Estadística Multivariante

Clase esférica y elíptica de distribuciones

Trabajo A

Antonio R. Moya Martín-Castaño
Elena Romero Contreras
Nuria Rodríguez Barroso
Universidad de Granada
anmomar85@correo.ugr.es
elenaromeroc@correo.ugr.es
rbnuria6@gmail.com

Índice

1. Introducción.

La distribución normal multivariante que hemos desarrollado en clase de teoría, es un caso particular de una familia de distribuciones muy utilizadas en el análsis multivariante, las *distribuciones elípticas*. Para introducirlas, consideraremos en primer lugar el caso más simple de estas, las *distribuciones esféricas*.

Para finalizar, veremos casos concretos de distribuciones de estas clases en $\mathbb{R}^p$.

2. Clases esférica y elíptica de distribuciones en $\mathbb{R}^p$

Definición 2.1. Dado un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_p)^t$, se dice que se distribuye en la clase esférica de distribuciones en $\mathbb{R}^p$ si $\mathbf{X}$ y $\mathbf{HX}$ tienen la misma distribución, $\forall \mathbf{H} \in O(p)$ siendo $O(p)$ el grupo de matrices ortogonales de orden p. Esto es, si su distribución es invariante frente a transformaciones ortogonales.

Ejemplo 2.1: Un ejemplo de densidad esférica es la distribución uniforme en la hiperesfera de radio r:

$$f_x(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma(\frac{p+2}{2})}{\pi^{p/2} r^p} \mathbf{I}_{[\mathbf{x}^t\mathbf{x} \leq r^2]}$$

Vemos ahora un resultado sobre la forma que adopta la función característica de cualquier variable que se distribuya en la clase esférica.

Teorema 2.1. *Sea $\boldsymbol{X}$ un vector aleatorio con distribución en la clase esférica. Entonces su función característica es de la forma $\phi(\boldsymbol{t}) = \psi(\boldsymbol{t}^t\boldsymbol{t})$, con ψ una cierta función. Además, $E[\boldsymbol{X}] = \boldsymbol{0}$ y $Cov[\boldsymbol{X}] = -2\psi'(0)\boldsymbol{I}_p$.*

Demostración. Para la primera parte de esta demostración vamos a utilizar resultados de la teoría de invarianzas:

Definición 2.2. Se dice que una función Φ es invariante sobre el espacio χ es invariante bajo G si verifica $\Phi(gx) = \Phi(x), \forall x \in \chi, \forall g \in G$

Definición 2.3. Una función Φ sobre χ se dice invariante maximal bajo G si es invariante bajo G y además verifica $\phi(x_1) = \phi(x_2) \Rightarrow x_1 \sim x_2 (mod G)$

Teorema 2.2. *Sea Φ un invariante maximal bajo G para χ. Entonces una función ψ sobre χ es invariante bajo G sí y solo sí es función de Φ.*

Proposición 2.3. *Sea $G = O(p)$ el grupo de matrices ortogonales de orden $p \times p$. Entonces $\Phi(x) = x^t x$ es un invariante maximal bajo G.*

Para ver que $\Phi(t) = \psi(t^t t)$, basta con considerar la función $f(t) = t^t t$, que es un invariante maximal por la proposición anterior, y que Φ es un invariante por la definición de clase esférica (como X y HX tienen la misma distribución, $\Phi_x(t) = \Phi_x(Ht), \forall H \in G$). Entonces, aplicando el Teorema anterior, tenemos que $\Phi(t) = \psi(f(t)) = \psi(t^t t)$, para alguna función ψ.

Para demostrar que $E[X] = 0$, basta con darse cuenta de que, dado que X y HX tienen la misma distribución, se verifica que $E[X] = E[HX], \forall H \in O(p)$, y por la linealidad de la esperanza matemática sabemos que $E[HX] = HE[X], \forall H \in O(p)$, por tanto, llegamos a que $E[X] = HE[X], \forall H \in O(p)$, luego se debe verificar que $E[X] = 0$.

Para demostrar la expresión de la covarianza, vamos a utilizar que $E[X^2] = -\Phi''(0)$. Por otro lado, calculamos la expresión de $\Phi''(t)$ en función de ψ, $\Phi''(t) = 2\psi'(t^t t)I_p + 4t^2\psi''(t^t t)I_p$, por tanto $\Phi''(0) = 2\psi'(t^t t)I_p$.

Finalmente, $Cov[X] = E[X^2] = -\Phi''(0) = -2\psi'(t^t t)I_p$, que es lo que buscábamos.

□

Definición 2.4. Dado un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_p)^t$, se dice que se distribuye en la clase elíptica de parámetros $\mu \in \mathbb{R}^p$ y $\mathbf{V}_{p\times p}$ ($\mathbf{V} > 0$) si su densidad es de la forma

$$f(\mathbf{x}) = C_p|\mathbf{V}|^{-\frac{1}{2}}h((\mathbf{x}-\mu)^t\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{x}-\mu))$$

donde C_p es una constante y h una función suficientemente regular. A la clase elíptica la notaremos por $E_p(\mu; V)$.

Ejemplo 2.2: Un ejemplo de densidad elíptica es la distribución uniforme en el elipsoide de dimensión p:

$$f_x(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma(\frac{p+2}{2}|\mathbf{A}|^{\frac{1}{2}})}{\pi^{\frac{p}{2}}r^0}\mathbf{I}_{[(\mathbf{x}-\mu)^t\mathbf{A}(\mathbf{x}-\mu)\leq r^2]}$$

EJERCICIOS:

- Ejercicio 1: Comprobar que la clase esférica coincide con la elíptica $E(0; I_p)$.

  Solución:

  Si tenemos que un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_p)^t$ se distribuye en la clase elíptica $E(0; I_p)$, entonces cumple que su función de densidad es de la forma $f_x(\mathbf{x}) = C_p h(x^t x)$, por lo que sólo depende de x a través de $x^t x$. De este modo, es invariantes por transformaciones ortogonales con lo que pertenece también a la clase esférica. ¿¿¿El OTRO CASO???

- Ejercicio 2: Verificar la siguiente caracterización, que generaliza la vista en el caso normal:

  $$X \in E_p(\mu; V) \leftrightarrows X = \mu + CU$$

  donde $\mu \in \mathbb{R}^p$, C es la matriz dada por la descomposición de Cholesky de V, es decir, $V = CC^t$ y U es un vector de la clase esférica p-dimensional.

  Solución:

  Consideramos $X = \mu + CU$, y calculamos cual es su función de distribución. Para ello, como U es un vector de la clase esférica p-dimensional, consideramos f_U su función de distribución. Por lo que ya hemos demostrado, f_U depende de t solo a través de $t^t t$, esto es $_u(tf) = h(t^t t)$,para cierta función h. Además, estamos considerando que la matriz C es no singular. Por tanto, la transformación de U a X tiene el Jacobiano $J = det(C^{-1})$, y tenemos que aplicando un resultado de transformación para vectores aleatorios podemos obtener la función de densidad de X como:

  $$f_x(x) = |det(C^{-1})|f_U|C^{-1}(x-\mu)| = [det(A)^{-1}det(A^{-1})]^{1/2}h[(x-\mu)^t(A^t)^{-1}A^{-1}(x-\mu)] =$$

  $$det[(AA^t)^{-1}]^{1/2}h[(x-\mu)^t(AA^t)^{-1}(x-\mu)] = \frac{h[(x-\mu)^tV^{-1}(x-\mu)]}{|V|^{1/2}}$$

- Ejercicio 3: Verificar que si $X \in E_p(\mu; V)$ entonces $E[X] = \mu + CE[U]$ y $Cov(X) = CCov(U)C^t$ siendo U pertenciente a la clase esférica.

  Solución:

  Dada la linealidad de la esperanza matemática, sabemos que $E[\mu + CU] = E[\mu] + E[CU] = \mu + CE[U]$.

  En cuanto a la covarianza, dada la invarianza por translaciones obtenemos que $Cov[\mu + CU] = Cov[CU]$, y aplicando la bilinealidad de la covarianza obtenemos $Cov[CU] = CCov[U]C^t$, por lo que hemos obtenido que $Cov[\mu + CU] = CCov[U]C^t$.

En cuanto a la función característica, se plantea el siguiente ejercicio:

- Ejercicio 4: Sea **X** un vector aleatorio con distribución en la clase elíptica $E_p(\mu; V)$. Entonces su función característica es de la forma $\phi(u) = e^{iu^t\mu}\psi(u^tVu)$, con ψ una cierta función.

  Solución:

  Sea $X \in E_p(\mu, V)$, aplicando al definición de función característica tenemos

  $$\phi_X(u) = \phi(u) = E[exp(iu^tX)] = E[exp(iu^t(\mu + CU))] = exp(iu^t\mu)\phi_{CU}(u) = exp(iu^t\mu)\phi_U(C^tu)$$

  Aplicando ahora el primer resultado que hemos demostrado ($\phi_u(t) = \psi(t^tt)$) para una cierta función χ tenemos

  $$\phi(u) = exp(iu^t\mu)\psi(t^tCC^tt) = exp(iu^t\mu)\psi(t^tVt)$$

  como buscábamos.

- Ejercicio 5: Sea **X** un vector aleatorio con distribución en la clase elíptica $E_p(\mu; V)$. Comprobar que si A_{qxp} es una matriz de constantes con rg(A)=$q \leq p$, y c$\in \mathbb{R}^p$, entonces $\mathbf{Y} = \mathbf{c} +$ **AX**$\in E_q(c + A\mu; AVA^t)$.

  Solución:

  Volvemos a ver $X \in E_p(\mu; V)$ de la forma $X = \mu + CU$, donde U pertenece a la clase esférica. Entonces:

  $$Y = c + AX = c + A(\mu + CU) = (c + A\mu) + (AC)U$$

  por tanto, obtenemos otra vez una elíptica de distribución $Y \in E_p(c + A\mu; (AC)(AC)^t) = E_p(c + A\mu; AVA^t)$, como queríamos probar.

- Ejercicio 6: Sea **X**$\in E_p(\mu; V)$. Entonces $E[X] = \mu$ y $Cov[X] = -2\psi'(0)$V.

  Solución:

  Para resolver este ejercicio, basta con utilizar el ejercicio anterior en el que se expresaba la esperanza matemática y la matriz de correlaciones de un vector aleatorio con distribución elíptica $X = \mu + CU$ en función de la esperanza matemática y la matriz de correlaciones de U, siendo U perteneciente a la clase esférica junto $E[U]$ y $Cov[U]$ calculadas anteriormente, de esta forma tenemos:

  $$E[X] = \mu + CE[U] = \mu + C0 = \mu$$

  $$Cov[X] = CCov[U]C^t = C(-2\psi'(0))I_pXC^t = -2\psi'(0)CI_pC^t = -2\psi'(0)V$$

- Ejercicio 7: Comprobar que todas las distribuciones de la clase elíptica $E_p(\mu; V)$ tienen igual matriz de correlaciones.

  Solución:

  Recordamos la definición de la matriz de correlaciones de una distribución de la forma:

$$cor_{i,j} = \frac{cov_{i,j}}{\sqrt{cov_{i,i}}\sqrt{cov_{j,j}}}$$

  Ahora bien, como $Cov[X] = -2\psi'(0)V$, que solo depende de V que es común en todas las distribuciones de la clase elíptica $E_p(\mu; V)$.

  Por tanto, obtenemos que cada elemento de la matriz de correlaciones es el mismo en todas las distribuciones de la clase, luego la matriz de correlaciones es igual.

EJERCICIO 8:

Sea $\mathbf{X} \in E_p(\mu; V)$. Particionemos el vector $\mathbf{X}$ de la forma $\mathbf{X}=(X_{(1)}^t|X_{(2)}^t)^t$ donde $X_{(1)}$ es de dimensión qx1 y $X_{(2)}$ lo es $(p-q)$x1. Consideremos en μ y $\mathbf{V}$ las particiones inducidas

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_{(1)} \\ \mu_{(2)} \end{pmatrix}; V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}$$

Entonces se verifica

- $X_{(1)} \in E_q(\mu_{(1)}; V_{11})$
- $X_{(2)} \in E_{(p-q)}(\mu_{(2)}; V_{22})$

Nota: Hacerlo usando la función característica y también mediante la caracterización obtenida en el primer ejercicio.

Demostración. Demostración usando la función característica:

Basta con aplicar la definición de función característica anteriormente considerada tomando $u = (u_1^t : 0^t)^t$, donde u_1 es de dimensión qx1. Así, tenemos que

$$\phi_{X_1}(u_1) = exp(iu_1^t\mu_1^t)\psi(u_1^tV_{11}u_1)$$

que es la función característica de un vector aleatorio con distribución elíptica $E_q(\mu_1, V_{11})$.

De forma análoga, tomando $u = (0^t; u_2^t)$, donde u_2 es de dimensión (p-1)x1, otenemos

$$\phi_{X_2}(u_2) = exp(iu_2^t\mu_2^t)\psi(u_2^tV_2u_2)$$

Con la caracterización obtenida en el primer ejercicio $rg(A) = q \leq p$ y $c \in R^p$.

Vamos a demostrarlo hora utilizando que $Y = c + AX \in E_q(c + A\mu; AVA^t)$, donde $rg(A) = q \leq p$ y $c \in \mathbb{R}^p$.

Para este caso, tenemos que $X_1 = A_1X$, donde $A_1 = \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

donde $rg(A_1) = rg(I_q) = q$ y $c = 0$, por tanto, aplicando la caracterización anterior, tenemos que $X_1 \in E_q(A_1\mu; AVA^t) = E_q(\mu_1, V_{11})$.

Análogamente, tenemos $X_2 = A_2X$, donde $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{(p-q)} \end{pmatrix}$

Y en este caso, se verifica $rg(A_2) = p - q$ y $c = 0$, luego tenemos $X_2 \in E_{(p-q)}(A_2\mu, AVA^t) = E_{(p-q)}(\mu_2, V_{22})$

□

3. Algunas distribuciones de las clases esférica y elíptica de distribuciones en $\mathbb{R}^p$

3.1. Distribución uniforme en el círculo de radio r

Sea $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq r^2\}$ el círculo centrado en el origen y de radio $r > 0$. Dado un vector aleatorio: $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^t$ se dice que sigue la distribución uniforme en S^1 si su densidad es

$$f(x_1, x_2) = KI_{S^1}$$

donde $K > 0$ e I_{S^1} es la función indicadora en S^1.

EJERCICIOS:

- Ejercicio 9: Verificar que $K = \frac{1}{\pi r^2}$

  Solución: Tengamos en cuenta que $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(X)dX = 1$. Por tanto $K\int_{-\infty}^{\infty} I_{S^1}dX = 1$. Así:

  $$K\int_{S^1} 1dX = 1$$

  Y por tanto, atendiendo a que esa integral coincide con el área de un círculo: $K\pi r^2 = 1$. Y como conclusión sacamos que $K = \frac{1}{\pi r^2}$

- Ejercicio 10: Comprobar que $E[X] = 0$ y que $Cov[X] = \frac{r^2}{4}I_2$

  Solución:
  $$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} xKI_{S^1}dx = \int_{S^1} Kxdx = k \cdot \int_{S^1} xdx$$

  Realizamos cambio a polares:
  $$x_1 = \rho cos(\theta), x_2 = \rho sen(\theta)$$

  donde $\rho > 0$ y $0 < \theta \leq 2\pi$

  Definimos $\phi :]0, r[\times]0, 2\pi[\longrightarrow S^1$ difeomorfismo con $\phi(\rho, \theta) = (\rho cos(\theta), \rho sen(\theta))$

  Calculamos el jacobiano:

  $$|Jac\phi|(\rho, \theta) = \begin{vmatrix} cos(\theta) & -\rho sen(\theta) \\ sen(\theta) & \rho cos(\theta) \end{vmatrix} = |\rho(cos^2(\theta) + sen^2(\theta))| = |\rho| = \rho$$

  $$\int_{S^1} f(x_1, x_2)dx = \int_0^r \int_0^{2\pi} x(f \circ \rho)(\rho, \theta)|Jac\phi|(\rho, \theta)d\theta d\rho = \int_0^r \int_0^{2\pi} (\rho^2 cos(\theta), \rho^2 sen(\theta))d\theta d\rho$$

$$\int_0^r \rho^2 \left[(sen(\theta), -cos(\theta)\right]_0^{2\pi} d\rho = \int_0^{r^2} \rho^2 \left[(0,1) - (0,-1)\right] d\rho = \int_0^{r^2} 0 d\rho = 0$$

Luego $E[X] = 0$

Veamos ahora que $Cov[X] = \frac{r^2}{4} I_2$. En primer lugar, comprobemos que $Var[X] = \left(\frac{r^2}{4}, \frac{r^2}{4}\right)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x_1, x_2) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot k I_{S^1} dx = k \int_{S^1} x^2 dx$$

Realizamos el cambio a polares anterior:

$$k \cdot \int_{S^1} x^2 dx = k \int_0^r \left(\int_0^{2\pi} (\rho^3 cos^2(\theta), \rho^3 sen^2(\theta)) d\theta) d\rho \right) = k \int_0^r \rho^3 \left(\int_0^{2\pi} (cos^2(\theta), sen^2(\theta) d\theta \right) d\rho$$

$$= k \int_0^r \rho^3 \left[\frac{1}{2} (\theta + sen(\theta)cos(\theta), \theta - sen(\theta)cos(\theta)) \right]_0^{2\pi} = k \int_0^r \rho^3 (\pi, \pi) d\rho = (\pi, \pi) \int_0^r \rho^3 d\rho$$

$$= k(\pi, \pi) \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^r =$$

****

- Ejercicio 11: Calcular las distribuciones marginales así como las condicionadas. Por simetría basta calcular la distribución de X_1 y la de $X_1|X_2 = x2$.

3.2. Distribución uniforme en la esfera de radio r

Sea $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq r^2\}$ el interior y borde de la esfera centrada en 0 y de radio $r > 0$. Dado un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^t$ se dice que sigue la distribución uniforme en S^2 si su densidad es:

$$f(x_1, x_2, x_3) = K I_{S^2}$$

donde $K > 0$ e I_{S^2} en la función indicadora en S^2.

EJERCICIOS:

- Ejercicio 12: Verificar que $K = \frac{3}{4\pi r^3}$

  Solución: De manera similar al caso del círculo, ahora tenemos que se cumple que $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(X) dX = 1$. Por tanto $K \int_{-\infty}^{\infty} I_{S^2} dX = 1$. Así:

  $$K \int_{S^2} 1 dX = 1$$

  Y por tanto, atendiendo a que esa integral coincide con el área de una esfera: $K \frac{4}{3} \pi r^3 = 1$. Y como conclusión sacamos que $K = \frac{3}{4\pi r^3}$

- Ejercicio 13: Comprobar que $E[X] = 0$ y que $Cov[X] = \frac{r^2}{5} I_3$???????? 3???*********

- Ejercicio 14: Calcular las distribuciones marginales unidimensionales y bidimensionales. Dada la simetría, basta con calcular la distribución de X_1 y de $(X_1, X_2)^t$

  Solución:

En primer lugar, calculamos

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \int f(x_1,x_2,x_3)dX_3$$

Calculamos el rango donde se mueve X_3: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq r^2 \rightarrow -\sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2} \leq x_3 \leq \sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2}$.

Por tanto,

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \int_{-\sqrt{r^2-x_1^2-x_2^2}}^{\sqrt{r^2-x_1^2-x_2^2}} kdX_3 = 2k\sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2} = \frac{3\sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2}}{2\pi r^3}$$

Para que la función de distribución esté bien definida, se tiene que verificar que $x_1^2 + x_2^2 \leq r^2$.

De la misma manera, calculamos

$$f_{X_1}(x_1) = \int f_{X_1,X_2}dX_2$$

. Calculamos el rango donde se mueve $X_2 : x_1^2 + x_2^2 \leq r^2 \rightarrow -\sqrt{r^2 - x_1^2} \leq x_2 \leq \sqrt{r^2 - x_1^2}$.

Por tanto,

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{3}{2\pi r^3}\int_{-\sqrt{r^2-x_1^2}}^{\sqrt{r^2-x_1^2}} f_{X_1,X_2}dX_2 =$$

$$= \frac{3}{2\pi r^3}\left[\frac{1}{2}\left(x_2\sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2} + (r^2 - x_1^2)tan^{-1}\left(\frac{x_2}{\sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2}}\right)\right)\right]_{-\sqrt{r^2-x_1^2}}^{\sqrt{r^2-x_1^2}} =$$

$$= \frac{3}{2\pi r^3}\frac{1}{2}\pi(r^2 - x_1^2) = \frac{3(r^2 - x_1^2)}{4r^3}$$

Para que esté bien definida, $-r \leq x_1 \leq r$.

Por tanto, hemos obtenido que ambas distribuciones marginales se corresponden con la distribución uniforme del círculo y en un intervalo.

- Ejercicio 15: Calcular las distribuciones de $(X_2, X_3)^t|X_1 = x_1$ y $X_3|X_1 = x_1, X_2 = x_2$. Deducir que son distribuciones uniformes en un círculo y en un intervalo, respectivamente y, en consecuencia, calcular los dos primeros momentos.

  Solución:

  Para este ejercicio, vamos a utilizar que $f(x_1,x_2,x_3) = f_{X_1}(x_1)f(X_2,X_3|X_1 = x_1) = f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)f(X_3|X_1 = x_1, X_2 = x_2)$

  Así,

$$f_{X_2,X_3|X_2=x_2,X_3=x_3}(x_2,x_3) = \frac{f(x_1,x_2,x_3)}{f_{X_1}(x_1)} = \frac{k}{\frac{3(r^2-x_1^2)}{4r^3}} = \frac{4r^3}{3k(r^2 - x_1^2)} = \frac{1}{\pi(r^2 - x^2)}$$

de la marginal heredamos la condición de $-r \leq x_1 \leq r$.

De forma análoga,

$$f_{X_3|X_1=x_1,X_2=x_2}(x_3) = \frac{f(x_1,x_2,x_3)}{f_{X_1,X_2}} = \frac{k}{\frac{3\sqrt{r^2-x_1^2-x_2^2}}{2\pi r^3}} = \frac{1}{2\sqrt{r^2-x_1^2-x_2^2}}$$

de la marginal heredamos la condición de $x_3^2 \leq r^2 - x_1^2 - x_2^2$.

Por los conjuntos en los que están definidas y porque no dependen del punto en el que evaluemos (son constantes), podemos deducir que:

- La distribución $Y = X_1|X_2 = x_2, X_3 = x_3$ se corresponde con una distribución uniforme en el intervalo $[-r, r]$.
- La distribución $Z = X_1, X_2|X_3 = x_3$ se corresponde con una distribución uniforme en el intervalo en la esfera $x_1^2 + x_2^2 \leq r^2$.

Por tanto, para calcular los momentos de primer y segundo orden tenemos:

- Utilizando la esperanza y la varianza de una distribución uniforme en un intervalo tenemos $E[Y] = \frac{r-r}{2} = 0$ y $E[Y^2] = Var[Y] = \frac{(r+r)^2}{12} = \frac{r^2}{3}$
- Utilizando los ejercicios anteriores tenemos $E[Z] = (0,0)^t$ y $E[Z^2] = Var[Z] = \frac{r^2}{4}I_2$

3.3. Distribución uniforme en la hiperesfera de radio r

Sea $S^{p-1} = \{x \in \mathbb{R}^p : x^t x \leq r^2\}$ el interior y el borde de la hiperesfera centrada en el origen y de radio $r > 0$. Dado un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p)^t$ se dice que sigue la distribución uniforme en S^{p-1} si su densidad es:

$$f(x_1, \ldots, x_p) = KI_{S^{p-1}}$$

donde $K > 0$ e $I_{S^{p-1}}$ es la función indicadora en S^{p-1}

EJERCICIOS:

- Ejercicio 16: Verificar que $K = \frac{\Gamma(\frac{p+2}{2})}{\pi^{p/2} r^p}$.

  Solución:

  Sabemos que

  $$1 = \int f(x_1, ..., x_p)dX$$

  Calculamos ahora la integral,

  $$\int f(x_1, ..., x_p)dX = \int KI_{S^{p-1}}dX = \int_{S^{p-1}} kdX =$$

  aplicando cambio a polares

$$= 2\pi k \int_0^p \rho^{p-1} \int_0^\pi \sin^{p-2}(\theta_1) d\theta_1 ... \int_0^\pi \sin(\theta_{p-e}) d\theta_{p-2}$$

Para resolver esta integral vamos a utilizar que:

$$\int_0^\pi \sin^k(\theta) d\theta = \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{k+2}{2})}$$

Por tanto,

$$\int_0^\pi \sin p - 2\theta_1 d\theta_1 \int_0^\pi ... \int_0^\pi \sin \theta_{p-2} d\theta_{p-2} = \prod_{i=1}^{p-2} \frac{\Gamma(\frac{p-1}{2})\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{p-i+1}{2})} = \frac{\pi^{\frac{p-2}{2}}}{\Gamma(\frac{p}{2})}$$

Finalmente,

$$1 = \frac{k2\pi\pi^{\frac{p-2}{2}} r^p}{\Gamma(\frac{p}{2})p} = \frac{k\pi^{\frac{p}{2}} r^p}{\Gamma(\frac{p}{2})\frac{p}{2}} = \frac{k\pi^{\frac{p}{2}} r^p}{\Gamma(\frac{p}{2}+1)} \Rightarrow k = \frac{\Gamma(\frac{p+2}{2})}{\pi^{\frac{p}{2}} r^p}$$

- Ejercicio 17: Comprobar que $E[X] = 0$ y $Cov[X] = \frac{r^2}{p+2} I_p$.

  Solución:

  Para calcular $E[X]$ tenemos

  $$E[X] = \int_{S^{p-1}} X f(x_1, ..., x_p) dx$$

  Para ver que es 0, veamos componente a componente:

  - Para las primeras $p-2$ componentes, tendríamos que tras cambiar a polares, tendríamos que la integral más interna es una integral del tipo

    $$\int_0^\pi \sin^k \theta \cos \theta d\theta = 0$$

  - En cuanto a la componente $p-1$, de igual forma tras cambiar a polares obtendríamos que la integral más interna sería

    $$\int_0^\pi \cos(\theta_{p-1}) d\theta_{p-1} = 0$$

  - Análogamente para la componente p tenemos que la integral más interna sería

    $$\int_0^\pi \sin(\theta_{p-1}) d\theta_{p-1} = 0$$

  Así, hemos obtenido que cada componente de la $E[X]$ es 0, luego $E[X] = 0$.

  Para calcular la Cov[X], vamos a calcular en primer lugar las varianzas de cada una de las variables.

- Para cada $k = 1, ..., p-2$ expresamos

$$Var[X_k^2] = \int X_k^2 dX$$

y cambiando a polares tenemos

$$Var[X_k^2] = k\int_0^r \rho^{p+1}\int_0^\pi \prod_{j=1}^{p-3-r}(\sin\theta_j)^{p-j+1}\prod_{j=p-r-2}^{p-2}((\sin\theta_j)^{p-j-1})\cos(\theta_k)d\theta_1...d\theta_{p-2}\int_o^{2\pi}d\theta_{p-1}d\rho =$$

$$= k2\pi\int_0^r \rho^{p+1}\int_0^\pi \prod_{j=1}^{p-3-r}(\sin\theta_j)^{p-j+1}\prod_{j=p-r-1}^{p-2}((\sin\theta_j)^{p-j-1})\sin^{r+1}\theta_k\cos(\theta_k)d\theta_1...d\theta_{p-2}d\rho =$$

$$= k2\pi\int_0^r \rho^{p+1}\int \prod_{j=1}^{p-3-r}(\sin\theta_j)^{p-j+1}\prod_{j=p-r-1}^{p-2}((\sin\theta_j)^{p-j-1})\int\sin^{r+1}\theta_k\cos(\theta_k)d\theta_1...d\theta_{p-2}d\rho$$

$$= k2\pi\frac{\Gamma(\frac{r+2}{2})\sqrt{\pi}k}{\Gamma(\frac{r+5}{2})}\int_0^r \rho^{p+1}\int \prod_{j=1}^{p-3-r}(\sin\theta_j)^{p-j+1}\int\prod_{j=p-r-1}^{p-2}(\sin\theta_j)^{p-j-1}\theta_1...d\theta_{p-2}d\rho =$$

$$= k2\pi\frac{\Gamma(\frac{r+2}{2})\sqrt{\pi}k}{\Gamma(\frac{r+5}{2})}\int_0^r \rho^{p+1}\int (\prod_{j=1}^{p-3-r}(\sin\theta_j)^{p-j+1})\prod_{j=p-r-1}^{p-2}\int(\sin\theta_j)^{p-j-1}\theta_1...d\theta_{p-2}d\rho =$$

$$= 2k\pi\frac{\Gamma(\frac{r+2}{2})\sqrt{\pi}k}{\Gamma(\frac{r+5}{2})}\frac{\Gamma(1)(\sqrt{\pi})^{r-1}}{\Gamma(\frac{r+2}{2})}\int_0^r \rho^{p+1}\int (\prod_{j=1}^{p-3-r}(\sin\theta_j)^{p-j+1})\theta_1...d\theta_{p-2}d\rho =$$

$$= 2k\pi\frac{\sqrt{\pi}^r}{2\Gamma(\frac{r+5}{2})}\int_0^r \rho^{p+1}\int (\prod_{j=1}^{p-3-r}(\sin\theta_j)^{p-j+1})\theta_1...d\theta_{p-2}d\rho =$$

$$= k\pi\frac{\sqrt{\pi}^r}{\Gamma(\frac{r+5}{2})}\int_0^r \rho^{p+1}\prod_{j=1}^{p-3-r}\int \sin\theta_j)^{p-j+1}\theta_1...d\theta_{p-2}d\rho =$$

$$= \frac{k\pi\sqrt{\pi}^r}{\Gamma(\frac{r+5}{2})}\frac{\Gamma(\frac{r+5}{2})\sqrt{\pi}^{p-2-r}}{\Gamma(\frac{p+2}{2})}\int_0^r \rho^{p+1}d\rho = \frac{\pi k\pi^{\frac{p-2}{2}}}{\Gamma(\frac{p+2}{2})}\int_0^r \rho^{p+1}d\rho = \frac{\pi k r^{p+2}\pi^{\frac{p-2}{2}}}{\Gamma(\frac{p+2}{2})}\int_0^r \rho^{p+1}d\rho =$$

$$= \frac{\pi k r^{p+2}\pi^{\frac{p-2}{2}}}{\Gamma(\frac{p+2}{2})(p+2)} = \frac{r^2}{p+2}$$

- Veamos ahora las componentes x_{p-1}, x_p. Para empezar, tengamos en cuenta que

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) = \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) = \pi$$

Por tanto, para el caso x_{p-1} y x_p, la integral que tenemos que resolver es:

$$\pi k \int_0^r \rho^{p+1} d\rho \prod_{j=1}^{p-2} \int_0^{\pi} \sin^{p-j+1}(\theta_j) d\theta_j = \pi k \frac{\sqrt{\pi}^{p-2}}{\Gamma(\frac{p+2}{2})} \int_0^r \rho^{p+1} d\rho = \frac{r^2}{p+2}$$

Para concluir que $Cov[X] = \frac{r^2}{p+2} I_p$ queda comprobar que $Cov[X_i, X_j] = 0, \forall i \neq j$. Para $1 \leq i, j \leq p$ con $i \neq p-1$ y $j \neq p-1$ aparecen integrales del tipo

$$\int_0^{\pi} \sin^k(\theta) \cos(\theta) d\theta = 0$$

En caso de que $j = p-1$ y $i \neq p$ aparece la integral

$$\int_o^{2\pi} cos(\theta_{p-1}) d\theta_{p-1} = 0$$

Para finalizar, en el caso $i = p-1$ y $j = p$ aparece la integral

$$\int_0^{2\pi} \cos(\theta p - 1) \sin(\theta_{p-1}) d\theta_{p-1} = 0$$

- Ejercicio 18: Calcular las distribuciones marginales unidimensionales y bidimensionales. Dada la simetría basta con calcular, por ejemplo, las de X_1 y $(X_1, X_2)^t$.

Solución:

Para calcular la distribución marginal de X_1, integrando con respecto al resto de variables. Para esto, veamos dónde se mueven el resto de variables: $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_p^2 \leq r^2 \Rightarrow x_2^2 + ... + x_p^2 \leq r^2 - x_1^2$, espacio que se corresponde con una hiperesfera de una dimensión menos. Entonces:

$$f_{X_1}(x_1) = k \int_{S^{p-2}} dx_2 ... dx_p$$

Notamos que estamos integrando el área de la superficie de S^{p-2} de radio $\sqrt{r^2 - x_1^2}$, luego, utilizando el área de la hiperesfera:

$$f_{X_1}(x_1) = k \frac{\pi^{\frac{p-1}{2}} (\sqrt{r^2 - x_1^2})^{p-1}}{\Gamma(\frac{p-1}{2} + 1)} = \frac{\Gamma(\frac{p+2}{2})}{\sqrt{\pi} r^p \Gamma(\frac{p+1}{2})} (r^2 - x_1^2)^{\frac{p-1}{2}}$$

donde $-r \leq x_1 \leq r$.

Para la distribución bidimensional utilizamos un proceso análogo. Para calcular el rango en el que se mueven el resto de variables tenemos que: $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_p^2 \leq r^2 \Rightarrow x_3^2 + ... + x_p^2 \leq r^2 - x_1^2 - x_2^2$, espacio que se corresponde con una hiperesfera de dos dimensiones menos. Entonces:

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = k\int_{S^{p-3}} dx_3...dx_p$$

que se correspondería con el volumen de la hiperesfera S^{p-3} de radio $\sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2}$. Por tanto, de manera análoga:

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = k\int_{S^{p-3}} dx_3...dx_p = \frac{\Gamma(\frac{p+2}{2})}{\pi^{p+2}r^p}\frac{\pi^{\frac{p+2}{2}}(\sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2})^{p-2}}{\Gamma(\frac{p-2}{2}+1)} = \frac{\Gamma(\frac{p+2}{2})}{\pi r^p \Gamma(\frac{p}{2})}(r^2 - x_1^2 - x_2^2)^{\frac{p-2}{2}}$$

donde $x_1^2 + x_2^2 \leq r^2$.

- Ejercicio 19: Si consideramos $\mathbf{X}$ partido en la forma $\mathbf{X}$=$(X_{(1)}^t|X_{(2)}^t)^t$ donde $X_{(1)}$ es de dimensión q y $X_{(2)}$ lo es $(p-q)$, calcular la distribución de $X_{(1)}$.

  Solución:

  Por inducción a partir de las dos marginales realizadas en el apartado anterior, nos damos cuenta que tienen la misma forma pero aumentando el exponente de π de la forma $\pi^{\frac{dim}{2}}$, además la segunda parte es de la forma $(r^2 - x_1^2 - ... - x_{dim}^2)^{\frac{p-dim}{2}}$ y la gamma del nominador se ve afectada de la forma $\Gamma(\frac{p-dim+2}{2})$. De esta forma, podemos deducir que

  $$f_{X_{(1)}}(x_{(1)}) = \frac{\Gamma(\frac{p+2}{2})}{\pi^{\frac{q}{2}} r^p \Gamma(\frac{p-q+2}{2})}(r^2 - x_{(1)}^t x_{(1)})^{\frac{p-q}{2}}$$

  donde $x_{(2)}^t x_{(2)} \leq r^2$.

- Ejercicio 20: Calcular la distribución condicionada $X_{(2)}|X_{(1)} = x_{(1)}$. Deducir que es una distribución uniforme en S^{p-q-1}, o sea, la esfera de dimensión $p-q$. En consecuencia, calcular los dos primeros momentos.

3.4. Distribución T-Student esférica

Sea $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p)^t$ un vector aleatorio. Diremos que se distribuye según la distribución t de student esférica p-dimensional con n grados de libertad si su función de densidad es:

$$f(x_1,\ldots,x_p)^t = \frac{\Gamma(\frac{n+p}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})(n\pi)^{\frac{p}{2}}[1+\frac{1}{n}x^t x]^{\frac{n+p}{2}}}$$

con $x \in \mathbb{R}^p$

EJERCICIO 21: Demostrar que los momentos de esta distribución son:

Solución:

$$E[X] = 0$$
$$Cov[X] = \frac{n}{n-2}I_p$$

con $n > 2$.

Vamos a demostrar en primer lugar que la $E[X] = 0$, para ello, procedemos como normalmente:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} xf(x)dx + \int_{0}^{\infty} xf(x)dx$$

ahora, con un cambio de variable en la primera integral

$$-\int_{\infty}^{0}(-t)f(-t)dt + \int_{0}^{\infty} xf(x)dx = \int_{\infty}^{0} tf(-t)dt + \int_{0}^{\infty} xf(x)dx = -\int_{0}^{\infty} tf(-t)dt + \int_{0}^{\infty} xf(x)dx$$

nombramos ahora t=x obteniendo

$$-\int_{0}^{\infty} xf(-x)dt + \int_{0}^{\infty} xf(x)dx$$

Utilizando ahora que la función de densidad de la distribución T-Student es esférica (solo depende de x en función de $x^t x$) obtenemos que

$$-\int_{0}^{\infty} xf(x)dt + \int_{0}^{\infty} xf(x)dx = 0$$

Notar que para que obtengamos una indeterminación del tipo $\infty - \infty$ necesitamos que las integrales sea finitas, pero lo son.

3.5. Versiones elípticas de las densidades uniformes en la hiperesfera y t-student

EJERCICIOS:

- Ejercicio 22: Sea **U** un vector p-dimensional distribuido de forma uniforme en el interior y borde de la hiperesfera de dimensión p y racio $r > 0$. Consideremos μ un vector de $\mathbb{R}^p$ y V_{pxp} una matriz definida positiva descompuesta en la forma $V = CC^t$. Calcular la densidad del vector aleatorio $X = \mu + CU$.
- Ejercicio 23: Calcular $E[X]$ y $Cov[X]$ para la distribución uniforme en el elipsoide E_r^p.

  Solución:

  Como $X = \mu + CU$, donde U es un vector p-dimensional siguiendo una distribución esférica, hemos demostrado al principio del trabajo que

  $$E[X] = E[\mu + CU] = E[\mu] + CE[\mu] = E[\mu] = \mu$$

  $$Cov[X] = CCov[U]C^t = C\frac{r^2}{p+2}I_pC^2 = \frac{r^2}{p+2}CC^t = \frac{r^2}{p+2}V$$

- Ejercicio 24: Sea **U** un vector p-dimensional distribuido según una t de Studen multivariante esférica. Consideremos μ un vector de $\mathbb{R}^p$ y V_{pxp} una matriz definida positiva descompuesta en la forma $V = CC^t$. Calcular la densidad del vector aleatorio $X = \mu + CU$.

- Ejercicio 25: Calcular $E[X]$ y $Cov[X]$ para la distribución anterior.

  De forma análoga al ejercicio 23 obtenemos:

$$E[X] = E[\mu + CU] = E[\mu] + CE[\mu] = E[\mu] = \mu$$

$$Cov[X] = CCov[U]C^t = C\frac{n}{n-2}C^t = \frac{n}{n-2}CC^t = \frac{n}{n-2}V$$