $G(z, \bar{\theta}) = G_0(z)$  e  $H(z, \bar{\theta}) = H_0(z)$

Questo avviene **se e solo se**  $\mathcal{S} \in \mathcal{M}(\theta)$ , come dimostrato nella [Lezione 12](#)

# Analisi dei residui: Situazione B

Supponiamo di osservare:

$$\gamma_{\varepsilon\varepsilon}(\tau) \neq \lambda^2 \cdot \delta(\tau)$$

$$\gamma_{\varepsilon u}(\tau) = 0 \quad \forall \tau$$

Questa situazione accade quando

$$\varepsilon_1(t; \bar{\theta}) = \frac{G_0(z) - G(z, \bar{\theta})}{H(z, \bar{\theta})} u(t) + \frac{H_0(z)}{H(z, \bar{\theta})} e(t) = 0 \cdot u(t) + \overbrace{\frac{H_0(z)}{H(z, \bar{\theta})}}^{\neq 1} \cdot e(t)$$

Ovvero **se e solo se**  $G(z, \bar{\theta}) = G_0(z)$  e  $H(z, \bar{\theta}) \neq H_0(z)$

Questo avviene **se e solo se**  $\mathcal{S} \notin \mathcal{M}(\theta)$  con  $G_0(z) \in \mathcal{G}(\theta)$  per  $\mathcal{M}(\theta)$  **OE, BJ, FIR**

# Analisi dei residui: Situazione B

Infatti, se  $\mathcal{M}(\boldsymbol{\theta})$  è **OE**, **BJ** oppure **FIR**, è possibile parametrizzare in modo indipendente  $G(z, \boldsymbol{\eta})$  e  $H(z, \boldsymbol{\xi})$ , con  $\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\eta}^\top \ \boldsymbol{\xi}^\top]^\top$

La funzione di costo PEM diventa

$$\bar{J}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|G_0(e^{j\omega}) - G(e^{j\omega}, \boldsymbol{\eta})|^2 \cdot \Gamma_{uu}(\omega) + |H_0(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega}, \boldsymbol{\xi})|^2 \cdot \lambda^2}{|H(e^{j\omega}, \boldsymbol{\xi})|^2} \cdot d\omega$$

Il vettore  $\bar{\boldsymbol{\theta}}$  che minimizza questa cifra di merito è  $\bar{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\eta}} \\ \bar{\boldsymbol{\xi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_0 \\ \bar{\boldsymbol{\xi}} \end{bmatrix}$

Per cui abbiamo che  $G(z, \bar{\boldsymbol{\eta}}) = G_0(z)$  e  $H(z, \bar{\boldsymbol{\xi}}) \neq H_0(z)$

# Analisi dei residui: Situazione B

Il fatto di poter stimare bene  $G_0(z)$  anche se non stimo bene  $H_0(z)$ , **non accade** se usiamo un modello **ARX** o **ARMAX**, anche se  $G_0(z) \in \mathcal{G}(\boldsymbol{\theta})$ . Infatti, la funzione di costo è

$$\bar{J}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|G_0(e^{j\omega}) - G(e^{j\omega}, \boldsymbol{\theta})|^2 \cdot \Gamma_{uu}(\omega) + |H_0(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega}, \boldsymbol{\theta})|^2 \cdot \lambda^2}{|H(e^{j\omega}, \boldsymbol{\theta})|^2} \cdot d\omega$$

Per cui, anche se esistesse  $\boldsymbol{\theta}_0$  t.c.  $G(z, \boldsymbol{\theta}_0) = G_0(z)$ , tale vettore minimizza solo il termine  $|G_0(e^{j\omega}) - G(e^{j\omega}, \boldsymbol{\theta})|^2$ , ma non  $|H_0(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega}, \boldsymbol{\theta})|^2$ , poiché  $H(z, \boldsymbol{\theta}_0) \neq H_0(z)$

Ne consegue che  $\bar{\boldsymbol{\theta}} \neq \boldsymbol{\theta}_0$  e quindi  $G_0(z)$  **non viene stimata in modo corretto** anche se  $G_0(z) \in \mathcal{G}(\boldsymbol{\theta})$ . Si può comunque arrivare ad una buona approssimazione aumentando l'ordine del modello

# Analisi dei residui: Situazione C

Supponiamo di osservare:

$$\gamma_{\varepsilon\varepsilon}(\tau) \neq \lambda^2 \cdot \delta(\tau)$$

$$\exists \tau \quad \text{t.c.} \quad \gamma_{\varepsilon u}(\tau) \neq 0$$

Questa situazione accade quando

$$\varepsilon_1(t; \bar{\theta}) = \overbrace{\frac{G_0(z) - G(z, \bar{\theta})}{H(z, \bar{\theta})}}^{\neq 0} u(t) + \frac{H_0(z)}{H(z, \bar{\theta})} e(t)$$

Ovvero **se e solo se**  $G(z, \bar{\theta}) \neq G_0(z)$

Questo avviene **se e solo se**  $\left\{ \begin{array}{l} S \notin \mathcal{M}(\theta) \text{ con } G_0(z) \in \mathcal{G}(\theta) \text{ per } \mathcal{M}(\theta) \text{ **ARX, ARMAX** } \\ S \notin \mathcal{M}(\theta) \text{ con } G_0(z) \notin \mathcal{G}(\theta) \end{array} \right.$

# Conclusioni analisi residui

In base ai risultati nel caso asintotico, possiamo concludere che:

## 1) $\mathcal{M}(\theta)$ è OE, BJ o FIR

- **Situazione A:**  $\gamma_{\varepsilon\varepsilon}(\tau) = \lambda^2 \cdot \delta(\tau)$  e  $\gamma_{\varepsilon u}(\tau) = 0 \forall \tau \Rightarrow \mathcal{S} \in \mathcal{M}(\theta)$
- **Situazione B:**  $\gamma_{\varepsilon\varepsilon}(\tau) \neq \lambda^2 \cdot \delta(\tau)$  e  $\gamma_{\varepsilon u}(\tau) = 0 \forall \tau \Rightarrow \mathcal{S} \notin \mathcal{M}(\theta)$  con  $G_0(z) \in \mathcal{G}(\theta)$
- **Situazione C:**  $\gamma_{\varepsilon\varepsilon}(\tau) \neq \lambda^2 \cdot \delta(\tau)$  e  $\exists \tau$  t.c.  $\gamma_{\varepsilon u}(\tau) \neq 0 \Rightarrow \mathcal{S} \notin \mathcal{M}(\theta)$  con  $G_0(z) \notin \mathcal{G}(\theta)$

# Conclusioni analisi residui

In base ai risultati nel caso asintotico, possiamo concludere che:

## 2) $\mathcal{M}(\theta)$ è ARX, ARMAX

- **Situazione A:**  $\gamma_{\varepsilon\varepsilon}(\tau) = \lambda^2 \cdot \delta(\tau)$  e  $\gamma_{\varepsilon u}(\tau) = 0 \forall \tau \Rightarrow \mathcal{S} \in \mathcal{M}(\theta)$
- **Situazione C:**  $\gamma_{\varepsilon\varepsilon}(\tau) \neq \lambda^2 \cdot \delta(\tau)$  e  $\exists \tau$  t.c.  $\gamma_{\varepsilon u}(\tau) \neq 0 \Rightarrow \mathcal{S} \notin \mathcal{M}(\theta)$

Nella situazione C non riusciamo a capire se  $G_0(z) \in \mathcal{G}(\theta)$  oppure  $G_0(z) \notin \mathcal{G}(\theta)$



# Conclusioni analisi residui

$N \rightarrow +\infty$

$N$  finito

	$\gamma_{\varepsilon\varepsilon}(\tau)$	$\gamma_{\varepsilon u}(\tau)$	$\hat{\gamma}_{\varepsilon\varepsilon}(\tau)$	$\hat{\gamma}_{\varepsilon u}(\tau)$
$\mathcal{S} \in \mathcal{M}(\boldsymbol{\theta})$	$0 \quad \forall \tau \neq 0$	$0 \quad \forall \tau$	«piccola» ∈ intervallo di confidenza	«piccola» ∈ intervallo di confidenza
$\mathcal{S} \notin \mathcal{M}(\boldsymbol{\theta})$ $G_0(z) \in \mathcal{G}(\boldsymbol{\theta})$	$\exists \tau \neq 0$ t.c. $\gamma_{\varepsilon\varepsilon}(\tau) \neq 0$	$0 \quad \forall \tau$ <b>OE, BJ, FIR</b>	«grande» ∉ intervallo di confidenza	«piccola» ∈ intervallo di confidenza <b>OE, BJ, FIR</b>
$\mathcal{S} \notin \mathcal{M}(\boldsymbol{\theta})$ $G_0(z) \notin \mathcal{G}(\boldsymbol{\theta})$	$\exists \tau \neq 0$ t.c. $\gamma_{\varepsilon\varepsilon}(\tau) \neq 0$	$\exists \tau$ t.c. $\gamma_{\varepsilon u}(\tau) \neq 0$	«grande» ∉ intervallo di confidenza	«grande» ∉ intervallo di confidenza

# Conclusioni analisi residui

La procedura vista ora basata su un test statistico dei residui (nel caso di  $N$  finito) serve a validare l'ipotesi che  $\mathcal{S} \in \mathcal{M}(\boldsymbol{\theta})$  sulla base dei **dati disponibili**

Una validazione della struttura che si conclude con un successo **non garantisce** che  $G(z, \hat{\boldsymbol{\theta}}_N)$  e  $H(z, \hat{\boldsymbol{\theta}}_N)$  siano **buone stime** di  $G_0(z)$  e  $H_0(z)$ .

È necessario controllare anche la **varianza delle stime** (sia dei parametri sia delle funzioni di trasferimento)

# Esempio: analisi residui

Applichiamo un ingresso  $u(t)$  a scalino al sistema ignoto  $\mathcal{S}$  e osserviamo la risposta

$$\mathcal{S}: y(t) = \frac{B(z)}{F(z)} u(t-3) + \frac{C(z)}{D(z)} e(t) \quad e(t) \sim \text{WN}(0,0.09)$$

Il sistema  $\mathcal{S}$  è un Box-Jenkins con

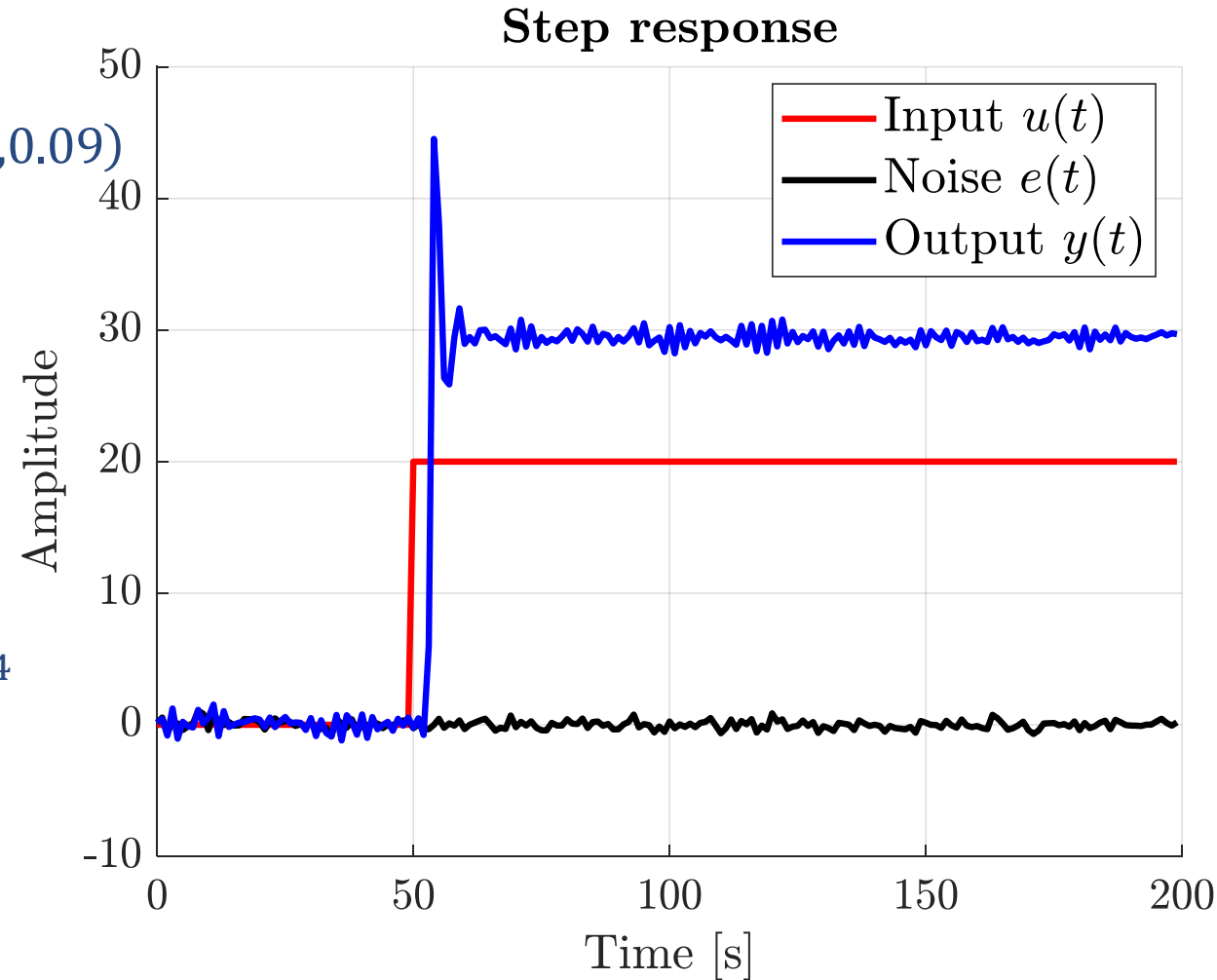
$$n_b = 2, n_c = 4, n_d = 4, n_f = 3, k = 3$$

$$B(z) = 0.3 + 2z^{-1} + 0.13z^{-2}$$

$$C(z) = 1 + 0.3z^{-1} + 0.72z^{-2} + 0.76z^{-3} + 0.05z^{-4}$$

$$D(z) = 1 + 0.9z^{-1} + 0.09z^{-2} + 0.1z^{-3} + 0.2z^{-4}$$

$$F(z) = 1 + 0.2z^{-1} + 0.3z^{-2} + 0.15z^{-3}$$

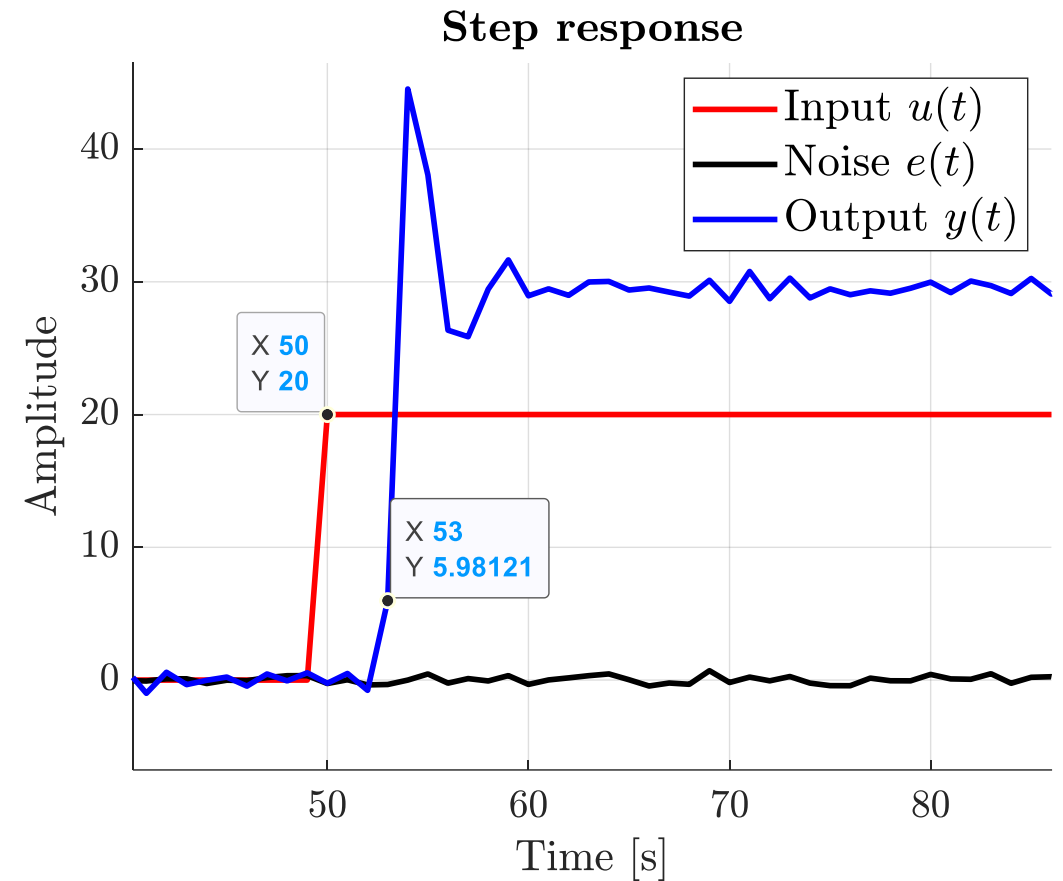


# Esempio: analisi residui

Dalla risposta allo scalino osserviamo che il ritardo puro vale  $k = 3$

Osserviamo inoltre che il sistema sembra essere «semplice», non avendo una risposta allo scalino particolarmente «strana»

Collezioniamo ora  $N = 5000$  dati usando un ingresso  $u(t) \sim \text{WN}(0, 100)$



# Esempio: analisi residui

## Primo tentativo

Scegliamo un modello BJ con

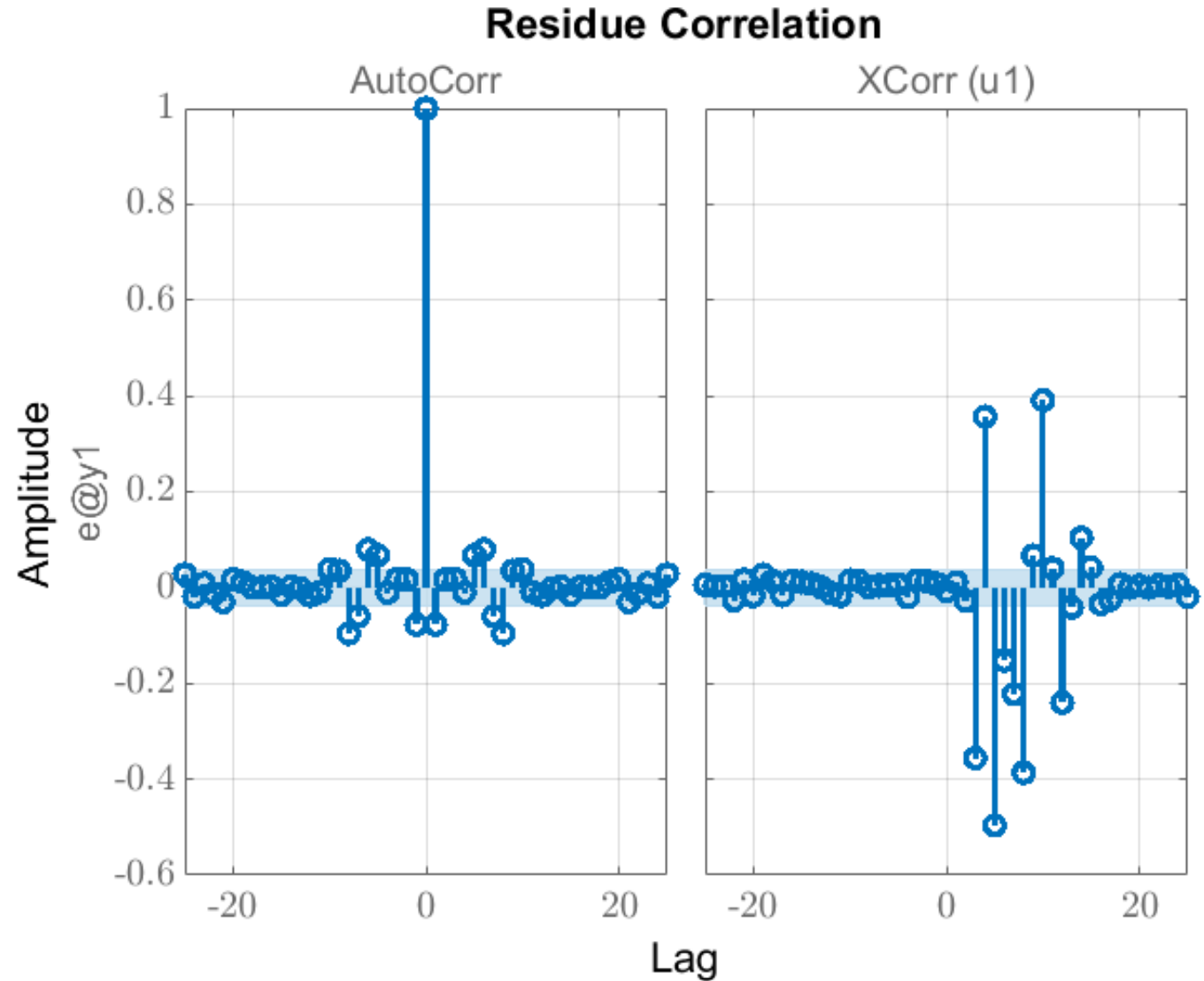
$$n_b = 1, n_c = 2, n_d = 2, n_f = 2, k = 3$$

Osserviamo che:

$$\gamma_{\varepsilon\varepsilon}(\tau) \neq \lambda^2 \cdot \delta(\tau) \quad \exists \tau \text{ t.c. } \gamma_{\varepsilon u}(\tau) \neq 0$$

**Conclusione:**

$$\mathcal{S} \notin \mathcal{M}(\theta) \text{ con } G_0(z) \notin \mathcal{G}(\theta)$$



# Esempio: analisi residui

## Secondo tentativo

Scegliamo un modello BJ con

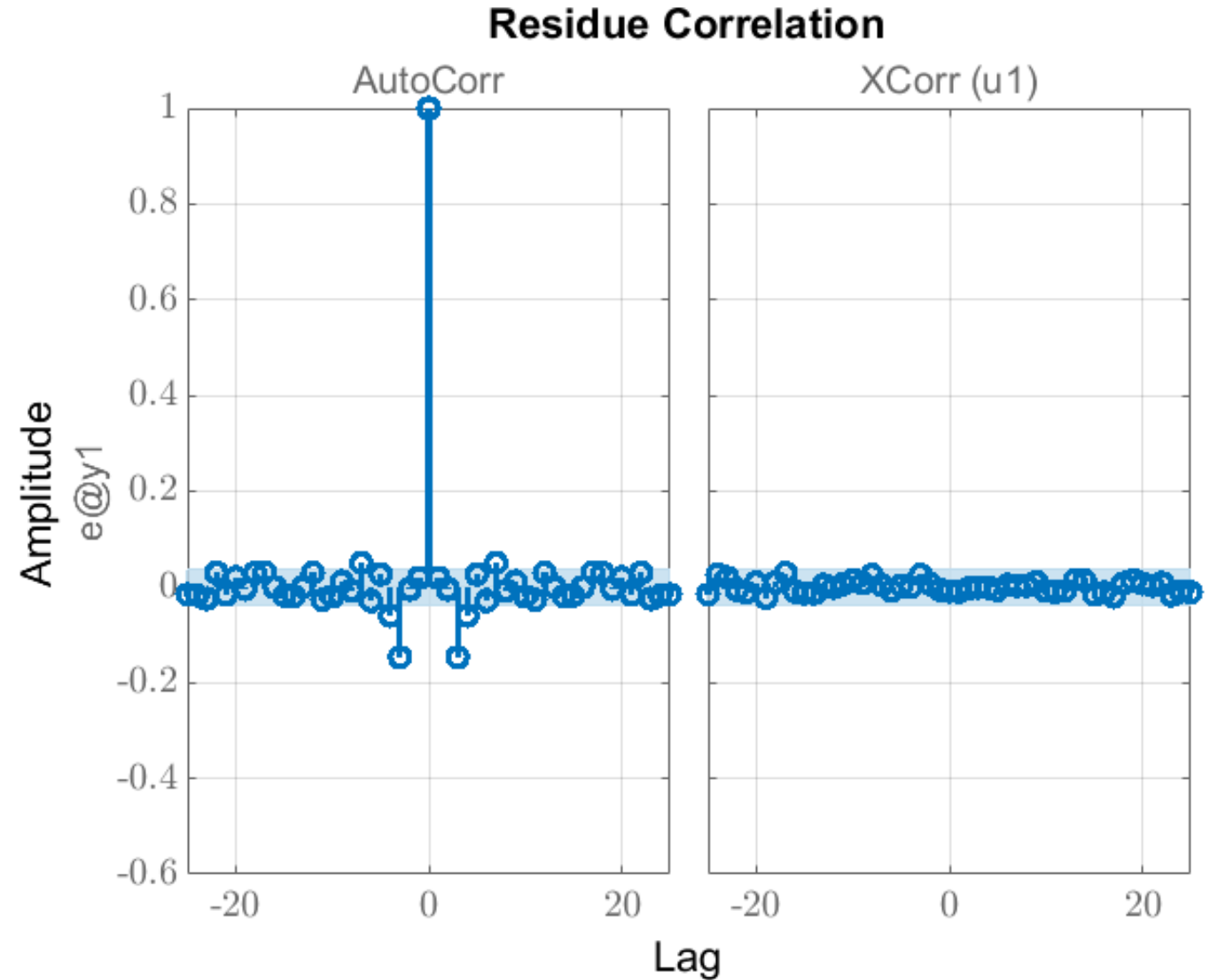
$$n_b = 2, n_c = 3, n_d = 3, n_f = 3, k = 3$$

Osserviamo che:

$$\gamma_{\varepsilon\varepsilon}(\tau) \neq \lambda^2 \cdot \delta(\tau) \quad \gamma_{\varepsilon u}(\tau) = 0 \quad \forall \tau$$

**Conclusione:**

$$\mathcal{S} \notin \mathcal{M}(\boldsymbol{\theta}) \text{ con } G_0(z) \in \mathcal{G}(\boldsymbol{\theta})$$



# Esempio: analisi residui

## Terzo tentativo

Scegliamo un modello BJ con

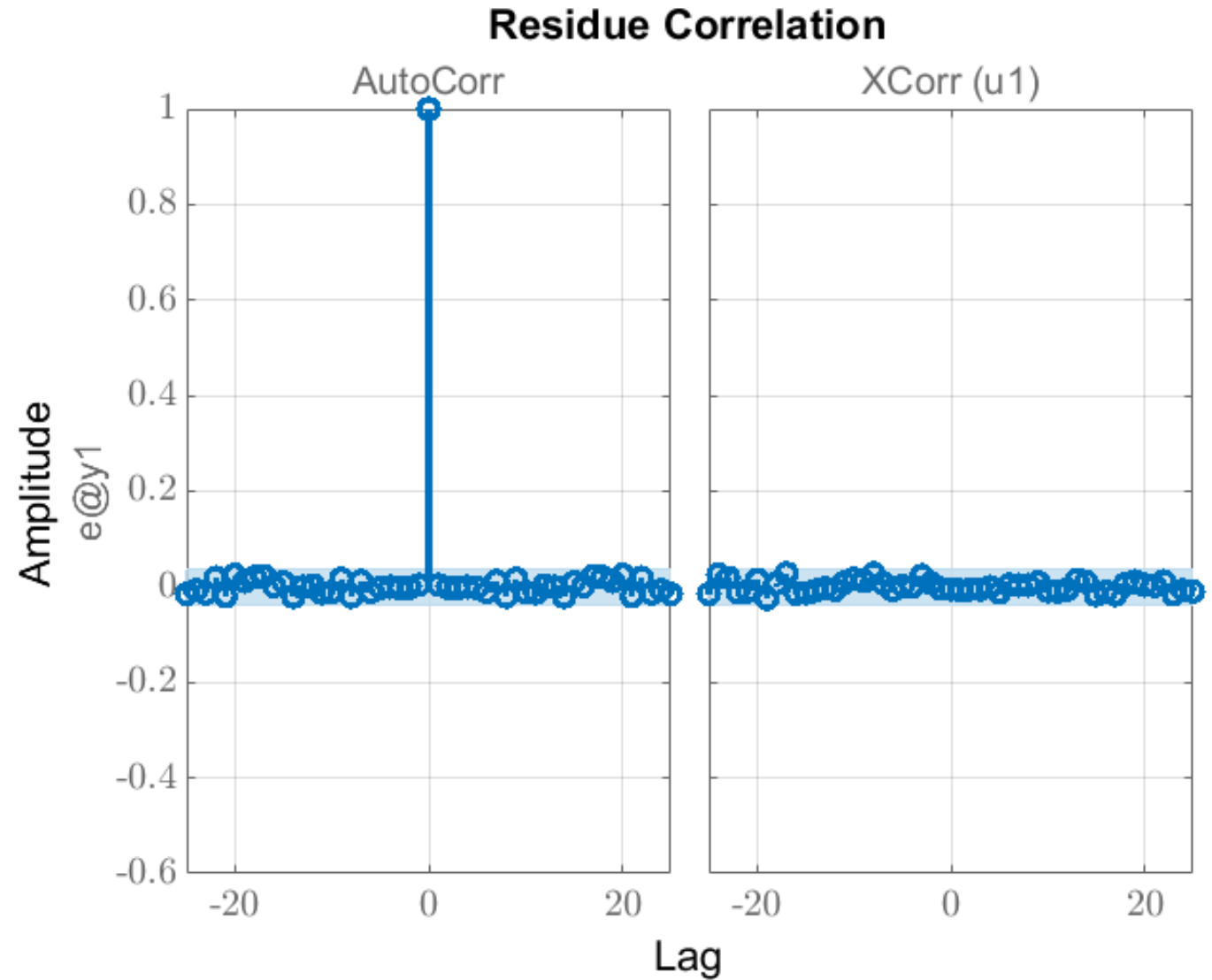
$$n_b = 2, n_c = 4, n_d = 4, n_f = 3, k = 3$$

Osserviamo che:

$$\gamma_{\varepsilon\varepsilon}(\tau) = \lambda^2 \cdot \delta(\tau) \quad \gamma_{\varepsilon u}(\tau) = 0 \quad \forall \tau$$

**Conclusione:**

$$\mathcal{S} \in \mathcal{M}(\boldsymbol{\theta}) \text{ con } G_0(z) \in \mathcal{G}(\boldsymbol{\theta})$$



# Esempio: identificazione trasmissione meccanica

Si consideri il sistema  $\mathcal{S}$  espresso tramite la famiglia di modelli **OE**

$$\mathcal{S}: y(t) = \frac{0.10276 + 0.18123z^{-1}}{1 - 1.99185z^{-1} + 2.20265z^{-2} - 1.84083z^{-3} + 0.89413z^{-4}} u(t - 3) + e(t)$$

Identifichiamo il sistema con  $u(t) \sim \text{WN}(0, \lambda^2)$ ,  $\text{SNR} = 15$ ,  $N = 5000$ , usando:

1. un modello **OE** di ordine esatto con  $n_b = 1, n_f = 4, k = 3$
2. un modello **ARX** di ordine esatto con  $n_b = 1, n_a = 4, k = 3$

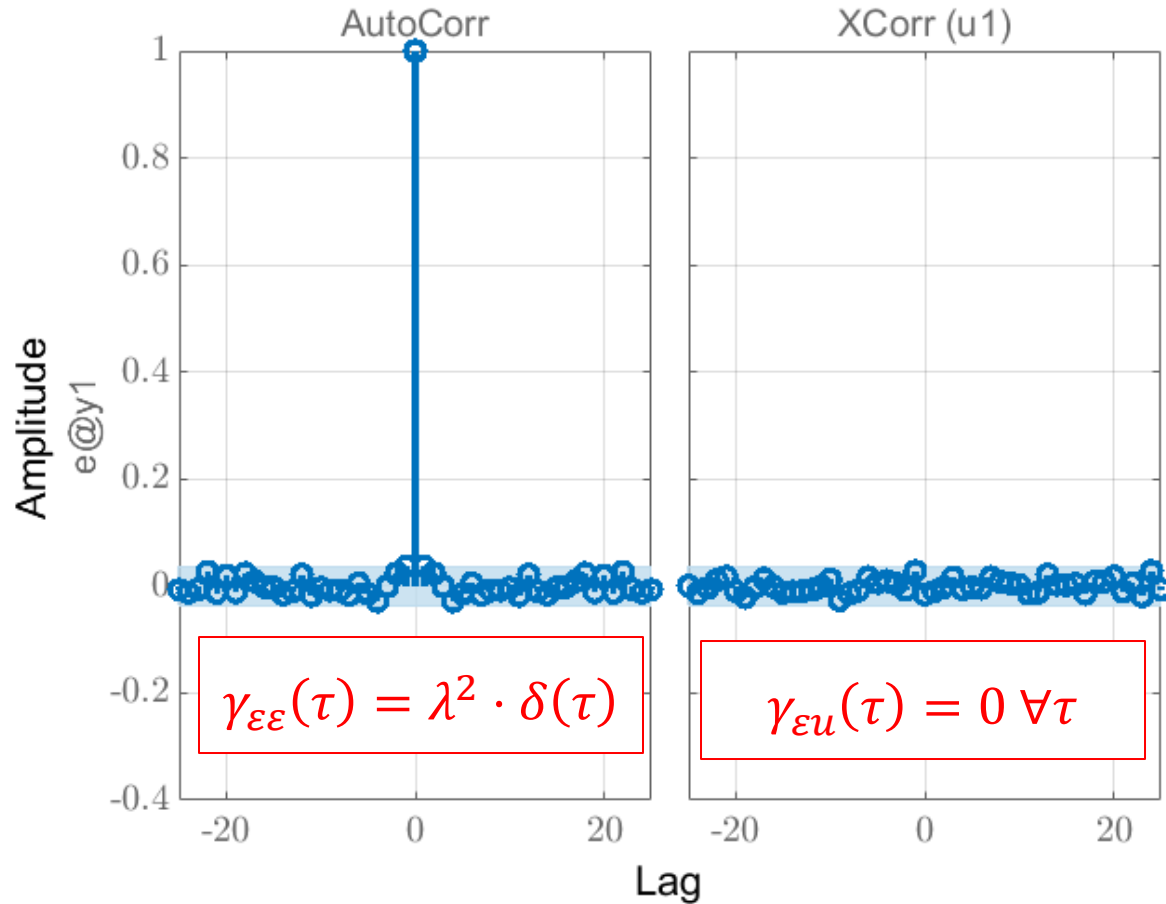
Notiamo che  $G_0(z) \in \mathcal{G}_{\text{OE}}(\boldsymbol{\theta})$  e  $G_0(z) \in \mathcal{G}_{\text{ARX}}(\boldsymbol{\theta})$



# Esempio: identificazione trasmissione meccanica

## Modello OE

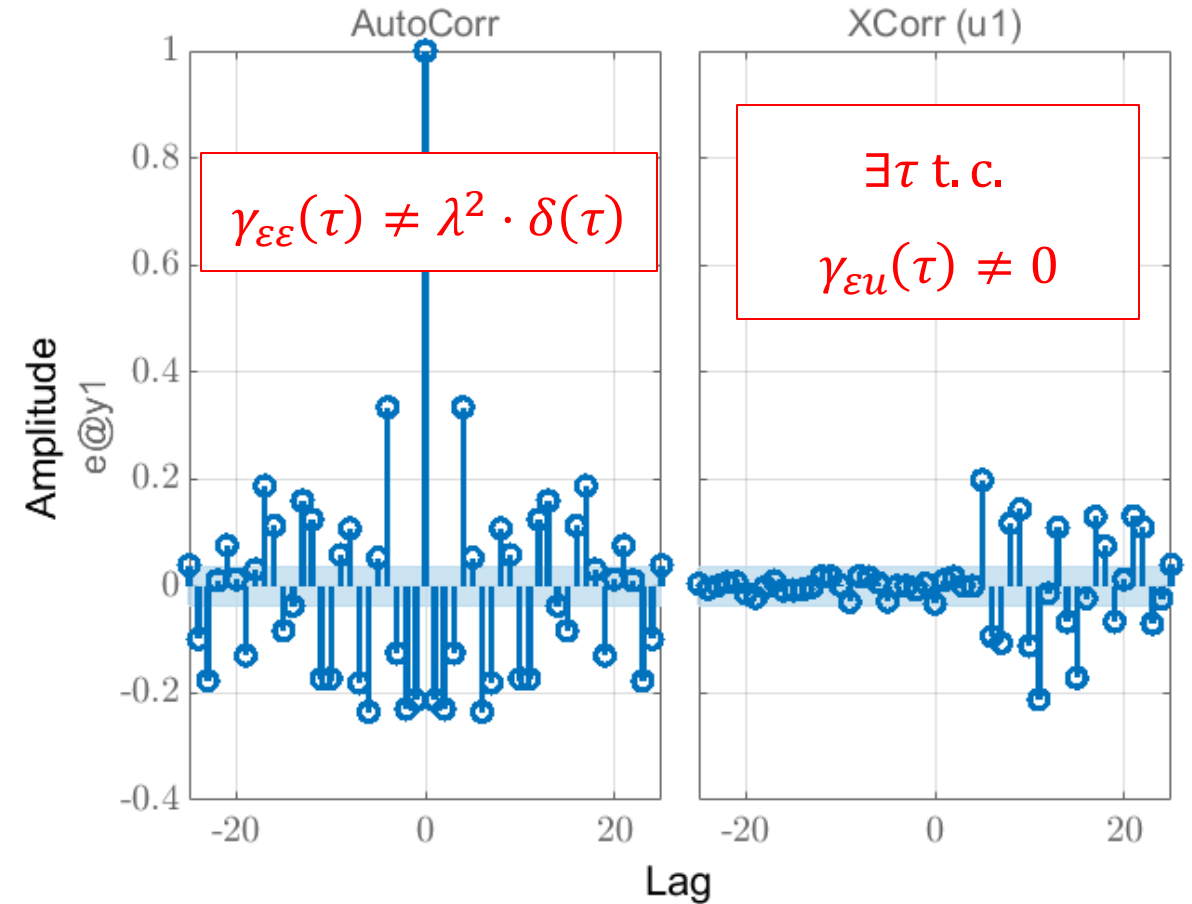
Residue Correlation



$$\mathcal{S} \in \mathcal{M}_{OE}(\theta)$$

## Modello ARX

Residue Correlation



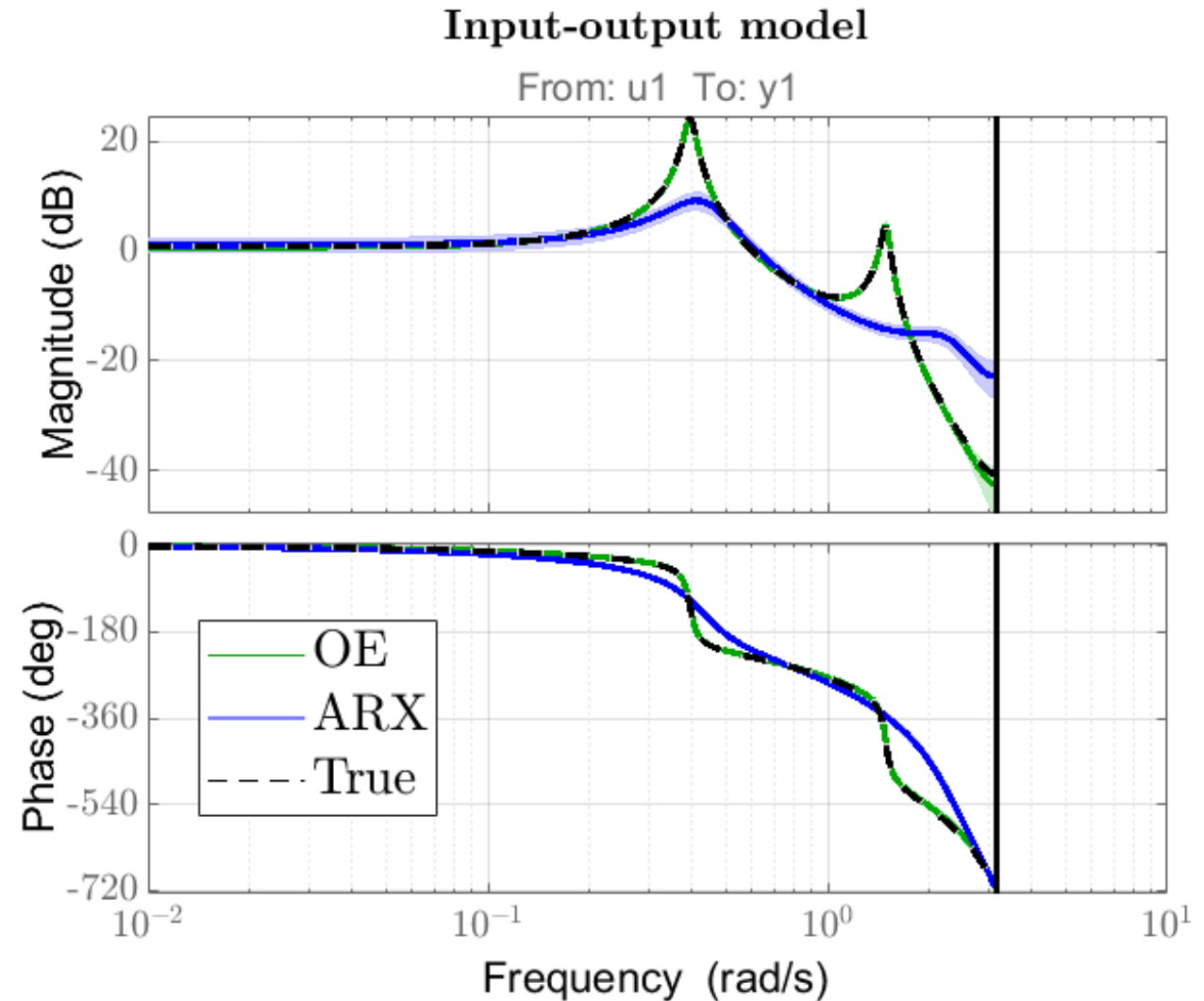
$$\mathcal{S} \notin \mathcal{M}_{ARX}(\theta)$$

# Esempio: identificazione trasmissione meccanica

Anche se  $G_0(z) \in \mathcal{G}_{\text{ARX}}(\theta)$ , il modello **ARX** non è in grado, **in media**, di stimare correttamente  $G_0(z)$  (a meno di avere un **SNR elevato**)

Il modello **ARX** presenta un'incertezza di stima maggiore

Il modello **OE** di ordine esatto stima perfettamente il sistema vero **in media** (teoria PEM) e ha un'incertezza bassa



# Esempio: identificazione trasmissione meccanica

Si consideri ora il sistema  $\mathcal{S}$  espresso tramite la famiglia di modelli **ARX**

$$\mathcal{S}: y(t) = \frac{0.10276 + 0.18123z^{-1}}{A(z)} u(t-3) + \frac{1}{A(z)} e(t)$$

$$A(z) = 1 - 1.99185z^{-1} + 2.20265z^{-2} - 1.84083z^{-3} + 0.89413z^{-4}$$

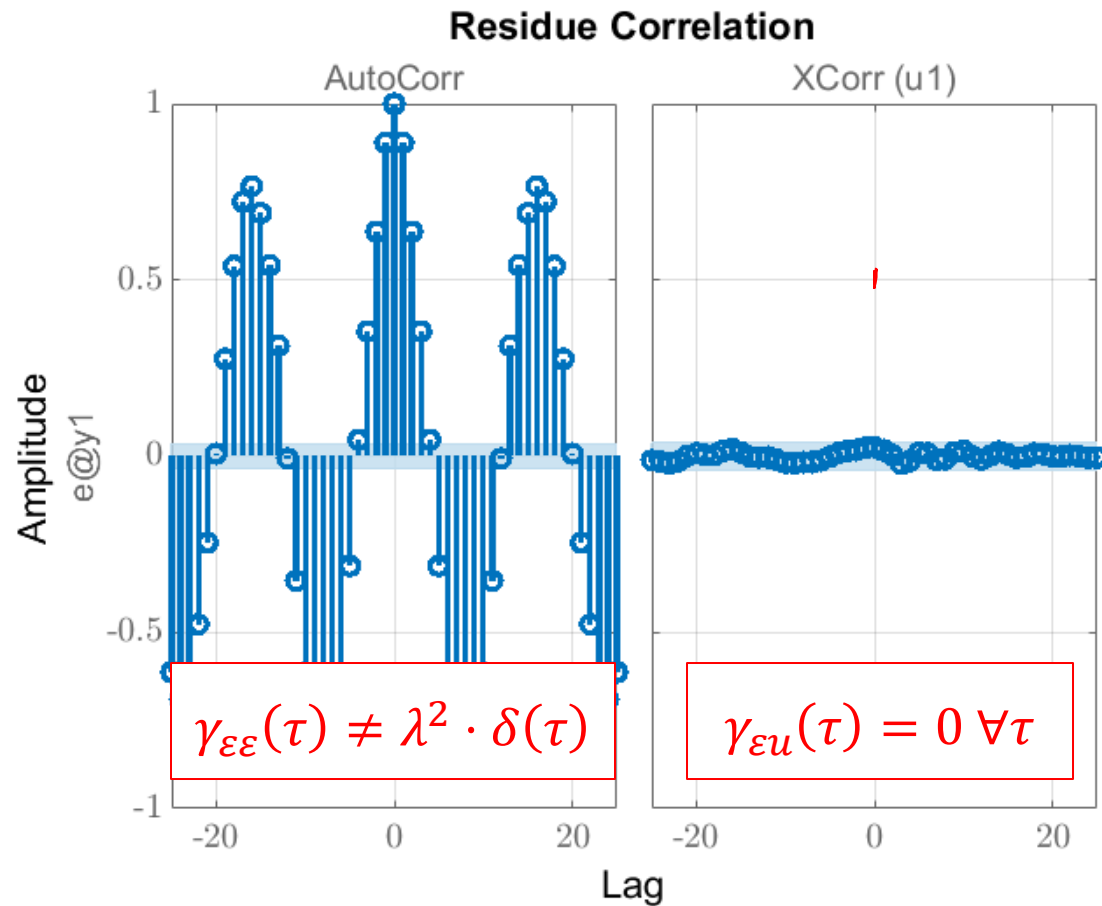
Identifichiamo il sistema con  $u(t) \sim \text{WN}(0, \lambda^2)$ ,  $\text{SNR} = 15$ ,  $N = 5000$ , usando:

1. un modello **OE** di ordine esatto con  $n_b = 1, n_f = 4, k = 3$
2. un modello **ARX** di ordine esatto con  $n_b = 1, n_a = 4, k = 3$

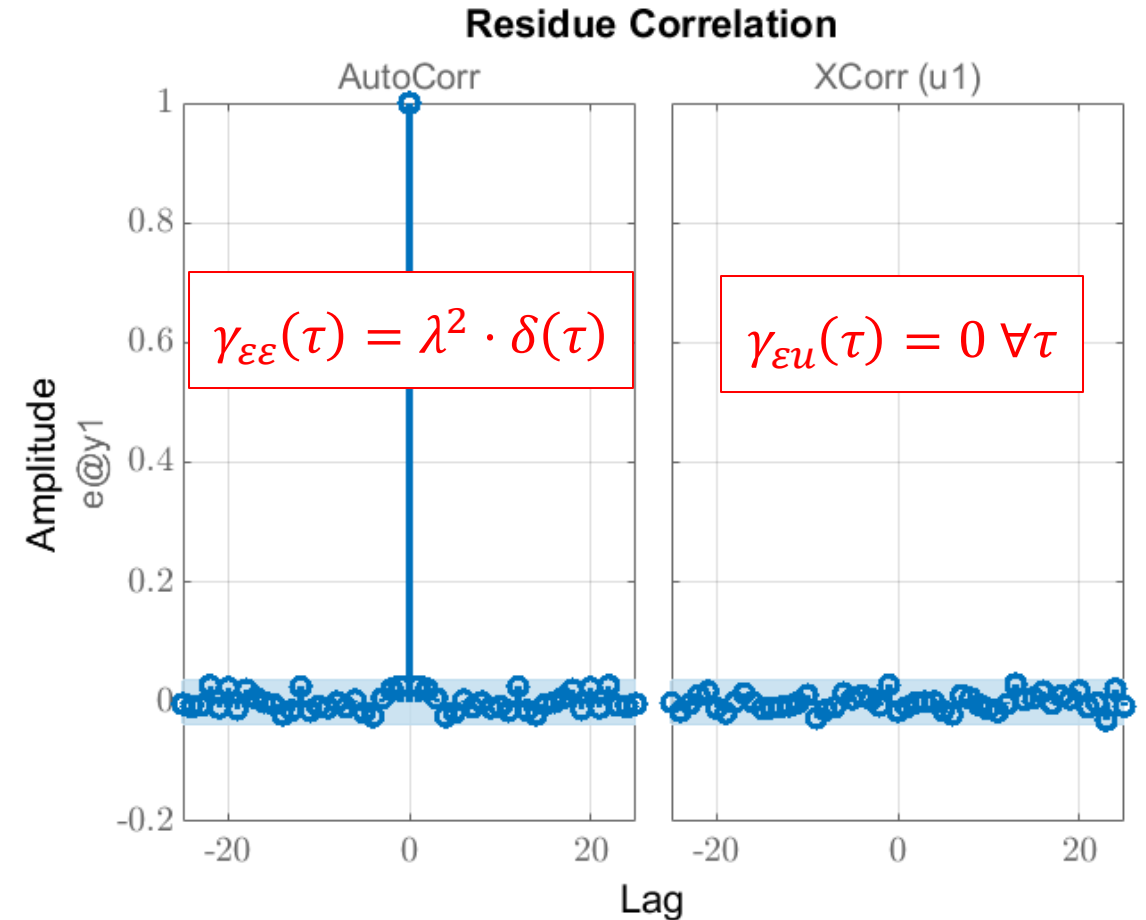
Notiamo che  $G_0(z) \in \mathcal{G}_{\text{OE}}(\boldsymbol{\theta})$  e  $G_0(z) \in \mathcal{G}_{\text{ARX}}(\boldsymbol{\theta})$

# Esempio: identificazione trasmissione meccanica

## Modello OE



## Modello ARX



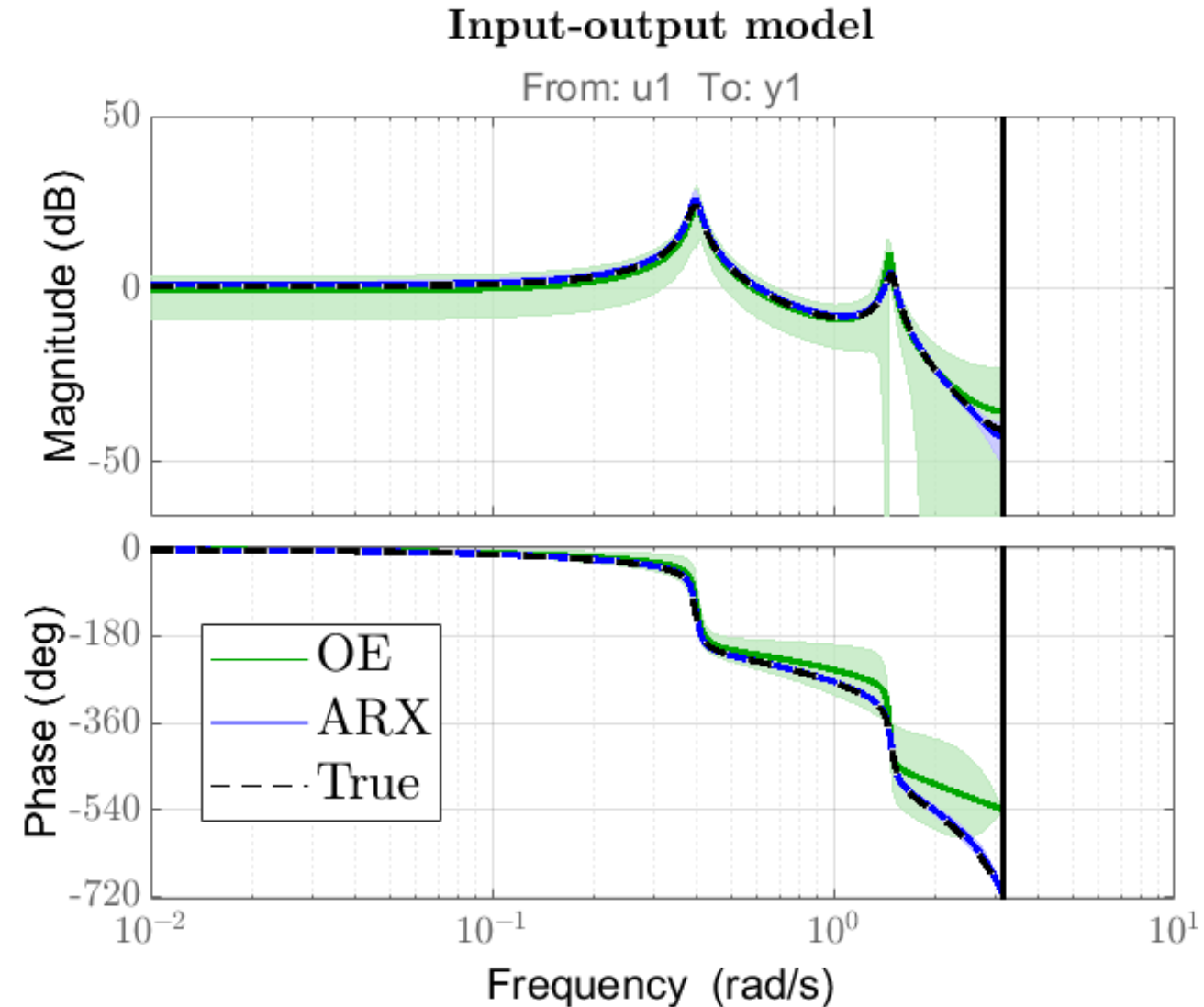
$\mathcal{S} \notin \mathcal{M}_{\text{OE}}(\theta)$  con  $G_0(z) \in \mathcal{G}_{\text{OE}}(\theta)$

$\mathcal{S} \in \mathcal{M}_{\text{ARX}}(\theta)$

# Esempio: identificazione trasmissione meccanica

Anche se  $\mathcal{S} \notin \mathcal{M}_{\text{OE}}(\boldsymbol{\theta})$ , dato che  $G_0(z) \in \mathcal{G}_{\text{OE}}(\boldsymbol{\theta})$ , il modello **OE** riesce comunque, **in media**, a stimare correttamente  $G_0(z)$

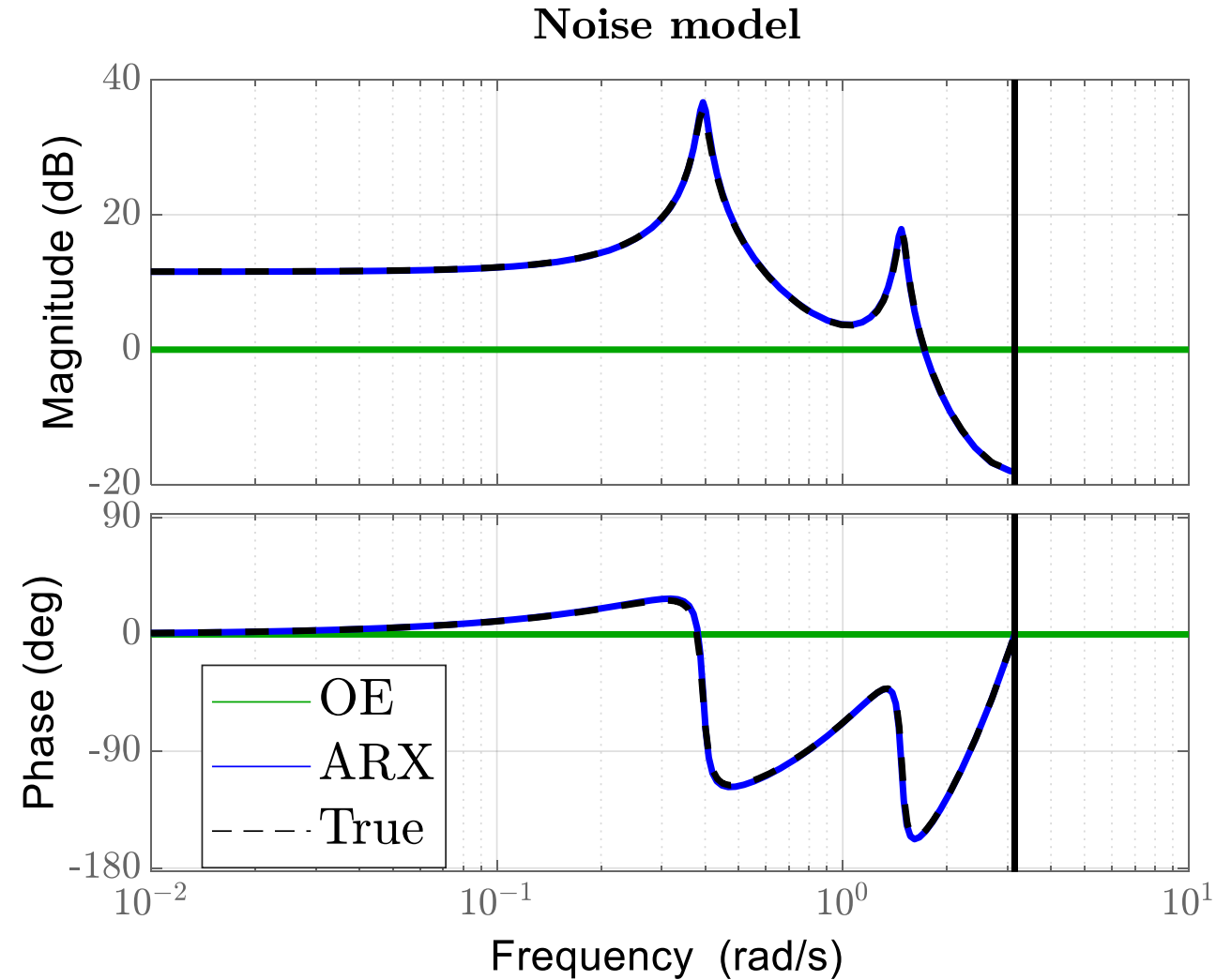
Il modello **ARX** ha **meno varianza** nella stima delle funzioni di trasferimento, dato che è il modello esatto del sistema



# Esempio: identificazione trasmissione meccanica

Il modello **ARX** stima perfettamente anche la funzione di trasferimento del rumore

Il modello **OE** non modella il disturbo



# Outline

1. Scelta della struttura e complessità del modello
2. Validazione o formule di complessità per la scelta della complessità
3. Analisi dei residui
- 4. Analisi dell'incertezza della stima**
5. Simulazione, predizione del modello identificato
6. Confronto con stima nonparametrica
7. Considerazioni pratiche



# Analisi incertezza stima

Con l'analisi dell'incertezza della stima intendiamo:

1. Incertezza sulla stima dei **parametri**
2. Incertezza sulla stima delle **funzioni di trasferimento**
3. Incertezza sulla posizione dei **poli** e degli **zeri**

## Incertezza sulla stima dei parametri

L'incertezza sulla stima dei parametri ([Lezione 12: slide 83](#)) può essere utilizzata per verificare la **significatività statistica** di un parametro, dove per significatività intendiamo quanto è probabile che il parametro vero sia effettivamente **diverso da 0**



# Analisi incertezza stima sui parametri

Una volta identificato un modello in Matlab, è possibile usare il comando **present** per visualizzare le stime dei parametri e la loro deviazione standard

## Esempio

Consideriamo il sistema  $\mathcal{S}$  identificato tramite un modello OE con  $k = 3, n_b = 1, n_f = 4$  usando  $N = 2000$  dati di ingresso  $u_{\text{wn}}(t) \sim \text{WN}(0, 0.5^2)$

$$\mathcal{S}: y(t) = \frac{0.103 + 0.181z^{-1}}{1 - 1.991z^{-1} + 2.203z^{-2} - 1.841z^{-3} + 0.894z^{-4}} z^{-3} u(t) + e(t), \quad e(t) \sim \text{WN}(0, 0.5^2)$$

# Esempio: analisi incertezza stima sui parametri

Utilizzando il comando `present` otteniamo

$$B(z) = 0.1066 \text{ (+/- } 0.01186) z^{-3} + 0.1798 \text{ (+/- } 0.01288) z^{-4}$$

$$F(z) = 1 - 1.981 \text{ (+/- } 0.008776) z^{-1} + 2.192 \text{ (+/- } 0.01835) z^{-2} - 1.845 \text{ (+/- } 0.01647) z^{-3} + 0.9007 \text{ (+/- } 0.006833) z^{-4}$$

Siccome **nessuna** deviazione standard è in grado di **annullare** il rispettivo parametro, abbiamo una ragionevole possibilità che **tutti** i parametri siano **significativi**

# Esempio: analisi incertezza stima sui parametri

Questa analisi può essere usata per **stimare il ritardo puro  $k$**

Ad esempio, possiamo stimare un ARX con  $k = 0, n_b = 3, n_a = 4$  e ottenere

$$B(z) = 0.0437 \text{ (+/- } 0.04107) + 0.05822 \text{ (+/- } 0.04108) z^{-1} + 0.1113 \text{ (+/- } 0.0411) z^{-2} + 0.1218 \text{ (+/- } 0.04124) z^{-3}$$

Il che ci ha un'indicazione che è meglio non includere i termini  $b_0$  e  $b_1 z^{-1}$

## Osservazione

In genere è buona norma «sperimentare» con modelli ARX in quanto si stimano velocemente ed il minimo è unico, quindi la soluzione non dipende dall'inizializzazione

# Analisi incertezza stima funzioni di trasferimento

Abbiamo visto nella [Lezione 12 – Slide 85](#) come, nel caso  $\mathcal{S} \in \mathcal{M}(\boldsymbol{\theta})$ , l'espressione della varianza sulla stima del valore della **funzione di trasferimento**  $G(z, \hat{\boldsymbol{\theta}}_N)$  ad ogni frequenza  $z = e^{j\omega}$ , può essere approssimata come

$$\text{Var}[G(e^{j\omega}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_N)] \approx \frac{n}{N} \cdot \frac{\Gamma_{vv}(\omega)}{\Gamma_{uu}(\omega)}$$

Se  $\mathcal{S} \notin \mathcal{M}(\boldsymbol{\theta})$ , esistono altre espressioni più complesse. Questa quantità si può calcolare anche per  $H(z, \hat{\boldsymbol{\theta}}_N)$

Quando  $\sqrt{\text{Var}[G(e^{j\omega}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_N)]}$  può essere **considerata piccola?** La risposta dipende dall'**uso del modello**

# Analisi incertezza stima funzioni di trasferimento

Per esempio, se vogliamo usare il modello per **progettare un controllo**,  $\sqrt{\text{Var}[G(e^{j\omega}, \hat{\theta}_N)]}$  deve essere «piccola» fino alla banda di controllo  $\omega_c$ . Una regola euristica è:

$$\sqrt{\text{Var}[G(e^{j\omega}, \hat{\theta}_N)]} < 0.1 |G(e^{j\omega}, \hat{\theta}_N)| \quad \text{per } \omega \leq \omega_c$$

Se  $\sqrt{\text{Var}[G(e^{j\omega}, \hat{\theta}_N)]}$  è **troppo grande**, non possiamo garantire che  $G(z, \hat{\theta}_N)$  sia una buona stima di  $G_0(z)$

# Analisi incertezza stima funzioni di trasferimento

Per ridurre la varianza di stima, si possono:

- Collezionare **più dati**  $N$
- Aumentare il **valore della densità spettrale di potenza dell'ingresso**  $\Gamma_{uu}(\omega)$  alle

frequenze in cui  $\sqrt{\text{Var}[G(e^{j\omega}, \hat{\theta}_N)]}$  è grande

# Esempio: analisi incertezza funzioni di trasferimento

Si consideri il sistema  $\mathcal{S}$  espresso tramite la famiglia di modelli **ARX**

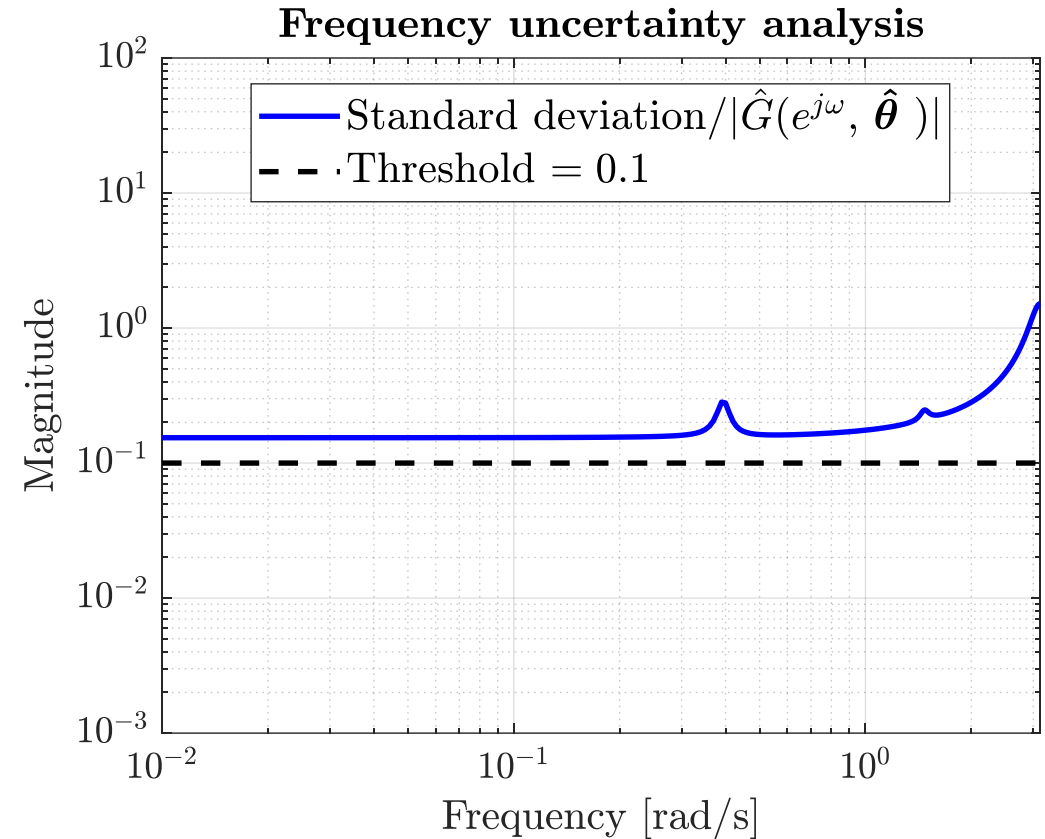
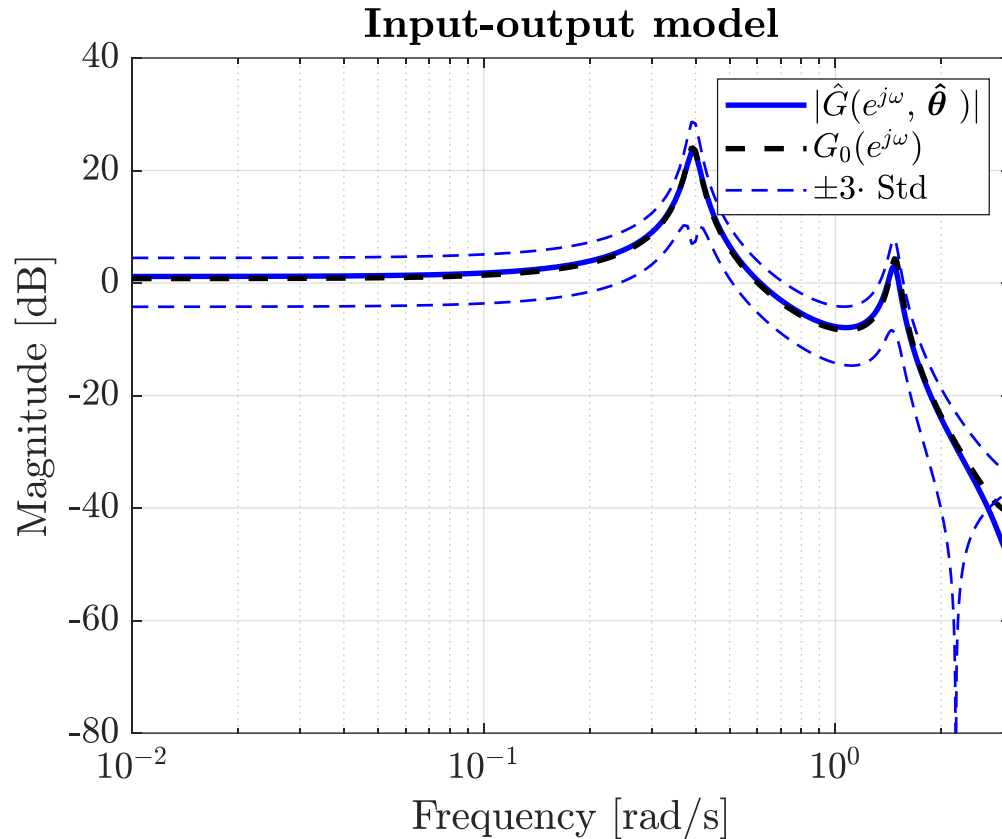
$$\mathcal{S}: y(t) = \frac{0.10276 + 0.18123z^{-1}}{A(z)} u(t-3) + \frac{1}{A(z)} e(t) \quad e(t) \sim \text{WN}(0, 0.01)$$

$$A(z) = 1 - 1.99185z^{-1} + 2.20265z^{-2} - 1.84083z^{-3} + 0.89413z^{-4}$$

Identifichiamo il sistema con un modello **ARX** di ordine esatto con  $n_b = 1, n_a = 4, k = 3$  e un ingresso  $u(t) \sim \text{WN}(0, 0.005)$ , usando  $N = 2000$  dati

Vogliamo identificare un modello per poi **progettare un controllo nella banda**  $[0, 1]$  rad/s

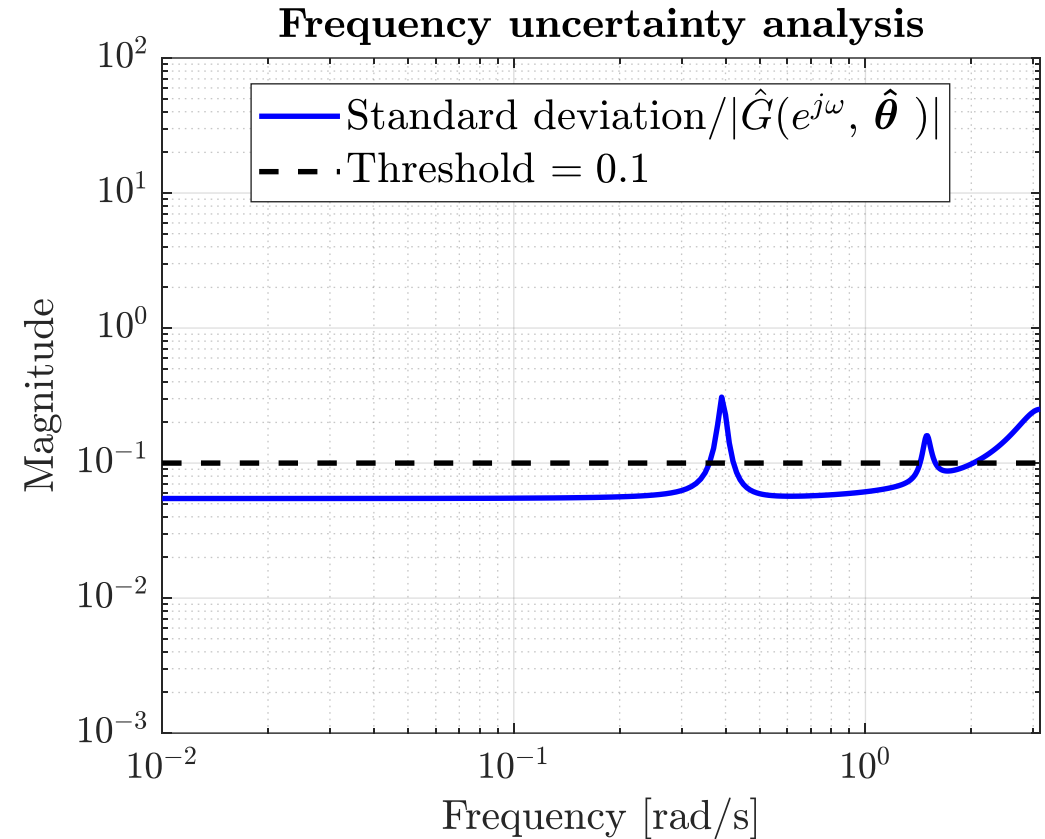
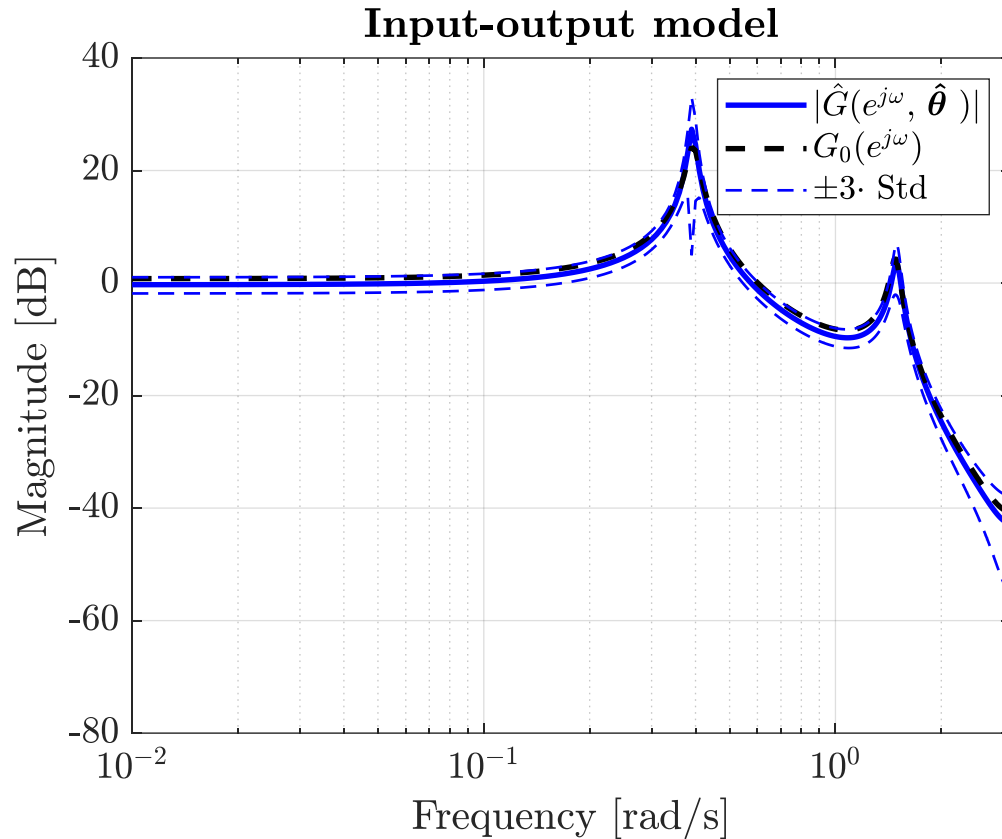
# Esempio: analisi incertezza funzioni di trasferimento



Notiamo come la regola  $\sqrt{\text{Var}[G(e^{j\omega}, \hat{\theta}_N)]} < 0.1 |G(e^{j\omega}, \hat{\theta}_N)|$  **non è soddisfatta**. Proviamo a usare un **ingresso con più energia**, come  $u(t) \sim \text{WN}(0, 0.05)$

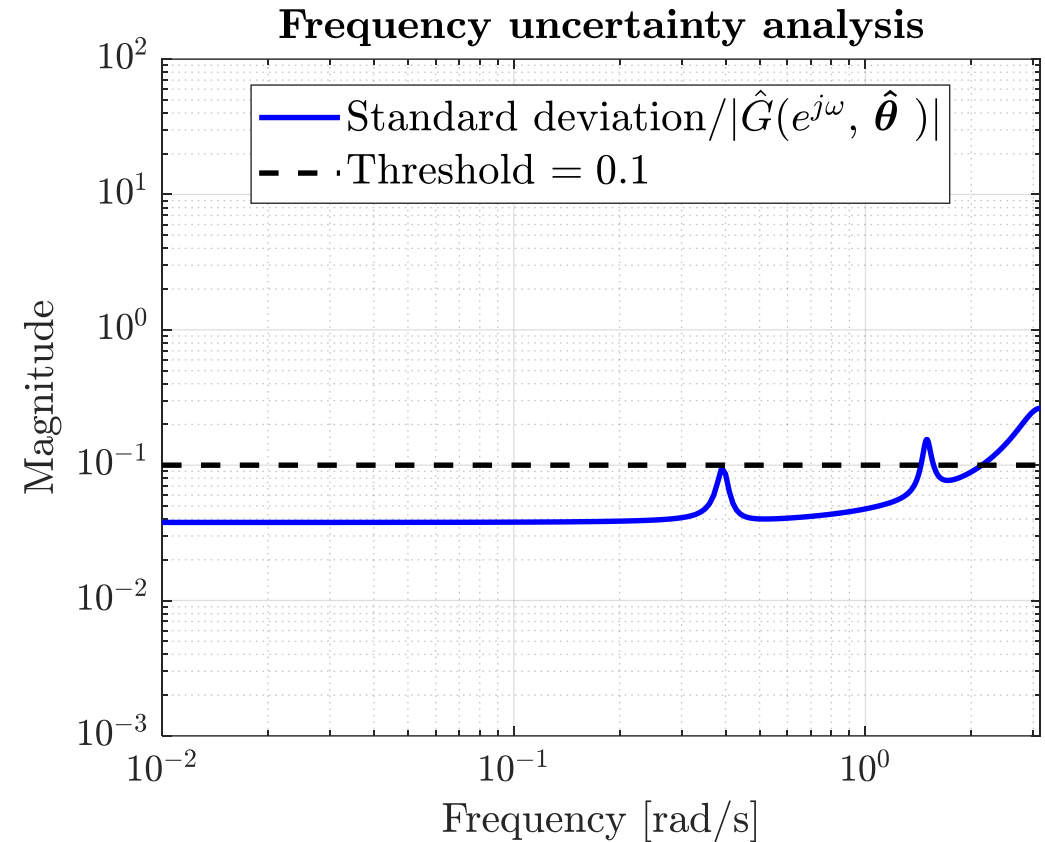
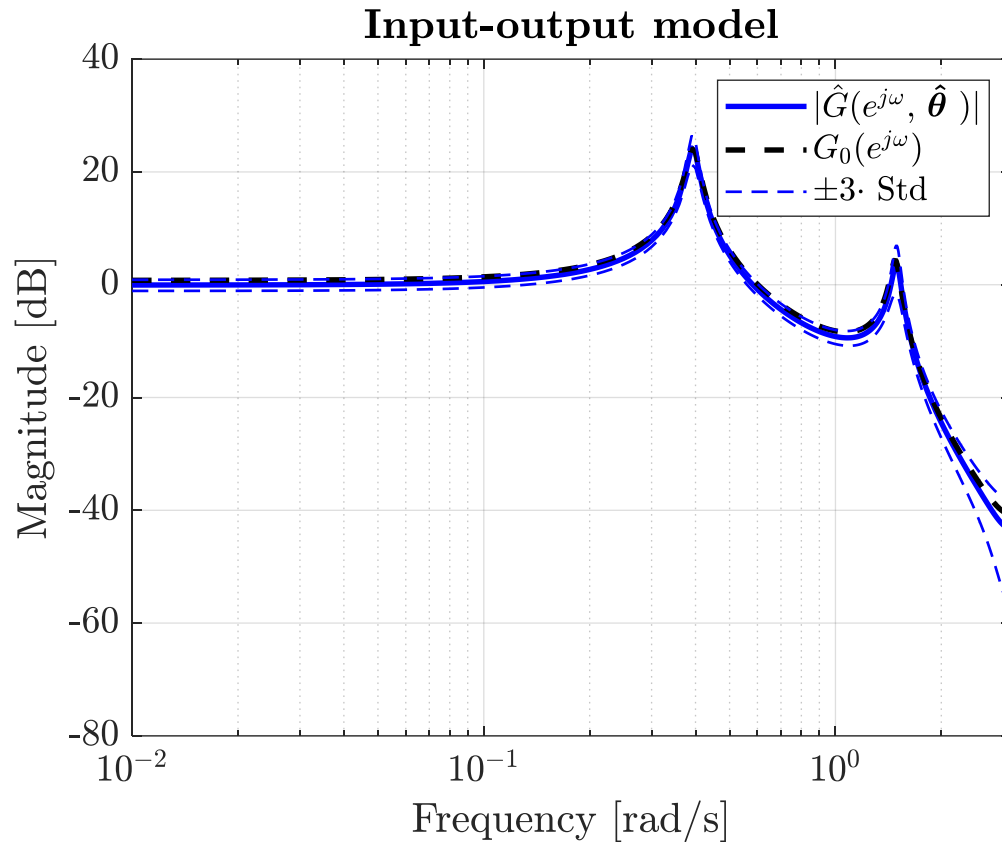


# Esempio: analisi incertezza funzioni di trasferimento



Meglio, però nella banda  $[0.3, 0.5]$  c'è ancora troppa incertezza. Proviamo a utilizzare un ingresso del tipo  $u^*(t) = u(t) + 0.2\sin(0.3 \cdot t) + 0.2\sin(0.4 \cdot t)$ , con  $u(t) \sim \text{WN}(0, 0.05)$

# Esempio: analisi incertezza funzioni di trasferimento



L'incertezza è stata ridotta anche nella prima risonanza

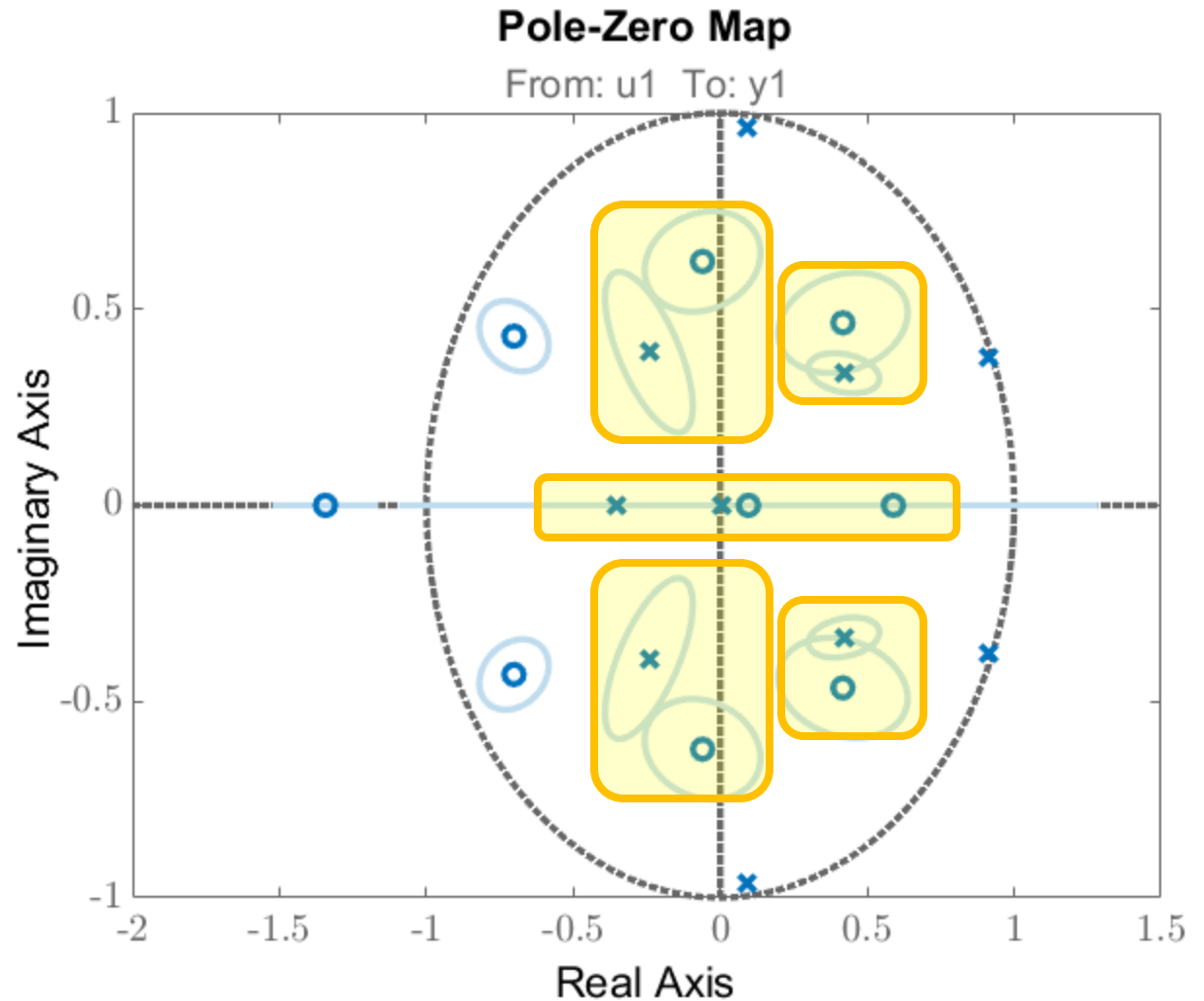
# Analisi incertezza della stima di poli e zeri

Una volta stimato il modello e analizzato i residui per capire se  $S \in \mathcal{M}(\theta)$ , è utile **rappresentare i poli e gli zeri** del modello stimato, per verificare la possibilità di **cancellazioni polo\zero** (e quindi evitare sovrapparametrizzazioni)

L'idea è verificare se gli **ellissoidi di confidenza di poli e zeri si sovrappongono** o sono molto vicini. In questo caso, è probabile che tali poli\zeri possano essere rimossi dal modello

# Analisi incertezza della stima di poli e zeri

Nel grafico seguente, vi sono 6 situazioni in cui poli e zeri possono potenzialmente essere semplificati e rimossi



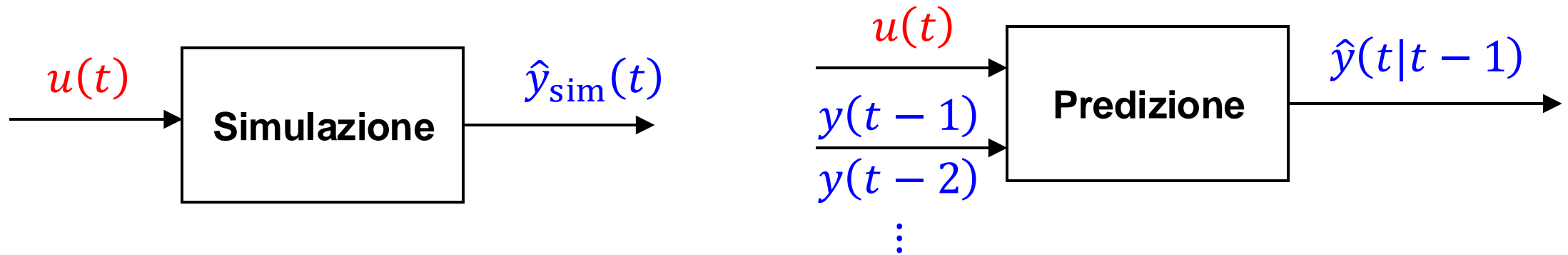
# Outline

1. Scelta della struttura e complessità del modello
2. Validazione o formule di complessità per la scelta della complessità
3. Analisi dei residui
4. Analisi dell'incertezza della stima
- 5. Simulazione, predizione del modello identificato**
6. Confronto con stima nonparametrica
7. Considerazioni pratiche



# Simulazione e predizione del modello

È possibile **simulare** o **predire** l'output del modello per confrontarlo con l'output misurato, a fronte del medesimo input. L'idea è che se la simulazione o predizione sono simili all'output misurato, allora il modello è **buono**



L'errore di simulazione è  $e_{\text{sim}}(t) = y(t) - \hat{y}_{\text{sim}}(t) = y(t) - G(z, \hat{\theta}_N)u(t)$ . Un modello buono non rende necessariamente  $e_{\text{sim}}(t)$  piccolo, poiché la **simulazione non considera il modello del rumore**

# Simulazione e predizione del modello

La **simulazione** può solo fornire informazioni sull'accuratezza di  $G(z, \hat{\theta}_N)$ . Tuttavia, la simulazione è una **rappresentazione «più realistica»** di come il modello si comporta a fronte di un ingresso noto  $u(t)$

In Matlab si usa il metodo **compare**, che permette di confrontare la simulazione o la predizione a  $k$  passi di uno o più modelli rispetto ai dati

La **simulazione** permette anche di stimare il rumore  $v(t) = H_0(z)e(t)$  tramite

$$\hat{v}(t) = y(t) - \hat{y}_{\text{sim}}(t)$$

È poi possibile confrontare una **stima della densità spettrale di potenza** di  $\hat{v}(t)$  con il **modello del rumore** identificato  $H(z, \hat{\theta}_N)$

# Esempio: Simulazione e predizione del modello

Consideriamo ancora il sistema ARX, e usiamo modelli OE e ARX di ordine esatto

$$\mathcal{S}: y(t) = \frac{0.10276 + 0.18123z^{-1}}{A(z)} u(t-3) + \frac{1}{A(z)} e(t) \quad e(t) \sim \text{WN}(0, \lambda^2)$$

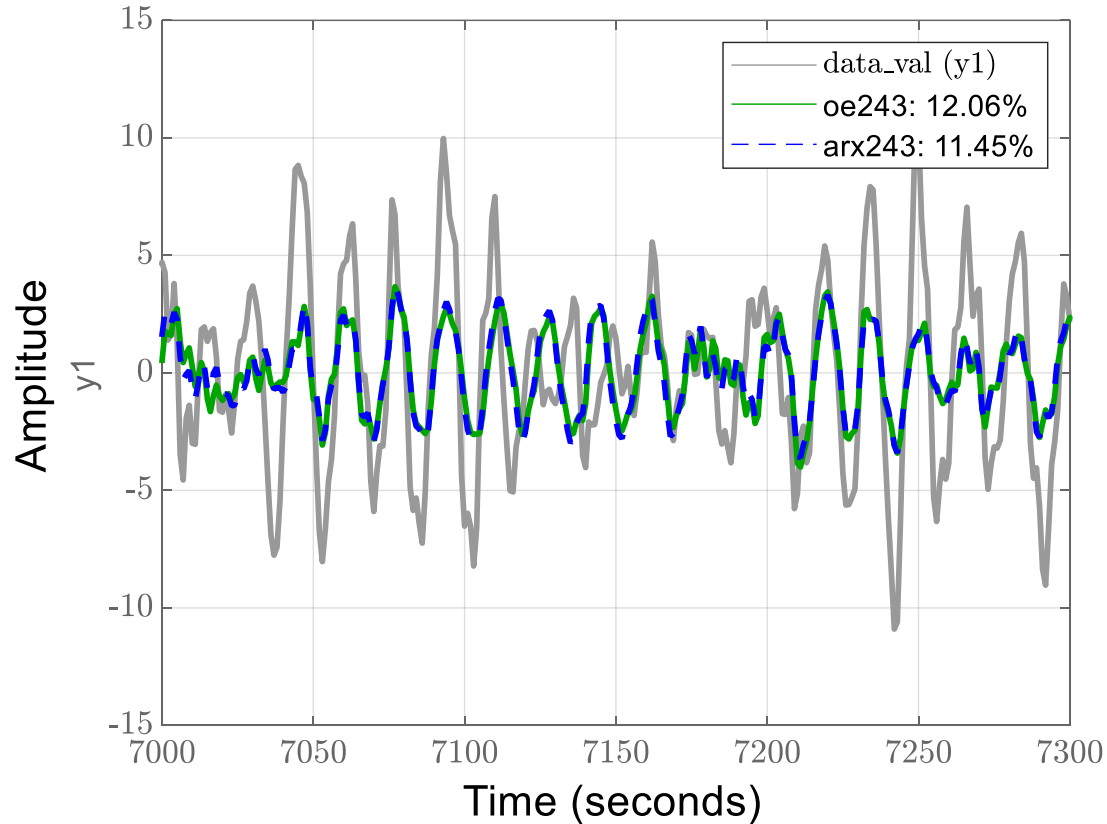
$$A(z) = 1 - 1.99185z^{-1} + 2.20265z^{-2} - 1.84083z^{-3} + 0.89413z^{-4}$$

Confrontiamo sia la simulazione che la predizione dei due modelli identificati per scegliere il modello migliore



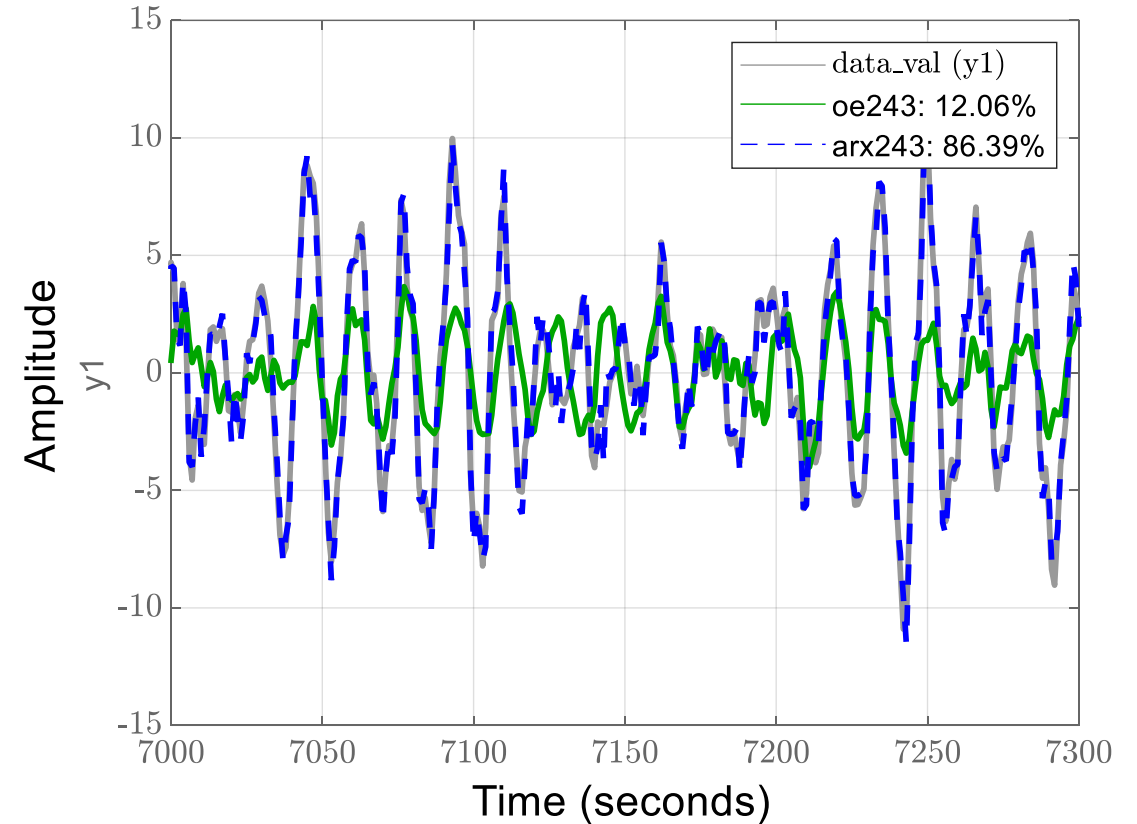
# Esempio: Simulazione e predizione del modello

## Simulated Response Comparison



La risposta **simulata** dei due modelli è simile (entrambi stimano  $G_0(z)$  molto bene). Ciò che non è spiegato è una stima del rumore  $H_0(z)e(t)$

## 1-Step Predicted Response Comparison



Il modello ARX **predice** molto meglio i dati, poiché modella correttamente il rumore  $H_0(z)e(t)$

# Outline

1. Scelta della struttura e complessità del modello
2. Validazione o formule di complessità per la scelta della complessità
3. Analisi dei residui
4. Analisi dell'incertezza della stima
5. Simulazione, predizione del modello identificato
- 6. Confronto con stima nonparametrica**
7. Considerazioni pratiche



# Confronto con stima nonparametrica

La stima nonparametrica «**lascia parlare i dati**». È quindi importante valutare se le funzioni di trasferimento del modello aderiscono alle loro stime nonparametriche

Stime nonparametriche delle funzioni  $G_0(z)$  e  $H_0(z)$  si possono ottenere con la ETFE o con stima spettrale ([Lezione 12](#)). In Matlab si usa **etfe**, **spa**, **spafdr**

**Esempio.** Consideriamo ancora il sistema ARX, e usiamo modelli OE e ARX di ordine esatto

$$S: y(t) = \frac{0.10276 + 0.18123z^{-1}}{A(z)} u(t-3) + \frac{1}{A(z)} e(t) \quad e(t) \sim \text{WN}(0, \lambda^2)$$

$$A(z) = 1 - 1.99185z^{-1} + 2.20265z^{-2} - 1.84083z^{-3} + 0.89413z^{-4}$$

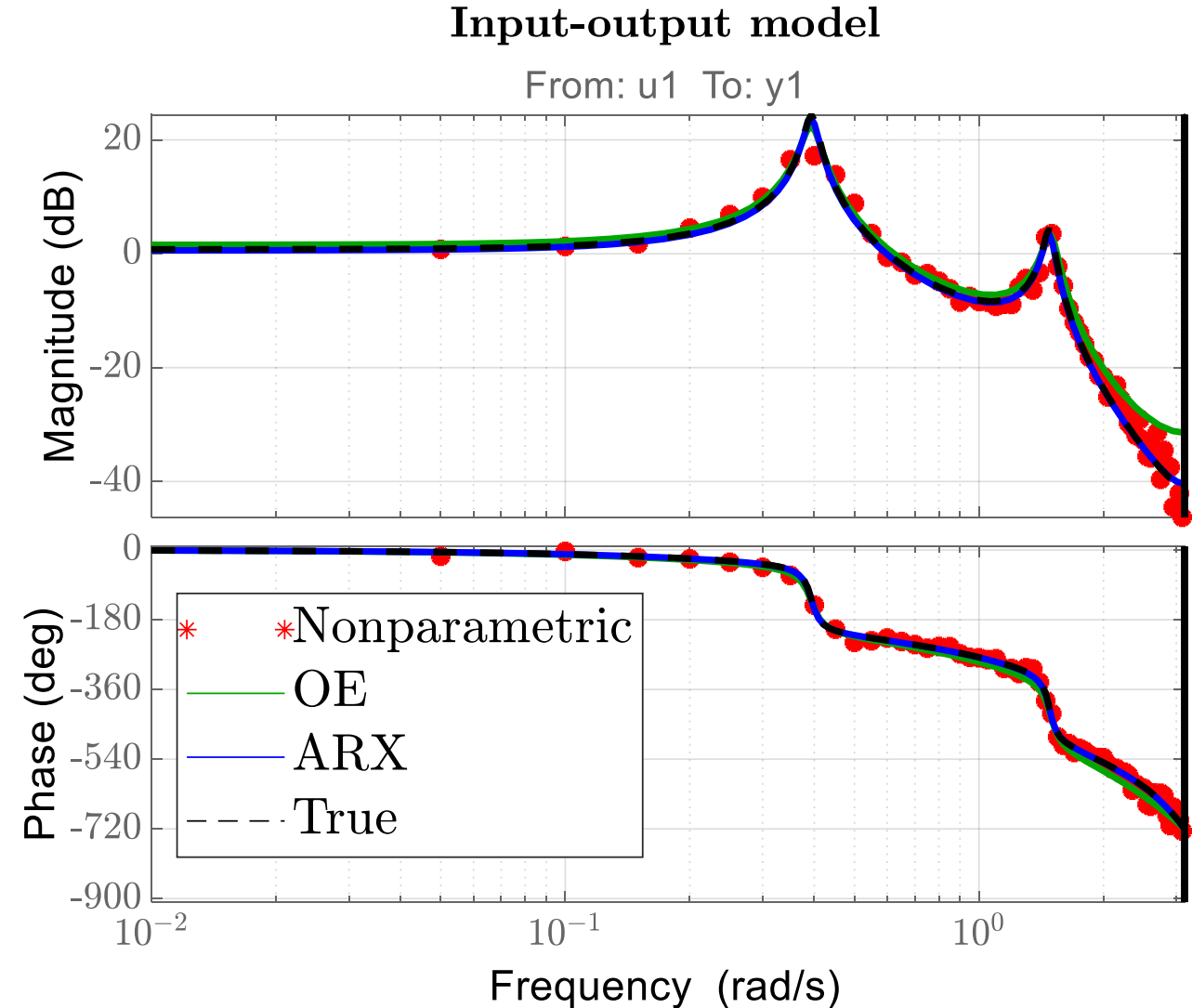
# Esempio: confronto con stima nonparametrica

Entrambi i modelli OE e ARX stimano bene  $G_0(z)$  e la stima nonparametrica (che prendiamo come proxy di  $G_0(z)$  che in non sappiamo)

Simuliamo i modelli OE e ARX per calcolare una stima del rumore

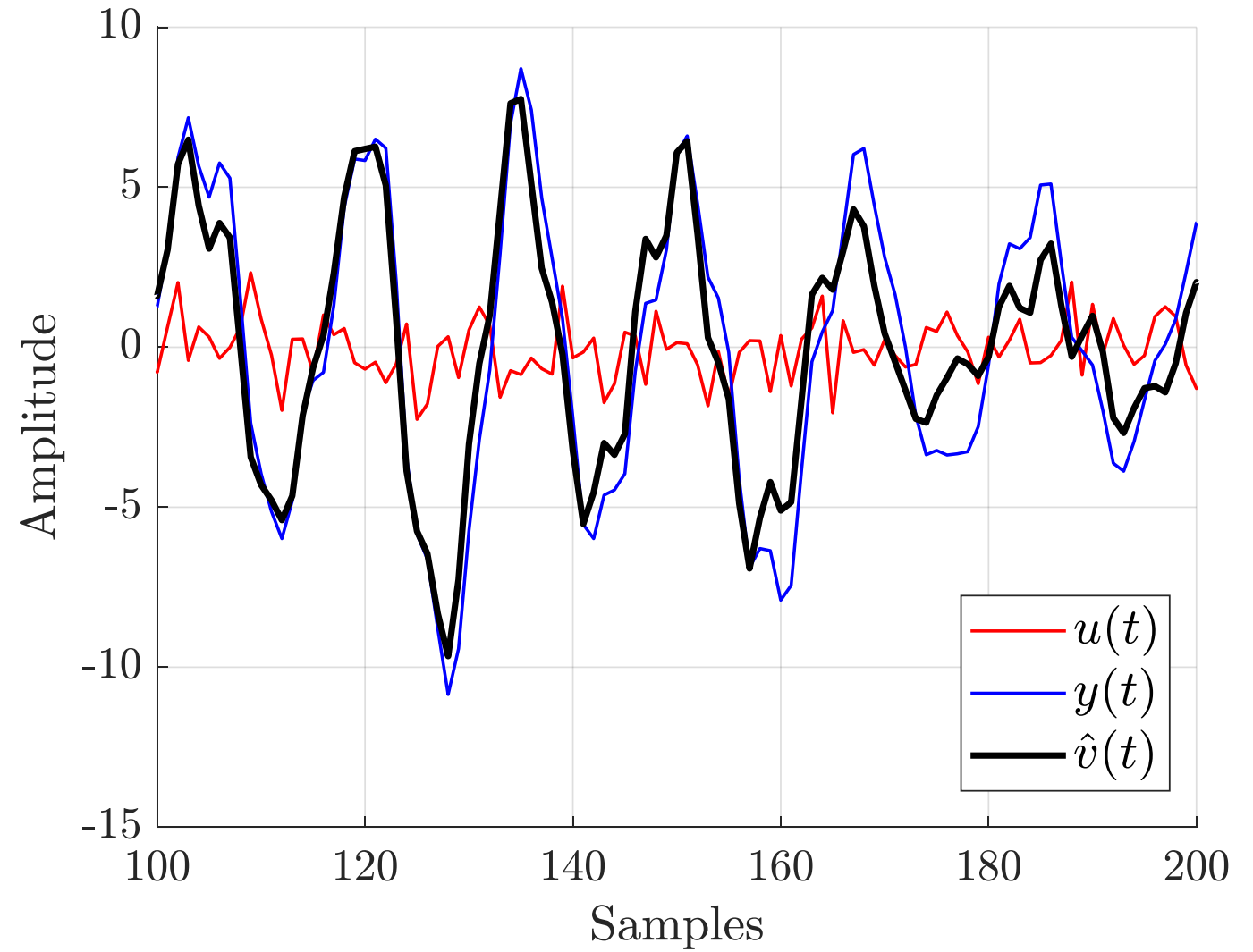
$$\hat{v}(t) = y(t) - \hat{y}_{\text{sim}}(t)$$

e verificare se il modello del rumore è opportuno

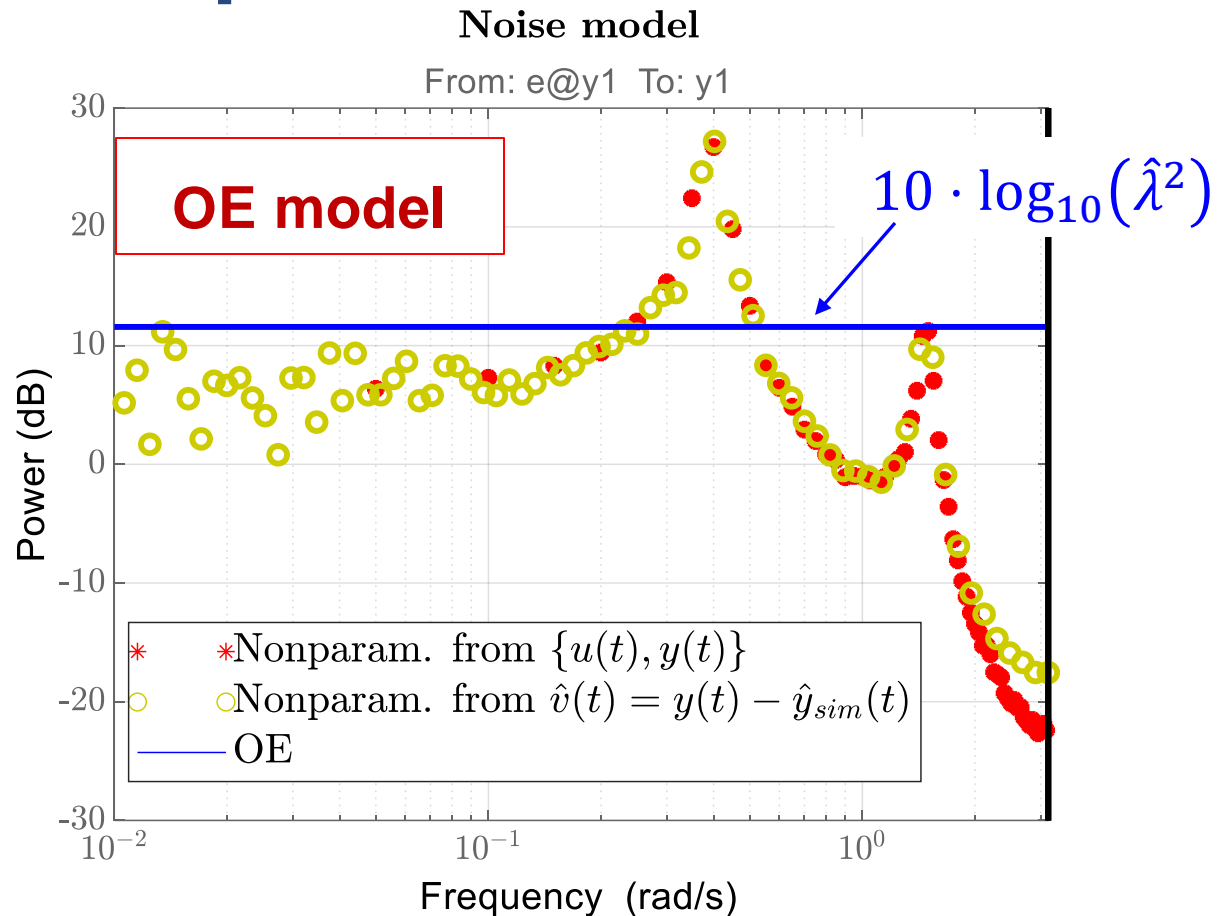


# Esempio: confronto con stima nonparametrica

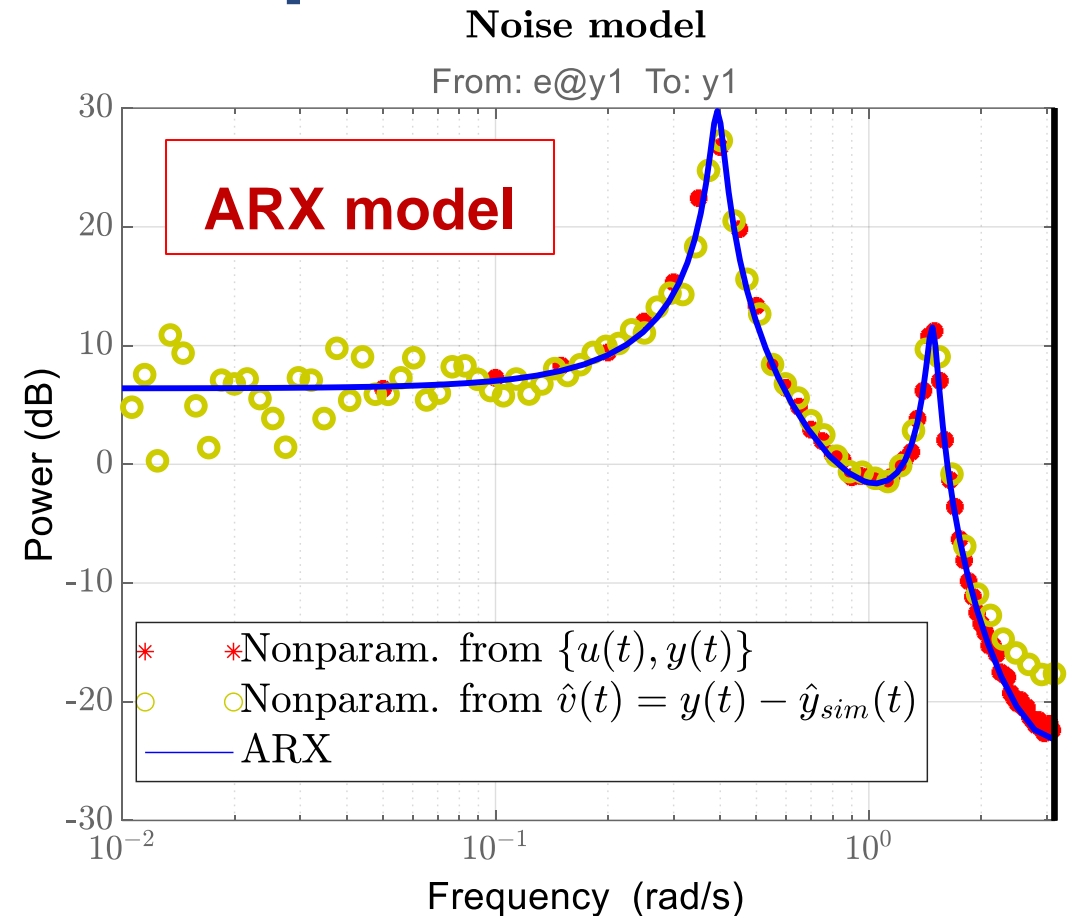
Vediamo che il disturbo  $\hat{v}(t)$  **non è trascurabile** rispetto a  $y(t)$  misurato



# Esempio: confronto con stima nonparametrica



Il modello del rumore parametrico **non è simile** al modello del rumore nonparametrico → **probabilmente il modello del rumore parametrico è SBAGLIATO**



Il modello del rumore parametrico **è simile** al modello del rumore nonparametrico → **probabilmente il modello del rumore parametrico è CORRETTO**

# Outline

1. Scelta della struttura e complessità del modello
2. Validazione o formule di complessità per la scelta della complessità
3. Analisi dei residui
4. Analisi dell'incertezza della stima
5. Confronto con stima nonparametrica
6. Simulazione, predizione del modello identificato
- 7. Considerazioni pratiche**



# Considerazioni pratiche

Per quanto riguarda la **frequenza di campionamento** con la quale acquisire i dati:

- Per la **ETFE**, meglio  $f_s$  **alta**, in quanto avrò più risoluzione in frequenza
- Per l'identificazione **PEM**, meglio  $f_s$  **non troppo alta**, poichè, quando  $f_s$  cresce, i poli del modello discreto tendono a 1, rendendolo non più asintoticamente stabile

Scelta tipica di  $f_s$  per **l'identificazione parametrica**:

$$10 \cdot \frac{\omega_c}{2\pi} \leq f_s \leq 30 \cdot \frac{\omega_c}{2\pi}$$

dove  $\omega_c$  denota la **banda del sistema** (in rad/s), osservata tramite ETFE



# Considerazioni pratiche

Dati con  $f_s$  **inferiore** possono essere ottenuti tramite:

- **ripetizione** dell'esperimento
- **ricampionamento** dei segnali (In Matlab **resample**, **decimate**)



# Tipica procedura (iterativa) di identificazione

1. Cercare di capire la **fisica** del sistema e configurare il sistema di **acquisizione**
2. Ottenere una **stima nonparametrica** di  $G_0(z)$  e  $H_0(z)$
3. Sulla base della stima nonparametrica e, se possibile, di risposte allo scalino, scegliere la **frequenza di campionamento** per la stima parametrica
4. Identificare un modello lineare nei parametri, **ARX** o **FIR**, scegliendone l'ordine con *validazione* o *formule di complessità*. Controllare che  $G_0(z)$  sia stimata bene tramite *analisi dei residui*
5. Controllare se vi siano *cancellazioni polizeri* e determinare l'ordine del modello. Usare questo ordine per stimare un modello **OE**. Validare il modello con *analisi residui, confronto con stima nonparametrica, analisi incertezza* e *simulazione*
6. Aggiungere un **modello del rumore**, per esempio usando una struttura **Box-Jenkins**, e validarlo tramite *analisi residui, confronto con stima nonparametrica, analisi incertezza* e *simulazione*



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI BERGAMO

Dipartimento  
di Ingegneria Gestionale,  
dell'Informazione e della Produzione

# FINE DEL CORSO DI IMAD

## Grazie!

Mirko Mazzoleni  
mirko.mazzoleni@unibg.it