UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO
Dipartimento di Ingegneria Gestionale, dell'Informazione e della Produzione

Control Automation Lab

IDENTIFICAZIONE DEI MODELLI E ANALISI DEI DATI (IMAD)

Corso di Laurea Magistrale in INGEGNERIA INFORMATICA

Lezione 9: Famiglie di modelli stocastici

SPEAKER
Prof. Mirko Mazzoleni

PLACE
Università degli Studi di Bergamo

Syllabus

Parte II: sistemi dinamici

8. **Processi stocastici**
   - 8.1 Processi stocastici stazionari (pss)
   - 8.3 Rappresentazione spettrale di un pss
   - 8.4 Stimatori campionari media\covarianza
   - 8.5 Densità spettrale campionaria
9. **Famiglie di modelli a spettro razionale**
   - 9.1 Modelli per serie temporali (MA, AR, ARMA)
   - 9.2 Modelli per sistemi input/output (ARX, ARMAX)
10. **Predizione**
    - 10.1 Filtro passa-tutto
    - 10.2 Forma canonica
    - 10.3 Teorema della fattorizzazione spettrale
    - 10.4 Soluzione al problema della predizione
11. **Identificazione**
    - 11.3 Identificazione di modelli ARX
    - 11.4 Identificazione di modelli ARMAX
    - 11.5 Metodo di Newton
12. **Identificazione: analisi e complementi**
    - 12.1 Analisi asintotica metodi PEM
    - 12.2 Identificabilità dei modelli
    - 12.3 Valutazione dell'incertezza di stima
13. **Identificazione: valutazione**

IMAD

Parte I: sistemi statici

Stima parametrica $\hat{\theta}$

- **θ deterministico**
  - ***NO assunzioni su ddp dei dati***
    - ✓ Stima parametri popolazione
    - ✓ Stima modello lineare: minimi quadrati
  - ***SI assunzioni su ddp dei dati***
    - ✓ Stima massima verosimiglianza parametri popolazione
    - ✓ Stima modello lineare: massima verosimiglianza
    - ✓ Regressione logistica
- **θ variabile casuale**
  - ***SI assunzioni su ddp dei dati***
    - ✓ Stima Bayesiana

Machine learning

Parte II: sistemi dinamici

Stima parametrica $\hat{\theta}$

- **θ deterministico**
  - ***NO assunzioni su ddp dei dati***
    - ✓ Modelli lineari di pss
    - ✓ Predizione
    - ✓ Identificazione
    - ✓ Persistente eccitazione
    - ✓ Analisi asintotica metodi PEM
    - ✓ Analisi incertezza stima (numero dati finito)
    - ✓ Valutazione del modello

Outline

1. Famiglie di modelli a spettro razionale

2. Serie temporali: modelli MA, AR, ARMA

3. Sistemi ingresso\uscita: modelli ARX e ARMAX

4. Sistemi ingresso\uscita: modelli FIR, OE, BJ

5. Densità spettrale di potenza: esempio di calcolo

Outline

1. **Famiglie di modelli a spettro razionale**
2. Serie temporali: modelli MA, AR, ARMA
3. Sistemi ingresso\uscita: modelli ARX e ARMAX
4. Sistemi ingresso\uscita: modelli FIR, OE, BJ
5. Densità spettrale di potenza: esempio di calcolo

Gli step per la risoluzione del problema

Seguiremo tre fasi per risolvere il problema della **modellazione di sistemi dinamici**:

Definizione delle **classi di modelli** $\mathcal{M}$ di sistemi dinamici

Ci concentreremo su modelli di **sistemi dinamici lineari**, espressi da **funzioni di trasferimento razionali fratte**. I parametri ignoti sono i coefficienti dei polinomi al numeratore e denominatore

Predizione

Data una particolare classe di modello, supponendo di conoscerne il valore dei parametri, qual è il **predittore ottimo**? Quanto vale la predizione ottima?

Identificazione

Come **stimo il valore dei parametri** del modello scelto per la modellazione dei dati?

Famiglie di modelli a spettro razionale

I processi stocastici che si ottengono filtrando un **rumore bianco** tramite un **filtro asintoticamente stabile** $H(z) = C(z)/A(z)$ sono detti **processi a spettro razionale**, dove $C(z)$ e $A(z)$ sono *polinomi a coefficienti reali nella variabile* z (oppure z^{-1})

Di seguito, vedremo sia modelli di processi stocastici per **serie temporali:**

- MA (Moving Average)
- AR (AutoRegressive)
- ARMA (AutoRegressive Moving Average)

sia modelli di processi stocastici per **sistemi dinamici** (quindi con ingresso $u(t)$ noto)

- ARX (AutoRegressive with eXogenous input)
- ARMAX
- OE (Output Error)
- BJ (Box-Jenkins)

Outline

1. Famiglie di modelli a spettro razionale
2. **Serie temporali: modelli MA, AR, ARMA**
3. Sistemi ingresso\uscita: modelli ARX e ARMAX
4. Sistemi ingresso\uscita: modelli FIR, OE, BJ
5. Densità spettrale di potenza: esempio di calcolo

Modelli Moving Average (MA)

<u>Definizione</u>: Un processo stocastico $y(t)$, generato a partire dal rumore bianco $e(t) \sim \mathrm{WN}(\mu, \lambda^2)$, è detto di tipo $\mathrm{MA}(n_c)$, se:

$$\boxed{y(t) = c_0 e(t) + c_1 e(t-1) + c_2 e(t-2) + \cdots + c_{n_c} e(t-n_c) = \sum_{i=0}^{n_c} c_i \cdot e(t-i)}$$

- $c_0, c_1, \ldots, c_{n_c}$: coefficienti del modello $\mathrm{MA}(n_c)$
- n_c: ordine del modello

L'uscita di un modello $\mathrm{MA}(n_c)$ è **combinazione lineare** degli ultimi $n_c + 1$ valori del rumore bianco in ingresso

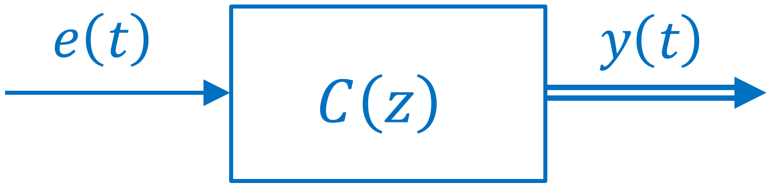
Modelli Moving Average (MA): funzione di trasferimento

Ricordando che $z^{-1}y(t) = y(t-1)$, possiamo scrivere il processo come

$$y(t) = c_0 e(t) + c_1 e(t-1) + c_2 e(t-2) + \cdots + c_{n_c} e(t-n_c)$$

$$= c_0 e(t) + c_1 z^{-1} e(t) + c_2 z^{-2} e(t) + \cdots + c_{n_c} z^{-n_c} e(t)$$

$$= \underbrace{\left[c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \cdots + c_{n_c} z^{-n_c}\right]}_{C(z)} \cdot e(t) \Rightarrow \boxed{y(t) = C(z)e(t)}$$



$$\boxed{\frac{y(t)}{e(t)} = \frac{z^{n_c} c_0 + z^{n_c - 1} c_1 + \cdots + c_{n_c}}{z^{n_c}} = C(z)}$$

Osserviamo n_c poli in 0. Quindi, i processi $\mathrm{MA}(n_c)$ **sono sempre stazionari**

Modelli Moving Average (MA): proprietà

VALORE ATTESO

$$m_y = \mathbb{E}[y(t)] = \mathbb{E}\left[c_0 e(t) + c_1 e(t-1) + \cdots + c_{n_c} e(t-n_c)\right]$$

$$= c_0 \mathbb{E}[e(t)] + c_1 \mathbb{E}[e(t-1)] + \cdots + c_{n_c} \mathbb{E}[e(t-n_c)]$$

$$= c_0 \mu + c_1 \mu + \cdots + c_{n_c} \mu \quad \boxed{= \mu \cdot \sum_{i=0}^{n_c} c_i}$$

Non dipende dal tempo t

⇨ Se $e(t) \sim \mathrm{WN}(0, \lambda^2)$, allora $\mathbb{E}[y(t)] = 0$

Modelli Moving Average (MA): proprietà

FUNZIONE DI AUTOCOVARIANZA

Per semplicità, supponiamo $\mathbb{E}[y(t)] = 0$, tramite depolarizzazione

- $\gamma_{yy}(0) = \mathbb{E}\left[\left(y(t) - m_y\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(y(t)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(c_0 e(t) + c_1 e(t-1) + \cdots + c_{n_c}^2 e(t-n_c)\right)^2\right]$

$$= \mathbb{E}\begin{bmatrix} c_0^2 e(t)^2 + c_1^2 e(t-1)^2 + \cdots + c_{n_c}^2 e(t-n_c)^2 + \\ \cancel{+2c_0 c_1 e(t)e(t-1) + \cdots} \\ \cancel{+2c_{n_c-1} c_{n_c} e(t-n_c+1)e(t-n_c)} \end{bmatrix} = c_0^2 \mathbb{E}[e(t)^2] + \cdots + c_{n_c}^2 \mathbb{E}[e(t-n_c)^2]$$

$$= c_0^2 \gamma_{ee}(0) + c_1^2 \gamma_{ee}(0) + \cdots + c_{n_c}^2 \gamma_{ee}(0) \boxed{= \lambda^2 \cdot \sum_{i=0}^{n_c} c_i^2}$$

Non dipende dal tempo t

Modelli Moving Average (MA): proprietà

- $\gamma_{yy}(1) = \mathbb{E}\left[\left(y(t) - m_y\right) \cdot \left(y(t-1) - m_y\right)\right] = \mathbb{E}[y(t)y(t-1)] =$

$$= \mathbb{E}\left[\left(c_0 e(t) + c_1 e(t-1) \ldots + c_{n_c} e(t-n_c)\right) \cdot \left(c_0 e(t-1) + c_1 e(t-2) \ldots + c_{n_c} e(t-n_c-1)\right)\right]$$

$$= c_0 c_1 \mathbb{E}[e(t-1)^2] + c_1 c_2 \mathbb{E}[e(t-2)^2] + \cdots + c_{n-1} c_n \mathbb{E}[e(t-n_c-1)^2]$$

$$\boxed{= \lambda^2 \cdot \left(c_0 c_1 + c_1 c_2 + \cdots + c_{n_c-1} c_{n_c}\right)}$$

- $\gamma_{yy}(2) = \lambda^2 \cdot \left(c_0 c_2 + c_1 c_3 + \cdots + c_{n_c-2} c_{n_c}\right)$
- $\gamma_{yy}(n_c) = \lambda^2 \cdot \left(c_0 c_{n_c}\right)$

- $\gamma_{yy}(\tau) = 0 \quad \text{se} \quad \tau > n_c$

Un processo $\mathrm{MA}(n_c)$ dipende solo dagli n_c valori precedenti al tempo corrente

Modelli Moving Average (MA): proprietà

Osservazioni

- Un modo per **capire se una serie temporale può essere modellata tramite un** $\mathrm{MA}(n_c)$ è quello di guardare se la sua **funzione di autocovarianza** (nella pratica, una stima di essa) **va a zero** dopo n_c lags

- Il processo $\tilde{y}(t) = \tilde{c}_0\tilde{e}(t) + \tilde{c}_1\tilde{e}(t-1) + \tilde{c}_2\tilde{e}(t-2) + \cdots + \tilde{c}_{n_c}\tilde{e}(t-n_c)$

  con $\tilde{e}(t) \sim \mathrm{WN}\left(0, \tilde{\lambda}^2\right)$, $\tilde{c}_i = \alpha \cdot c_i$, $\tilde{\lambda}^2 = \lambda^2/\alpha^2$, ha lo **stesso valore atteso e autocovarianza** del processo $y(t) = c_0 e(t) + c_1 e(t-1) + c_2 e(t-2) + \cdots + c_{n_c} e(t-n_c)$

  Per evitare questa **sovraparametrizzazione** del modello, spesso si fissa $c_0 = 1$

Modelli AutoRegressive (AR)

Definizione: Un processo stocastico $y(t)$, generato a partire dal rumore bianco $e(t) \sim \mathrm{WN}(\mu, \lambda^2)$, è detto di tipo $\mathrm{AR}(n_a)$, se:

$$\boxed{y(t) = a_1 y(t-1) + a_2\, y(t-2) + \cdots + a_{n_a} y(t-n_a) + e(t) = \sum_{i=1}^{n_a} a_i y(t-i) + e(t)}$$

- $a_1, \dots, a_{n_a}$: coefficienti del modello $\mathrm{AR}(n_a)$
- n_a: ordine del modello

L'uscita di un modello $\mathrm{AR}(n_a)$ è **combinazione lineare** degli ultimi n_a valori del processo stesso e del rumore bianco in ingresso

Modelli AutoRegressive (AR): funzione di trasferimento

Ricordando che $z^{-1}y(t) = y(t-1)$, possiamo scrivere il processo come

$$e(t) \longrightarrow \boxed{1/A(z)} \longrightarrow y(t)$$

$$y(t) = a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) + \cdots + a_{n_a} y(t-n_a) + e(t)$$

$$= a_1 z^{-1} y(t) + a_2 z^{-2} y(t) + \cdots + a_{n_a} z^{-n_a} y(t) + e(t)$$

$$y(t)\underbrace{\left[1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \cdots - a_{n_a} z^{-n_a}\right]}_{A(z)} = e(t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(t) = \frac{1}{A(z)} e(t)}$$

$$\boxed{\frac{y(t)}{e(t)} = \frac{z^{n_a}}{z^{n_a} - a_1 z^{n_a-1} - \cdots - a_{n_a}} = A(z)}$$

- n_a zeri nell'origine
- n_a poli

Un processo $\mathrm{AR}(n_a)$ è stazionario se e solo se $1/A(z)$ è **asintoticamente stabile**

Modelli AutoRegressive (AR): proprietà

VALORE ATTESO *(nel caso il processo sia stazionario)*

$$m_y = \mathbb{E}[y(t)] = \mathbb{E}\left[a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) + \cdots + a_{n_a} y(t-n_a) + e(t)\right]$$

$$= a_1 \mathbb{E}[y(t-1)] + \cdots + a_{n_a} \mathbb{E}[y(t-n_a)] + \mathbb{E}[e(t)]$$

$$= a_1 \mathbb{E}[y(t)] + \cdots + a_{n_a} \mathbb{E}[y(t)] + \mu \quad \Rightarrow \quad (1 - a_1 - \cdots - a_{n_a})\mathbb{E}[y(t)] = \mu$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathbb{E}[y(t)] = \frac{\mu}{1 - a_1 - \cdots - a_{n_a}}}$$

Modelli AutoRegressive (AR): proprietà

FUNZIONE DI AUTOCOVARIANZA *(nel caso il processo sia stazionario)*

Consideriamo processi $\mathrm{AR}(1)$ del tipo $y(t) = a_1 y(t-1) + e(t),\ e(t) \sim \mathrm{WN}(0, \lambda^2)$. Supponiamo che il processo sia **asintoticamente stabile** (ovvero, $|a_1| < 1$), e a **media nulla**

- $\gamma_{yy}(0) = \mathbb{E}[y(t)^2] = \mathbb{E}\left[\left(a_1 y(t-1) + e(t)\right)^2\right] = \mathbb{E}[a_1^2 y(t-1)^2 + e(t)^2 + 2a_1 y(t-1)e(t)]$

$$= a_1^2 \mathbb{E}[y(t-1)^2] + \mathbb{E}[e(t)^2] + \cancel{2a_1 \mathbb{E}[y(t-1)e(t)]}$$

$y(t-1)$ dipende solo da $e(t-1), e(t-2), \ldots$

$$= a_1^2 \gamma_{yy}(0) + \lambda^2 + 0 \quad \Longrightarrow \quad \gamma_{yy}(0)[1 - a_1^2] = \lambda^2 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\gamma_{yy}(0) = \frac{\lambda^2}{1 - a_1^2}}$$

Modelli AutoRegressive (AR): proprietà

- $\gamma_{yy}(1) = \mathbb{E}[y(t)y(t-1)] = \mathbb{E}\big[\big(a_1 y(t-1) + e(t)\big) \cdot y(t-1)\big] = \mathbb{E}[a_1 y(t-1)^2 + y(t-1)e(t)]$

$$= a_1 \mathbb{E}[y(t-1)^2] \cancel{+ \mathbb{E}[y(t-1)e(t)]} = a_1 \gamma_{yy}(0) \Rightarrow \boxed{\gamma_{yy}(1) = a_1 \gamma_{yy}(0)}$$

- $\gamma_{yy}(2) = \mathbb{E}[y(t)y(t-2)] = \mathbb{E}\big[\big(a_1 y(t-1) + e(t)\big) \cdot y(t-2)\big]$

$$= \mathbb{E}[a_1 y(t-1)y(t-2) + y(t-2)e(t)] = a_1 \mathbb{E}[y(t-1)y(t-2)] \cancel{+ \mathbb{E}[y(t-2)e(t)]}$$

$$= a_1 \gamma_{yy}(1) \Rightarrow \boxed{\gamma_{yy}(2) = a_1 \gamma_{yy}(1)}$$

Modelli AutoRegressive (AR): equazioni Yule-Walker

Generalizzando, si ha che, per un processo $\mathrm{AR}(1)$,

$$\begin{cases} \gamma_{yy}(0) = \dfrac{\lambda^2}{1 - a_1^2} & \text{se} \quad \tau = 0 \\ \gamma_{yy}(\tau) = a_1 \cdot \gamma_{yy}(\tau - 1) & \text{se} \quad \tau > 0 \end{cases}$$

Equazioni di Yule-Walker

per un $\mathrm{AR}(1)$

Esistono anche per $\mathrm{AR}(n_a)$

Osservazioni

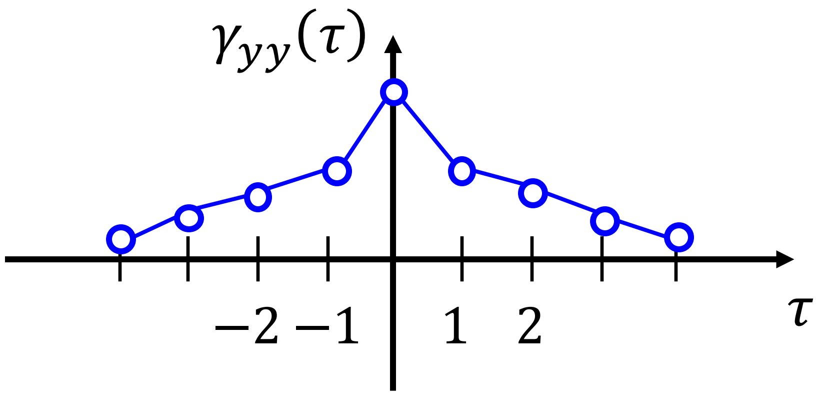
- Dato che abbiamo supposto un processo $\mathrm{AR}(1)$ stazionario, allora $|a_1| < 1$. Quindi

$$|\gamma_{yy}(\tau + 1)| < |\gamma_{yy}(\tau)|$$

e dato che $|a_1| \neq 1$, allora $\gamma_{yy}(0)$ esiste finito

Modelli AutoRegressive (AR)

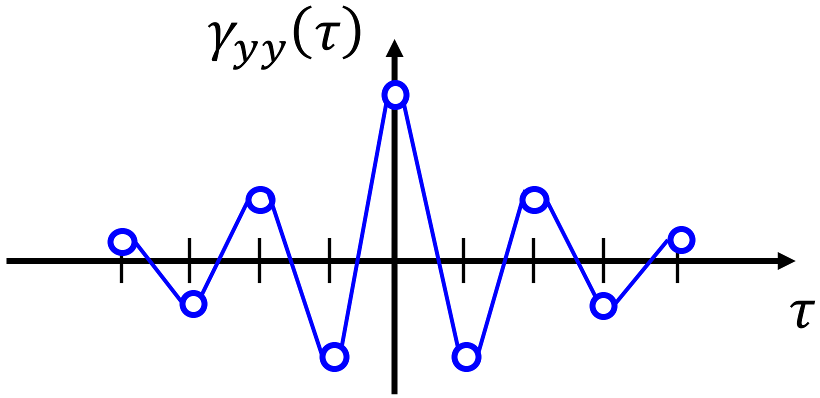
- Il processo $\bar{y}(t) = a_1\bar{y}(t-1) + e(t),\ e(t) \sim \mathrm{WN}(0, \lambda^2)$, con $0 < a_1 < 1$, ha funzione di **autocovarianza** $\gamma_{yy}(\tau) > 0\ \ \forall\tau$, e sarà **decrescente** *(ma non raggiunge mai lo zero)*



Le **realizzazioni** del processo **«variano lentamente»** e sono «smooth», poiché le variabili casuali sono **correlate positivamente** fra loro. In media, le realizzazioni **«non cambiano segno»** da un istante al successivo. Le componenti a **bassa frequenza** dominano nella densità spettrale di potenza

Modelli AutoRegressive (AR)

- Il processo $\bar{\bar{y}}(t) = a_1 \bar{\bar{y}}(t-1) + e(t),\ e(t) \sim \mathrm{WN}(0, \lambda^2)$, con $-1 < a_1 < 0$, ha funzione di **autocovarianza** che **cambia segno** ad ogni τ, in modo alternato (e decresce in valore assoluto senza raggiungere lo zero)



Le **realizzazioni** del processo **«variano velocemente»** e sono «nervose», poiché le variabili casuali sono **correlate negativamente** fra loro. In media, le realizzazioni **«cambiano segno»** da un istante al successivo. Le componenti ad **alta frequenza** dominano nella densità spettrale di potenza

Modelli AutoRegressive (AR)

Abbiamo visto che, per un process $\mathrm{MA}(n_c)$, $\gamma_{yy}(\tau) = 0\ \forall\tau > n_c$. Per i processi $\mathrm{AR}(n_a)$, possiamo osservare un comportamento analogo guardando la **funzione di autocorrelazione parziale (PACF)** $\gamma_{yy}^{\mathrm{PAR}}(\tau)$. La PACF è tale che $\gamma_{yy}^{\mathrm{PAR}}(\tau) = 0\ \forall\tau > n_a$

Nell'*analisi pratica di serie temporali*, si seguono questi passaggi:

1. Controllo se la serie temporale può essere modellata con un $\mathrm{MA}(n_c)$ guardando $\gamma_{yy}(\tau)$
2. Controllo se la serie temporale può essere modellata con un $\mathrm{AR}(n_a)$ guardando $\gamma_{yy}^{\mathrm{PAR}}(\tau)$
3. Se nessuna delle due funzioni si annulla da un certo τ in poi, ho bisogno di **altri modelli**

Un'altra categoria di modelli per serie temporali sono gli $\mathrm{ARMA}(n_a, n_c)$

Modelli AutoRegressive Moving Average (ARMA)

Definizione: Un processo stocastico $y(t)$, generato a partire dal rumore bianco $e(t) \sim \mathrm{WN}(\mu, \lambda^2)$, è detto di tipo $\mathrm{ARMA}(n_a, n_c)$, se:

$$y(t) = a_1 y(t-1) + a_2\, y(t-2) + \cdots + a_{n_a} y(t-n_a) + \qquad \textbf{Parte } \mathrm{AR}(n_a)$$

$$+e(t) + c_1 e(t-1) + c_2 e(t-2) + \cdots + c_{n_c} e(t-n_c) \qquad \textbf{Parte } \mathrm{MA}(n_c)$$

- $a_1, \dots, a_{n_a}$: coefficienti della parte $\mathrm{AR}(n_a)$
- n_a: ordine della parte $\mathrm{AR}(n_a)$
- $c_0, c_1, \dots, c_{n_c}$: coefficienti della parte $\mathrm{MA}(n_c)$
- n_c: ordine della parte $\mathrm{MA}(n_c)$

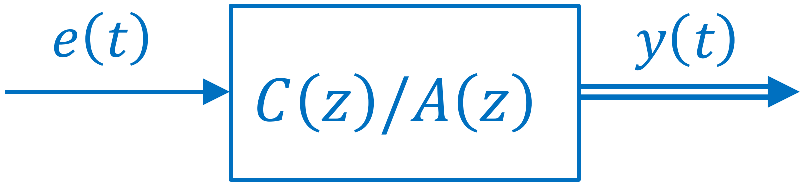
Notiamo che $\mathrm{ARMA}(0, n_c) = \mathrm{MA}(n_c)$ e $\mathrm{ARMA}(n_a, 0) = \mathrm{AR}(n_a)$

Modelli AutoRegressive Moving Average (ARMA)

La **funzione di trasferimento** di un $\mathrm{ARMA}(n_a, n_c)$ risulta essere

$$y(t)\left[1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \cdots - a_{n_a} z^{-n_a}\right] = \left[1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \cdots + c_{n_c} z^{-n_c}\right] e(t)$$

$$y(t) = \frac{1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \cdots + c_{n_c} z^{-n_c}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \cdots - a_{n_a} z^{-n_a}} e(t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(t) = \frac{C(z)}{A(z)} e(t)}$$



Il processo $y(t)$ è stazionario se e solo se $C(z)/A(z)$ è asintoticamente stabile

Modelli AutoRegressive Moving Average (ARMA)

Teorema Dato un processo stocastico stazionario $\mathrm{ARMA}(n_a, n_c)$, esso può essere scritto come un $\mathrm{MA}(\infty)$

Esempio

Supponiamo di avere un $\mathrm{AR}(1)$ del tipo $y(t) = ay(t-1) + e(t), \;\; e(t) \sim \mathrm{WN}(0, \lambda^2)$

$$y(t) = \boxed{\frac{1}{1 - az^{-1}}} \cdot e(t)$$

può essere visto come il **limite di una serie geometrica** di ragione az^{-1}

$$\Rightarrow \quad = \sum_{i=0}^{+\infty} (az^{-1})^i \cdot e(t) \quad = \sum_{i=0}^{+\infty} a^i \cdot e(t-i) \qquad \mathrm{MA}(\infty)$$

Outline

1. Famiglie di modelli a spettro razionale
2. Serie temporali: modelli MA, AR, ARMA
3. **Sistemi ingresso\uscita: modelli ARX e ARMAX**
4. Sistemi ingresso\uscita: modelli FIR, OE, BJ
5. Densità spettrale di potenza: esempio di calcolo

Modelli AR with eXogenous input (ARX)

Definizione: Un processo stocastico $y(t)$, generato a partire dal rumore bianco $e(t) \sim \mathrm{WN}(\mu, \lambda^2)$, è detto di tipo $\mathrm{ARX}(n_a, n_b, k)$, se:

$$y(t) = a_1 y(t-1) + a_2\, y(t-2) + \cdots + a_{n_a} y(t-n_a) + e(t) \qquad \textbf{Parte } \mathrm{AR}(n_a)$$

$$+ b_0 u(t-k) + b_1 u(t-k-1) + \cdots + b_{n_b} u(t-k-n_b) \qquad \textbf{Parte } \mathrm{X}(n_b)$$

- $a_1, \dots, a_{n_a}$: coefficienti della parte $\mathrm{AR}(n_a)$
- n_a: ordine della parte $\mathrm{AR}(n_a)$
- $b_0, b_1, \dots, b_{n_b}$: coefficienti della parte $\mathrm{X}(n_b)$
- n_b: ordine della parte $\mathrm{X}(n_b)$

Il termine k è il **ritardo puro** tra ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$

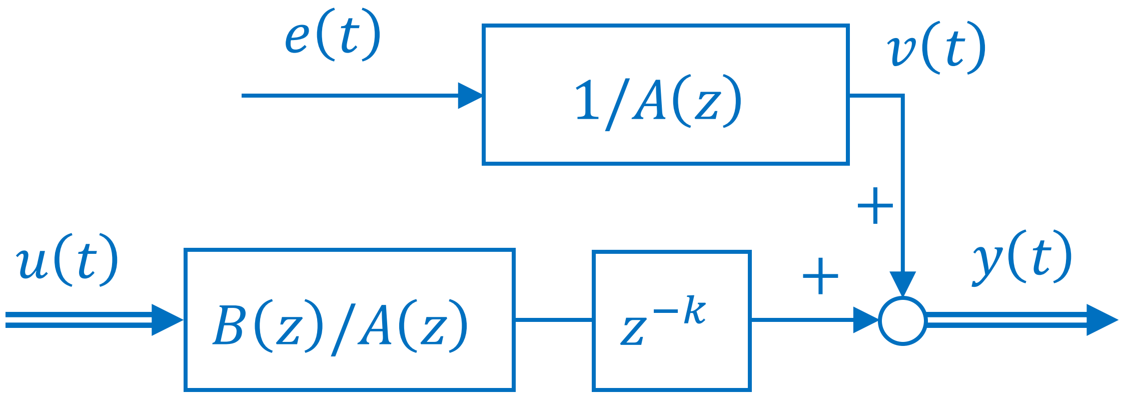
Modelli AR with eXogenous input (ARX)

La **funzione di trasferimento** di un $\mathrm{ARX}(n_a, n_b, k)$ risulta essere

$$y(t)\left[1 - a_1 z^{-1} - \cdots - a_{n_a} z^{-n_a}\right] = \left[b_0 z^{-k} + b_1 z^{-k-1} + \cdots + b_{n_b} z^{-k-n_b}\right] u(t) + e(t)$$

$$y(t) = \frac{\overbrace{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_{n_b} z^{-n_b}}^{B(z)}}{1 - a_1 z^{-1} - \cdots - a_{n_a} z^{-n_a}} u(t-k) + \frac{1}{1 - a_1 z^{-1} - \cdots - a_{n_a} z^{-n_a}} e(t)$$

$$\boxed{y(t) = \frac{B(z)}{A(z)} u(t-k) + \frac{1}{A(z)} e(t)}$$



Modelli ARMA with eXogenous input (ARMAX)

<u>**Definizione**</u>: Un processo stocastico $y(t)$, generato a partire dal rumore bianco $e(t) \sim \mathrm{WN}(\mu, \lambda^2)$, è detto di tipo $\mathrm{ARMAX}(n_a, n_c, n_b, k)$, se:

$$y(t) = a_1 y(t-1) + a_2\, y(t-2) + \cdots + a_{n_a} y(t-n_a) +$$

Parte $\mathrm{AR}(n_a)$

$$+b_0 u(t-k) + b_1 u(t-k-1) + \cdots + b_{n_b} u(t-k-n_b)$$

Parte $\mathrm{X}(n_b)$

$$+\, e(t) + c_1 e(t-1) + c_2 e(t-2) + \cdots + c_{n_c} e(t-n_c)$$

Parte $\mathrm{MA}(n_c)$

Modelli ARMA with eXogenous input (ARMAX)

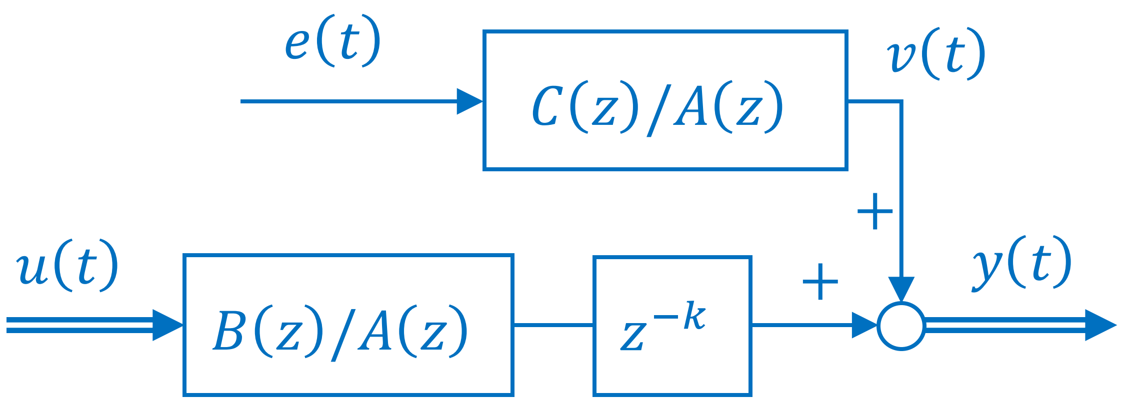
La **funzione di trasferimento** di un $\mathrm{ARMAX}(n_a, n_c, n_b, k)$ risulta essere

$$y(t)\left[1 - a_1 z^{-1} + \cdots + a_{n_a} z^{-n_a}\right] = \left[b_0 z^{-k} + b_1 z^{-k-1} + \cdots + b_{n_b} z^{-k-n_b}\right] u(t) +$$

$$+\left[1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \cdots + c_{n_c} z^{-n_c}\right] e(t)$$

$$y(t) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_{n_b} z^{-n_b}}{1 - a_1 z^{-1} + \cdots + a_{n_a} z^{-n_a}} u(t-k) + \frac{1 + c_1 z^{-1} + \cdots + c_{n_c} z^{-n_c}}{1 - a_1 z^{-1} + \cdots + a_{n_a} z^{-n_a}} e(t)$$

$$\boxed{y(t) = \frac{B(z)}{A(z)} u(t-k) + \frac{C(z)}{A(z)} e(t)}$$



Outline

1. Famiglie di modelli a spettro razionale
2. Serie temporali: modelli MA, AR, ARMA
3. Sistemi ingresso\uscita: modelli ARX e ARMAX
4. **Sistemi ingresso\uscita: modelli FIR, OE, BJ**
5. Densità spettrale di potenza: esempio di calcolo

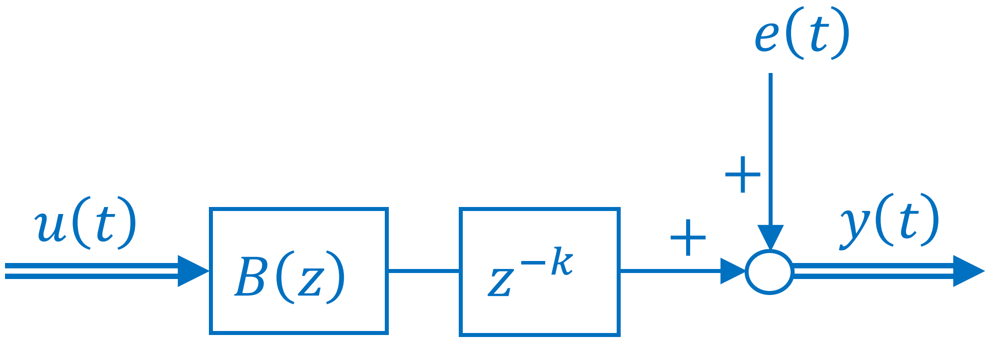
Modelli Finite Impulse Response (FIR)

<u>Definizione</u>: un modello $\mathrm{FIR}(n_b, k)$, con rumore bianco additivo $e(t) \sim \mathrm{WN}(0, \lambda^2)$, è definito come

$$y(t) = b_0 u(t-k) + b_1 u(t-k-1) + \cdots + b_{n_b} u(t-k-n_b) + e(t) = \sum_{i=0}^{n_b} b_i \cdot u(t-k-i) + e(t)$$

$$= B(z)u(t-k) + e(t)$$

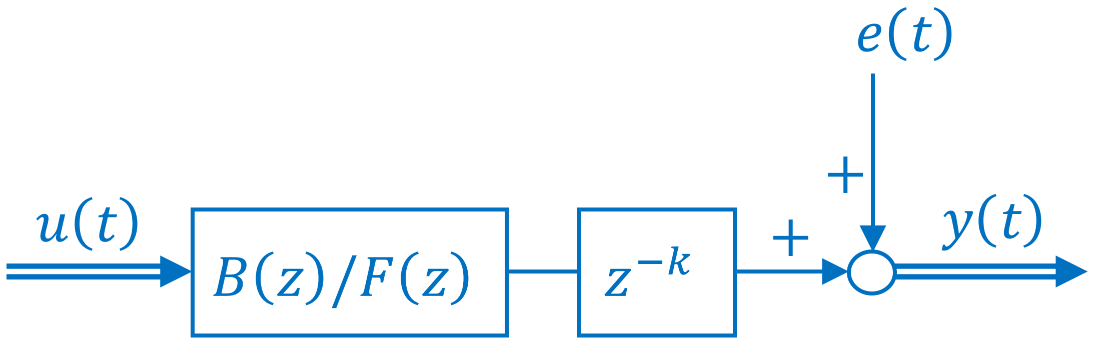
L'uscita di un modello $\mathrm{FIR}(n_b)$ dipende solo da **valori passati dell'ingresso** $u(t)$ e dal rumore bianco $e(t)$



Modelli Output Error (OE)

Definizione: un modello $\mathrm{OE}(n_b, n_f, k)$, con rumore bianco additivo $e(t) \sim \mathrm{WN}(0, \lambda^2)$, è definito come

$$\boxed{y(t) = \frac{B(z)}{F(z)} u(t-k) + e(t)}$$



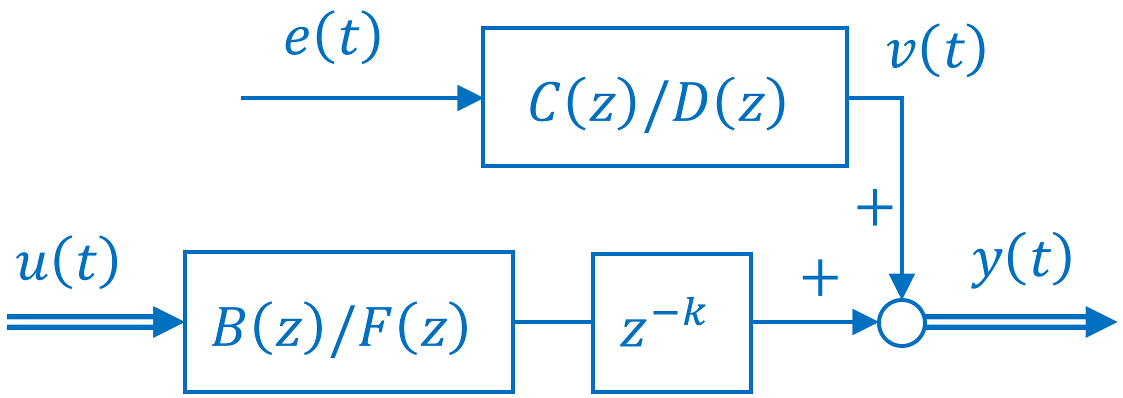
Questo modello è simile al modello $\mathrm{ARX}(n_a, n_b, k)$, ma, a differenza di quest'ultimo, suppone che il **rumore entri solo dopo** che l'uscita «non rumorosa» è stata generata

Il modello $\mathrm{OE}(n_b, n_f, k)$ è uno dei più utilizzati per modellare processi con solo **errore di misura**

Modelli Box-Jenkins (BJ)

Definizione: Un processo stocastico $y(t)$, generato a partire dal rumore bianco $e(t) \sim \mathrm{WN}(\mu, \lambda^2)$, è detto di tipo $\mathrm{BJ}(n_c, n_b, n_d, n_f, k)$, se:

$$\boxed{y(t) = \frac{B(z)}{F(z)} u(t-k) + \frac{C(z)}{D(z)} e(t)}$$



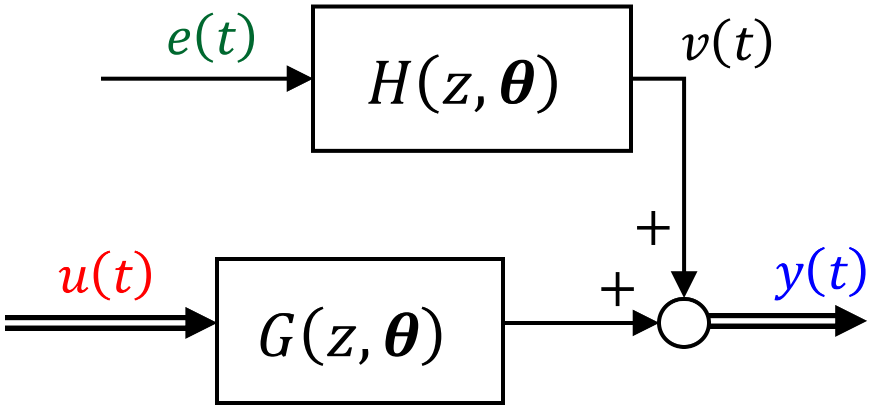
A differenza dei modelli $\mathrm{ARMAX}(n_a, n_c, n_b, k)$, questi modelli hanno **polinomi diversi al denominatore**, per cui parte esogena e parte stocastica sono **parametrizzate in modo indipendente**. Tale proprietà si ha anche coi modelli $\mathrm{FIR}(n_b, k)$ e $\mathrm{OE}(n_b, n_f, k)$

Famiglie di modelli per sistemi ingresso\uscita

Famiglia di modello	$G(z,\boldsymbol{\theta})$	$H(z,\boldsymbol{\theta})$
ARX	$\dfrac{B(z,\boldsymbol{\theta})}{A(z,\boldsymbol{\theta})}z^{-k}$	$\dfrac{1}{A(z,\boldsymbol{\theta})}$
ARMAX	$\dfrac{B(z,\boldsymbol{\theta})}{A(z,\boldsymbol{\theta})}z^{-k}$	$\dfrac{C(z,\boldsymbol{\theta})}{A(z,\boldsymbol{\theta})}$
OE	$\dfrac{B(z,\boldsymbol{\theta})}{F(z,\boldsymbol{\theta})}z^{-k}$	1
FIR	$B(z,\boldsymbol{\theta})z^{-k}$	1
BJ	$\dfrac{B(z,\boldsymbol{\theta})}{F(z,\boldsymbol{\theta})}z^{-k}$	$\dfrac{C(z,\boldsymbol{\theta})}{D(z,\boldsymbol{\theta})}$

I termini **«famiglia», «classe»** o **«struttura»** di modello sono usati come **sinonimi**

Il vettore $\boldsymbol{\theta}$ rappresenta i **parametri del modello** (valore dei coefficienti dei polinomi)



Outline

1. Famiglie di modelli a spettro razionale
2. Serie temporali: modelli MA, AR, ARMA
3. Sistemi ingresso\uscita: modelli ARX e ARMAX
4. Sistemi ingresso\uscita: modelli FIR, OE, BJ
5. **Densità spettrale di potenza: esempio di calcolo**

Densità spettrale di potenza: esempio di calcolo

Consideriamo un processo $\mathrm{MA}(1)$ del tipo

$$y(t) = c_0 e(t) + c_1 e(t-1), \qquad c_0 = 1, \qquad e(t) \sim \mathrm{WN}(0,1)$$

1) Calcolo della densità spettrale di potenza usando la definizione

$$\Gamma_{yy}(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \gamma_{yy}(\tau) e^{-j\omega\tau} \quad = \gamma_{yy}(-1)e^{-j\omega(-1)} + \gamma_{yy}(0)e^{-j\omega(0)} + \gamma_{yy}(+1)e^{-j\omega(+1)}$$

$$= \lambda^2 c_0 c_1 \cdot e^{j\omega} + \lambda^2 (c_0^2 + c_1^2) \cdot 1 + \lambda^2 c_0 c_1 \cdot e^{-j\omega} \quad = c_1 \cdot e^{j\omega} + (1 + c_1^2) + c_1 \cdot e^{-j\omega}$$

$$= c_1 \left[e^{j\omega} + e^{-j\omega} \right] + c_1^2 + 1 \quad = \boxed{2c_1 \cos\omega + c_1^2 + 1}$$

Densità spettrale di potenza: esempio di calcolo

2) Calcolo della densità spettrale di potenza usando il modello

$$y(t) = e(t) + c_1 e(t-1) \quad \Rightarrow \quad y(t) = [1 + c_1 z^{-1}]e(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = C(z)e(t)$$

$$\Gamma_{yy}(\omega) = \left|C\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 \cdot \Gamma_{ee}(\omega) = \left(1 + c_1 e^{j\omega}\right) \cdot \left(1 + c_1 e^{-j\omega}\right)$$

$$= 1 + c_1 e^{-j\omega} + c_1 e^{j\omega} + c_1^2\left(e^{-j\omega} \cdot e^{j\omega}\right) = 1 + c_1\left[e^{j\omega} + e^{-j\omega}\right] + c_1^2$$

$$= \boxed{2c_1 \cos\omega + c_1^2 + 1}$$

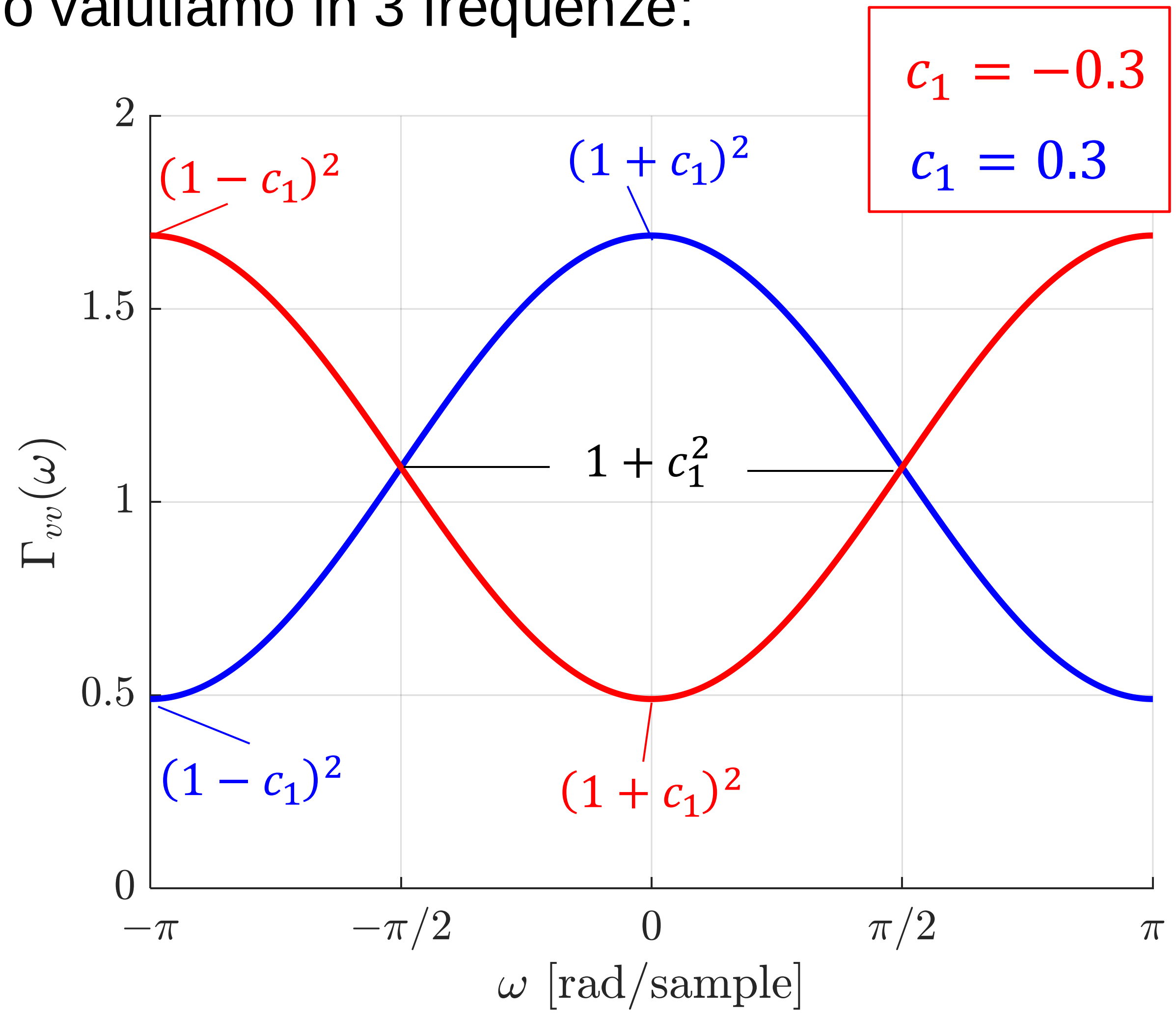
Densità spettrale di potenza: esempio di calcolo

Per **disegnare qualitativamente** lo spettro, lo valutiamo in 3 frequenze:

$$\Gamma_{yy}(0) = 1 + c_1^2 + 2c_1 \cos 0 = 1 + c_1^2 + 2c_1$$
$$= (1 + c_1)^2$$

$$\Gamma_{yy}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + c_1^2 + 2c_1 \cos\frac{\pi}{2} = 1 + c_1^2$$

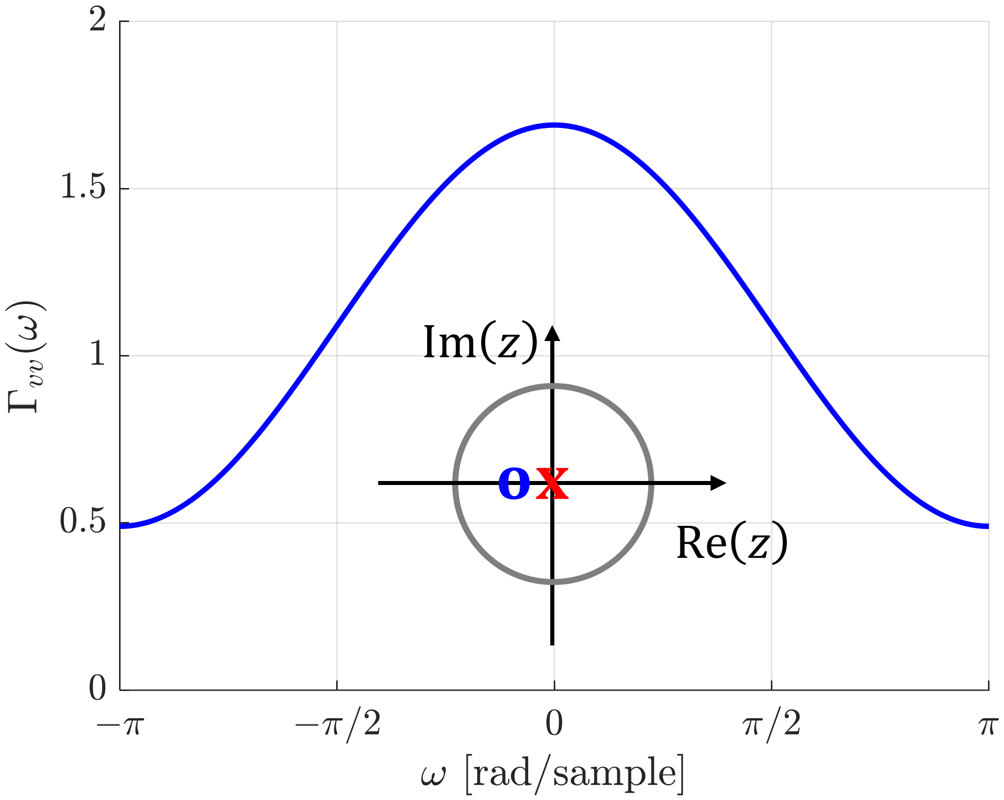
$$\Gamma_{yy}(\pi) = 1 + c_1^2 + 2c_1 \cos \pi = 1 + c_1^2 - 2c_1$$
$$= (1 - c_1)^2$$



Densità spettrale di potenza: esempio di calcolo

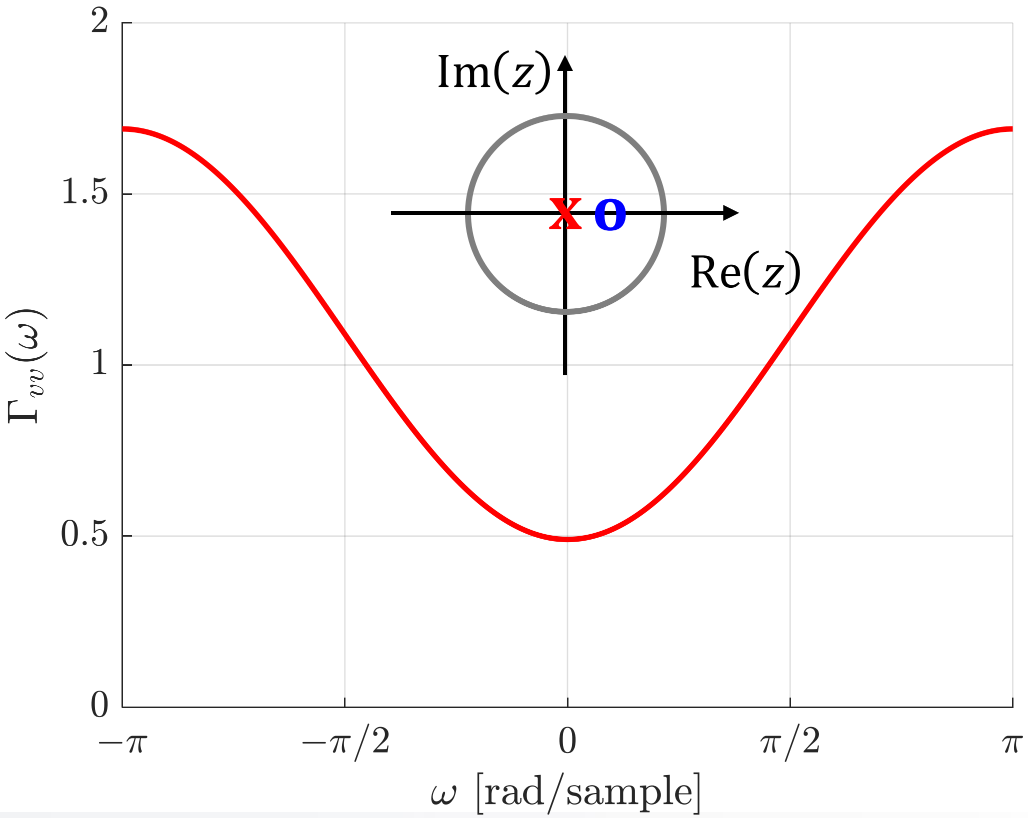
$$y(t) = [1 + 0.3z^{-1}]e(t)$$

zero $z = -0.3$
polo $z = 0$



$$y(t) = [1 - 0.3z^{-1}]e(t)$$

zero $z = +0.3$
polo $z = 0$



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI BERGAMO

Dipartimento
di Ingegneria Gestionale,
dell'Informazione e della Produzione