



Estadística Multivariante

Clase esférica y elíptica de distribuciones

Trabajo A

Antonio R. Moya
Martín-Castaño
Elena Romero Contreras
Nuria Rodríguez
Barroso
Universidad de Granada
anmomar85@correo.ugr.es
rbnuria6@gmail.com

Índice

1. Clases esférica y elíptica de distribuciones en \mathbb{R}^p	2
2. Algunas distribuciones de las clases esférica y Elíptica de distribuciones en \mathbb{R}^p	3
2.1. Distribución uniforme en el círculo de radio r	3
2.2. Distribución uniforme en la esfera de radio r	3
3. Distribución uniforme en la hiperesfera de radio r	4
4. Distribución T-Student esférica	4

1. Clases esférica y elíptica de distribuciones en \mathbb{R}^p

Definición 1.1. Dado un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^t$, se dice que se distribuye en la clase esférica de distribuciones en \mathbb{R}^p si \mathbf{X} y $\mathbf{H}\mathbf{X}$ tienen la misma distribución, $\forall \mathbf{H} \in O(p)$ siendo $O(p)$ el grupo de matrices ortogonales de orden p . Esto es, si su distribución es invariante frente a transformaciones ortogonales.

EJEMPLO 1.1: Un ejemplo de densidad esférica es la distribución uniforme en la hipersfera de radio r :

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma(\frac{p+2}{2})}{\pi^{p/2} r^p} \mathbf{I}_{[\|\mathbf{x}\| \leq r]}$$

Vemos ahora un resultado sobre la forma que adopta la función característica de cualquier variable que se distribuya en la clase esférica.

Teorema 1.1. Sea \mathbf{X} un vector aleatorio con distribución en la clase esférica. Entonces su función característica es de la forma $\phi(\mathbf{t}) = \psi(\mathbf{t}^t \mathbf{t})$, con ψ una cierta función. Además, $E[\mathbf{X}] = \mathbf{0}$ y $\text{Cov}[\mathbf{X}] = -2\psi'(\mathbf{0})\mathbf{I}_p$.

Demostración. EJERCICIO.

Para esta demostración es necesario utilizar algunos aspectos de la teoría de invarianza (buscarlos en el apéndice A y ponerlos). \square

Definición 1.2. Dado un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^t$, se dice que se distribuye en la clase elíptica de parámetros $\mu \in \mathbb{R}^p$ y $\mathbf{V}_{p \times p}$ ($\mathbf{V} > 0$) si su densidad es de la forma

$$f(\mathbf{x}) = C_p |\mathbf{V}|^{-\frac{1}{2}} h((\mathbf{x} - \mu)^t \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{x} - \mu))$$

EJEMPLO 1.2: Un ejemplo de densidad elíptica es la distribución uniforme en el elipsoide de dimensión p :

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma(\frac{p+2}{2}) |\mathbf{A}|^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{p}{2}} r^0} \mathbf{I}_{[(\mathbf{x} - \mu)^t \mathbf{A} (\mathbf{x} - \mu) \leq r^2]}$$

Ejercicios

- Comprobar que la clase esférica coincide con la elíptica $E(0; \mathbf{I}_p)$.

Sol: Si tenemos que un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^t$ se distribuye en la clase elíptica $E(0; \mathbf{I}_p)$, entonces cumple que su función de densidad es de la forma $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = C_p h(\mathbf{x}^t \mathbf{x})$, por lo que sólo depende de \mathbf{x} a través de $\mathbf{x}^t \mathbf{x}$. De este modo, es invariante por transformaciones ortogonales con lo que pertenece también a la clase esférica. ¿¿¿El OTRO CASO???

- Verificar la siguiente caracterización, que generaliza la vista en el caso normal:

$$\mathbf{X} \in E_p(\mu; \mathbf{V}) \Leftrightarrow \mathbf{X} = \mu + \mathbf{C}\mathbf{U}$$

donde $\mu \in \mathbb{R}^p$, \mathbf{C} es la matriz dada por la descomposición de Cholesky de \mathbf{V} , es decir, $\mathbf{V} = \mathbf{C}\mathbf{C}^t$ y \mathbf{U} es un vector de la clase esférica p -dimensional.

- Verificar que si $\mathbf{X} \in E_p(\mu; \mathbf{V})$ entonces $E[\mathbf{X}] = \mu + \mathbf{C}E[\mathbf{U}]$ y $\text{Cov}(\mathbf{X}) = \mathbf{C}\text{Cov}(\mathbf{U})\mathbf{C}^t$ siendo \mathbf{U} perteneciente a la clase esférica.

Sol: En este caso, aplicando el ejercicio anterior tenemos que $\mathbf{X} = \mu + \mathbf{C}\mathbf{U}$, y, por tanto, por las propiedades de linealidad de la esperanza y de la covarianza, se cumplen las dos condiciones que se piden en este apartado. ???

MUCHOS MAS EJERCICIOS

2. Algunas distribuciones de las clases esférica y Elíptica de distribuciones en \mathbb{R}^p

2.1. Distribución uniforme en el círculo de radio r

Sea $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq r^2\}$ el círculo centrado en el origen y de radio $r > 0$. Dado un vector aleatorio: $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^t$ se dice que sigue la distribución uniforme en S^1 si su densidad es

$$f(x_1, x_2) = KI_{S^1}$$

donde $K > 0$ e I_{S^1} es la función indicadora en S^1 .

Ejercicios

- Verificar que $K = \frac{1}{\pi r^2}$

Sol: Tengamos en cuenta que $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(X) dX = 1$. Por tanto $K \int_{-\infty}^{\infty} I_{S^1} dX = 1$. Así:

$$K \int_{S^1} 1 dX = 1$$

Y por tanto, atendiendo a que esa integral coincide con el área de un círculo: $K\pi r^2 = 1$. Y como conclusión sacamos que $K = \frac{1}{\pi r^2}$

- Comprobar que $E[X] = 0$ y que $Cov[X] = \frac{r^2}{4} I_2$??????? I2??*****
- Calcular las distribuciones marginales así como las condicionadas. Por simetría basta calcular la distribución de X_1 y la de $X_1|X_2 = x_2$.

2.2. Distribución uniforme en la esfera de radio r

Sea $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq r^2\}$ el interior y borde de la esfera centrada en 0 y de radio $r > 0$. Dado un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^t$ se dice que sigue la distribución uniforme en S^2 si su densidad es:

$$f(x_1, x_2, x_3) = KI_{S^2}$$

donde $K > 0$ e I_{S^2} es la función indicadora en S^2 .

Ejercicios

- Verificar que $K = \frac{3}{4\pi r^3}$

Sol: De manera similar al caso del círculo, ahora tenemos que se cumple que $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(X) dX = 1$. Por tanto $K \int_{-\infty}^{\infty} I_{S^2} dX = 1$. Así:

$$K \int_{S^2} 1 dX = 1$$

Y por tanto, atendiendo a que esa integral coincide con el área de una esfera: $K\frac{4}{3}\pi r^3 = 1$. Y como conclusión sacamos que $K = \frac{3}{4\pi r^3}$

- Comprobar que $E[X] = 0$ y que $Cov[X] = \frac{r^2}{5} I_3$??????? 3??*****
- Calcular las distribuciones marginales unidimensionales y bidimensionales. Dada la simetría, basta con calcular la distribución de X_1 y de $(X_1, X_2)^t$

- Calcular las distribuciones de $(X_2, X_3)^t | X_1 = x_1$ y $X_3 | X_1 = x_1, X_2 = x_2$. Deducir que son distribuciones uniformes en un círculo y en un intervalo, respectivamente y, en consecuencia, calcular los dos primeros momentos.

3. Distribución uniforme en la hiperesfera de radio r

Sea $S^{p-1} = \{x \in \mathbb{R}^p : x^t x \leq r^2\}$ el interior y el borde de la hiperesfera centrada en el origen y de radio $r > 0$. Dado un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^t$ se dice que sigue la distribución uniforme en S^{p-1} si su densidad es:

$$f(x_1, \dots, x_p) = K I_{S^{p-1}}$$

donde $K > 0$ e $I_{S^{p-1}}$ es la función indicadora en S^{p-1}

*****EJERCICIOS***** (me da miedo hasta copiarlos xdxdxdxdxdxdxd)

4. Distribución T-Student esférica

Sea $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^t$ un vector aleatorio. Diremos que se distribuye según la distribución t de student esférica p-dimensional con n grados de libertad si su función de densidad es:

$$f(x_1, \dots, x_p)^t = \frac{\Gamma(\frac{n+p}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})(n\pi)^{\frac{p}{2}} [1 + \frac{1}{n} x^t x]^{\frac{n+p}{2}}}$$

con $x \in \mathbb{R}^p$

Ejercicio: Demostrar que los momentos de esta distribución son:

$$E[X] = 0$$

$$Cov[X] = \frac{n}{n-2} I_p$$

con $n > 2$.

5. Versiones elípticas de las densidades uniformes en la hiperesfera y t-student