



Estadística Multivariante

Clase esférica y elíptica de distribuciones

Trabajo A

Antonio R. Moya
Martín-Castaño
Elena Romero Contreras
Nuria Rodríguez
Barroso
Universidad de Granada
anmomar85@correo.ugr.es
elenaromeroc@correo.ugr.es
rbnuria6@gmail.com

Índice

1. Introducción.	2
2. Clases esférica y elíptica de distribuciones en \mathbb{R}^p	2
3. Algunas distribuciones de las clases esférica y elíptica de distribuciones en \mathbb{R}^p	5
3.1. Distribución uniforme en el círculo de radio r	5
3.2. Distribución uniforme en la esfera de radio r	6
3.3. Distribución uniforme en la hiperesfera de radio r	6
3.4. Distribución T-Student esférica	7
3.5. Versiones elípticas de las densidades uniformes en la hiperesfera y t-student	7

1. Introducción.

La distribución normal multivariante que hemos desarrollado en clase de teoría, es un caso particular de una familia de distribuciones muy utilizadas en el análisis multivariante, las *distribuciones elípticas*. Para introducirlas, consideraremos en primer lugar el caso más simple de estas, las *distribuciones esféricas*.

Para finalizar, veremos casos concretos de distribuciones de estas clases en \mathbb{R}^p .

2. Clases esférica y elíptica de distribuciones en \mathbb{R}^p

Definición 2.1. Dado un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^t$, se dice que se distribuye en la clase esférica de distribuciones en \mathbb{R}^p si \mathbf{X} y $\mathbf{H}\mathbf{X}$ tienen la misma distribución, $\forall \mathbf{H} \in O(p)$ siendo $O(p)$ el grupo de matrices ortogonales de orden p . Esto es, si su distribución es invariante frente a transformaciones ortogonales.

EJEMPLO 2.1: Un ejemplo de densidad esférica es la distribución uniforme en la hipersfera de radio r :

$$f_x(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma(\frac{p+2}{2})}{\pi^{p/2} r^p} \mathbf{I}_{[\|\mathbf{x}\| \leq r]}$$

Vemos ahora un resultado sobre la forma que adopta la función característica de cualquier variable que se distribuya en la clase esférica.

Teorema 2.1. Sea \mathbf{X} un vector aleatorio con distribución en la clase esférica. Entonces su función característica es de la forma $\phi(\mathbf{t}) = \psi(\mathbf{t}^t \mathbf{t})$, con ψ una cierta función. Además, $E[\mathbf{X}] = \mathbf{0}$ y $\text{Cov}[\mathbf{X}] = -2\psi'(0)\mathbf{I}_p$.

Demostración. Para la primera parte de esta demostración vamos a utilizar resultados de la teoría de varianzas:

Definición 2.2. Se dice que una función Φ es invariante sobre el espacio χ es invariante bajo G si verifica $\Phi(gx) = \Phi(x), \forall x \in \chi, \forall g \in G$

Definición 2.3. Una función Φ sobre χ se dice invariante maximal bajo G si es invariante bajo G y además verifica $\phi(x_1) = \phi(x_2) \Rightarrow x_1 \sim x_2 \pmod{G}$

Teorema 2.2. Sea Φ un invariante maximal bajo G para χ . Entonces una función ψ sobre χ es invariante bajo G si y solo si es función de Φ .

Proposición 2.3. Sea $G = O(p)$ el grupo de matrices ortogonales de orden $p \times p$. Entonces $\Phi(x) = x^t x$ es un invariante maximal bajo G .

Para ver que $\Phi(t) = \psi(t^t t)$, basta con considerar la función $f(t) = t^t t$, que es un invariante maximal por la proposición anterior, y que Φ es un invariante por la definición de clase esférica (como X y HX tienen la misma distribución, $\Phi_x(t) = \Phi_x(Ht), \forall H \in G$). Entonces, aplicando el Teorema anterior, tenemos que $\Phi(t) = \psi(f(t)) = \psi(t^t t)$, para alguna función ψ .

Para demostrar que $E[X] = 0$, basta con darse cuenta de que, dado que X y HX tienen la misma distribución, se verifica que $E[X] = E[HX], \forall H \in O(p)$, y por la linealidad de la esperanza matemática sabemos que $E[HX] = HE[X], \forall H \in O(p)$, por tanto, llegamos a que $E[X] = HE[X], \forall H \in O(p)$, luego se debe verificar que $E[X] = 0$.

***** FALTA LO DE LA COVARIANZA

□

Definición 2.4. Dado un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^t$, se dice que se distribuye en la clase elíptica de parámetros $\mu \in \mathbb{R}^p$ y $\mathbf{V}_{p \times p}$ ($\mathbf{V} > 0$) si su densidad es de la forma

$$f(\mathbf{x}) = C_p |\mathbf{V}|^{-\frac{1}{2}} h((\mathbf{x} - \mu)^t \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{x} - \mu))$$

donde C_p es una constante y h una función suficientemente regular. A la clase elíptica la notaremos por $E_p(\mu; V)$.

EJEMPLO 2.2: Un ejemplo de densidad elíptica es la distribución uniforme en el elipsoide de dimensión p :

$$f_x(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma(\frac{p+2}{2}) |\mathbf{A}|^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{p}{2}} r^0} \mathbf{I}_{[(\mathbf{x}-\mu)^t \mathbf{A} (\mathbf{x}-\mu) \leq r^2]}$$

EJERCICIOS:

- Comprobar que la clase esférica coincide con la elíptica $E(0; I_p)$.

Solución:

Si tenemos que un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^t$ se distribuye en la clase elíptica $E(0; I_p)$, entonces cumple que su función de densidad es de la forma $f_x(\mathbf{x}) = C_p h(x^t x)$, por lo que sólo depende de \mathbf{x} a través de $x^t x$. De este modo, es invariante por transformaciones ortogonales con lo que pertenece también a la clase esférica. ¿¿¿El OTRO CASO???

- Verificar la siguiente caracterización, que generaliza la vista en el caso normal:

$$X \in E_p(\mu; V) \Leftrightarrow X = \mu + CU$$

donde $\mu \in \mathbb{R}^p$, C es la matriz dada por la descomposición de Cholesky de V , es decir, $V = CC^t$ y U es un vector de la clase esférica p -dimensional.

Solución:

Consideramos $X = \mu + CU$, y calculamos cual es su función de distribución. Para ello, como U es un vector de la clase esférica p -dimensional, consideramos f_U su función de distribución. Por lo que ya hemos demostrado, f_U depende de t solo a través de $t^t t$, esto es ${}_u(t f) = h(t^t t)$, para cierta función h . Además, estamos considerando que la matriz C es no singular. Por tanto, la transformación de U a X tiene el Jacobiano $J = \det(C^{-1})$, y tenemos que aplicando un resultado de transformación para vectores aleatorios podemos obtener la función de densidad de X como:

$$f_x(x) = |\det(C^{-1})| f_U(C^{-1}(x - \mu)) = [\det(A)^{-1} \det(A^{-1})]^{1/2} h[(x - \mu)^t (A^t)^{-1} A^{-1} (x - \mu)] =$$

$$\det[(AA^t)^{-1}]^{1/2} h[(x - \mu)^t (AA^t)^{-1} (x - \mu)] = \frac{h[(x - \mu)^t V^{-1} (x - \mu)]}{|V|^{1/2}}$$

***** ME LO HE SACADO DEL SEGUNDO LIBRO, MAGIA!

- Verificar que si $X \in E_p(\mu; V)$ entonces $E[X] = \mu + CE[U]$ y $Cov(X) = CCov(U)C^t$ siendo U perteneciente a la clase esférica.

Solución:

Dada la linealidad de la esperanza matemática, sabemos que $E[\mu + CU] = E[\mu] + E[CU] = \mu + CE[U]$.

En cuanto a la covarianza, dada la invarianza por translaciones obtenemos que $Cov[\mu + CU] = Cov[CU]$, y aplicando la bilinealidad de la covarianza obtenemos $Cov[CU] = CCov[U]C^t$, por lo que hemos obtenido que $Cov[\mu + CU] = CCov[U]C^t$.

En cuanto a la función característica, se plantea el siguiente ejercicio:

- Sea \mathbf{X} un vector aleatorio con distribución en la clase elíptica $E_p(\mu; V)$. Entonces su función característica es de la forma $\phi(u) = e^{iu^t \mu} \psi(u^t V u)$, con ψ una cierta función.

Solución:

Sea $X \in E_p(\mu, V)$, aplicando a la definición de función característica tenemos

$$\phi_X(u) = \phi(u) = E[\exp(iu^t X)] = E[\exp(iu^t (\mu + CU))] = \exp(iu^t \mu) \phi_{CU}(u) = \exp(iu^t \mu) \phi_U(C^t u)$$

Aplicando ahora el primer resultado que hemos demostrado ($\phi_u(t) = \psi(t^t t)$) para una cierta función χ tenemos

$$\phi(u) = \exp(iu^t \mu) \psi(t^t C C^t t) = \exp(iu^t \mu) \psi(t^t V t)$$

como buscábamos.

- Sea \mathbf{X} un vector aleatorio con distribución en la clase elíptica $E_p(\mu; V)$. Comprobar que si $A_{q \times p}$ es una matriz de constantes con $\text{rg}(A) = q \leq p$, y $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^p$, entonces $\mathbf{Y} = \mathbf{c} + \mathbf{A}\mathbf{X} \in E_q(\mathbf{c} + \mathbf{A}\mu; \mathbf{A}V\mathbf{A}^t)$.

Solución:

- Sea $\mathbf{X} \in E_p(\mu; V)$. Entonces $E[X] = \mu$ y $Cov[X] = -2\psi'(0)V$.

Solución:

Para resolver este ejercicio, basta con utilizar el ejercicio anterior en el que se expresaba la esperanza matemática y la matriz de correlaciones de un vector aleatorio con distribución elíptica $X = \mu + CU$ en función de la esperanza matemática y la matriz de correlaciones de U , siendo U perteneciente a la clase esférica junto $E[u]$ y $Cov[U]$ calculadas anteriormente, de esta forma tenemos:

$$\begin{aligned} E[X] &= \mu + CE[U] = \mu + C0 = \mu \\ Cov[X] &= CCov[U]C^t = C(-2\psi'(0))I_p C^t = -2\psi'(0)C I_p C^t = -2\psi'(0)V \end{aligned}$$

- Comprobar que todas las distribuciones de la clase elíptica $E_p(\mu; V)$ tienen igual matriz de correlaciones.

Solución:

Todas las distribuciones de la clase $X \in E_p(\mu; V)$ se pueden denotar de la siguiente manera $X = \mu + CU$, donde U pertenece a la clase elíptica y C verifica $V = CC^t$.

Por tanto, hemos probado en el apartado anterior que $Cov[X] = -2\psi'(0)V$.

**** PUTADA, la ψ no es la misma para todas las esféricas, o si? Si no ver que $\psi'(0)$ si que lo es.

EJERCICIO:

Sea $\mathbf{X} \in E_p(\mu; V)$. Particionemos el vector \mathbf{X} de la forma $\mathbf{X} = (X_{(1)}^t | X_{(2)}^t)^t$ donde $X_{(1)}$ es de dimensión $q \times 1$ y $X_{(2)}$ lo es $(p - q) \times 1$. Consideremos en μ y V las particiones inducidas

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_{(1)} \\ \mu_{(2)} \end{pmatrix}; V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}$$

Entonces se verifica

- $X_{(1)} \in E_q(\mu_{(1)}; V_{11})$
- $X_{(2)} \in E_{(p-q)}(\mu_{(2)}; V_{22})$

Nota: Hacerlo usando la función característica y también mediante la caracterización obtenida en el primer ejercicio.

Demostración. Demostración usando la función característica:

Basta con aplicar la definición de función característica anteriormente considerada tomando $u = (u_1^t; 0^t)^t$, donde u_1 es de dimensión $q \times 1$. Así, tenemos que

$$\phi_{X_1}(u_1) = \exp(iu_1^t \mu_1^t) \psi(u_1^t V_{11} u_1)$$

que es la función característica de un vector aleatorio con distribución elíptica $E_q(\mu_1, V_{11})$.

De forma análoga, tomando $u = (0^t; u_2^t)$, donde u_2 es de dimensión $(p-1) \times 1$, obtenemos

$$\phi_{X_2}(u_2) = \exp(iu_2^t \mu_2^t) \psi(u_2^t V_{22} u_2)$$

Con la caracterización obtenida en el primer ejercicio $rg(A) = q \leq p$ y $c \in \mathbb{R}^p$.

Vamos a demostrarlo ahora utilizando que $Y = c + AX \in E_q(c + A\mu; AVA^t)$, donde $rg(A) = q \leq p$ y $c \in \mathbb{R}^p$.

Para este caso, tenemos que $X_1 = A_1 X$, donde $A_1 = \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

donde $rg(A_1) = rg(I_q) = q$ y $c = 0$, por tanto, aplicando la caracterización anterior, tenemos que $X_1 \in E_q(A_1 \mu; AVA^t) = E_q(\mu_1, V_{11})$.

***** NO VEO QUE $V_{11} = AVA^t$, pero es que tiene que ser así.

Análogamente, tenemos $X_2 = A_2 X$, donde $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{(p-q)} \end{pmatrix}$

Y en este caso, se verifica $rg(A_2) = p - q$ y $c = 0$, luego tenemos $X_2 \in E_{(p-q)}(A_2 \mu, AVA^t) = E_{(p-q)}(\mu_2, V_{22})$

□

3. Algunas distribuciones de las clases esférica y elíptica de distribuciones en \mathbb{R}^p

3.1. Distribución uniforme en el círculo de radio r

Sea $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq r^2\}$ el círculo centrado en el origen y de radio $r > 0$. Dado un vector aleatorio: $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^t$ se dice que sigue la distribución uniforme en S^1 si su densidad es

$$f(x_1, x_2) = KI_{S^1}$$

donde $K > 0$ e I_{S^1} es la función indicadora en S^1 .

EJERCICIOS:

- Verificar que $K = \frac{1}{\pi r^2}$

Solución: Tengamos en cuenta que $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(X) dX = 1$. Por tanto $K \int_{-\infty}^{\infty} I_{S^1} dX = 1$. Así:

$$K \int_{S^1} 1 dX = 1$$

Y por tanto, atendiendo a que esa integral coincide con el área de un círculo: $K\pi r^2 = 1$. Y como conclusión sacamos que $K = \frac{1}{\pi r^2}$

- Comprobar que $E[X] = 0$ y que $Cov[X] = \frac{r^2}{4} I_2$??????? I2???
- Calcular las distribuciones marginales así como las condicionadas. Por simetría basta calcular la distribución de X_1 y la de $X_1|X_2 = x_2$.

3.2. Distribución uniforme en la esfera de radio r

Sea $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq r^2\}$ el interior y borde de la esfera centrada en 0 y de radio $r > 0$. Dado un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^t$ se dice que sigue la distribución uniforme en S^2 si su densidad es:

$$f(x_1, x_2, x_3) = KI_{S^2}$$

donde $K > 0$ e I_{S^2} es la función indicadora en S^2 .

EJERCICIOS:

- Verificar que $K = \frac{3}{4\pi r^3}$

Solución: De manera similar al caso del círculo, ahora tenemos que se cumple que $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(X) dX = 1$. Por tanto $K \int_{-\infty}^{\infty} I_{S^2} dX = 1$. Así:

$$K \int_{S^2} 1 dX = 1$$

Y por tanto, atendiendo a que esa integral coincide con el área de una esfera: $K\frac{4}{3}\pi r^3 = 1$. Y como conclusión sacamos que $K = \frac{3}{4\pi r^3}$

- Comprobar que $E[X] = 0$ y que $Cov[X] = \frac{r^2}{5} I_3$??????? 3???

- Calcular las distribuciones marginales unidimensionales y bidimensionales. Dada la simetría, basta con calcular la distribución de X_1 y de $(X_1, X_2)^t$
- Calcular las distribuciones de $(X_2, X_3)^t | X_1 = x_1$ y $X_3 | X_1 = x_1, X_2 = x_2$. Deducir que son distribuciones uniformes en un círculo y en un intervalo, respectivamente y, en consecuencia, calcular los dos primeros momentos.

3.3. Distribución uniforme en la hiperesfera de radio r

Sea $S^{p-1} = \{x \in \mathbb{R}^p : x^t x \leq r^2\}$ el interior y el borde de la hiperesfera centrada en el origen y de radio $r > 0$. Dado un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^t$ se dice que sigue la distribución uniforme en S^{p-1} si su densidad es:

$$f(x_1, \dots, x_p) = K I_{S^{p-1}}$$

donde $K > 0$ e $I_{S^{p-1}}$ es la función indicadora en S^{p-1}

EJERCICIOS:

- Verificar que $K = \frac{\Gamma(\frac{p+2}{2})}{\pi^{p/2} r^p}$.
- Comprobar que $E[X] = 0$ y $Cov[X] = \frac{r^2}{p+2} I_p$.
- Calcular las distribuciones marginales unidimensionales y bidimensionales. Dada la simetría basta con calcular, por ejemplo, las de X_1 y $(X_1, X_2)^t$.
- Si consideramos \mathbf{X} partido en la forma $\mathbf{X} = (X_{(1)}^t | X_{(2)}^t)^t$ donde $X_{(1)}$ es de dimensión q y $X_{(2)}$ lo es $(p - q)$, calcular la distribución de $X_{(1)}$.
- Calcular la distribución condicionada $X_{(2)} | X_{(1)} = x_{(1)}$. Deducir que es una distribución uniforme en S^{p-q-1} , o sea, la esfera de dimensión $p - q$. En consecuencia, calcular los dos primeros momentos.

3.4. Distribución T-Student esférica

Sea $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^t$ un vector aleatorio. Diremos que se distribuye según la distribución t de student esférica p-dimensional con n grados de libertad si su función de densidad es:

$$f(x_1, \dots, x_p)^t = \frac{\Gamma(\frac{n+p}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})(n\pi)^{\frac{p}{2}} [1 + \frac{1}{n} x^t x]^{\frac{n+p}{2}}}$$

con $x \in \mathbb{R}^p$

EJERCICIO: Demostrar que los momentos de esta distribución son:

$$E[X] = 0$$

$$Cov[X] = \frac{n}{n-2} I_p$$

con $n > 2$.

3.5. Versiones elípticas de las densidades uniformes en la hiperesfera y t-student

EJERCICIOS:

- Sea \mathbf{U} un vector p -dimensional distribuido de forma uniforme en el interior y borde de la hiperesfera de dimensión p y radio $r > 0$. Consideremos μ un vector de \mathbb{R}^p y $V_{p \times p}$ una matriz definida positiva descompuesta en la forma $V = CC^t$. Calcular la densidad del vector aleatorio $X = \mu + CU$.
- Calcular $E[X]$ y $Cov[X]$ para la distribución uniforme en el elipsoide E_r^p .
- Sea \mathbf{U} un vector p -dimensional distribuido según una t de Student multivariante esférica. Consideremos μ un vector de \mathbb{R}^p y $V_{p \times p}$ una matriz definida positiva descompuesta en la forma $V = CC^t$. Calcular la densidad del vector aleatorio $X = \mu + CU$.
- Calcular $E[X]$ y $Cov[X]$ para la distribución anterior.