1 Shuffle de árboles

En esta seción describiremos el producto tensorial $\Omega[S] \otimes \Omega[T]$ para todo par de árboles S y T de Ω. Para ello deberemos introducir la noción del conjunto de shuffles de S y T, que será una gran ayuda para encontrar el producto tensorial. Así podremos entender que es el producto tensorial de conjuntos dendroidales.

1.1 Producto tensorial de árboles lineales

Antes de ver el producto tensorial para árboles en general, estudiaremos el caso de árboles lineales ya que resulta una tarea más sencilla y la podemos relacionar con el producto cartesiano de conjuntos simpliciales.

Sean $S = L_n$ y $T = L_m$ dos árboles lineales, entonces por la proposición 3.30(i),

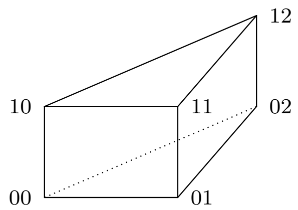
$$\Omega[L_n] \otimes \Omega[L_m] = i_!(\Delta[n]) \otimes i_!(\Delta[m]) \cong i_!(\Delta[n] \times \Delta[m])$$

Los simplices no degenerados del producto de dos representables en conjuntos simpliciales son computados mediante un *shuffle*. Un *(n,m)-shuffle* es un camino de longitud máxima en el conjunto de orden parcial $[n] \times [m]$. Los $(n + m)$-simplices no degenerados de $\Delta[n] \times \Delta[m]$ corresponde a los $(n,\ m)$-shuffles. De hecho,

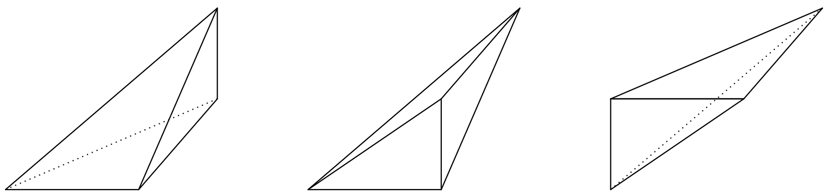
$$\Delta[n] \times \Delta[m] = \bigcup_{(n,m)} \Delta[n + m]$$

Donde la unión recorre todos los posibles (n, m)-shuffles.

Ejemplo 1.1. Sean $n = 2$ y $m = 1$. Existen tres (2, 1)-shuffles en $[2] \times [1]$, (00,01,02,12), (00,01,11,12) y (00,10,11,12). Tenemos la siguiente figura que representa $\Delta[2] \times \Delta[1]$



Podemos ver que cada (2, 1)-shuffle corresponde a un tetraedro, y hacen una descomposición de $\Delta[2] \times \Delta[1]$ como la unión de tres copias de $\Delta[3]$:



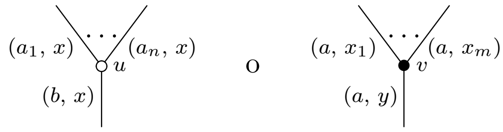
(00, 01, 02, 12) (00, 01, 11, 12) (00, 10, 11, 12)

1.2 Producto tensorial de árboles

1.2.1 Shuffles y conjuntos de shuffles

En este apartado vamos a introducir la noción de un shuffle entre dos árboles y la coleción de todos ellos. También daremos ejemplos extensos de como calcular dichos shuffles.

Definición 1.2. Sea S y T dos objetos de Ω. Un *shuffle* de S y T es un árbol R cuyo conjunto de aristas es un subconjunto de $E(S) \times E(T)$. La raíz de R es $(a,\ x)$, donde a es la raíz de S y x es la raíz de T, y sus hojas son todos los pares $(l_S,\ l_T)$, donde l_S es una hoja de S y l_T es una hoja de T. Los vértices son de la forma



Donde u es un vértice de S con entradas $a_1, \ldots, a_n$ y salida b, y v es un vértice de T con entradas $x_1, \ldots, x_m$ y salida y. Nos referiremos a los dos tipos de vértices como *vértices blancos* y *vértices negres*, respectivamente. Para diferenciarlos visualmente los pintaremos con $\circ$ y $\bullet$, respectivamente.

Observamos que existe una biyección entre los shuffles de dos árboles lineales L_n y L_m con los $(n,\ m)$-shuffles de $[n] \times [m]$.

Definición 1.3. Sean S y T dos árboles. El *conjunto de shuffles de S y T* es la colección de todos los shuffles posibles entre S y T. La cardinalidad de este conjunto la denotaremos por $sh(S,\ T)$.

Proposición 1.4. *El número de shuffles $sh(S,\ T)$ de dos árboles S y T satisface tres propiedades:*

(i) $sh(S,\ T) = sh(T,\ S)$

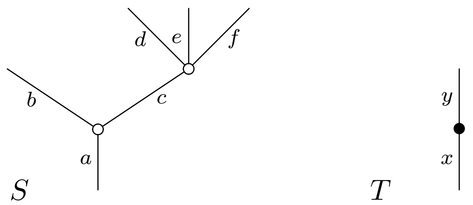
(ii) *Si T es un árbol unitario η, entonces $sh(S,\ \eta) = 1$*

(iii) *Si $S = C_n[S_1, \ldots, S_n]$ y $T = C_m[T_1, \ldots, T_m]$, entonces*

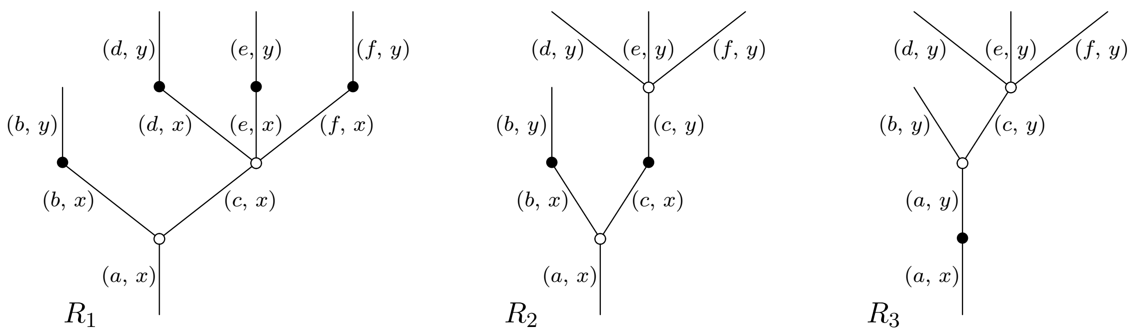
$$sh(S,\ T) = \prod_{i=1}^{n} sh(S_i,\ T) + \prod_{j=1}^{m} sh(S,\ T_j)$$

Donde C_n y C_m son n y m-corolas, respectivamente; y $C_n[S_1, \ldots, S_n]$ es una n-corola que cada hoja i-esima la conectamos con la raíz del árbol S_i.

Ejemplo 1.5. Sean S y T los árboles

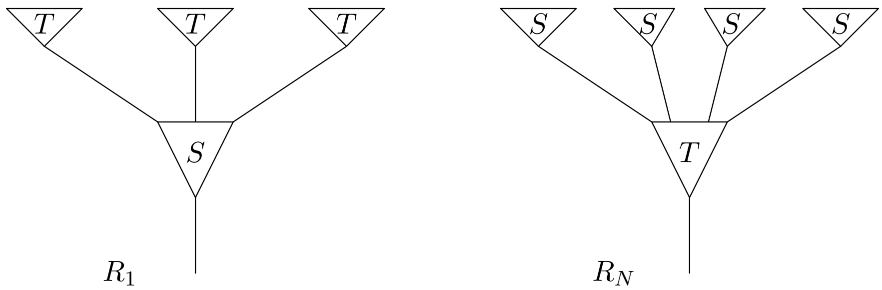


El conjunto de shuffles de S y T consiste de los siguientes tres árboles:

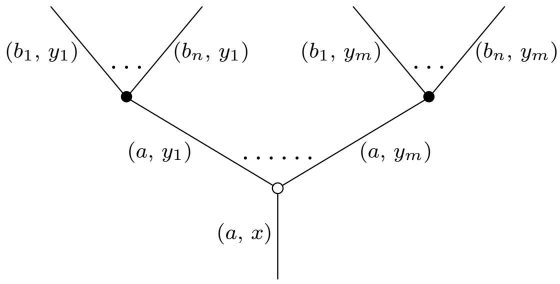


(1.1)

El conjunto de shuffles de S y T es *ordenado parcialmente*. El árbol minimal R_1 en el conjunto ordenado parcialmente se obtiene mediante la inserción de una copia del árbol negro T en cada entrada del árbol blanco S. Es decir, primero hacemos una copia del árbol S de la forma $S \otimes r_T$, donde todas sus aristas han sido renombradas como $(\_,\ r_T)$, siendo r_T la raíz del árbol T. Luego hacemos una copia del árbol T de la forma $l \otimes T$, para toda hoja l de S; donde todas sus aristas han sido renombradas como $(l,\ \_)$. Finalmente, obtenemos el árbol R_1 encajando las últimas copias encima de las hojas de la forma $(l,\ r_T)$ de la primera copia. El árbol maximal R_N en el conjunto ordenado parcialmente se obtiene mediante la inserción de una copia del árbol blanco S en cada entrada del árbol negro T. Los árboles R_1 y R_n deberían lucir de la siguiente manera

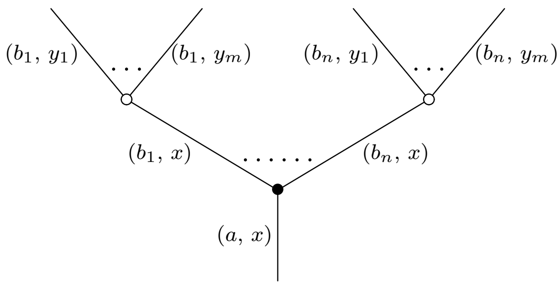


Existen los *shuffles intermediarios* R_k $(1 < k < N)$ entre R_1 y R_N obtenidos filtrando los vértices negros en R_1 hacia la raíz del árbol mediante intercambios con los vértices blancos. Todo R_k se obtiene desde un R_l anterior. Es decir, cada intercambio se basa en transformar una configuración de R_l



(1.2)

A una configuración de R_k

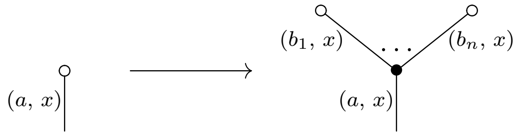


(1.3)

Si un shuffle R_k se obtiene the otro shuffle R_l mediante la norma de arriba, entonces decimos que R_k se obtiene mediante *un solo intercambio* y lo denotaremos por $R_l \leq R_k$. Así, obtenemos un orden parcial en el conjunto de todos los shuffles.

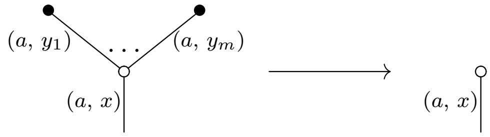
Tenemos que espicificar el caso de un intercambio con un árboles sin entradas, es decir,

$n = 0$ o $m = 0$. Si $m = 0$ y $n \neq 0$, entonces tenemos el intercambio



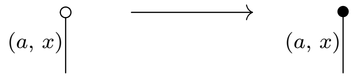
(1.4)

Si $n = 0$ y $m \neq 0$, entonces tenemos el intercambio



(1.5)

Finalmente, si $n = m = 0$, entonces tenemos el intercambio

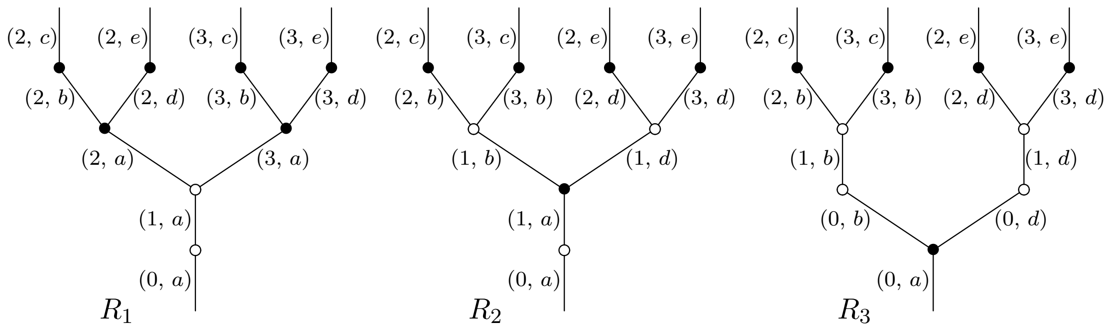


(1.6)

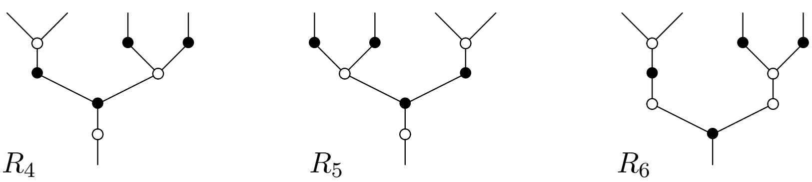
Ejemplo 1.6. Sean S y T los árboles

S T

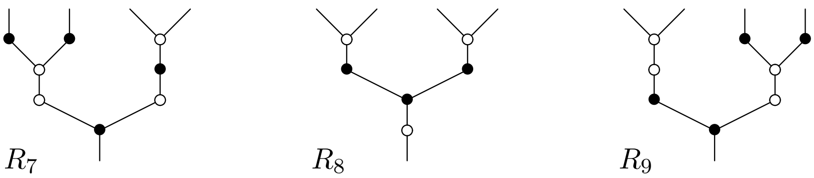
Existen catorce shuffles $R_1, \ldots, R_{14}$ de S y T. Mostramos una lista completa de ellos. Marcaremos los nombres de las aristas en los tres primeros shuffles.



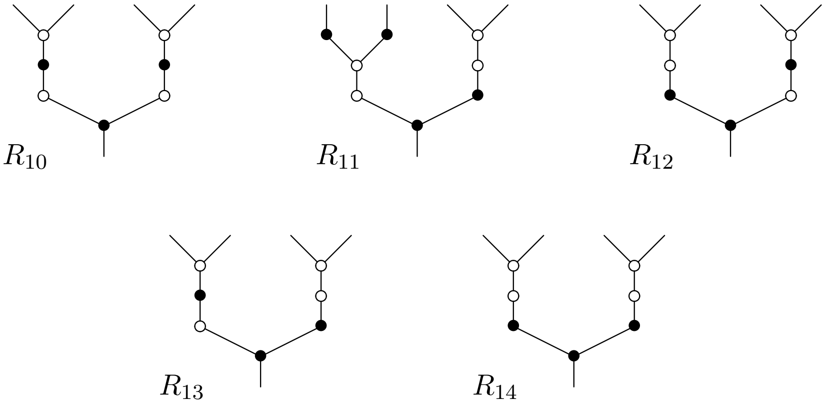
R_1 R_2 R_3



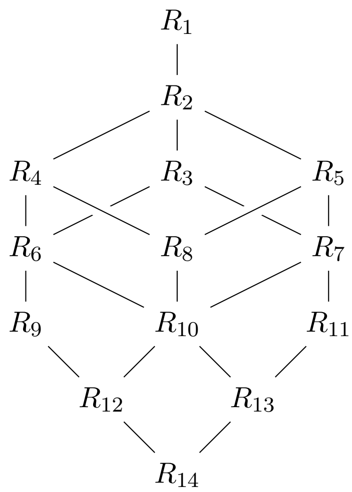
R_4 R_5 R_6



R_7 R_8 R_9



Tenemos la siguiente estructura dentro del conjunto ordenado parcialmente.



Producto tensorial de árboles

Ahora podemos dar una descripción completa del producto tensorial entre dos objetos representables en Ω mediante el cómputo de su conjunto de shuffles.

Lema 1.7. *Para todo shuffle R_i de S y T tenemos un monomorfismo*

$$m\colon \Omega[R_i] \rightarrowtail \Omega[S] \otimes \Omega[T]$$

El subconjunto dendroidal, que viene dado por la imágen de este monomorfismo, lo denotaremos $m(R_i)$.

Proof. Los vérties del conjunto dendroidal $\Omega[R_i]$ son las aristas del árbol R_i. La función m envía aristas nombradas como $(a,\ x)$ en R_i a la arista con el mismo nombre en $\Omega[S]\otimes\Omega[T]$. Vemos que es un monomorfismo. No entiendo. $\square$

Corolario 1.8. *Para todo objeto T y S en Ω, tenemos que*

$$\Omega[S] \otimes \Omega[T] = \bigcup_{i=1}^{N} m(R_i)$$

donde la unión recorre todos los posibles shuffles de S y T.

1.3 Shuffle de árboles en Python

No es complicado ver que tanto encontrar el producto tensorial de conjuntos dendroidales o, equivalentemente, calcular el conjunto de shuffles para dos árboles cualesquiera, resulta una tarea tediosa si los árboles son grandes. Para tal problema, el uso de un programa informático, capaz de almanezar grandes cantidades de información al momento de ejecución, nos resulta cómodo, fácil y rápido.

En este apartado describiré de manera breve el código que he escrito para poder tratar con opéradas, árboles, shuffles y finalmente con el conjunto de shuffles. También, el código incluye una función para formar figuras con el paquete *xy* de *Latex* de un árbol mediante una descripción básica.

Finalmente, dicho código lo podréis encontrar tanto en el Anexo 1 como en el repositorio público de código de Github: Trees Shuffling.

Clases básicas

Definición 1.9. Una *clase informática* es una abastración de propiedades y funciones de un objeto en concreto.

Siguiendo tal definición, tenemos las siguientes clases básicas:

- Operada
- Arbol

Falta por hacer...

Algorithm 1 Pseudocódigo del algoritmo para generar todos los shuffles entre S y T. Podéis encontrar el código completo en el anexo.

Input: Requires the class instance of *ShuffleLattice*

function GENERATE_SHUFFLES(self)
    queue ← Append initial tree
    dictionary ← Save initial tree
    while *queue* not empty **do**
        tree ← Pop the first tree in *queue*
        for *location* in $tree.find\_percolations()$ **do**
            new_tree ← Apply the percolation on *location* of the *tree*
            if *new_tree* not in *dictionary* **then**
                queue ← *new_tree* Append new tree
                dictionary ← Save new tree
    return *dictionary*

Output: Returns *dictionary* with all the shuffles found

Algorithm 2 Pseudocódigo del algoritmo para computar el número de shuffles entre S y T. Podéis encontrar el código completo en el anexo.

Input: Requires two trees S and T

function SH(S, T)
    if S is a unitary Tree **then**
        return 1
    if T is a unitary Tree **then**
        return 1
    $prod_S \leftarrow 1$
    for $branch$ in $S.get\_branches()$ **do**
        $prod_S \leftarrow prod_S * sh(branch, T)$ ▷ Note that every *branch* is a Tree
    $prod_T \leftarrow 1$
    for $branch$ in $T.get\_branches()$ **do**
        $prod_T \leftarrow prod_T * sh(S, branch)$ ▷ Note that every *branch* is a Tree
    return $prod_S + prod_T$

Output: Returns the sum of the products

Algorithm 3 Pseudocódigo del algoritmo para ordenar las operaciones de un árbol T. Podéis encontrar el código completo en el anexo.

Input: Requires an array of operations of a tree

function SORTED($operations$)
    $n \leftarrow$ Length of *operations*
    $i \leftarrow 0$ Starting index
    while $i < n$ **do**
        for j in $[i+1, \ldots, n)$ **do**
            if $operations[i].trunk$ in $operations[j].branches$ **then**
                $operation \leftarrow$ Pop operation on index i from *operations*
                $opertations[j] \leftarrow operation$ Insert *operation* on new index
                break
        else ▷ Note that this else only occurs when the **for** hasn't been broken
            $i \leftarrow i + 1$
    return *operations*

Output: Returns the list of operations sorted