Departamento de Informática,
Universidad Técnica Federico Santa María.

CAPITULO 6
Introducción a la Lógica Difusa
AIDA

Prof. Héctor Allende O.
hallende@inf.utfsm.cl

Contenidos.

1. Teoría de los conjuntos difusos.
2. Relaciones difusas.
3. Reglas difusas.

1. Teoría de los conjuntos difusos.

Conjuntos estrictos y función característica.

- La teoría de conjuntos tradicional introduce un concepto de dicotomía.
- Se impone una decisión binaria de clasificación de todo o nada: aceptar o rechazar un objeto con respecto a su pertenencia a un conjunto.
- La pertenencia de objetos de un Universo en un conjunto estricto definido en éste, está dada por la llamada función característica.
- Sea A un conjunto estricto en X. Su función característica φ_A:X→{0,1} está definida como:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in X \\ 0 & x \notin X \end{cases}$$

Definición básica de conjunto difuso.

El concepto de conjuntos borrosos consiste en relajar este requerimiento y permitir valores intermedios de pertenencia a una clase.

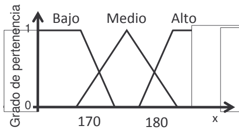
- La definición formal propuesta por Zadeh (1965) dice:
"Un conjunto borroso está caracterizado por una función de pertenencia (FP) que mapea los elementos de un dominio, espacio o universo de discurso X a un intervalo unitario [0 , 1]".

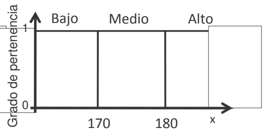
Conjuntos difusos y función de pertenencia.

- El concepto de conjunto difuso consiste en relajar este requerimiento y permitir valores intermedios de pertenencia en un conjunto.
- Un conjunto difuso en el Universo X está caracterizado por una función de pertenencia μ_A:X→[0,1].
- El valor de $\mu_A(x)$ se denomina grado de pertenencia de x ∈ X en A.

Conjuntos difusos y función de pertenencia.

- Por ejemplo, considere los siguientes conjuntos para describir la estatura de una persona.





- Si 3 personas P_1, P_2 y P_3, miden 179 cm, 171 cm y 168 cm, respectivamente, al evaluar las funciones de pertenencia y funciones características se tiene lo siguiente:

	Bajo	Medio	Alto
P_1	0	0.4	0.6
P_2	0.4	0.6	0
P_3	0.7	0.3	0

	Bajo	Medio	Alto
P_1	0	1	0
P_2	0	1	0
P_3	1	0	0

Notación usada para conjuntos difusos.

- Sea X un universo formado por los elementos $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
- Un conjunto difuso A definido en X puede ser representado en **forma discreta** como:

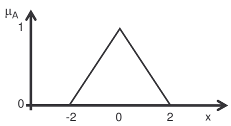
$$A = \mu_A(x_1)/x_1 + \mu_A(x_2)/x_2 + \ldots + \mu_A(x_n)/x_n$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i)/x_i$$

- En tanto, si X posee infinitos elementos, un conjunto difuso A definido en X representado en **forma continua** está dado por:

$$A = \int_X \mu_A(x)/x$$

Notación usada para conjuntos difusos.

- Ejemplo. Conjunto difuso con forma triangular.



Representación discreta:

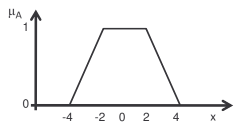
$$A = 0.25/-1.5 + 0.5/-1 + 0.75/-0.5 + 1.0/0 + 0.75/0.5 + 0.5/1 + 0.25/1.5$$

Representación continua:

$$A = \int_{-2}^{0} \left(\frac{2+x}{2}\right) \Big/ x + \int_{0}^{2} \left(\frac{2-x}{2}\right) \Big/ x$$

Notación usada para conjuntos difusos.

- Ejemplo. Conjunto difuso con forma trapezoidal.



Representación discreta:

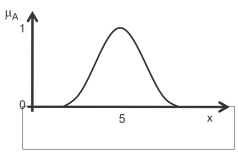
$$A = 0.5/-3 + 1/-2 + 1/-1 + 1/0 + 1/1 + 1/2 + 0.5/3$$

Representación continua:

$$A = \int_{-4}^{-2} \left(\frac{4+x}{2}\right) \Big/ x + \int_{-2}^{2} 1/x + \int_{2}^{4} \left(\frac{4-x}{2}\right) \Big/ x$$

Notación usada para conjuntos difusos.

- Ejemplo. Conjunto difuso con forma exponencial.



Representación discreta:

$$A = 0.11/2 + 0.607/4 + 0.607/6 + 0.11/8$$

Representación continua:

$$A = \int_X \exp\left(-0.5(x-5)^2\right) \big/ x$$

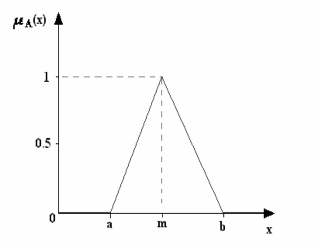
Tipos de Funciones de Pertenencia (FP).

- En principio, cualquier función de la forma $\mu_A: X \rightarrow [0,1]$ describe una FP asociada con un conjunto borroso A.
- La forma de la FP de éste no sólo depende del concepto a ser representado, sino que también del contexto en el que se utiliza.
- En las siguientes diapositivas se presentan las familias de FP más comunes.

Tipos de Funciones de Pertenencia (FP).

- Función triangular.

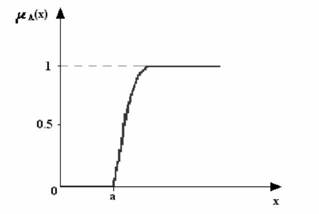
$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x \le a \\ \dfrac{x-a}{m-a} & x \in [a,m] \\ \dfrac{b-x}{b-m} & x \in [m,b] \\ 0 & x \ge b \end{cases}$$



Tipos de Funciones de Pertenencia (FP).

- Función Γ.

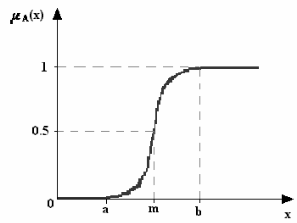
$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x \le a \\ 1 - e^{-k(x-a)^2} & x > a \end{cases}$$



Tipos de Funciones de Pertenencia (FP).

- Función S.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ 2\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)^2 & x \in [a,m] \\ 1-2\left(\dfrac{x-b}{b-a}\right)^2 & x \in [m,b] \\ 1 & x > b \end{cases}$$

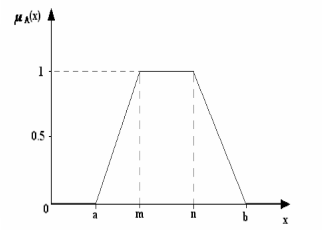


Donde **m = (a+b)/2** es conocido como un punto de *crossover* de la función S.

Tipos de Funciones de Pertenencia (FP).

- Función trapezoidal.

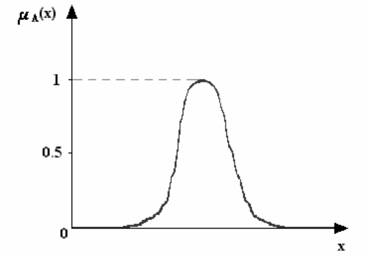
$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{m-a} & x \in [a,m] \\ 1 & x \in [m,n] \\ \dfrac{b-x}{b-n} & x \in [n,b] \\ 0 & x > b \end{cases}$$



Tipos de Funciones de Pertenencia (FP).

- Función Gaussiana.

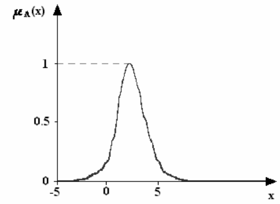
$$\mu_A(x) = e^{-k(x-m)^2} \qquad k > 0$$



Tipos de Funciones de Pertenencia (FP).

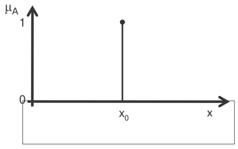
- Función tipo exponencial.

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1 + k(x-m)^2} \qquad k>1$$



Tipos de Funciones de Pertenencia (FP).

- Función singleton.



$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & x = x_0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determinación de la FP.

Método horizontal de estimación de la pertenencia

- La idea básica de este método es adquirir información acerca de los valores de pertenencia de algunos elementos seleccionados $x_1, x_2, \ldots, x_n$ del universo de discurso.
- Para esto es consultado un grupo de expertos que, por ejemplo, se les consulta: **¿puede x_i ser aceptado como compatible con el concepto A?**. Posibles respuestas {**sí**,**no**}.
- El valor estimado de la FP en x_i es tomado como la tasa del número de respuestas afirmativas $P(x_i)$ respecto del total de N respuestas, es decir:

$$\mu_A(x_i) = P(x_i)/N, \qquad \forall i$$

Determinación de la FP.

Método vertical de estimación de la pertenencia

- **α-cut** de **A** (**A_α**) es un conjunto cuyos elementos son aquellos del universo de discurso **X** cuyo valor de pertenencia excede el nivel de pertenencia **α**:

$$A_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

- El método de estimación consiste en elegir varios niveles **α** y consultar a varios expertos para que ellos identifiquen el subconjunto correspondiente de un universo de discurso **X** cuyos elementos pertenecen a **A** en un grado no menor que **α**.
- El conjunto borroso es construido apilando los **α-cuts** sucesivos.

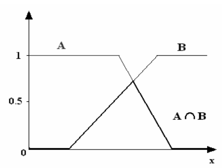
Definiciones básicas.

- Sea A un conjunto difuso definido en un universo de discurso X.
- Se define:
  - **Altura:** Valor máximo (supremo) que alcanza $\mu_A(x)$ para todo $x \in X$. Se define htg(A) como la altura de un conjunto borroso A.
  - **Normalidad.** Un conjunto difuso A es normal si: $\max_{x \in X} \mu_A(x) = 1$
  - **Soporte:** $\text{Supp}(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\}$
  - **Núcleo:** $\text{Core}(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) = 1\}$
  - **Crossover:** $\text{Crossover}(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) = 0.5\}$
  - **Cardinalidad:** $\text{Card}(A) = \sum_{x \in X} \mu_A(x)$
  - **Cardinalidad relativa:** $CR(A) = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(X)}$
  - **Convexidad.** Un conjunto difuso A es convexo si:

$$\forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X, \forall \lambda \in [0,1]$$
$$\mu_A(\lambda\, x_1 + (1-\lambda)\, x_2) \geq \min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2))$$

Operaciones fundamentales de conjuntos borrosos.

Intersección.



$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

- En general: t-norm (norma triangular).
  - $T : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$
- Un operador t-norm debe satisfacer:
  - Condiciones de borde: T(0, 0) = 0, T(a, 1) = T(1, a) = a
  - Monotonía: T(a, b) ≤ T(c, d), si a≤c y b≤d
  - Conmutatividad: T(a, b) = T(b, a)
  - Asociatividad: T(a, T(b, c)) = T(T(a, b), c)

Operaciones fundamentales de conjuntos borrosos.

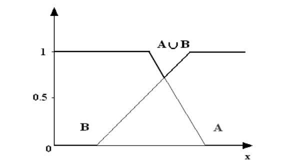
Intersección.

- Otros operadores t-norm:

minimum	$MIN(a,b) = \min\{a,b\}$
Łukasiewicz	$LAND(a,b) = \max\{a+b-1, 0\}$
probabilistic	$PAND(a,b) = ab$
weak	$WEAK(a,b) = \begin{cases} \min\{a,b\} & \text{if } \max\{a,b\} = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$
Hamacher	$HAND_\gamma(a,b) = ab/(\gamma + (1-\gamma)(a+b-ab)),\ \gamma \geq 0$
Dubois and Prade	$DAND_\alpha(a,b) = ab/\max\{a,b,\alpha\},\ \alpha \in (0,1)$
Yager	$YAND_p(a,b) = 1 - \min\{1, [(1-a)^p + (1-b)^p]^{1/p}\},\ p > 0$

Operaciones fundamentales de conjuntos borrosos.

Unión.



$$\mu_{A\cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

- En general: s-norm (co-norma triangular).
  - $S : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$
- Un operador s-norm debe satisfacer:
  - Condiciones de borde: S(1, 1) = 1, S(a, 0) = S(0, a) = a
  - Monotonía: S(a, b) ≤ S(c, d) si a≤c y b≤d
  - Conmutatividad: S(a, b) = S(b, a)
  - Asociatividad: S(a, S(b, c)) = S(S(a, b), c)

Operaciones fundamentales de conjuntos borrosos.

Unión.

- Otros operadores s-norm:

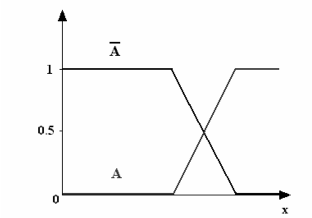
maximum	$MAX(a,b) = \max\{a,b\}$
Lukasiewicz	$LOR(a,b) = \min\{a+b,1\}$
probabilistic	$POR(a,b) = a+b-ab$
strong	$STRONG(a,b) = \begin{cases} \max\{a,b\} & \text{if } \min\{a,b\}=0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$
Hamacher	$HOR_\gamma(x,y) = (a+b-(2-\gamma)ab)/(1-(1-\gamma)ab),\ \gamma \geq 0$
Yager	$YOR_p(a,b) = \min\{1, \sqrt[p]{a^p+b^p}\},\ p>0$

Operaciones fundamentales de conjuntos borrosos.

Complemento o negación.

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

- En general:
  - $N : [0,1] \rightarrow [0,1]$



Operaciones aplicables a una FP.

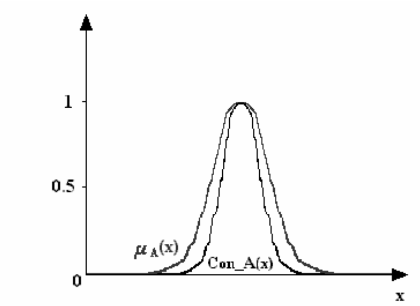
- **Normalización:** Esta operación convierte un conjunto borroso subnormal A, no vacío, en su versión normal.

$$\text{Norm\_A}(x) = \mu_A(x)/\text{hgt}(A)$$

- **Concentración:** Cuando un conjunto borroso A se concentra, su FP toma valores relativamente más pequeños.

$$\text{Con\_A}(x) = \mu_A^{\,p}(x) \qquad p > 1$$

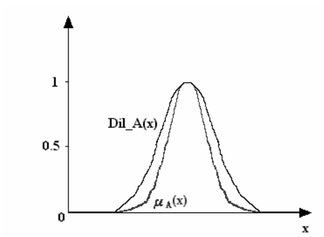
Operaciones aplicables a una FP.



Operaciones aplicables a una FP.

- **Dilatación:** Produce el efecto opuesto a la concentración.

$$\text{Dil\_A}(x) = \mu_A^{\,r}(x) \qquad r \in [0,1]$$

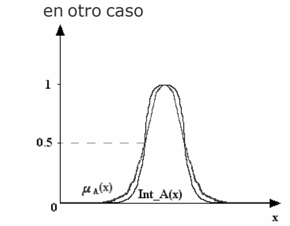


Operaciones aplicables a una FP.

- **Intensificación de contraste:** Los valores de pertenencia menores que ½ son disminuidos, mientras que los grados de pertenencia por sobre este valor son elevados.

$$\text{Int\_A}(x) = \begin{cases} 2^{p-1}\mu_A^p(x) & \text{si } 0 \le \mu_A(x) \le 0.5 \\ 1-2^{p-1}(1-\mu_A(x))^p & \text{en otro caso} \end{cases}$$

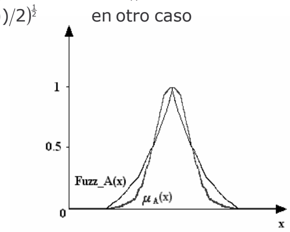
donde p>1.



Operaciones aplicables a una FP.

- **Difusificación:** El efecto de difusificación es complementario con el efecto de la intensificación de contraste.

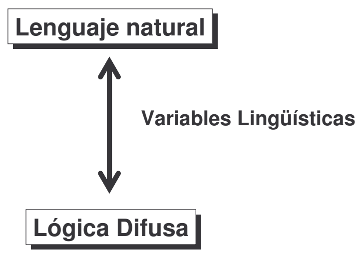
$$\text{Fuzz\_A}(x) = \begin{cases} (\mu_A(x)/2)^{\frac{1}{2}} & \text{si } 0 \le \mu_A(x) \le 0.5 \\ 1-((1-\mu_A(x))/2)^{\frac{1}{2}} & \text{en otro caso} \end{cases}$$



Variables Lingüísticas (VL).

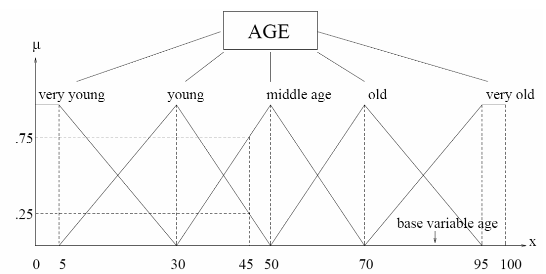
- Una variable lingüística (VL) es una *variable borrosa*, cuyos valores son *categorías o términos lingüísticos* representados por medio de conjuntos borrosos.
- Cada conjunto borroso sobre el universo de discurso de la VL representa un *Valor o Término Lingüístico*.

Variables Lingüísticas (VL).



Variables Lingüísticas (VL): ejemplo 1.

- Se busca definir la VL edad.
- Para esto se considera el conjunto de términos lingüísticos:
  T(x) = {very young, young, middle age, old, very old}.



Sintaxis de una VL.

- En general, el valor de una variable lingüística es un término compuesto $T(x) = \{L_1, L_2, \ldots, L_n\}$.
- Es una concatenación de los términos atómicos $L_1, L_2, \ldots, L_n$.
- Ejemplos: muy alto, no bajo, no muy alto.

Sintaxis de una VL.

- Clases de términos atómicos:
  - **Términos Primarios:** alto, bajo.
  - **Modificadores:** muy, mucho, más, menos.
  - **Conectivos y negación:** o, y, no.

Sintaxis de una VL.

- Problema planteado por Zadeh (1972):

  "Dados los conjuntos borrosos que representan el significado de cada término primario y el significado de los conectivos incluyendo la negación, estos permiten también computar el significado de un término compuesto".

Sintaxis de una VL.

- Considerar primero el problema que involucra a los términos compuestos de la forma **T=HL**, donde **H** es el modificador y **L** es un término lingüístico con un significado ya definido.
- Para encontrarle significado a **T** es conveniente mirar al modificador como un **operador H** que transforma al conjunto borroso $\mu_L(x)$, asociado al significado de **L**.

Sintaxis de una VL.

- Se podrían representar modificadores típicos mediante estos operadores:
  - Si **T = muy L**, entonces $\mu_T(x)$ **= Con_L(x)**. En este caso, **muy** actúa como un intensificador.

Sintaxis de una VL.

- Considérese la VL **temperatura**.
- Se podría tener que **temperatura = muy alta** y que el significado de **alta** está especificado por el conjunto borroso:

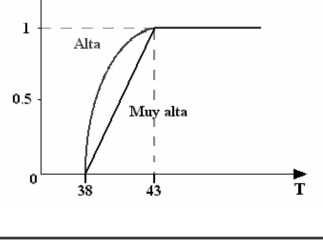
$$\mu_{alta}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x < 38 \\ \sqrt{0.2(x-38)} & \text{si } 38 \le x < 43 \\ 1 & \text{si } x \ge 43 \end{cases}$$

- Entonces, el significado de **muy alta** puede obtenerse como: $\mu_{muy\ alta}(x)$ **= Con_alta(x)**.
- Considerando **p = 2**, se tiene $\mu_{muy\ alta}(x) = [\mu_{muy\ alta}(x)]^2$.
- Luego:

$$\mu_{muy\ alta}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x < 38 \\ 0.2(x-38) & \text{si } 38 \le x < 43 \\ 1 & \text{si } x \ge 43 \end{cases}$$

Sintaxis de una VL.

$$\mu_{muy\ alta}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x < 38 \\ 0.2(x-38) & \text{si } 38 \le x < 43 \\ 1 & \text{si } x \ge 43 \end{cases}$$



Sintaxis de una VL.

- Más operadores asociados a modificadores típicos:
  - Si **T = más L**, entonces $\mu_T(x)$ **= Con_L(x)**, con p=1.5.
  - Si **T = menos L**, entonces $\mu_T(x)$ **= Dil_L(x)**, con p=0.75.
  - Si **T = mucho L**, entonces $\mu_T(x)$ **= Fuzz_L(x)**,.
  - Si **T = más_o_menos L**, entonces $\mu_T(x)$ **= Dil_L(x)**, con r = 0.5.

Sintaxis de una VL.

- Cuando se habla de términos más complejos, también se incluyen aquellos que contienen conectivos y negación.
- Resulta natural asociarles las siguientes operaciones:
  - **"y"** con la operación de **intersección.**
  - **"o"** con la operación de **unión.**
  - **"no"** con la operación **complemento**.

Sintaxis de una VL.

- Entonces, se puede computar directamente el significado de un término compuesto, considerando para dos términos **Ta** y **Tb**, las relaciones:
  - Si **T = no Ta** → $\mu_T(x) = \mu_{no\ Ta}(x) = 1 - \mu_{Ta}(x) \quad \forall\, x \in T$.
  - Si **T = Ta y Tb** → $\mu_T(x) = \mu_{Ta\ y\ Tb}(x) = T[\mu_{Ta}(x), \mu_{Tb}(x)] \quad \forall\, x \in T$.
  - Si **T = Ta o Tb** → $\mu_T(x) = \mu_{Ta\ o\ Tb}(x) = S[\mu_{Ta}(x), \mu_{Tb}(x)] \quad \forall\, x \in T$.

Sintaxis de una VL.

- Para **T = no bajo y no muy alto:**
  - $\mu_T(x) = T[1-\mu_{bajo}(x), 1\text{-Con\_alto}(x)] \quad \forall\, x \in T$.
- Para **T = muy bajo o alto:**
  - $\mu_T(x) = S[\text{Con\_bajo}(x), \mu_{alto}(x)] \quad \forall\, x \in T$.

2. Relaciones difusas.

Relaciones difusas.

- Una relación borrosa **R** en el producto Cartesiano $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ de los universos de discurso X_i, con $i = 1,\ldots,n$, puede ser definida como un conjunto de tuplas:

$$R = \{(\mu_R(x_1,\ldots,x_n),(x_1,\ldots,x_n)) \mid (x_1,\ldots,x_n) \in X_1 \times \ldots \times X_n\}$$

donde $\mu_R : X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \rightarrow [0\ ,\ 1]$ es la FP de **R**.

Relaciones difusas.

- Sean **R** y **W** relaciones borrosas definidas en **X×Y**.
- Las siguientes son operaciones básicas para relaciones borrosas:
  - **Intersección:** $\mu_{R\cap W}(x,y) = t[\mu_R(x,y),\mu_W(x,y)]$
  - **Unión:** $\mu_{R\cup W}(x,y) = s[\mu_R(x,y),\mu_W(x,y)]$
  - **Negación:** $\mu_{\bar{R}}(x,y) = 1-\mu_R(x,y)$

  donde **t[·]** es un operador t-norm y **s[·]** es un operador s-norm.

Relaciones difusas.

Producto Cartesiano difuso:

- Sean $A_1,\dots,A_n$, conjuntos borrosos definidos en los universos de discurso $X_1,\dots,X_n$, respectivamente.
- El **producto Cartesiano de** $A_1,\dots,A_n$, denotado por $A_1\times\dots\times A_n$, es una relación borrosa en el espacio $X_1\times\dots\times X_n$ con función de pertenencia:

$$\mu_{A_1\times A_2\times\dots\times A_n}(x_1,x_2,\dots,x_n) = t[\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2),\dots, \mu_{A_n}(x_n)]$$

donde $x_i \in X_i$, $i=1,2,\dots,n$ y **t[·]** es un operador t-norma extendido para el caso n-dimensional. Usualmente, se aplica un t-norma del tipo mínimo (**min[·]**).

Relaciones difusas.

Composición de relaciones :

- Sea $F(X_1\times\dots\times X_n)$ la familia de todas las relaciones borrosas definidas en $X_1\times\dots\times X_n$.
- La **composición sup-min** de dos relaciones borrosas $R\in F(X_1\times X_2)$ y $S\in F(X_2\times X_3)$ es una relación borrosa $R\circ S\in F(X_1\times X_3)$.
- Ésta se define por la siguiente función de pertenencia:

$$\mu_{R\circ S}(x_1,x_3) = \sup \min[\mu_R(x_1, x_2),\mu_S(x_2,x_3)] \quad \forall (x_1, x_3)\in X_1\times X_3$$

Relaciones difusas.

Operación de Composición conjunto-relación:

- La **composición sup-min** de un conjunto borroso $A\in F(X)$ y una relación borrosa $R\in F(X\times Y)$ es un conjunto borroso $B\in F(Y)$, $B=A\circ R$, que se define por la siguiente función de pertenencia:

$$\mu_B(y) = \sup_{x\in X} \min[\mu_A(x),\mu_R(x,y)] \qquad \forall y \in Y$$

- Esta operación es fundamental para los sistemas de inferencia borrosa.

Números Difusos

- Aritmética de conjuntos Borrosos
- Sea el Universo X , un conjunto numerico (IR)
- Sea A un conjunto difuso del universo X
- Definición : a ∈ A, se dice un número difuso ssi

$i)$ A es cjto difuso convexo

$ii)$ $\exists!\ x_0 : \mu_A(x_0) = 1$

$iii)$ μ_A es continua en un $I \subseteq$ Soporte

Nota : números fuzzy planos

$\mu_A(x) = 1, \forall x \in (m_1; m_2)$

Operaciones Básicas de números difusos Todas las operaciones binarias en IR, pueden ser extendidas a los números Fuzzy : + , -, *, /

$$\mu_{A\otimes B}(w) =_{w=u\otimes v} Sup_{u,v}\{\mu_A(u) * \mu_B(v)\}$$

siendo * usualmente la norma -t

Ejemplo : Suma de números difusos

$$\mu_{K+L}(w) =_{w=u+v} Sup_{u,v}\{Min\{\ \mu_K(u) * \mu_L(v)\ \}\}$$

$$Sea\ la\ \ fp\ \ triangular\ \ (\mathrm{a,b,c})$$

$$(a_1;b_1;c_1) + (a_2;b_2;c_2) = (a_1 + a_2; b_1 + b_2; c_1 + c_2)$$

Nota : La aritmética difusa permite incorporar la imprecisión como parte de la importante de los valores de las variables, lo anterior es de gran utlilidad en el desarrollo de técnicas de razonamiento cualitativas.

3. Reglas difusas (Lógica difusa)

Se denomina lógica difusa a todo sistema de inferencia basado en reglas que utilizan términos lingüista representados por conjuntos difusos.

Dado un conjunto de reglas que relacionan una serie de variables lingüistas y dado un conjunto de valores iniciales (expresados como Conjunto Difuso) , el sistema de inferencia tiene como objetivo deducir el valor de las respuestas (expresados como Conjunto Difuso)

Proposiciones difusas.

- La unidad básica de información que contienen las reglas borrosas, llamada proposición borrosa, es una proposición del tipo:

El (atributo) de (objeto) es (valor).

Proposición difusa es una expresión que relaciona una variable lingüista con sus etiquetas

- Ejemplos:
  - **La temperatura del horno es alta.**
  - **La presión del horno es baja.**

Proposiciones difusas.

- Las ideas de atributo y objeto pueden ser combinadas en el concepto de una variable.
- Las unidades básicas de información o proposiciones atómicas se pueden escribir como:

p: X es A

donde **X** es una variable lingüística (par **atributo (objeto)**) y **A** es su valor.

Proposiciones difusas
Ejemplo 1.

- El significado de la proposición **la temperatura del horno es alta** se puede expresar como:

  La temperatura del horno es alta

  = temperatura (horno) es alta

  donde **temperatura (horno)** es la variable lingüística y **alta** es su valor o etiqueta.

- Si se denota **temperatura (horno)** como **T** y **alta** como **H**, finalmente, se tendrá:

p: T es H

Proposiciones difusas.

- Se pueden formar proposiciones compuestas realizando conjunciones AND /OR disyunciones de proposiciones para formar nuevas proposiciones de la forma:

$$\mathrm{p : X1\ es\ A1} \wedge \mathrm{X2\ es\ A2\ , ... ,} \wedge \mathrm{Xn\ es\ An}$$

$$\mathrm{q : X1\ es\ A1} \vee \mathrm{X2\ es\ A2\ , ... ,} \vee \mathrm{Xn\ es\ An}$$

Proposiciones difusas.

- Las reglas **p** y **q** inducen las relaciones borrosas **P** y **Q** sobre $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ tal que:

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overset{n}{\underset{i=1}{T}}[\, \mu_{Ai}(x_i) \,]$$

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overset{n}{\underset{i=1}{S}}[\, \mu_{Ai}(x_i) \,]$$

Reglas difusas.

- Típicamente, una regla borrosa es una expresión del tipo tiene el formato general de una proposición condicional, también llamada implicancia borrosa:

p : Si **antecedente,** entonces **consecuente**

donde **antecedente** y **consecuente** son proposiciones borrosas.

p : Si **antecedente (premisa)** , entonces **consecuencia (conclusión)**

Una regla difusa representa una relación difusa entre el antecedente y el consecuente cuya función de pertenencia es:

$$\mu_{A \longrightarrow B}(x, y) = \phi(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

Reglas difusas.

Obs:

- Φ : Se llama operador de implicación (Booleana , Mizutono Lukasiewicz..etc)
- El caso más simple ocurre con **antecedente** y **consecuente atómicos**.
- En este caso, la regla **"Si X es A, entonces Y es B"** entonces podría entenderse como la proposición **p: (** ***X, Y*** **) es P**, donde **P(** ***x, y*** **)** es una relación borrosa sobre **X × Y**.

$$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \overline{A} \vee B \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee \overline{A}$$

Reglas difusas.

- Esta expresión, usualmente, se abrevia como **A→B** y define una relación binaria (dos variables) en el espacio **X × Y**:

$$P = A \rightarrow B = \{(x, y, \mu_{P=A\rightarrow B}(x, y)) \mid (x, y) \in X \times Y\}$$

Reglas difusas.

- En general, existen dos formas de interpretar la regla borrosa **A→B**:
  - **A→B interpretado como A asociado con B.**
  - **A→B interpretado como A exige B.**

Reglas difusas.

- **A→B interpretado como A asociado con B:**

$$\mu_{P=A\rightarrow B}(x, y) = \mu_{P=A\times B}(x, y) = t[\mu_A(x), \mu_B(y)] \quad \forall x \in X,\ y \in Y$$

donde **t** es un operador **t-norm**. El más utilizado es el propuesto por Mamdani, el cual corresponde al operador **min** aplicado a **A** y **B**.

Reglas difusas.

- **A→B interpretado como A exige B:**

$$\mu_{P=A\to B}(x,y)=s[\mu_{\bar{A}}(x),\mu_B(y)] \qquad \forall x\in X,\ y\in Y$$

donde **s** es un operador **s-norm** y $\bar{A}$ (no A) es el complemento del conjunto borroso **A.**

Razonamiento difuso.

- Procedimiento de inferencia que deriva conclusiones desde un conjunto de reglas borrosas del tipo **A→B** y de hechos conocidos.
- Los metodos más importantes de la lógica proposicional Clásica se conocen como

- Modus ponens
- Modus Tollens

Razonamiento difuso.

- La regla básica de inferencia en la lógica binaria clásica es conocida como **modus ponens (Zadek 1973)**, la cual se puede escribir como:

Premisa 1:	**x es A'**
Premisa 2:	**(x es A)→(y es B)**
Consecuencia:	**y es B'**

- Cuando **A', A** y **B', B** son conjuntos borrosos que representan a las **categorías lingüísticas** de las **variables lingüísticas x** e **y**, el procedimiento de inferencia pasa a llamarse **razonamiento borroso**.

Razonamiento difuso.

- Asumiendo que la implicancia borrosa de la **Premisa 2** se expresa como una relación binaria borrosa **R=A→B** en **X** × **Y**, y que **A', A** y **B** son conjuntos borrosos en **X**, **X** e **Y**, respectivamente, el conjunto borroso **B'** en **Y**, inducido por la **Premisa 1** y la **Premisa 2**, puede ser obtenido por la **regla composicional de inferencia** propuesta por Zadeh:

B' = A'○ R = A'○ (A→B)

Razonamiento difuso.

- En el caso de la composición **sup-t conjunto-relación**, se tiene:

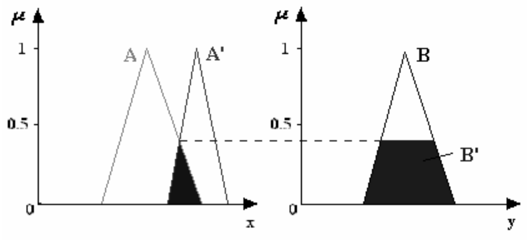
$$\mu_{B'}(y)=\sup t[\mu_{A'}(x),\mu_R(x,y)] \qquad \forall y\in Y$$

- La fórmula anterior, tomando la **composición sup-min** y la **implicación borrosa de Mamdani,** queda como:

$$\mu_{B'}(y)=\sup_{x\in X}\min[\mu_{A'}(x),\min[\mu_A(x),\mu_B(y)]]$$

$$=\min\left\{\sup_{x\in X}\min[\mu_{A'}(x),\mu_A(x)],\mu_B(y)\right\} \quad \forall y\in Y$$

Razonamiento difuso.



Razonamiento difuso.

- El razonamiento borroso es fácilmente generalizable para el caso de antecedente múltiple:

$$\text{Premisa1: } X_1 \text{ es } A'_1 \wedge X'_2 \text{ es } A'_2, \ldots, \wedge X_n \text{ es } A'_n$$
$$\text{Premisa2: } X_1 \text{ es } A_1 \wedge X_2 \text{ es } A_2, \ldots, \wedge X_n \text{ es } A_n \Rightarrow \text{y es B}$$

Consecuencia: y es B'

Razonamiento difuso.

- Los conectivos **"Y"** normalmente son implementados como un **producto Cartesiano** de los conjuntos borrosos correspondientes en el espacio $\mathbf{X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n}$.
- Con lo anterior, la relación $\mathbf{R = A_1 \times \ldots \times A_n \rightarrow B = A_1 \times \ldots \times A_n \times B}$ tendrá asociada la siguiente función de pertenencia:

$$\mu_{R=A1\times\ldots\times An\times B}(x_1,\ldots,x_n,y) = t\{t[\mu_{A1}(x_1),\ldots,\mu_{An}(x_n)],\mu_B(y)\}$$

$$\forall\, x_i \in X_i,\ (i=1,\ldots,n), y \in Y$$

Razonamiento difuso.

- La función de pertenencia asociada conjunto borroso **B'** inducido por las premisas **1** y **2**, considerando la **composición sup-min,** la **implicación borrosa de Mamdani** y la t-norm **min para los productos Cartesianos**, queda como:

$$\mu_{B'}(y) = \sup_{\substack{x_1 \in X_1 \\ \ldots \\ x_n \in X_n}} \min\Big\{\min\big(\mu_{A'_1}(x_1),\ldots,\mu_{A'_n}(x_n)\big), \mu_R(x_1,\ldots,x_n,y)\Big\}$$

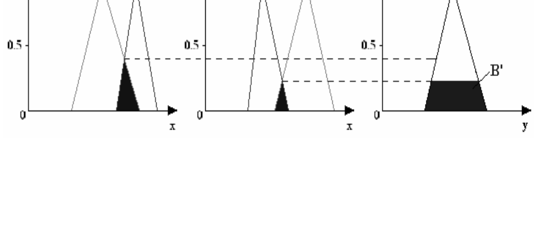
Razonamiento difuso.

$$\mu_{B'}(y) = \sup_{\substack{x_1 \in X_1 \\ \ldots \\ x_n \in X_n}} \min\Big\{\min\big(\mu_{A'_1}(x_1),\ldots,\mu_{A'_n}(x_n)\big), \min\big(\min\big(\mu_{A_1}(x_1),\ldots,\mu_{A_n}(x_n)\big),\mu_B(y)\big)\Big\}$$

$$\mu_{B'}(y) = \sup_{\substack{x_1 \in X_1 \\ \ldots \\ x_n \in X_n}} \min\Big\{\mu_{A'_1}(x_1),\ldots,\mu_{A'_n}(x_n),\mu_{A_1}(x_1),\ldots, \mu_{A_n}(x_n),\mu_B(y)\Big\}$$

$$\mu_{B'}(y) = \min\Big\{\sup_{x_1 \in X_1}\min\big(\mu_{A'_1}(x_1),\mu_{A_1}(x_1)\big),\ldots, \sup_{x_n \in X_n}\min\big(\mu_{A'_n}(x_1),\mu_{A_n}(x_n)\big),\mu_B(y)\Big\} \qquad \forall y \in Y$$

Razonamiento difuso.



Razonamiento difuso.

- Ahora, es posible generalizar el razonamiento borroso para el caso de múltiples reglas con antecedentes múltiples:

Premisa 1:$(x_1 \text{ es } A'_1)$ **Y…Y** $(x_n \text{ es } A'_n)$
Premisa 2:$(x_1 \text{ es } A_{1\,1})$ **Y…Y** $(x_n \text{ es } A_{n\,1}) \rightarrow (y \text{ es } B_1)$
....
$(x_1 \text{ es } A_{1\,r})$ **Y…Y** $(x_n \text{ es } A_{n\,r}) \rightarrow (y \text{ es } B_r)$
....
$\underline{(x_1 \text{ es } A_{1\,R0}) \text{ Y…Y } (x_n \text{ es } A_{n\,R0}) \rightarrow (y \text{ es } B_{R0})}$
Consecuencia: y es B'

Razonamiento difuso.

- La interpretación de múltiples reglas es comúnmente tomada como la unión de las relaciones borrosas $\mathbf{R_r}$ asociadas a cada regla borrosa **r**:

$$\mu_R(x_1,\ldots,x_n,y)=s\{\mu_{R_1}(x_1,\ldots,x_n,y),\ldots,\mu_{R_{R0}}(x_1,\ldots,x_n,y)\}$$

donde

$$\mu_{R_r}(x_1,\ldots,x_n,y)=t\{t(\mu_{A_{1r}}(x_1),\ldots,\mu_{A_{nr}}(x_n)),\mu_B(y)\}$$

$$r=1,\ldots,R0$$

Razonamiento difuso.

- Teniendo en cuenta que el operador ○ (composición) es distributivo sobre el operador **U** (unión), el conjunto borroso **B'** se puede ver de la siguiente manera:

$$B'=(A'_1\times\ldots\times A'_n)\circ\bigcup_{r=1}^{R0}R_r=\bigcup_{r=1}^{R0}\{(A'_1\times\ldots\times A'_n)\circ R_r\}=\bigcup_{r=1}^{R0}B'_r$$

Razonamiento difuso.

- La función de pertenencia asociada a **B'** inducido por las premisas **1** y **2**, tomando la **composición sup-min** para cada regla**,** la **implicación borrosa de Mamdani**, la t-norm **min para los productos Cartesianos** y la s-norm asociada al operador unión como el **máximo (max)**, queda como:

$$\mu_{B'}(y)=\max_{r=1,\ldots,R0}\left(\mu_{B'_r}(y)\right)$$

Razonamiento difuso.

- La función de pertenencia asociada a **B'** inducido por las premisas **1** y **2**, tomando la **composición sup-min** para cada regla**,** la **implicación borrosa de Mamdani**, la t-norm **min para los productos Cartesianos** y la s-norm asociada al operador unión como el **máximo (max)**, queda como:

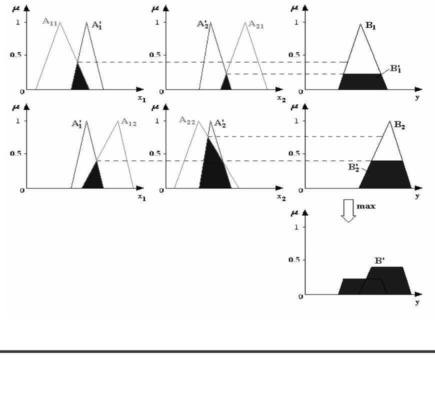
$$\mu_{B'}(y)=\max_{r=1,\ldots,R0}\left(\mu_{B'_r}(y)\right)$$

Razonamiento difuso.

- Lo cual es equivalente a:

$$\mu_{B'}(y)=\max_{r=1,\ldots,R0}\left\{\min\left(\sup_{x_1\in X_1}\min\left(\mu_{A'_1}(x_1),\ldots,\mu_{A_{1r}}(x_1)\right),\ldots,\sup_{x_n\in X_n}\min\left(\mu_{A'_n}(x_n),\ldots,\mu_{A_{nr}}(x_n)\right),\mu_{B_r}(y)\right)\right\}$$

Razonamiento difuso.



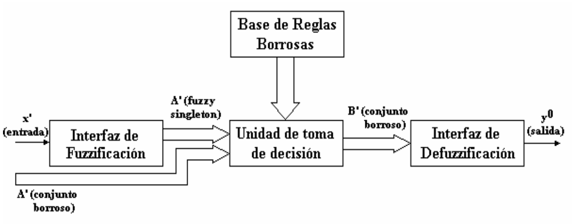
4. Sistemas de inferencia basados en lógica difusa.

Sistemas de inferencia borrosa.

- Estos sistemas se basan en los conceptos de teoría de conjuntos, en las reglas borrosas del tipo A→B y en el razonamiento borroso.
- Las reglas que se encuentran en estos sistemas tienen la siguiente estructura:

  (x_1 es A_1) Y … Y (x_n es A_n) → (y es B)
- El conjunto de reglas que conforman un sistema borroso se denomina **Base de Reglas Borrosas** (**BRB**).

El modelo Mamdani.



El modelo Mamdani.

- **Base de Reglas Borrosas** (**BRB**):

  Se definen los parámetros de las FP, las categorías lingüísticas de las variables de entrada y salida y el conjunto de reglas del tipo A→B. (Base de conocimiento aproximado)

- **Interfaz de Fuzzificación:**

  Se transforma cada variable de entrada (observación) en un valor de pertenencia para todos los conjuntos borrosos definidos sobre el universo de discurso de esa variable.

El modelo Mamdani.

- **Interfaz de Fuzzificación (continuación):**

  Una manera simple y natural de convertir la entrada en un conjunto borroso es convertir el valor de entrada **x’** en un **fuzzy singleton A’**. A continuación, se deben componer los **fuzzy singletons** con las categorías lingüísticas de los antecedentes de cada regla borrosa.

El modelo Mamdani.

- **Interfaz de Fuzzificación (continuación):**
  A continuación, se muestra la forma de obtener dichos valores (α_{ir}) para cada regla a través de la **composición sup-min**:

$$\alpha_{ir} = \sup_{x_i \in X_i} \min\left[\mu_{A'i}(x_i), \mu_{Air}(x_i)\right]$$

$$= \sup_{x_i \in X_i} \begin{cases} \min\left[1, \mu_{Air}(x_i)\right] & x_i = x'_i \\ \min\left[0, \mu_{Air}(x_i)\right] & \text{otro caso} \end{cases}$$

$$= \sup_{x_i \in X_i} \begin{cases} \mu_{Air}(x_i) & x_i = x'_i \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

El modelo Mamdani.

- **Interfaz de Fuzzificación (continuación):**
  Lo cual es equivalente a:

$$\alpha_{i\,r} = \mu_{A\,i\,r}(\,x'_i\,) \qquad i = 1, 2,..., n$$

El valor α_{ir} se conoce como el **grado de compatibilidad** entre un dato de entrada y un antecedente de la regla.

Un sistema de inferencia basado en la composición consiste en componer todas las reglas del sistema formando una única relación difusa

El modelo Mamdani.

- **Unidad de Toma de Decisión:**
  a) Obtener la intersección borrosa de los valores obtenidos, inducida por los conectivos "Y":

$$\alpha_{min,\,r} = \min\,(\alpha_{1\,r}\,, \alpha_{2\,r}\,,..., \alpha_{n\,r})$$

$$= \min\,[\mu_{A\,1\,r}(\,x'_1\,), \mu_{A\,2\,r}(\,x'_2\,),..., \mu_{A\,n\,r}(\,x'_n\,)]$$

$$r = 1, 2,..., R0$$

El valor $\alpha_{min,r}$ se conoce como el **grado de activación.** El cálculo se realiza a partir de los grados de similaridad entre las observaciones y las etiquetas de las VL.

El modelo Mamdani.

- **Unidad de Toma de Decisión (continuación):**
  b) Obtener el conjunto borroso resultante de la resolución de la implicancia entre el valor obtenido para los antecedentes y el conjunto borroso que representa la consecuencia, para cada regla:

$$\alpha_r = \min\,\{\,\min\,[\mu_{A\,1\,r}(\,x'_1\,), \mu_{A\,2\,r}(\,x'_2\,),..., \mu_{A\,n\,r}(\,x'_n\,)]\,, \mu_{B\,r}(\,y\,)\,\}$$

$$r = 1, 2,..., R0$$

El modelo Mamdani.

- **Unidad de Toma de Decisión (continuación):**
  c) Obtener la consecuencia final B' realizando una unión entre los conjuntos borrosos resultantes de cada regla borrosa:

$$\mu_{B'}(\,y\,) = \max_{r\,=\,1,\,2,...,\,R0}\,[\,\alpha_r\,]$$

El modelo Mamdani.

- **Interfaz de Defuzzificación:**

  Usada cuando es conveniente convertir el resultado borroso que arroja el proceso de inferencia de la Unidad de Toma de Decisión, en un número discreto.

El modelo Mamdani.

- **Interfaz de Defuzzificación (continuación):**
  Los tres métodos más utilizados son:

  a) Criterio Máximo: Encontrar el punto en el cual la FP es máxima. Esto es:

$$y^0 = \max_{y\,\in\,Y}\,\mu_{B'}(\,y\,)$$

El modelo Mamdani.

- **Interfaz de Defuzzificación (continuación):**

  b) Media de los Máximos: Tomar el promedio de aquellos puntos donde la FP es un máximo. Esto es:

$$Y^0 = \{ y^0 \mid \mu_{B'}(y^0) = \max \mu_{B'}(y) \}$$

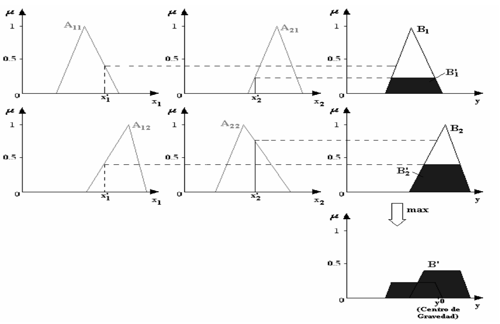
donde $y \in Y$

El modelo Mamdani.

- **Interfaz de Defuzzificación (continuación):**
  c) Centro de Gravedad: Consiste en encontrar el centro de gravedad de los conjuntos borrosos de la solución obtenida en la fase de Inferencia. Esto es:

$$y^0 = \frac{\int_Y y \ \mu_{B'}(y) \ dy}{\int_Y \mu_{B'}(y) \ dy}$$

El modelo Mamdani.



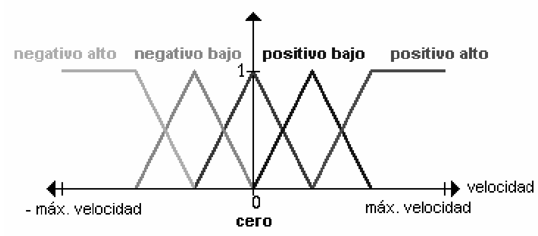
Ejemplo.

- El problema consiste en equilibrar una varilla pivoteada sobre una plataforma móvil que puede moverse hacia la izquierda o hacia la derecha. El resultado del controlador borroso, es señalar la velocidad que debe aplicarse a la plataforma móvil de manera de equilibrar la varilla.
- Entonces, la velocidad de la plataforma corresponde a la salida del sistema, en este sentido, se define la VL "Velocidad" (abreviada como **V**).

Ejemplo.

- Categorías Lingüísticas:
  negativo alto (celeste) (abreviado como **NA**).
  negativo bajo (verde) (abreviado como **NB**).
  cero (rojo) (abreviado como **C**).
  positivo bajo (azul) (abreviado como **PB**).
  positivo alto (rosado) (abreviado como **PA**).

Ejemplo.



Ejemplo.

- Las variables de entrada del sistema son la **velocidad angular** de la varilla y el **ángulo** de ésta con respecto a la vertical. Las VL son entonces, "Velocidad Angular" (abreviada como **VA**) y "Ángulo" (abreviado como **A**).
- Las categorías lingüísticas que definen estas variables son equivalentes a las anteriormente definidas para la VL "Velocidad".

Ejemplo.

- Las reglas borrosas son construidas de la siguiente manera:

Si el **ángulo** es **cero** y la **velocidad angular** es **cero** entonces la **velocidad** será **cero:**

(A es C) Y (VA es C) → (V es C)

Si el ángulo es cero y la velocidad angular es positiva baja entonces la velocidad será positiva baja.

(A es C) Y (VA es PB) → (V es PB)

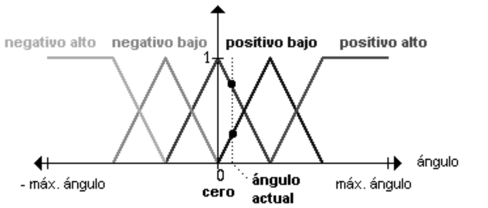
Ejemplo.

- Se pueden resumir todas las reglas aplicables en una tabla, que constituye la **Base de Reglas Borrosas** (BRB):

Velocidad Angular (VA)	Ángulo (A)				
	NA	NB	C	PB	PA
NA			NA		
NB			NB	C	
C	NA	NB	C	PB	PA
PB		C	PB		
PA			PA		

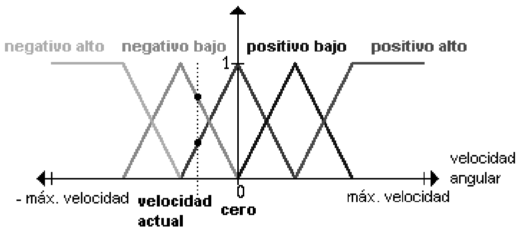
Ejemplo.

- Se definirán dos valores explícitos del ángulo y la velocidad angular para operar con ellos:
  - **Valor actual para el ángulo:**



Ejemplo.

- **Valor actual para la velocidad angular:**



Ejemplo.

- A partir de estos valores, se calculan los valores de verdad de las reglas de la BRB cuyas FP correspondientes son no nulas.
- Éstas son:

1. **Si el ángulo es cero y la velocidad angular es cero entonces la velocidad será cero:**

   (A es C) Y (VA es C) → (V es C)

2. **Si el ángulo es cero y la velocidad angular es negativa baja entonces la velocidad será negativa baja:**

   (A es C) Y (VA es NB) → (V es NB)

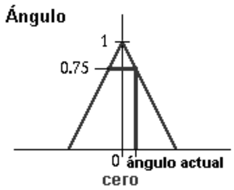
Ejemplo.

3. **Si el ángulo es positivo bajo y la velocidad angular es cero entonces la velocidad será positiva baja:**
   (A es PB) Y (VA es C) → (V es C)

4. **Si el ángulo es positivo bajo y la velocidad angular es negativa baja entonces la velocidad será cero:**
   (A es PB) Y (VA es NB) → (V es C)

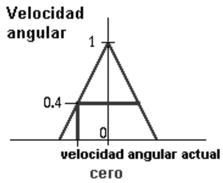
Ejemplo.

- A modo de ejemplo, se describe el procedimiento completo para la regla número 1.
- Dado el valor actual del ángulo se puede calcular su grado de pertenencia al conjunto borroso "cero" a través de su FP.
- A partir de la figura siguiente, se puede notar que el valor actual del **ángulo** pertenece al conjunto borroso **"cero"** en un grado de **0.75**, utilizando el operador **sup min**:



Ejemplo.

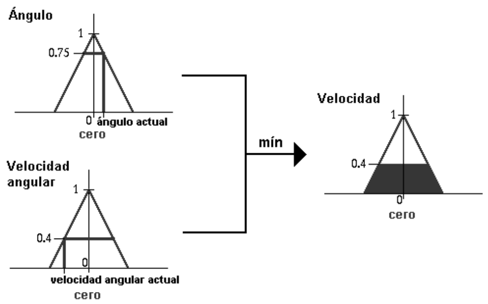
- Por otra parte, en la regla 1 se menciona la variable lingüística "velocidad angular" y su categoría lingüística "cero".
- Con el valor supuesto para la velocidad angular actual se puede calcular su grado de pertenencia al conjunto borroso "cero" a través de su FP.
- A partir de la figura siguiente, se observa que el valor supuesto para la **velocidad angular** actual pertenece al conjunto borroso **"cero"** en un grado de **0.4**, utilizando el operador **sup min**:



Ejemplo.

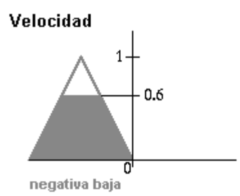
- Como las dos partes de la condición de la regla 1 están unidas por una "y" se calcula el valor: **mín(0.75,0.4) = 0.4** y en este nivel se corta el conjunto borroso "cero" de la variable lingüística **"velocidad"** (salida del sistema) asociada a la plataforma móvil.

Ejemplo.



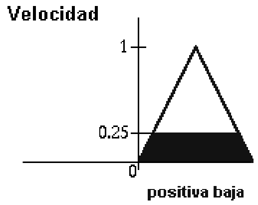
Ejemplo.

- El proceso anterior se repite para las restantes reglas:
  - **Regla 2:**



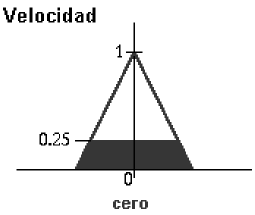
Ejemplo.

– **Regla 3:**



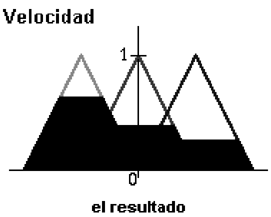
Ejemplo.

– **Regla 4:**



Ejemplo.

- Estas cuatro reglas, solapadas con el operador **max**, entregan en el siguiente resultado:



Ejemplo.

- El resultado del controlador borroso es un conjunto borroso (de la velocidad de la plataforma), de manera que es necesario escoger un valor discreto como salida final. Para este caso se aplicará el método del centro de gravedad para realizar la defuzzificación: