GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Aspectos combinatorios del producto tensorial de conjuntos dendroidales

Autor: Roger Brascó Garcés

Director: Dr. Javier J. Gutiérrez

Realitzat a: Departament de Topología

Barcelona, 23 de enero de 2022

Resumen

2010 Mathematics Subject Classification. 11G05, 11G10, 14G10

Agradecimientos

Índice

1. Nociones previas

1.1. Categorías

Definición 1.1. *Categoría*

Una categoría is una cuadrúpula $\mathcal{A} = (\mathcal{O}, \hom, id, \circ)$ que consiste en:

(1) Una clase $\mathcal{O}$ que sus elementos serán llamados **$\mathcal{A}$-objetos**. Usaremos la notación $Ob(\mathcal{A})$ para simplificar.

(2) Para cada pareja de objetos (A, B) de $\mathcal{A}$, tenemos un conjunto de $\hom(A, B)$, cuyos elementos serán llamados **$\mathcal{A}$-morfismos** de A a B; és decir, los morfismos $A \xrightarrow{f} B$ para todo $f \in \hom(A, B)$.

(3) Para cada objeto A de $\mathcal{A}$ definimos el morfismo $A \xrightarrow{id_A} A$ como la identidad A.

(4) Sean $A \xrightarrow{f} B$ y $B \xrightarrow{g} C$ dos morifismos de $\mathcal{A}$, definimos la composición $\circ$ como:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Composición que cumple con las siguientes condiciones:

(a) Es asociativa: sean $A \xrightarrow{f} B$, $B \xrightarrow{g} C$ y $C \xrightarrow{h} D$ morifismos de $\mathcal{A}$, entonces se cumple $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

(b) Respecta la identidad: para todo morfismo $A \xrightarrow{f} B$ de $\mathcal{A}$, se cumple $id_B \circ f = f$ y $f \circ id_A = f$.

Ejemplo 1.2. Categoría **Set** cuyos objetos son todos los conjuntos y los morfismos son las funciones totales.

Definición 1.3. *Categoría opuesta*

Para toda categoría $\mathcal{A} = (\mathcal{O}, \hom_{\mathcal{A}}, id, \circ)$ definimos la categoría opuesta como $\mathcal{A}^{\mathrm{op}} = (\mathcal{O}, \hom_{\mathcal{A}^{\mathrm{op}}}, id, \circ^{\mathrm{op}})$, donde $\hom_{\mathcal{A}^{\mathrm{op}}}(A, B) = \hom_{\mathcal{A}}(B, A)$ y $f \circ^{\mathrm{op}} g = g \circ f$. Podemos observar que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ tienen los mismos objetos y los mismos morfismos pero cambiados de dirección.

1.1.1. Functores

Definición 1.4. *Functor*

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos categorías, definimos un functor F de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ como una función que asigna cada objeto $A \in Ob(\mathcal{A})$ un objeto $F(A) \in Ob(\mathcal{B})$, y para cada morfismo de $\mathcal{A}$ $A \xrightarrow{f} A'$ un morfismo de $\mathcal{B}$ $F(A) \xrightarrow{F(f)} F(A')$.

$$\begin{aligned} F : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{B} \\ A &\longmapsto F(A) \\ f &\longmapsto F(f) \end{aligned}$$

De manera que:

(1) F conserva la composición: $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$, siempre y cuando $f \circ g$ esté bien definido.

(2) F conserva los morfismos identidad: $F(id_A) = id_{F(A)}$, para cada $A \in Ob(\mathcal{A})$.

Definición 1.5. *Tipos de functores*

Sea $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un functor de las categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$.

(1) F es un functor covariante si preserva la dirección de los morfismos; es decir, el morfismo $f : A \longrightarrow A'$ de $\mathcal{A}$ es asignado al morfismo $F(f) : F(A) \longrightarrow F(A')$ de $\mathcal{B}$.

(2) F es un functor contravariante si invierte la dirección de los morfismos; es decir, el morfismo $f : A \longrightarrow A'$ de $\mathcal{A}$ es asignado al morfismo $F(f) : F(A') \longrightarrow F(A)$ de $\mathcal{B}$.

(3) F es un functor fiel si para cada par de objetos $A, A' \in Ob(\mathcal{A})$ la función $F_{A,A'} : \hom_{\mathcal{A}}(A, A') \longrightarrow \hom_{\mathcal{B}}(F(A), F(A'))$ es inyectiva.

1.2. Operadas

Sea $\mathcal{C}$ una categoría cocompleta, simétrica y monoidal, con producto tensorial $\otimes$ y unidad I. Suponemos que $\mathcal{C}$ es cerrada y la $\hom(X, Y)$ es la hom interna. Finalmente, denotamos el grupo simétrico de n letras como $\sum_n$.

Definición 1.6. *Operada*

Una operada P en $\mathcal{C}$ consiste en objetos $P(n)$ de $\mathcal{C}$ para todo $n \geq 0$ y las siguientes afirmaciones:

(1) Elemento unidad, definido por el morfismo $I \longrightarrow P(1)$.

(2) Un producto composición definido por los morfismos

$$P(n) \otimes P(k_1) \otimes \cdots \otimes P(k_n) \longrightarrow P(k)$$

para todo n y $k_1, \ldots, k_n$ tal que $k = \sum_{i=1}^{n} k_i$. El producto composición es equivariante y asociativo con la unidad.

(3) Acción permutación de variables definido por la acción de $\sum_n$ por la de derecha en $P(n)$ para cada n.

Definición 1.7. *Morfismo de operadas*

Sean P y Q dos operadas en $\mathcal{C}$. Un morfismo de operadas $f : P \longrightarrow Q$ es definido por los morfismos $f_n : P(n) \longrightarrow Q(n)$ para cada n que sean compatibles con el producto composición, el elemento unidad y la acción del grupo simétrico.

1.2.1. Operadas coloreadas

Sea C un conjunto cuyos elementos los nombramos colores. Una operada C-coloreada P consiste en:

(1) Para cada secuencia de colores $c_1, \ldots, c_n, c \in C$, tenemos un objeto $P(c_1, \ldots, c_n; c) \in \mathcal{C}$. Este objeto reperesenta el conjunto de operaciones cuyas entradas son los colores $c_1, \ldots, c_n$ y las salidas son el color c.

(2) Elemento unidad, definido por el morfismo $I \longrightarrow P(c; c)$ para todo $c \in C$.

(3) Para cada tupla de $n+1$ colores $(c_1, \ldots, c_n; c)$ y n tuplas cualesquiera

$$(d_{1,1}, \ldots, d_{1,k_1}; c_1), \ldots, (d_{n,1}, \ldots, d_{n,k_n}; c_n)$$

definimos un producto composición asociativo mediante los morfismos

$$\begin{aligned} P(c_1, \ldots, c_n; c) \otimes P(d_{1,1}, \ldots, d_{1,k_1}; c_1) \otimes \cdots \otimes P(d_{n,1}, \ldots, d_{n,k_n}; c_n) \\ \longrightarrow P(d_{1,1}, \ldots, d_{1,k_1}, \ldots, d_{n,1}, \ldots, d_{n,k_n}; c) \end{aligned}$$

(4) Acción permutación de variables definido por la acción del grupo simétrico. Sea $\sigma \in \sum_n$ una permutación, definimos el morfismo

$$\sigma^* : P(c_1, \ldots, c_n; c) \longrightarrow P(c_{\sigma(1)}, \ldots, c_{\sigma(n)}; c)$$

Definición 1.8. *Morfismo de operadas coloreadas*

Sean P y Q dos operadas C-coloreada y D-coloreada, respectivamente, en $\mathcal{C}$. Un morfismo de P a Q de operadas coloreadas es formado por un morfismo de colores $f : C \longrightarrow D$ y los morfismos

$$\varphi_{c_1,\ldots,c_n;c} : P(c_1, \ldots, c_n; c) \longrightarrow Q(f(c_1), \ldots, f(c_n); c)$$

que sean compatibles con el producto composición, el elemento unidad y la acción del grupo simétrico.

Usaremos la notación $Oper(\mathcal{C})$ para referenciar a la categoría cuyos objetos son operadas coloreadas en $\mathcal{C}$ y cuyos morfismos son morfismos de operadas coloreadas.

2. Conjuntos Simpliciales

2.1. Complejos simpliciales

Definición 2.1. *N-simplex*

Un n-simplex es un politopo de $n \geq 0$ dimensiones formando una envoltura convexa de $n+1$ vertices. Es decir, es un conjunto de puntos afines independientes en un espacio euclídeo de dimensión n.

Una cara m de un n-simplex es una envolutra convexa de $m \leq n$ vertices.

Definición 2.2. *Complejo simplicial*

Sea $n \in \mathbb{N}^*$, un complejo simplicial X es un conjunto finito de m-simplex con $m \leq n$ que cumplen las condiciones:

(1) Si m-simplex $\in X \Rightarrow \forall m' \leq m$, m'-simplex $\in X$.

(2) Si dos simplices de X se cortan, entonces su intersección es una cara común.

Sea X^k un complejo simplicial formado por todos los k-simplex de X. Observamos que todo elemento de X^k es un subconjunto de X^0 con cardinal $k+1$, donde $X^0 = \{v_0, \ldots, v_n\}$. Generalmente, todo subconjunto de X^k de $j+1$ elementos es un elemento de X^j.

Sea X_k un conjunto formado por k-simplices.

Definición 2.3. *N-simplex ordenado*

Un n-simplex formado por los vértices $v_0, \ldots, v_n \in X^0$ es ordenado cuando cuando los vértices estan ordenados, en ese caso nombramos cada vértice por los números $0, \ldots, n$. Usaremos la notación $|\Delta^n| = [0, \ldots, n]$ para simplificar.

2.1.1. Morfismos simpliciales

Definición 2.4. *Morfismo simplicial*

Sea K y L complejos simpliciales. Sea un morfismo simplicial $F : K \longrightarrow L$ que envia los vertices de K a los vertices de L. Es decir, $\forall v \in K^0$, $v \longmapsto F(v) \in L^0$.

Definición 2.5. *Cara*

Para todo $|\Delta^n|$ tenemos $n+1$ caras definidas por los morfismos $\delta_0, \ldots, \delta_n$

$$\delta_j : X_n \longrightarrow X_{n-1}$$
$$[0, \ldots, n] \longmapsto [0, \ldots, \hat{j}, \ldots, n]$$

Donde X_n y X_{n-1} son conjuntos de simplices ordenados de n y $n-1$ vértices, respectivamente. Observamos que $\forall i < j$, $\delta_i \delta_j = \delta_{j-1} \delta_i$.

Definición 2.6. *Morifismo degenerativo*

Para todo $|\Delta^n|$ tenemos $n+1$ morfismos degenerativos $\sigma_0, \dots, \sigma_n$

$$\begin{aligned} \sigma_j : X_n &\longrightarrow X_{n+1} \\ [0, \dots, n] &\longmapsto [0, \dots, j, j, \dots, n] \end{aligned}$$

Donde X_n y X_{n+1} son conjuntos de simplices ordenados de n y $n+1$ vértices, respectivamente. Observamos que $\forall i \leq j$, $\sigma_i \sigma_j = \sigma_{j+1} \sigma_i$.

2.2. Conjunto Delta

Definición 2.7. *Conjunto Delta*

Definimos un conjunto Delta como una secuencia de conjuntos $X_0, X_1, \dots$ y para cada $n \geq 0$ las funciones $\delta_i : X_{n+1} \longrightarrow X_n$, $\forall 0 \leq i \leq n+1$, que cumplen $\delta_i \delta_j = \delta_{j-1} \delta_i$, $\forall i \leq j$. Formando el siguiente diagrama (Falta por hacer)

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, bend left] & X_1 \arrow[r, bend left] & X_2 \dots \end{tikzcd}$$

2.2.1. Definición categórica del conjunto Delta

Definición 2.8. *Categoría $\hat{\Delta}$*

Sea la categoría $\hat{\Delta}$ cuyos objetos son los conjuntos estrictamente ordenados finitos $[n] = \{0, \dots, n\}$ y los morfismos son las funciones, que mantienen el orden estrictamente, $f : [m] \longrightarrow [n]$, $m \leq n$. Podemos pensar que sea la inclusión de un m-simplex como cara de un n-simplex. Para todo $0 \leq i \leq n$ consideramos los morfismos:

$$\begin{aligned} d_i : [n] &\longrightarrow [n+1] \\ \{0, \dots, n\} &\longmapsto \{0, \dots, \hat{i}, \dots, n+1\} \end{aligned}$$

Definición 2.9. *Categoría $\hat{\Delta}^{op}$*

Sea la categoría $\hat{\Delta}^{op}$, la categoría opuesta de $\hat{\Delta}$, cuyos objetos son los conjuntos estrictamente ordenados finitos $[n] = \{0, \dots, n\}$ y los morfismos son las funciones, que mantienen el orden estrictamente, $f : [n] \longrightarrow [m]$, $m \leq n$. Podemos pensar que sea la extracción de la cara m-simplex de un n-simplex. Para todo $0 \leq i \leq n$ consideramos los morfismos:

$$\begin{aligned} \delta_i : [n] &\longrightarrow [n-1] \\ \{0, \dots, n\} &\longmapsto \{0, \dots, \hat{i}, \dots, n\} \end{aligned}$$

Definición 2.10. *Conjunto Delta*

Un conjunto Delta es un functor covariante $X : \hat{\Delta}^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$, equivalentemente es un functor contravariante $X : \hat{\Delta} \longrightarrow \mathbf{Set}$.

Faltan observaciones.

2.3. Conjunto simplicial

Definición 2.11. *Conjunto simplicial*

Definimos un conjunto simplicial como una secuencia de conjuntos $X_0, X_1, \ldots$ y para cada $n \geq 0$ las funciones $\delta_i : X_n \longrightarrow X_{n-1}$ y $\sigma_i : X_n \longrightarrow X_{n+1}$, $\forall 0 \leq i \leq n$, que cumplen:

(1) $\delta_i \delta_j = \delta_{j-1}\delta_i$, $i < j$

(2) $\delta_i \sigma_j = \sigma_{j-1}\delta_i$, $i < j$

(3) $\delta_j \sigma_j = \delta j + 1\sigma_j = id$

(4) $\delta_i \sigma_j = \sigma_j \delta_{i-1}$, $i > j + 1$

(5) $\sigma_i \sigma_j = \sigma_{j+1}\sigma_i, i \leq j$

Formando el siguiente diagrama (Falta por hacer)

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, bend left] & X_1 \arrow[r, bend left] & X_2 \ldots \end{tikzcd}$$

2.3.1. Definición categórica del conjunto simplicial

Definición 2.12. *Categoría* Δ

Sea la categoría Δ cuyos objetos son los conjuntos ordenados finitos $[n] = \{0, \ldots, n\}$ y los morfismos son las funciones, que mantienen solamente el orden, $f : [m] \longrightarrow [n]$. Para todo $0 \leq i \leq n$ consideramos los morfismos:

$$d_i : [n] \longrightarrow [n+1]$$
$$\{0, \ldots, n\} \longmapsto \{0, \ldots, \hat{i}, \ldots, n+1\}$$

$$s_i : [n+1] \longrightarrow [n]$$
$$\{0, \ldots, n+1\} \longmapsto \{0, \ldots, i, i, \ldots, n\}$$

Definición 2.13. *Categoría* $\hat{\Delta}^{op}$

Sea la categoría Δ^{op}, la categoría opuesta de Δ, cuyos objetos son los conjuntos ordenados finitos $[n] = \{0, \ldots, n\}$ y los morfismos son las funciones, que mantienen solamente el orden, $f : [m] \longrightarrow [n]$. Para todo $0 \leq i \leq n$ consideramos los morfismos:

$$\delta_i : [n] \longrightarrow [n-1]$$
$$\{0, \ldots, n\} \longmapsto \{0, \ldots, \hat{i}, \ldots, n\}$$

$$\sigma_i : [n] \longrightarrow [n+1]$$
$$\{0, \ldots, n\} \longmapsto \{0, \ldots, i, i, \ldots, n\}$$

Definición 2.14. *Conjunto simplicial*

Un conjunto simplicial es un functor covariante $X : \Delta^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$, equivalentemente es un functor contravariante $X : \Delta \longrightarrow \mathbf{Set}$. Usaremos la notación $\Delta[n] = \Delta(\_, [n])$.

$$\begin{aligned} \Delta[n] : \Delta^{op} &\longrightarrow \mathbf{Set} \\ [m] &\longmapsto \Delta([m], [n]) \end{aligned}$$

Faltan observaciones.

2.4. Realización geométrica

Definición 2.15. *Realización geométrica*

Sea X un conjunto simplicial. Dotamos cada X_n con la topología discreta y sea $|\Delta^n$ el n-simplex dotado de su topología estandard. Definimos la realización geométrica como

$$|X| = \coprod_{n=0}^{\infty} X_n \times |\Delta^n| / \sim$$

Donde $\sim$ es la relación de equivalencia generada por las relaciones:

(1) $(x, d_i(p)) \sim (\delta_i(x), p)$, $x \in X_{n+1}$ y $p \in |\Delta^n|$

(2) $(x, s_i(p)) \sim (\sigma_i(x), p)$, $x \in X_{n-1}$ y $p \in |\Delta^n|$

Ejemplo 2.16. $\Delta[2] = \Delta(\_, [2])$

Falta por escribir

3. Conjuntos Dendroidales

3.1. Árbol como operadas

3.1.1. Caras

3.1.2. Funciones degenerativas

3.1.3. Identidades de morfismos

3.1.4. Árboles no planares

3.2. Conjunto Dendroidal

3.3. Producto tensorial de conjuntos dendroidales

3.3.1. Producto tensorial Boardman Vogt

3.3.2. Producto Producto tensorial de conjuntos dendroidales

4. Injertos de árboles

4.1. Producto tensorial de árboles lineales

4.2. Producto tensorial de árboles

4.2.1. Injertos de árboles resultantes

4.3. Cálculo de árboles resultantes

4.3.1. Conjunto de árboles resultantes

4.3.2. Generarador de árboles en Python

5. Conclusiones

Referencias

[1] Batut, C.; Belabas, K.; Bernardi, D.; Cohen, H.; Olivier, M.: User's guide to *PARI-GP*, `pari.math.u-bordeaux.fr/pub/pari/manuals/2.3.3/users.pdf`, 2000.

[2] Chen, J. R.; Wang, T. Z.: On the Goldbach problem, *Acta Math. Sinica*, 32(5):702-718, 1989.

[3] Deshouillers, J. M.: Sur la constante de Šnirel′man, *Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 17e année: (1975/76), Théorie des nombres: Fac. 2, Exp. No.* G16, pág. 6, Secrétariat Math., Paris, 1977.

[4] Deshouillers, J. M.; Effinger, G.; te Riele, H.; Zinoviev, D.: A complete Vinogradov 3-primes theorem under the Riemann hypothesis, *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.*, 3:99-104, 1997.

[5] Dickson, L. E.: *History of the theory of numbers. Vol. I: Divisibility and primality*, Chelsea Publishing Co., New York, 1966.

[6] Hardy, G. H.; Littlewood, J. E.: Some problems of 'Partitio numerorum'; III: On the expression of a number as a sum of primes, *Acta Math.*, 44(1):1-70, 1923.

[7] Hardy, G. H.; Ramanujan, S.: Asymptotic formulae in combinatory analysis, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 17:75-115, 1918.

[8] Hardy, G. H.; Wright, E. M.: *An introduction to the theory of numbers*, 5a edición, Oxford University Press, 1979.

[9] Helfgott, H. A.: Minor arcs for Goldbach's problem, `arXiv:1205.5252v4 [math.NT]`, diciembre de 2013.

[10] Helfgott, H. A.: Major arcs for Goldbach's problem, `arXiv:1305.2897v4 [math.NT]`, abril de 2014.

[11] Helfgott, H. A.: The ternary Goldbach conjecture is true, `arXiv:1312.7748v2 [math.NT]`, enero de 2014.

[12] Helfgott, H. A.; Platt, D.: Numerical verification of the ternary Goldbach conjecture up to $8{,}875 \cdot 10^{30}$, `arXiv:1305.3062v2 [math.NT]`, abril de 2014.

[13] Klimov, N. I.; Pil′tjaĭ, G. Z.; Šeptickaja, T. A.: An estimate of the absolute constant in the Goldbach-Šnirel′man problem, *Studies in number theory, No. 4*, págs. 35-51, Izdat. Saratov. Univ., Saratov, 1972.

[14] Liu, M. C.; Wang, T.: On the Vinogradov bound in the three primes Goldbach conjecture, *Acta Arith.*, 105(2):133-175, 2002.

[15] Oliveira e Silva, T.; Herzog, S.; Pardi, S.: Empirical verification of the even Goldbach conjecture and computation of prime gaps up to $4 \cdot 10^{18}$, *Math. Comp.*, 83:2033-2060, 2014.

[16] Ramaré, O.: On Šnirel′man's constant, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, 22(4):645-706, 1995.

[17] Riesel, H.; Vaughan, R. C.: On sums of primes, *Ark. Mat.*, 21(1):46-74, 1983.

[18] Rosser, J. B.; Schoenfeld, L.: Approximate formulas for some functions of prime numbers, *Illinois J. Math.*, 6:64-94, 1962.

[19] Schnirelmann, L.: Über additive Eigenschaften von Zahlen, *Math. Ann.*, 107(1):649-690, 1933.

[20] Tao, T.: Every odd number greater than 1 is the sum of at most five primes, *Math. Comp.*, 83:997-1038, 2014.

[21] Travesa, A.: *Aritmètica*, Cołecció UB, No. 25, Barcelona, 1998.

[22] Vaughan, R. C.: On the estimation of Schnirelman's constant, *J. Reine Angew. Math.*, 290:93-108, 1977.

[23] Vaughan, R. C.: *The Hardy-Littlewood method*, Cambridge Tracts in Mathematics, No. 125, 2a edición, Cambridge University Press, 1997.

[24] Vinogradov, I. M.: Sur le théorème de Waring, *C. R. Acad. Sci. URSS*, 393-400, 1928.

[25] Vinogradov, I. M.: Representation of an odd number as a sum of three primes, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 15:291-294, 1937.