GRADO EN MATEMÁTICAS

Trabajo final de grado

Aspectos combinatorios del producto tensorial de conjuntos dendroidales

Autor: Roger Brascó Garcés

Director:	Dr. Javier J. Gutiérrez
Realizado en:	Departamento de Matemáticas e Informática
Barcelona,	23 de enero de 2022

Resumen

2010 Mathematics Subject Classification. 11G05, 11G10, 14G10

Agradecimientos

Índice

1. Nociones previas

1.1. Categorías

Definición 1.1. Una *categoría* $\mathcal{C}$ consiste en:

- Una clase $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, cuyos elementos llamaremos *objetos* de la categoría.
- Para cada par de objectos $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ un conjunto $\mathcal{C}(A, B)$ de *morfismos* o *flechas* de A a B.
- Para cada tres objectos $A, B, C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ una *función de composición*
$$\mathcal{C}(B, C) \times \mathcal{C}(A, B) \xrightarrow{\circ} \mathcal{C}(A, C)$$
que envía el par (g, f) a $g \circ f$.
- Para cada objeto A, un elemento $\mathrm{id}_A \in \mathcal{C}(A, A)$ que llamaremos la *identidad* en A.

Además, esta estructura cumple los siguientes axiomas:

- *Asociatividad.* La función de composición es asociativa, esto es, dados $f \in \mathcal{C}(A, B)$, $g \in \mathcal{C}(B, C)$ y $h \in \mathcal{C}(C, D)$, se cumple que $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.
- *Unidad.* La identidad es un elemento neutro para la composición, es decir, para toda $f \in \mathcal{C}(A, B)$ tenemos que $f \circ \mathrm{id}_A = f = \mathrm{id}_B \circ f$.

A menudo, denotaremos un objecto A de $\mathcal{C}$ como $A \in \mathcal{C}$, en vez de $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ y un morfismo $f \in \mathcal{C}(A, B)$ como $f \colon A \to B$. Una categoría $\mathcal{C}$ es *pequeña* si $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ es un conjunto.

Ejemplo 1.2. Los siguientes son algunos ejemplos de categorías.

(i) La categoría Set cuyos objetos son todos los conjuntos y cuyos morfismos son la aplicaciones entre conjuntos

(ii) La categoría Grp cuyos objetos son los grupos y cuyos morfismos son los morfismos de grupo.

(iii) La categoría Top cuyos objetos son los espacios topológicos y cuyos morfismos son las aplicaciones continuas.

Definición 1.3. Dada una categoría $\mathcal{C}$, podemos definir su *categoría opuesta* $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ de la siguiente manera. Los objectos de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ son los mismos que los de $\mathcal{C}$, los morfismos cambian de dirección $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(A, B) = \mathcal{C}(B, A)$ y la función de composición es $f \circ^{\mathrm{op}} g = g \circ f$.

1.1.1. Funtores

Definición 1.4. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías. Un *funtor* F de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$, que denotaremos por $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ consiste en:

- Una aplicación $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$. La imagen de un objeto A de $\mathcal{C}$ la denotaremos por $F(A)$

- Para cada par de objetos $A, B \in \mathcal{C}$ una aplicación
$$\mathcal{C}(A,B) \longrightarrow \mathcal{D}(F(A), F(B)).$$
La imagen de un morfismo $f\colon A \to B$ por esta aplicación la denotaremos por $F(f)\colon F(A) \to F(B)$.

Además, estas aplicaciones son compatibles con la composición y la unidad, esto es, se cumplen los siguientes axiomas:

- Dados $f \in \mathcal{C}(A,B)$ y $g \in \mathcal{C}(B,C)$ se cumple que $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.
- Para todo objeto $A \in \mathcal{C}$ se cumple que $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$.

Observación 1.5. La noción de funtor que acabamos se llama también *funtor covariante* de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$. Un funtor de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ en $\mathcal{D}$ se llama *functor contravariante* de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$. Observar que si F es un funtor contravariante de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$ y $f\colon A \to B$ es un morfismo en $\mathcal{C}$, entonces $F(f)\colon F(B) \to F(A)$.

Ejemplo 1.6. Dado un conjunto X cualquiera, podemos construir el grupo libre en los elementos de este conjunto $F(X)$. Esto define un funtor $F\colon \mathrm{Set} \to \mathrm{Grp}$.

Definición 1.7. Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor entre dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$. Dados un par de objetos $A, B \in \mathcal{C}$ consideremos la aplicación
$$F_{A,B}\colon \mathcal{C}(A,B) \longrightarrow \mathcal{D}(F(A), F(B)).$$

- Diremos que F es un funtor *fiel* si para cada par de objetos $A, B \in \mathcal{C}$ la aplicación $F_{A,B}$ es inyectiva.
- Diremos que F es un funtor *pleno* si para cada par de objetos $A, B \in \mathcal{C}$ la aplicación $F_{A,B}$ es exhaustiva.
- Diremos que F es un funtor *plenamente fiel* si para cada par de objetos $A, B \in \mathcal{C}$ la aplicación $F_{A,B}$ es biyectiva.

1.2. Opéradas en conjuntos

Para cada $n \geq 0$, denotaremos por Σ_n el grupo simétrico de n letras (en el caso $n = 0, 1$, Σ_n será el grupo trivial).

Definición 1.8. Una *opérada* P consiste en una sucesión de conjuntos $\{P(n)\}_{n \geq 0}$ junto con la siguiente estructura:

- Un elemento *unidad* $1 \in P(1)$.
- Un *producto composición*
$$P(n) \times P(k_1) \times \cdots \times P(k_n) \longrightarrow P(k)$$
para cada n y $k_1, \ldots, k_n$ tal que $k = \sum_{i=1}^{n} k_i$.
- Para cada $\sigma \in \Sigma_n$ una *acción por la derecha* $\sigma^*\colon P(n) \to P(n)$.

Además el producto composición es asociativo, equivariante y compatible con la unidad.

Definición 1.9. Dadas dos opéradas P y Q, un morfismo de opéradas $f\colon P \to Q$ consiste en aplicaciones $f_n\colon P(n) \to Q(n)$ para cada $n \geq 0$ compatibles con el producto composición, la unidad y la acción del grupo simétrico.

1.2.1. Opéradas coloreadas

La noción de opérada coloreada generaliza a la vez el concepto de categoría y de opérada.

Definición 1.10. Sea C un conjunto, cuyos elementos llameremos colores. Una opérada C-coloreada P consiste en, para cada $(n+1)$-tupla de colores $(c_1, \dots, c_n, c)$ con $n \geq 0$, un conjunto $P(c_1, \dots, c_n; c)$ (que representará el conjunto de operaciones cuyas entradas están coloreadas por los colores $c_1, \dots, c_n$ y cuya salida esta coloreada por c), junto con la siguiente estructura:

- Un elemento *unidad* $1_c \in P(c; c)$ para cada $c \in C$.
- Un *producto composición*

$$P(c_1, \dots, c_n; c) \otimes P(d_{1,1}, \dots, d_{1,k_1}; c_1) \otimes \cdots \otimes P(d_{n,1}, \dots, d_{n,k_n}; c_n) \\ \longrightarrow P(d_{1,1}, \dots, d_{1,k_1}, \dots, d_{n,1}, \dots, d_{n,k_n}; c)$$

  para cada $(n+1)$-tupla de colores $(c_1, \dots, c_n; c)$ y n tuplas cualesquiera

$$(d_{1,1}, \dots, d_{1,k_1}; c_1), \dots, (d_{n,1}, \dots, d_{n,k_n}; c_n)$$

- Para cada elemento $\sigma \in \Sigma_n$ una *acción*

$$\sigma^* : P(c_1, \dots, c_n; c) \longrightarrow P(c_{\sigma(1)}, \dots, c_{\sigma(n)}; c).$$

Además el producto composición es asociativo, equivariante y compatible con las unidades.

Definición 1.11. Sea P una opérada C-coloreada y Q una opérada D-coloreada. Un *morfismo de opéradas* $f\colon P \to Q$ consiste en una aplicaciones entre los conjuntos de colores $f\colon C \to D$ y aplicaciones

$$f_{c_1,\dots,c_n;c} : P(c_1, \dots, c_n; c) \longrightarrow Q(f(c_1), \dots, f(c_n); c)$$

compatibles con el producto composición, las unidades y la acción del grupo simétrico.

Denotaremos por Oper la categoría cuyos objetos son operadas coloreadas y cuyos morfismos son los morfismos de operadas coloreadas.

Ejemplo 1.12. Si $C = \{*\}$, entonces una opérada C-coloreada es lo mismo que una opérada. Si P es una opérad C-coloreada tal que solamente tiene operaciones de aridad uno, es decir $P(c_1, \dots, c_n; c) = \emptyset$ si $n \neq 1$, entonces P es una categoría, cuyo conjunto de objetos es C.

2. Conjuntos Simpliciales

2.1. Complejos simpliciales

Definición 2.1. N-simplex

Un n-simplex es un politopo de $n \geq 0$ dimensiones formando una envoltura convexa de $n+1$ vertices. Es decir, es un conjunto de puntos afines independientes en un espacio euclídeo de dimensión n.

Una cara m de un n-simplex es una envolutra convexa de $m \leq n$ vertices.

Definición 2.2. Complejo simplicial

Sea $n \in \mathbb{N}^*$, un complejo simplicial X es un conjunto finito de m-simplex con $m \leq n$ que cumplen las condiciones:

(1) Si m-simplex $\in X \Rightarrow \forall m' \leq m$, m'-simplex $\in X$.

(2) Si dos simplices de X se cortan, entonces su intersección es una cara común.

Sea X^k un complejo simplicial formado por todos los k-simplex de X. Observamos que todo elemento de X^k es un subconjunto de X^0 con cardinal $k+1$, donde $X^0 = \{v_0, \ldots, v_n\}$. Generalmente, todo subconjunto de X^k de $j+1$ elementos es un elemento de X^j.

Sea X_k un conjunto formado por k-simplices.

Definición 2.3. N-simplex ordenado

Un n-simplex formado por los vértices $v_0, \ldots, v_n \in X^0$ es ordenado cuando cuando los vértices estan ordenados, en ese caso nombramos cada vértice por los números $0, \ldots, n$. Usaremos la notación $|\Delta^n| = [0, \ldots, n]$ para simplificar.

2.1.1. Morfismos simpliciales

Definición 2.4. Morfismo simplicial

Sea K y L complejos simpliciales. Sea un morfismo simplicial $F : K \longrightarrow L$ que envia los vertices de K a los vertices de L. Es decir, $\forall v \in K^0$, $v \longmapsto F(v) \in L^0$.

Definición 2.5. Cara

Para todo $|\Delta^n|$ tenemos $n+1$ caras definidas por los morfismos $\delta_0, \ldots, \delta_n$

$$\delta_j : X_n \longrightarrow X_{n-1}$$
$$[0, \ldots, n] \longmapsto [0, \ldots, \hat{j}, \ldots, n]$$

Donde X_n y X_{n-1} son conjuntos de simplices ordenados de n y $n-1$ vértices, respectivamente. Observamos que $\forall i < j$, $\delta_i \delta_j = \delta_{j-1} \delta_i$.

Definición 2.6. Morifismo degenerativo

Para todo $|\Delta^n|$ tenemos $n+1$ morfismos degenerativos $\sigma_0, \ldots, \sigma_n$

$$\begin{aligned} \sigma_j : X_n &\longrightarrow X_{n+1} \\ [0, \ldots, n] &\longmapsto [0, \ldots, j, j, \ldots, n] \end{aligned}$$

Donde X_n y X_{n+1} son conjuntos de simplices ordenados de n y $n+1$ vértices, respectivamente. Observamos que $\forall i \leq j$, $\sigma_i \sigma_j = \sigma_{j+1} \sigma_i$.

2.2. Conjunto Delta

Definición 2.7. Conjunto Delta

Definimos un conjunto Delta como una secuencia de conjuntos $X_0, X_1, \ldots$ y para cada $n \geq 0$ las funciones $\delta_i : X_{n+1} \longrightarrow X_n$, $\forall 0 \leq i \leq n+1$, que cumplen $\delta_i \delta_j = \delta_{j-1} \delta_i$, $\forall i \leq j$. Formando el siguiente diagrama (Falta por hacer)

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, bend left] & X_1 \arrow[r, bend left] & X_2 \ldots \end{tikzcd}$$

2.2.1. Definición categórica del conjunto Delta

Definición 2.8. Categoría $\hat{\Delta}$

Sea la categoría $\hat{\Delta}$ cuyos objetos son los conjuntos estrictamente ordenados finitos $[n] = \{0, \ldots, n\}$ y los morfismos son las funciones, que mantienen el orden estrictamente, $f : [m] \longrightarrow [n]$, $m \leq n$. Podemos pensar que sea la inclusión de un m-simplex como cara de un n-simplex. Para todo $0 \leq i \leq n$ consideramos los morfismos:

$$\begin{aligned} d_i : [n] &\longrightarrow [n+1] \\ \{0, \ldots, n\} &\longmapsto \{0, \ldots, \hat{i}, \ldots, n+1\} \end{aligned}$$

Definición 2.9. Categoría $\hat{\Delta}^{op}$

Sea la categoría $\hat{\Delta}^{op}$, la categoría opuesta de $\hat{\Delta}$, cuyos objetos son los conjuntos estrictamente ordenados finitos $[n] = \{0, \ldots, n\}$ y los morfismos son las funciones, que mantienen el orden estrictamente, $f : [n] \longrightarrow [m]$, $m \leq n$. Podemos pensar que sea la extracción de la cara m-simplex de un n-simplex. Para todo $0 \leq i \leq n$ consideramos los morfismos:

$$\begin{aligned} \delta_i : [n] &\longrightarrow [n-1] \\ \{0, \ldots, n\} &\longmapsto \{0, \ldots, \hat{i}, \ldots, n\} \end{aligned}$$

Definición 2.10. Conjunto Delta

Un conjunto Delta es un functor covariante $X : \hat{\Delta}^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$, equivalentemente es un functor contravariante $X : \hat{\Delta} \longrightarrow \mathbf{Set}$.

Faltan observaciones.

2.3. Conjunto simplicial

Definición 2.11. Conjunto simplicial

Definimos un conjunto simplicial como una secuencia de conjuntos $X_0, X_1, \dots$ y para cada $n \geq 0$ las funciones $\delta_i : X_n \longrightarrow X_{n-1}$ y $\sigma_i : X_n \longrightarrow X_{n+1}$, $\forall 0 \leq i \leq n$, que cumplen:

(1) $\delta_i \delta_j = \delta_{j-1} \delta_i$, $i < j$

(2) $\delta_i \sigma_j = \sigma_{j-1} \delta_i$, $i < j$

(3) $\delta_j \sigma_j = \delta j + 1 \sigma_j = id$

(4) $\delta_i \sigma_j = \sigma_j \delta_{i-1}$, $i > j+1$

(5) $\sigma_i \sigma_j = \sigma_{j+1} \sigma_i, i \leq j$

Formando el siguiente diagrama (Falta por hacer)

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, bend left] & X_1 \arrow[r, bend left] & X_2 \dots \end{tikzcd}$$

2.3.1. Definición categórica del conjunto simplicial

Definición 2.12. Categoría Δ

Sea la categoría Δ cuyos objetos son los conjuntos ordenados finitos $[n] = \{0, \dots, n\}$ y los morfismos son las funciones, que mantienen solamente el orden, $f : [m] \longrightarrow [n]$. Para todo $0 \leq i \leq n$ consideramos los morfismos:

$$d_i : [n] \longrightarrow [n+1]$$
$$\{0, \dots, n\} \longmapsto \{0, \dots, \hat{i}, \dots, n+1\}$$

$$s_i : [n+1] \longrightarrow [n]$$
$$\{0, \dots, n+1\} \longmapsto \{0, \dots, i, i, \dots, n\}$$

Definición 2.13. Categoría $\hat{\Delta}^{op}$

Sea la categoría Δ^{op}, la categoría opuesta de Δ, cuyos objetos son los conjuntos ordenados finitos $[n] = \{0, \dots, n\}$ y los morfismos son las funciones, que mantienen solamente el orden, $f : [m] \longrightarrow [n]$. Para todo $0 \leq i \leq n$ consideramos los morfismos:

$$\delta_i : [n] \longrightarrow [n-1]$$
$$\{0, \dots, n\} \longmapsto \{0, \dots, \hat{i}, \dots, n\}$$

$$\sigma_i : [n] \longrightarrow [n+1]$$
$$\{0, \dots, n\} \longmapsto \{0, \dots, i, i, \dots, n\}$$

Definición 2.14. Conjunto simplicial

Un conjunto simplicial es un functor covariante $X : \Delta^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$, equivalentemente es un functor contravariante $X : \Delta \longrightarrow \mathbf{Set}$. Usaremos la notación $\Delta[n] = \Delta(\_, [n])$.

$$\begin{aligned} \Delta[n] : \Delta^{op} &\longrightarrow \mathbf{Set} \\ [m] &\longmapsto \Delta([m], [n]) \end{aligned}$$

Faltan observaciones.

2.4. Realización geométrica

Definición 2.15. Realización geométrica

Sea X un conjunto simplicial. Dotamos cada X_n con la topología discreta y sea $|\Delta^n$ el n-simplex dotado de su topología estandard. Definimos la realización geométrica como

$$|X| = \coprod_{n=0}^{\infty} X_n \times |\Delta^n| / \sim$$

Donde $\sim$ es la relación de equivalencia generada por las relaciones:

(1) $(x, d_i(p)) \sim (\delta_i(x), p)$, $x \in X_{n+1}$ y $p \in |\Delta^n|$

(2) $(x, s_i(p)) \sim (\sigma_i(x), p)$, $x \in X_{n-1}$ y $p \in |\Delta^n|$

Ejemplo 2.16. $\Delta[2] = \Delta(\_, [2])$

Falta por escribir

3. Conjuntos Dendroidales

3.1. Árbol como operadas

3.1.1. Formalismo de árboles

Un *árbol* es un grafo no vacío, finito, conectado y sin lazos. Llamaremos un *vértice exterior* si tiene solamente una arista adjunta. Todos los árboles que consideraremos tendrán *raíz*, es decir, para cada árbol existe un vértice exterior, llamado *output* o *salida*, donde se ve claramente que tiene un conjunto de vértices exteriores, llamado *inputs* o *entradas*. Este último conjunto puede ser vacío y no contiene el vértice output.

Para dibujar dichos árboles, borraremos los vértices output e inputs de la figura. De tal manera que los vértices restantes serán los *vértices* del árbol. Dado un árbol T, definimos el conjunto de vértices como $V(T)$ y el conjunto de aristas como $E(T)$.

Llamaremos *hojas* a las aristas adjuntas de los vértices inputs y *raíz* a la arista adjunta del vértice output. De tal manera que las aristas restantes las llamaremos *aristas interiores*. Podemos observar que existe una dirección clara en cada árbol, desde las hojas hasta la raíz.

Sea v un vértice de un árbol finito con raíz, definimos $\mathrm{out}(v)$ como la única arista de salida y $\mathrm{in}(v)$ como el conjunto de aristas de entrada, observamos que este último conjunto puede ser vacío. Llamaremos la *valencia* de v a la cardinalidad del conjunto $\mathrm{in}(v)$.

Finalmente, consideramos a la siguiente figura como un árbol de ejemplo:

3.1.2. Árboles planares

Definición 3.1. Un *árbol planar con raíz* es un árbol con raíz T dotado con un orden lineal del conjunto $\mathrm{in}(v)$ para cada v de T.

Observación 3.2. El orden de los conjuntos $\mathrm{in}(v)$ se obtiene de la idea de dibujar los árboles en un plano. Es decir, para dibujar un árbol siempre pondremos la raíz debajo y las hojas arriba con un orden trivial. Observamos con esta técnica que tendremos varias representaciones planares del mismo árbol. Por ejemplo,

Definición 3.3. Un árbol es *unitario* cuando la arista de entrada y salida son la misma. En ese caso lo denotaremos como η.

Definición 3.4. Sea T un árbol planar con raíz. Denotaremos una opérada coloreada no-simétrica generada por T como $\Omega_p(T)$. El conjunto de colores de $\Omega_p(T)$ es el conjunto de aristas $E(T)$ de T y las operaciones son generadas por los vértices del árbol. Es decir, para cada vértice v con entradas $e_1, \ldots, e_n$ y salida e, definimos una operación $v \in \Omega_p(T)(e_1, \ldots, e_n; e)$. Las otras operaciones son las operaciones unitarias y las operaciones obtenidas por composición.

Observación 3.5. Para todo $e_1, \ldots, e_n, e$, el conjunto de operaciones $\Omega_p(T)(e_1, \ldots, e_n; e)$ contiene como mucho un solo elemento.

Ejemplo 3.6. Vamos a realizar la descripción completa del siguiente árbol T:

La operada $\Omega_p(T)$ tiene seis colores *a, b, c, d, e,* y *f*. Las operaciones generadoras son $v \in \Omega_p(T)(e, f; b)$, $w \in \Omega_p(T)(\_; d)$ y $r \in \Omega_p(T)(b, c, d; a)$. Mientras que las otras operaciones son las operaciones unitarias $1_a, 1_b, \ldots, 1_f$ y las operaciones composición $r \circ_1 v \in \Omega_p(T)(e, f, c, d; a)$, $r \circ_2 w \in \Omega_p(T)(b, c; a)$ y

$$(r \circ_1 v) \circ_3 w = (r \circ_2 w) \circ_1 v \in \Omega_p(T)(e, f, c; a)$$

Definición 3.7. La *categoría de árboles planares con raíz* Ω_p es la subcategoría completa|llena de la categoría de opéradas coloreadas no-simétricas cuyos objetos son $\Omega_p(T)$ para todo árbol T.

Podemos pensar que Ω_p es una categoría cuyos objetos son árboles planares con raíz. Sean S y T dos árboles planares con raíz, el conjunto de morfismos $\Omega_p(S, T)$ es dado por los morfismos entre opéradas coloreadas no-simétricas de $\Omega_p(S)$ a $\Omega_p(T)$.

Observación 3.8. La categoría Ω_p extiende la categoría simplicial Δ. Para todo $n \geq 0$ se define un *árbol lineal* L_n como un árbol planar con $n+1$ aristas y n vértices $v_1, \ldots, v_n$, donde la valencia de todos los vértices es uno.

Denotaremos este árbol por $[n]$. Toda apliación que mantiene el orden de manera que envíe $\{0, \ldots, n\}$ a $\{0, \ldots, m\}$, define un morfismo $[n] \to [m]$ en la categoría Ω_p. De esta manera obtenemos el siguiente funtor

$$\Delta \xhookrightarrow{i} \Omega_p$$

Este funtor es plenamente fiel. Es decir, para toda flecha $S \to T$ en Ω_p, si T es lineal entonces S también lo es. (Falta demostración)

3.2. Morfismos en Ω_p

En las siguientes secciones vamos a tratar con todos los tipos de morfismos en Ω_p y dar una descripción más explícita.

3.2.1. Caras

3.2.2. Funciones degenerativas

3.2.3. Identidades de morfismos

3.3. Árboles no planares

3.4. Conjunto Dendroidal

3.5. Producto tensorial de conjuntos dendroidales

3.5.1. Producto tensorial Boardman Vogt

3.5.2. Producto Producto tensorial de conjuntos dendroidales

4. Injertos de árboles

4.1. Producto tensorial de árboles lineales

4.2. Producto tensorial de árboles

4.2.1. Injertos de árboles resultantes

4.3. Cálculo de árboles resultantes

4.3.1. Conjunto de árboles resultantes

4.3.2. Generarador de árboles en Python

5. Conclusiones

Referencias

[1] Batut, C.; Belabas, K.; Bernardi, D.; Cohen, H.; Olivier, M.: User's guide to *PARI-GP*, `pari.math.u-bordeaux.fr/pub/pari/manuals/2.3.3/users.pdf`, 2000.

[2] Chen, J. R.; Wang, T. Z.: On the Goldbach problem, *Acta Math. Sinica*, 32(5):702-718, 1989.

[3] Deshouillers, J. M.: Sur la constante de Šnirel′man, *Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 17e année: (1975/76), Théorie des nombres: Fac. 2, Exp. No.* G16, pág. 6, Secrétariat Math., Paris, 1977.

[4] Deshouillers, J. M.; Effinger, G.; te Riele, H.; Zinoviev, D.: A complete Vinogradov 3-primes theorem under the Riemann hypothesis, *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.*, 3:99-104, 1997.

[5] Dickson, L. E.: *History of the theory of numbers. Vol. I: Divisibility and primality*, Chelsea Publishing Co., New York, 1966.

[6] Hardy, G. H.; Littlewood, J. E.: Some problems of 'Partitio numerorum'; III: On the expression of a number as a sum of primes, *Acta Math.*, 44(1):1-70, 1923.

[7] Hardy, G. H.; Ramanujan, S.: Asymptotic formulae in combinatory analysis, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 17:75-115, 1918.

[8] Hardy, G. H.; Wright, E. M.: *An introduction to the theory of numbers*, 5a edición, Oxford University Press, 1979.

[9] Helfgott, H. A.: Minor arcs for Goldbach's problem, `arXiv:1205.5252v4 [math.NT]`, diciembre de 2013.

[10] Helfgott, H. A.: Major arcs for Goldbach's problem, `arXiv:1305.2897v4 [math.NT]`, abril de 2014.

[11] Helfgott, H. A.: The ternary Goldbach conjecture is true, `arXiv:1312.7748v2 [math.NT]`, enero de 2014.

[12] Helfgott, H. A.; Platt, D.: Numerical verification of the ternary Goldbach conjecture up to $8{,}875 \cdot 10^{30}$, `arXiv:1305.3062v2 [math.NT]`, abril de 2014.

[13] Klimov, N. I.; Pil′tjaĭ, G. Z.; Šeptickaja, T. A.: An estimate of the absolute constant in the Goldbach-Šnirel′man problem, *Studies in number theory, No. 4*, págs. 35-51, Izdat. Saratov. Univ., Saratov, 1972.

[14] Liu, M. C.; Wang, T.: On the Vinogradov bound in the three primes Goldbach conjecture, *Acta Arith.*, 105(2):133-175, 2002.

[15] Oliveira e Silva, T.; Herzog, S.; Pardi, S.: Empirical verification of the even Goldbach conjecture and computation of prime gaps up to $4 \cdot 10^{18}$, *Math. Comp.*, 83:2033-2060, 2014.

[16] Ramaré, O.: On Šnirel′man's constant, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, 22(4):645-706, 1995.

[17] Riesel, H.; Vaughan, R. C.: On sums of primes, *Ark. Mat.*, 21(1):46-74, 1983.

[18] Rosser, J. B.; Schoenfeld, L.: Approximate formulas for some functions of prime numbers, *Illinois J. Math.*, 6:64-94, 1962.

[19] Schnirelmann, L.: Über additive Eigenschaften von Zahlen, *Math. Ann.*, 107(1):649-690, 1933.

[20] Tao, T.: Every odd number greater than 1 is the sum of at most five primes, *Math. Comp.*, 83:997-1038, 2014.

[21] Travesa, A.: *Aritmètica*, Cołecció UB, No. 25, Barcelona, 1998.

[22] Vaughan, R. C.: On the estimation of Schnirelman's constant, *J. Reine Angew. Math.*, 290:93-108, 1977.

[23] Vaughan, R. C.: *The Hardy-Littlewood method*, Cambridge Tracts in Mathematics, No. 125, 2a edición, Cambridge University Press, 1997.

[24] Vinogradov, I. M.: Sur le théorème de Waring, *C. R. Acad. Sci. URSS*, 393-400, 1928.

[25] Vinogradov, I. M.: Representation of an odd number as a sum of three primes, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 15:291-294, 1937.