UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO
Dipartimento di Ingegneria Gestionale, dell'Informazione e della Produzione
Control Automation Lab

IDENTIFICAZIONE DEI MODELLI E ANALISI DEI DATI (IMAD)

Corso di Laurea Magistrale in INGEGNERIA INFORMATICA

Lezione 4: Stima a massima verosimiglianza (maximum likelihood estimation)

SPEAKER
Prof. Mirko Mazzoleni

PLACE
Università degli Studi di Bergamo

Syllabus

Parte I: sistemi statici

1. **Richiami di statistica**
2. **Teoria della stima**

   2.1 Proprietà degli stimatori

3. **Stima a minimi quadrati**

   3.1 Stima di modelli lineari

   3.2 Algoritmo del gradient descent

4. **Stima a massima verosimiglianza**

   4.1 Proprietà della stima

   4.2 Stima di modelli lineari

5. **Regressione logistica**

   5.1 Stima di un modello di regressione logistica

6. **Fondamenti di machine learning**

   6.1 Bias-Variance tradeoff

   6.2 Overfitting

   6.3 Regolarizzazione

   6.4 Validazione

7. **Cenni di stima Bayesiana**

   7.1 Probabilità congiunte, marginali e condizionate

   7.2 Connessione con Filtro di Kalman

IMAD

Parte I: sistemi statici

Stima parametrica $\hat{\theta}$

- ***θ* deterministico**
  - ***NO assunzioni su ddp dei dati***
    - ✓ Stima parametri popolazione
    - ✓ Stima modello lineare: minimi quadrati
  - ***SI assunzioni su ddp dei dati***
    - ✓ Stima massima verosimiglianza parametri popolazione
    - ✓ Stima modello lineare: massima verosimiglianza
    - ✓ Regressione logistica
- ***θ* variabile casuale**
  - ***SI assunzioni su ddp dei dati***
    - ✓ Stima Bayesiana

Machine learning

Parte II: sistemi dinamici

Stima parametrica $\hat{\theta}$

- ***θ* deterministico**
  - ***NO assunzioni su ddp dei dati***
    - ✓ Modelli lineari di pss
    - ✓ Predizione
    - ✓ Identificazione
    - ✓ Persistente eccitazione
    - ✓ Analisi asintotica metodi PEM
    - ✓ Analisi incertezza stima (numero dati finito)
    - ✓ Valutazione del modello

Outline

1. Stima a massima verosimiglianza

2. Stima a massima verosimiglianza di parametri della popolazione

3. Stima a massima verosimiglianza di modelli lineari

Outline

1. **Stima a massima verosimiglianza**
2. Stima a massima verosimiglianza di parametri della popolazione
3. Stima a massima verosimiglianza di modelli lineari

Stima a massima verosimiglianza

Abbiamo presentato finora diversi tipi di stimatori:

- **Media campionaria:** $\hat{\mu} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y(i)$ $\Rightarrow$ $\hat{\theta} = \mu \in \mathbb{R}$

- **Varianza campionaria:** $S_{N-1}^2 = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^{N} (y(i) - \hat{\mu})^2$ $\Rightarrow$ $\hat{\theta} = \sigma^2 \in \mathbb{R}$

- **Stimatore a minimi quadrati** di un modello lineare: $y(i) = \theta_0 + \theta_1 \varphi_1(i) + \cdots + \theta_{d-1}\varphi_{d-1}(i) + \epsilon(i)$

  $\epsilon(i)$ indipendenti media nulla e varianza λ^2

  $\Rightarrow$ $\hat{\boldsymbol{\theta}} = [\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_{d-1}] \in \mathbb{R}^{d\times 1}$

Stima a massima verosimiglianza

Gli stimatori presentati sono **parametrici**, nel senso che stimano dei parametri del sistema che ha generato i dati

- Nel fare ciò, non abbiamo **mai fatto assunzioni** sulla **distribuzione di probabilità** dei dati $\mathcal{D} = \{y(1), y(2), \dots, y(N)\}$

Il metodo della **massima verosimiglianza** (MLE – Maximum Likelihood Estimation) è una procedura di stima che, **dato un modello probabilistico**, stima i suoi **parametri** in modo tale che siano **più coerenti con i dati** osservati

Stima a massima verosimiglianza

Supponiamo di avere a disposizione N osservazioni $Y = [y(1), y(2), \dots, y(N)]^\top$, dove

$$y(i) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \ \ \text{i.i.d.} \quad \Rightarrow \quad f_y\big(y(i)\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y(i)-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

Probability density function

La **pdf congiunta** dei dati è $\quad f_Y(y(1), y(2), \dots, y(N) | \mu, \sigma^2) = f_Y(Y|\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{N} \mathcal{N}(y(i)|\mu, \sigma^2)$

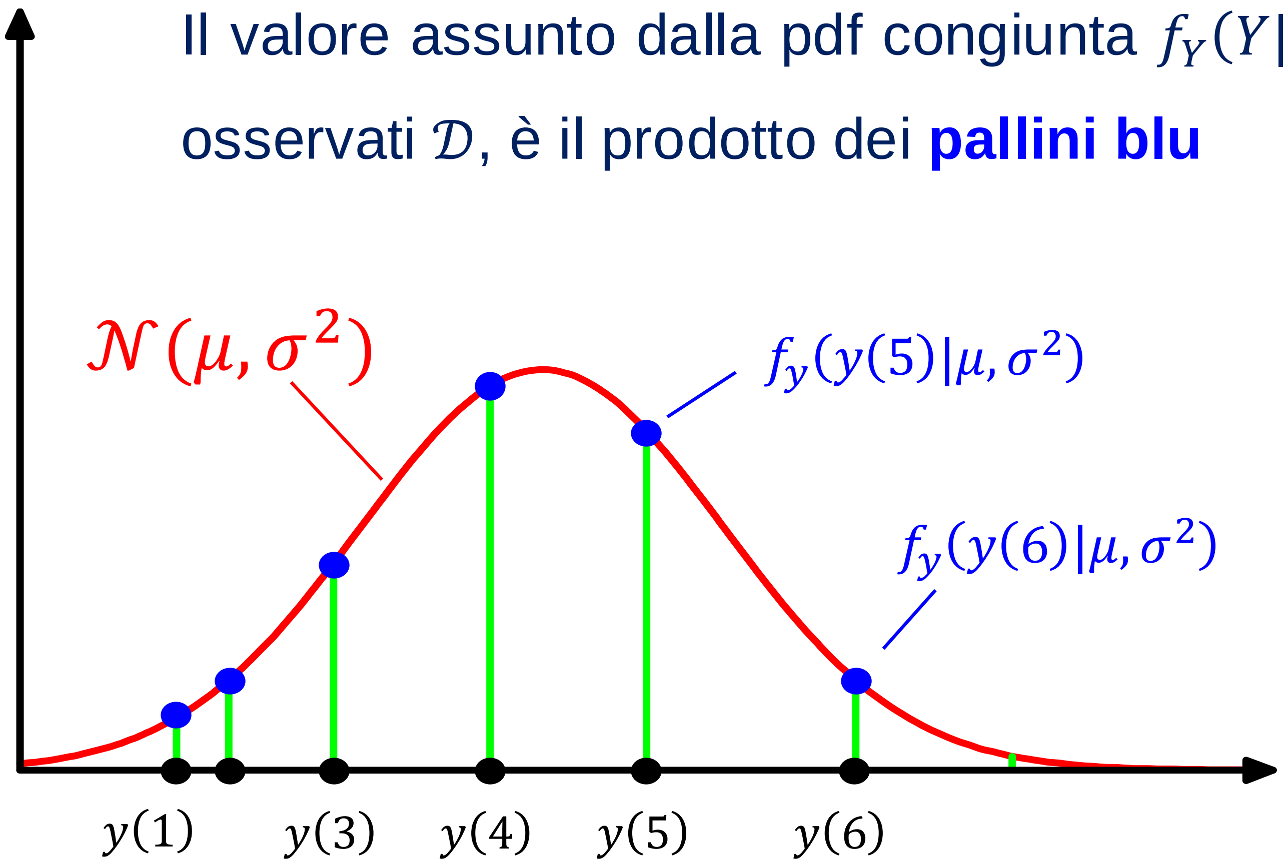
La pdf congiunta $f_Y(Y|\mu, \sigma^2)$ indica la **probabilità che si realizzi il vettore di dati osservato**

- Siccome le $y(i)$ sono i.i.d., la probabilità di osservare $y(1)$ AND $y(2)$ AND … AND $y(N)$ è il **prodotto delle pdf** delle singole variabili

Esempio: calcolo pdf congiunta, parametri noti

Supponiamo di avere $N = 6$ dati $\mathcal{D} = \{y(1), y(2), \dots, y(6)\}$, $y(i) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ i.i.d.

Il valore assunto dalla pdf congiunta $f_Y(Y|\mu, \sigma^2)$, con μ e σ^2 **noti**, valutata nei dai osservati $\mathcal{D}$, è il prodotto dei **pallini blu** ●



$$
\begin{aligned}
f_Y(Y|\mu, \sigma^2) = f_y(y(1)|\mu, \sigma^2) \cdot \\
\cdot f_y(y(2)|\mu, \sigma^2) \cdot \\
\vdots \\
\cdot f_y(y(6)|\mu, \sigma^2)
\end{aligned}
$$

Stima a massima verosimiglianza

Se funzione dei dati Y, la pdf congiunta è una **distribuzione multivariabile**. Io però **conosco il valore di** Y, dato che ho osservato i dati

Se conoscessi anche μ e σ, potrei calcolare la probabilità di avere osservato Y. Però **non conosco** μ e σ! E' proprio quello che voglio stimare!

Quando $f_Y(Y|\mu,\sigma^2)$ (la **pdf congiunta**) è vista in funzione dei parametri μ and σ, è chiamata funzione di **likelihood** $\mathcal{L}(\mu,\sigma^2|Y)$

Cambia solo **l'interpretazione**, ma $f_Y(Y|\mu,\sigma^2)$ e $\mathcal{L}(\mu,\sigma^2|Y)$ sono lo **stesso oggetto matematico**!

Stima a massima verosimiglianza

Riassunto:

Variabili non note

Parametri NOTI

- Se $f_Y(Y|\ \mu,\ \sigma^2\ )$ è funzione dei dati Y: **pdf multivariabile**

Dati NOTI

Variabili non note

- Se $f_Y(Y|\ \mu,\ \sigma^2\ )$ è funzione dei parametri μ e σ^2: **likelihood** $\mathcal{L}(\mu,\sigma^2|Y)$

Di solito si cambia la notazione di $f_Y(Y|\mu,\sigma^2)$ in $\mathcal{L}(\mu,\sigma^2|Y)$ per rendere più chiaro chi è supposto noto («*a destra della barra* |») e chi non è noto («*a sinistra della barra* |»)

Stima a massima verosimiglianza

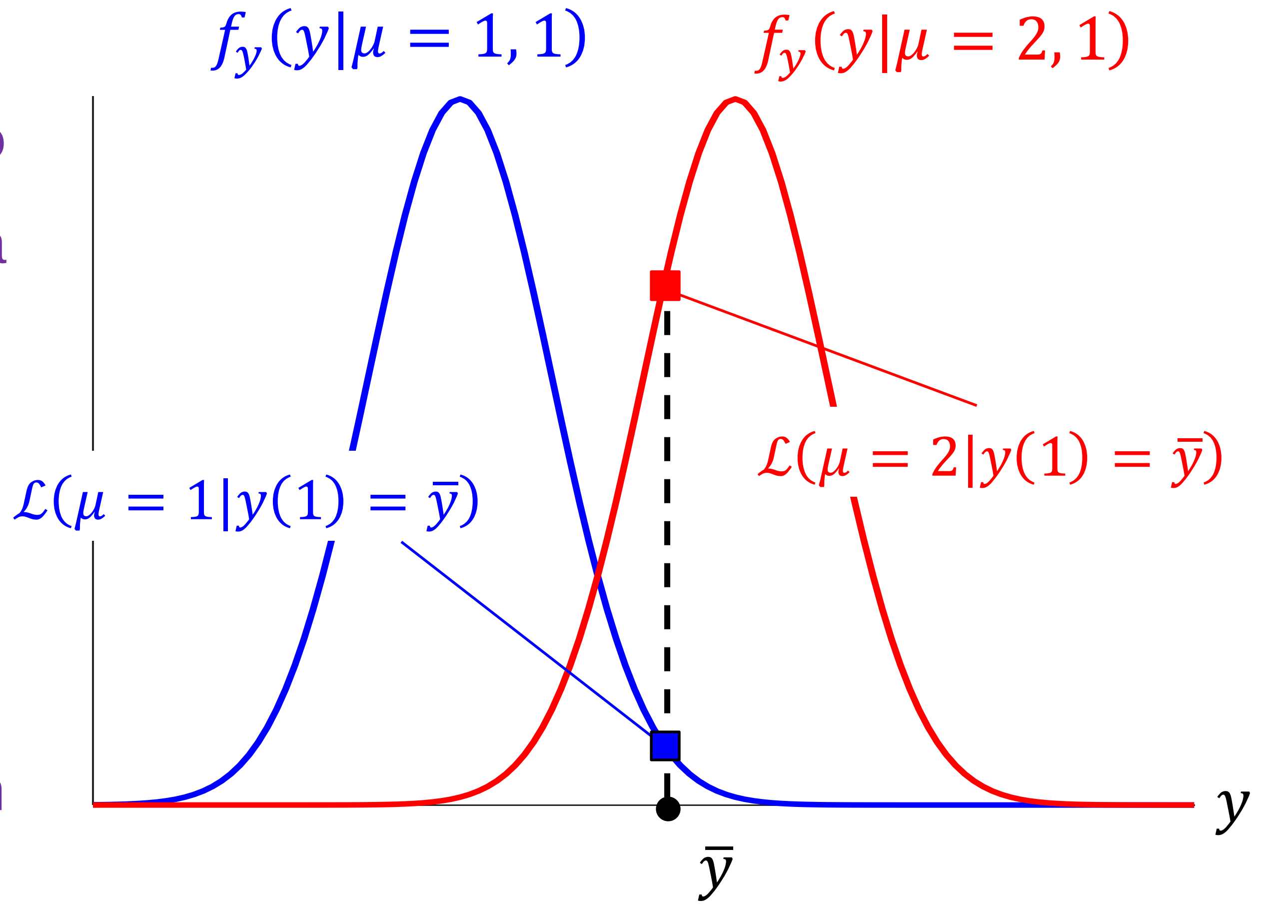
La stima a massima verosimiglianza è quel valore del parametro $\boldsymbol{\theta}$ che **massimizza la verosimiglianza** $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}|Y)$

Esempio: supponiamo di avere **un solo dato** $y(1) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2 = 1)$, e che il suo valore sia $y(1) = \bar{y}$. Il **parametro da stimare** è $\theta = \mu$

Notiamo che:

$$\mathcal{L}(\mu = 2|y(1) = \bar{y}) > \mathcal{L}(\mu = 1|y(1) = \bar{y})$$

Per cui $\mu = 2$ è **più verosimile** di $\mu = 1$, in base a questo modello e questi dati

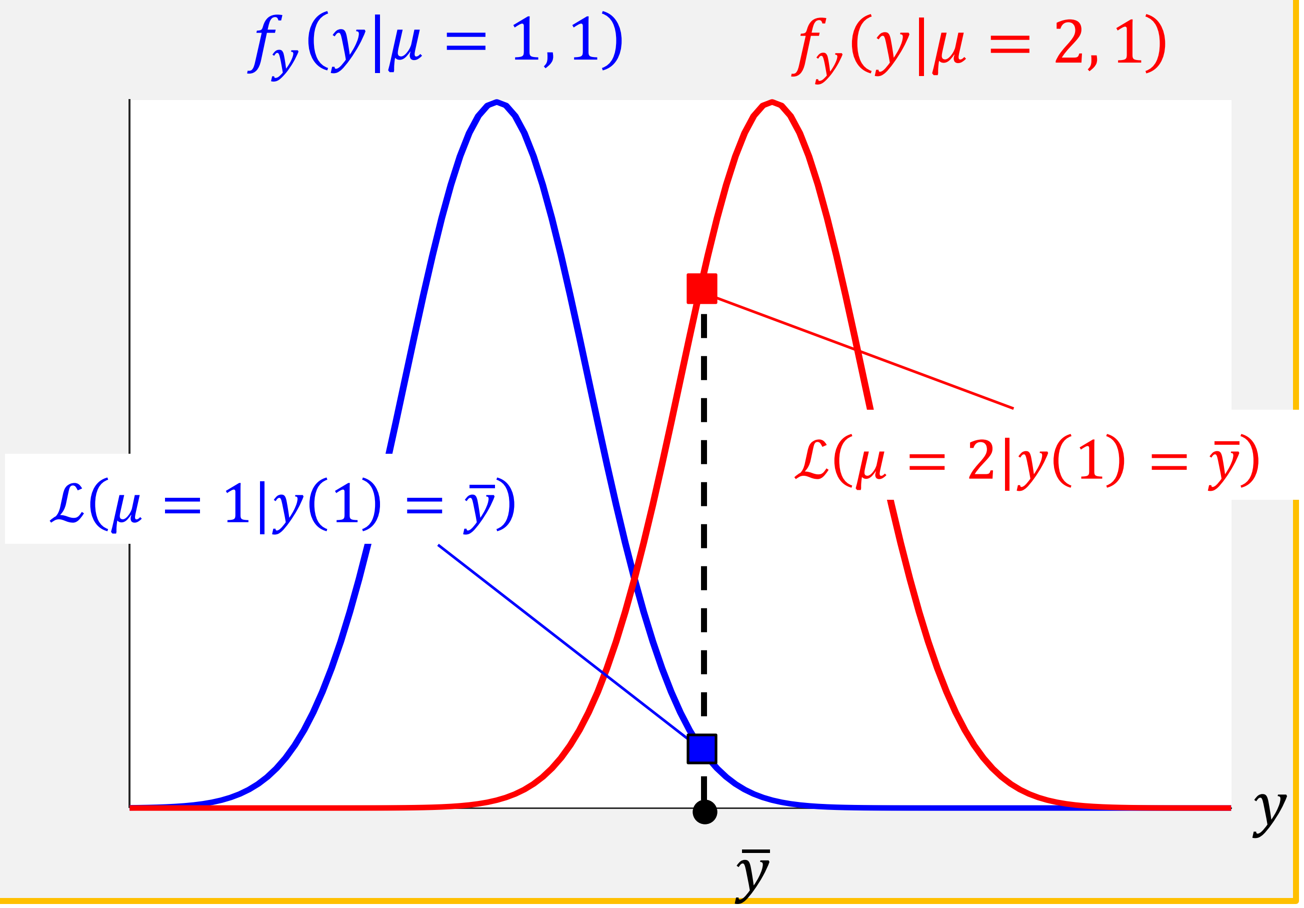


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO | Dipartimento di Ingegneria Gestionale, dell'Informazione e della Produzione

QUIZ!

In questo esempio, la **stima a massima verosimiglianza** è:

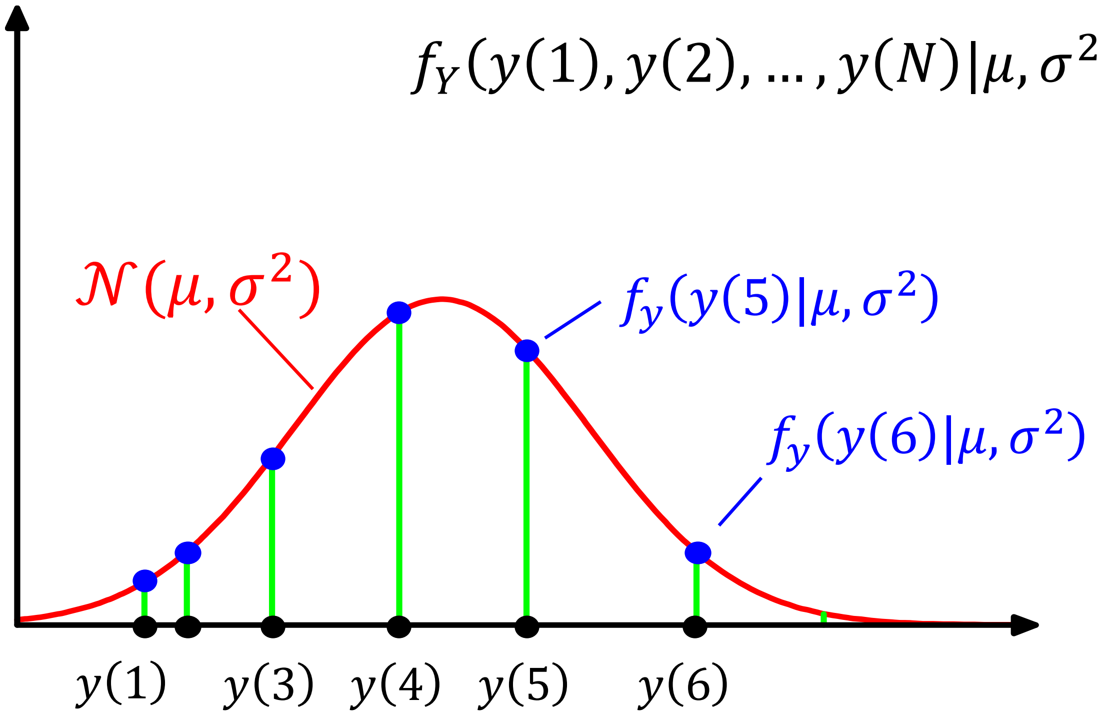
- ❑ $\hat{\mu} = 2\bar{y}$
- ❑ $\hat{\mu} = \bar{y}$
- ❑ $\hat{\mu} = 2$



Stima a massima verosimiglianza

L'esempio precedente considerava il caso in cui avevamo un solo dato osservato. Nel caso di **più osservazioni i.i.d.** di $y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, ovvero $Y = [y(1), y(2), \dots, y(N)]^\top$, devo comunque **massimizzare la varosimiglianza**, cioè

$$f_Y(y(1), y(2), \dots, y(N) | \mu, \sigma^2) = \mathcal{L}(\mu, \sigma^2 | Y) = \prod_{i=1}^{N} \mathcal{N}(y(i) | \mu, \sigma^2)$$



Massimizzare la verosimiglianza significa «cambiare» i valori dei parametri μ e σ^2 tale che il **prodotto dei puntini blu** è **massimizzat**●

Stima a massima verosimiglianza

La stima a massima verosimiglianza dell'esempio precedente può essere espressa come:

$$\underset{2\times 1}{\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{ML}}} = \begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\sigma}^2 \end{bmatrix} = \arg\max_{\boldsymbol{\theta}} \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}|Y) = \arg\max_{\boldsymbol{\theta}} \prod_{i=1}^{N} \mathcal{N}(y(i)|\mu,\sigma^2)$$

In generale posso attribuire ai dati qualsiasi distribuzione di probabilità $d(\quad)$, sia continua che discreta

$$\boxed{\underset{d\times 1}{\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{ML}}} = \arg\max_{\boldsymbol{\theta}} \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}|Y)}$$

Stima a massima verosimiglianza

Spesso, anziché massimizzare $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}|Y)$, si massimizza il suo **logaritmo naturale**

- Dato che il logaritmo è una funzione monotona crescente, $\ln \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}|Y)$ **ha lo stesso argomento del massimo** di $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}|Y)$

- Usare il logaritmo è efficiente da un **punto di vista implementativo**, perchè evita possibili underflow dati dal prodotto di piccole probabilità (sostituendolo con la somma delle log-probabilità)

$$\boxed{\underset{d \times 1}{\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{ML}}} = \arg\max_{\boldsymbol{\theta}} \ln \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}|Y)}$$

A meno di casi particolari fortunati, l'ottimizzazione è effettuata con **metodi iterativi**

Stima a massima verosimiglianza: proprietà

Lo stimatore a massima verosimiglianza gode di **buone proprietà.** Infatti, esso è:

1. **Asintoticamente corretto:** $$\lim_{N \to +\infty} \mathbb{E}\left[\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{ML}}\right] = \boldsymbol{\theta}^0$$

   Lo stimatore può essere distorto. Per esempio lo stimatore a massima verosimiglianza della varianza di una popolazione Guassiana è distorto

2. **Consistente:** più N è grande, più la stima è precisa

3. **Asintoticamente efficiente:** $$\lim_{N \to +\infty} \mathrm{Var}\left[\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{ML}}\right] = M^{-1}$$

   M: Matrice di informazione di Fisher

4. **Asintoticamente normale:** $$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{ML}} \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\theta}^0, M^{-1}\right) \quad \text{per } N \to +\infty$$

Outline

1. Stima a massima verosimiglianza
2. **Stima a massima verosimiglianza di parametri della popolazione**
3. Stima a massima verosimiglianza di modelli lineari

Stima ML di parametri della popolazione

Consideriamo il caso in cui vogliamo **stimare la media** μ di una popolazione di variabili casuali Gaussiane, supponendo di **conoscere la varianza** della distribuzione

Assumiamo di avere osservato **2 dati** $y(i) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2 = 1), i = 1{,}2,\ \mathrm{i.i.d.}$, tali che i valori osservati sono $y(1) = 4,\ \ y(2) = 6$

La forma della **pdf delle singole variabili** $y(i)$ è:

$$f_y(y(i)|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y(i) - \mu}{\sigma}\right)^2\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(y(i) - \mu)^2\right]$$

Stima ML di parametri della popolazione

Il **valore assunto dalla pdf** in corrispondenza delle due osservazioni è:

$$\boxed{y(1) = 4} \qquad \boxed{y(2) = 6}$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$f_y(y(1) = 4|\mu, \sigma^2 = 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(4-\mu)^2\right] \qquad f_y(y(2) = 6|\mu, \sigma^2 = 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(6-\mu)^2\right]$$

La **pdf congiunta** è il prodotto delle due pdf singole (essendo i dati i.i.d.)

$$f_Y(y(1), y(2)|\mu, \sigma^2 = 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(4-\mu)^2\right]\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(6-\mu)^2\right]\right)$$

Stima ML di parametri della popolazione

La pdf congiunta è funzione solo di μ, poichè il **valore dei dati è noto**. Con questa interpretazione, la pdf congiunta è la **funzione di verosimiglianza** (likelihood function)

$$\mathcal{L}(\mu|y(1)=4,y(2)=6)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}(4-\mu)^2\right]\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}(6-\mu)^2\right]\right)$$

La stima $\hat{\mu}_{\mathrm{ML}}$ è valore di μ che **massimizza** la verosimiglianza

$$\hat{\mu}_{\mathrm{ML}}=\arg\max_{\mu}\ln\mathcal{L}(\mu|y(1)=4,y(2)=6)$$

Stima ML di parametri della popolazione

È più conveniente massimizzare il logaritmo della verosimiglianza. Questa nuova funzione (la **log-verosimiglianza**) ha lo stesso massimo della verosimiglianza

$$\ln(\mathcal{L}) = \ln\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}(4-\mu)^2\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}(6-\mu)^2\right)\right]$$

$$= \ln\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}(4-\mu)^2\right)\right] + \ln\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}(6-\mu)^2\right)\right]$$

$$= \ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \ln\left[\exp\left(-\frac{1}{2}(4-\mu)^2\right)\right] + \ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \ln\left[\exp\left(-\frac{1}{2}(6-\mu)^2\right)\right]$$

$$= 2\cdot\ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{2}(4-\mu)^2 - \frac{1}{2}(6-\mu)^2$$

Stima ML di parametri della popolazione

Massimizzando l’espressione ottenuta rispetto a μ otteniamo:

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \mu} = 0 \Rightarrow (4 - \mu) + (6 - \mu) = 0 \Rightarrow \qquad \hat{\mu}_{\mathrm{ML}} = \frac{4+6}{2} = \boxed{5}$$

La **stima a massima verosimiglianza** del parametro μ per il modello Gaussiano è uguale allo stima ottenuta tramite lo **stimatore media campionaria!**

Questo risultato, seppur non generalizzabile, rende molto interpretabile ed intuitivo lo stimatore a massima verosimiglianza

Stima ML di parametri della popolazione

Osservazione: massimizzare la «log-verosimiglianza» equivale a **minimizzare** la «**meno** log-verosimiglianza»

$$\underset{d \times 1}{\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{ML}}} = \arg\max_{\boldsymbol{\theta}} \ln[\,\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}|Y)\,] \quad = \arg\min_{\boldsymbol{\theta}} -\ln[\,\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}|Y)\,]$$

Formulando il problema di stima a massima verosimiglianza in questo modo, abbiamo un problema di **minimizzazione** proprio come con lo stimatore a minimi quadrati!

$$\underset{d \times 1}{\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{LS}}} = \arg\min_{\boldsymbol{\theta}} J(\boldsymbol{\theta}) \qquad J(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(y(i) - \underset{1 \times d}{\boldsymbol{\varphi}^{\top}(i)}\underset{d \times 1}{\boldsymbol{\theta}}\right)^2$$

Outline

1. Stima a massima verosimiglianza

2. Stima a massima verosimiglianza di parametri della popolazione

3. **Stima a massima verosimiglianza di modelli lineari**

Stima ML di modelli lineari

Il metodo della massima verosimiglianza (ML) può essere usato anche per **stimare modelli lineari**. Quello che bisogna fare è imporre un **modello probabilistico** alle osservazioni $y(i)$

$$y(i) = \theta_0 + \theta_1 \varphi_1(i) + \cdots + \theta_{d-1} \varphi_{d-1}(i) + \epsilon(i) \quad = \underset{1\times d}{\boldsymbol{\varphi}^\top(i)} \underset{d\times 1}{\boldsymbol{\theta}} + \underset{1\times 1}{\epsilon(i)}$$

In particolare, se **assumiamo** che $\epsilon(i) \sim \mathcal{N}(0, \lambda^2)$ i.i.d.

$$\Downarrow$$

$$\boxed{y(i) \sim \mathcal{N}(\underset{1\times d}{\boldsymbol{\varphi}^\top(i)} \underset{d\times 1}{\boldsymbol{\theta}},\ \lambda^2) \text{ i.i.d.}}$$

$$\underset{d\times 1}{\boldsymbol{\varphi}} = \begin{bmatrix} 1 \\ \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_{d-1} \end{bmatrix} \qquad \underset{d\times 1}{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{d-1} \end{bmatrix}$$

La media $\mu(i)$ di $y(i)$ è espressa come combinazione lineare dei regressori, $\mu(i) = \boldsymbol{\varphi}(i)^\top \boldsymbol{\theta}$!

Stima ML di modelli lineari

La **distribuzione congiunta** dei dati è:

$$f_Y(y(1), y(2), \dots, y(N) | \underset{N\times d}{X}, \underset{d\times 1}{\boldsymbol{\theta}}, \lambda^2) \overset{\text{i.i.d.}}{=} \prod_{i=1}^{N} f_y(y(i)|\boldsymbol{\varphi}(i), \boldsymbol{\theta}, \lambda^2)$$

$$= \prod_{i=1}^{N} \mathcal{N}(y(i)|\boldsymbol{\varphi}(i), \boldsymbol{\theta}, \lambda^2)$$

$$= \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y(i) - \boldsymbol{\varphi}^\top(i)\boldsymbol{\theta}}{\lambda}\right)^2\right]$$

$$= \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}|Y, X, \lambda^2)$$

Supponiamo λ^2 **noto**

Stima ML di modelli lineari

Calcoliamo la **log-verosimiglianza**

$$
\begin{aligned}
\ln[\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}|Y,X,\lambda^2)] &= \ln\left[\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda^2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y(i)-\boldsymbol{\varphi}^\top(i)\boldsymbol{\theta}}{\lambda}\right)^2\right]\right] \\
&= \sum_{i=1}^{N}\ln\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda^2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y(i)-\boldsymbol{\varphi}^\top(i)\boldsymbol{\theta}}{\lambda}\right)^2\right]\right] \\
&= \sum_{i=1}^{N}\ln\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda^2}}+\sum_{i=1}^{N}\ln\left[\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y(i)-\boldsymbol{\varphi}^\top(i)\boldsymbol{\theta}}{\lambda}\right)^2\right]\right]
\end{aligned}
$$

Stima ML di modelli lineari

$$\ln[\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}|Y,X,\lambda^2)] = N \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda^2}} + \sum_{i=1}^{N} -\frac{1}{2}\left(\frac{y(i) - \boldsymbol{\varphi}^\top(i)\boldsymbol{\theta}}{\lambda}\right)^2$$

$$= N \cdot \ln(2\pi\lambda^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2\lambda^2}\sum_{i=1}^{N}(y(i) - \boldsymbol{\varphi}^\top(i)\boldsymbol{\theta})^2$$

$$\boxed{= -\frac{1}{2}N \cdot \ln 2\pi\lambda^2 - \frac{1}{2\lambda^2}\sum_{i=1}^{N}(y(i) - \boldsymbol{\varphi}^\top(i)\boldsymbol{\theta})^2}$$

Stima ML di modelli lineari

Calcolare il massimo di $\ln[\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}|Y,X,\lambda^2)]$ è equivalente a **calcolare il minimo** di $-\ln[\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}|Y,X,\lambda^2)]$, per cui:

Siccome non dipende da $\boldsymbol{\theta}$, questo termine non contribuisce al calcolo del minimo

$$-\ln[\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}|Y,X,\lambda^2)] = +\cancel{\frac{1}{2}N\cdot\ln 2\pi\lambda^2} + \frac{1}{2\lambda^2}\sum_{i=1}^{N}\left(y(i)-\boldsymbol{\varphi}^\top(i)\boldsymbol{\theta}\right)^2$$

$$\boxed{\underset{d\times 1}{\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{ML}}} = \arg\min_{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{2\lambda^2}\sum_{i=1}^{N}\left(y(i)-\underset{1\times d}{\boldsymbol{\varphi}^\top}(i)\underset{d\times 1}{\boldsymbol{\theta}}\right)^2}$$

La stima ML del modello lineare $y(i) = \boldsymbol{\varphi}^\top(i)\boldsymbol{\theta} + \epsilon(i)$, con $\epsilon(i) \sim \mathcal{N}(0,\lambda^2)$ i.i.d., è **equivalente alla stima a minimi quadrati** (che non aveva assunzioni sulla pdf dei dati)

Stima ML di modelli lineari

Osservazione: cambiando ipotesi sulla distribuzione del rumore (e quindi dei dati), si ottengono **altre funzioni di costo** e **altri modelli**, che modellano i dati in modo diverso rispetto alla regressione lineare

Uno di questi altri modelli (che vedremo nella prossima lezione) è il modello di **regressione logistica**

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI BERGAMO

Dipartimento
di Ingegneria Gestionale,
dell'Informazione e della Produzione