UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO | Dipartimento di Ingegneria Gestionale, dell'Informazione e della Produzione

Control Automation Lab

IDENTIFICAZIONE DEI MODELLI E ANALISI DEI DATI (IMAD)

Corso di Laurea Magistrale in INGEGNERIA INFORMATICA

Lezione 8: Processi stocastici

SPEAKER
Prof. Mirko Mazzoleni

PLACE
Università degli Studi di Bergamo

Syllabus

Parte II: sistemi dinamici

8. **Processi stocastici**
   - 8.1 Processi stocastici stazionari (pss)
   - 8.3 Rappresentazione spettrale di un pss
   - 8.4 Stimatori campionari media\covarianza
   - 8.5 Densità spettrale campionaria
9. **Famiglie di modelli a spettro razionale**
   - 9.1 Modelli per serie temporali (MA, AR, ARMA)
   - 9.2 Modelli per sistemi input/output (ARX, ARMAX)
10. **Predizione**
    - 10.1 Filtro passa-tutto
    - 10.2 Forma canonica
    - 10.3 Teorema della fattorizzazione spettrale
    - 10.4 Soluzione al problema della predizione
11. **Identificazione**
    - 11.3 Identificazione di modelli ARX
    - 11.4 Identificazione di modelli ARMAX
    - 11.5 Metodo di Newton
12. **Identificazione: analisi e complementi**
    - 12.1 Analisi asintotica metodi PEM
    - 12.2 Identificabilità dei modelli
    - 12.3 Valutazione dell'incertezza di stima
13. **Identificazione: valutazione**

IMAD

Parte I: sistemi statici

Stima parametrica $\hat{\theta}$

- **θ deterministico**
  - ***NO assunzioni su ddp dei dati***
    - ✓ Stima parametri popolazione
    - ✓ Stima modello lineare: minimi quadrati
  - ***SI assunzioni su ddp dei dati***
    - ✓ Stima massima verosimiglianza parametri popolazione
    - ✓ Stima modello lineare: massima verosimiglianza
    - ✓ Regressione logistica
- **θ variabile casuale**
  - ***SI assunzioni su ddp dei dati***
    - ✓ Stima Bayesiana

Machine learning

Parte II: sistemi dinamici

Stima parametrica $\hat{\theta}$

- **θ deterministico**
  - ***NO assunzioni su ddp dei dati***
    - ✓ Modelli lineari di pss
    - ✓ Predizione
    - ✓ Identificazione
    - ✓ Persistente eccitazione
    - ✓ Analisi asintotica metodi PEM
    - ✓ Analisi incertezza stima (numero dati finito)
    - ✓ Valutazione del modello

Outline

1. Introduzione alla stima di modelli dinamici
2. Processi stocastici
3. Processi stocastici stazionari
4. Momenti temporali ed ergodicità
5. Trasformata $\mathcal{Z}$ e trasformata di Fourier
6. Densità spettrale di potenza
7. Stima spettrale
8. Sistemi dinamici lineari discreti deterministici
9. Sistemi dinamici lineari discreti stocastici

Outline

1. **Introduzione alla stima di modelli dinamici**
2. Processi stocastici
3. Processi stocastici stazionari
4. Momenti temporali ed ergodicità
5. Trasformata $\mathcal{Z}$ e trasformata di Fourier
6. Densità spettrale di potenza
7. Stima spettrale
8. Sistemi dinamici lineari discreti deterministici
9. Sistemi dinamici lineari discreti stocastici

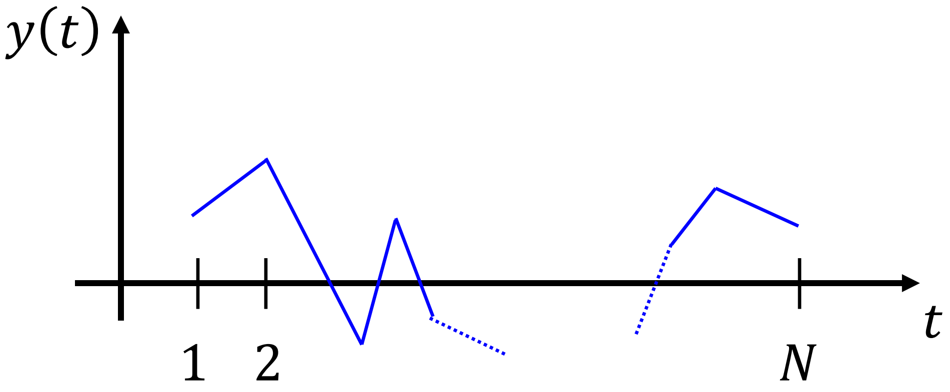
Introduzione alla stima di modelli dinamici

Tratteremo due tipi di problemi, collegati tra loro:

1. Analisi e modellistica di **serie temporali**
2. Analisi e modellistica di **sistemi ingresso\uscita**

SERIE TEMPORALI

Definizione: Una serie temporale (discreta) è un insieme di dati $\mathcal{D} = \{y(1), y(2), \dots, y(N)\}$ indicizzati nel tempo. Indichiamo ogni dato con $y(t)$, dove $t \in \mathbb{Z}$



Esempi:

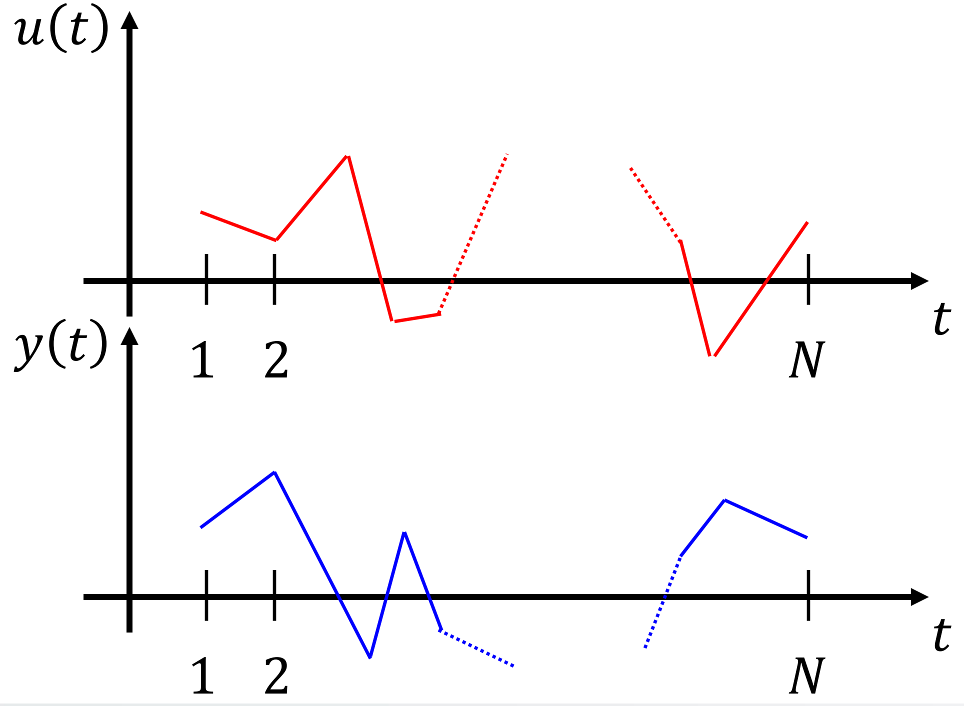
- Valori di un titolo azionario
- Mm di pioggia caduti in una settimana
- Velocità del vento
- Moti ondosi
- …

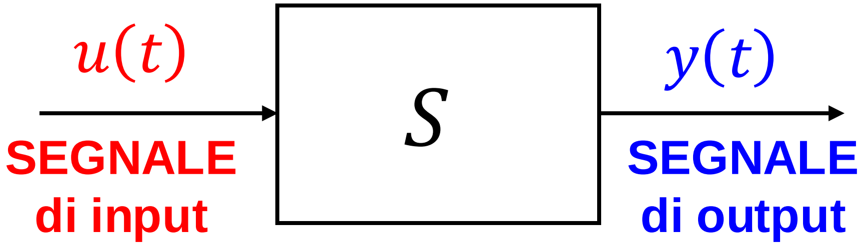
Introduzione alla stima di modelli dinamici

SISTEMI INGRESSO\USCITA

I sistemi dinamici processano un segnale di input $u(t)$ per generare un segnale di uscita $y(t)$.

Abbiamo dati di input $\{u(1), u(2), \dots, u(N)\}$ e dati di output $\{y(1), y(2), \dots, y(N)\}$





Esempi:

- Sistemi dinamici di varia natura: meccanici, economici, biologici…

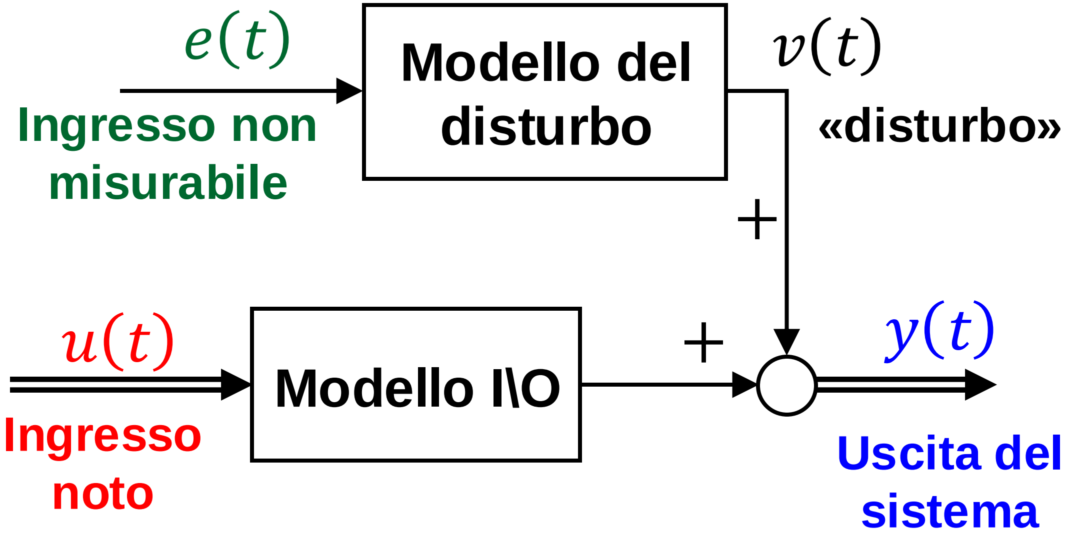
Impostazione del problema

SERIE TEMPORALI

Modelleremo la serie temporale $y(t)$ come **l'uscita di un sistema dinamico** con **ingresso «remoto» non misurabile** $e(t)$

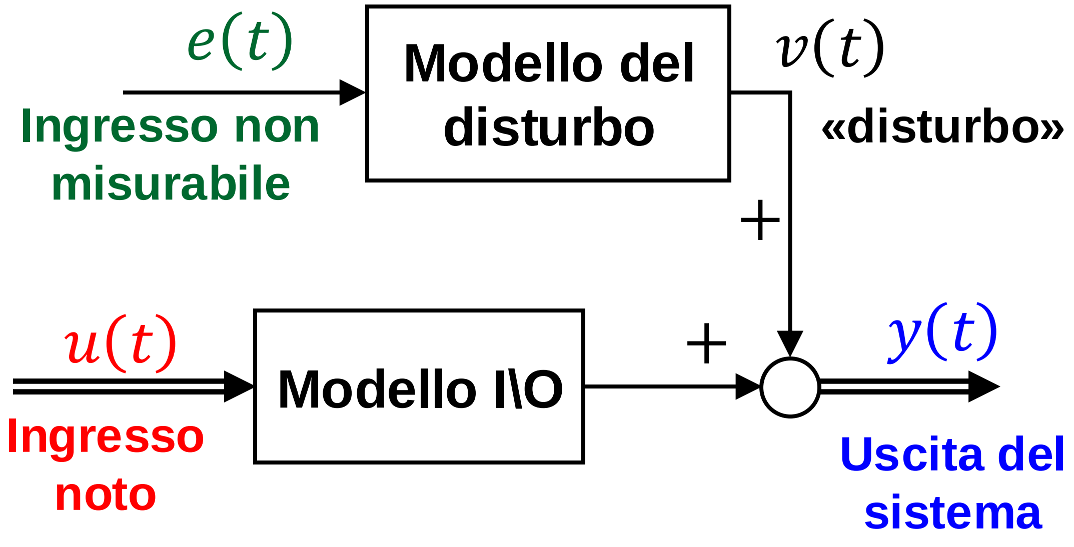
SISTEMI INGRESSO\USCITA

Modelleremo l'uscita $y(t)$ come il contributo di una **componente esogena nota** $u(t)$ ed una **componente di «disturbo»** $v(t)$ **ignota**



Impostazione del problema

I modelli che considereremo saranno modelli di **sistemi dinamici lineari tempo invarianti** (LTI) e **discreti**



Il termine di «disturbo» $v(t)$ è utilizzato per **modellare differenti fenomeni:**

- Rumore di misura
- Disturbi di processo
- Effetto di segnali esogeni di input non misurabili
- Effetti di linearizzazioni del sistema

In sostanza, $v(t)$ modella **tutto ciò che il modello lineare I\O non riesce a spiegare** per quanto riguarda la relazione tra i dati misurati di $u(t)$ e $y(t)$. La cosa difficile è separare l'effetto che $u(t)$ ha su $y(t)$ rispetto a quello che $e(t)$ ha su $y(t)$

Impostazione del problema

Che tipo di problemi vogliamo risolvere?

Sia nel caso di serie temporali che nel caso di sistemi I\O, vogliamo risolvere due problemi:

1. **Predizione** di uscite a istanti futuri $t+k$ in base alle informazioni attualmente a disposizione al tempo t. Indichiamo la predizione con $\hat{y}(t+1|t)$

2. **Identificazione (stima)** dei modelli descritti, in modo da poter catturare le relazioni tra gli ingressi (noti ed ignoti) e l'uscita del sistema che genera i dati

Osservazioni

- Lavoreremo con **segnali e sistemi a tempo discreto**. I segnali sono campionati con periodo di campionamento T_s. Per semplicità di notazione, indicheremo il dato al t-esimo istante di campionamento come $y(t)$, intendendo $y(t \cdot T_s)$

Impostazione del problema

- Assumeremo che uscite $y(t)$ siano affette dal «disturbo» $v(t)$, che può essere visto come un **«rumore» che sporca la vera misura** dell'uscita

Nel caso di **sistemi statici**, per gestire questa incertezza sulla misura dei dati, avevamo interpretato i dati come delle **variabili casuali**

Nel caso di sistemi dinamici, però, i dati non sono indipendenti, ma sono campionati da un segnale che evolve nel tempo. Non abbiamo più osservazioni di v.c. singole, ma osserviamo **una successione di v.c. nel tempo**

$\Downarrow$

PROCESSI STOCASTICI

Gli step per la risoluzione del problema

Seguiremo tre fasi per risolvere il problema della **modellazione di sistemi dinamici**:

Definizione delle **classi di modelli** $\mathcal{M}$ di sistemi dinamici

Ci concentreremo su modelli di **sistemi dinamici lineari**, espressi da **funzioni di trasferimento razionali fratte**. I parametri ignoti sono i coefficienti dei polinomi al numeratore e denominatore

Predizione

Data una particolare classe di modello, supponendo di conoscerne il valore dei parametri, qual è il **predittore ottimo**? Quanto vale la predizione ottima?

Identificazione

Come **stimo il valore dei parametri** del modello scelto per la modellazione dei dati?

Outline

1. Introduzione alla stima di modelli dinamici
2. **Processi stocastici**
3. Processi stocastici stazionari
4. Momenti temporali ed ergodicità
5. Trasformata $\mathcal{Z}$ e trasformata di Fourier
6. Densità spettrale di potenza
7. Stima spettrale
8. Sistemi dinamici lineari discreti deterministici
9. Sistemi dinamici lineari discreti stocastici

Processi stocastici

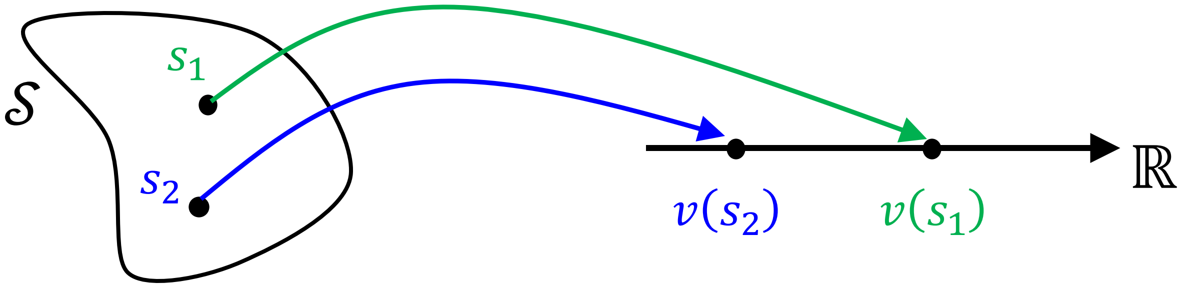
Definizione: Un **processo stocastico** $v(t, s)$ a *tempo discreto* è una **successione** *infinita* **di variabili casuali**, definite a partire dallo **stesso esperimento casuale** s e ordinate secondo un **indice temporale** $t \in \mathbb{N}$

$$v(1, s), v(2, s), \dots, v(N, s) \qquad N \in \mathbb{N}$$

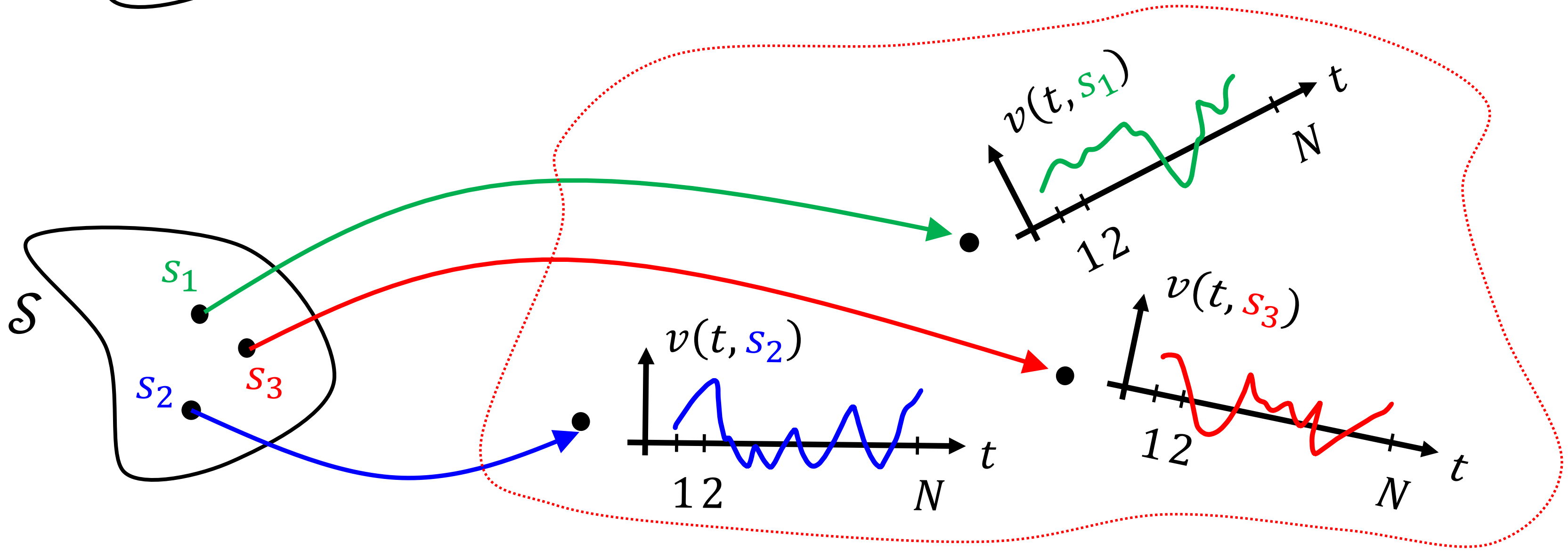
- **Fissato un esito** $s = \bar{s}$, si ottiene una **realizzazione** $v(t, \bar{s})$ del processo stocastico, ovvero una serie di valori **deterministici** nel tempo (un segnale)
- **Fissato un istante temporale** $t = \bar{t}$, si ottiene la **variabile casuale** $v(\bar{t}, s)$, ovvero la variabile casuale al tempo $\bar{t}$
- **Fissati** $s = \bar{s}$ e $t = \bar{t}$, si ottiene un **numero** $v(\bar{t}, \bar{s})$

Processi stocastici

Come nel caso delle variabili casuali, è possibile pensare ad un processo stocastico come una **funzione**, che, anziché restituire numeri reali, **restituisce funzioni nel tempo**

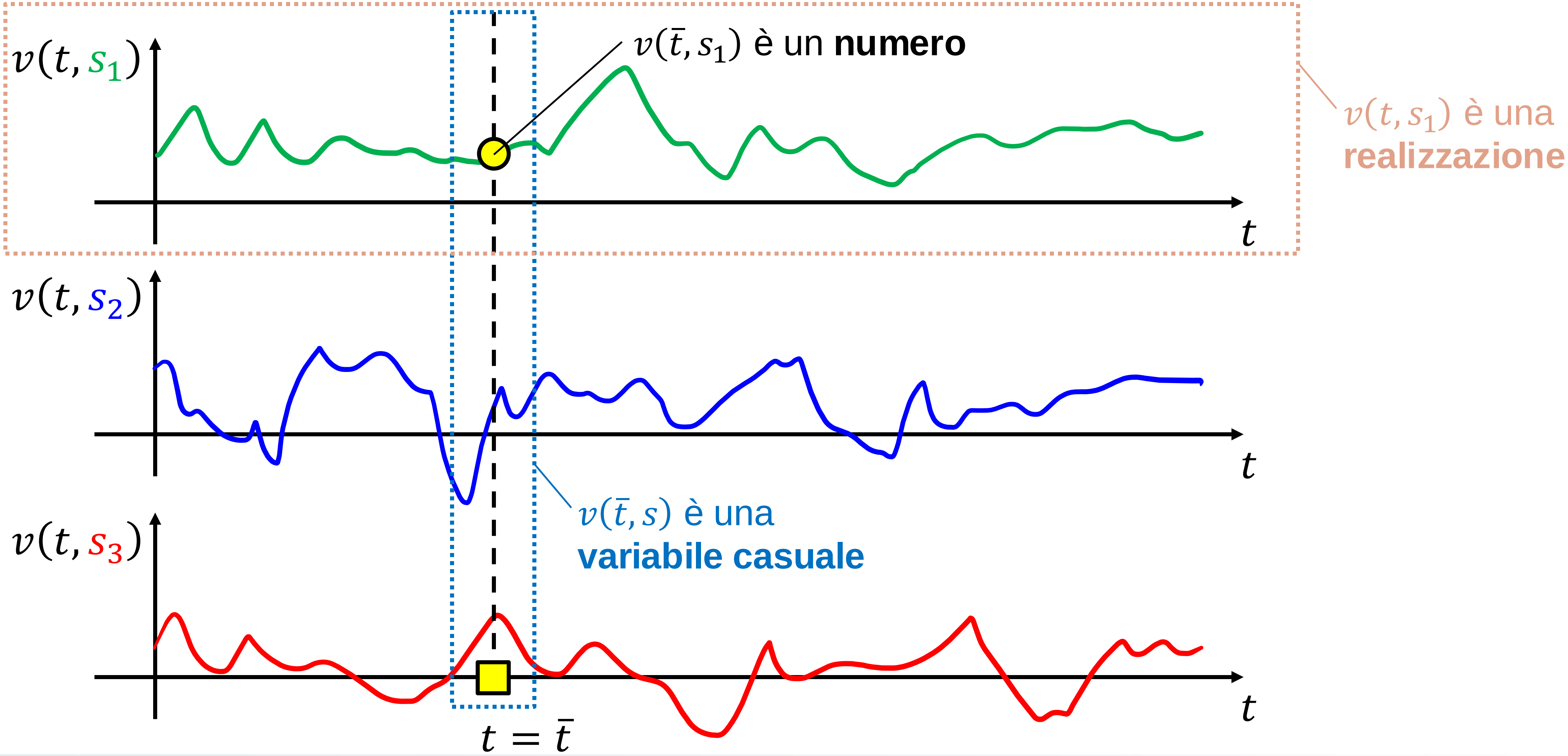


Variabile casuale



Processo stocastico

Processi stocastici

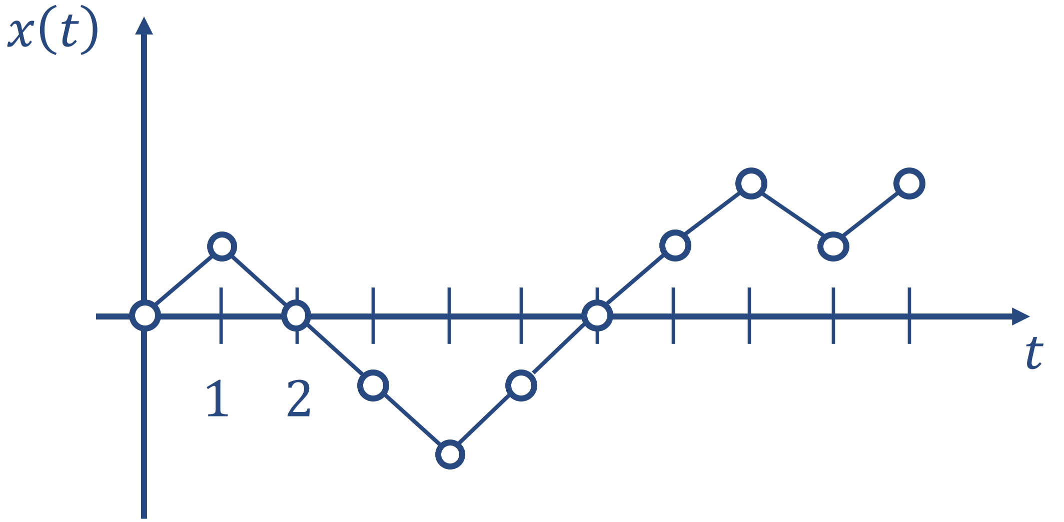


Esempio: random walk

Consideriamo un esperimento costituito da una **sequenza di prove di Bernoulli** (che hanno esito «successo» con un certa probabilità π e «insuccesso» con probabilità $1-\pi$)

$$x(t) = x(t-1) + v(t) \qquad v(t) = \begin{cases} 1 & s = \text{successo} \\ -1 & s = \text{insuccesso} \end{cases}$$

La variabile casuale $x(t)$ può essere pensata come l'andamento dei beni di un giocatore d'azzardo che gioca sempre la stessa posta a testa\croce



Questo processo è chiamato **random walk** ed ha molte applicazioni (può essere immaginato come una «camminata dell'ubriaco» che barcolla avanti e indietro)

Processi stocastici

L'utilizzo dei processi stocastici non si limita allo studio degli ubriachi! Sono utili ogni volta che vogliamo analizzare fenomeni che **non possiamo** o **non vogliamo** (per comodità) **descrivere deterministicamente**

Ciò capita, per esempio, quando è **troppo difficile descrivere la fisica** di un fenomeno

Esempio: Supponiamo di voler descrivere la **traiettoria di una palla di cannone**. Esso avrà una «traiettoria media» descrivibile con le leggi della cinematica, ma questa traiettoria sarà anche «sporcata» dal vento, dalla densità dell'aria, dalla dilatazione termina della canna del cannone…

Per cui, anziché cercare di descrivere tutto con delle leggi fisiche, si descrivere la traiettoria «media» in modo deterministico, e poi gli «scostamenti» vengono descritte tramite un processo casuale con certe proprietà

Processi stocastici

Un processo stocastico è **completamente caratterizzato** dal punto di vista probabilistico se, per ogni n-upla di variabili casuali $v(1), v(2), \dots, v(n)$, è nota la **distribuzione di probabilità congiunta** di queste variabili

- Posso immaginare (nel caso di processi discreti) come al dover conoscere la ddp congiunta di un **vettore di dimensione infinita di variabili casuali**

Con poche eccezioni (e.g. tutte le v.c. sono Gaussiane) questo è **bello ma impossibile**

Per cui, spesso ci si limita a considerare solo **valore atteso** e **funzione di covarianza** (o di correlazione) di un processo stocastico (caratterizzazione del 2° ordine)

Caratterizzazione del secondo ordine

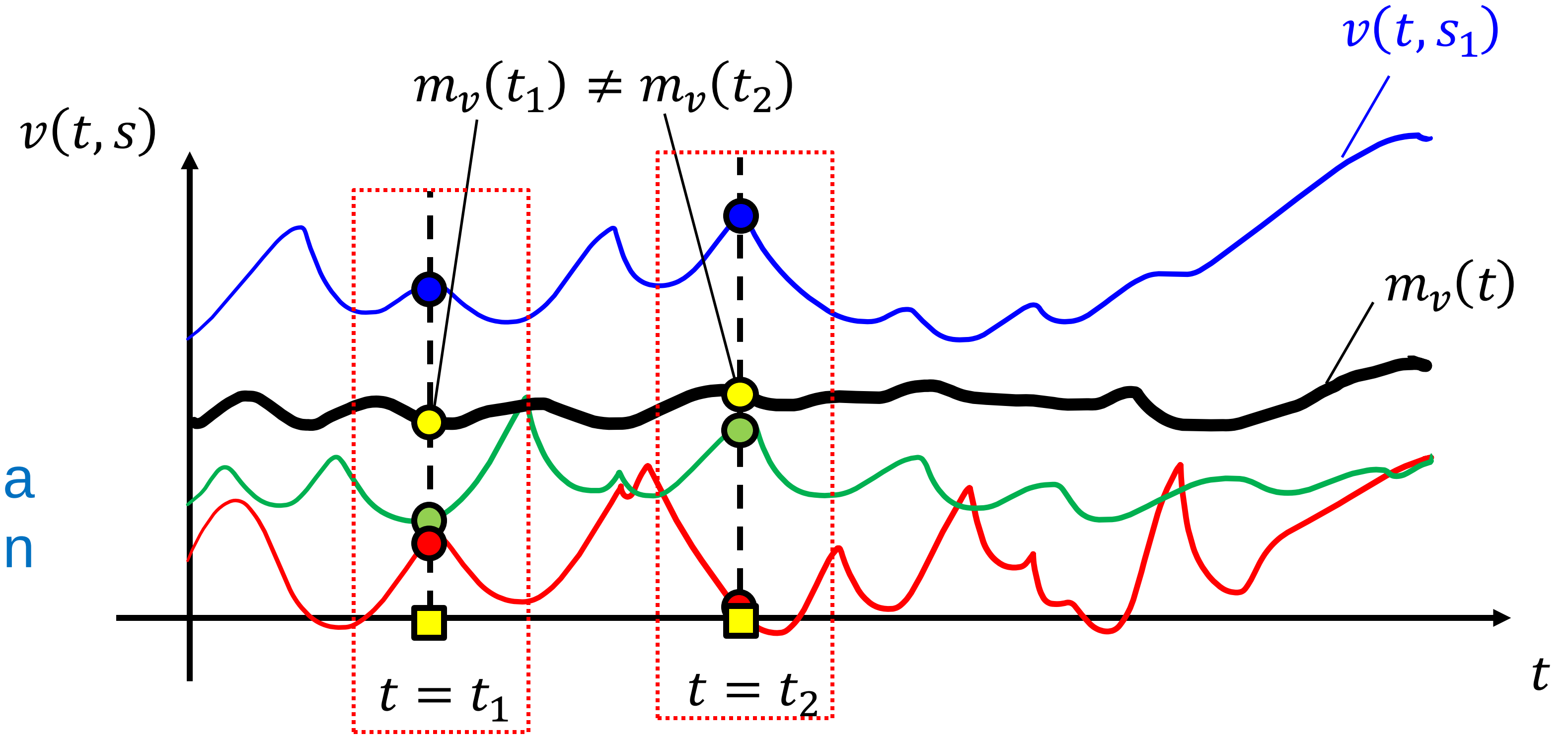
Dato un processo stocastico $v(t, s)$ si definiscono:

VALORE ATTESO *(momento del primo ordine)*

È una **funzione** che rappresenta il valore atteso della v.c. $v(t, s)$ al tempo t

$$m_v(t) \equiv \mathbb{E}_s[v(t,s)]$$

È la **«media in verticale»** (media di insieme) non quella in «orizzontale» (media temporale)



Caratterizzazione del secondo ordine

<u>FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE</u> *(momento del secondo ordine)*

Permette di capire i valori che il processo assume ad un istante t_1 rispetto a quelli che assume ad un istante t_2

$$\boxed{R_{vv}(t_1, t_2) \equiv \mathbb{E}_s[v(t_1, s)v(t_2, s\ )]}$$

- $R_{vv}(t_1, t_2) > 0$ $\Rightarrow$ se $v(t_1, s) > 0$, allora, *in media*, $v(t_2, s) > 0$
  se $v(t_1, s) < 0$, allora, *in media*, $v(t_2, s) < 0$
  $v(t_1)$ e $v(t_2)$ **stesso segno**, in media
- $R_{vv}(t_1, t_2) < 0$ $\Rightarrow$ se $v(t_1, s) > 0$, allora, *in media*, $v(t_2, s) < 0$
  se $v(t_1, s) < 0$, allora, *in media*, $v(t_2, s) > 0$
  $v(t_1)$ e $v(t_2)$ **segno diverso**, in media

Caratterizzazione del secondo ordine

FUNZIONE DI AUTOCOVARIANZA

È la **covarianza** tra $v(t_1, s)$ e $v(t_2, s\,)$

$$\gamma_{vv}(t_1, t_2) \equiv \mathbb{E}_s\big[\big(v(t_1, s) - m_v(t_1)\big) \cdot \big(v(t_2, s) - m_v(t_2)\big)\big]$$

- $\gamma_{vv}(t, t) = \mathrm{Var}[v(t, s)]$: **varianza** del processo a tempo $t = t_1 = t_2$
- $\gamma_{vv}(t_1, t_2) = R_{vv}(t_1, t_2) - m_v(t_1) \cdot m_v(t_2)$
- Può essere vista come la funzione di autocorrelazione del **processo depolarizzato** $v(t, s) - m_v(t)$

Caratterizzazione del secondo ordine

FUNZIONE DI AUTOCOVARIANZA NORMALIZZATA

È una generalizzazione del coefficiente di correlazione tra $v(t_1, s)$ e $v(t_2, s)$

$$\boxed{\rho_{vv}(t_1, t_2) \equiv \frac{\gamma_{vv}(t_1, t_2)}{\sqrt{\gamma_{vv}(t_1, t_1) \cdot \gamma_{vv}(t_2, t_2)}}}$$

- $|\rho_{vv}(t_1, t_2)| \leq 1$
- È l'autocovarianza del **processo normalizzato** $\tilde{v}(t, s) = \dfrac{v(t, s) - m_v(t)}{\sqrt{\mathrm{Var}[v(t, s)]}}$

Processi stocastici congiunti

Consideriamo due processi stocastici $v(t,s)$ e $x(t,s)$. È possibile definire una funzione di cross-correlazione e cross-covarianza, che consideri l'interazione tra $v(\quad)$ e $x(\quad)$

FUNZIONE DI CROSS-CORRELAZIONE

$$R_{vx}(t_1,t_2) \equiv \mathbb{E}_s[v(t_1,s)\cdot x(t_2,s)] = R_{xv}(t_2,t_1)$$

FUNZIONE DI CROSS-COVARIANZA

$$\gamma_{vx}(t_1,t_2) \equiv \mathbb{E}_s\left[\left(v(t_1,s)-m_v(t)\right)\cdot\left(x(t_2,s)-m_x(t)\right)\right] = \gamma_{xv}(t_2,t_1)$$

Processi stocastici congiunti

Due processi stocastici $v(t,s)$ e $x(t,s)$ si dicono **incorrelati** se

$$\gamma_{vx}(t_1,t_2) = 0, \qquad \forall t_1, t_2$$

FUNZIONE DI CROSS-COVARIANZA NORMALIZZATA

$$\boxed{\rho_{vx}(t_1,t_2) \equiv \frac{\gamma_{vx}(t_1,t_2)}{\sqrt{\gamma_{vv}(t_1,t_1)\cdot\gamma_{xx}(t_2,t_2)}}}$$

Nota: spesso ometteremo da $v(t,s)$ la dipendenza dall'esito s, indicando $v(1,s), v(2,s)$, ... con $v(1), v(2)$, ...

Outline

1. Introduzione alla stima di modelli dinamici
2. Processi stocastici
3. **Processi stocastici stazionari**
4. Momenti temporali ed ergodicità
5. Trasformata $\mathcal{Z}$ e trasformata di Fourier
6. Densità spettrale di potenza
7. Stima spettrale
8. Sistemi dinamici lineari discreti deterministici
9. Sistemi dinamici lineari discreti stocastici

Processi stocastici stazionari

Definizione: un processo stocastico $v(t)$ si dice **stazionario in senso forte** se $\forall n \in \mathbb{N}$, scelti $t_1, t_2, \dots, t_n$ istanti di tempo, le caratteristiche probabilistiche della n-upla $v(t_1), v(t_2), \dots, v(t_n)$ sono uguali a quelle della n-upla $v(t_1+\tau), v(t_2+\tau), \dots, v(t_n+\tau)$, $\forall \tau \in \mathbb{N}$

Definizione: un processo stocastico $v(t)$ si dice **stazionario in senso debole** se:

- $m_v(t) = m, \quad \forall t$
- $\gamma_{vv}(t_1, t_2) = \gamma_{vv}(t_3, t_4)$ nel caso in cui $|t_4 - t_3| = |t_2 - t_1| = \tau$

L' autocovarianza dipende solo dal **LAG** τ e non dagli specifici valori di t_1, t_2, t_3, t_4

Processi stocastici stazionari

Se un processo stocastico è stazionario in senso forte, allora lo è anche in senso debole

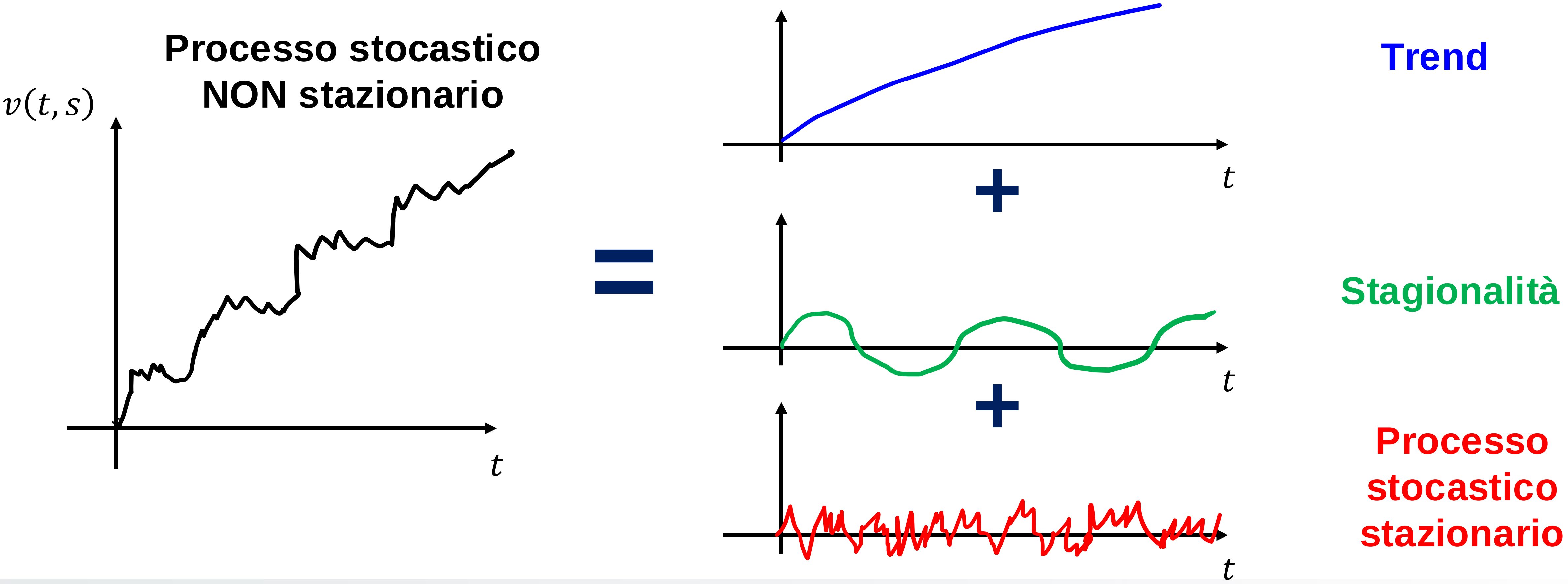
Nel corso **supporremo che i processi siano stazionari in senso debole**, non dovendo mai imporre specifiche distribuzioni di probabilità sulle variabili casuali che lo compongono

Dato che, nel caso di processi stocastici stazionari (pss), la **funzione di autocovarianza dipende solo dal lag** τ, si scrive:

$$\boxed{\gamma_{vv}(\tau) = \mathbb{E}_s[(v(t,s) - m) \cdot (v(t+\tau,s) - m)]}$$

Processi stocastici stazionari

Lo studio dei processi stocastici stazionari **non è limitante**, in quanto potremmo **decomporre** un processo non stazionario in diverse componenti:



Processi stocastici stazionari

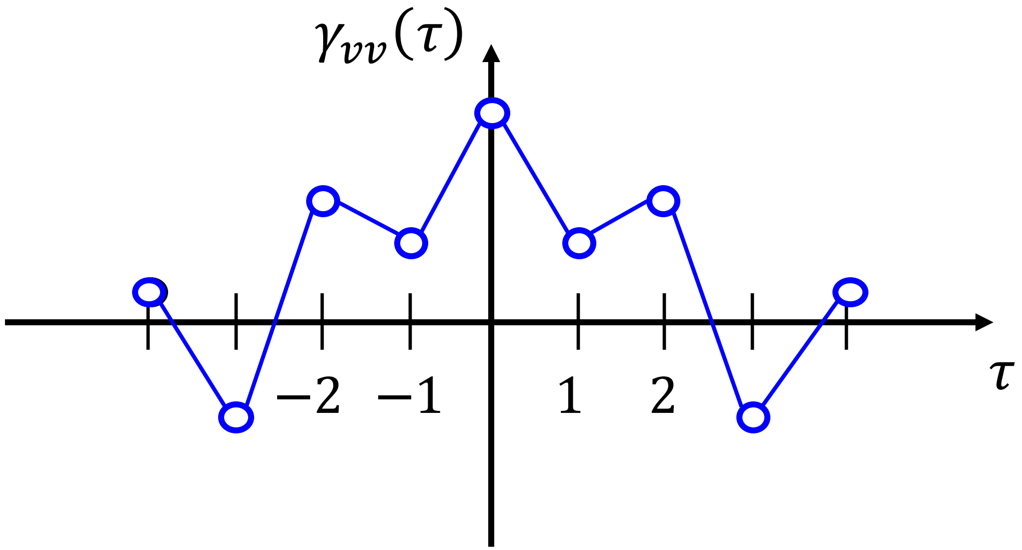
<u>Definizione:</u> due processi stocastici stazionari $v_1(t)$ e $v_2(t)$ si dicono **equivalenti** se hanno lo stesso valore atteso m e stessa funzione di autocovarianza $\gamma(\tau)$

<u>Nota:</u> durante il corso studieremo processi stocastici stazionari

Proprietà della funzione di autocovarianza di un pss

Dalla definizione di funzione di autocovarianza (e di autocorrelazione) di un processo stocastico stazionario, se ne deducono le seguenti proprietà:

1) $\gamma_{vv}(0) = \mathbb{E}[(v(t) - m)^2] \geq 0$ **Varianza del processo**



2) $|\gamma_{vv}(\tau)| \leq \gamma_{vv}(0),\ \forall \tau$ **Funzione limitata**

Il legame tra $v(t)$ e se stesso è più forte che tra $v(t)$ e $v(t+\tau),\ \tau \neq 0$

3) $\boxed{\gamma_{vv}(\tau)} = \gamma_{vv}(t, t+\tau) \Rightarrow \bar{t} = t + \tau \Rightarrow \gamma_{vv}(\bar{t} - \tau, \bar{t}) = \gamma_{vv}(\bar{t}, \bar{t} - \tau) = \boxed{\gamma_{vv}(-\tau)}$ **Funzione pari**

Caso particolare di pss: rumore bianco (white noise)

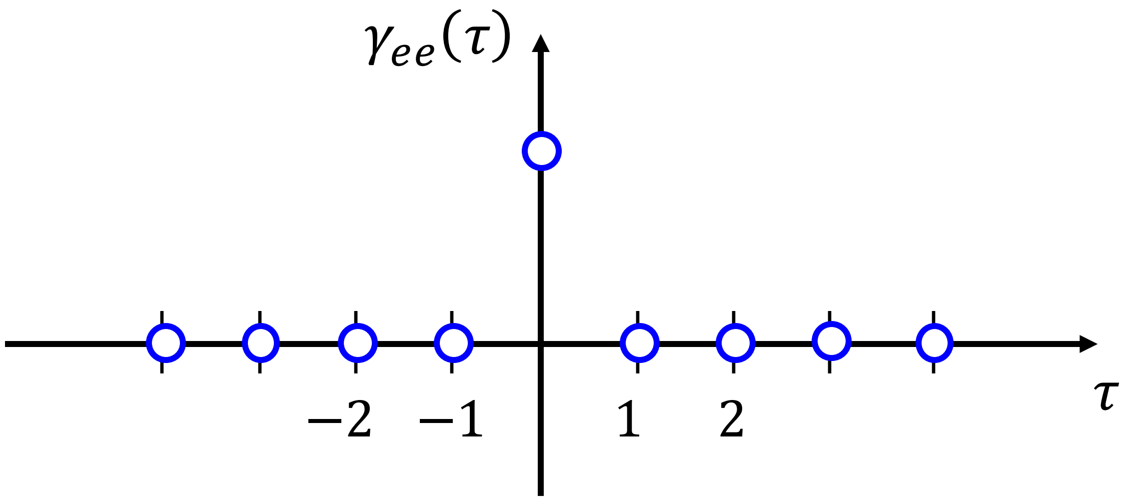
<u>Definizione</u>: Un pss $e(t) \sim \mathrm{WN}(\mu, \lambda^2)$ è detto **rumore bianco** se:

1) $\mathbb{E}[e(t)] = \mu$

2) $\gamma_{ee}(0) = \mathbb{E}[(e(t)-\mu)^2] = \lambda^2, \quad \forall t$

3) $\gamma_{ee}(\tau) = \mathbb{E}[(e(t)-\mu)\cdot(e(t+\tau)-\mu)] = 0, \quad \forall t, \forall \tau \neq 0$

Siccome **non vi è correlazione** tra il valore ad un istante t ed un valore all'istante $t+\tau$, il **rumore bianco** (stazionario) è un processo stocastico le cui **realizzazioni variano in modo impredicibile** da un istante all'altro



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO
Dipartimento di Ingegneria Gestionale, dell'Informazione e della Produzione

Caso particolare di pss: rumore bianco (white noise)

<u>Nota</u>: Per i nostri fini, non è importante la distribuzione delle singole v.c. $e(t_1), e(t_2), \ldots$ del processo rumore bianco

<u>Nota</u>: Spesso, considereremo processi stocastici stazionari a media nulla. Infatti, il valore della media del processo non modifica la sua funzione di autocovarianza (in altri termini, si dice che non modifica le «caratteristiche spettrali» del processo)

Outline

1. Introduzione alla stima di modelli dinamici
2. Processi stocastici
3. Processi stocastici stazionari
4. **Momenti temporali ed ergodicità**
5. Trasformata $\mathcal{Z}$ e trasformata di Fourier
6. Densità spettrale di potenza
7. Stima spettrale
8. Sistemi dinamici lineari discreti deterministici
9. Sistemi dinamici lineari discreti stocastici

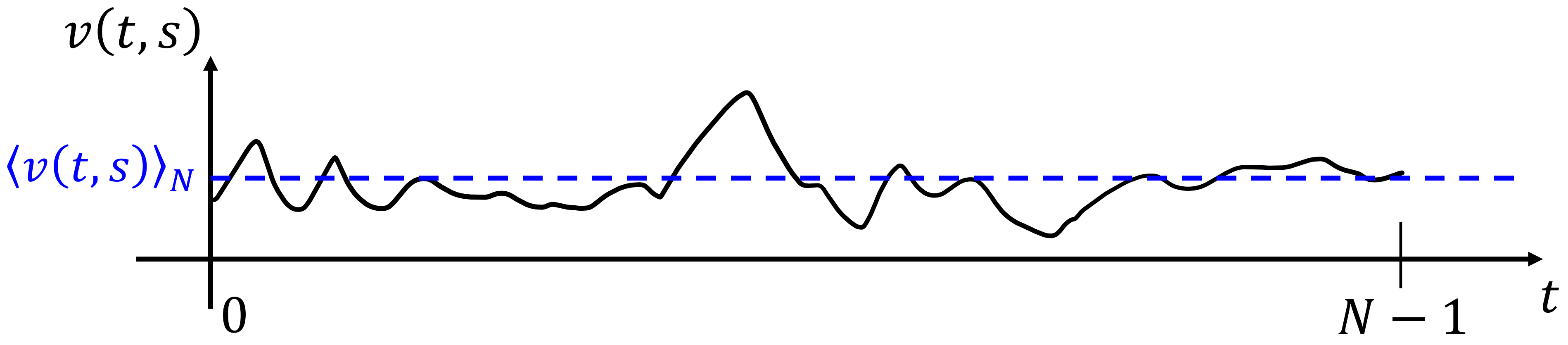
Momenti temporali

Supponiamo che $v(t,s)$ sia un **processo stazionario**. Definiamo:

MEDIA TEMPORALE SU ORIZZONTE FINITO

$$\boxed{\langle v(t,s)\rangle_N \equiv \frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N-1} v(t,s)}$$

Sto considerando N campioni temporali di una realizzazione di un pss



Momenti temporali

MEDIA TEMPORALE

$$\langle v(t,s)\rangle \equiv \lim_{N\to+\infty} \langle v(t,s)\rangle_N$$

AUTOCORRELAZIONE TEMPORALE

$$\langle v(t,s)\cdot v(t+\tau,s)\rangle \equiv \lim_{N\to+\infty} \sum_{t=0}^{N-1} v(t,s)\cdot v(t+\tau,s)$$

Momenti temporali

Ciò che abbiamo presentato sono quantità simili a degli **stimatori campionari**

Osservazioni

1. La quantità $\langle v(t,s)\rangle_N$ è una **variabile casuale** perché dipende dall'esito s

2. La quantità $\langle v(t,s)\rangle$ è un **limite di variabili casuali**. Quando converge?

Teorema

Se
1. $v(t,s)$ è un pss
2. $|\mathbb{E}_s[v(t,s)]| < +\infty$ (ovvero se la media esiste finita)

Allora il limite $\langle v(t,s)\rangle$ **converge quasi certamente**

$P\left(\lim_{n\to+\infty} v_n = v\right) = 1$. La v.c v_n converge alla v.c. v per $n \to +\infty$, e differiranno solo su eventi di probabilità nulla. **È il tipo di convergenza più forte**

Momenti temporali

Le conseguenze del teorema sono che:

- $\mathbb{E}_s[\langle v(t,s)\rangle] = \mathbb{E}_s[v(t,s)] = m$

- $\mathbb{E}_s[\langle v(t,s) \cdot v(t+\tau,s)\rangle] = R_{vv}(\tau)$

Ovvero, si dimostra che $\langle v(t,s)\rangle$ e $\langle v(t,s) \cdot v(t+\tau,s)\rangle$ sono **stimatori corretti** del valore atteso e della funzione di autocorrelazione del processo stazionario $v(t,s)$

Momenti temporali –stima della media del processo

Idea: sia $v(t,s)$ un processo stocastico stazionario di cui voglio stimare il valore atteso m. In teoria, mi servirebbero n realizzazioni $v(t,s_1), v(t,s_2), \ldots, v(t,s_n)$ del processo $v(t,s)$. Potrei poi stimare il valore atteso, scegliendo un istante $\bar{t}$, come:

$$\hat{m} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v(\bar{t}, s_i)$$

Media in «verticale» o media di insieme

A differenza del caso di variabili casuali, in cui di solito ho tante osservazioni di questa variabile, nel caso di pss spesso ho **solo una realizzazione finita** della serie temporale (che interpreto come realizzazione di un pss)

Possiamo usare $\langle v(t,s)\rangle_N$ come stimatore di m?

Media in «orizzontale» o media temporale

Processi stocastici ergodici

Definizione: il processo stocastico $v(t,s)$ è detto **ergodico** se:

1. $v(t,s)$ è stazionario
2. Per $N \to +\infty$, i momenti temporali convergono quasi certamente ai rispettivi momenti di insieme

Definizione: il processo stazionario $v(t,s)$ è detto **ergodico nella media** (proprietà più debole) se:

$$\lim_{N \to +\infty} \langle v(t,s) \rangle_N = m \quad \text{q.c.}$$

Processi stocastici ergodici

<u>Teorema</u> Sia $v(t, s)$ un **pss in senso debole.** Allora, se

1. $|\gamma_{vv}(0)| < +\infty$ (la varianza esiste finita)
2. $\lim_{\tau \to +\infty} \gamma_{vv}(\tau) = 0$ (la funzione di autocovarianza tende a zero)

si ha che $v(t, s)$ è **ergodico nella media**

<u>Teorema</u> Sia $v(t, s)$ **stazionario e Gaussiano**. Allora, se

1. $|\gamma_{vv}(0)| < +\infty$ (la varianza esiste finita)
2. $\lim_{\tau \to +\infty} \gamma_{vv}(\tau) = 0$ (la funzione di autocovarianza tende a zero)

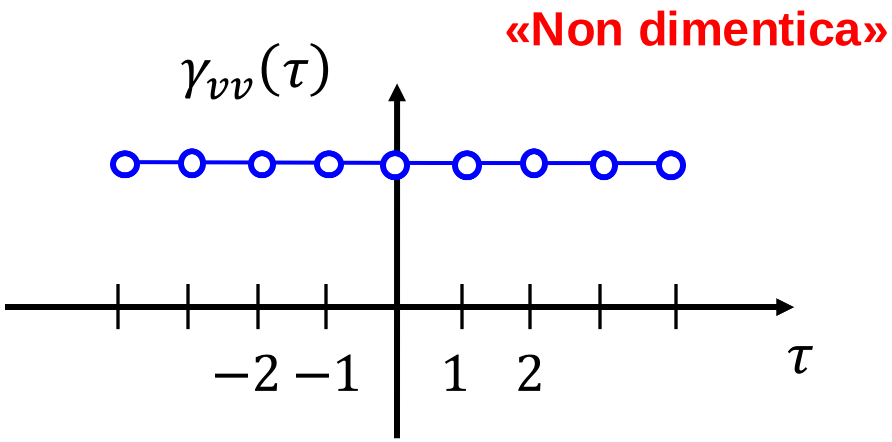
si ha che $v(t, s)$ è **ergodico**

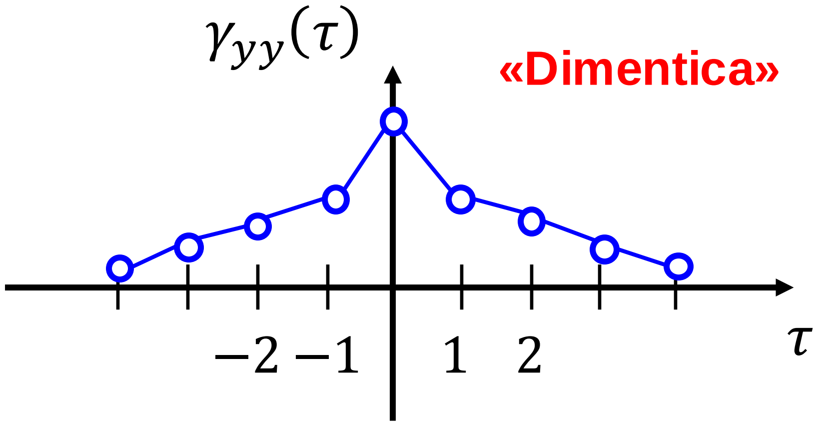
Processi stocastici ergodici

- L’ergodicità è molto comoda: riesco a **fare stime** dei processi stocastici anche se ho **una sola realizzazione**

- Se un processo stocastico è ergodico, allora ogni singola realizzazione è **«rappresentativa»** di tutte le possibili realizzazioni

- Per essere «rappresentativa», la realizzazione deve **«dimenticare»** i valori iniziali ed **«esplorare»** tutto il dominio del processo





Processi stocastici ergodici

Nella pratica, l'utilizzo dell'ergodicità è un «cane che si morde la coda»:

- Per sapere se un processo è **ergodico**, devo conoscere $\gamma_{vv}(\tau)$, si vedano le condizioni sufficienti dei teoremi
- Però, a meno che non abbia già informazioni su $\gamma_{vv}(\tau)$, devo **stimarla dai dati**. Per stimarla dai dati però, il processo deve essere ergodico

Se non ho informazioni precise sul meccanismo di generazione dati, spesso non posso fare altro che **ipotizzare l'ergodicità** senza poterla dimostrare, e procedere stimando le caratteristiche del processo tramite momenti temporali

Outline

1. Introduzione alla stima di modelli dinamici
2. Processi stocastici
3. Processi stocastici stazionari
4. Momenti temporali ed ergodicità
5. **Trasformata $\mathcal{Z}$ e trasformata di Fourier**
6. Densità spettrale di potenza
7. Stima spettrale
8. Sistemi dinamici lineari discreti deterministici
9. Sistemi dinamici lineari discreti stocastici

Trasformata $\mathcal{Z}$

<u>Definizione</u>: la **trasformata Zeta bilatera** di un segnale discreto deterministico $g(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, è definita come

$$\mathcal{Z}[g(t)] = G(z) \equiv \sum_{t=-\infty}^{+\infty} g(t) \cdot z^{-t}, \qquad z \in \mathbb{C}$$

- $g(t)$ è una **funzione reale** di **variabile intera** $t \in \mathbb{Z}$ (funzione a tempo discreto)
- $G(z)$ è una **funzione complessa** di **variabile complessa** $z \in \mathbb{C}$

Riguardare la Lezione 29 di Fondamenti di Automatica (9 cfu)!

Trasformata $\mathcal{Z}$

Proprietà della trasformata Zeta bilatera

- **Linearità:** $\mathcal{Z}[\alpha g(t) + \beta h(t)] = \alpha G(z) + \beta H(z), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- **Anticipo:** $\mathcal{Z}[g(t+1)] = z \cdot G(z)$

  Dimostrazione: $\sum_{t=-\infty}^{+\infty} g(t+1) z^{-t}$

  $= \cdots + g(-1)z^2 + g(0)z^1 + g(1) + g(2)z^{-1} + g(3)^{-2} + \cdots$

  $= z \cdot [\ldots + g(-1)z^1 + g(0) + g(1)z^{-1} + g(2)z^{-2} + g(3)z^{-3} + \cdots\ ] = z \cdot G(z)$
- **Ritardo:** $\mathcal{Z}[g(t-1)] = z^{-1} \cdot G(z)$

z: operatore di **anticipo unitario**

z^{-1}: operatore di **ritardo unitario**

Convoluzione di segnali discreti

Definizione: la **convoluzione** (discreta) tra due segnali discreti $g(t)$ e $u(t)$ è definita come

$$y(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} g(i)u(t-i) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} g(t-i)u(i)$$

Proprietà: si dimostra che la **trasformata $\mathcal{Z}$ della convoluzione** è il **prodotto delle trasformate $\mathcal{Z}$**

$$Y(z) = G(z)U(z)$$

Trasformata di Fourier a Tempo Discreto (DTFT)

Definizione: Sia $u(t)$ un segnale discreto, deterministico, assolutamente sommabile, ovvero tale che

$$\sum_{t=-\infty}^{+\infty} |u(t)| < +\infty$$

Allora, si definisce **trasformata di Fourier a tempo discreto (DTFT)** la quantità

$$\mathcal{F}[u(t)] \equiv \sum_{t=-\infty}^{+\infty} u(t) \cdot e^{-j\omega t}$$

- È una **funzione complessa** della **variabile reale** $\omega \in \mathbb{R}$. Quindi, $\mathcal{F}[u(t)]$ è una funzione continua poiché ω assume valori in $\mathbb{R}$

Trasformata di Fourier a Tempo Discreto (DTFT)

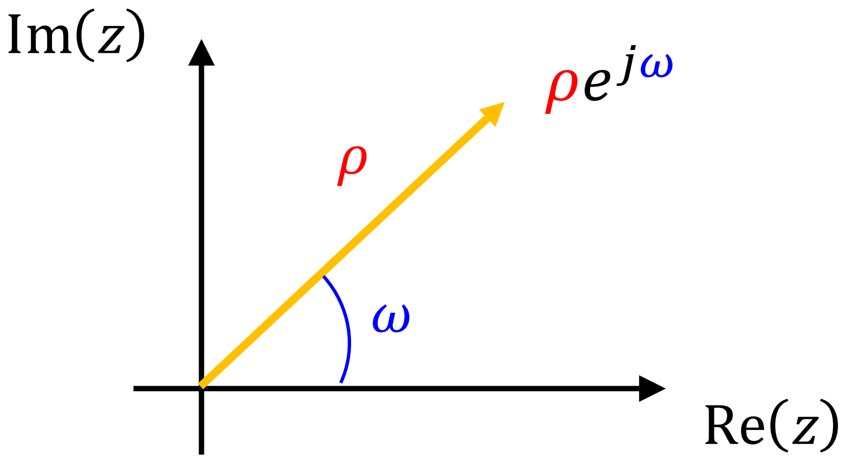
Proprietà della DTFT: la trasformata di Fourier a tempo discreto di un segnale discreto $u(t)$ si ottiene valutando la trasformata $\mathcal{Z}$ di $u(t)$ in $z = e^{j\omega}$:

$$\boxed{\mathcal{F}[u(t)] = U\left(e^{j\omega}\right)}$$

$$\mathcal{F}[u(t)] = \left[\sum_{t=-\infty}^{+\infty} u(t) \cdot z^{-t}\right]_{z=e^{j\omega}}$$

Interpretazione: la trasformata di Fourier a tempo discreto è la **restrizione** di $U(z)$ alla **circonferenza di raggio unitario, cioè i valori di** z che si possono scrivere come $e^{j\omega}$, ovvero i punti con modulo $\rho = 1$

$$\mathcal{F}[u(t)] = U(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

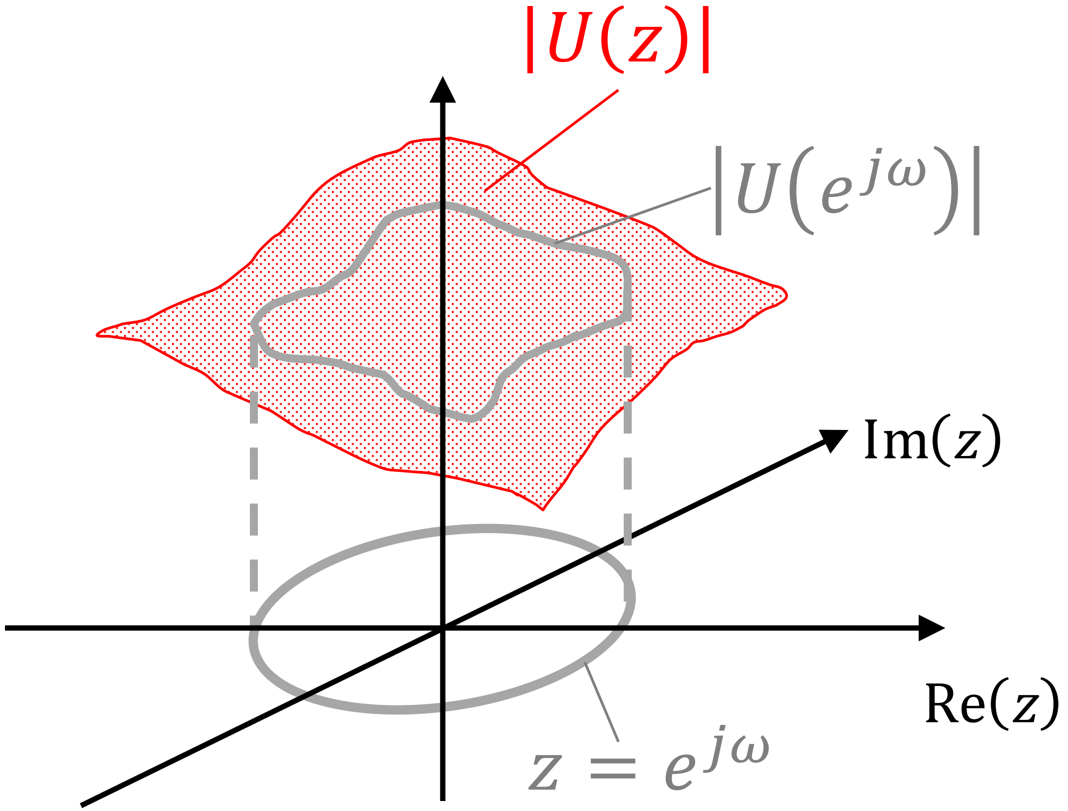


Trasformata di Fourier a Tempo Discreto (DTFT)

Interpretazione: la trasformata di Fourier a tempo discreto è la **restrizione** di $U(z)$ alla **circonferenza di raggio unitario**

$$\mathcal{F}[u(t)] = U(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

Rappresentiamo per semplicità solo il modulo di $U(z)$ e $U(e^{j\omega})$. Allora, $|U(z)|$ è una **superficie** nel piano complesso, mentre $|U(e^{j\omega})|$ è un **«percorso»** nel piano complesso



Trasformata di Fourier a Tempo Discreto (DTFT)

Sembrerebbe quindi che la trasformata di Fourier contenga meno informazioni rispetto alla trasformata $\mathcal{Z}$. In realtà, è possibile **ricostruire completamente** $u(t)$ partendo da $U(e^{j\omega})$

Altre proprietà della DTFT

- $X(e^{j(\omega+2k\pi)}) = X(e^{j\omega})$: 2π **periodica**, infatti quando «completo un giro» della circonferenza $e^{j\omega}$, ritorno al punto di partenza
- $\bar{X}(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega})$, il **complesso coniugato** $\bar{X}(e^{j\omega})$ del numero $X(e^{j\omega})$ si trova cambiando il segno dell'angolo ω

$$\Downarrow$$

Tutta l'informazione è contenuta in $[0, \pi]$

Trasformata di Fourier Discreta (DFT)

Consideriamo un segnale discreto $u(t)$ di **durata finita**, definito su $t \in [0, N-1] \subset \mathbb{N}$.

Definiamo la **trasformata di Fourier discreta (DFT)** come

$$\breve{U}(k) \equiv \sum_{t=0}^{N-1} u(t) \cdot e^{-j \cdot t \cdot k\phi}$$

- $\phi = \dfrac{2\pi}{N}$
- $k = 0, \dots, N-1$

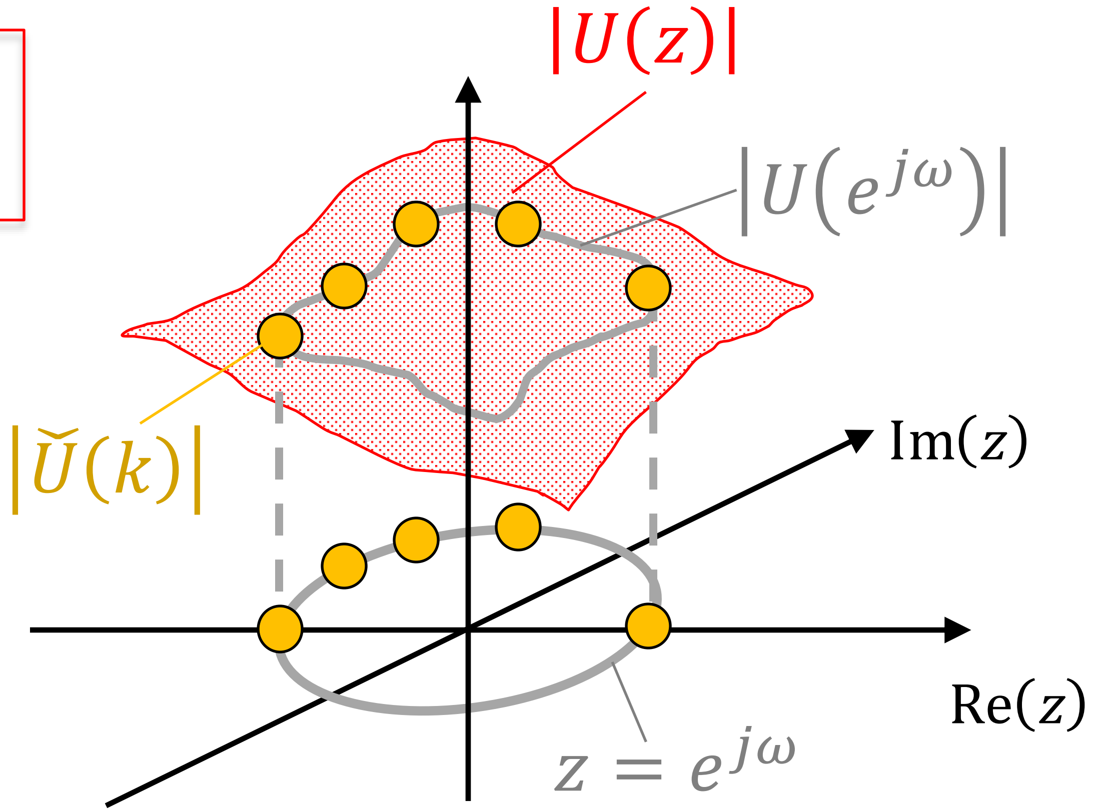
- È una **funzione complessa** della **variabile intera** $k \in \mathbb{N}$. Quindi, $\breve{U}(k)$ è una funzione discreta poiché k assume valori in $\mathbb{N}$
- Parto con $u(t)$ che è definito come un vettore di N numeri reali, e arrivo con $\breve{U}(k)$ che è definita come un vettore di N numeri complessi

Trasformata di Fourier Discreta (DFT)

Proprietà della DFT

Consideriamo un segnale $u(t)$ tale che esso valga 0 per $t < 0$ e $t \geq N$. Allora, la **DFT** può essere vista come un **«campionamento» della DTFT**

$$\boxed{\breve{U}(k) = U\left(e^{j \cdot k \cdot 2\pi/N}\right)}$$



Dimostrazione

$$U\left(e^{j\omega}\right) \equiv \sum_{t=-\infty}^{+\infty} u(t) \cdot e^{-j\omega t} = \sum_{t=0}^{N-1} u(t) \cdot e^{-j\omega t}$$

$\Rightarrow$ Se impongo $\omega = k \cdot \phi = k \cdot \frac{2\pi}{N}$ $\Rightarrow$

la proprietà è dimostrata

Trasformata di Fourier Discreta (DFT)

Proprietà della DFT

- Esiste una **DFT inversa (IDFT)** tale che è possibile **ricostruire** $u(t)$ partendo da $\breve{U}(k)$. Quindi, la **DFT non fa perdere alcuna informazione**
  - ✓ Per poter usare la DFT, abbiamo bisogno di **segnali di durata finita**. È anche vero però che nella pratica i nostri segnali saranno sempre di durata finita…

- La **risoluzione della DFT**, chiamata anche **«frequency bin»** è data da $\mathrm{bin} = f_s/N$, dove f_s è la frequenza di campionamento
  - ✓ Dato che la **DFT è simmetrica**, solo $N/2$ dati portano informazione, la $N/2$-esima frequenza $k = N/2$ rappresenta la frequenza di Nyquist $f_s/2$

Nota sui segnali e sulle lore trasformate di Fourier

SEGNALE *(nel tempo)*		**TRASFORMATA** *(nella frequenza)*
Periodico (o di durata finita)	⟺	**Discreta** (DFT)
Discreto	⟺	**Periodica** (DTFT o DFT)

La **DFT** è **sia discreta che periodica.** Quindi, presuppone che il segnale nel tempo sia discreto e anche periodico. Se il segnale non è periodico e applico la DFT, potrei avere problemi di **leakage** (ma non tratteremo questo problema)

Outline

1. Introduzione alla stima di modelli dinamici
2. Processi stocastici
3. Processi stocastici stazionari
4. Momenti temporali ed ergodicità
5. Trasformata $\mathcal{Z}$ e trasformata di Fourier
6. **Densità spettrale di potenza**
7. Stima spettrale
8. Sistemi dinamici lineari discreti deterministici
9. Sistemi dinamici lineari discreti stocastici

Densità spettrale di potenza di un pss

Sia $v(t, s)$ un **pss**. Abbiamo visto diversi modi per poterlo caratterizzare, come:

- Valore atteso $m = \mathbb{E}_s[v(t, s)]$
- Funzione di autocovarianza $\gamma_{vv}(\tau)$

Sia il valore atteso che la funzione di autocovarianza sono **caratterizzazioni «nel tempo».** È però possibile, proprio come per i segnali deterministici, caratterizzare un pss **«nella frequenza»** (ovvero, nel *dominio delle trasformate*)

L'evoluzione delle realizzazioni di un pss è prettamente caratterizzata dalla funzione di autocovarianza. Per questo motivo, *spesso si studiano pss «depurati» dalla loro media*

Idea: anziché $\gamma_{vv}(\tau)$, considero le sue **trasformate**

Densità spettrale di potenza di un pss

Definizione: Dato un processo stocastico stazionario (sia in senso debole che in senso forte), si definisce **densità spettrale di potenza** $\Gamma_{vv}(\omega)$ come la DTFT di $\gamma_{vv}(\tau)$:

$$\Gamma_{vv}(\omega) \equiv \mathcal{F}[\gamma_{vv}(\tau)] = \sum_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} \gamma_{vv}(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau}$$

La trasformata $\mathcal{Z}$ di $\gamma_{vv}(\tau)$ è:

$$\Phi_{vv}(z) \equiv \mathcal{Z}[\gamma(\tau)] = \sum_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} \gamma_{vv}(\tau) \cdot z^{-\tau}$$

- Data $\Phi_{vv}(z)$, si ha che $\Gamma_{vv}(\omega) = \Phi_{vv}\left(e^{j\omega}\right)$

Densità spettrale di potenza di un pss

Interpretazione:

- la densità spettrale di potenza ci dice come, in media, le componenti in frequenza delle varie realizzazioni del processo stocastico $v(t, s)$ contribuiscono alla sua varianza

- Come l'energia del processo si distribuisce alle varie frequenze

Densità spettrale di potenza di un pss

Osservazioni

- Conoscere $\Gamma_{vv}(\omega)$ o $\Phi_{vv}(z)$ è equivalente: posso risalire a $\gamma_{vv}(\tau)$ con l'antitrasformata
- Affinché $\Gamma_{vv}(\omega)$ converga, $\gamma_{vv}(\tau)$ devo tendere a zero in modo sufficientemente rapido. Studieremo casi in cui questo vale sempre

Proprietà di $\Gamma_{vv}(\omega)$

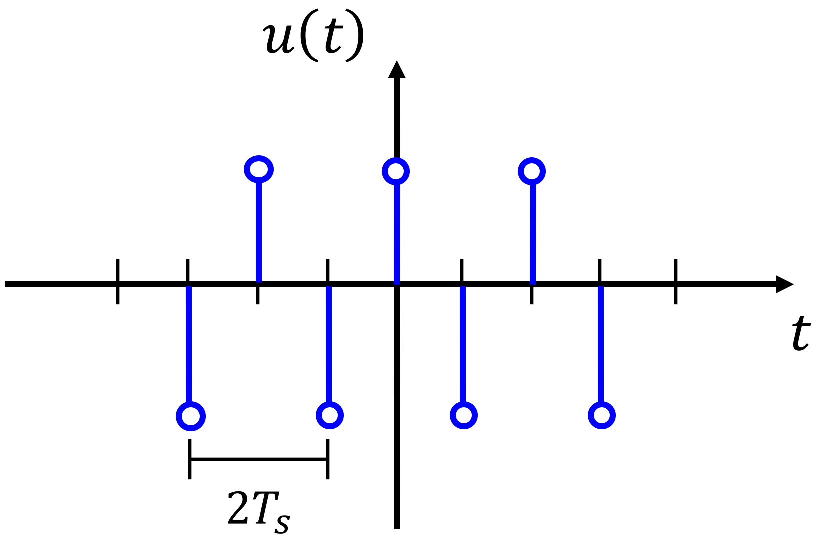
1. **Reale:** dato che $\gamma_{vv}(\tau)$ è pari, i termini immaginari del tipo $\pm j\sin(\omega)$ si elidono
2. **Positiva:** $\Gamma_{vv}(\omega) \geq 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$
3. **Pari:** $\Gamma_{vv}(\omega) = \Gamma_{vv}(-\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$
4. **Periodica di periodo 2π:** $\Gamma_{vv}(\omega) = \Gamma_{vv}(\omega + k \cdot 2\pi), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ **Ci basta valutare $\Gamma_{vv}(\omega)$ tra $[0, \pi]$**

Densità spettrale di potenza di un pss

Osservazione

A tempo discreto, la **più grande pulsazione osservabile** è quella di una cosinusoide che cambia valore ad ogni istante di tempo t



Tra l'istante t l'istante $t+1$, trascorre un tempo di campionamento T_s. Il più **piccolo periodo osservabile** è quindi $T = 2T_s = 2/f_s$ $[s]$

La **pulsazione** [rad/s] **osservabile più grande** corrisponde a:

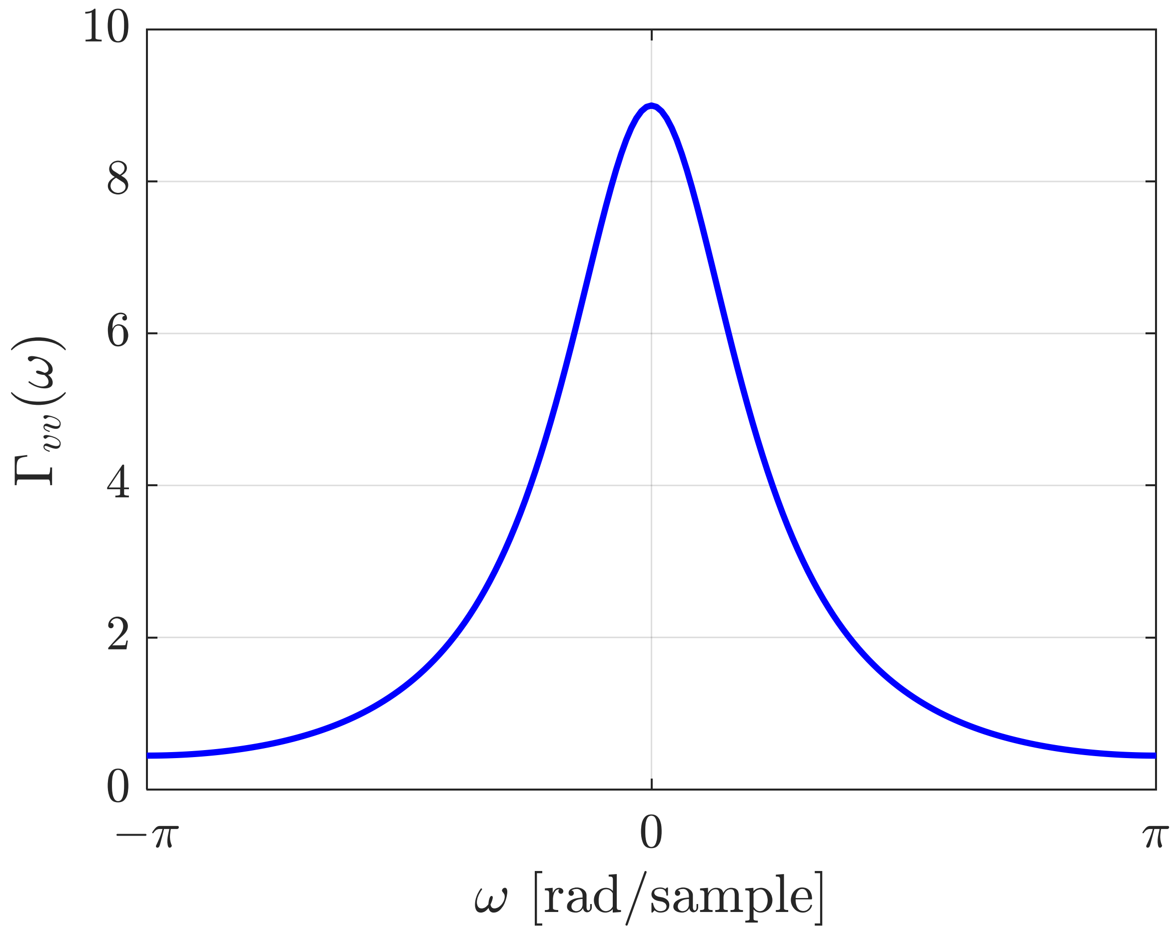
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{T_s} = \pi \cdot f_s \ [\text{rad/s}]$$ (Teorema del campionamento)

Densità spettrale di potenza di un pss

Quindi, la pulsazione ω, con la quale si rappresenta la densità spettrale di potenza, è una **«pulsazione normalizzata»** rispetto alla frequenza di campionamento f_s

Interpretazione: π $[\mathrm{rad}/s]$corrisponde a $f_s/2$ $[\mathrm{Hz}]$

Questa interpretazione deriva dalla definizione della DTFT, che considera «in modo implicito» il tempo di campionamento dei dati T_s



Densità spettrale di potenza di un pss

Altra proprietà di $\Gamma_{vv}(\omega)$

- È possibile risalire a $\gamma_{vv}(\tau)$ tramite **l'antitrasformata**

$$\boxed{\gamma_{vv}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \Gamma_{vv}(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} \, d\omega}$$

Si nota che è possibile esprimere la **varianza del processo** stazionario come **l'area sottesa** alla densità spettrale di potenza (a meno del fattore 2π)

$$\gamma_{vv}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \Gamma_{vv}(\omega) \, d\omega$$

Densità spettrale di potenza di un rumore bianco

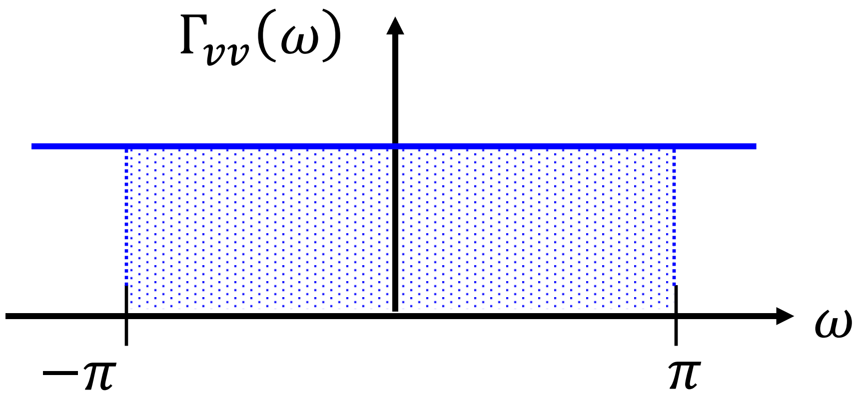
Sia $e(t) \sim \mathrm{WN}(0, \lambda^2)$. Sappiamo che nel tempo è un segnale **impredicibile**, dato che:

$$\gamma_{ee}(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \tau \neq 0 \\ \lambda^2 & \text{se} \quad \tau = 0 \end{cases} \Rightarrow \Gamma_{ee}(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \gamma_{ee}(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} = \lambda^2 \cdot e^{-j\omega 0} = \boxed{\lambda^2}$$

$$\Phi(z) = \lambda^2$$

La densità spettrale di potenza del rumore bianco è quindi **costante.** Tutte le frequenze hanno tutte la stessa potenza media

Non vi sono frequenze dominanti: tutte contribuiscono in modo uguale alla variabilità del segnale

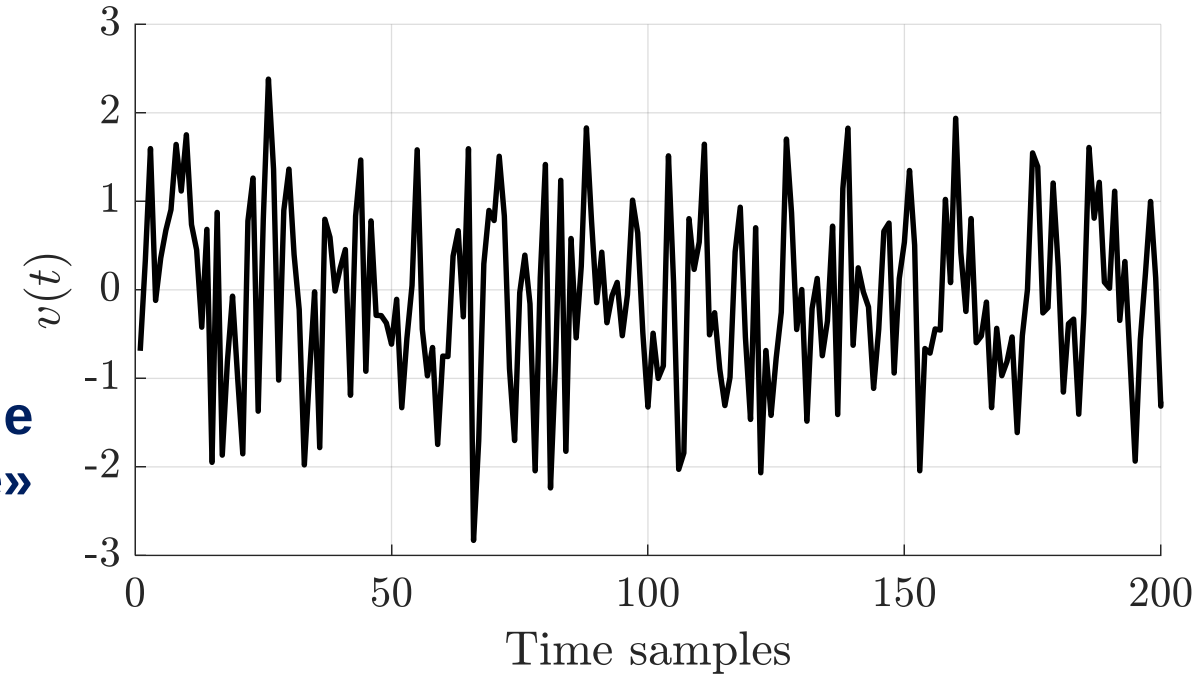


IMPREVIDIBILITÀ DEL PROCESSO

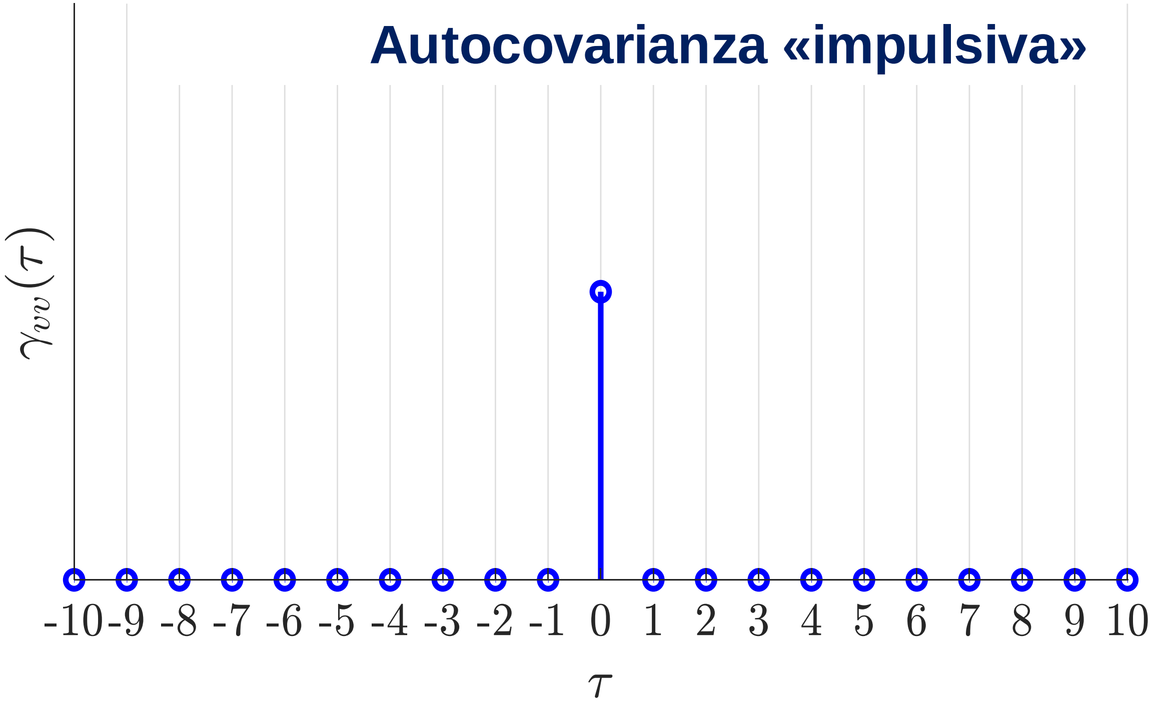
Esempio: rumore bianco

Pss a media zero

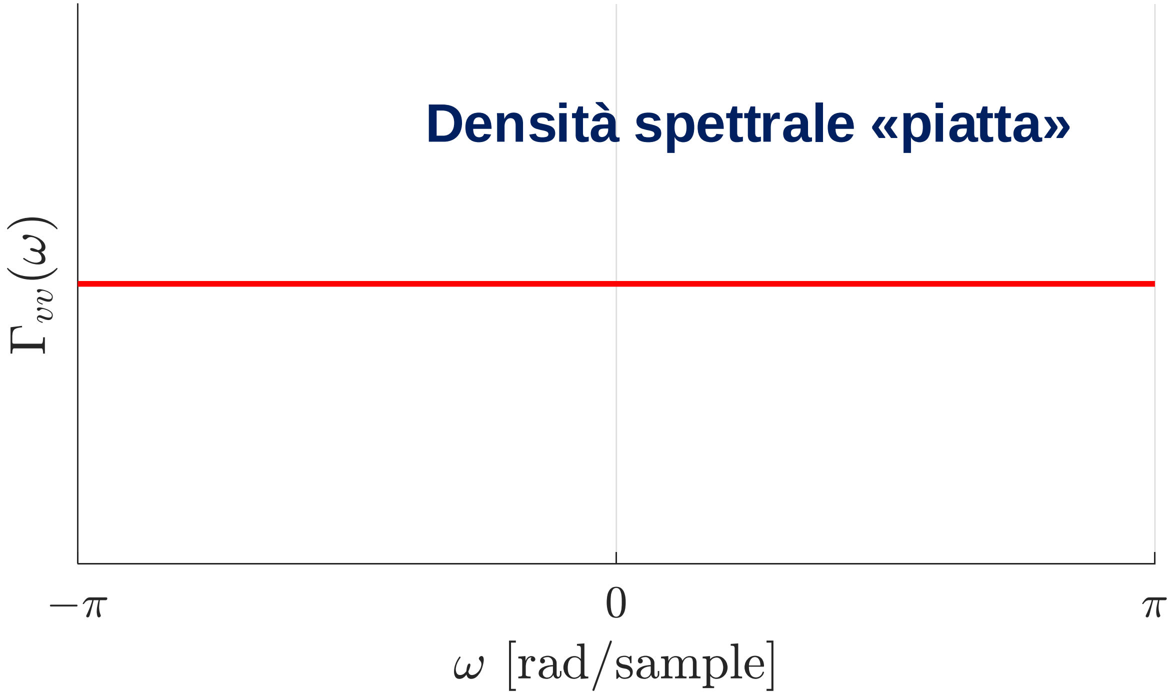
Andamento temporale «impredicibile»



Autocovarianza «impulsiva»



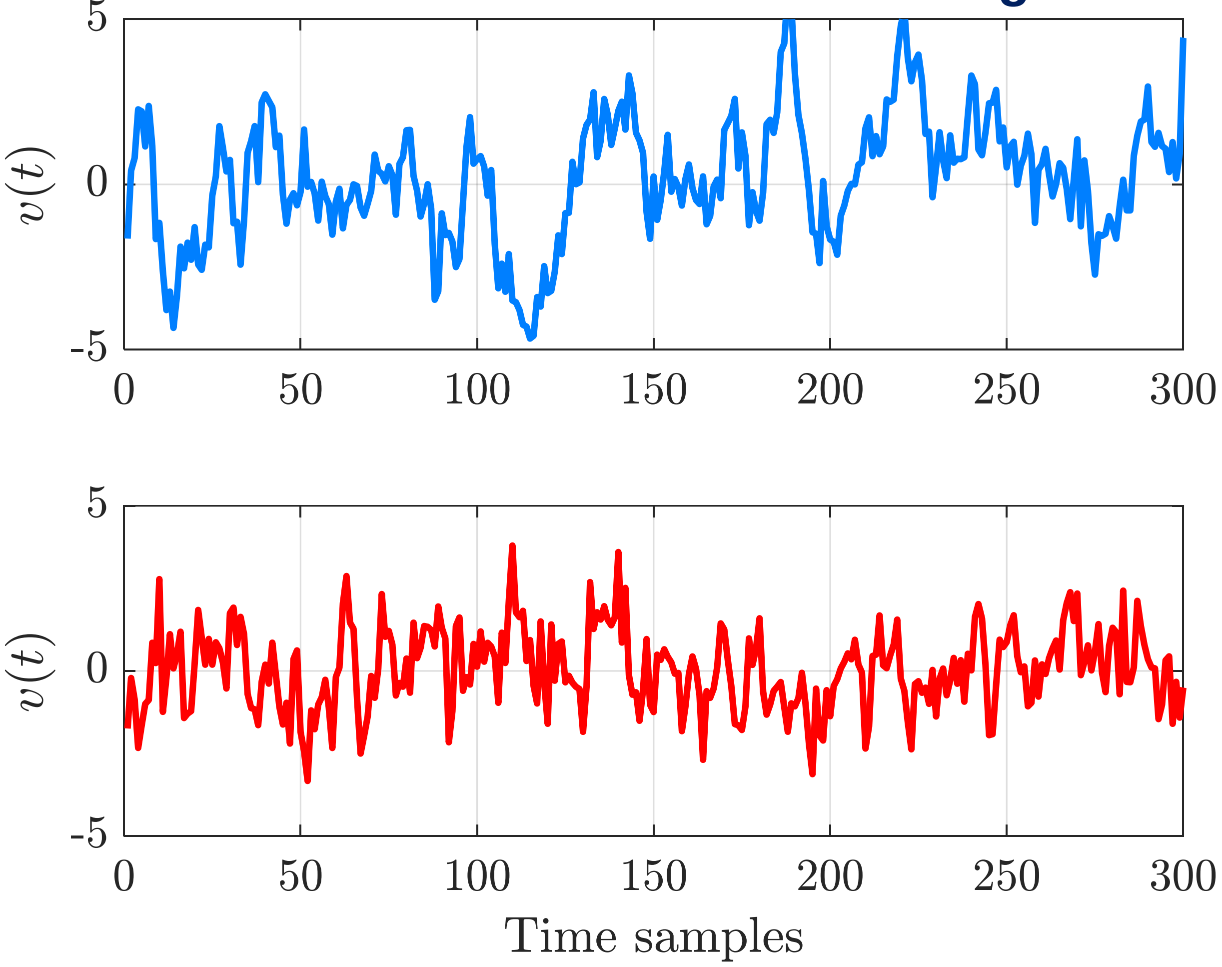
Densità spettrale «piatta»



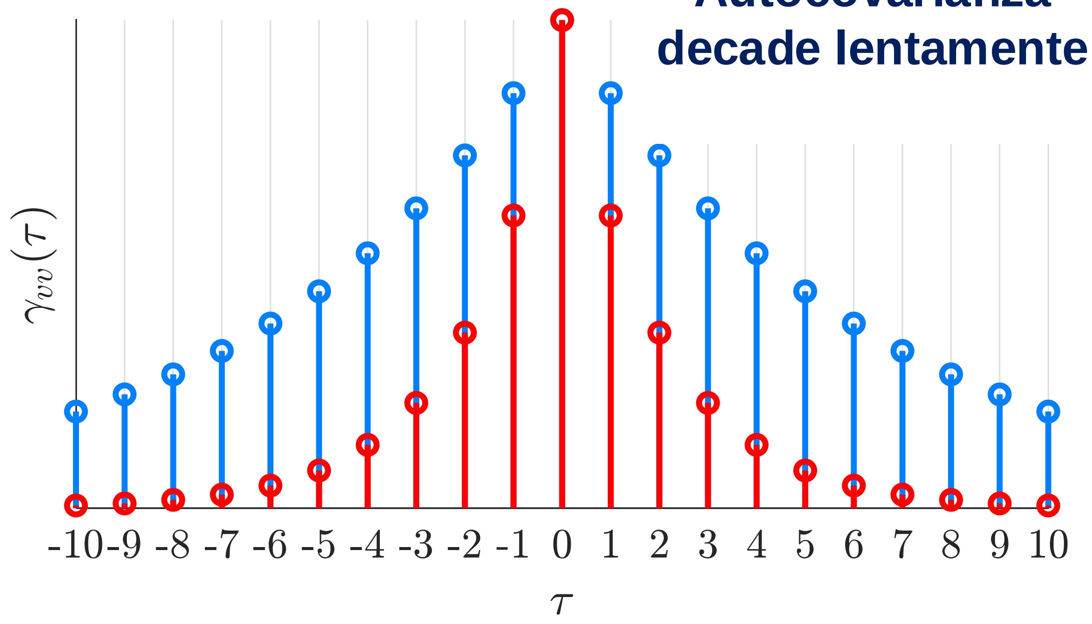
Esempio: processo «regolare»

Pss a media zero

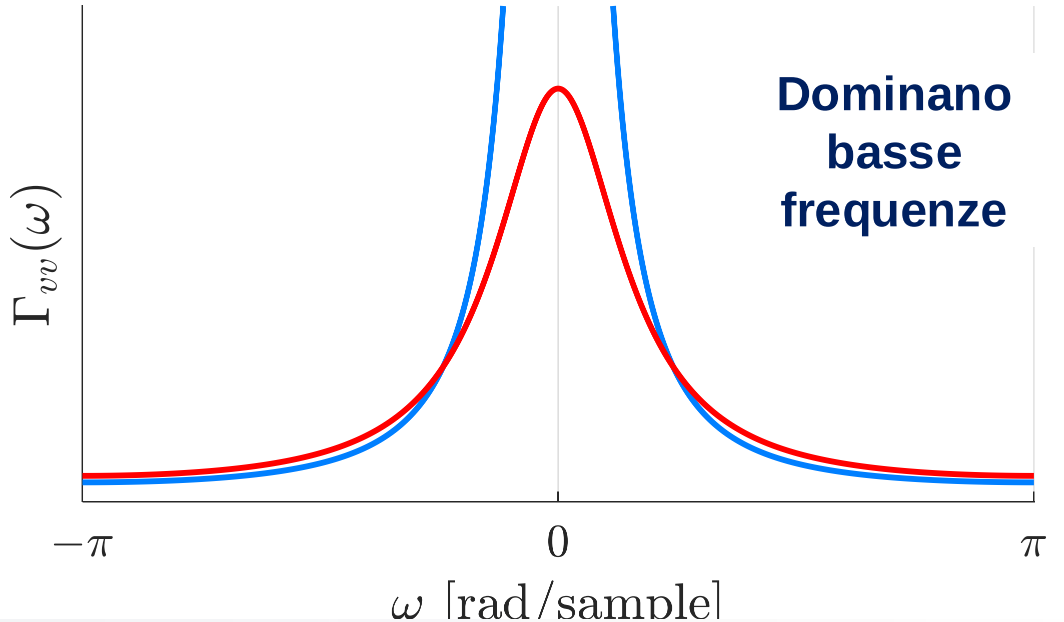
Andamento regolare



Autocovarianza decade lentamente



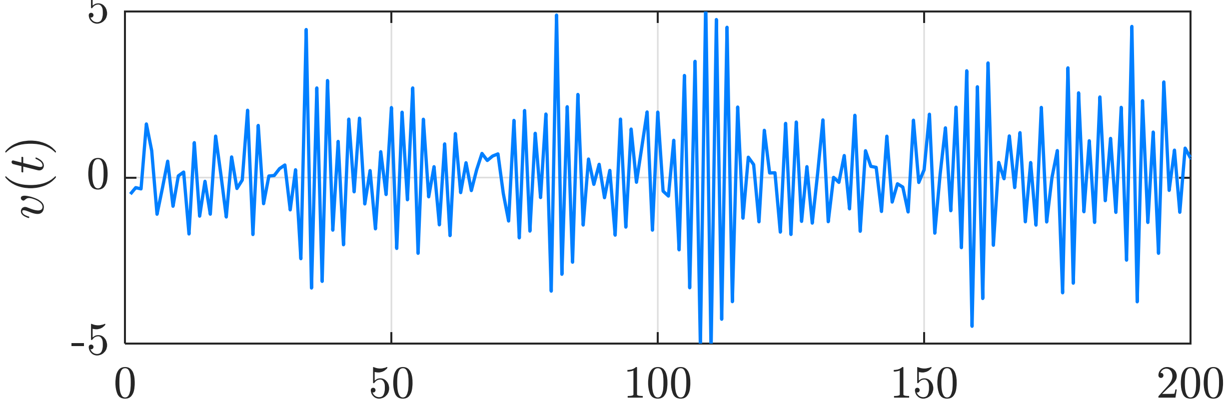
Dominano basse frequenze

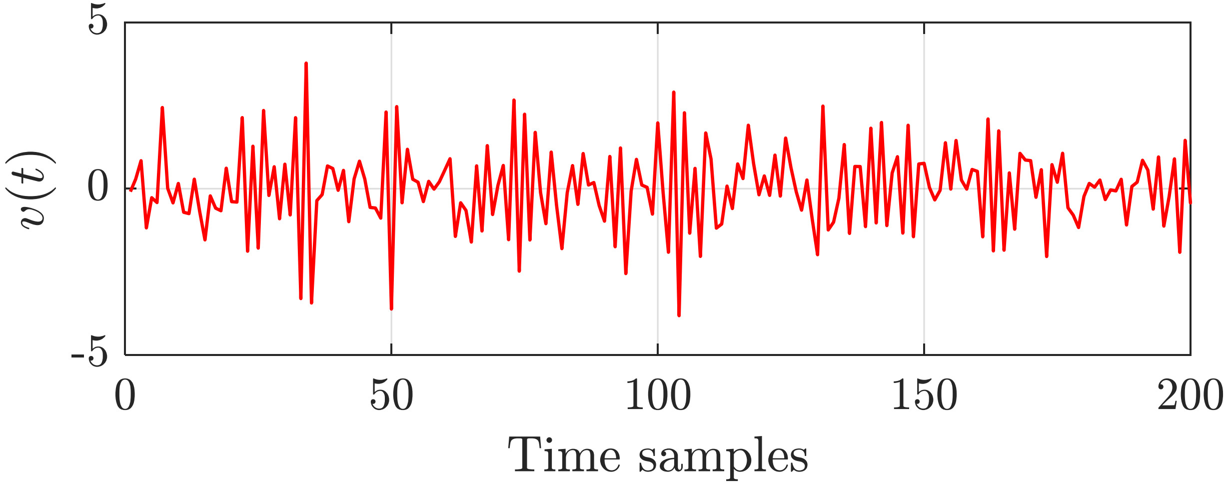


Esempio: processo «alternante»

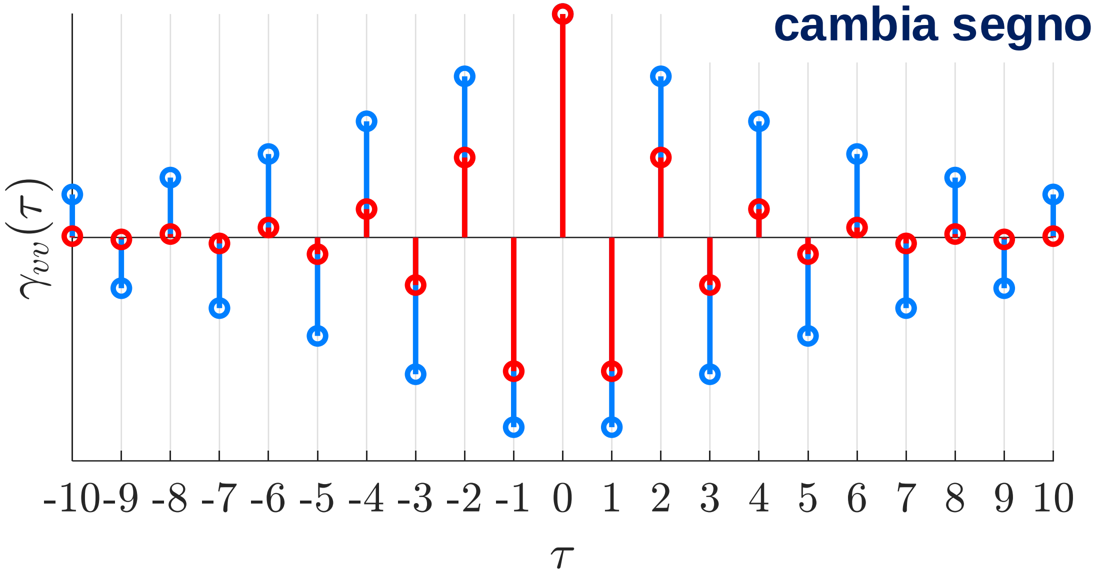
Pss a media zero

Andamento irregolare

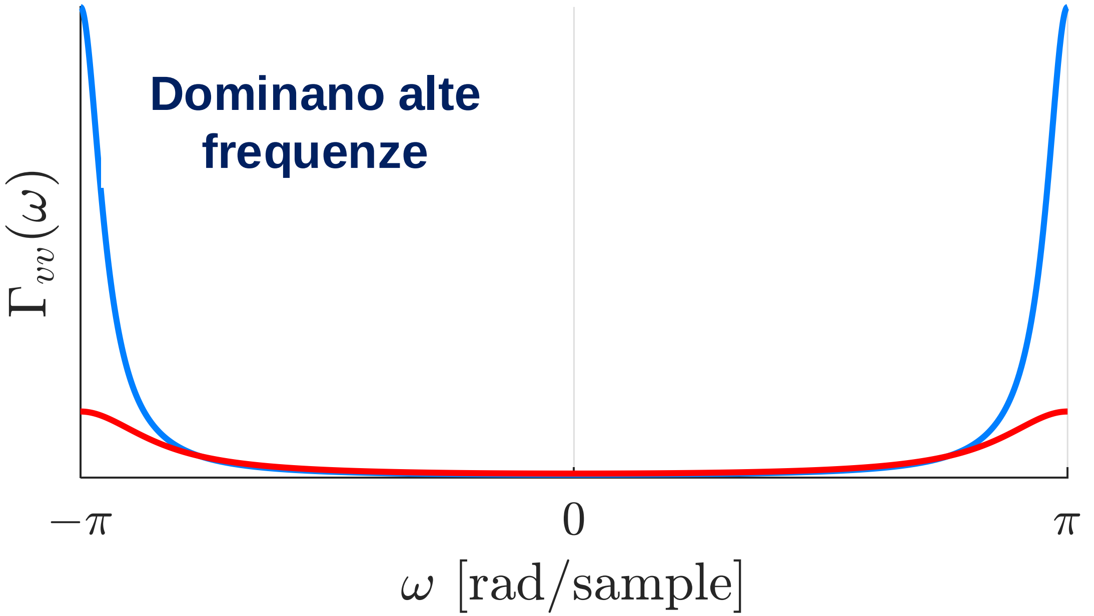




Autocovarianza cambia segno



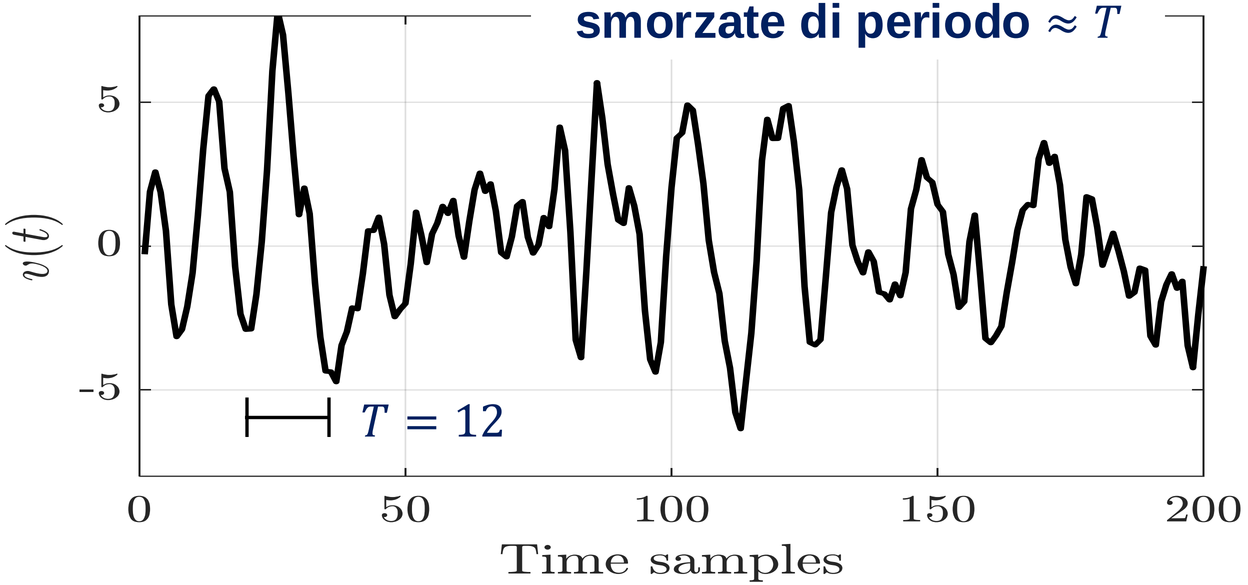
Dominano alte frequenze

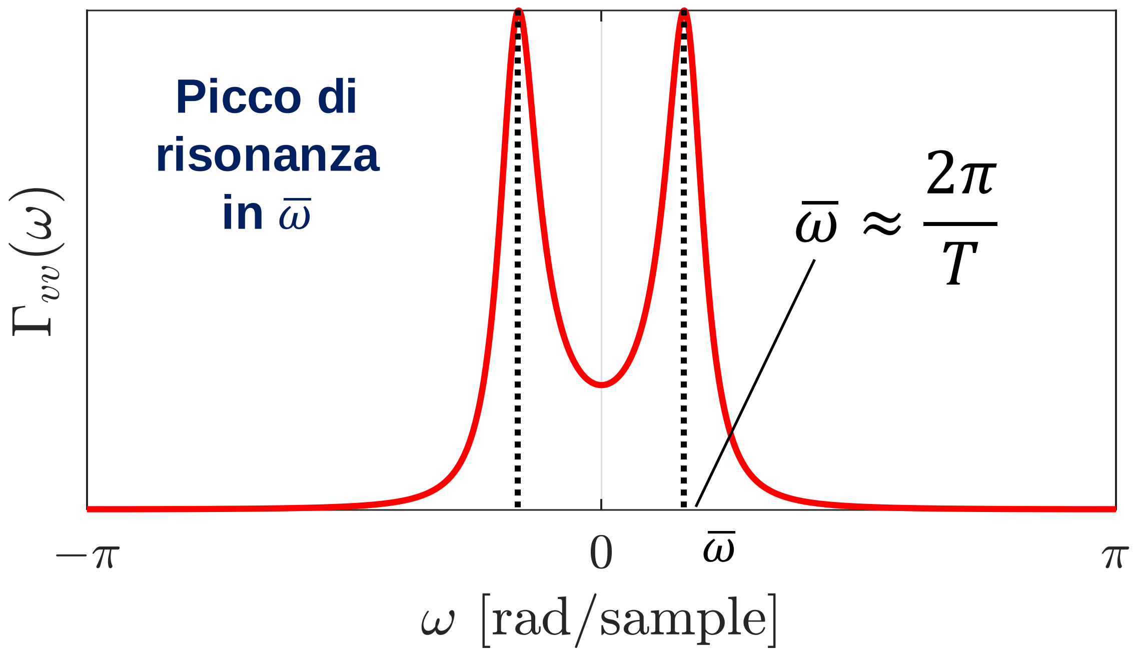


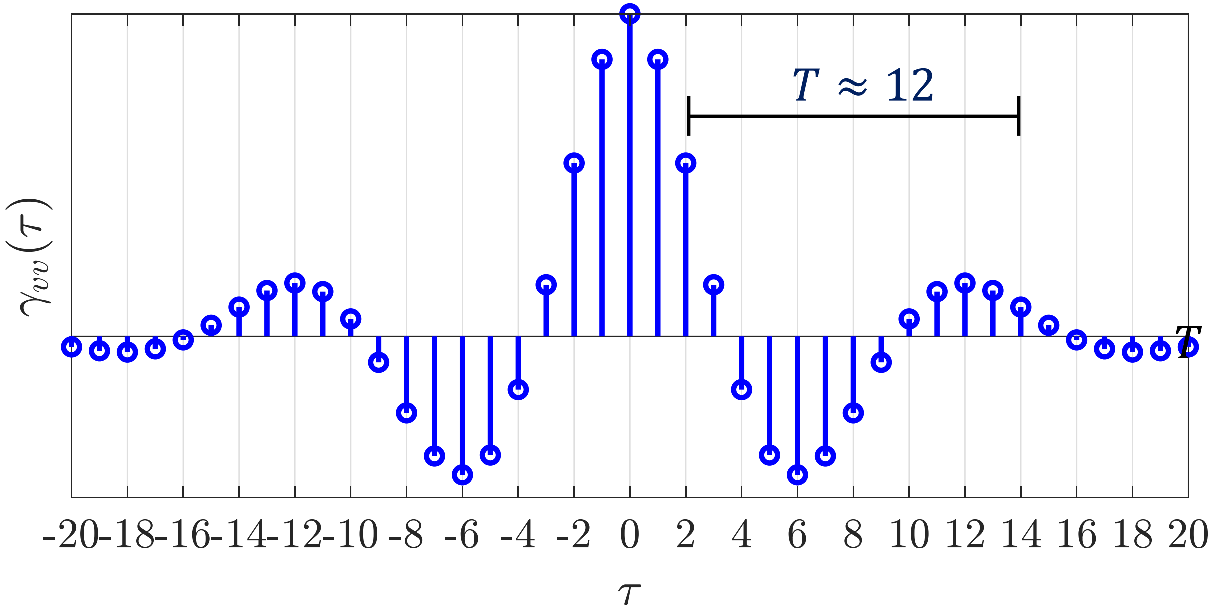
Esempio: processo con frequenza dominante

Pss a media zero

Oscillazioni (irregolari) smorzate di periodo $\approx T$







Densità cross-spettrale

Dati due processi stocastici stazionari $v(t,s)$ e $x(t,s)$, definiamo la **densità di potenza cross-spettrale** (e la relativa trasformata $\mathcal{Z}$) come:

$$\Gamma_{vx}(\omega) \equiv \mathcal{F}[\gamma_{vx}(\tau)]$$

$$\Phi_{vx}(z) \equiv \mathcal{Z}[\gamma_{vx}(\tau)]$$

Proprietà

- $\gamma_{vx}(\tau) = \gamma_{xv}(-\tau)$
- $\Phi_{vx}(z) = \Phi_{xv}(z^{-1})$
- $\Gamma_{vx}(\omega) = \Gamma_{xv}(-\omega)$

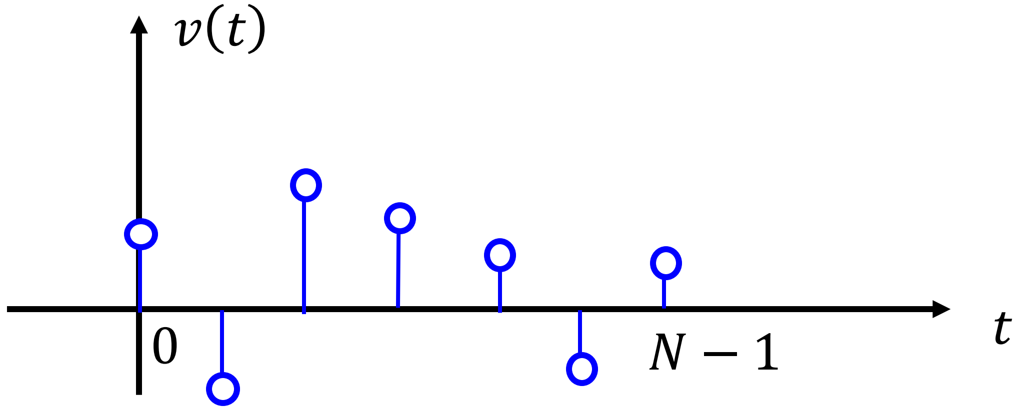
Outline

1. Introduzione alla stima di modelli dinamici
2. Processi stocastici
3. Processi stocastici stazionari
4. Momenti temporali ed ergodicità
5. Trasformata $\mathcal{Z}$ e trasformata di Fourier
6. Densità spettrale di potenza
7. **Stima spettrale**
8. Sistemi dinamici LTI discreti deterministici
9. Sistemi dinamici LTI discreti stocastici

Stima delle proprietà di un pss ergodico

Ipotesi:

- $v(t)$ processo stazionario **ergodico**
- $\mathbb{E}[v(t)] = m_v = 0$, infatti, se $m_v \neq 0$, posso stimare $\hat{m}_v$ tramite una media temporale (grazie all'ergodicità) e analizzare $v(t) - \hat{m}_v$
- N dati disponibili: **una sola realizzazione** del processo $v(t)$, $0 \leq t \leq N-1$



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO
Dipartimento di Ingegneria Gestionale, dell'Informazione e della Produzione

Stima delle proprietà di un pss ergodico

MEDIA (TEMPORALE) CAMPIONARIA

Abbiamo già visto questo stimatore parlando di ergodicità. Possiamo stimare il **valore atteso** m_v di un pss ergodico $v(t)$ come

$$\boxed{\hat{m}_v = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} v(t)}$$

La **correttezza** dello stimatore si dimostra come nel caso di variabili casuali

Stima delle proprietà di un pss ergodico

FUNZIONE DI AUTOCOVARIANZA (TEMPORALE) CAMPIONARIA

Supponiamo che $v(t)$ sia un pss ergodico a media nulla.

Ricordandoci che $\gamma_{vv}(\tau) = \mathbb{E}_s[v(t)v(t+\tau)]$, possiamo stimare **l'autocovarianza** come

$$\hat{\gamma}_{vv}(\tau) = \frac{1}{N-|\tau|} \sum_{t=0}^{N-|\tau|-1} v(t)v(t+|\tau|)\,, \qquad |\tau| < N$$

- Per $\tau = 0$, stimo la varianza del processo
- Uso $|\tau|$ perché la stima è analoga sia per $\tau > 0$ che per $\tau < 0$, data la simmetria di $\gamma_{vv}(\tau)$
- Più τ è grande, meno dati posso usare per la stima

Stima delle proprietà di un pss ergodico

Osservazioni:

- Si dimostra che se $v(t)$ è Gaussiano, $\hat{\gamma}_{vv}(\tau)$ è lo stimatore a massima verosimiglianza

- $\mathbb{E}[\hat{\gamma}_{vv}(\tau)] = \gamma_{vv}(\tau)$, ovvero lo stimatore è **corretto**

- Per τ fissato, lo stimatore è **consistente**, sotto le ipotesi di ergodicità

- Per $\tau \approx N$, si ha che $\mathrm{Var}[\hat{\gamma}_{vv}(\tau)]$ è grande perché ci sono pochi addendi

Per risolvere quest'ultimo problema, possiamo pensare ad uno **stimatore alternativo** (seppur **non corretto**)

Stima delle proprietà di un pss ergodico

FUNZIONE DI AUTOCOVARIANZA (TEMPORALE) CAMPIONARIA – versione alternativa

$$\hat{\gamma}'_{vv}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-|\tau|-1} v(t)v(t+|\tau|), \qquad |\tau| < N$$

Osservazioni:

- $\hat{\gamma}'_{vv}(\tau) = \frac{N-|\tau|}{N} \hat{\gamma}_{vv}(\tau)$
- $\mathbb{E}[\hat{\gamma}'_{vv}(\tau)] = \frac{N-|\tau|}{N} \gamma_{vv}(\tau)$, ovvero lo stimatore è **distorto**, ma **asintoticamente corretto**
- Per τ fissato, lo stimatore è **consistente**, sotto le ipotesi di ergodicità

Stima delle proprietà di un pss ergodico

Studiamo meglio il valore atteso di $\hat{\gamma}'_{vv}(\tau)$, ovvero $\mathbb{E}[\hat{\gamma}_{vv}(\tau)] = \frac{N-|\tau|}{N}\gamma_{vv}(\tau)$

Supponiamo di voler calcolare la stima per $\tau = N-3$, $\tau = N-2$, $\tau = N-1$

$$\begin{cases} \mathbb{E}[\hat{\gamma}'_{vv}(N-3)] = \frac{3}{N}\gamma_{vv}(N-3) \\ \mathbb{E}[\hat{\gamma}'_{vv}(N-2)] = \frac{2}{N}\gamma_{vv}(N-2) \\ \mathbb{E}[\hat{\gamma}'_{vv}(N-1)] = \frac{1}{N}\gamma_{vv}(N-1) \end{cases}$$

Per $\tau \approx N$, il valore atteso dello stimatore viene **«schiacciato verso il basso»** (cosa che non succedeva con lo stimatore corretto $\hat{\gamma}_{vv}(\tau)$

Lo stimatore non corretto $\hat{\gamma}'_{vv}(\tau)$ **peggiora il bias** ma **riduce la varianza** (le stime saranno «per più volte» vicine a valori piccoli. **Meglio tendere a zero** che dare i numeri del lotto.

Inoltre, **per molti processi** si ha che $\lim_{\tau\to+\infty} \gamma_{vv}(\tau) = 0$

Densità spettrale campionaria

Sappiamo che la **densità spettrale di potenza** di un pss $v(t)$ è definita come

$\Gamma_{vv}(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} \gamma_{vv}(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau}$. **Idea:** non conoscendo $\gamma_{vv}(\tau)$, uso $\hat{\gamma}_{vv}(\tau)$ oppure $\hat{\gamma}'_{vv}(\tau)$

Si definisce **periodogramma** il seguente **stimatore** della densità spettrale di potenza

$$\boxed{I_N(\omega) \equiv \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} \hat{\gamma}'_{vv}(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau}}$$

- A differenza di $\Gamma_{vv}(\omega)$, $I_N(\omega)$ è definito solo da $\tau = -(N-1)$ a $\tau = (N-1)$
- Essendo la DTFT di $\hat{\gamma}'_{vv}(\tau)$, $I_N(\omega)$ è una funzione **reale**, **continua**, 2π –**periodica**

Densità spettrale campionaria

Proprietà: si dimostra come il periodogramma $I_N(\omega)$ è proporzionale al quadrato del modulo della DTFT $\mathcal{F}[v(t)]$ della realizzazione misurata del pss $v(t)$

$$I_N(\omega) = \frac{1}{N}\left|V\left(e^{j\omega}\right)\right|^2$$

Per **segnali di durata finita** (ovvero tutti quelli che possiamo avere a disposizione in pratica), la **DFT** è un campionamento della **DTFT**. Per cui, «accontentandomi» di un campionamento del periodogramma in una griglia di frequenze, posso calcolare

$$\boxed{\check{I}_N(k) = \frac{1}{N}\left|V\left(e^{j\cdot k\cdot 2\pi/N}\right)\right|^2, \qquad k = 0,1,\dots,N-1}$$

In Matlab:

```
abs(fft(v)).^2
```

Densità spettrale campionaria

Osservazioni

- Lo stimatore $I_N(\omega)$ **non è corretto**, ma è **asintoticamente corretto**. Infatti

$$\mathbb{E}[I_N(\omega)] = \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} \mathbb{E}[\hat{\gamma}'_{vv}(\tau)] \cdot e^{-j\omega\tau} = \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} \frac{N-|\tau|}{N} \gamma_{vv}(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} \neq \Gamma_{vv}(\tau)$$

Notiamo che non lo sarebbe stato neanche se avessi usato $\hat{\gamma}_{vv}(\tau)$ al posto di $\hat{\gamma}'_{vv}(\tau)$

- Si dimostra come $\mathrm{Var}[I_N(\omega)] \approx \Gamma_{vv}^2(\omega)$. Per cui, la varianza dello stimatore non decresce al crescere di N. Lo stimatore **non è consistente**

- Per $N \to +\infty$, $I_N(\omega_1)$ e $I_N(\omega_2)$ tendono a **diventare incorrelati**, $\forall \omega_1 \neq \omega_2$

Questo ci dà l'idea che il periodogramma sia una funzione «poco continua», poiché la stima in una frequenza può non essere simile alla stima in una frequenza anche adiacente (una sorta di «rumore bianco in frequenza»

Stimatori della densità spettrali «smussati»

Lo stimatore dello spettro non gode di buone proprietà. Un metodo semplice ma efficace per migliorare la stima (riducendone la varianza a scapito del bias) è quello di **«regolarizzare»** la stima facendo la **media di diversi periodogrammi**

Metodo di Bartlett: Ipotizziamo di avere N dati a disposizione

- dividiamo questi dati in $K = N/M$ parti, dove M è la lunghezza di ogni porzione di dati
- calcoliamo il periodogramma $I_{M,K}^{[i]}(\omega)$ per ciascuna parte $i = 1,2,\dots,K$
- facciamo la media dei periodogrammi, ottenendo la stima

$$\boxed{\bar{I}_{M,K}(\omega) = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K} I_{M,K}^{[i]}(\omega)}$$

Stimatori della densità spettrali «smussati»

Osservazioni

- Se $\gamma_{vv}(\tau) \to 0$ in modo sufficientemente rapido, i K periodogrammi sono **circa indipendenti**.

  In questo caso, si ha che $\mathrm{Var}\left[\bar{I}_{M,K}(\omega)\right] = O\left(\frac{1}{K}\Gamma_{vv}^2(\omega)\right)$

- Il $\mathrm{Bias}\left[\bar{I}_{M,K}(\omega)\right]$ è maggiore rispetto a quello di $I_N(\omega)$. Questo comporta una maggior **perdita di risoluzione in frequenza**

- Se so che $\Gamma_{vv}(\omega)$ ha **picchi molto stretti**, devo usare M **grande** in modo da avere abbastanza risoluzione in frequenza (un po' come avviene con la DFT)

Esempio: stima spettrale

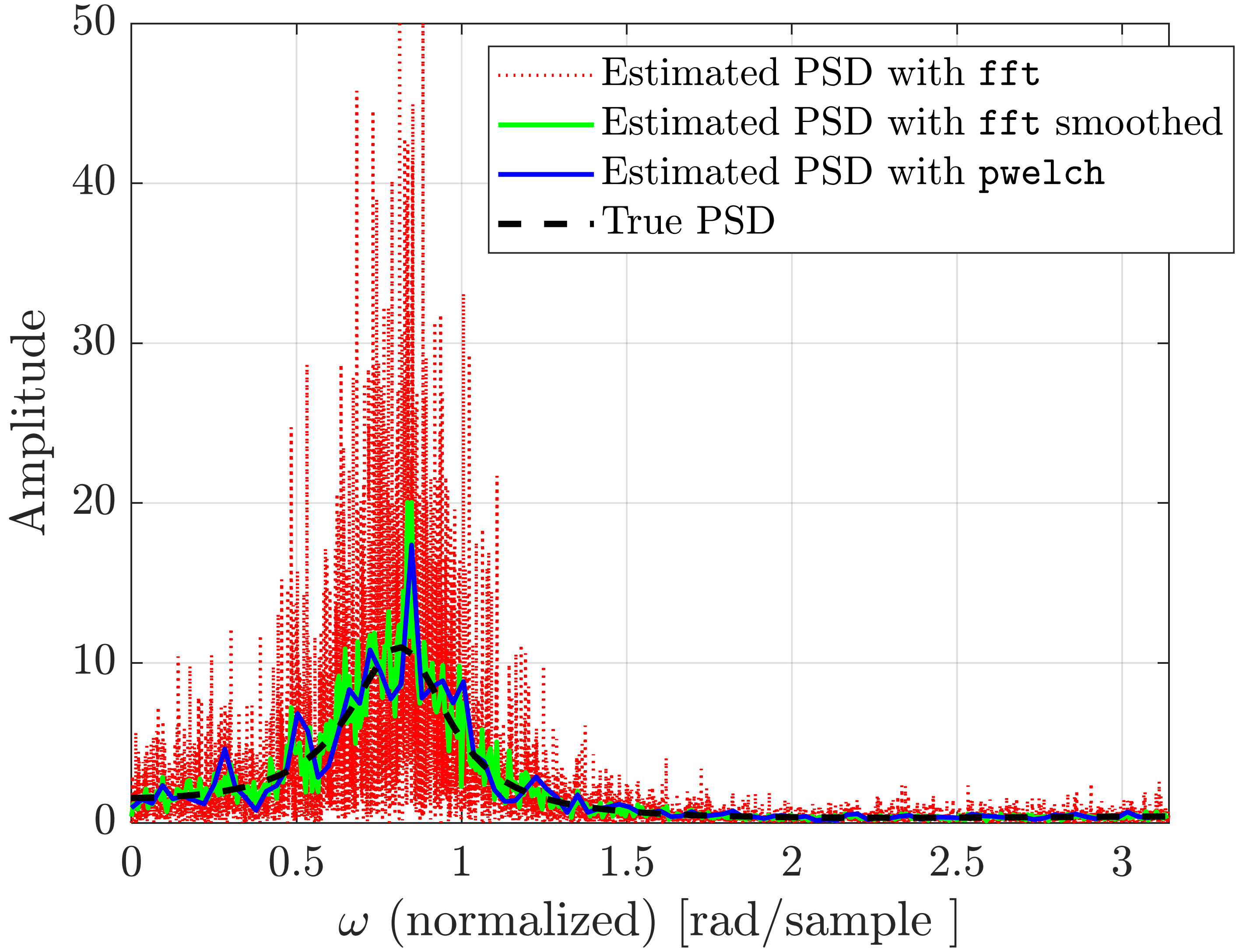
Consideriamo il seguente pss:

$$y(t) = 0.7y(t-1) + 0.2y(t-2) + \\ +0.3y(t-3) + e(t)$$

$$e(t) \sim \mathrm{WN}(0,1)$$

Con $T_s = 0.02\ s$, $N = 10000$ dati

Dividiamo i dati in $K = 10$ folds per stimare la densità spettrale di potenza con il metodo di Bartlett



Outline

1. Introduzione alla stima di modelli dinamici
2. Processi stocastici
3. Processi stocastici stazionari
4. Momenti temporali ed ergodicità
5. Trasformata $\mathcal{Z}$ e trasformata di Fourier
6. Densità spettrale di potenza
7. Stima spettrale
8. **Sistemi dinamici LTI discreti deterministici**
9. Sistemi dinamici LTI discreti stocastici

Sistemi dinamici LTI discreti deterministici

L'obiettivo di questa seconda parte del corso è identificare (stimare) un modello di un **sistema dinamico**. Ci concentreremo su sitemi **Lineari Tempo Invarianti (LTI)** a tempo discreto, **Single Input Single Output (SISO)**

Un sistema dinamico può essere rappresentato in **spazio di stato** oppure in forma **ingresso\uscita** (funzione di trasferimento). Ci concentremo sulla rappresentazione ingresso\uscita: l'obiettivo è quindi quello di **stimare la funzione di trasferimento**

SPAZIO DI STATO

$$\begin{cases} \underset{n\times 1}{\boldsymbol{x}(t+1)} = \underset{n\times n}{A} \cdot \boldsymbol{x}(t) + \underset{n\times 1}{B} \cdot \underset{1\times 1}{u(t)} \\ \underset{1\times 1}{y(t)} = \underset{1\times n}{C} \cdot \boldsymbol{x}(t) + \underset{1\times 1}{D} \cdot u(t) \end{cases}$$

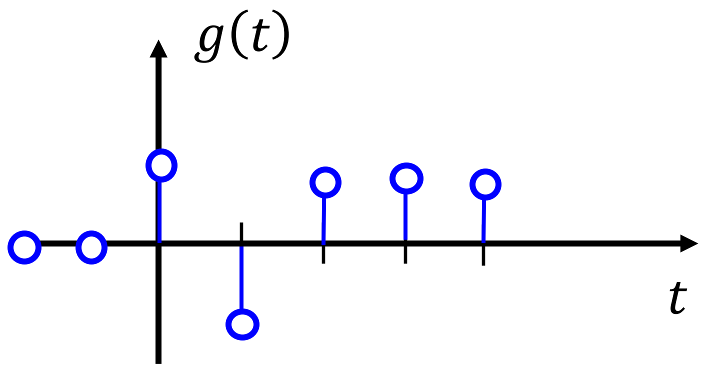
FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z)$$

Sistemi dinamici LTI discreti deterministici

<u>Definizione</u>: un **sistema dinamico** (causale) è LTI se la sua uscita $y(t)$ può essere espressa tramite la **convoluzione** (discreta, causale) dell'input $u(t)$ e della **risposta all'impulso** $g(t)$ del sistema

$$y(t) = \sum_{i=-\infty}^{t} g(t-i)u(t) = \sum_{j=0}^{\infty} g(j)u(t-j)$$

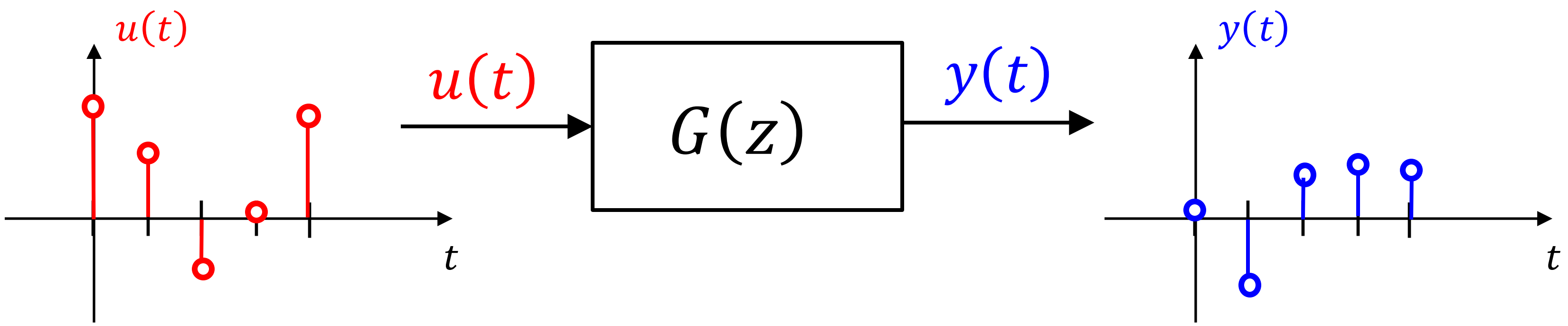


Facciamo l'ipotesi che $g(t) = 0$ per $t < 0$. Questa è un'ipotesi di **causalità**, che implica come l'ingresso $u(t)$ può solo influenzare l'uscita ad istanti $s \geq t$

Un primo modo per identificare un sistema dinamico è quello di applicare un impulso e stimare $g(t)$. Però, non è sempre possibile dare un ingresso impulsivo

Funzione di trasferimento

Consideriamo un sistema LTI SISO discreto. La **funzione di trasferimento** $G(z)$ descrive la relazione tra il segnale di ingresso $u(t)$ e il segnale di uscita $y(t)$, quando $\boldsymbol{x}(0) = \mathbf{0}$



È possibile esprimere $G(z)$ come il rapporto tra la trasformata $\mathcal{Z}$ di $u(t)$ e di $y(t)$, che equivale alla trasformata $\mathcal{Z}$ della risposta all'impulso $g(t)$

$$G(z) = \sum_{t=0}^{+\infty} g(t) \cdot z^{-t} \quad \Rightarrow \quad G(z) = \frac{\mathcal{Z}[y(t)]}{\mathcal{Z}[u(t)]} = \frac{Y(z)}{U(z)} \quad \Rightarrow$$

Quindi, $G(z)$ sarà il rapporto di due polinomi razionali in z

Funzione di trasferimento e forma ricorsiva

Supponiamo di avere la seguente funzione di trasferimento

$$G(z) = \frac{3z - 0.3}{z^2 - 0.3z - 0.1}$$

Possiamo scrivere

$$Y(z) = G(z)U(z) = \frac{3z - 0.3}{z^2 - 0.3z - 0.1}U(z) \Rightarrow Y(z) = \frac{3z^{-1} - 0.3z^{-2}}{1 - 0.3z^{-1} - 0.1z^{-2}}U(z)$$

$$Y(z)[1 - 0.3z^{-1} - 0.1z^{-2}] = [3z^{-1} - 0.3z^{-2}]U(z) \Rightarrow$$

$$Y(z) - 0.3z^{-1} \cdot Y(z) - 0.1z^{-2} \cdot Y(z) = 3z^{-1} \cdot U(z) - 0.3z^{-2} \cdot U(z) \xrightarrow{\text{Antitrasformando}}$$

$$\boxed{y(t) = 0.3y(t-1) + 0.1y(t-2) + 3u(t-1) - 0.3u(t-2)}$$

Funzione di trasferimento e forma ricorsiva

Nota: nel seguito, faremo uso di un piccolo abuso di notazione, scrivendo

$$y(t) = G(z)u(t) = \frac{3z - 0.3}{z^2 - 0.3z - 0.1} u(t)$$

Questo ci permetterà di «passare velocemente» dalla $G(z)$ alla rappresentazione ricorsiva

$$y(t) - 0.3z^{-1} \cdot y(t) - 0.1z^{-2} \cdot y(t) = 3z^{-1} \cdot u(t) - 0.3z^{-2} \cdot u(t)$$

$$\boxed{y(t) = 0.3y(t-1) + 0.1y(t-2) + 3u(t-1) - 0.3u(t-2)}$$

Rappresentazione dei sistemi LTI discreti

Riassumendo, possiamo rappresentare un sistema dinamico lineare LTI come

1) Spazio di stato

$$\begin{cases} x_1(t+1) = 0.1x_1(t) + 0.4x_2(t) + u(t) \\ x_2(t+1) = 0.3x_2(t) + 0.2x_2(t) \\ \quad\quad y(t) = 3x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{C(zI_n - A)^{-1}B + D}$$

$$\xleftarrow{\text{Realizzazione}}$$

2) Funzione di trasferimento

$$G(z) = \frac{3z^{-1} - 0.3z^{-2}}{1 - 0.3z^{-1} - 0.1z^{-2}}$$

3) Forma ricorsiva (o di filtraggio)

$$y(t) = 0.3y(t-1) + 0.1y(t-2) + 3u(t-1) - 0.3u(t-2)$$

Lo spazio di stato è la rappresentazione più completa. La forma della funzione di trasferimento rappresenta solo gli stati che sono raggiungibili\osservabili dai segnali di ingresso\uscita, rispettivamente

Zeri e poli della funzione di trasferimento

I polinomi della funzione di trasferimento descrivono le proprietà del sistema dinamico

- **Zeri:** radici del numeratore
- **Poli:** radici del denominatore

$$G(z) = \frac{\boxed{3z - 0.3}}{\boxed{z^2 - 0.3z - 0.1}}$$

Zeri: radici del numeratore

Poli: radici del denominatore

Definizione: Un sistema dinamico LTI a tempo discreto si dice **asintoticamente stabile** se i suoi **poli sono in modulo minore di 1**

$z^2 - 0.3z - 0.1 \rightarrow \text{Poles: } z_1 = 0.5;\ z_2 = -0.2$ $\quad |z_1| < 1 \ \&\& \ |z_2| < 1 \rightarrow$ **Sistema asintoticamente stabile**

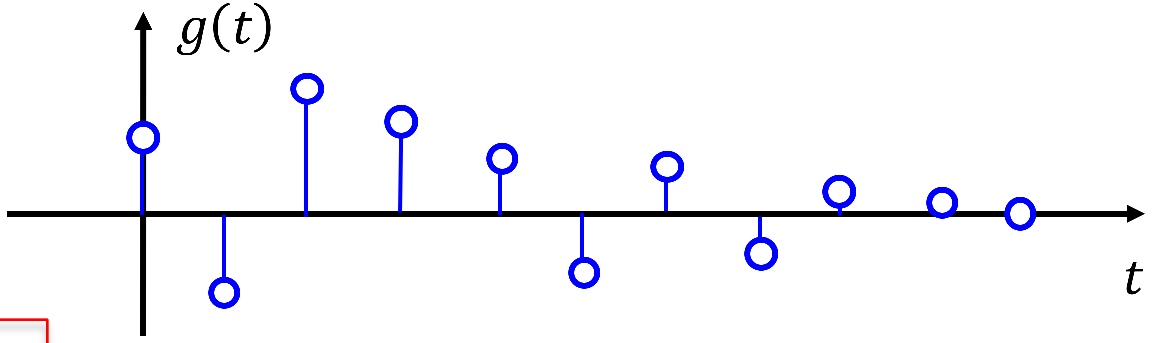
La stabilità asintotica implica che l'output del sistema abbia un'«energia limitata», dato un input di «energia limitata»

Se un sistema è in uno stato di equilibrio stabile, vi tornerà dopo una perturbazione

Guadagno

Una conseguenza della **asintotica stabilità** è che la **risposta all'impulso tende esponenzialmente a zero** per $t \to +\infty$

$$\lim_{t\to+\infty} g(t) = 0$$

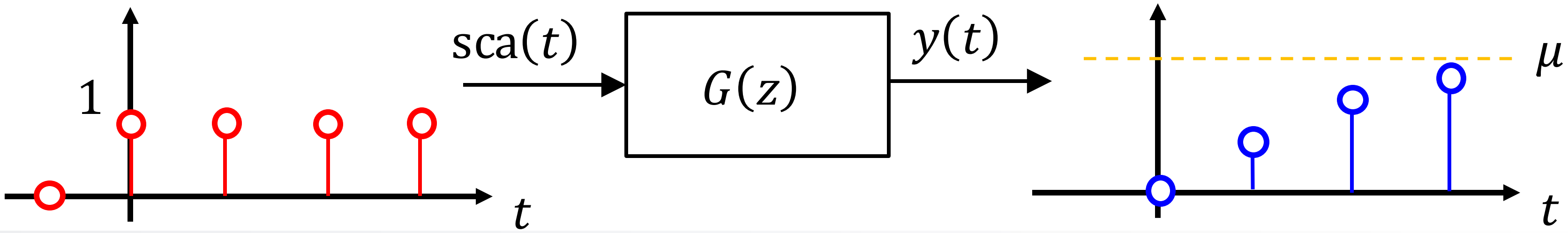


Guadagno del sistema: $\mu = \sum_{t=0}^{+\infty} g(t) = G(1)$

«Area» della risposta impulsiva

Proprietà: se applico $u(t) = \mathrm{sca}(t)$, e il sistema è asintoticamente stabile $(\mu < \infty)$, allora

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \mu$$



Risposta in frequenza

Consideriamo un'onda sinusoidale campionata con periodo di campionamento T_s. I valori campionati sono:

$$s(t) = A \cdot \sin(2\pi f_0 \cdot T_s \cdot t + \varphi)$$

Ampiezza   Frequenza   Fase

Con periodo di campionamento T_s, la **frequenza di Nyquist** è:

$$f_{Nyq} = \frac{f_s}{2} = \frac{1}{2 \cdot T_s}$$

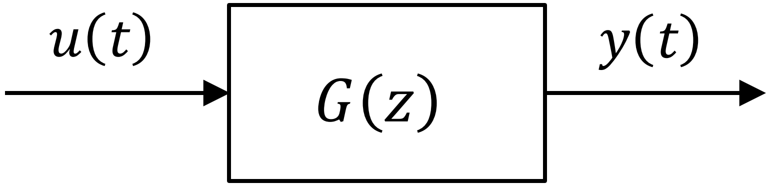
Per poter campionare correttamente è necessario utilizzare una frequenza di campionamento $f_s = 1/T_s$ «sufficientemente alta». La frequenza sinusoidale deve rispettare il **criterio di Nyquist (teorema di campionamento)**

Risposta in frequenza di sistemi LTI

Sia $G(z)$ la funzione di trasferimento di un sistema dinamico **asintoticamente stabile**.

Consideriamo un input sinusoidale del tipo $u(t) = A \cdot \sin(2\pi T_s t \cdot f + \varphi)$

Il segnale di output sarà: $y(t) = \tilde{y}(t) + \bar{A} \cdot \sin(2\pi T_s t \cdot f + \bar{\varphi})$



tale che:

Transitorio

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{y}(t) = 0$$

Effetto del guadagno del sistema

$$\bar{A} = A \cdot \left|G\left(e^{j\cdot 2\pi T_s \cdot f}\right)\right|$$

Effetto dello sfasamento indotto dal sistema

$$\bar{\varphi} = \varphi + \angle G\left(e^{j\cdot 2\pi T_s \cdot f}\right)$$

Risposta in frequenza di sistemi LTI

Valutando $G(z)$ in $z = e^{j\omega T_s}$ si ottiene la **risposta in frequenza (FRF)** del sistema

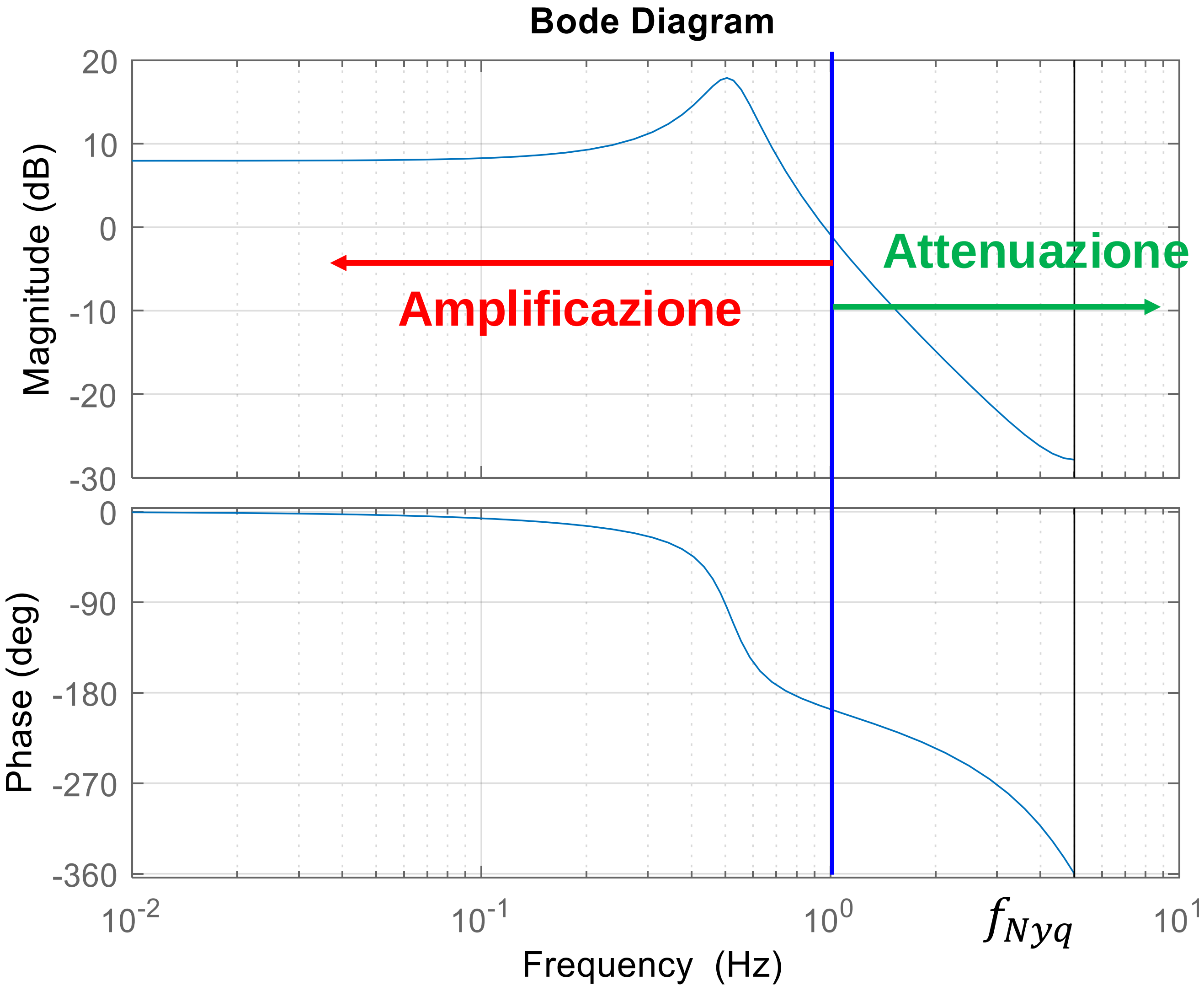
Modulo della FRF

$$\left|G\left(e^{j\omega}\right)\right|$$

Rendiamo implicito T_s per semplicità

Fase della FRF

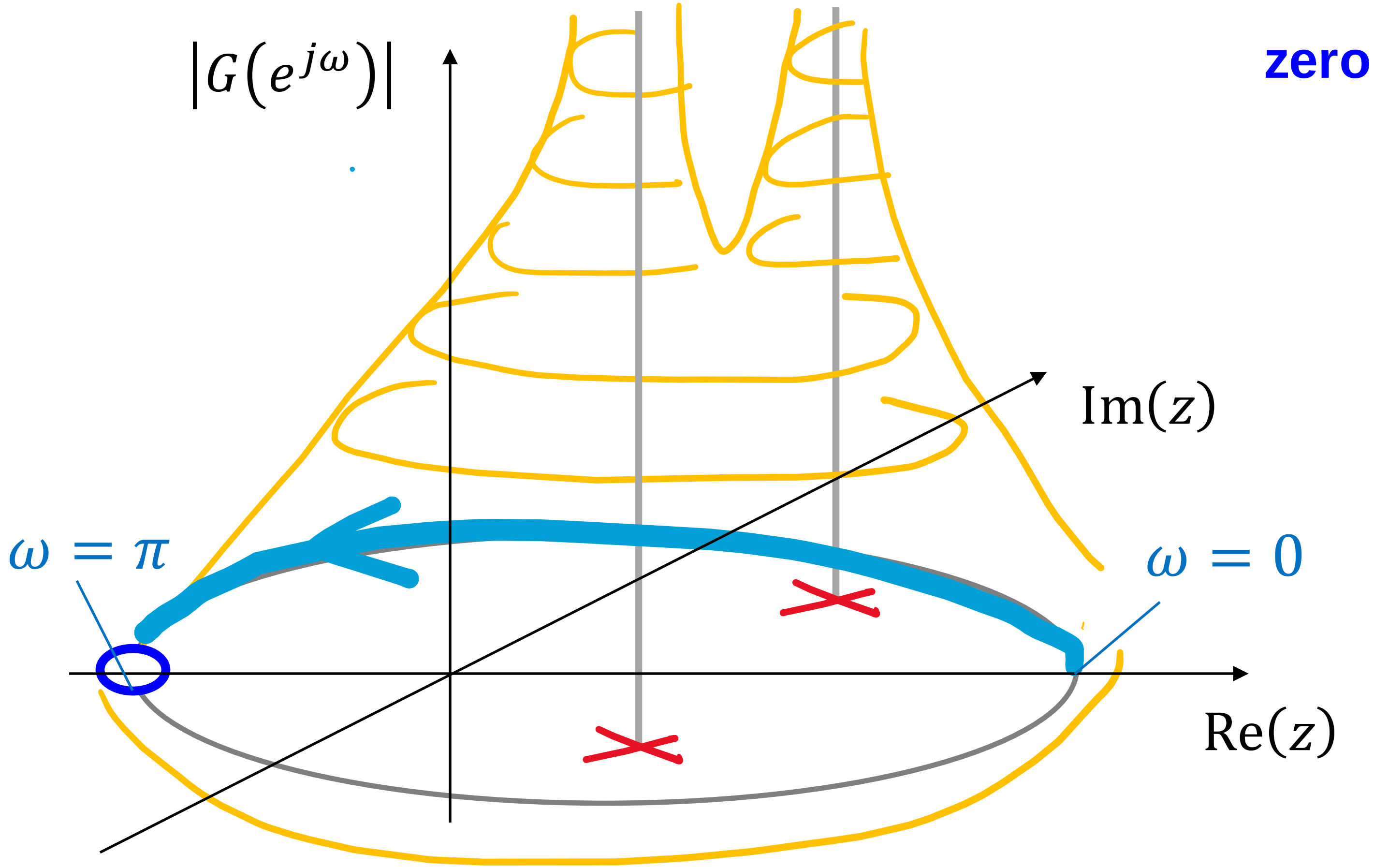
$$\angle G\left(e^{j\omega}\right)$$

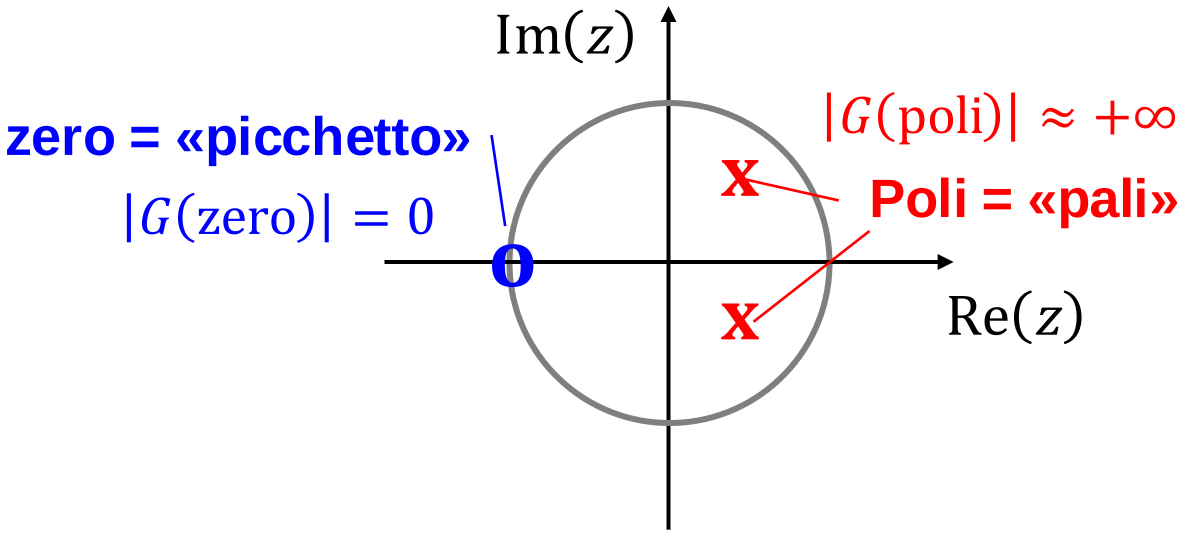


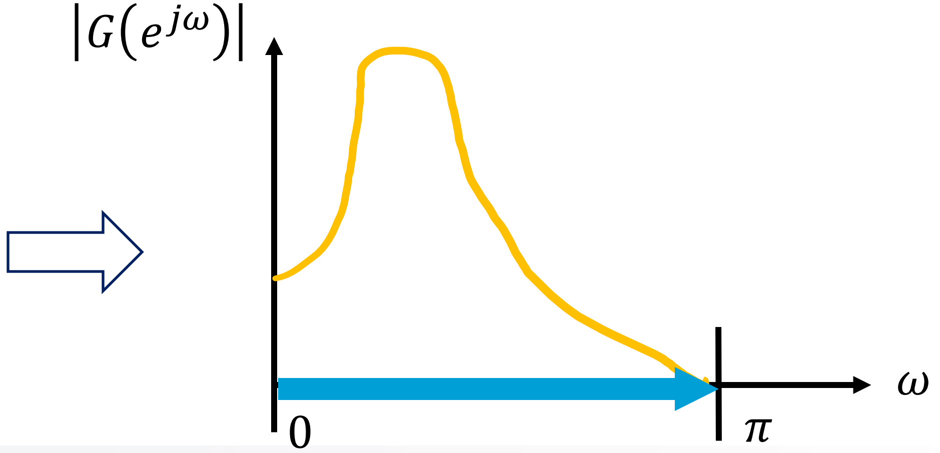
Risposta in frequenza di sistemi LTI

Se conosco la posizione dei **poli** e degli **zeri** posso farmi un'idea della forma di $|G(e^{j\omega})|$

Similitudine del **«tendone del circo»**





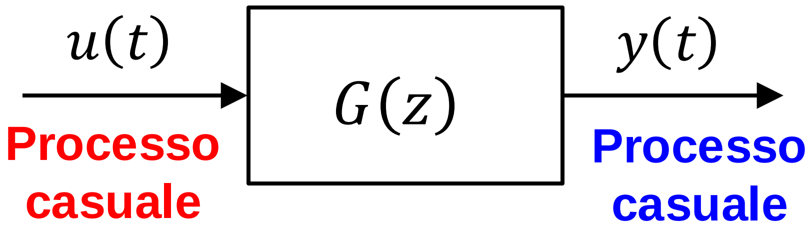


Outline

1. Introduzione alla stima di modelli dinamici
2. Processi stocastici
3. Processi stocastici stazionari
4. Momenti temporali ed ergodicità
5. Trasformata $\mathcal{Z}$ e trasformata di Fourier
6. Densità spettrale di potenza
7. Stima spettrale
8. Sistemi dinamici LTI discreti deterministici
9. **Sistemi dinamici LTI discreti stocastici**

Sistemi LTI discreti con ingressi stocastici

Supponiamo che $u(t)$ sia un processo stazionario in senso debole, con media m_u e autocovarianza $\gamma_{uu}(\tau)$, e $G(z)$ una funzione di trasferimento razionale fratta, asintoticamente stabile con guadagno μ



Quali sono le proprietà di $y(t)$?

VALORE ATTESO $$\mathbb{E}[y(t)] = \sum_{i=0}^{+\infty} g(i)\mathbb{E}[u(t-i)] = G(1) \cdot m_u$$

$$= \mu \cdot m_u$$

Il valore atteso di $y(t)$ non dipende da t!

Sistemi LTI discreti con ingressi stocastici

AUTOCOVARIANZA (per semplicità consideriamo $m_u = 0$, dato che l'espressione dell'autocovarianza non dipende dalla media del processo)

$$y(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} g(i)u(t-i) \quad \Rightarrow \quad y(t+\tau) = \sum_{i=0}^{+\infty} g(i)u(t-i+\tau)$$

$\gamma_{uu}(\tau)$ non dipende da t perché $u(t)$ è stazionario per ipotesi

applico $\mathbb{E}[\quad]$

$$u(t)y(t+\tau) = \sum_{i=0}^{+\infty} u(t) \cdot g(i)u(t-i+\tau) \quad \Rightarrow \quad \gamma_{uy}(t,t+\tau) = \sum_{i=0}^{+\infty} g(i)\gamma_{uu}(t,t-i+\tau)$$

$\Rightarrow$

$\gamma_{uy}(\tau)$ non dipende da t

$$\boxed{\gamma_{uy}(\tau) = \sum_{i=0}^{+\infty} g(i)\gamma_{uu}(\tau-i)}$$

$$\boxed{\Gamma_{uy}(\omega) = G(e^{j\omega})\Gamma_{uu}(\omega)}$$

Sistemi LTI discreti con ingressi stocastici

Analogamente a prima, si ricava che

$\gamma_{yu}(\tau)$Non dipende da t, dato che neanche $\gamma_{uy}(\tau)$ dipende da t (si veda slide 24)

$$y(t)y(t+\tau) = \sum_{i=0}^{+\infty} y(t)\cdot g(i)u(t-i+\tau) \quad \xRightarrow{\text{applico } \mathbb{E}[\quad]} \quad \gamma_{yy}(t,t+\tau) = \sum_{i=0}^{+\infty} g(i)\gamma_{yu}(t,t-i+\tau)$$

$$\boxed{\gamma_{yy}(\tau) = \sum_{i=0}^{+\infty} g(i)\gamma_{yu}(\tau-i)}$$

$$\boxed{\Gamma_{yy}(\omega) = G\left(e^{j\omega}\right)\Gamma_{yu}(\omega)}$$

La funzione di autocovarianza di $y(t)$non dipende da t!

Sistemi LTI discreti con ingressi stocastici

Teorema Sia $u(t)$ è un processo stocastico **stazionario** che alimenta un sistema dinamico **asintoticamente stabile**. Allora, anche $y(t)$ è un processo stocastico **stazionario**

Osservazioni

- Nella pratica, $u(t)$ viene applicato dall'istante $t = 0$ e non da $t = -\infty$, per cui $y(t)$ sarà stazionario **dopo un transitorio**

Questa è una condizione **necessaria** e **sufficiente**. A **regime**, per ogni condizione iniziale, $y(t)$ è un **pss** se valgono:

1. $u(t)$ è un pss
2. $G(z)$ è asintoticamente stabile

Densità spettrale di potenza dell'uscita

Teorema

$$\boxed{\Gamma_{yy}(\omega) = \left|G\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 \cdot \Gamma_{uu}(\omega)}$$

$$\boxed{\Phi_{yy}(z) = G(z)G(z^{-1}) \cdot \Phi_{uu}(z)}$$

Dimostrazione

slide 69 slide 98

$$\Gamma_{yy}(\omega) = G\left(e^{j\omega}\right)\Gamma_{yu}(\omega) \quad = G\left(e^{j\omega}\right)\Gamma_{uy}(-\omega) \quad = G\left(e^{j\omega}\right)G\left(e^{-j\omega}\right) \cdot \Gamma_{uu}(-\omega)$$

Complesso coniugato

$$= G\left(e^{j\omega}\right)G\left(e^{j\omega}\right)^* \cdot \Gamma_{uu}(\omega) \quad = \left|G\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 \cdot \Gamma_{uu}(\omega)$$

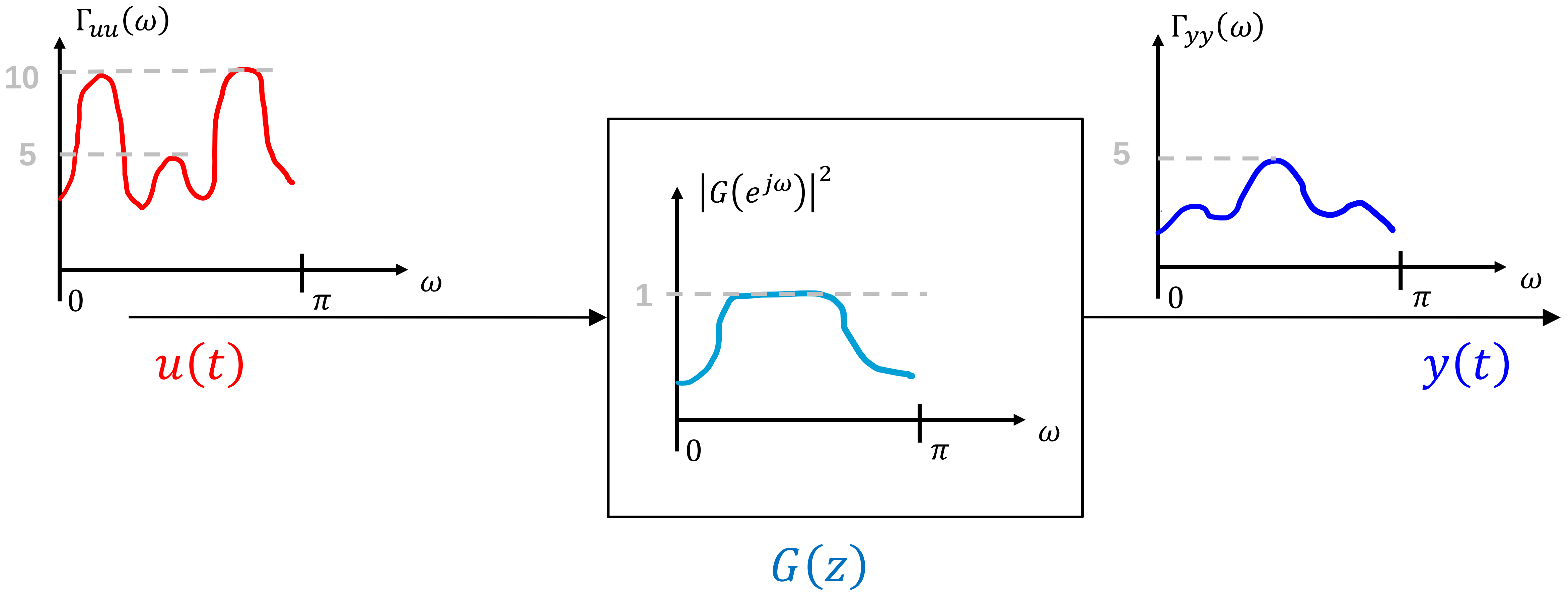
Funzione pari

$$\Phi_{yy}(z) = G(z)\Phi_{yu}(z) \quad = G(z)\Phi_{yu}(z^{-1}) \quad = G(z)G(z^{-1}) \cdot \Phi_{uu}(z)$$

Per la simmetria di $\gamma_{uu}(\tau)$

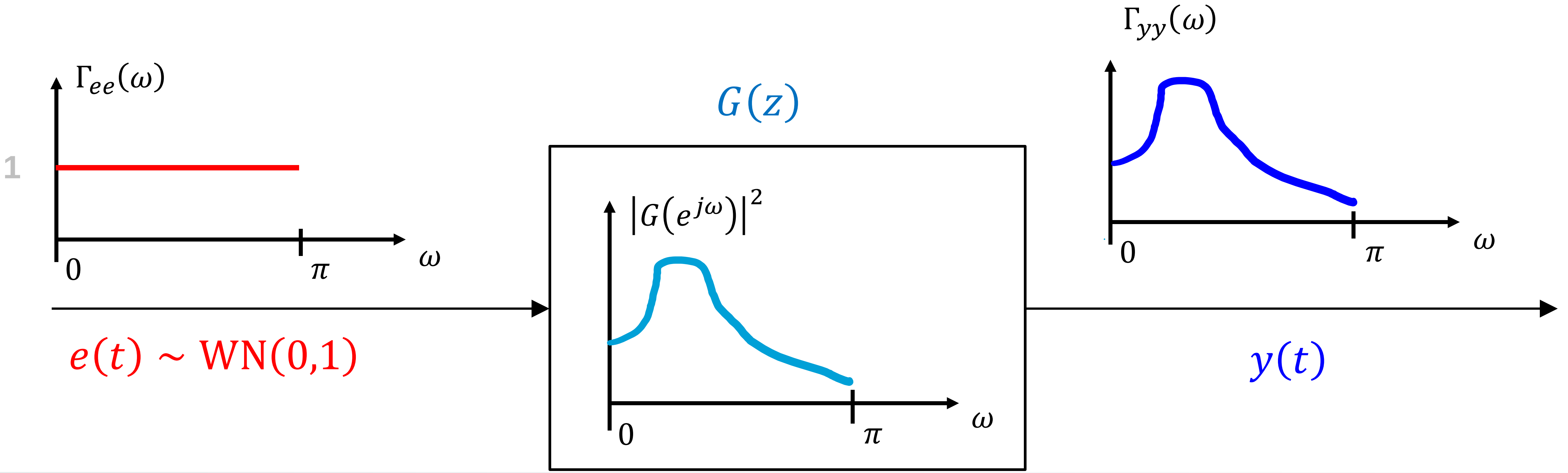
Densità spettrale di potenza dell'uscita

Possiamo dire $\left|G\left(e^{j\omega}\right)\right|^2$ **«modula» la densità spettrale** di $u(t)$, ottenendo $y(t)$



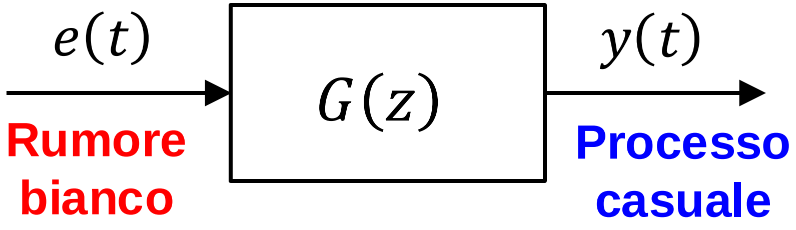
Rappresentazione dinamica di un pss

Il risultato precedente è molto importante! Infatti, ci dice che possiamo **interpretare** un processo stocastico stazionario $y(t)$ come **l'uscita di un sistema dinamico** $G(z)$ **asintoticamente stabile** alimentato da **rumore bianco**, tale che $\Gamma_{yy}(\omega) = \left|G\left(e^{j\omega}\right)\right|^2$



Rappresentazione dinamica di un pss

Ne segue che, data $G(z)$ asintoticamente stabile, è **possibile esprimere un qualunque processo stocastico stazionario** $y(t)$ come **combinazione lineare di infiniti campioni di rumore bianco**



$$y(t) = \sum_{i=-\infty}^{t} g(t-i)e(t) = \boxed{\sum_{j=0}^{\infty} g(j)e(t-j)}$$

Vedremo nella lezione 9 che questo modello si chiama $\mathrm{MA}(\infty)$

$$= g(0)e(t) + g(1)e(t-1) + g(2)e(t-2) + \cdots$$

Rappresentazione dinamica di un pss

Se conosco (oppure stimo) $\Gamma_{yy}(\omega)$, e se riesco a trovare $G(z)$ asintoticamente stabile e causale tale che $\Gamma_{yy}(\omega) = \left|G\left(e^{j\omega}\right)\right|^2$, posso anche **simulare** diverse realizzazioni del processo $y(t)$, generando al computer delle sequenze di variabili casuali incorrelate, che fungono da rumore bianco $e(t)$

Esempio: simulare il vento

Se volessi simulare il vento, allora, dato lo spettro seguente, devo trovare una $G(z)$, «un tendone del circo» tale che abbia il profilo desiderato

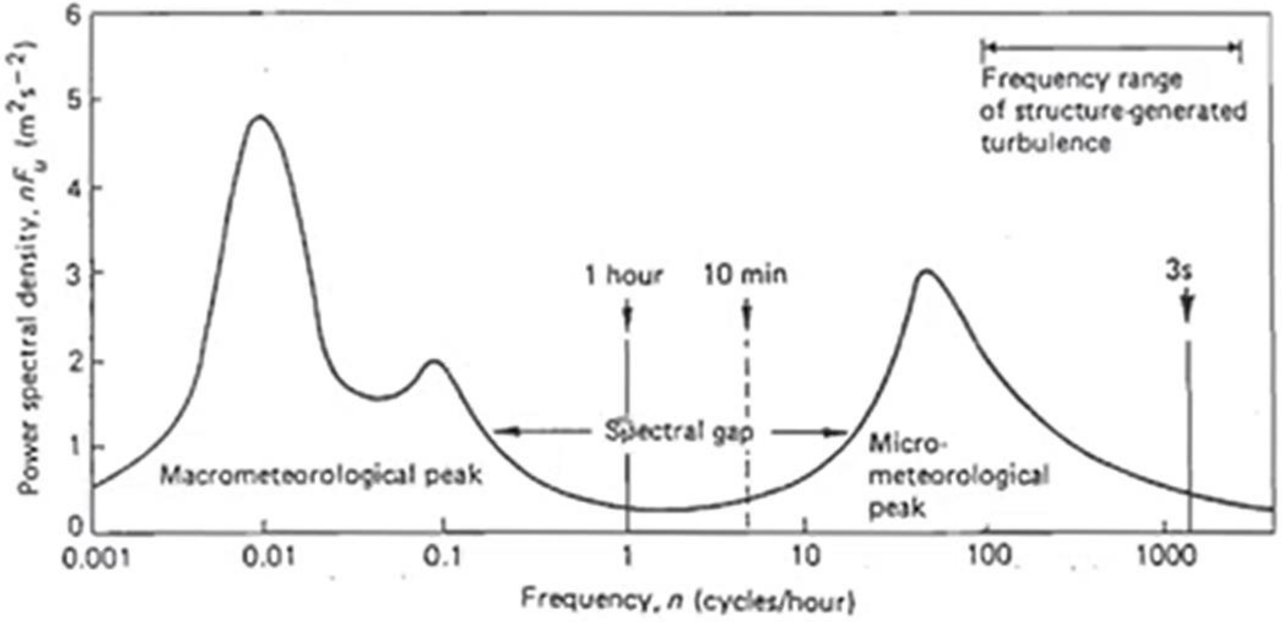
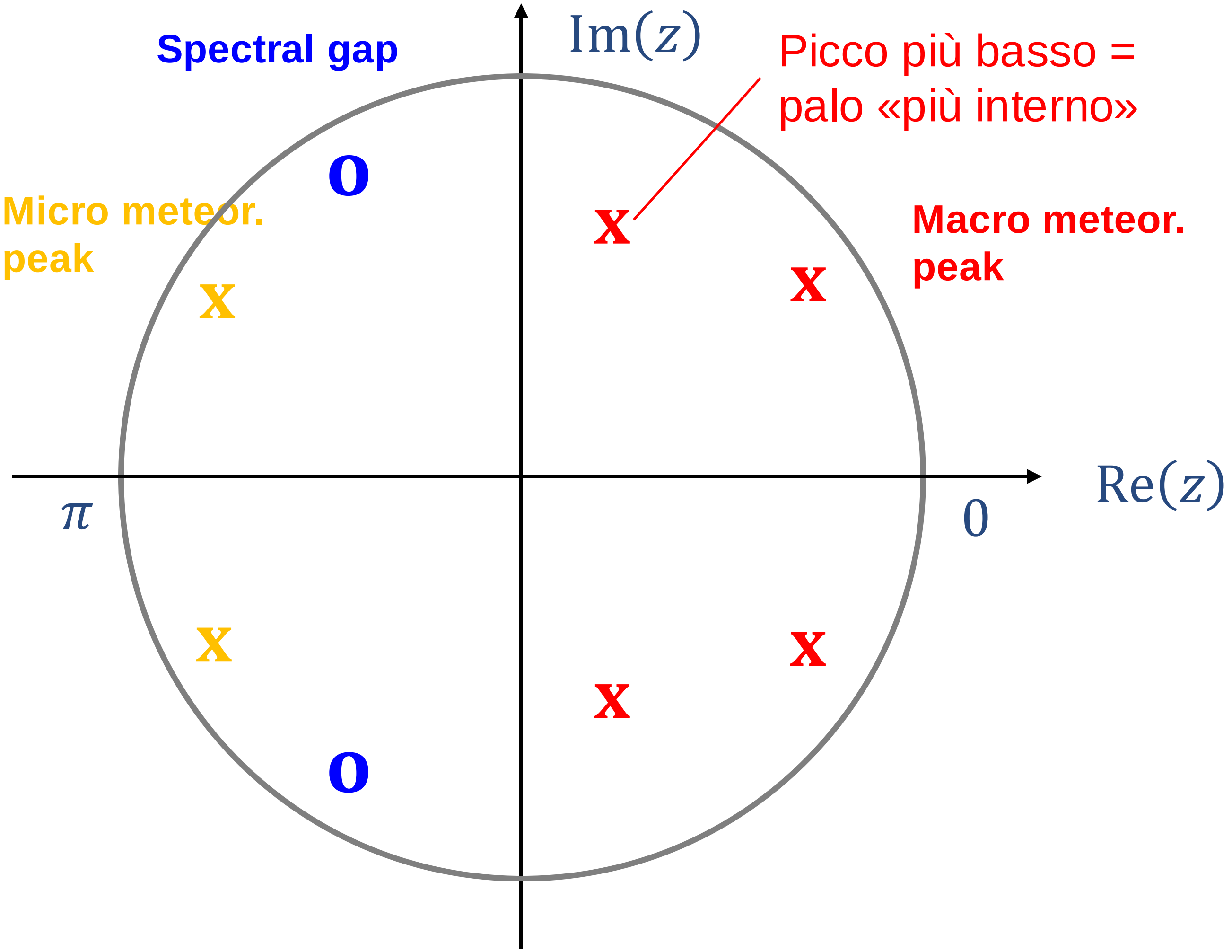
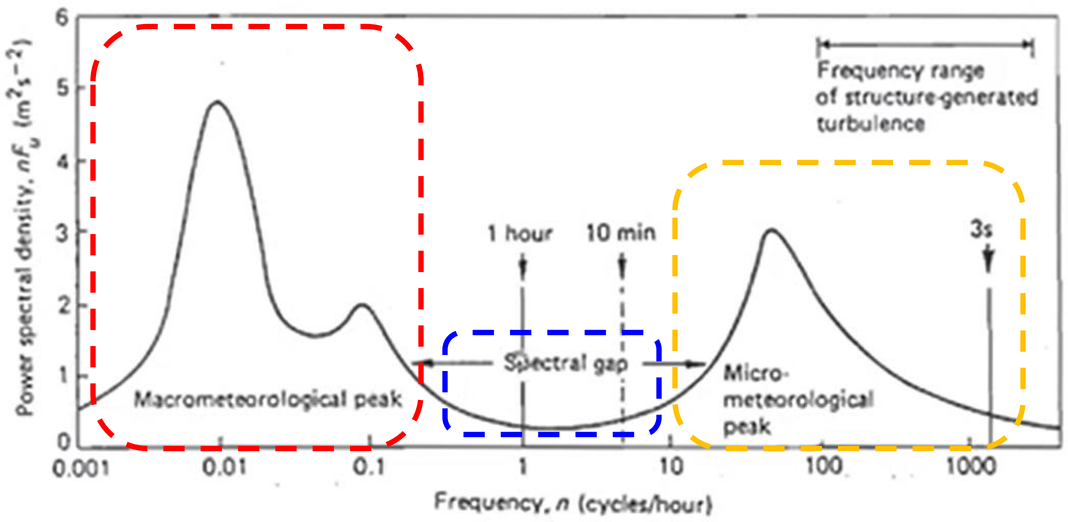


Fig. 1.2.1 Densità spettrale di potenza della velocità orizzontale del vento (da Cook, 1985)

Esempio: simulare il vento

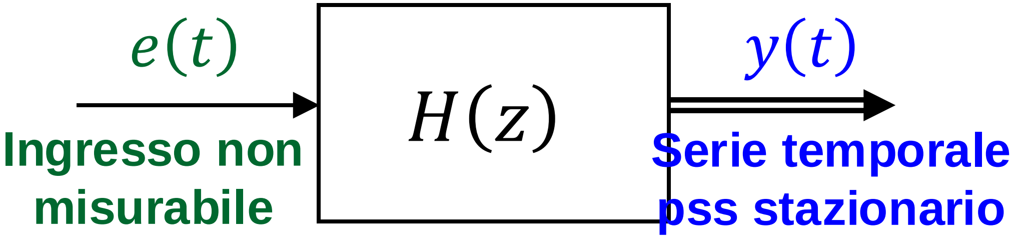


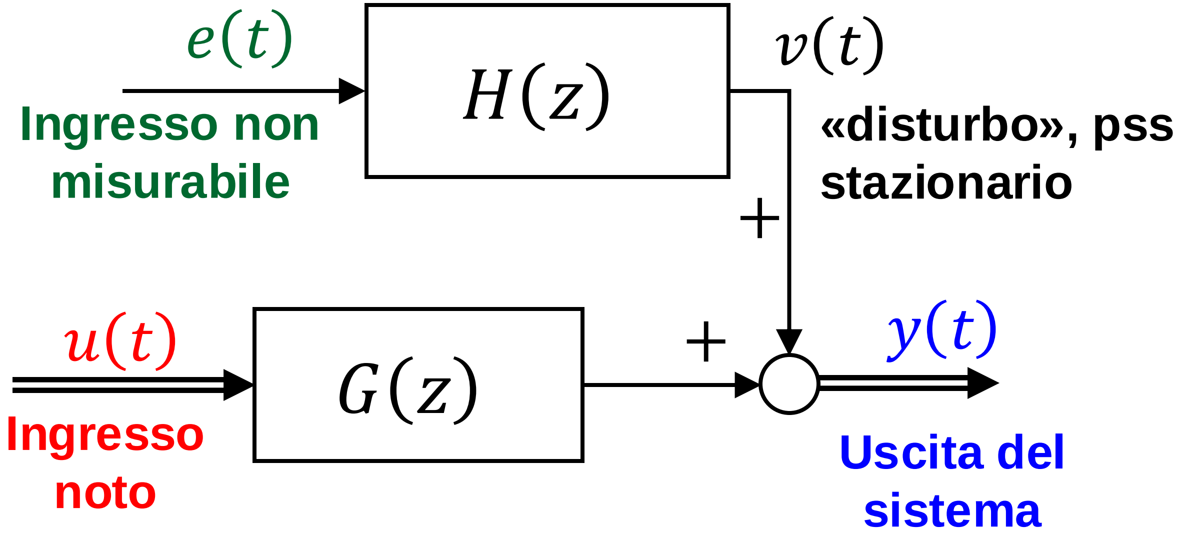


Per simulare il vento, ho bisogno di **almeno 3 coppie di poli** complessi coniugati, e quindi **l'ordine** della $G(z)$ deve essere **almeno 6**

Modellazione di serie temporali e sistemi dinamici

Riprendendo quanto detto a inizio lezione, abbiamo quindi che l'ingresso esogeno non misurabile sarà proprio in **rumore bianco** $e(t)$. L'obiettivo sarà ottenere una **stima delle funzioni di trasferimento** $H(z)$ e $G(z)$





Nota: Nel caso di sistemi dinamici, $G(z)$ rappresenta un **sistema dinamico fisico, reale**. $H(z)$ e $e(t)$ **non esistono fisicamente**: sono solo uno *strumento matematico* per modellare ciò che $G(z)$ non riesce a catturare della relazione tra $u(t)$ e $y(t)$

Depolarizzazione

La depolarizzazione consiste nel **rimuovere il valore atteso** m ad un processo stocastico stazionario $v(t)$. È utile per semplificare il calcolo della funzione di autocovarianza

$$\gamma_{vv}(\tau) = \mathbb{E}[(v(t) - m) \cdot (v(t+\tau) - m)]$$

Se avessimo $m = 0$, il calcolo diventerebbe $\gamma_{vv}(\tau) = \mathbb{E}[v(t) \cdot v(t+\tau)]$

Definiamo quindi $\tilde{v}(t) = v(t) - m$. Abbiamo che:

- $\mathbb{E}[\tilde{v}(t)] = \mathbb{E}[v(t) - m] = \mathbb{E}[v(t)] - m = m - m = 0$
- $\tilde{\gamma}_{vv}(\tau) = \mathbb{E}[\tilde{v}(t)\tilde{v}(t+\tau)] = \mathbb{E}[(v(t) - m) \cdot (v(t+\tau) - m)] = \gamma_{vv}(\tau)$

I processi $v(t)$ e $\tilde{v}(t)$ hanno la **stessa autocovarianza** (e quindi le stesse caratteristiche spettrali). Non **lede alcuna generalità studiare processi a media nulla**

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI BERGAMO

Dipartimento
di Ingegneria Gestionale,
dell'Informazione e della Produzione