Estadística Multivariante
Clase esférica y elíptica de distribuciones

Trabajo A

Antonio R. Moya Martín-Castaño
Universidad de Granada
rbnuria6@gmail.com

Índice

1. Clases esférica y elíptica de distribuciones en $\mathbb{R}^p$

Definición 1.1. Dado un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_p)^t$, se dice que se distribuye en la clase esférica de distribuciones en $\mathbb{R}^p$ si $\mathbf{X}$ y $\mathbf{HX}$ tienen la misma distribución, $\forall \mathbf{H} \in O(p)$ siendo $O(p)$ el grupo de matrices ortogonales de orden p. Esto es, si su distribución es invariante frente a transformaciones ortogonales.

Ejemplo 1.1: Un ejemplo de densidad esférica es la distribución uniforme en la hiperesfera de radio r:

$$f_x(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma(\frac{p+2}{2})}{\pi^{p/2} r^p} \mathbf{I}_{[\mathbf{x}^t\mathbf{x} \leq r^2]}$$

Vemos ahora un resultado sobre la forma que adopta la función característica de cualquier variable que se distribuya en la clase esférica.

Teorema 1.1. *Sea $\boldsymbol{X}$ un vector aleatorio con distribución en la clase esférica. Entonces su función característica es de la forma $\phi(\boldsymbol{t}) = \psi(\boldsymbol{t}^t\boldsymbol{t})$, con ψ una cierta función. Además, $E[\boldsymbol{X}] = \boldsymbol{0}$ y $Cov[\boldsymbol{X}] = -2\psi'(0)\boldsymbol{I}_p$.*

Demostración. EJERCICIO.

Para esta demostración es necesario utilizar algunos aspectos de la teoría de invarianza (buscarlos en el apéndice A y ponerlos). □

Definición 1.2. Dado un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_p)^t$, se dice que se distribuye en la clase elíptica de parámetros $\mu \in \mathbb{R}^p$ y $\mathbf{V}_{p\times p}$ ($\mathbf{V} > 0$) si su densidad es de la forma

$$f(\mathbf{x}) = C_p|\mathbf{V}|^{-\frac{1}{2}} h((\mathbf{x} - \mu)^t\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{x} - \mu))$$

Ejemplo 1.2: Un ejemplo de densidad elíptica es la distribución uniforme en el elipsoide de dimensión p:

$$f_x(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma(\frac{p+2}{2}|\mathbf{A}|^{\frac{1}{2}})}{\pi^{\frac{p}{2}} r^0} \mathbf{I}_{[(\mathbf{x}-\mu)^t\mathbf{A}(\mathbf{x}-\mu) \leq r^2]}$$