APERFEIÇOAMENTO DE UM CONJUNTO DE RESTRIÇÕES PARA GARANTIR CONSECUTIVIDADE DE AULAS EM MODELOS DE OTIMIZAÇÃO INTEIRA PARA CONFECÇÃO DE GRADES HORÁRIAS

JOÃO PEDRO MOREIRA[1], GLAUBER R. COLNAGO[2], JOSÉ R. COLOMBO[3]

[1] Graduando em Engenharia de Controle e Automação, Bolsista PIBIFSP, IFSP, Câmpus Cubatão, jopmoreira20@gmail.
[2] Doutor em Planejamento de Sistemas Energéticos com foco em Otimização Matemática, docente do IFSP, Câmpus Cubatão,glauber.colnago@ifsp.edu.br
[3] Doutor em Engenharia Eletrônica e Computação na área de sistemas de controle, docente do IFSP, Câmpus São José dos Campos, colombo.junior@ifsp.edu.br

Área de conhecimento (Tabela CNPq): 3.08.02.02-4 Programação Linear, Não-Linear, Mista e dinâmica.

Apresentado no
10° Congresso de Inovação, Ciência e Tecnologia do IFSP ou no 4º Congresso de Pós-Graduação do IFSP
27 e 28 de novembro de 2019- Sorocaba-SP, Brasil

RESUMO: O processo de criação de grades horárias em instituições de ensino pode ser automatizado ao ser modelado matematicamente e implementado computacionalmente como um problema de otimização inteira. Uma das premissas mais importantes em grades horárias é a de que aulas múltiplas de uma mesma disciplina devem ocorrer de maneira consecutiva. Isso pode ser obtido ao trabalhar com um conjunto de restrições que garantam a consecutividade. Eventualmente podem haver turmas com uma distribuição de aulas que torna impossível a criação de uma grade horária com aulas consecutivas satisfazendo as restrições. O objetivo deste trabalho é apresentar uma forma de dinamicamente relaxar um conjunto de restrições de consecutividade de modo que se esse tipo de situação ocorrer, não haverá infactibilidade. O objetivo proposto foi alcançado, e tendo como resultado principal, o melhor uso do conjunto modificado de restrições quando se tem conhecimento de quais turmas possuem este problema na distribuição de aulas.

PALAVRAS-CHAVE: pesquisa operacional; timetabling; educação.

INTRODUÇÃO

A geração de grades horárias é uma atividade empregada nas instituições de ensino. Schaerf (1996) define esta atividade como o ato de agendar uma sequência de aulas entre professores e alunos em um período de tempo fixo (tipicamente uma semana), satisfazendo um conjunto de restrições. De modo a evitar um exaustivo esforço manual para criação de grades de horários de com grande número de professores e disciplinas, pode-se modelar o processo matematicamente e resolvê-lo como um problema de otimização inteira. Uma das premissas necessárias na maioria das instituições de ensino para uma grade de qualidade é a garantia que aulas múltiplas em um mesmo dia ocorram de forma consecutiva, tal como apresentado no exemplo na TABELA 1.

TABELA 1. Exemplo de aulas não consecutivas e consecutivas

Aulas não consecutivas	Aulas consecutivas
Física II	Física II
Estatística I	Física II
Física II	Estatística I
Estatística I	Estatística I

Para que isto possa ser incorporado no problema, torna-se necessário implementar um conjunto de restrições que deva ser atendido na solução gerada. Na literatura, nota-se que não são muitos os trabalhos que se preocupam em formular um modelo que satisfaça esse tipo de situação adequadamente tal qual na criação manual das grades, conforme pode ser analisado ao verificar o trabalho de Feng *et al* (2017). Desse modo, o objetivo deste trabalho é apresentar um conjunto de restrições de consecutividade de aulas baseado no apresentado por Daskalaki *et al.* (2004), assim como estudar uma alteração proposta para este conjunto, que permite realizar quebras na consecutividade de turmas, apenas quando necessário, de modo a evitar infactibilidades.

MATERIAL E MÉTODOS

Todo problema de otimização possui uma função objetivo, que neste caso é maximizar horários alocados satisfazendo as preferências dos professores, porém como o objetivo é apenas discutir sobre consecutividade, apenas estas restrições serão devidamente formuladas e apresentadas. Primeiramente, a versão do conjunto de restrições baseada no trabalho de Daskalaki *et al.* (2004) será apresentada. Todas as restrições são escritas em termos de uma variável binária *x*, que será associada a uma série de índices que quando unidos, representam uma aula. Os índices têm como domínio diversos dados de entrada que são agrupados em conjuntos apropriados. As restrições serão apresentadas para um exemplo de apenas 5 aulas por dia.

Conjunto de atribuição de aulas: PMC = {professor ***p****, disciplina* ***m****, turma* ***c****}*
Conjunto de dias de aula: D = {2, ... 7}
Conjunto de horários de aula em um turno: HOR_TUR = {horário ***h****, turno* ***t****}*

$$x_{pmcdht} = \begin{cases} 1\text{, se o professor } \mathbf{p}\text{, dá aula disciplina } \mathbf{m}\text{,} \\ \text{para a turma } \mathbf{c}\text{, no dia } \mathbf{d}\text{, horário } \mathbf{h} \text{ e turno } \mathbf{t} \\ 0\text{, se o contrário ocorre} \end{cases}$$

$$\forall (p,m,c) \in PMC,\ d \in D,\ (h,t) \in HOR\_TUR$$

$$x_{pmcdht} - x_{pmcd(h+1)t} \leq 0 \quad (1)$$
$$(h = t = 1)$$
$$- x_{pmcdht} + x_{pmcd(h+1)t} - x_{pmcd(h+2)t} \leq 0 \quad (2)$$
$$(1 \leq h \leq 4 \text{ e } t = 1)$$
$$-x_{pmcd(h+3)t} + x_{pmcd(h+4)t} \leq 0 \quad (3)$$
$$(h = t = 1)$$
$$- x_{pmcd(h+1)t} + x_{pmcd(h+2)t} - x_{pmcd(h+3)t} - 1 \leq 0 \quad (4)$$
$$(h = t = 1)$$

O conjunto de restrições (1) – (4) garante que se aulas de uma mesma disciplina ocorrerem em um mesmo dia, estas serão consecutivas, o que é o buscado. Aulas únicas não são contempladas então se for necessário ter apenas uma única aula de alguma disciplina, esta não precisa ser submetidas as restrições.

Pode-se customizar a forma como as disciplinas tem a sua consecutividade definida. Por exemplo, para uma disciplina de 4 aulas, é possível garantir a consecutividade das 4 aulas em apenas um dia, ou então, manter 2 aulas consecutivas em 2 dias. Esse tipo de alocação pode ser feito de forma automática, ou então de forma customizada para um tipo de divisão específica. Essa customização é possibilitada pelas restrições (5) – (7).

$$\forall (p,m,c) \in PMC,\ d \in D,\ (h,t) \in HOR\_TUR$$

$$\sum_{h} x_{pmcdht} \leq HMax_{m} \quad (5)$$
$$y_{md} \geq x_{pmcdht} \quad (6)$$

$$\sum_{h} x_{pmcdht} \leq SMax\_m \qquad (7)$$

em que,

$$y_{md} = \begin{cases} 1, \text{ se a disciplina } \mathbf{m}, \text{ tem aula no dia } \mathbf{d} \\ 0, \text{ se o contrário ocorre} \end{cases}$$

$HMax_m$= Parâmetro inteiro de máximo de aulas diárias para cada disciplina **m**
$SMax_m$= Parâmetro inteiro de máximo de dias para cada disciplina **m**

A restrição (5) limita o número de aulas diárias de uma disciplina, enquanto (6) contabiliza em quais dias da semana aquela disciplina aparece, e (7) limita essa quantidade de dias.

Considere agora uma instância de 12 turmas variadas com aulas de segunda a sexta. Diferentes tipos de consecutividades são empregadas para satisfazer as aulas das disciplinas e construir uma grade aceitável. Porém dentre as 12 turmas, 2 delas possuem uma distribuição de aulas notável. Estas distribuições serão apresentadas na Tabela 2.

TABELA 2. Distribuição de aulas para duas das 12 turmas consideradas

	Turma A	Turma B
Disciplinas de 2 aulas	3	0
Disciplinas de 3 aulas	2	8
Disciplinas de 4 aulas	3	0
Total de aulas	8	8

Note que a alocação consecutiva destas aulas em 5 aulas de segunda a sexta é impossível. Isso significa que o processo de otimização seria solução infactível. A única forma de realizar esta alocação seria quebrando a consecutividade de algumas das disciplinas, o que a princípio não é possível de ser feito com as restrições em (1) – (4). O objetivo deste trabalho é discutir uma alteração realizada nas restrições (1) – (4) para dinamicamente relaxá-las quando situações deste tipo ocorrerem de modo a obter soluções factíveis. O novo conjunto de restrições será apresentado em (8) – (11).

$\forall (p,m,c) \in PMC, d \in D, (h,t) \in HOR\_TUR$

$$x_{pmcdht} - x_{pmcd(h+1)t} \leq a_{pmcd} \qquad (8)$$
$(h = t = 1)$

$$- x_{pmcdht} + x_{pmcd(h+1)t} - x_{pmcd(h+2)t} \leq a_{pmcd} \qquad (9)$$
$(1 \leq h \leq 4 \text{ e } t = 1)$

$$-x_{pmcd(h+3)t} + x_{pmcd(h+4)t} \leq a_{pmcd} \qquad (10)$$
$(h = t = 1)$

$$- x_{pmcd(h+1)t} + x_{pmcd(h+2)t} - x_{pmcd(h+3)t} - 1 \leq a_{pmcd} \qquad (11)$$
$(h = t = 1)$

em que,

$$a_{pmcd} = \begin{cases} 1, \text{ se o professor } \mathbf{p}, \text{ dá aula disciplina } \mathbf{m}, \\ \quad \text{para a turma } \mathbf{c}, \text{ no dia } \mathbf{d} \\ 0, \text{ se o contrário ocorre} \end{cases}$$

Ao fazer o lado direito das restrições igual a uma variável binária, o otimizador terá capacidade de manter estas variáveis em 0, tornando (8) – (11) igual a (1) – (4) e garantindo a consecutividade, ou então, permitir quebra da consecutividade fazendo a variável igual a 1. Como isto deve ocorrer apenas em casos de extrema necessidade, somatório das variáveis *a* na função objetivo do problema, de modo que para cada $a = 1$, uma penalização para a função objetivo seja contabilizada.

Para estudar a aplicabilidade do novo conjunto proposto, foram realizadas simulações com as 12 turmas apresentadas anteriormente. Foram considerados 3 cenários. No primeiro cenário, algumas alterações na distribuição de aulas das duas turmas com problemas foram feitas de modo que elas não apresentassem mais este problema, totalizando então, 12 turmas sem problemas na distribuição de aulas, de modo que (1) – (4) fosse aplicado para todas as 12 turmas. Este seria o cenário ideal. No segundo, considerou-se uma situação em que as 2 turmas com a distribuição de aulas que torna a grade infactível já são previamente conhecidas. Desta forma, o conjunto de restrições (8) – (11) é aplicado a estas duas turmas apenas, enquanto as outras 10 são submetidas a (1) – (4). Já o terceiro cenário considera que não se sabe quais turmas podem ocasionar infactibilidade, então (8) – (11) será aplicado em todas as disciplinas.

Para todas as simulações, o software empregado será o IBM ILOG CPLEX Optimization Studio – Versão Acadêmica - com o modelo implementado na linguagem Optimization Programming Language (OPL). Serão utilizados como critérios de parada para o processo de otimização um tempo de 30 minutos ou um gap menor que 10%. O gap basicamente é um valor relativo que descreve numericamente a distância entre a melhor solução inteira atual e possíveis melhores soluções inteiras limitadas por uma solução não inteira. A documentação do CPLEX Optimization studio formula o gap como (12).

$$gap = \frac{|melhor\_limitante - melhor\_inteiro|}{1^{-10} + |melhor\_inteiro|} \quad (12)$$

Basicamente, quanto menor for o gap, mais próxima da solução ótima, a solução atual é. Um gap menor que $\leq$ 10% será considerado garantia de uma solução suficientemente boa. Se em 30 minutos o otimizador não encontrar uma solução de gap $\leq 10\%$, o processo será interrompido e a solução atual salva.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A comparação entre os resultados será baseada no tempo de solução e no gap relativo. Quanto menores ambos os parâmetros, melhor é a solução. Os resultados obtidos nas simulações são apresentados na Tabela 3.

TABELA 3. Resultados das simulações.

	Cenário 1	Cenário 2	Cenário 3
Total de turmas	12	12	12
Turmas que geram infactibilidade	0	2	2
Turmas submetidas as restrições (1) – (4)	12	10	0
Turmas submetidas as restrições (8) – (11)	0	2	12
Gap	<10%	<10%	54,53%
Tempo de solução	00:08m	01:13 m	30m

Os resultados apresentados denotam que o conjunto de restrições proposto funciona adequadamente. As turmas com problemas em suas divisões não tornaram a solução infactível. As quebras na consecutividade foram definidas pelo otimizador, a um custo. Nota-se pelos resultados do cenário 2 que se as turmas com problemas forem previamente identificadas, porém não se desejar ter a preocupação de definir quais são as disciplinas que devem ter a quebra na consecutividade, basta submeter estas turmas ao conjunto de restrições propostos em (8) – (11), enquanto o restante das turmas passa pelas restrições (1) – (4). O gap permanece equivalente ao do primeiro cenário, que é a melhor situação, e houve um aumento não preocupante no tempo, mas desta forma as quebras na consecutividade foram escolhidas automaticamente de modo a melhor satisfazer a função objetivo. Já se a quebra na consecutividade for algo possível, porém não se tem conhecimento das turmas que a ocasionam e se tenta aplicar (8) – (11) para todas as turmas, a complexidade do problema cresce de tal forma que são obtidas soluções demoradas com gap muito alto, o que denota a inviabilidade deste cenário para muitas turmas.

Serão apresentadas as grades horárias para as duas turmas com problemas de infactibilidade para os cenário 2 e 3, onde estas turmas são consideradas.

TABELA 4. Grades resultantes para o cenário 2 e 3 para as turmas A e B.

		Turma A					Turma B				
	Aula	**Seg.**	**Ter.**	**Qua.**	**Qui.**	**Sex.**	**Seg.**	**Ter.**	**Qua.**	**Qui.**	**Sex.**
Cenário 2	**1**	CDIA	QUIA	QUIA	CEXA	QUEA	INFT	MTCT	PSIT	FLET	ERST
	2	CDIA	QUIA	QUIA	CEXA	QUEA	INFT	MTCT	PSIT	FLET	ERST
	3	CDIA	FMAA	DESA	CEXA	QUEA	INFT	MTCT	PSIT	TCOT	TGTT
	4	IAIA	FMAA	DESA	PRCA	PRCA	FLET1	THOT	THOT	TCOT	TGTT
	5	IAIA	-	QUEA	PRCA	PRCA	ERST	-	THOT	TCOT	TGTT
Cenário 3	**1**	CDIA	QUIA	QUIA	CEXA	PRCA	THOT	TCOT	MTCT	MTCT	ERST
	2	CDIA	QUIA	QUEA	CEXA	PRCA	FLET1	TCOT	MTCT	PSIT	THOT
	3	CDIA	QUIA	QUEA	CEXA	FMAA	FLET1	TCOT	INFT	PSIT	TGTT
	4	DESA	IAIA	QUEA	PRCA	FMAA	FLET1	ERST	INFT	PSIT	TGTT
	5	DESA	IAIA	QUEA	PRCA	-	THOT	ERST	INFT	-	TGTT

CONCLUSÕES

Os objetivos iniciais deste trabalho consistiram em apresentar e testar a viabilidade de uma alteração em um conjunto de restrições para garantir a consecutividade de aulas em problemas inteiros de otimização de grades horárias. A alteração serve para manter a utilidade do conjunto de restrições mesmo para situações em que as turmas possuem uma distribuição de aulas que torna a grade horária impossível de ser construída satisfazendo as restrições. A alteração proposta se mostrou possível e foi aplicada com melhores resultados para a situação em que turmas com problemas na distribuição de aulas são previamente conhecidas, conforme os resultados do cenário 2.

REFERÊNCIAS

DASKALAKI, S.; BIRBAS, T.; HOUSOS, E. An integer programming formulation for a case study in university timetabling. European Journal of Operational Research, v.153, p.117-135, 2004.

FENG, X,; LEE, Y.; MOON, I.; An integer program and a hybrid genetic algorithm for the university timetabling problem. Optimization Methods and Software, v. 32, p. 625 – 649, 2014.

SCHAERF, A. A Survey of Automated Timetabling. Artificial Intelligence Review. v. 13, p. 87-127, 1999.