



# *Estadística Multivariante*

## *Clase esférica y elíptica de distribuciones*

*Trabajo A*

Antonio R. Moya  
Martín-Castaño  
Elena Romero Contreras  
Nuria Rodríguez  
Barroso  
Universidad de Granada  
[anmomar85@correo.ugr.es](mailto:anmomar85@correo.ugr.es)  
[elenaromeroc@correo.ugr.es](mailto:elenaromeroc@correo.ugr.es)  
[rbnuria6@gmail.com](mailto:rbnuria6@gmail.com)

## Índice

<b>1. Introducción.</b>	<b>2</b>
<b>2. Clases esférica y elíptica de distribuciones en <math>\mathbb{R}^p</math></b>	<b>2</b>
<b>3. Algunas distribuciones de las clases esférica y elíptica de distribuciones en <math>\mathbb{R}^p</math></b>	<b>6</b>
3.1. Distribución uniforme en el círculo de radio $r$ . . . . .	6
3.2. Distribución uniforme en la esfera de radio $r$ . . . . .	6
3.3. Distribución uniforme en la hiperesfera de radio $r$ . . . . .	7
3.4. Distribución T-Student esférica . . . . .	7
3.5. Versiones elípticas de las densidades uniformes en la hiperesfera y t-student . . . . .	8

## 1. Introducción.

La distribución normal multivariante que hemos desarrollado en clase de teoría, es un caso particular de una familia de distribuciones muy utilizadas en el análisis multivariante, las *distribuciones elípticas*. Para introducirlas, consideraremos en primer lugar el caso más simple de estas, las *distribuciones esféricas*.

Para finalizar, veremos casos concretos de distribuciones de estas clases en  $\mathbb{R}^p$ .

## 2. Clases esférica y elíptica de distribuciones en $\mathbb{R}^p$

**Definición 2.1.** Dado un vector aleatorio  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^t$ , se dice que se distribuye en la clase esférica de distribuciones en  $\mathbb{R}^p$  si  $\mathbf{X}$  y  $\mathbf{H}\mathbf{X}$  tienen la misma distribución,  $\forall \mathbf{H} \in O(p)$  siendo  $O(p)$  el grupo de matrices ortogonales de orden  $p$ . Esto es, si su distribución es invariante frente a transformaciones ortogonales.

EJEMPLO 2.1: Un ejemplo de densidad esférica es la distribución uniforme en la hipersfera de radio  $r$ :

$$f_x(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma(\frac{p+2}{2})}{\pi^{p/2} r^p} \mathbf{I}_{[\|\mathbf{x}\| \leq r]}$$

Vemos ahora un resultado sobre la forma que adopta la función característica de cualquier variable que se distribuya en la clase esférica.

**Teorema 2.1.** Sea  $\mathbf{X}$  un vector aleatorio con distribución en la clase esférica. Entonces su función característica es de la forma  $\phi(\mathbf{t}) = \psi(\mathbf{t}^t \mathbf{t})$ , con  $\psi$  una cierta función. Además,  $E[\mathbf{X}] = \mathbf{0}$  y  $\text{Cov}[\mathbf{X}] = -2\psi'(0)\mathbf{I}_p$ .

*Demostración.* Para la primera parte de esta demostración vamos a utilizar resultados de la teoría de invarianzas:

**Definición 2.2.** Se dice que una función  $\Phi$  es invariante sobre el espacio  $\chi$  es invariante bajo  $G$  si verifica  $\Phi(gx) = \Phi(x), \forall x \in \chi, \forall g \in G$

**Definición 2.3.** Una función  $\Phi$  sobre  $\chi$  se dice invariante maximal bajo  $G$  si es invariante bajo  $G$  y además verifica  $\phi(x_1) = \phi(x_2) \Rightarrow x_1 \sim x_2 \pmod{G}$

**Teorema 2.2.** Sea  $\Phi$  un invariante maximal bajo  $G$  para  $\chi$ . Entonces una función  $\psi$  sobre  $\chi$  es invariante bajo  $G$  si y solo si es función de  $\Phi$ .

**Proposición 2.3.** Sea  $G = O(p)$  el grupo de matrices ortogonales de orden  $p \times p$ . Entonces  $\Phi(x) = x^t x$  es un invariante maximal bajo  $G$ .

Para ver que  $\Phi(t) = \psi(t^t t)$ , basta con considerar la función  $f(t) = t^t t$ , que es un invariante maximal por la proposición anterior, y que  $\Phi$  es un invariante por la definición de clase esférica (como  $X$  y  $HX$  tienen la misma distribución,  $\Phi_x(t) = \Phi_x(Ht), \forall H \in G$ ). Entonces, aplicando el Teorema anterior, tenemos que  $\Phi(t) = \psi(f(t)) = \psi(t^t t)$ , para alguna función  $\psi$ .

Para demostrar que  $E[X] = 0$ , basta con darse cuenta de que, dado que  $X$  y  $HX$  tienen la misma distribución, se verifica que  $E[X] = E[HX], \forall H \in O(p)$ , y por la linealidad de la esperanza matemática sabemos que  $E[HX] = HE[X], \forall H \in O(p)$ , por tanto, llegamos a que  $E[X] = HE[X], \forall H \in O(p)$ , luego se debe verificar que  $E[X] = 0$ .

\*\*\*\*\* FALTA LO DE LA COVARIANZA

□

**Definición 2.4.** Dado un vector aleatorio  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^t$ , se dice que se distribuye en la clase elíptica de parámetros  $\mu \in \mathbb{R}^p$  y  $\mathbf{V}_{p \times p}$  ( $\mathbf{V} > 0$ ) si su densidad es de la forma

$$f(\mathbf{x}) = C_p |\mathbf{V}|^{-\frac{1}{2}} h((\mathbf{x} - \mu)^t \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{x} - \mu))$$

donde  $C_p$  es una constante y  $h$  una función suficientemente regular. A la clase elíptica la notaremos por  $E_p(\mu; V)$ .

EJEMPLO 2.2: Un ejemplo de densidad elíptica es la distribución uniforme en el elipsoide de dimensión  $p$ :

$$f_x(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma(\frac{p+2}{2}) |\mathbf{A}|^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{p}{2}} r^0} \mathbf{I}_{[(\mathbf{x}-\mu)^t \mathbf{A} (\mathbf{x}-\mu) \leq r^2]}$$

### EJERCICIOS:

- Comprobar que la clase esférica coincide con la elíptica  $E(0; I_p)$ .

*Solución:*

Si tenemos que un vector aleatorio  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^t$  se distribuye en la clase elíptica  $E(0; I_p)$ , entonces cumple que su función de densidad es de la forma  $f_x(\mathbf{x}) = C_p h(x^t x)$ , por lo que sólo depende de  $\mathbf{x}$  a través de  $x^t x$ . De este modo, es invariante por transformaciones ortogonales con lo que pertenece también a la clase esférica. ¿¿¿El OTRO CASO???

- Verificar la siguiente caracterización, que generaliza la vista en el caso normal:

$$X \in E_p(\mu; V) \Leftrightarrow X = \mu + CU$$

donde  $\mu \in \mathbb{R}^p$ ,  $C$  es la matriz dada por la descomposición de Cholesky de  $V$ , es decir,  $V = CC^t$  y  $U$  es un vector de la clase esférica  $p$ -dimensional.

*Solución:*

Consideramos  $X = \mu + CU$ , y calculamos cual es su función de distribución. Para ello, como  $U$  es un vector de la clase esférica  $p$ -dimensional, consideramos  $f_U$  su función de distribución. Por lo que ya hemos demostrado,  $f_U$  depende de  $t$  solo a través de  $t^t t$ , esto es  ${}_u(t f) = h(t^t t)$ , para cierta función  $h$ . Además, estamos considerando que la matriz  $C$  es no singular. Por tanto, la transformación de  $U$  a  $X$  tiene el Jacobiano  $J = \det(C^{-1})$ , y tenemos que aplicando un resultado de transformación para vectores aleatorios podemos obtener la función de densidad de  $X$  como:

$$f_x(x) = |\det(C^{-1})| f_U(C^{-1}(x - \mu)) = [\det(A)^{-1} \det(A^{-1})]^{1/2} h[(x - \mu)^t (A^t)^{-1} A^{-1} (x - \mu)] =$$

$$\det[(AA^t)^{-1}]^{1/2} h[(x - \mu)^t (AA^t)^{-1} (x - \mu)] = \frac{h[(x - \mu)^t V^{-1} (x - \mu)]}{|V|^{1/2}}$$

\*\*\*\*\* ME LO HE SACADO DEL SEGUNDO LIBRO, MAGIA!

- Verificar que si  $X \in E_p(\mu; V)$  entonces  $E[X] = \mu + CE[U]$  y  $Cov(X) = CCov(U)C^t$  siendo  $U$  perteneciente a la clase esférica.

*Solución:*

Dada la linealidad de la esperanza matemática, sabemos que  $E[\mu + CU] = E[\mu] + E[CU] = \mu + CE[U]$ .

En cuanto a la covarianza, dada la invarianza por translaciones obtenemos que  $Cov[\mu + CU] = Cov[CU]$ , y aplicando la bilinealidad de la covarianza obtenemos  $Cov[CU] = CCov[U]C^t$ , por lo que hemos obtenido que  $Cov[\mu + CU] = CCov[U]C^t$ .

En cuanto a la función característica, se plantea el siguiente ejercicio:

- Sea  $\mathbf{X}$  un vector aleatorio con distribución en la clase elíptica  $E_p(\mu; V)$ . Entonces su función característica es de la forma  $\phi(u) = e^{iu^t \mu} \psi(u^t V u)$ , con  $\psi$  una cierta función.

*Solución:*

Sea  $X \in E_p(\mu, V)$ , aplicando a la definición de función característica tenemos

$$\phi_X(u) = \phi(u) = E[\exp(iu^t X)] = E[\exp(iu^t (\mu + CU))] = \exp(iu^t \mu) \phi_{CU}(u) = \exp(iu^t \mu) \phi_U(C^t u)$$

Aplicando ahora el primer resultado que hemos demostrado ( $\phi_u(t) = \psi(t^t t)$ ) para una cierta función  $\chi$  tenemos

$$\phi(u) = \exp(iu^t \mu) \psi(t^t C C^t t) = \exp(iu^t \mu) \psi(t^t V t)$$

como buscábamos.

- Sea  $\mathbf{X}$  un vector aleatorio con distribución en la clase elíptica  $E_p(\mu; V)$ . Comprobar que si  $A_{q \times p}$  es una matriz de constantes con  $\text{rg}(A) = q \leq p$ , y  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^p$ , entonces  $\mathbf{Y} = \mathbf{c} + \mathbf{A}\mathbf{X} \in E_q(\mathbf{c} + \mathbf{A}\mu; \mathbf{A}V\mathbf{A}^t)$ .

*Solución:*

- Sea  $\mathbf{X} \in E_p(\mu; V)$ . Entonces  $E[X] = \mu$  y  $Cov[X] = -2\psi'(0)V$ .

*Solución:*

Para resolver este ejercicio, basta con utilizar el ejercicio anterior en el que se expresaba la esperanza matemática y la matriz de correlaciones de un vector aleatorio con distribución elíptica  $X = \mu + CU$  en función de la esperanza matemática y la matriz de correlaciones de  $U$ , siendo  $U$  perteneciente a la clase esférica junto  $E[u]$  y  $Cov[U]$  calculadas anteriormente, de esta forma tenemos:

$$\begin{aligned} E[X] &= \mu + CE[U] = \mu + C0 = \mu \\ Cov[X] &= CCov[U]C^t = C(-2\psi'(0))I_p C^t = -2\psi'(0)C I_p C^t = -2\psi'(0)V \end{aligned}$$

- Comprobar que todas las distribuciones de la clase elíptica  $E_p(\mu; V)$  tienen igual matriz de correlaciones.

*Solución:*

Todas las distribuciones de la clase  $X \in E_p(\mu; V)$  se pueden denotar de la siguiente manera  $X = \mu + CU$ , donde  $U$  pertenece a la clase elíptica y  $C$  verifica  $V = CC^t$ .

Por tanto, hemos probado en el apartado anterior que  $Cov[X] = -2\psi'(0)V$ .

\*\*\*\* PUTADA, la  $\psi$  no es la misma para todas las esféricas, o si? Si no ver que  $\psi'(0)$  si que lo es.

**EJERCICIO:**

Sea  $\mathbf{X} \in E_p(\mu; V)$ . Particionemos el vector  $\mathbf{X}$  de la forma  $\mathbf{X} = (X_{(1)}^t | X_{(2)}^t)^t$  donde  $X_{(1)}$  es de dimensión  $q \times 1$  y  $X_{(2)}$  lo es  $(p - q) \times 1$ . Consideremos en  $\mu$  y  $V$  las particiones inducidas

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_{(1)} \\ \mu_{(2)} \end{pmatrix}; V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}$$

Entonces se verifica

- $X_{(1)} \in E_q(\mu_{(1)}; V_{11})$
- $X_{(2)} \in E_{(p-q)}(\mu_{(2)}; V_{22})$

**Nota:** Hacerlo usando la función característica y también mediante la caracterización obtenida en el primer ejercicio.

*Demostración. Demostración usando la función característica:*

Basta con aplicar la definición de función característica anteriormente considerada tomando  $u = (u_1^t; 0^t)^t$ , donde  $u_1$  es de dimensión  $q \times 1$ . Así, tenemos que

$$\phi_{X_1}(u_1) = \exp(iu_1^t \mu_1^t) \psi(u_1^t V_{11} u_1)$$

que es la función característica de un vector aleatorio con distribución elíptica  $E_q(\mu_1, V_{11})$ .

De forma análoga, tomando  $u = (0^t; u_2^t)$ , donde  $u_2$  es de dimensión  $(p-1) \times 1$ , obtenemos

$$\phi_{X_2}(u_2) = \exp(iu_2^t \mu_2^t) \psi(u_2^t V_{22} u_2)$$

Con la caracterización obtenida en el primer ejercicio  $rg(A) = q \leq p$  y  $c \in \mathbb{R}^p$ .

Vamos a demostrarlo ahora utilizando que  $Y = c + AX \in E_q(c + A\mu; AVA^t)$ , donde  $rg(A) = q \leq p$  y  $c \in \mathbb{R}^p$ .

Para este caso, tenemos que  $X_1 = A_1 X$ , donde  $A_1 = \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

donde  $rg(A_1) = rg(I_q) = q$  y  $c = 0$ , por tanto, aplicando la caracterización anterior, tenemos que  $X_1 \in E_q(A_1 \mu; AVA^t) = E_q(\mu_1, V_{11})$ .

\*\*\*\*\* NO VEO QUE  $V_{11} = AVA^t$ , pero es que tiene que ser así.

Análogamente, tenemos  $X_2 = A_2 X$ , donde  $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{(p-q)} \end{pmatrix}$

Y en este caso, se verifica  $rg(A_2) = p - q$  y  $c = 0$ , luego tenemos  $X_2 \in E_{(p-q)}(A_2 \mu, AVA^t) = E_{(p-q)}(\mu_2, V_{22})$

□

### 3. Algunas distribuciones de las clases esférica y elíptica de distribuciones en $\mathbb{R}^p$

#### 3.1. Distribución uniforme en el círculo de radio $r$

Sea  $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq r^2\}$  el círculo centrado en el origen y de radio  $r > 0$ . Dado un vector aleatorio:  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^t$  se dice que sigue la distribución uniforme en  $S^1$  si su densidad es

$$f(x_1, x_2) = KI_{S^1}$$

donde  $K > 0$  e  $I_{S^1}$  es la función indicadora en  $S^1$ .

#### EJERCICIOS:

- Verificar que  $K = \frac{1}{\pi r^2}$

*Solución:* Tengamos en cuenta que  $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(X) dX = 1$ . Por tanto  $K \int_{-\infty}^{\infty} I_{S^1} dX = 1$ . Así:

$$K \int_{S^1} 1 dX = 1$$

Y por tanto, atendiendo a que esa integral coincide con el área de un círculo:  $K\pi r^2 = 1$ . Y como conclusión sacamos que  $K = \frac{1}{\pi r^2}$

- Comprobar que  $E[X] = 0$  y que  $Cov[X] = \frac{r^2}{4} I_2$

*Solución:*

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} xKI_{S^1}dx = \int_{S^1} Kxdx = k \cdot \int_{S^1} xdx$$

Realizamos cambio a polares:

$$x_1 = \rho \cos(\theta), x_2 = \rho \sin(\theta)$$

donde  $\rho > 0$  y  $0 < \theta \leq 2\pi$

Definimos  $\phi : ]0, r[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow S^1$  difeomorfismo con  $\phi(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$

Calculamos el jacobiano:

$$|Jac(\phi(\rho, \theta))| =$$

\*\*\*\*

- Calcular las distribuciones marginales así como las condicionadas. Por simetría basta calcular la distribución de  $X_1$  y la de  $X_1|X_2 = x_2$ .

#### 3.2. Distribución uniforme en la esfera de radio $r$

Sea  $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq r^2\}$  el interior y borde de la esfera centrada en 0 y de radio  $r > 0$ . Dado un vector aleatorio  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^t$  se dice que sigue la distribución uniforme en  $S^2$  si su densidad es:

$$f(x_1, x_2, x_3) = KI_{S^2}$$

donde  $K > 0$  e  $I_{S^2}$  es la función indicadora en  $S^2$ .

### EJERCICIOS:

- Verificar que  $K = \frac{3}{4\pi r^3}$

*Solución:* De manera similar al caso del círculo, ahora tenemos que se cumple que  $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(X)dX = 1$ . Por tanto  $K \int_{-\infty}^{\infty} I_{S^2}dX = 1$ . Así:

$$K \int_{S^2} 1dX = 1$$

Y por tanto, atendiendo a que esa integral coincide con el área de una esfera:  $K \frac{4}{3}\pi r^3 = 1$ . Y como conclusión sacamos que  $K = \frac{3}{4\pi r^3}$

- Comprobar que  $E[X] = 0$  y que  $Cov[X] = \frac{r^2}{5}I_3$  ??????? 3???
- Calcular las distribuciones marginales unidimensionales y bidimensionales. Dada la simetría, basta con calcular la distribución de  $X_1$  y de  $(X_1, X_2)^t$
- Calcular las distribuciones de  $(X_2, X_3)^t | X_1 = x_1$  y  $X_3 | X_1 = x_1, X_2 = x_2$ . Deducir que son distribuciones uniformes en un círculo y en un intervalo, respectivamente y, en consecuencia, calcular los dos primeros momentos.

### 3.3. Distribución uniforme en la hiperesfera de radio r

Sea  $S^{p-1} = \{x \in \mathbb{R}^p : x^t x \leq r^2\}$  el interior y el borde de la hiperesfera centrada en el origen y de radio  $r > 0$ . Dado un vector aleatorio  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^t$  se dice que sigue la distribución uniforme en  $S^{p-1}$  si su densidad es:

$$f(x_1, \dots, x_p) = K I_{S^{p-1}}$$

donde  $K > 0$  e  $I_{S^{p-1}}$  es la función indicadora en  $S^{p-1}$

### EJERCICIOS:

- Verificar que  $K = \frac{\Gamma(\frac{p+2}{2})}{\pi^{p/2} r^p}$ .
- Comprobar que  $E[X] = 0$  y  $Cov[X] = \frac{r^2}{p+2}I_p$ .
- Calcular las distribuciones marginales unidimensionales y bidimensionales. Dada la simetría basta con calcular, por ejemplo, las de  $X_1$  y  $(X_1, X_2)^t$ .
- Si consideramos  $\mathbf{X}$  partido en la forma  $\mathbf{X} = (X_{(1)}^t | X_{(2)}^t)^t$  donde  $X_{(1)}$  es de dimensión  $q$  y  $X_{(2)}$  lo es  $(p - q)$ , calcular la distribución de  $X_{(1)}$ .
- Calcular la distribución condicionada  $X_{(2)} | X_{(1)} = x_{(1)}$ . Deducir que es una distribución uniforme en  $S^{p-q-1}$ , o sea, la esfera de dimensión  $p - q$ . En consecuencia, calcular los dos primeros momentos.



### 3.4. Distribución T-Student esférica

Sea  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^t$  un vector aleatorio. Diremos que se distribuye según la distribución t de student esférica p-dimensional con n grados de libertad si su función de densidad es:

$$f(x_1, \dots, x_p)^t = \frac{\Gamma(\frac{n+p}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})(n\pi)^{\frac{p}{2}} [1 + \frac{1}{n}x^t x]^{\frac{n+p}{2}}}$$

con  $x \in \mathbb{R}^p$

**EJERCICIO:** Demostrar que los momentos de esta distribución son:

$$E[X] = 0$$

$$Cov[X] = \frac{n}{n-2} I_p$$

con  $n > 2$ .

### 3.5. Versiones elípticas de las densidades uniformes en la hiperesfera y t-student

**EJERCICIOS:**

- Sea  $\mathbf{U}$  un vector p-dimensional distribuido de forma uniforme en el interior y borde de la hiperesfera de dimensión  $p$  y radio  $r > 0$ . Consideremos  $\mu$  un vector de  $\mathbb{R}^p$  y  $V_{p \times p}$  una matriz definida positiva descompuesta en la forma  $V = CC^t$ . Calcular la densidad del vector aleatorio  $X = \mu + CU$ .
- Calcular  $E[X]$  y  $Cov[X]$  para la distribución uniforme en el elipsoide  $E_r^p$ .
- Sea  $\mathbf{U}$  un vector p-dimensional distribuido según una t de Studen multivariante esférica. Consideremos  $\mu$  un vector de  $\mathbb{R}^p$  y  $V_{p \times p}$  una matriz definida positiva descompuesta en la forma  $V = CC^t$ . Calcular la densidad del vector aleatorio  $X = \mu + CU$ .
- Calcular  $E[X]$  y  $Cov[X]$  para la distribución anterior.