Estadística Multivariante

Clase esférica y elíptica de distribuciones

Trabajo A

Antonio R. Moya Martín-Castaño
Elena Romero Contreras
Nuria Rodríguez Barroso
Universidad de Granada
anmomar85@correo.ugr.es
elenaromeroc@correo.ugr.es
rbnuria6@gmail.com

Índice

1. Introducción.

La distribución normal multivariante que hemos desarrollado en clase de teoría, es un caso particular de una familia de distribuciones muy utilizadas en el análsis multivariante, las *distribuciones elípticas*. Para introducirlas, consideraremos en primer lugar el caso más simple de estas, las *distribuciones esféricas*.

Para finalizar, veremos casos concretos de distribuciones de estas clases en $\mathbb{R}^p$.

2. Clases esférica y elíptica de distribuciones en $\mathbb{R}^p$

Definición 2.1. Dado un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_p)^t$, se dice que se distribuye en la clase esférica de distribuciones en $\mathbb{R}^p$ si $\mathbf{X}$ y $\mathbf{HX}$ tienen la misma distribución, $\forall \mathbf{H} \in O(p)$ siendo $O(p)$ el grupo de matrices ortogonales de orden p. Esto es, si su distribución es invariante frente a transformaciones ortogonales.

EJEMPLO 2.1: Un ejemplo de densidad esférica es la distribución uniforme en la hiperesfera de radio r:

$$f_x(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma(\frac{p+2}{2})}{\pi^{p/2} r^p} \mathbf{I}_{[\mathbf{x}^t\mathbf{x} \leq r^2]}$$

Vemos ahora un resultado sobre la forma que adopta la función característica de cualquier variable que se distribuya en la clase esférica.

Teorema 2.1. *Sea $\boldsymbol{X}$ un vector aleatorio con distribución en la clase esférica. Entonces su función característica es de la forma $\phi(\boldsymbol{t}) = \psi(\boldsymbol{t}^t\boldsymbol{t})$, con ψ una cierta función. Además, $E[\boldsymbol{X}] = \boldsymbol{0}$ y $Cov[\boldsymbol{X}] = -2\psi'(0)\boldsymbol{I}_p$.*

Demostración. Para la primera parte de esta demostración vamos a utilizar resultados de la teoría de invarianzas:

Definición 2.2. Se dice que una función Φ es invariante sobre el espacio χ es invariante bajo G si verifica $\Phi(gx) = \Phi(x), \forall x \in \chi, \forall g \in G$

Definición 2.3. Una función Φ sobre χ se dice invariante maximal bajo G si es invariante bajo G y además verifica $\phi(x_1) = \phi(x_2) \Rightarrow x_1 \sim x_2 (modG)$

Teorema 2.2. *Sea Φ un invariante maximal bajo G para χ. Entonces una función ψ sobre χ es invariante bajo G sí y solo sí es función de Φ.*

Proposición 2.3. *Sea $G = O(p)$ el grupo de matrices ortogonales de orden $p \times p$. Entonces $\Phi(x) = x^t x$ es un invariante maximal bajo G.*

Para ver que $\Phi(t) = \psi(t^t t)$, basta con considerar la función $f(t) = t^t t$, que es un invariante maximal por la proposición anterior, y que Φ es un invariante por la definición de clase esférica (como X y HX tienen la misma distribución, $\Phi_x(t) = \Phi_x(Ht), \forall H \in G$). Entonces, aplicando el Teorema anterior, tenemos que $\Phi(t) = \psi(f(t)) = \psi(t^t t)$, para alguna función ψ.

Para demostrar que $E[X] = 0$, basta con darse cuenta de que, dado que X y HX tienen la misma distribución, se verifica que $E[X] = E[HX], \forall H \in O(p)$, y por la linealidad de la esperanza matemática sabemos que $E[HX] = HE[X], \forall H \in O(p)$, por tanto, llegamos a que $E[X] = HE[X], \forall H \in O(p)$, luego se debe verificar que $E[X] = 0$.

********************** FALTA LO DE LA COVARIANZA

$\square$

Definición 2.4. Dado un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_p)^t$, se dice que se distribuye en la clase elíptica de parámetros $\mu \in \mathbb{R}^p$ y $\mathbf{V}_{p\times p}$ ($\mathbf{V} > 0$) si su densidad es de la forma

$$f(\mathbf{x}) = C_p|\mathbf{V}|^{-\frac{1}{2}}h((\mathbf{x}-\mu)^t\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{x}-\mu))$$

donde C_p es una constante y h una función suficientemente regular. A la clase elíptica la notaremos por $E_p(\mu; V)$.

Ejemplo 2.2: Un ejemplo de densidad elíptica es la distribución uniforme en el elipsoide de dimensión p:

$$f_x(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma(\frac{p+2}{2}|\mathbf{A}|^{\frac{1}{2}})}{\pi^{\frac{p}{2}} r^0}\mathbf{I}_{[(\mathbf{x}-\mu)^t\mathbf{A}(\mathbf{x}-\mu)\leq r^2]}$$

EJERCICIOS:

- Comprobar que la clase esférica coincide con la elíptica $E(0; I_p)$.

  Solución:

  Si tenemos que un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_p)^t$ se distribuye en la clase elíptica $E(0; I_p)$, entonces cumple que su función de densidad es de la forma $f_x(\mathbf{x}) = C_p h(x^t x)$, por lo que sólo depende de x a través de $x^t x$. De este modo, es invariantes por transformaciones ortogonales con lo que pertenece también a la clase esférica. ¿¿¿¿El OTRO CASO???

- Verificar la siguiente caracterización, que generaliza la vista en el caso normal:

  $$X \in E_p(\mu; V) \leftrightarrows X = \mu + CU$$

  donde $\mu \in \mathbb{R}^p$, C es la matriz dada por la descomposición de Cholesky de V, es decir, $V = CC^t$ y U es un vector de la clase esférica p-dimensional.

  Solución:

  Consideramos $X = \mu + CU$, y calculamos cual es su función de distribución. Para ello, como U es un vector de la clase esférica p-dimensional, consideramos f_U su función de distribución. Por lo que ya hemos demostrado, f_U depende de t solo a través de $t^t t$, esto es $_u(tf) = h(t^t t)$,para cierta función h. Además, estamos considerando que la matriz C es no singular. Por tanto, la transformación de U a X tiene el Jacobiano $J = det(C^{-1})$, y tenemos que aplicando un resultado de transformación para vectores aleatorios podemos obtener la función de densidad de X como:

  $$f_x(x) = |det(C^{-1})|f_U|C^{-1}(x-\mu)| = [det(A)^{-1}det(A^{-1})]^{1/2}h[(x-\mu)^t(A^t)^{-1}A^{-1}(x-\mu)] =$$

  $$det[(AA^t)^{-1}]^{1/2}h[(x-\mu)^t(AA^t)^{-1}(x-\mu)] = \frac{h[(x-\mu)^tV^{-1}(x-\mu)]}{|V|^{1/2}}$$

  *********** ME LO HE SACADO DEL SEGUNDO LIBRO, MAGIA!

- Verificar que si $X \in E_p(\mu; V)$ entonces $E[X] = \mu + CE[U]$ y $Cov(X) = CCov(U)C^t$ siendo U perteneciente a la clase esférica.

Solución:

Dada la linealidad de la esperanza matemática, sabemos que $E[\mu + CU] = E[\mu] + E[CU] = \mu + CE[U]$.

En cuanto a la covarianza, dada la invarianza por translaciones obtenemos que $Cov[\mu + CU] = Cov[CU]$, y aplicando la bilinealidad de la covarianza obtenemos $Cov[CU] = CCov[U]C^t$, por lo que hemos obtenido que $Cov[\mu + CU] = CCov[U]C^t$.

En cuanto a la función característica, se plantea el siguiente ejercicio:

- Sea **X** un vector aleatorio con distribución en la clase elíptica $E_p(\mu; V)$. Entonces su función característica es de la forma $\phi(u) = e^{iu^t\mu}\psi(u^tVu)$, con ψ una cierta función.

  Solución:

  Sea $X \in E_p(\mu, V)$, aplicando al definición de función característica tenemos

  $$\phi_X(u) = \phi(u) = E[exp(iu^tX)] = E[exp(iu^t(\mu + CU))] = exp(iu^t\mu)\phi_{CU}(u) = exp(iu^t\mu)\phi_U(C^tu)$$

  Aplicando ahora el primer resultado que hemos demostrado ($\phi_u(t) = \psi(t^tt)$) para una cierta función χ tenemos

  $$\phi(u) = exp(iu^t\mu)\psi(t^tCC^tt) = exp(iu^t\mu)\psi(t^tVt)$$

  como buscábamos.

- Sea **X** un vector aleatorio con distribución en la clase elíptica $E_p(\mu; V)$. Comprobar que si A_{qxp} es una matriz de constantes con rg(A)=$q \leq p$, y c$\in \mathbb{R}^p$, entonces $\mathbf{Y = c + AX} \in E_q(c + A\mu; AVA^t)$.

  Solución:

- Sea $\mathbf{X} \in E_p(\mu; V)$. Entonces $E[X] = \mu$ y $Cov[X] = -2\psi'(0)$V.

  Solución:

  Para resolver este ejercicio, basta con utilizar el ejercicio anterior en el que se expresaba la esperanza matemática y la matriz de correlaciones de un vector aleatorio con distribución elíptica $X = \mu + CU$ en función de la esperanza matemática y la matriz de correlaciones de U, siendo U perteneciente a la clase esférica junto $E[u]$ y $Cov[U]$ calculadas anteriormente, de esta forma tenemos:

  $$E[X] = \mu + CE[U] = \mu + C0 = \mu$$
  $$Cov[X] = CCov[U]C^t = C(-2\psi'(0))I_pXC^t = -2\psi'(0)CI_pC^t = -2\psi'(0)V$$

- Comprobar que todas las distribuciones de la clase elíptica $E_p(\mu; V)$ tienen igual matriz de correlaciones.

  Solución:

  Todas las distribuciones de la clase $X \in E_p(\mu; V)$ se pueden denotar de la siguiente manera $X = \mu + CU$, donde U pertenece a la clase elítpica y C verifica $V = CC^t$.

  Por tanto, hemos probado en el apartado anterior que $Cov[X] = -2\psi'(0)V$.

  **** PUTADA, la ψ no es la misma para todas las esféricas, o si? Si no ver que $\psi'(0)$ si que lo es.

EJERCICIO:

Sea $\mathbf{X}\in E_p(\mu;V)$. Particionemos el vector $\mathbf{X}$ de la forma $\mathbf{X}=(X_{(1)}^t|X_{(2)}^t)^t$ donde $X_{(1)}$ es de dimensión qx1 y $X_{(2)}$ lo es $(p-q)$x1. Consideremos en μ y $\mathbf{V}$ las particiones inducidas

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_{(1)} \\ \mu_{(2)} \end{pmatrix}; V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}$$

Entonces se verifica

- $X_{(1)} \in E_q(\mu_{(1)}; V_{11})$
- $X_{(2)} \in E_{(p-q)}(\mu_{(2)}; V_{22})$

Nota: Hacerlo usando la función característica y también mediante la caracterización obtenida en el primer ejercicio.

Demostración. Demostración usando la función característica:

Basta con aplicar la definición de función característica anteriormente considerada tomando $u=(u_1^t:0^t)^t$, donde u_1 es de dimensión qx1. Así, tenemos que

$$\phi_{X_1}(u_1) = exp(iu_1^t\mu_1^t)\psi(u_1^tV_{11}u_1)$$

que es la función característica de un vector aleatorio con distribución elíptica $E_q(\mu_1, V_{11})$.

De forma análoga, tomando $u=(0^t;u_2^t)$, donde u_2 es de dimensión (p-1)x1, otenemos

$$\phi_{X_2}(u_2) = exp(iu_2^t\mu_2^t)\psi(u_2^tV_2u_2)$$

Con la caracterización obtenida en el primer ejercicio $rg(A)=q\leq p$ y $c\in R^p$.

Vamos a demostrarlo hora utilizando que $Y=c+AX\in E_q(c+A\mu;AVA^t)$, donde $rg(A)=q\leq p$ y $c\in\mathbb{R}^p$.

Para este caso, tenemos que $X_1=A_1X$, donde $A_1=\begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

donde $rg(A_1)=rg(I_q)=q$ y $c=0$, por tanto, aplicando la caracterización anterior, tenemos que $X_1\in E_q(A_1\mu;AVA^t)=E_q(\mu_1,V_{11})$.

******************** NO VEO QUE $V_{11}=AVA^t$, pero es que tiene que ser así.

Análogamente, tenemos $X_2=A_2X$, donde $A_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{(p-q)} \end{pmatrix}$

Y en este caso, se verifica $rg(A_2)=p-q$ y $c=0$, luego tenemos $X_2\in E_{(p-q)}(A_2\mu,AVA^t)=E_{(p-q)}(\mu_2,V_{22})$

□

3. Algunas distribuciones de las clases esférica y elíptica de distribuciones en $\mathbb{R}^p$

3.1. Distribución uniforme en el círculo de radio r

Sea $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq r^2\}$ el círculo centrado en el origen y de radio $r > 0$. Dado un vector aleatorio: $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^t$ se dice que sigue la distribución uniforme en S^1 si su densidad es

$$f(x_1, x_2) = KI_{S^1}$$

donde $K > 0$ e I_{S^1} es la función indicadora en S^1.

EJERCICIOS:

- Verificar que $K = \frac{1}{\pi r^2}$

  Solución: Tengamos en cuenta que $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(X)dX = 1$. Por tanto $K\int_{-\infty}^{\infty} I_{S^1}dX = 1$. Así:

  $$K\int_{S^1} 1dX = 1$$

  Y por tanto, atendiendo a que esa integral coincide con el área de un círculo: $K\pi r^2 = 1$. Y como conclusión sacamos que $K = \frac{1}{\pi r^2}$

- Comprobar que $E[X] = 0$ y que $Cov[X] = \frac{r^2}{4}I_2$

  Solución:
  $$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} xKI_{S^1}dx = \int_{S^1} Kxdx = k \cdot \int_{S^1} xdx$$

  Realizamos cambio a polares:
  $$x_1 = \rho cos(\theta), x_2 = \rho sen(\theta)$$

  donde $\rho > 0$ y $0 < \theta \leq 2\pi$

  Definimos $\phi :]0, r[\times]0, 2\pi[\longrightarrow S^1$ difeomorfismo con $\phi(\rho, \theta) = (\rho cos(\theta), \rho sen(\theta))$

  Calculamos el jacobiano:

  $$|Jac\phi|(\rho, \theta) = \begin{vmatrix} cos(\theta) & -\rho sen(\theta) \\ sen(\theta) & \rho cos(\theta) \end{vmatrix} = |\rho(cos^2(\theta) + sen^2(\theta))| = |\rho| = \rho$$

  $$\int_{S^1} f(x_1, x_2)dx = \int_0^r \int_0^{2\pi} x(f \circ \rho)(\rho, \theta)|Jac\phi|(\rho, \theta)d\theta d\rho = \int_0^r \int_0^{2\pi} (\rho^2 cos(\theta), \rho^2 sen(\theta))d\theta d\rho$$

  $$\int_0^r \rho^2 \left[(sen(\theta), -cos(\theta)\right]_0^{2\pi} d\rho = \int_0^{r^2} \rho^2 \left[(0, 1) - (0, -1)\right] d\rho = \int_0^{r^2} 0d\rho = 0$$

  Luego $E[X] = 0$

  Veamos ahora que $Cov[X] = \frac{r^2}{4}I_2$. En primer lugar, comprobemos que $Var[X] = \left(\frac{r^2}{4}, \frac{r^2}{4}\right)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x_1, x_2) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot k I_{S^1} dx = k \int_{S^1} x^2 dx$$

Realizamos el cambio a polares anterior:

$$k \cdot \int_{S^1} x^2 dx = k \int_0^r \left(\int_0^{2\pi} (\rho^3 cos^2(\theta), \rho^3 sen^2(\theta)) d\theta) d\rho \right)$$

- Calcular las distribuciones marginales así como las condicionadas. Por simetría basta calcular la distribución de X_1 y la de $X_1 | X_2 = x2$.

3.2. Distribución uniforme en la esfera de radio r

Sea $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq r^2\}$ el interior y borde de la esfera centrada en 0 y de radio $r > 0$. Dado un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^t$ se dice que sigue la distribución uniforme en S^2 si su densidad es:

$$f(x_1, x_2, x_3) = K I_{S^2}$$

donde $K > 0$ e I_{S^2} en la función indicadora en S^2.

EJERCICIOS:

- Verificar que $K = \frac{3}{4\pi r^3}$

  Solución: De manera similar al caso del círculo, ahora tenemos que se cumple que $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(X) dX = 1$. Por tanto $K \int_{-\infty}^{\infty} I_{S^2} dX = 1$. Así:

  $$K \int_{S^2} 1 dX = 1$$

  Y por tanto, atendiendo a que esa integral coincide con el área de una esfera: $K \frac{4}{3} \pi r^3 = 1$. Y como conclusión sacamos que $K = \frac{3}{4\pi r^3}$

- Comprobar que $E[X] = 0$ y que $Cov[X] = \frac{r^2}{5} I_3$???????? 3???*********
- Calcular las distribuciones marginales unidimensionales y bidimensionales. Dada la simetría, basta con calcular la distribución de X_1 y de $(X_1, X_2)^t$
- Calcular las distribuciones de $(X_2, X_3)^t | X_1 = x_1$ y $X_3 | X_1 = x_1, X_2 = x_2$. Deducir que son distribuciones uniformes en un círculo y en un intervalo, respectivamente y, en consecuencia, calcular los dos primeros momentos.

3.3. Distribución uniforme en la hiperesfera de radio r

Sea $S^{p-1} = \{x \in \mathbb{R}^p : x^t x \leq r^2\}$ el interior y el borde de la hiperesfera centrada en el origen y de radio $r > 0$. Dado un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p)^t$ se dice que sigue la distribución uniforme en S^{p-1} si su densidad es:

$$f(x_1, \ldots, x_p) = K I_{S^{p-1}}$$

donde $K > 0$ e $I_{S^{p-1}}$ es la función indicadora en S^{p-1}

EJERCICIOS:

- Verificar que $K = \frac{\Gamma(\frac{p+2}{2})}{\pi^{p/2} r^p}$.
- Comprobar que $E[X] = 0$ y $Cov[X] = \frac{r^2}{p+2} I_p$.
- Calcular las distribuciones marginales unidimensionales y bidimensionales. Dada la simetría basta con calcular, por ejemplo, las de X_1 y $(X_1, X_2)^t$.
- Si consideramos $\mathbf{X}$ partido en la forma $\mathbf{X}$=$(X_{(1)}^t | X_{(2)}^t)^t$ donde $X_{(1)}$ es de dimensión q y $X_{(2)}$ lo es $(p-q)$, calcular la distribución de $X_{(1)}$.
- Calcular la distribución condicionada $X_{(2)} | X_{(1)} = x_{(1)}$. Deducir que es una distribución uniforme en S^{p-q-1}, o sea, la esfera de dimensión $p-q$. En consecuencia, calcular los dos primeros momentos.

3.4. Distribución T-Student esférica

Sea $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p)^t$ un vector aleatorio. Diremos que se distribuye según la distribución t de student esférica p-dimensional con n grados de libertad si su función de densidad es:

$$f(x_1, \ldots, x_p)^t = \frac{\Gamma(\frac{n+p}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})(n\pi)^{\frac{p}{2}}[1 + \frac{1}{n}x^t x]^{\frac{n+p}{2}}}$$

con $x \in \mathbb{R}^p$

EJERCICIO: Demostrar que los momentos de esta distribución son:

$$E[X] = 0$$
$$Cov[X] = \frac{n}{n-2} I_p$$

con $n > 2$.

3.5. Versiones elípticas de las densidades uniformes en la hiperesfera y t-student

EJERCICIOS:

- Sea $\mathbf{U}$ un vector p-dimensional distribuido de forma uniforme en el interior y borde de la hiperesfera de dimensión p y racio $r > 0$. Consideremos μ un vector de $\mathbb{R}^p$ y V_{pxp} una matriz definida positiva descompuesta en la forma $V = CC^t$. Calcular la densidad del vector aleatorio $X = \mu + CU$.
- Calcular $E[X]$ y $Cov[X]$ para la distribución uniforme en el elipsoide E_r^p.
- Sea $\mathbf{U}$ un vector p-dimensional distribuido según una t de Studen multivariante esférica. Consideremos μ un vector de $\mathbb{R}^p$ y V_{pxp} una matriz definida positiva descompuesta en la forma $V = CC^t$. Calcular la densidad del vector aleatorio $X = \mu + CU$.
- Calcular $E[X]$ y $Cov[X]$ para la distribución anterior.