1 Conjuntos Simpliciales

Los conjuntos simpliciales son esencialmente una generalización de los complejos simpliciales geométricos con una topología elemental. En esta sección daremos la base para llegar a entender como se forman los conjuntos simpliciales.

1.1 Complejos simpliciales

Definición 1.1. Un *n-simplex geométrico* es una envoltura convexa de $n + 1$ puntos geométricamente independientes $\{v_0, \dots, v_n\}$ en un espacio euclideo cualquiera. Es decir, colección de n vectores $v_1 - v_0, \dots, v_n - v_o$ son linealmente independientes. Los puntos v_i los llamaremos *vértices*.

Observamos que un n-simplex es homeomorfo a una esfera de n dimensiones.

Definición 1.2. Una *cara geométrica* de un n-simplex formado por los vértices $\{v_0, \dots, v_n\}$ es la envoltura convexa formada por un subconjunto de dichos vértices.

Definición 1.3. Un *complejo simplicial geométrico X en $\mathbb{R}^n$* es una colección de simplices de varias dimensiones en $\mathbb{R}^n$ tales que

- Toda cara de un simplex en X también está en X.
- La intersección de dos cualesquiera simplices de X, es una cara en ambos, si no es vacía.

Sea X un complejo simplicial geométrico, denotaremos por X^k al complejo simplicial geométrico formado por todos los k-simplex de X. Observamos que $X^0 = \{v_i\}_{i \in I}$ donde I es un conjunto de índices. Entonces, podemos pensar como todo elemento de X^k como un subconjunto de X^0 de cardinalidad $k+1$. Es decir, un subconjunto $\{v_{i_0}, \dots, v_{i_k}\} \subset X^0$ es un *elemento* de X^k. Para toda colección contable de vértices $\{v_0, \dots v_n\}$ que forma un simplex lo denotaremos como el simplex $[v_0, \dots, v_n]$.

Definición 1.4. Un *complejo simplicial abstracto* X es un conjunto de vértices de X^0 juntos los conjuntos X^k formados por subconjuntos de X^0 de cardinalidad $k+1$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Estos conjuntos deben cumplir que todo subconjunto de cardinalidad $j + 1 \leq k$ de un elemento de X^k es un elemento de X^j. Es decir, para todo elemento de X^k es un k-simplex abstracto y que todas sus caras son simplices en X.

1.1.1 Morfismos simpliciales

En este apartado definiremos el morfismo entre dos complejos simpliciales geométricos. Este morfismo será una herramienta clave para pasar de los complejos simpliciales a los conjuntos simpliciales.

Definición 1.5. Sea K y L dos complejos simpliciales geométricos. Un *morfismo simplicial* $f\colon K \to L$ los vertices $\{v_i\}$ de K a los vertices $\{f(v_i)\}$ de L; de manera que si $[v_{i_0}, \dots, v_{i_k}]$ es un simplex de K, entonces $f(v_{i_0}), \dots, f(v_{i_k})$ son vértices (no todos únicos) de un simplex en L.

Ejemplo 1.6. Sea $[v_0, v_1, v_2]$ un 2-simplex y $[v_0, v_1]$ una de sus 1-cara. Consideramos el morfismo simplicial $f\colon [v_0, v_1, v_2] \to [v_0, v_1]$ determinado por $f(v_0) = v_0$, $f(v_1) = v_1$, $f(v_2) = v_1$. Observamos en la siguiente figura que el morfismo colapsa el 2-simplex a un 1-simplex.

Observamos que tal definición de morfismos simpliciales prevalece para los complejos simpliciales abstractos. De ahora en adelante simplemente usaremos el término complejo simplicial.

1.1.2 Complejos simpliciales ordenados y sus caras

Definición 1.7. Un *complejo simplicial ordenado* X es un complejo simplicial cuyo conjunto de vértices X^0 está totalmente ordenado. Es decir, la notación $[v_{i_0}, \ldots, v_{i_k}]$ es un simplex si y solo si $v_{i_j} < v_{i_l}$ para todo $j < l$.

Definición 1.8. Un *n-simplex ordenado* es un n-simplex con los vértices ordenados. Denotaremos el n-simplex ordenado por $|\Delta^n|$. Para simplificar, normalmente se renombran los vértices con los números 0, 1,..., n, de tal manera que $|\Delta^n| = [0, \ldots, n]$.

Definición 1.9. Sea X un complejo simplicial ordenado. Las *caras* son una colección de morfismos $\delta_0, \ldots, \delta_n\colon X^n \to X^{n-1}$ determinados por $[0, \ldots, n] \mapsto [0, \ldots, \hat{j}, \ldots, n]$. Es decir, envían un n-simplejo a su $(n-1)$-cara asociada al vértice j. Para complejos simpliciales ordenados en general, $0 \leq j \leq n$

$$\begin{aligned} \delta_j : X^n &\longrightarrow X^{n-1} \\ [v_{i_0}, \ldots, v_{i_n}] &\longmapsto [v_{i_0}, \ldots, \hat{v_{i_j}}, \ldots, v_{i_n}] \end{aligned}$$

Observamos que si $i < j$, $\delta_i \delta_j = \delta_{j-1}\delta_i$. En efecto, $\delta_i\delta_j[0, \ldots, n] = [0, \ldots, \hat{i}, \ldots, \hat{j}, \ldots, n] = \delta_{j-1}\delta_i[0, \ldots, n]$

1.2 Conjuntos Delta

En este apartado veremos que los conjuntos Delta Δ-sets son un intermediario entre complejos simpliciales y conjuntos simpliciales.

Definición 1.10. Un *conjunto Delta* consiste de una secuencia de conjuntos de i-simplices $X_0, X_1, \ldots, X_i, \ldots$ y, para cada $n \geq 0$, las funciones $\delta_i : X_{n+1} \to X_n$, $\forall 0 \leq i \leq n+1$, que cumplen $\delta_i \delta_j = \delta_{j-1}\delta_i$, si $i \leq j$. Formando el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X_0 & X_1 \arrow[l, bend right, "\delta_0"'] \arrow[l, bend left, "\delta_1"] & X_2 \ldots \arrow[l, bend right, "\delta_0"'] \arrow[l, "\delta_1"] \arrow[l, bend left, "\delta_2"] \end{tikzcd}$$

1.2.1 Definición categórica de los conjuntos Delta

En este apartado introduciremos la definición de los conjuntos Delta como categorías cuyos objetos son simplices y los morfismos son morfismos simpliciales.

Definición 1.11. La categoría $\hat{\Delta}$ es una categoría cuyos objetos son los conjuntos estrictamente ordenados finitos $[n] = \{0, \ldots, n\}$ y los morfismos son las funciones, que mantienen el orden estrictamente, $f\colon [m] \to [n]$. Podemos pensar que sea la inclusión de un m-simplex como cara de un n-simplex. Para todo $0 \leq i \leq n$ consideramos los morfismos:

$$\begin{aligned} d_i : [n] &\longrightarrow [n+1] \\ \{0, \ldots, n\} &\longmapsto \{0, \ldots, \hat{i}, \ldots, n+1\} \end{aligned}$$

Definición 1.12. La categoría $\hat{\Delta}^{op}$, es la categoría opuesta de $\hat{\Delta}$, cuyos objetos son los conjuntos estrictamente ordenados finitos $[n] = \{0, \ldots, n\}$ y los morfismos son las funciones, que mantienen el orden estrictamente, $f : [n] \to [m]$. Podemos pensar que sea la extracción de la cara m-simplex de un n-simplex. Para todo $0 \leq i \leq n$ consideramos los morfismos:

$$\begin{aligned} D_i : [n] &\longrightarrow [n-1] \\ \{0, \ldots, n\} &\longmapsto \{0, \ldots, \hat{i}, \ldots, n\} \end{aligned}$$

Definición 1.13. Un *conjunto Delta* es un funtor covariante $X\colon \hat{\Delta}^{op} \to \text{Set}$, equivalentemente es un funtor contravariante $X\colon \hat{\Delta} \to \text{Set}$. Es decir, un funtor contravariante $\hat{\Delta} \to \text{Set}$ asigna un objeto $[n]$ de $\hat{\Delta}$ a un conjunto de simplices X_n de Set, y asigna cada función que mantiene el orden escrictamente $[m] \to [n]$ de $\hat{\Delta}$ a una cara $X_n \to X_m$, haciendo una inclusión de una m-cara de cada simplex en X_n a un simplex de X_m.

Ejemplo 1.14. Sean $[2]$ y $[3]$ objetos de $\hat{\Delta}$ y sea $d_1\colon [2] \to [3]$ una función que mantiene el orden estrictamente, determinada por $d_1(0) = 0$, $d_1(1) = 2$ y $d_1(2) = 3$. Ahora, aplicando el funtor contravariante obtenemos los conjuntos de 2 y 3-simplices X_2 y X_3, y la cara $\delta_1\colon X_3 \to X_2$.

1.3 Conjuntos simpliciales y sus morfismos

Antes de poder definir como se forman los conjuntos simpliciales, tenemos que introducir la noción de degeneraciones de simplices y sus degeneraciones como morfismos.

Definición 1.15. Un *n-simplex degenerado* es un n-simplex $[v_0, \ldots, v_n]$ cuyos vértices pueden estar repetidos, es decir, exite algún i y j tal que $v_i = v_j$. Por ejemplo, el simplex $[0, 1, 1]$.

Definición 1.16. Sea X un complejo simplicial ordenado. Las *degeneraciones* son una colección de morfismos $\sigma_0, \ldots, \sigma_n\colon X^n \to X^{n+1}$ determinados por $[0, \ldots, n] \mapsto [0, \ldots, j, j, \ldots, n]$. Es decir, envían un n-simplejo a su $(n+1)$-simplejo degenerado asociado al vértice j. Para complejos simpliciales ordenados en general, $0 \leq j \leq n$

$$\begin{aligned} \sigma_j : X^n &\longrightarrow X^{n+1} \\ [v_{i_0}, \ldots, v_{i_n}] &\longmapsto [v_{i_0}, \ldots, v_{i_j}, v_{i_j}, \ldots, v_{i_n}] \end{aligned}$$

Observamos que si $i < j$, $\sigma_i\sigma_j = \sigma_{j+1}\sigma_i$. En efecto, $\sigma_i\sigma_j[0, \ldots, n] = [0, \ldots, i, i, \ldots, j, j, \ldots, n] = \sigma_{j+1}\sigma_i[0, \ldots, n]$

Definición 1.17. Un *conjunto simplicial* es una secuencia de conjuntos de i-simplices $X_0, X_1, \ldots, X_i, \ldots$, y para cada $n \geq 0$, las funciones $\delta_i : X_n \to X_{n-1}$ y $\sigma_i : X_n \to X_{n+1}$, $\forall 0 \leq i \leq n$, que cumplen:

(1) $\delta_i \delta_j = \delta_{j-1} \delta_i$, $i < j$

(2) $\delta_i \sigma_j = \sigma_{j-1} \delta_i$, $i < j$

(3) $\delta_j \sigma_j = \delta j + 1 \sigma_j = id$

(4) $\delta_i \sigma_j = \sigma_j \delta_{i-1}$, $i > j + 1$

(5) $\sigma_i \sigma_j = \sigma_{j+1} \sigma_i, i \leq j$

Formando el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, bend right, "\sigma_0"'] & X_1 \arrow[l, bend right, "\delta_1"'] \arrow[l, "\delta_0"'] \arrow[r, bend right, "\sigma_0"'] \arrow[r, bend right=50, "\sigma_1"'] & X_2 \ldots \arrow[l, bend right=50, "\delta_2"'] \arrow[l, bend right, "\delta_1"'] \arrow[l, "\delta_0"']
\end{tikzcd}$$

1.3.1 Definición categórica de los conjuntos simpliciales

Como en los conjuntos Delta, daremos una definición categórica de los conjuntos simpliciales. Antes de ello definiremos la categoría Δ y su opuesta.

Definición 1.18. La *categoría* Δ es una categoría cuyos objetos son los conjuntos ordenados finitos $[n] = \{0, \ldots, n\}$ y los morfismos son las funciones, que mantienen solamente el orden, $f : [m] \to [n]$. Para todo $0 \leq i \leq n$ consideramos los morfismos:

$$\begin{aligned} d_i : [n] &\longrightarrow [n+1] \\ \{0, \ldots, n\} &\longmapsto \{0, \ldots, \hat{i}, \ldots, n+1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_i : [n+1] &\longrightarrow [n] \\ \{0, \ldots, n+1\} &\longmapsto \{0, \ldots, i, \widehat{i+1}, \ldots, n\} \end{aligned}$$

Definición 1.19. Categoría $\hat{\Delta}^{op}$

Sea la categoría Δ^{op}, la categoría opuesta de Δ, cuyos objetos son los conjuntos ordenados finitos $[n] = \{0, \ldots, n\}$ y los morfismos son las funciones, que mantienen solamente el orden, $f : [m] \to [n]$. Para todo $0 \leq i \leq n$ consideramos los morfismos:

$$\begin{aligned} D_i : [n] &\longrightarrow [n-1] \\ \{0, \ldots, n\} &\longmapsto \{0, \ldots, \hat{i}, \ldots, n\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_i : [n] &\longrightarrow [n+1] \\ \{0, \ldots, n\} &\longmapsto \{0, \ldots, i, i, \ldots, n\} \end{aligned}$$

Observamos que D_i y S_i corresponden a las caras y degeneraciones, respectivamente, y a su vez son los morfismos opuestos a d_i y a s_i que se encargan de incluir un n-simplex en un $(n+1)$-simplex como cara y de unir los vértices en las posiciones i y $i+1$ de un $(n+1)$-simplex, respectivamente.

Definición 1.20. Un *conjunto simplicial* es un funtor covariante $X\colon \Delta^{op} \to \mathrm{Set}$, equivalentemente es un funtor contravariante $X\colon \Delta \to \mathrm{Set}$. Usaremos la notación $\Delta[n] = \Delta(\_, [n])$.

$$\begin{aligned} \Delta[n]\colon \Delta &\longrightarrow \mathrm{Set} \\ [m] &\longmapsto \Delta([m],[n]) \end{aligned}$$

Ejemplo 1.21. Vamos a calcular el conjunto simplicial $\Delta[2] = \Delta(\_, [n])$

- $\Delta([0],[2])$ tiene tres 0-simplices $\{[0],[1],[2]\}$
- $\Delta([1],[2])$ tiene 6 1-simplices, tres degenerados generados por la degenarción σ_0, $\{[0,0],[1,1],[2,2]\}$; y tres no degenerados $\{[0,1],[0,2],[1,2]\}$ que tienen las caras δ_0 y δ_1, por ejemplo $\delta_0([0,1]) = [0]$ y $\delta_1([0,1]) = [1]$ que estan en $\Delta([0],[2])$.
- $\Delta([2],[2])$ tiene 10 2-simplices, 9 degenerados generados por las degeneraciones σ_0 y σ_1, $\{[0,0,0],[1,1,1],[2,2,2],[0,0,1],[0,0,2],[1,1,2],[0,1,1],[0,2,2],[1,2,2]\}$; y un no degenerado $\{[0,1,2]\}$ que tienen las caras δ_0, δ_1 y δ_2, por ejemplo $\delta_0([0,1,2]) = [1,2]$, $\delta_1([0,1,2]) = [0,2]$ y $\delta_2([0,1,2]) = [0,1]$ que estan en $\Delta([1],[2])$
- $\Delta([3],[2])$, y en adelante, tendrá todos degenerados.