Estadística Multivariante

Clase esférica y elíptica de distribuciones

Trabajo A

Antonio R. Moya Martín-Castaño
Elena Romero Contreras
Nuria Rodríguez Barroso
Universidad de Granada
anmomar85@correo.ugr.es
elenaromeroc@correo.ugr.es
rbnuria6@gmail.com

Índice

1. Clases esférica y elíptica de distribuciones en $\mathbb{R}^p$

Definición 1.1. Dado un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_p)^t$, se dice que se distribuye en la clase esférica de distribuciones en $\mathbb{R}^p$ si $\mathbf{X}$ y $\mathbf{HX}$ tienen la misma distribución, $\forall \mathbf{H} \in O(p)$ siendo $O(p)$ el grupo de matrices ortogonales de orden p. Esto es, si su distribución es invariante frente a transformaciones ortogonales.

Ejemplo 1.1: Un ejemplo de densidad esférica es la distribución uniforme en la hiperesfera de radio r:

$$f_x(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma(\frac{p+2}{2})}{\pi^{p/2} r^p} \mathbf{I}_{[\mathbf{x}^t \mathbf{x} \leq r^2]}$$

Vemos ahora un resultado sobre la forma que adopta la función característica de cualquier variable que se distribuya en la clase esférica.

Teorema 1.1. *Sea $\boldsymbol{X}$ un vector aleatorio con distribución en la clase esférica. Entonces su función característica es de la forma $\phi(\boldsymbol{t}) = \psi(\boldsymbol{t}^t \boldsymbol{t})$, con ψ una cierta función. Además, $E[\boldsymbol{X}] = \boldsymbol{0}$ y $Cov[\boldsymbol{X}] = -2\psi'(0)\boldsymbol{I}_p$.*

Demostración. EJERCICIO.

Para esta demostración es necesario utilizar algunos aspectos de la teoría de invarianza (buscarlos en el apéndice A y ponerlos). □

Definición 1.2. Dado un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_p)^t$, se dice que se distribuye en la clase elíptica de parámetros $\mu \in \mathbb{R}^p$ y $\mathbf{V}_{p\times p}$ ($\mathbf{V} > 0$) si su densidad es de la forma

$$f(\mathbf{x}) = C_p |\mathbf{V}|^{-\frac{1}{2}} h((\mathbf{x} - \mu)^t \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{x} - \mu))$$

donde C_p es una constante y h una función suficientemente regular. A la clase elíptica la notaremos por $E_p(\mu; V)$.

Ejemplo 1.2: Un ejemplo de densidad elíptica es la distribución uniforme en el elipsoide de dimensión p:

$$f_x(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma(\frac{p+2}{2} |\mathbf{A}|^{\frac{1}{2}})}{\pi^{\frac{p}{2}} r^0} \mathbf{I}_{[(\mathbf{x}-\mu)^t \mathbf{A} (\mathbf{x}-\mu) \leq r^2]}$$

EJERCICIOS:

- Comprobar que la clase esférica coincide con la elíptica $E(0; I_p)$.

  Solución: Si tenemos que un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_p)^t$ se distribuye en la clase elíptica $E(0; I_p)$, entonces cumple que su función de densidad es de la forma $f_x(\mathbf{x}) = C_p h(x^t x)$, por lo que sólo depende de x a través de $x^t x$. De este modo, es invariantes por transformaciones ortogonales con lo que pertenece también a la clase esférica. ¿¿¿El OTRO CASO???

- Verificar la siguiente caracterización, que generaliza la vista en el caso normal:

  $$X \in E_p(\mu; V) \leftrightarrows X = \mu + CU$$

  donde $\mu \in \mathbb{R}^p$, C es la matriz dada por la descomposición de Cholesky de V, es decir, $V = CC^t$ y U es un vector de la clase esférica p-dimensional.

- Verificar que si $X \in E_p(\mu; V)$ entonces $E[X] = \mu + CE[U]$ y $Cov(X) = CCov(U)C^t$ siendo U pertenciente a la clase esférica.

Solución: En este caso, aplicando el ejercicio anterior tenemos que $X = \mu + CU$, y, por tanto, por las propiedades de linealidad de la esperanza y de la covarianza, se cumplen las dos condiciones que se piden en este apartado. ???

En cuanto a la función característica, se plantea el siguiente ejercicio:

- Sea $\mathbf{X}$ un vector aleatorio con distribución en la clase elíptica $E_p(\mu; V)$. Entonces su función característica es de la forma $\phi(u) = e^{iu^t\mu}\psi(u^tVu)$, con ψ una cierta función.
- Sea $\mathbf{X}$ un vector aleatorio con distribución en la clase elíptica $E_p(\mu; V)$. Comprobar que si A_{qxp} es una matriz de constantes con rg(A)=$q \leq p$, y c$\in \mathbb{R}^p$, entonces $\mathbf{Y} = \mathbf{c} + \mathbf{AX} \in E_q(c + A\mu; AVA^t)$.
- Sea $\mathbf{X} \in E_p(\mu; V)$. Entonces $E[X] = \mu$ y $Cov[X] = -2\psi'(0)$V.
- Comprobar que todas las distribuciones de la clase elíptica $E_p(\mu; V)$ tienen igual matriz de correlaciones.

EJERCICIO:

Sea $\mathbf{X} \in E_p(\mu; V)$. Particionemos el vector $\mathbf{X}$ de la forma $\mathbf{X}=(X_{(1)}^t | X_{(2)}^t)^t$ donde $X_{(1)}$ es de dimensión qx1 y $X_{(2)}$ lo es $(p-q)$x1. Consideremos en μ y $\mathbf{V}$ las particiones inducidas

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_{(1)} \\ \mu_{(2)} \end{pmatrix}; V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}$$

Entonces se verifica

- $X_{(1)} \in E_q(\mu_{(1)}; V_{11})$
- $X_{(2)} \in E_{(p-q)}(\mu_{(2)}; V_{22})$

***Nota: Hacerlo usando la función característica y también mediante la caracterización obtenida en el primer ejercicio.

2. Algunas distribuciones de las clases esférica y Elíptica de distribuciones en $\mathbb{R}^p$

2.1. Distribución uniforme en el círculo de radio r

Sea $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq r^2\}$ el círculo centrado en el origen y de radio $r > 0$. Dado un vector aleatorio: $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^t$ se dice que sigue la distribución uniforme en S^1 si su densidad es

$$f(x_1, x_2) = KI_{S^1}$$

donde $K > 0$ e I_{S^1} es la función indicadora en S^1.

EJERCICIOS:

- Verificar que $K = \frac{1}{\pi r^2}$

  Solución: Tengamos en cuenta que $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(X)dX = 1$. Por tanto $K\int_{-\infty}^{\infty} I_{S^1}dX = 1$. Así:

$$K\int_{S^1} 1dX = 1$$

Y por tanto, atendiendo a que esa integral coincide con el área de un círculo: $K\pi r^2 = 1$. Y como conclusión sacamos que $K = \frac{1}{\pi r^2}$

- Comprobar que $E[X] = 0$ y que $Cov[X] = \frac{r^2}{4} I_2$???????? I2???*********
- Calcular las distribuciones marginales así como las condicionadas. Por simetría basta calcular la distribución de X_1 y la de $X_1 | X_2 = x2$.

2.2. Distribución uniforme en la esfera de radio r

Sea $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq r^2\}$ el interior y borde de la esfera centrada en 0 y de radio $r > 0$. Dado un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^t$ se dice que sigue la distribución uniforme en S^2 si su densidad es:

$$f(x_1, x_2, x_3) = K I_{S^2}$$

donde $K > 0$ e I_{S^2} en la función indicadora en S^2.

EJERCICIOS:

- Verificar que $K = \frac{3}{4\pi r^3}$

  Solución: De manera similar al caso del círculo, ahora tenemos que se cumple que $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(X) dX = 1$. Por tanto $K \int_{-\infty}^{\infty} I_{S^2} dX = 1$. Así:

  $$K \int_{S^2} 1 dX = 1$$

  Y por tanto, atendiendo a que esa integral coincide con el área de una esfera: $K\frac{4}{3}\pi r^3 = 1$. Y como conclusión sacamos que $K = \frac{3}{4\pi r^3}$
- Comprobar que $E[X] = 0$ y que $Cov[X] = \frac{r^2}{5} I_3$???????? 3???*********
- Calcular las distribuciones marginales unidimensionales y bidimensionales. Dada la simetría, basta con calcular la distribución de X_1 y de $(X_1, X_2)^t$
- Calcular las distribuciones de $(X_2, X_3)^t | X_1 = x_1$ y $X_3 | X_1 = x_1, X_2 = x_2$. Deducir que son distribuciones uniformes en un círculo y en un intervalo, respectivamente y, en consecuencia, calcular los dos primeros momentos.

2.3. Distribución uniforme en la hiperesfera de radio r

Sea $S^{p-1} = \{x \in \mathbb{R}^p : x^t x \leq r^2\}$ el interior y el borde de la hiperesfera centrada en el origen y de radio $r > 0$. Dado un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p)^t$ se dice que sigue la distribución uniforme en S^{p-1} si su densidad es:

$$f(x_1, \ldots, x_p) = K I_{S^{p-1}}$$

donde $K > 0$ e $I_{S^{p-1}}$ es la función indicadora en S^{p-1}

EJERCICIOS:

- Verificar que $K = \frac{\Gamma(\frac{p+2}{2})}{\pi^{p/2} r^p}$.

- Comprobar que $E[X] = 0$ y $Cov[X] = \frac{r^2}{p+2} I_p$.
- Calcular las distribuciones marginales unidimensionales y bidimensionales. Dada la simetría basta con calcular, por ejemplo, las de X_1 y $(X_1, X_2)^t$.
- Si consideramos $\mathbf{X}$ partido en la forma $\mathbf{X}=(X_{(1)}^t|X_{(2)}^t)^t$ donde $X_{(1)}$ es de dimensión q y $X_{(2)}$ lo es $(p-q)$, calcular la distribución de $X_{(1)}$.
- Calcular la distribución condicionada $X_{(2)}|X_{(1)} = x_{(1)}$. Deducir que es una distribución uniforme en S^{p-q-1}, o sea, la esfera de dimensión $p-q$. En consecuencia, calcular los dos primeros momentos.

2.4. Distribución T-Student esférica

Sea $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p)^t$ un vector aleatorio. Diremos que se distribuye según la distribución t de student esférica p-dimensional con n grados de libertad si su función de densidad es:

$$f(x_1, \ldots, x_p)^t = \frac{\Gamma(\frac{n+p}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})(n\pi)^{\frac{p}{2}}[1 + \frac{1}{n}x^t x]^{\frac{n+p}{2}}}$$

con $x \in \mathbb{R}^p$

EJERCICIO: Demostrar que los momentos de esta distribución son:

$$E[X] = 0$$
$$Cov[X] = \frac{n}{n-2} I_p$$

con $n > 2$.

2.5. Versiones elípticas de las densidades uniformes en la hiperesfera y t-student

EJERCICIOS:

- Sea $\mathbf{U}$ un vector p-dimensional distribuido de forma uniforme en el interior y borde de la hiperesfera de dimensión p y racio $r > 0$. Consideremos μ un vector de $\mathbb{R}^p$ y V_{pxp} una matriz definida positiva descompuesta en la forma $V = CC^t$. Calcular la densidad del vector aleatorio $X = \mu + CU$.
- Calcular $E[X]$ y $Cov[X]$ para la distribución uniforme en el elipsoide E_r^p.
- Sea $\mathbf{U}$ un vector p-dimensional distribuido según una t de Studen multivariante esférica. Consideremos μ un vector de $\mathbb{R}^p$ y V_{pxp} una matriz definida positiva descompuesta en la forma $V = CC^t$. Calcular la densidad del vector aleatorio $X = \mu + CU$.
- Calcular $E[X]$ y $Cov[X]$ para la distribución anterior.