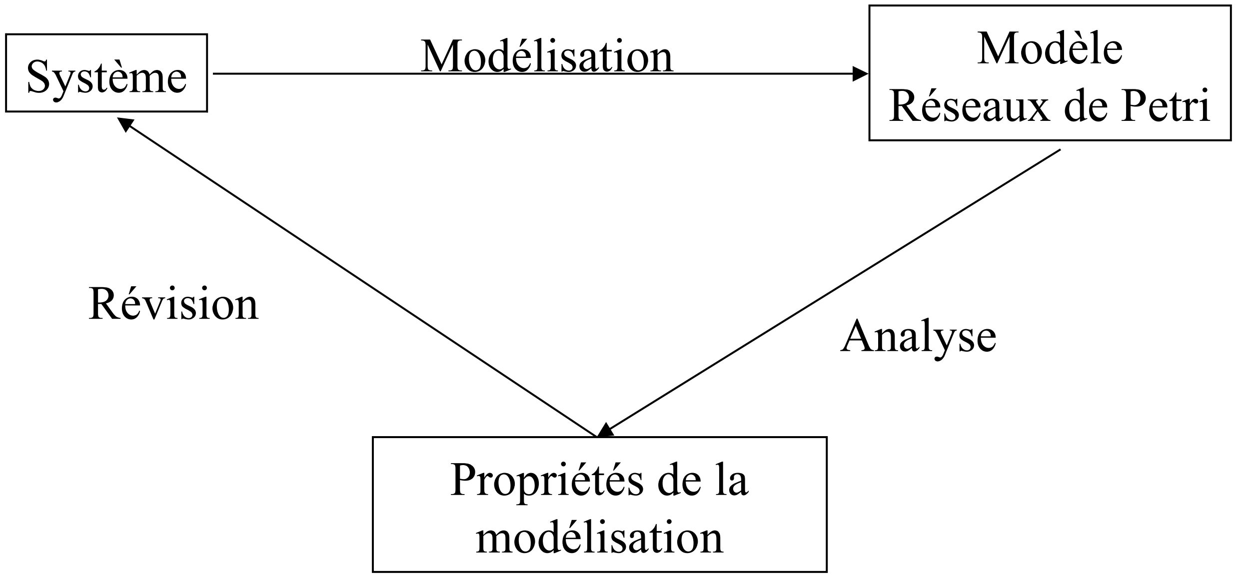
Les réseaux de Petri

Définition

- Le formalisme des réseaux de Petri est un outil permettant l'étude de systèmes dynamiques et discrets.
- Il s'agit d'une représentation mathématique permettant la modélisation d'un système.
- L'analyse d'un réseau de Petri peut révéler des caractéristiques importantes du système concernant sa structure et son comportement dynamique.
- Les résultats de cette analyse sont utilisés pour évaluer le système et en permettre la modification et/ou l'amélioration le cas échéant.

Définition


Système
Modélisation
Modèle
Réseaux de Petri
Révision
Analyse
Propriétés de la
modélisation

Caractéristiques principales

- Distribution des états et des changement d'états dans le réseau
- Dépendance et indépendance d'ensembles d'événements représentées explicitement.
- Représentation à différents niveaux d'abstractions (i.e. détaillés comme abstraits)
- Vérifications des propriétés possibles car basés sur un formalisme mathématique rigoureux
- Modélisation simulable
- Représentation graphique

Éléments de base

- Un Réseau de Petri est constitué :
  - D'un ensemble fini de *places* :
  - D'un ensemble fini de *transitions* :
  - D'un ensemble fini de *flèches*, connectant des places à des transitions ou des transitions à des places : $\longrightarrow$

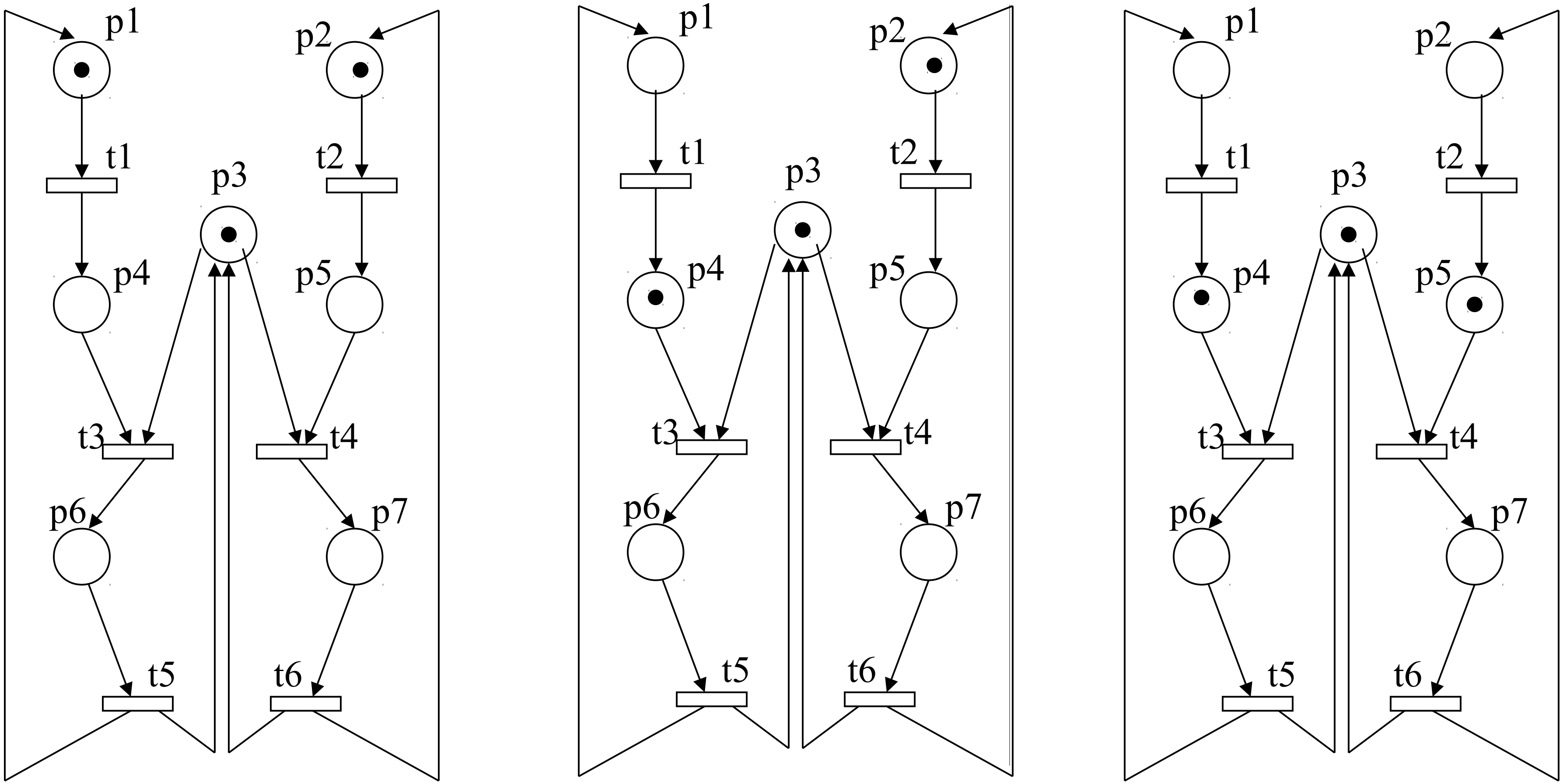
–Une place peut contenir un ou plusieurs *jetons* :

–L'état du réseau est défini par le *marquage* de ses places.

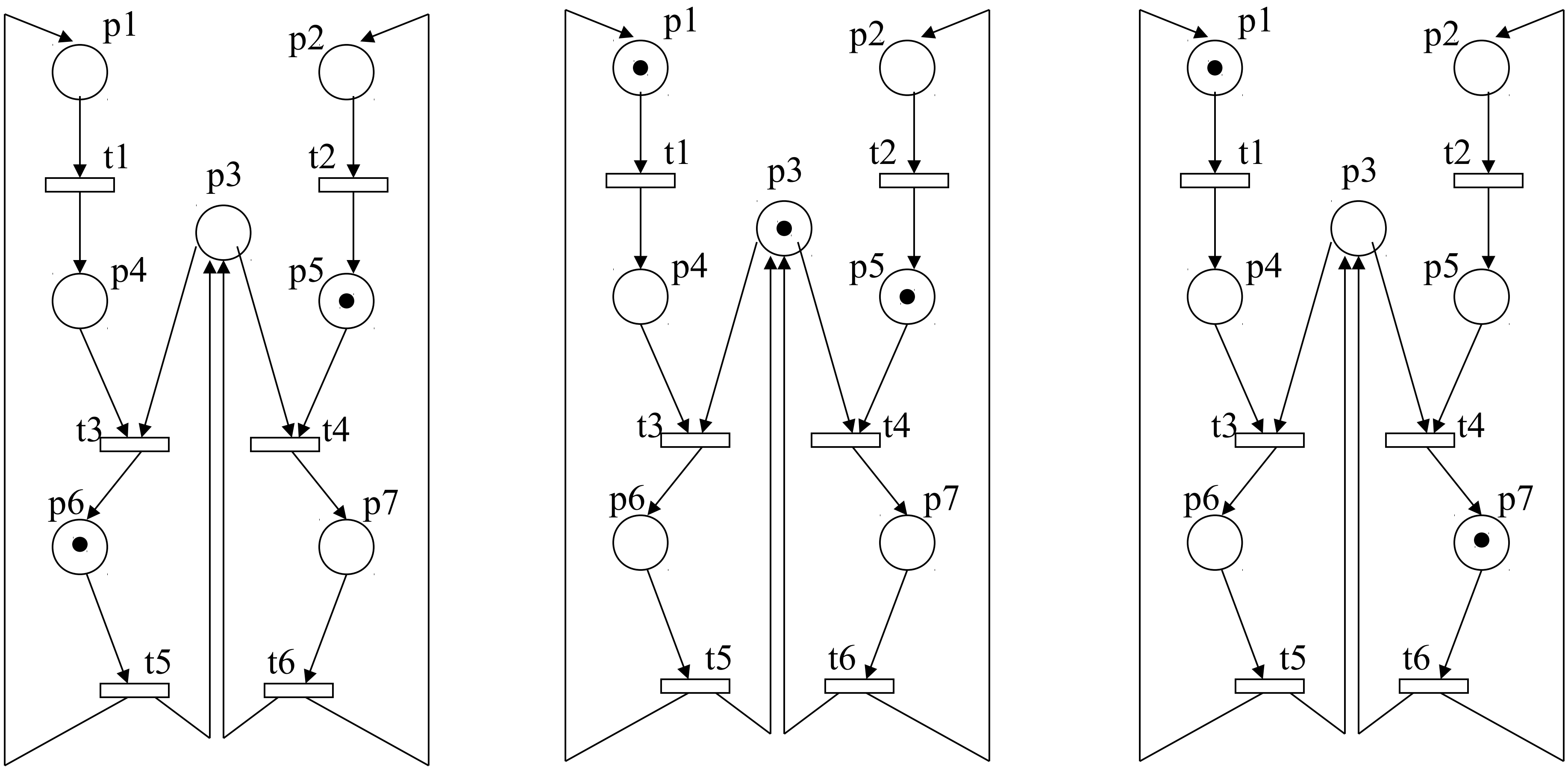
–L'évolution du marquage obéit à la règle suivante :

- Chaque transition à des *places d'entrée* et des *places de sortie*. Si toutes les places d'entrée contiennent au moins un jeton, la transition peut être franchie ('tirée'). Un jeton est alors retiré de chaque place d'entrée et un jeton est rajouté à chaque place de sortie.
- Si plusieurs transitions sont franchissables, le choix de celle qui est tirée est indéterministe.

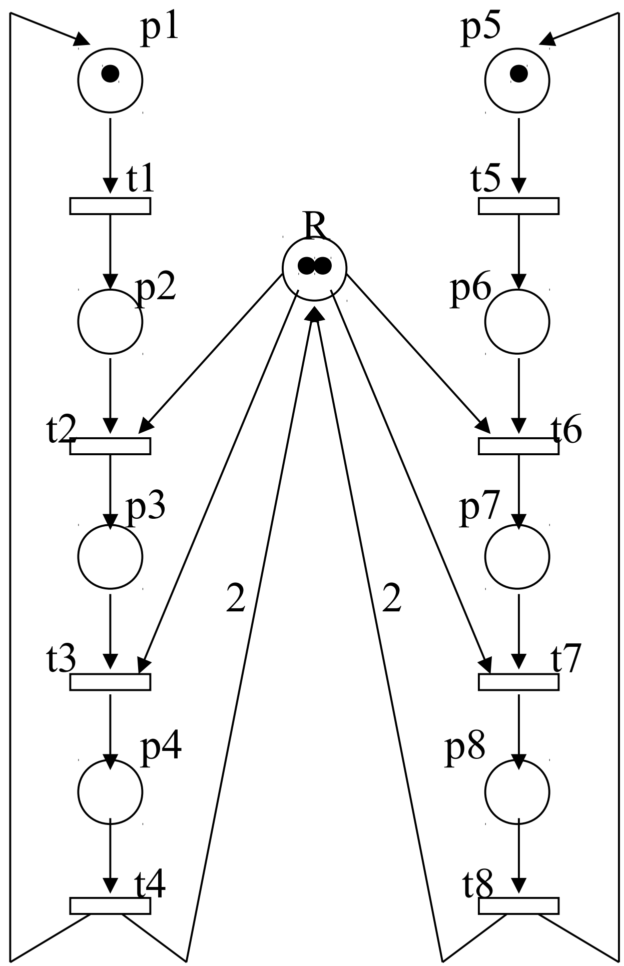
Exemple 1


p1
p2
t1
t2
p3
p4
p5
t3
t4
p6
p7
t5
t6
p1
p2
t1
t2
p3
p4
p5
t3
t4
p6
p7
t5
t6
p1
p2
t1
t2
p3
p4
p5
t3
t4
p6
p7
t5
t6

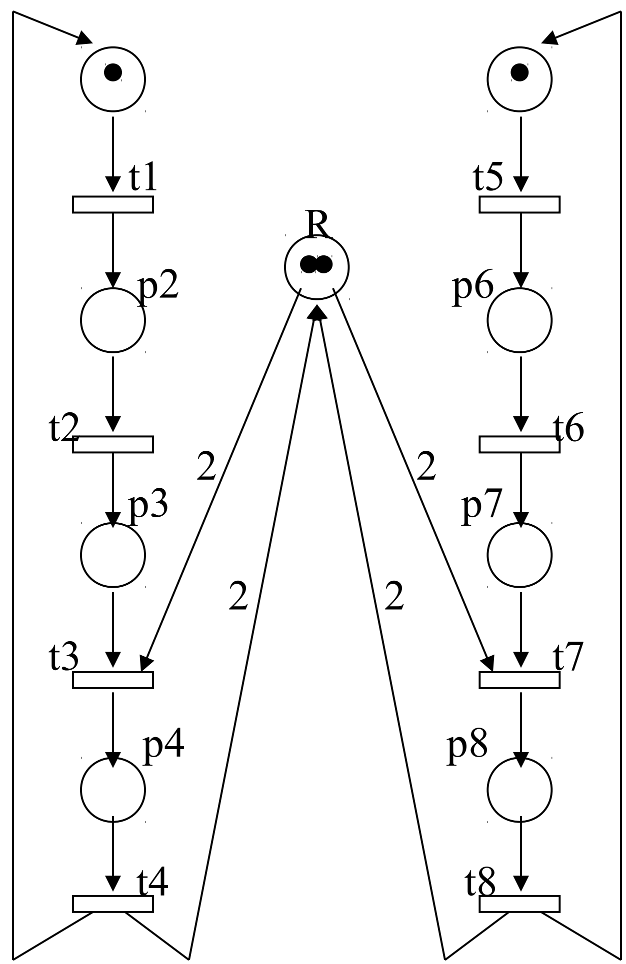
Exemple 1


p1
p2
t1
t2
p3
p4
p5
t3
t4
p6
p7
t5
t6
p1
p2
t1
t2
p3
p4
p5
t3
t4
p6
p7
t5
t6
p1
p2
t1
t2
p3
p4
p5
t3
t4
p6
p7
t5
t6

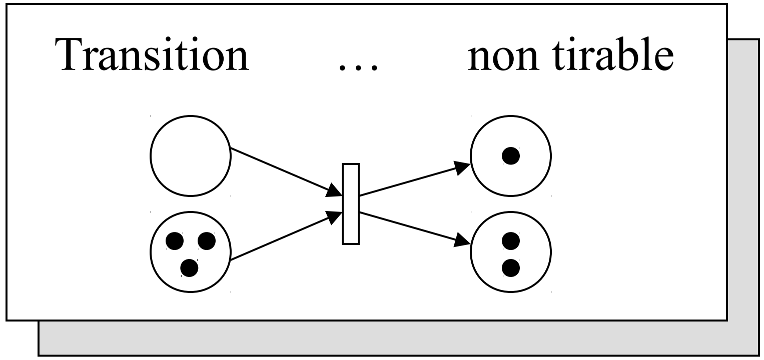
Exemple 2 : RdP avec risque d'interblocage

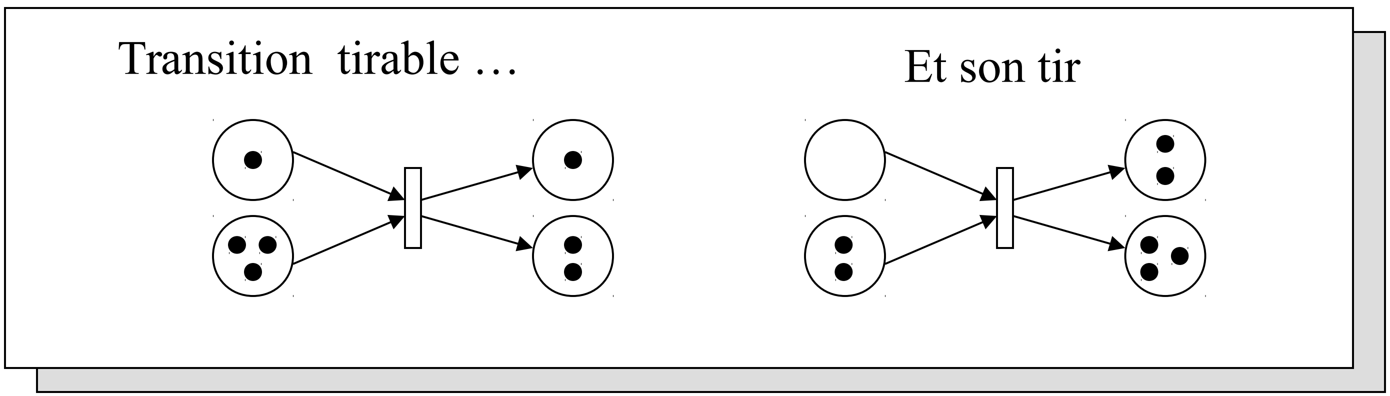


Exemple 3 : RdP vivant

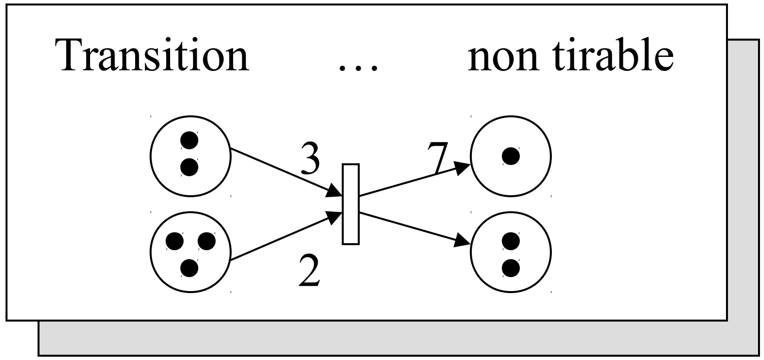


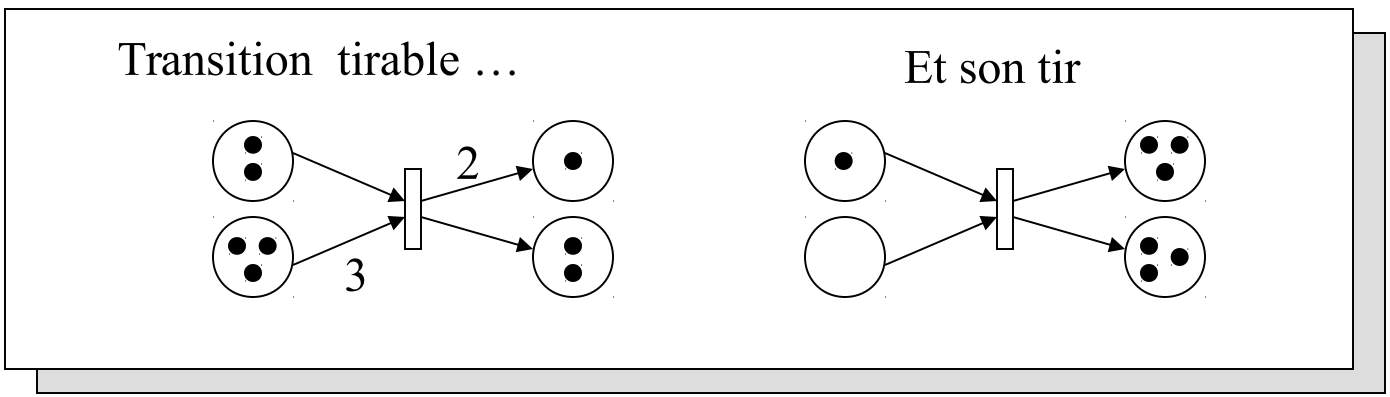
Transition et tir





Transition avec valuation des arcs

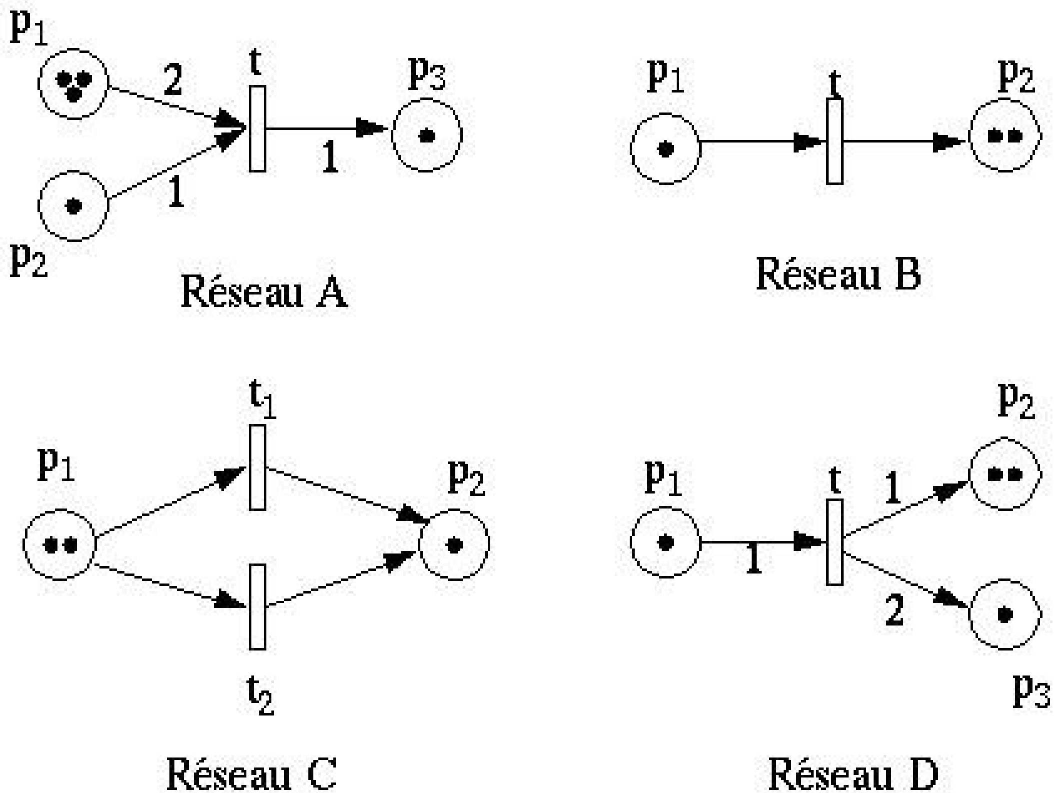




Exercice

Imaginons que dans un réseau de Pétri (RdP), une transition représente une opération et une place un lieu de stockage dans un système de fabrication.

- Dire ce que représentent les différents RdP de la figure 1. Donner en particulier la signification des jetons et les types d'opérations représentées.

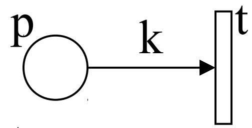


Le formalisme

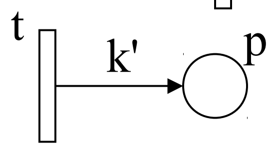
- Un réseau Place/Transition ou simplement réseau, est un quadruplet (P, T, Entrée, Sortie) où
  - P est un ensemble fini de places
  - T est un ensemble fini de transitions
  - Entrée est une application, Entrée: $P \times T \rightarrow \mathbb{N}$, appelée application d'incidence avant
  - Sortie est une application, Sortie: $P \times T \rightarrow \mathbb{N}$, appelée application d'incidence arrière

Le formalisme (suite)

- Terminologie :
  - Place :

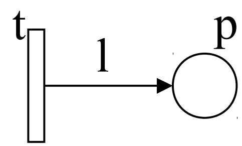
    p est une place d'entrée de t si Entrée(p,t) > 0: 

k=Entrée(p,t)

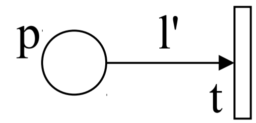
    p est une place de sortie de t si Sortie(p,t) > 0: 

k'=Sortie(p,t)

  - Transition :

    t est une transition d'entrée de p si Sortie(p,t) > 0: 

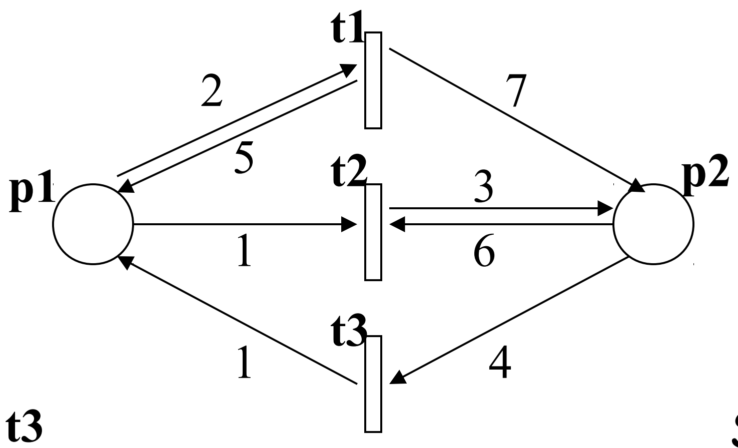
l=Sortie(p,t)

    t est une transition de sortie de p si Entrée(p,t) > 0: 

l'=Entrée(p,t)

Le formalisme (suite)

- Représentation matricielle :
  - Entrée : lignes = places & colonnes = transitions
  - Sortie : lignes = places & colonnes = transitions



Entrée

$$\begin{array}{c|ccc} & t1 & t2 & t3 \\ \hline p1 & 2 & 1 & 0 \\ p2 & 0 & 6 & 4 \end{array}$$

Sortie

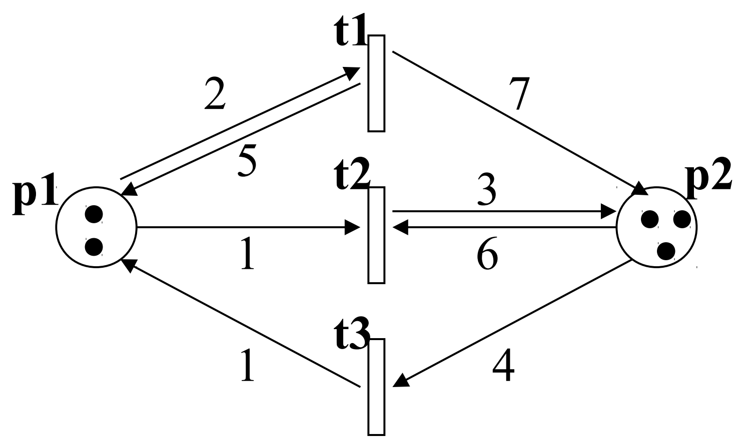
$$\begin{array}{c|ccc} & t1 & t2 & t3 \\ \hline p1 & 5 & 0 & 1 \\ p2 & 7 & 3 & 0 \end{array}$$

Le formalisme (suite)

- Marquage d'un réseau est son état :
  - Application $M: P \rightarrow \mathbb{N}$ donnant pour chaque place le nombre de jetons qu'elle contient.

    Le marquage initial est généralement noté M_0

$$M_0 \quad \begin{array}{c} p1 \\ p2 \end{array} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$



Le formalisme (suite)

– Fonctionnement d'un réseau :

- Une transition t est tirable pour un marquage M si et seulement si

$$\forall\ p \in P\ M(p) \geq \text{Entrée}(p,t)$$

  Il s'agit de la condition de franchissement de t depuis M.

- Si t est franchissable depuis M, le tir (ou le franchissement) de t produit un nouveau marquage M' donné par

$$\forall\ p \in P\ M'(p) = M(p) - \text{Entrée}(p,t) + \text{Sortie}(p,t)$$

Le formalisme (suite)

– Notations

- t tirable depuis M: $M \xrightarrow{t}$
- tir de t depuis M donnant M': $M \xrightarrow{t} M'$
- $M' = M - Entree(.,t) + Sortie(.,t)$

– Définition

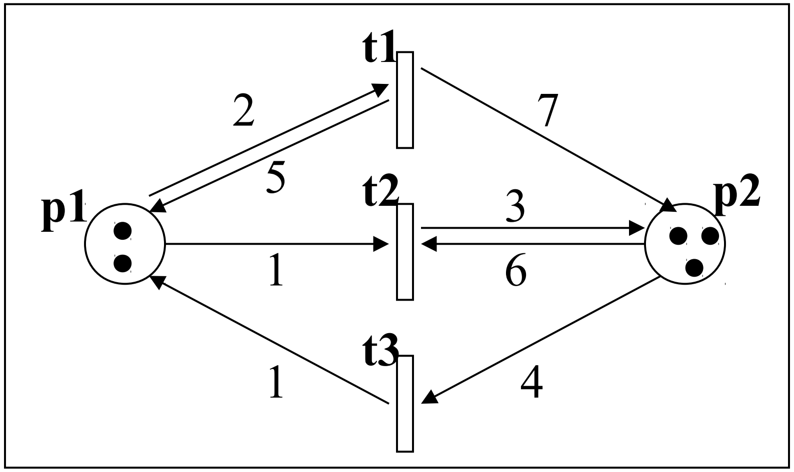
- La *matrice d'incidence* d'un réseau, notée C, est définie par

$$\forall\ p \in P\ \forall\ t \in T\ C(p,t) = Sortie(p,t) - Entrée(p,t)$$

- Si $M \xrightarrow{t} M'$ alors $M' = M + C(.,t)$
- Un RdP est *Pur* si et seulement si :

$$\forall\ p \in P\ \forall\ t \in T\ Sortie(p,t).Entrée(p,t) = 0$$

Exemple



A

$$\text{Entrée}(\_, t1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \leq M_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$M_0 \xrightarrow{t} M'$$

$$M = M_0 \;\; \text{Entree}(.,t) + \text{Sortie}(.,t)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

B

$$M = M_0 + C(.,t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Conflits et parallélisme

– *Conflit structurel* : deux transactions t1 et t2 sont en conflit structurel ssi elles ont une place d'entrée en commun :

$$\exists p \quad Entrée(p, t_1) \cdot Entrée(p, t_2) \neq 0$$

– *Conflit effectif* : deux transactions t1 et t2 sont en conflit effectif pour un marquage M ssi elles sont en conflit structurel et que :

$$M \geq Entrée(., t_1)$$

$$M \geq Entrée(., t_2)$$

Conflits et parallélisme

– *Parallélisme structurel* : deux transactions t1 et t2 sont parallèles structurellement si elles n'ont pas de place d'entrée commune :

Produit cartésien des vecteur d'entrée

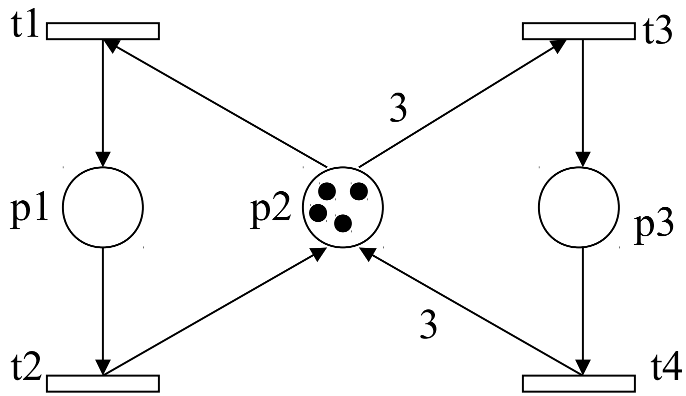
$$Entrée(.,t_1) \times Entrée(.,t_2) = 0$$

•*Parallélisme effectif* : deux transactions t1 et t2 parallèles pour un marquage M ssi elles sont parallèles structurellement et que :

$$M \geq Entrée(.,t_1)$$

$$M \geq Entrée(.,t_2)$$

Exemple



– Les transactions t1 et t3 sont en conflit effectif puisque :

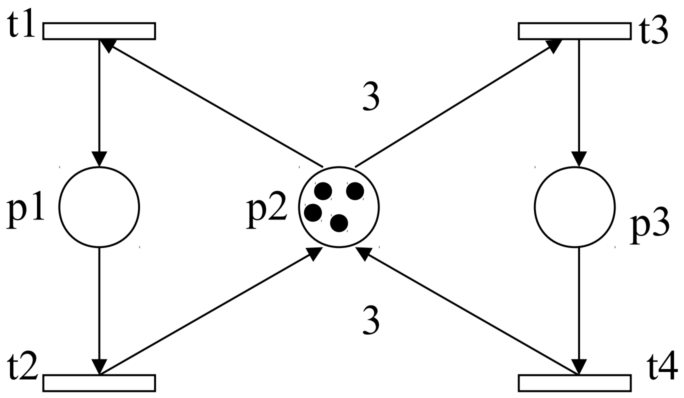
Entrée(p2, t1).Entrée(P2, t3)=3 et que

M(P2)>=Entrée(p2, t1) et M(P2)>=Entrée(p2, t3)

– Les transactions t2 et t4 sont structurellement parallèles, en effet :

$$Entrée(.,t2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Entrée(.,t4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemple



- Le marquage initial : $M = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Pour M les transactions t1 et t3 sont en conflit effectif.
- Soit le marquage : $M' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- Pour M' les transactions t2 et t4 sont effectivement parallèles.

La séquence de transitions

- La *séquence de transitions* est définie à partir d'un marquage donné.

  C'est une suite de transitions franchissables successivement.

$$M \xrightarrow{t1} M_1 \qquad M_1 \xrightarrow{t2} M_2 \quad M_2 \xrightarrow{t3} M_3 \quad \cdots \quad M_n \xrightarrow{tn} M'$$

$$M' = M + C\bar{s}$$

$\bar{s}$: vecteur caractéristique de la séquence de transitions $s = t\,1\;t\,2\;...\;t\,n$

$\bar{s}(t)$ donne le nombre d'occurrences de la transition t dans s

On note $M \xrightarrow{s} M'$

- Remarques: $s = s1.s2 \quad \Rightarrow \quad \bar{s} = \bar{s_1} + \bar{s_2}$

  $s1 = s2 \quad \Rightarrow \quad M + C.\bar{s_1} = M + C.\bar{s_2}$

Marquages accessibles ou successeurs

Un marquage M' est un marquage accessible, ou un successeur de M, s'il existe une suite de transitions s $\in$ T* tel que

$$M \xrightarrow{s} M'$$

L'ensemble des marquages accessibles depuis M est noté

A(R,M)

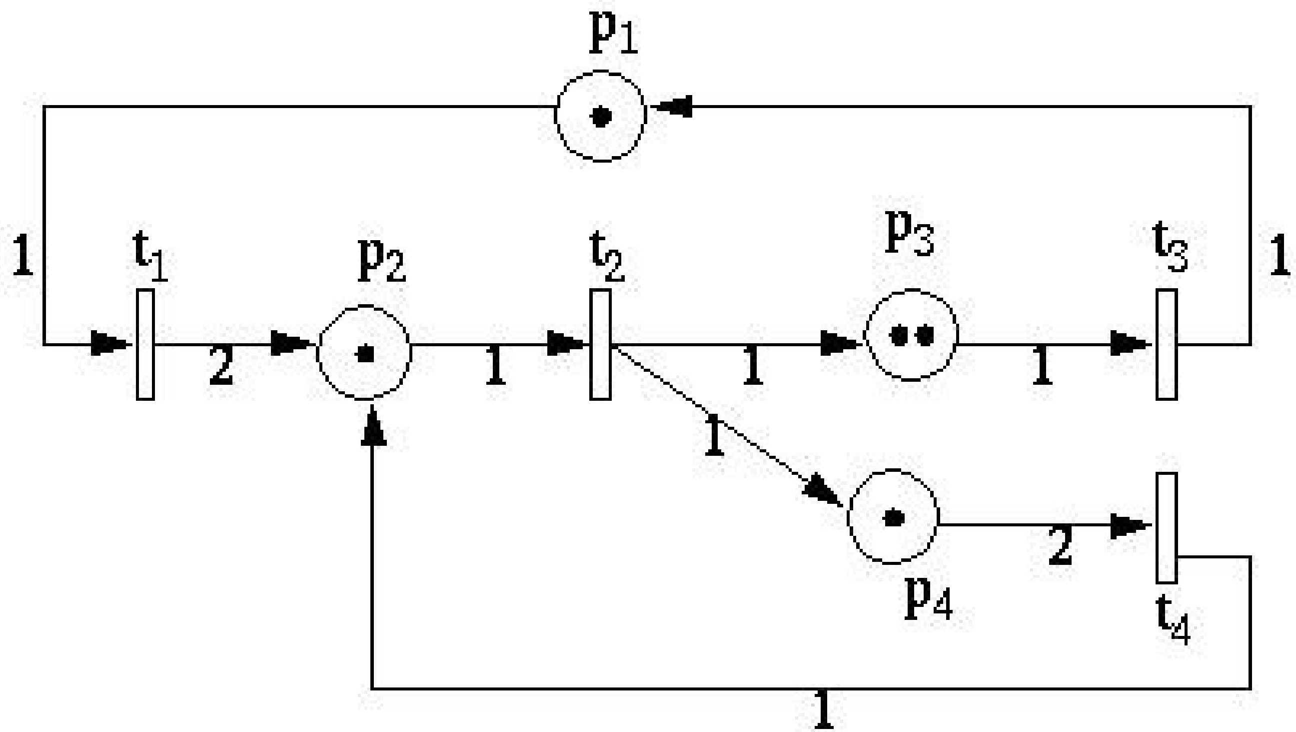
– *Graphe des marquages accessibles*

Le graphe des marquages accessibles, noté GA(R,M), est le graphe ayant comme sommets les marquages de A(R,M) et tel qu'il existe un arc entre deux sommets M 1 et M 2 si et seulement si :

$$M_1 \xrightarrow{t} M_2 \quad \text{où } t \in T$$

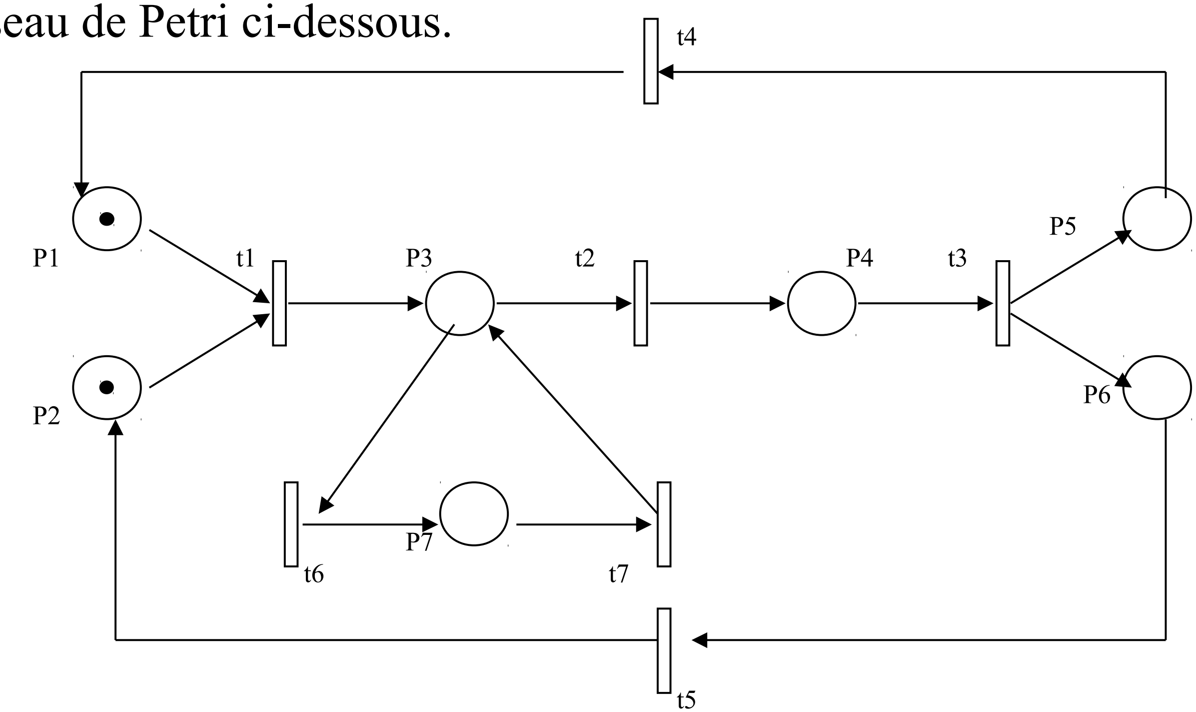
Exercices

1. Etant donnés le RdP ci-dessous et son marquage initial M0 = [1, 1, 2, 1],
   - Donner sa matrice d'incidence.
   - Calculer le marquage résultant du tirage de la séquence ***s = t1t2t2t4t3t3*** en partant du marquage initial. Faire le calcul de deux façons différentes: d'abord "à la main" (en rapportant les marquages intermédiares), puis en utilisant la matrice d'incidence.



Exercices

2. Soit le Réseau de Petri ci-dessous.



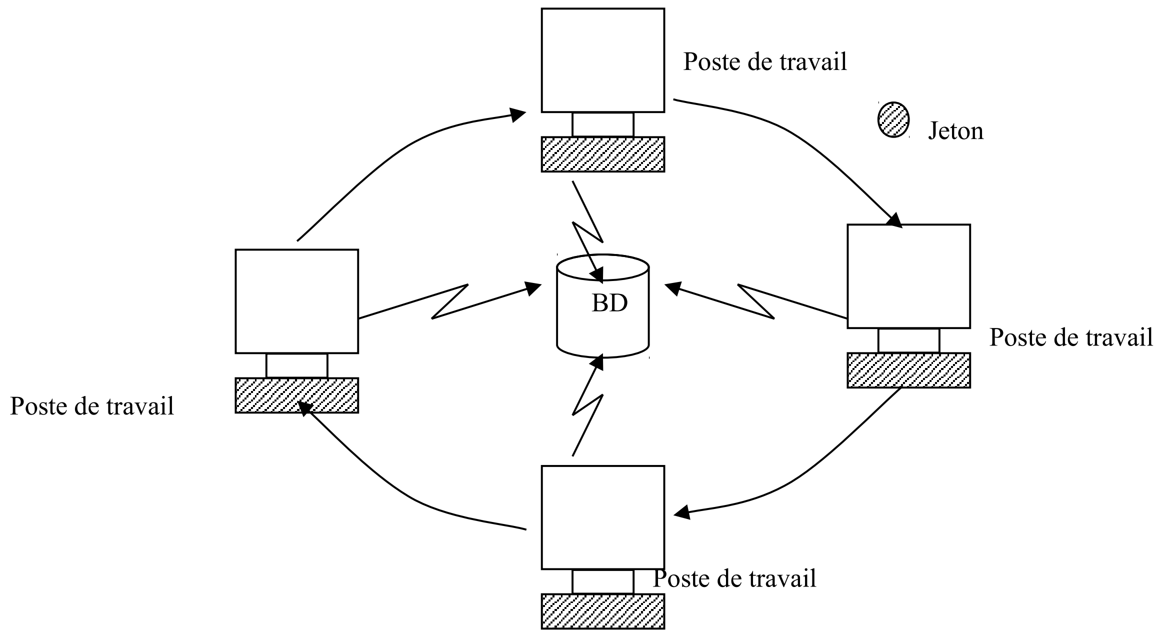
a. Vérifier si les marquages suivants sont atteignables (justifier).
   - M1 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)
   - M2 = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 0)
   - M3 = (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0)
   - M4 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 1)

b. Indiquer une autre méthode permettant de retrouver le même résultat

Exercices

3. Soit un système informatique dont l'architecture est constituée de quatre ordinateurs reliés entre eux par un réseau local de type *token ring*. Un poste donné ne peut effectuer des transferts réseau que s'il détient le jeton *(toke*n). Lorsque le poste de travail a terminé ces transferts, le jeton est transféré à l'ordinateur suivant sur l'anneau.

   Pour effectuer leurs traitements, les postes de travail accèdent à une base de données partagée, via un réseau global. Cette base de données est également accessible depuis d'autres points du réseau global. Chaque poste de travail doit donc la verrouiller lorsqu'il l'utilise, pour empêcher tout accès concurrent. Un ordinateur ne peut effectuer ses traitements que s'il dispose du jeton et que la base de données partagée est libre.



Les propriétés

– Un RdP est borné si le nombre de jetons circulant dans le réseau reste borné

– Un RdP est dit actif si une partie ou l'ensemble du réseau évolue toujours

– *Les séquences de franchissement*
  - Existence d'un marquage permettant le tir d'une séquence
  - Monotonie
  - Séquence répétitive

Les propriétés des séquences de franchissement

– Existence d'un marquage

Pour toute séquence de transitions s, il existe un marquage M tel que celleci soit franchissable :

$\forall \quad s \in T^* \; \exists M \in \mathbb{N}^m$ tel que $\quad M \xrightarrow{s}$

– Monotonie

L'augmentation de jetons dans les places d'un marquage préserve la possibilité de franchissement d'une séquence de transitions:

Si $M_1 \xrightarrow{s} M_2$ et $M_1 \subseteq M_2$ alors $\quad M_2 \xrightarrow{s}$

Avec : $M_a \subseteq M_b$ si et seulement si $\forall p \in P \; M_a(p) \leq M_b(p)$

Les propriétés des séquences de franchissement

- Séquence répétitive

  Une séquence de transitions est dite répétitive si pour tout marquage M tel que

$$M \xrightarrow{s} \quad \text{alors} \quad M \xrightarrow{s^*}$$

  - On peut en déduire que :

$$\forall\, \mathbf{M}, \mathbf{M'} \in \mathbb{N}^m \;\; \mathrm{M} \xrightarrow{s} \mathrm{M'} \text{ et } \mathbf{M} \subseteq \mathbf{M'} \;\Leftrightarrow\; \text{s est répétitive}$$

  - Une séquence répétitive est dite *croissante* pour une place p si :

$$\forall\, \mathbf{M}, \mathbf{M'} \in \mathbb{N}^m \; \mathrm{M} \xrightarrow{s} \mathrm{M'} \text{ alors } M'(p) > M(p)$$

  - Une séquence répétitive est dite complète si elle contient au moins une occurrence de chaque transition.

$\Rightarrow$ condition nécessaire et suffisante pour qu'un réseau marqué ait la possibilité d'être infiniment actif.

Les propriétés d'un réseau de Petri

– Réseau borné :

- Place k-bornée / non-bornée :
  Pour un réseau R et un marquage M_0 une place p du réseau marqué (R, M_0) est k-bornée si pour tout marquage M accessible depuis M_0,

$$M(p) \leq k.$$

  Dans le cas contraire la place p est dite non-bornée.

  Autrement dit:

$$p \text{ k-bornée} \Leftrightarrow \forall M \in A(P, M_0), M(p) \leq k$$

Les propriétés d'un réseau de Petri

– Réseau borné :

- Un réseau (marqué) est borné si toutes ses places sont bornées
- Propriété dépendant du marquage initial
- *Structurellement borné*: réseau de Petri borné pour tout marquage initial fini
- Les réseaux 1-bornés sont appelés réseaux saufs
- Un réseau marqué (R,M_0) est nonborné si et seulement si il existe une séquence répétitive s croissante pour une place p, un marquage M accessible depuis M_0 tels que $M \xrightarrow{S}$

Les propriétés d'un réseau de Petri

– L'activité d'un réseau concerne :

L'activité individuelle des transitions,

L'activité globale d'un réseau (indépendamment de transitions particulières).

– Quasivivacité

- Une transaction est quasivivante signifie depuis le marquage initial cette transition peut être franchie au moins une fois : soit (R,M_0)

$$t \in T \text{ quasivivante} \Leftrightarrow \exists\, M \in A(R,M_0),\quad M \xrightarrow{t}$$

Une transition qui n'est pas quasivivante est inutile!

- Un réseau est quasivivant si toutes ses transitions le sont.

- La propriété de monotonie implique qu'une transition quasivivante pour (R,M) le reste pour (R,M') où $M' \supseteq M$.

Les propriétés d'un réseau de Petri

– La vivacité

- Une transition est vivante signifie que quelque soit l'évolution du réseau à partir du marquage initial, le franchissement à terme de cette transition est toujours possible : soit (R,M_0)

$$t \in T \text{ vivante} \Leftrightarrow \forall\, M \in A(R,M_0),\ t \text{ est quasivivante pour } M$$

- Un réseau est vivant si toutes ses transitions le sont.

Les propriétés d’un réseau de Petri

– La vivacité (suite)

- Un réseau marqué (R,M_0) est vivant si et seulement si pour tout marquage accessible M, $M \in A(R,M_0)$, il existe un marquage M' accessible depuis M et une séquence complète s tels que $M \xrightarrow{s}$ i.e. :

$$(R,M_o) \text{ est vivant}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall M \in A(R, M_0), \exists M' \in A(R,M) \; \exists s \text{ complète tels que } M \xrightarrow{s}$$

- La vivacité d'une transition n'est pas forcément conservée par une augmentation de jetons dans les places. La vivacité n'est pas monotone.

Les propriétés d’un réseau de Petri

– Marquage puits : marquage à partir duquel aucune transition n'est tirable.

– Un réseau marqué est sans blocage si aucun de ses marquages accessibles n'est un marquage puits.

– Les notions de vivacité et de non blocage sont différentes : un réseau peut être sans blocage bien qu'aucune de ses transitions soient vivantes.

– Les deux notions dépendent du marquage initial

– Un réseau est *Structurellement vivant* s'il existe un marquage initial tel que le réseau est vivant

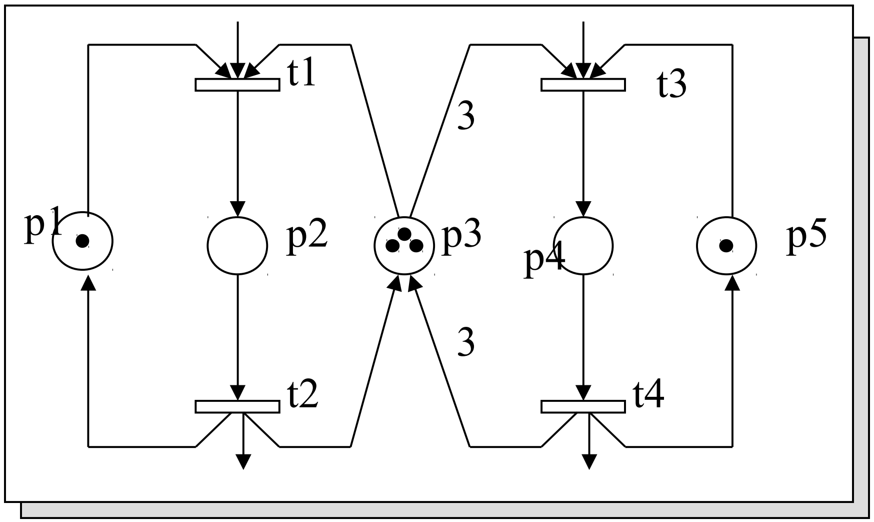
Les propriétés d’un réseau de Petri

– Autres définitions :

- Un rdP a un *état d'accueil* M_a pour un marquage initial M_0 si pour tout marquage accessible M_i il existe une séquence s telle que $M_i \xrightarrow{s} M_a$
- Un rdP est *réinitialisable* (ou réversible) pour un marquage initial M_0 si M_0 est un état d'accueil.
- Un rdP est *répétitif* s'il existe un marquage initial M_0 et une séquence s franchissable telle que chaque transition apparaît un nombre illimité de fois.
- Un rdP est *consistant* s'il existe un marquage initial M_0 et une séquence franchissable s qui contient au moins une fois chaque transition telle que $M_0 \xrightarrow{s} M_0$

Les propriétés d'un réseau de Petri

– Propriétés indépendantes du marquage initial :



Sous réseau formé par p1, p2, t1 et t2 :

$M_0(p1)=1,\ M_0(p2)=0$ **et** $M_0(p1)+M_0(p2)=1$

Après t1, t2 ou t1t2 … on obtient

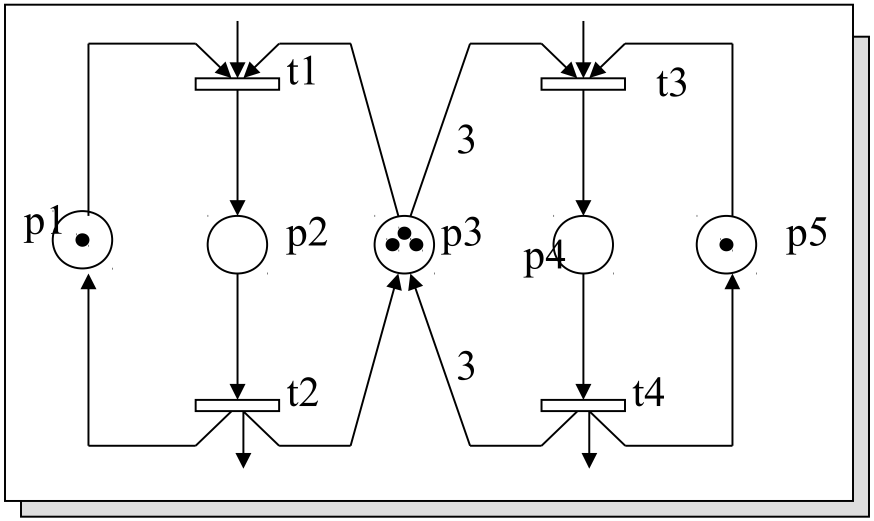
$M(p1) + M(p2) = 1$

$\forall\, s \quad M_0 \xrightarrow{s} M'$ on obtient

$M'(p1) + M'(p2) = 1$

$$\forall M_0 \ \forall M \in A(R, M_0) \text{ on obtient } M_0(p1)+M_0(p2)=M(p1)+M(p2)$$

Les propriétés d'un réseau de Petri



Sous réseau formé par p1, p2, t1 et t2 est une *composante conservative*

La forme linéaire M(p1)+M(p2) est un *invariant linéaire de place.*

Sous réseau formé par p2, p3, p4, t1, t2, t3 et t4 :
M(p2) + M(p3) + 3M(p4) = 3

Les propriétés d'un réseau de Petri

L'équation fondamentale :

$$M' = M + C.\bar{s}$$

f^T : vecteur de réels $\quad f^T M' = f^T M + f^T C\bar{s}$

Indépendance des séquences de transitions => $f^T C = 0$

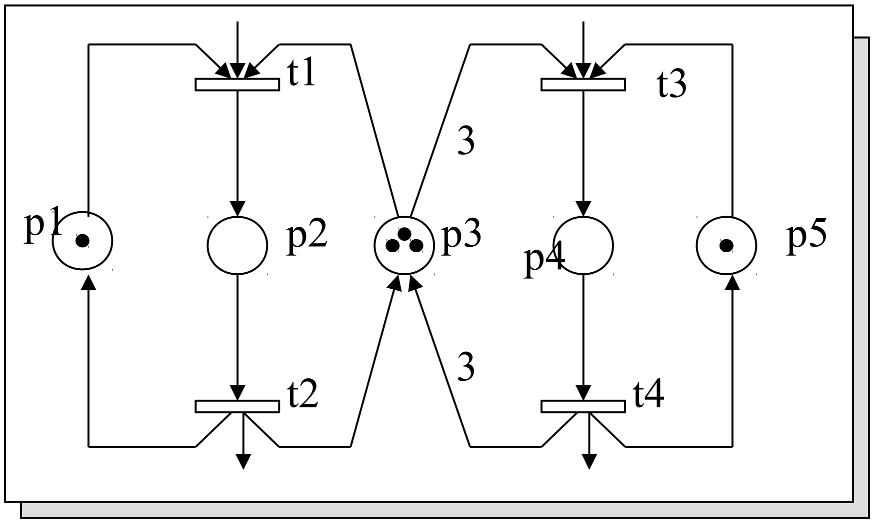
Une *composante conservative* est une solution de l'équation : $f^T C = 0$

$f^T M' = f^T M$ est alors *l'invariant linéaire de place* correspondant

Pb. L'équation dépend du marquage initial

- On peut se restreindre à f > 0

Les propriétés d’un réseau de Petri



$$M_0 \xrightarrow{t3\ t4} M_0$$

La séquence de transition t1t3 est un *invariant de transition*

L'équation fondamentale $M' = M + C.\bar{s}$

Un invariant de transition s est tel que :

$$C.\bar{s}=0$$

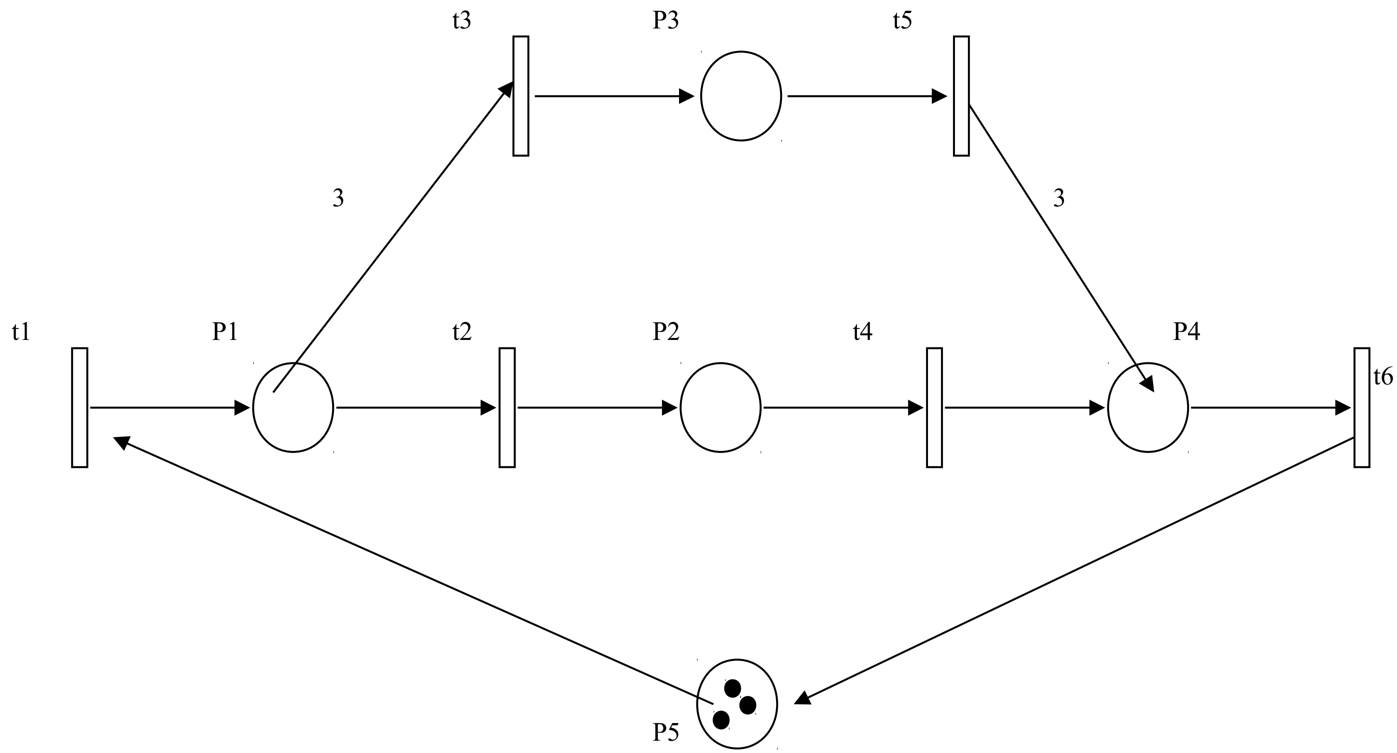
Toute solution $\bar{s}$ de $C.\bar{s}=0$ est une *composante répétitive stationnaire* (sous réseau)

La *composante répétitive stationnaire* ne dépend pas de M_0 alors que *l'invariant de transition* en dépend fortement

- On peut se restreindre à $\bar{s}>0$

Exercices

1. Soit le Réseau de Petri ci-dessous.



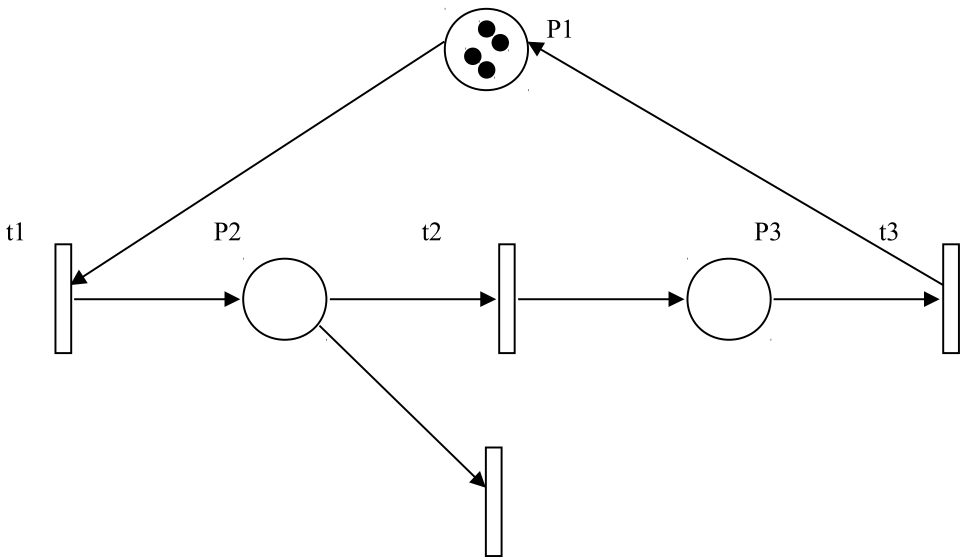
a) Déterminer sa matrice d’incidence U.
b) Calculer ses p-invariants minimaux. Interpréter.
c) Calculer ses t-invariants minimaux. Interpréter.

Exercices

2. Le RdP de la figure ci-dessous est le modèle d'un système dont la production est gérée par la méthode KANBAN. Les jetons situés dans la place P1 représentent les KANBAN libres.

   S'il y a des produits bruts à l'entrée du système, la transition t1 est franchie. Un jeton apparaît alors dans la place P2, ce qui implique qu'un KANBAN libre est attaché à ce produit brut et que sa fabrication peut commencer. Après la fabrication de ce produit, représentée par le franchissement de la transition t2, un jeton apparaît dans la place P3. La transition t3 est alors franchie : le produit sort du système et que le KANBAN qui lui est attaché est restitué.

   Un contrôle de qualité est effectué à l'entrée du système. Si la qualité d'un produit brut n'est pas satisfaisante, la transition t4 est franchie (rejet du produit).



1) Déterminer l'ensemble des p-invariants et des t-invariants minimaux.

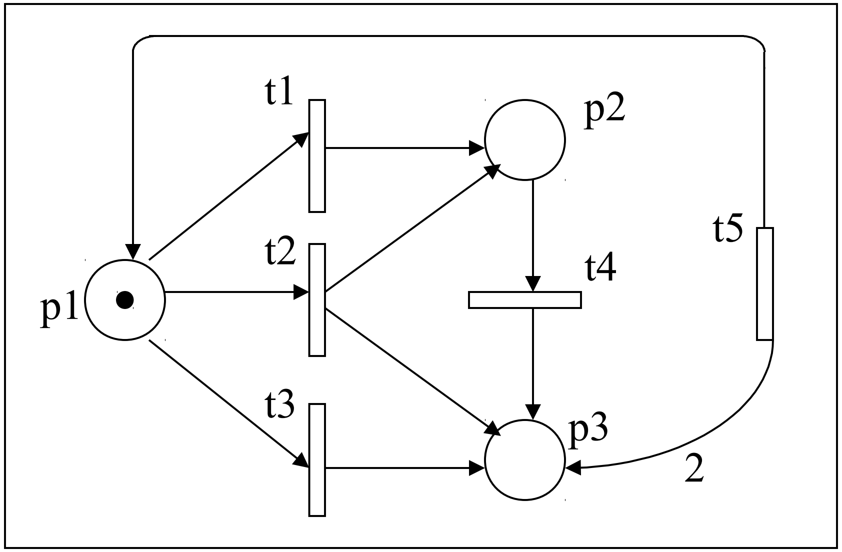
2) Vérifier les propriétés structurelles du RdP.

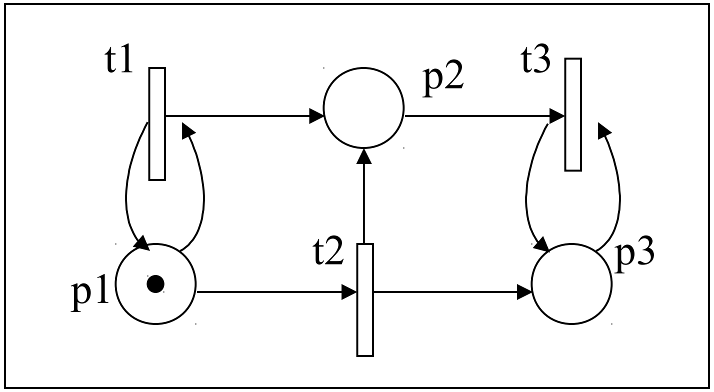
3) Mettre en évidence l'erreur de modélisation de ce système.

4) Proposer un modèle corrigeant cette erreur.

La vérification des réseaux de Petri

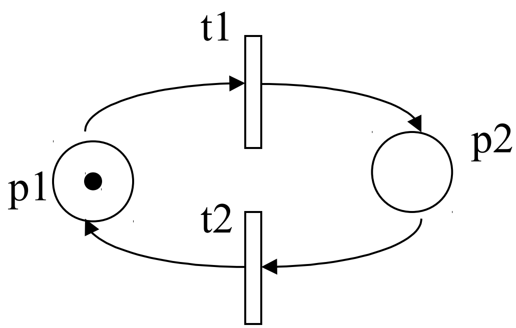
– La vérification se fait en utilisant le graphe des marquages successibles.
– Si le graphe est infini on construit le *graphe de couverture*.
– <u>Exemples</u> :

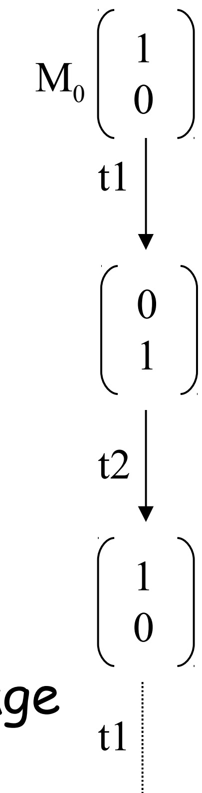




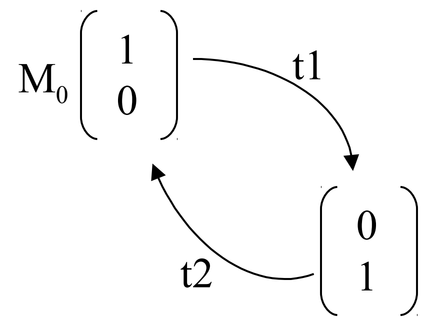
La vérification des réseaux de Petri

– Arbre et graphe de marquage





Arbre de Marquage



Graphe de Marquage

La vérification des réseaux de Petri

- Construction de l'arborescence de couverture
  - Quelques définitions
    - Le symbole ω : représente une quantité arbitrairement grande de jetons (une infinité) : $\omega \notin \mathbb{N}$, tel que pour toute constante (entière) n :

      $\omega + n = \omega$

      $\omega - n = \omega$

      $n < \omega$

      $\omega \leq \omega$

    - $\mathbb{N}_\omega$ est l'ensemble $\mathbb{N} \cup \{\omega\}$: vecteur a m composantes dans $\mathbb{N}_\omega$

      Pour $Q \in \mathbb{N}^m_\omega$, $Q^{-1}(\omega) = \{p \in P \mid Q(p) = \omega\}$

    - L'arborescence de couverture, notée AC(N) où $N=(R,M_0)$ est un réseau marqué, est une arborescence (S, X) où les sommets de S sont étiquetés par des vecteurs de $\mathbb{N}^m_\omega$ (m=cardinal(P)) les arcs de X sont étiquetés par des transitions de T

La vérification des réseaux de Petri

– L'algorithme de construction de l'arborescence de couverture :

(1) La racine r est étiquetée par M_0

(2) Un sommet s étiqueté par $Q \in IN_w{}^m$ n'a pas de successeur ssi

. soit $\exists$ sur le chemin de r à s un sommet s' étiqueté par Q

. soit $\neg\exists$ t telle que Entree(.,t) $\subseteq$ Q

(3) Si s étiqueté par Q ne vérifie pas les conditions de (2), alors $\forall$t telle que Entree(.,t) $\subseteq$ Q, $\exists$ s' successeur de s.

L'arc (s,s') est étiqueté par t, s' est étiqueté par Q' :

. Si $\exists$ sur le chemin de r à s' un sommet s'' étiqueté par Q'' avec Q'' $\subseteq$ Q + C(.,t), alors pour tout p telle que Q''(p) < Q(p) + C(p,t) on a Q'(p) = ω.

. Dans le cas contraire Q'(p) = Q(p) + C(p,t).

La vérification des réseaux de Petri

– Construction du graphe de couverture :

- Le graphe de couverture, noté GC(N), est obtenu de l'arborescence de couverture en fusionnant les sommets étiquetés par les mêmes éléments (vecteurs) et redirigeant les arcs entre les sommets ainsi obtenus.

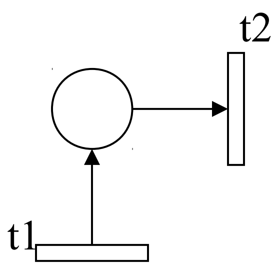
- Propriétés
  - Il est toujours possible de construire le graphe de couverture, celuici est fini
  - Si s est une séquence de franchissement telle que $M_0 \xrightarrow{s} M$ alors il existe un chemin dans GC(N) partant de M_0 conduisant à un sommet Q tel que $\forall$ p $\in$ P $M(p) \leq Q(p)$
  - Q 'couvre' P, d'où le nom du graphe.

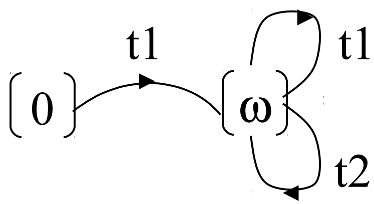
La vérification des réseaux de Petri

- Réseau borné et graphe de couverture
  - Un réseau marqué N est non borné si et seulement si il existe un sommet Q de GC(N) tel que $Q^{-1}(\omega) \neq \emptyset$
  - Une place p d'un réseau marqué N est non bornée si il existe un sommet Q de GC(N) tel que $Q(p) = \omega$
  - Si le réseau marqué N est borné, le graphe de couverture et le graphe des marquages sont identiques
- Limitation du graphe de couverture
  - Le symbole w correspond à une perte d'information
  - D'une manière générale (pas dans tous les cas), ce graphe ne permet pas de répondre à des questions concernant
    - L'accessibilité d'un marquage
    - La vivacité du réseau

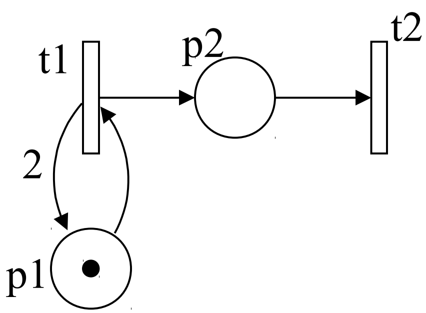
La vérification des réseaux de Petri

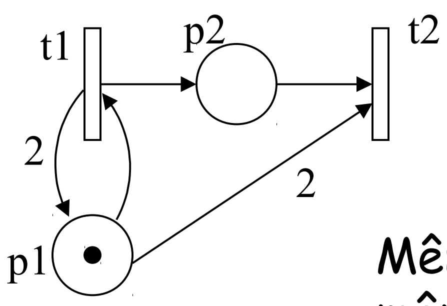
– Perte d'information dans le graphe de couverture

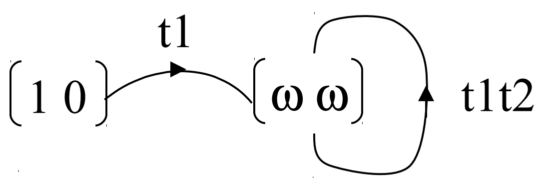




La séquence t1 t2 t2 est un chemin du graphe de couverture partant de M_0, mais la séquence n'est pas tirable depuis M_0 .







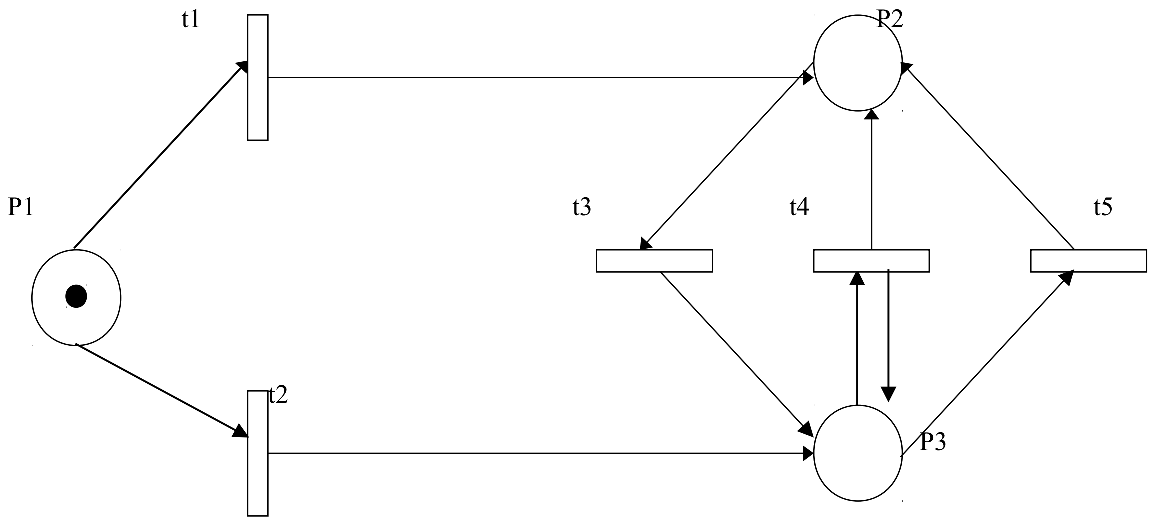
Même graphe de couverture mais pas le même comportement .

La vérification des réseaux de Petri

– Accessibilité
  - Dans le cas d'un réseau borné un marquage M est atteignable si et seulement si le graphe des marquages accessibles contient un nœud représentant M.
  - Dans le cas d'un réseau nonborné, il est impossible de vérifier à l'aide d'un graphe de couverture si M est accessible. On peut 'seulement' vérifier qu'il existe un marquage M' tel que M' $\supseteq$ M.

Exercices

1. Construire le graphe de couverture du réseau de Petri suivant :



Est ce que le RdP ci-dessus est vivant et réinitialisable ? Possède t'il un état d'accueil ?

La vérification des réseaux de Petri

– Rappels

- Composante fortement connexe d'un graphe:

  sousgraphe tel qu'il existe un chemin (orienté) entre tout point A et tout point B de ce sousgraphe.

- Arc sortant d'une composante fortement connexe:

  arc qui a comme sommet origine un sommet de cette composante et comme extrémité un sommet qui n'appartient pas à cette composante.

La vérification des réseaux de Petri

– Réseau borné et vivacité

- Une transition t d'un rdP borné est *quasi-vivante* si et seulement si, partant d'un nœud quelconque du graphe des marquages accessibles, il existe un chemin orienté contenant un arc marqué t.
- La transition t est *vivante* si et seulement si chaque composante fortement connexe et sans arc sortant du graphe contient un arc marqué t.
- Un rdP borné est *vivant* si et seulement si chaque composante fortement connexe du graphe qui n'a pas d'arc sortant contient au moins un arc marqué par chaque transition.
- Un rdP borné est sans blocage si et seulement si chaque nœud de son graphe est origine d'au moins un arc.

La vérification des réseaux de Petri

– Réseau non borné et vivacité

- Une transition t d'un rdP non borné n'est pas vivante si le graphe de couverture possède une composante fortement connexe sans arc sortant dans laquelle aucun arc n'est marqué t.
- Un rdP non borné n'est pas vivant si son graphe de couverture possède au moins une composante fortement connexe sans arc sortant et dont l'union des transitions attachées aux arcs n'est pas l'ensemble des transitions.
- Un rdP non borné est avec blocage si son graphe de couverture contient un nœud qui n'est l'origine d'aucun arc.

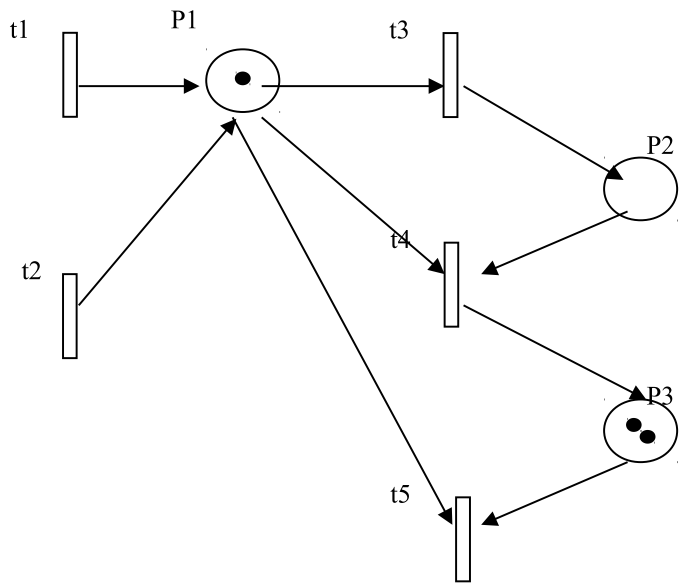
La vérification des réseaux de Petri

- Réseau borné, réversibilité et état d'accueil
  - Un rdP borné est réversible si et seulement si son graphe des marquages accessibles est fortement connexe.
  - Un rdP borné accepte un état d'accueil si et seulement si son graphe des marquages atteignables possède une et une seule composante fortement connexe sans arc sortant. De plus l'ensemble des marquages figurant dans cette composante donne l'ensemble des état d'accueil.
  - Si un rdP possède un état d'accueil, son graphe de couverture possède une et une seule composante fortement connexe sans arc sortant. Si de plus il est réversible, il existe un marquage M' de cette composante tel que $M'(p) = M_0(p)$ ou $M'(p) = \omega \ \forall p \in P$.

Exercice

1. Soit le Réseau de Petri ci-dessous

   1. Déterminer sa matrice d'incidence U.
   2. Tracer son arbre de recouvrement et son graphe de recouvrement.
   3. Calculer ses t-invariants minimaux. Conclusion ?



La vérification des réseaux de Petri

- Réduction d'un RdP :
  - Place substituable :
    - Place qui sert de relais entre deux transitions (ou deux ens. de transitions).
    - Le franchissement de la transition (ou de l'une des transitions) d'entrée est une condition suffisante pour franchir la transition (ou l'une des transitions) de sortie.
    - La réduction consiste à fusionner les transitions d'entrée et de sortie deux à deux.

La vérification des réseaux de Petri

– Réduction d'un RdP :

- Place substituable (suite) :

Cas 1 :

Une transition t_e en entrée et une transition t_s en sortie de p avec :

➢ Sortie(p, t_e)=Entrée(p, t_s)

➢ Pas d'autres places en entrée de t_s : $\forall$ p' si p $\neq$ p' alors Entrée(p', t_s) alors Entrée(p', t_s) = 0

Le réseau est réduit en remplaçant t_e et t_s par t_{es} et en effaçant p tel que :

$$\forall p' \in P \text{ Entrée}(p', t_{es}) = \text{Entrée}(p', t_e) \text{ et Sortie}(p', t_{es}) = \text{Sortie}(p', t_e) + \text{Sortie}(p', t_s)$$

Remarque : une longue séquence de transitions s sera transformée en une seule transition par cette règle de réduction

La vérification des réseaux de Petri

– Réduction d'un RdP :

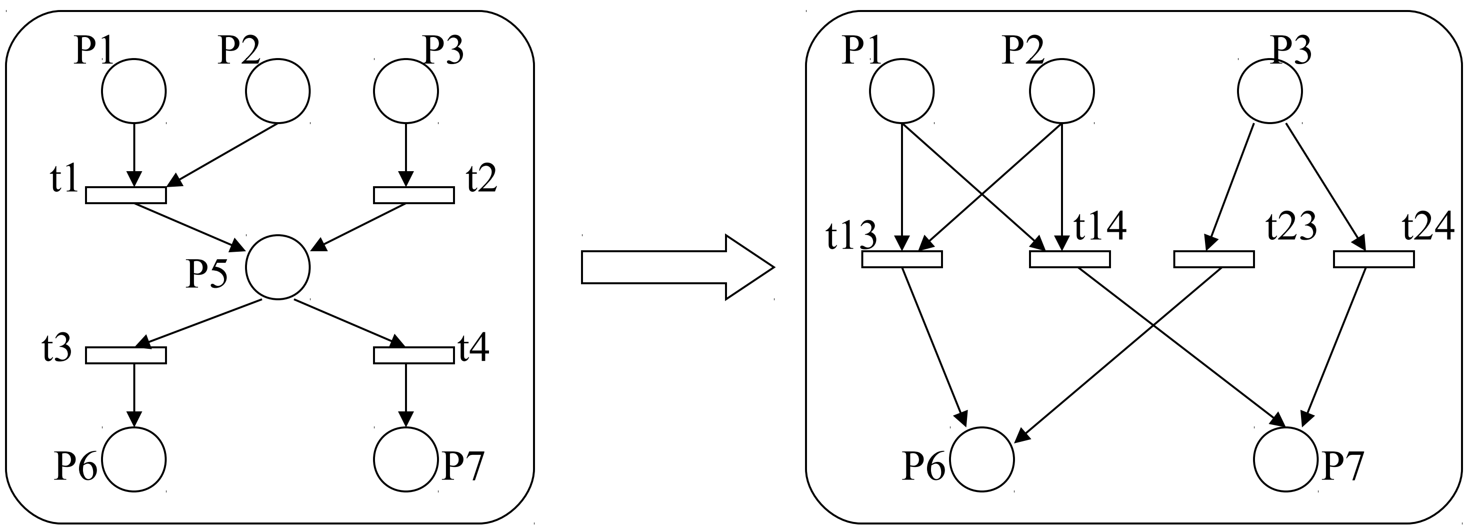
• Place substituable (suite) :

Cas 2 :

Plusieurs transitions en entrée et en sortie de `p`. Il faut :

➢ Tous les poids des arcs doivent être égaux

➢ Considérer tous les couples formés par une transition d'entrée et une transition de sortie



La vérification des réseaux de Petri

– Réduction d'un RdP :

- Place substituable (suite) :

Remarques :

- Si la place substituable contint initialement des jetons, il faux tirer la transition de sortie avant de supprimer la place substituable

  $\Rightarrow$ plus d'équivalence pour la propriété de réinitialisation.

- Si la transition de sortie de la place substituable n'a pas de place de sortie il n'y a plus équivalence vis-a-vis de la propriété k-borné

La vérification des réseaux de Petri

- Réduction d'un RdP :
  - Place implicite : qui ne sert à rien.

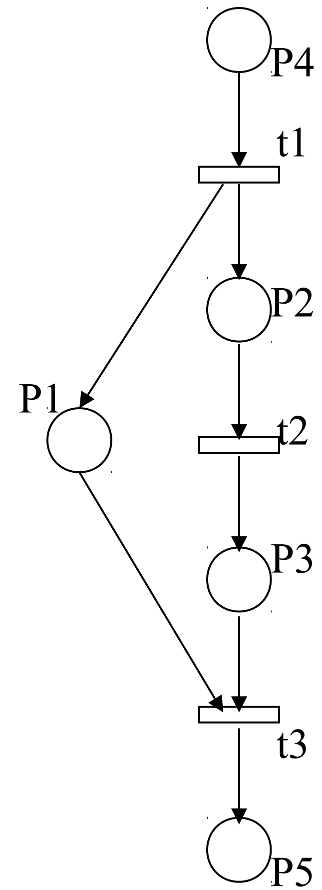
    Son marquage est une <u>combinaison linéaire</u> du marquage d'un ensemble de marquages E et, vis à vis de ses transitions de sortie, elle n'introduit aucune condition supplémentaire de tirage.

Lien avec la notion de composantes conservatives

La vérification des réseaux de Petri

- Réduction d'un RdP :

  - Place implicite : Exemple.



Recherche des composantes conservatives :

$$f^T.C=0 \Rightarrow \begin{cases} f1+f2-f4 = 0 \\ -f2+f3 = 0 \\ -f1-f3+f5 = 0 \end{cases}$$

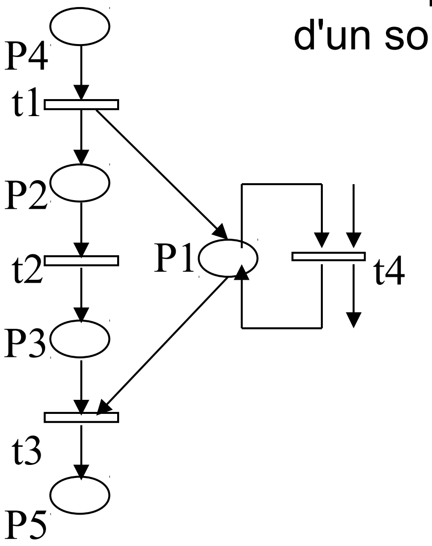
Invariant linéaire : $M(p1)=M(p2)+M(p3)$

Composante conservative : $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

La vérification des réseaux de Petri

- Vérification (suite):
  - Réduction d'un RdP :
    - Place implicite : Remarques
      1. Le marquage initial du RdP modifie l'équation de calcul du marquage de la place implicite.

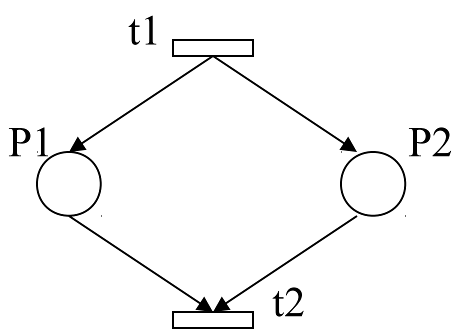
         Ex. Si $M_0(p2) = 1$ alors $M(p1) = M(p2) + M(p3) - 1$
      2. Il n'est pas suffisant que le marquage d'une place soit fonction des marquages d'un sous ensemble de place, pour qu'elle soit implicite.



La vérification des réseaux de Petri

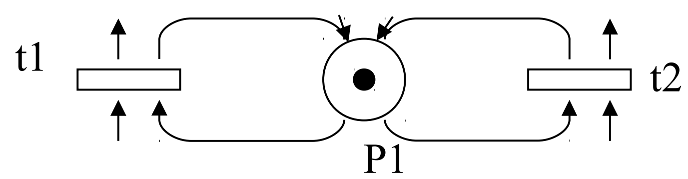
- Réduction d'un RdP :
  - Place implicite : Cas particuliers
    1. Place identique :

       2 places p1 et p2 sont identiques (mêmes transitions en entrée et en sortie avec les mêmes poids sur les arcs) alors p1 est implicite vis-à-vis de p2.



La vérification des réseaux de Petri

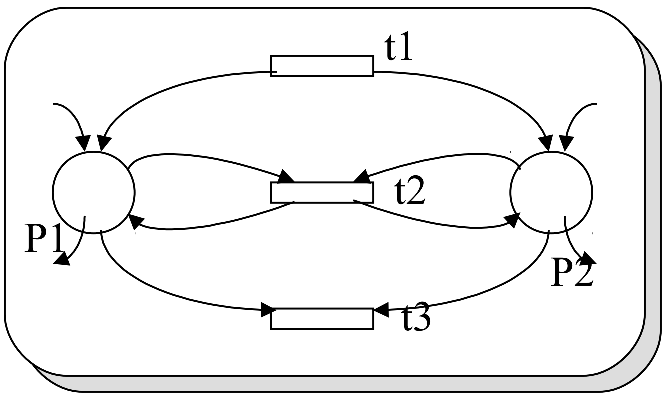
- Réduction d'un RdP :
  - Place implicite : Cas particuliers
    2. Place implicite dégénérée : Si une place n'est connectée à un RdP que par des boucles élémentaires elle est implicite vis-à-vis de l'ensemble vide (son marquage est constant)

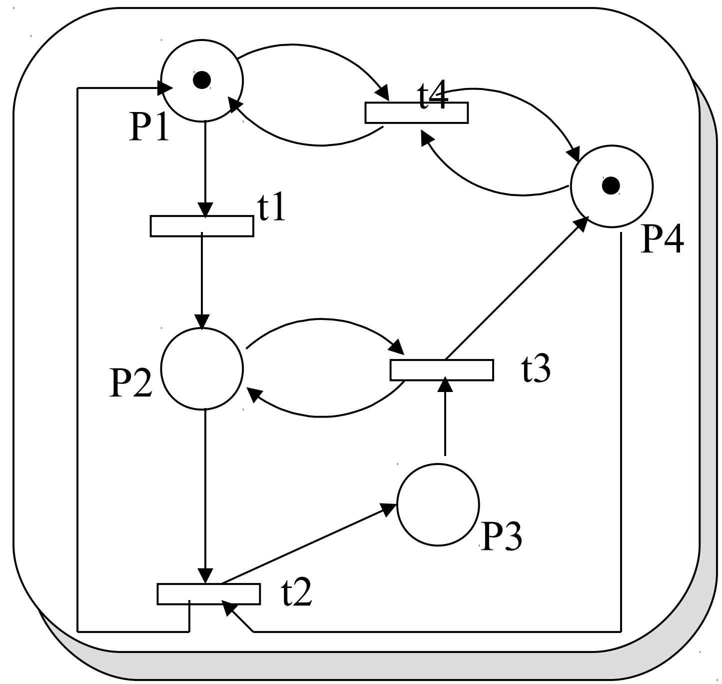


La vérification des réseaux de Petri

– Réduction d'un RdP :

- Transition neutre ou identité : exemples





La vérification des réseaux de Petri

– Réduction d'un RdP :

- Transition neutre ou identité : qui ne sert à rien.

  Elle n'est connectée au RdP que par des boucles élémentaires.

  Son franchissement ne modifie pas le marquage du RdP.

  `Entrée(., t) = Sortie(., t)`

  Une transaction neutre `t` ne peut être supprimée, tout en préservant la vivacité du RdP, que si `t` est vivante.

  ⇒ il faut qu'il existe une transaction t' telle que si elle est vivante dans le réseau réduit garantie que t est vivante dans le réseau.

  ⇨
  - » t' produit un marquage qui sensibilise t
  - » ou t et t' on les mêmes conditions de tirage

La vérification des réseaux de Petri

– Réduction d'un RdP :
  - Transitions identiques

    Deux transition t1 et t2 sont identiques ssi :

      Entrée(., t1) = Entrée(., t2)

      Sortie(., t1) = Sortie(., t2)