



Estadística Multivariante

Clase esférica y elíptica de distribuciones

Trabajo A

Antonio R. Moya
Martín-Castaño
Elena Romero Contreras
Nuria Rodríguez
Barroso
Universidad de Granada
anmomar85@correo.ugr.es
elenaromeroc@correo.ugr.es
rbnuria6@gmail.com

Índice

1. Clases esférica y elíptica de distribuciones en \mathbb{R}^p	2
2. Algunas distribuciones de las clases esférica y Elíptica de distribuciones en \mathbb{R}^p	3
2.1. Distribución uniforme en el círculo de radio r	3
2.2. Distribución uniforme en la esfera de radio r	4
2.3. Distribución uniforme en la hiperesfera de radio r	4
2.4. Distribución T-Student esférica	5
2.5. Versiones elípticas de las densidades uniformes en la hiperesfera y t-student	5

1. Clases esférica y elíptica de distribuciones en \mathbb{R}^p

Definición 1.1. Dado un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^t$, se dice que se distribuye en la clase esférica de distribuciones en \mathbb{R}^p si \mathbf{X} y $\mathbf{H}\mathbf{X}$ tienen la misma distribución, $\forall \mathbf{H} \in O(p)$ siendo $O(p)$ el grupo de matrices ortogonales de orden p . Esto es, si su distribución es invariante frente a transformaciones ortogonales.

EJEMPLO 1.1: Un ejemplo de densidad esférica es la distribución uniforme en la hipersfera de radio r :

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma(\frac{p+2}{2})}{\pi^{p/2} r^p} \mathbf{I}_{[\|\mathbf{x}\| \leq r]}$$

Vemos ahora un resultado sobre la forma que adopta la función característica de cualquier variable que se distribuya en la clase esférica.

Teorema 1.1. Sea \mathbf{X} un vector aleatorio con distribución en la clase esférica. Entonces su función característica es de la forma $\phi(\mathbf{t}) = \psi(\mathbf{t}^t \mathbf{t})$, con ψ una cierta función. Además, $E[\mathbf{X}] = \mathbf{0}$ y $\text{Cov}[\mathbf{X}] = -2\psi'(\mathbf{0})\mathbf{I}_p$.

Demostración. EJERCICIO.

Para esta demostración es necesario utilizar algunos aspectos de la teoría de invarianza (buscarlos en el apéndice A y ponerlos). \square

Definición 1.2. Dado un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^t$, se dice que se distribuye en la clase elíptica de parámetros $\mu \in \mathbb{R}^p$ y $\mathbf{V}_{p \times p}$ ($\mathbf{V} > \mathbf{0}$) si su densidad es de la forma

$$f(\mathbf{x}) = C_p |\mathbf{V}|^{-\frac{1}{2}} h((\mathbf{x} - \mu)^t \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{x} - \mu))$$

donde C_p es una constante y h una función suficientemente regular. A la clase elíptica la notaremos por $E_p(\mu; V)$.

EJEMPLO 1.2: Un ejemplo de densidad elíptica es la distribución uniforme en el elipsoide de dimensión p :

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma(\frac{p+2}{2}) |\mathbf{A}|^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{p}{2}} r^0} \mathbf{I}_{[(\mathbf{x} - \mu)^t \mathbf{A} (\mathbf{x} - \mu) \leq r^2]}$$

EJERCICIOS:

- Comprobar que la clase esférica coincide con la elíptica $E(0; I_p)$.

Solución: Si tenemos que un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^t$ se distribuye en la clase elíptica $E(0; I_p)$, entonces cumple que su función de densidad es de la forma $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = C_p h(x^t x)$, por lo que sólo depende de \mathbf{x} a través de $x^t x$. De este modo, es invariante por transformaciones ortogonales con lo que pertenece también a la clase esférica. ¿¿¿El OTRO CASO???

- Verificar la siguiente caracterización, que generaliza la vista en el caso normal:

$$\mathbf{X} \in E_p(\mu; V) \Leftrightarrow \mathbf{X} = \mu + \mathbf{C}\mathbf{U}$$

donde $\mu \in \mathbb{R}^p$, \mathbf{C} es la matriz dada por la descomposición de Cholesky de \mathbf{V} , es decir, $\mathbf{V} = \mathbf{C}\mathbf{C}^t$ y \mathbf{U} es un vector de la clase esférica p -dimensional.

- Verificar que si $\mathbf{X} \in E_p(\mu; V)$ entonces $E[\mathbf{X}] = \mu + \mathbf{C}E[\mathbf{U}]$ y $\text{Cov}(\mathbf{X}) = \mathbf{C}\text{Cov}(\mathbf{U})\mathbf{C}^t$ siendo \mathbf{U} perteneciente a la clase esférica.

Solución: En este caso, aplicando el ejercicio anterior tenemos que $X = \mu + CU$, y, por tanto, por las propiedades de linealidad de la esperanza y de la covarianza, se cumplen las dos condiciones que se piden en este apartado. ???

En cuanto a la función característica, se plantea el siguiente ejercicio:

- Sea \mathbf{X} un vector aleatorio con distribución en la clase elíptica $E_p(\mu; V)$. Entonces su función característica es de la forma $\phi(u) = e^{iu^t \mu} \psi(u^t V u)$, con ψ una cierta función.
- Sea \mathbf{X} un vector aleatorio con distribución en la clase elíptica $E_p(\mu; V)$. Comprobar que si $A_{q \times p}$ es una matriz de constantes con $\text{rg}(A) = q \leq p$, y $c \in \mathbb{R}^p$, entonces $\mathbf{Y} = \mathbf{c} + \mathbf{A}\mathbf{X} \in E_q(c + A\mu; AVA^t)$.
- Sea $\mathbf{X} \in E_p(\mu; V)$. Entonces $E[X] = \mu$ y $\text{Cov}[X] = -2\psi'(0)V$.
- Comprobar que todas las distribuciones de la clase elíptica $E_p(\mu; V)$ tienen igual matriz de correlaciones.

EJERCICIO:

Sea $\mathbf{X} \in E_p(\mu; V)$. Particionemos el vector \mathbf{X} de la forma $\mathbf{X} = (X_{(1)}^t | X_{(2)}^t)^t$ donde $X_{(1)}$ es de dimensión $q \times 1$ y $X_{(2)}$ lo es $(p - q) \times 1$. Consideremos en μ y V las particiones inducidas

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_{(1)} \\ \mu_{(2)} \end{pmatrix}; V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}$$

Entonces se verifica

- $X_{(1)} \in E_q(\mu_{(1)}; V_{11})$
- $X_{(2)} \in E_{(p-q)}(\mu_{(2)}; V_{22})$

***Nota: Hacerlo usando la función característica y también mediante la caracterización obtenida en el primer ejercicio.

2. Algunas distribuciones de las clases esférica y Elíptica de distribuciones en \mathbb{R}^p

2.1. Distribución uniforme en el círculo de radio r

Sea $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq r^2\}$ el círculo centrado en el origen y de radio $r > 0$. Dado un vector aleatorio: $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^t$ se dice que sigue la distribución uniforme en S^1 si su densidad es

$$f(x_1, x_2) = KI_{S^1}$$

donde $K > 0$ e I_{S^1} es la función indicadora en S^1 .

EJERCICIOS:

- Verificar que $K = \frac{1}{\pi r^2}$

Solución: Tengamos en cuenta que $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(X) dX = 1$. Por tanto $K \int_{-\infty}^{\infty} I_{S^1} dX = 1$. Así:

$$K \int_{S^1} 1 dX = 1$$

- Calcular las distribuciones marginales así como las condicionadas. Por simetría basta calcular la distribución de X_1 y la de $X_1|X_2 = x_2$.

2.4. Distribución T-Student esférica

Sea $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^t$ un vector aleatorio. Diremos que se distribuye según la distribución t de student esférica p-dimensional con n grados de libertad si su función de densidad es:

$$f(x_1, \dots, x_p)^t = \frac{\Gamma(\frac{n+p}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})(n\pi)^{\frac{p}{2}} [1 + \frac{1}{n} x^t x]^{\frac{n+p}{2}}}$$

con $x \in \mathbb{R}^p$

Ejercicio: Demostrar que los momentos de esta distribución son:

$$E[X] = 0$$

$$Cov[X] = \frac{n}{n-2} I_p$$

con $n > 2$.

2.5. Versiones elípticas de las densidades uniformes en la hiperesfera y t-student

*****TODO LO QUE QUEDAN SON EJERCICIOS*****