GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Aspectos combinatorios del producto tensorial de conjuntos dendroidales

Autor: Roger Brascó Garcés

Director: Dr. Javier J. Gutiérrez

Realitzat a: Departament de Topología

Barcelona, 23 de enero de 2022

Resumen

2010 Mathematics Subject Classification. 11G05, 11G10, 14G10

Agradecimientos

Índice

1. Nociones previas

1.1. Categorías

Definición 1.1. *Categoría*

Una categoría is una cuadrúpula $\mathbf{A} = (\mathcal{O}, \hom, id, \circ)$ que consiste en:

(1) Una clase $\mathcal{O}$ que sus elementos serán llamados **A-objetos**. Usaremos la notación $Ob(\mathbf{A})$ oara simplificar.

(2) Para cada pareja de objetos (A, B) de $\mathbf{A}$, tenemos un conjunto de $\hom(A, B)$, cuyos elementos serán llamados **A-morfismos** de A a B; és decir, los morfismos $A \xrightarrow{f} B$ para todo $f \in \hom(A, B)$.

(3) Para cada objeto A de $\mathbf{A}$ definimos el morfismo $A \xrightarrow{id_A} A$ como la identidad A.

(4) Sean $A \xrightarrow{f} B$ y $B \xrightarrow{g} C$ dos morifismos de $\mathbf{A}$, definimos la composición $\circ$ como:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Composición que cumple con las siguientes condiciones:

(a) Es asociativa: sean $A \xrightarrow{f} B$, $B \xrightarrow{g} C$ y $C \xrightarrow{h} D$ morifismos de $\mathbf{A}$, entonces se cumple $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

(b) Respecta la identidad: para todo morfismo $A \xrightarrow{f} B$ de $\mathbf{A}$, se cumple $id_B \circ f = f$ y $f \circ id_A = f$.

Ejemplo 1.2. Categoría **Set** cuyos objetos son todos los conjuntos y los morfismos son las funciones totales.

Definición 1.3. *Categoría opuesta*

Para toda categoría $\mathbf{A} = (\mathcal{O}, \hom_{\mathbf{A}}, id, \circ)$ definimos la categoría opuesta como $\mathbf{A}^{\mathrm{op}} = (\mathcal{O}, \hom_{\mathbf{A}^{\mathrm{op}}}, id, \circ^{\mathrm{op}})$, donde $\hom_{\mathbf{A}^{\mathrm{op}}}(A, B) = \hom_{\mathbf{A}}(B, A)$ y $f \circ^{\mathrm{op}} g = g \circ f$. Podemos observar que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^{\mathrm{op}}$ tienen los mismos objetos y los mismos morfismos pero cambiados de dirección.

1.1.1. Functores

Definición 1.4. *Functor*

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos categorías, definimos un functor F de $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ como una función que asigna cada objeto $A \in Ob(\mathbf{A})$ un objeto $F(A) \in Ob(\mathbf{B})$, y para cada morfismo de $\mathbf{A}$ $A \xrightarrow{f} A'$ un morfismo de $\mathbf{B}$ $F(A) \xrightarrow{F(f)} F(A')$.

$$\begin{aligned} F : \mathbf{A} &\longrightarrow \mathbf{B} \\ A &\longmapsto F(A) \\ f &\longmapsto F(f) \end{aligned}$$

De manera que:

(1) F conserva la composición: $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$, siempre y cuando $f \circ g$ esté bien definido.

(2) F conserva los morfismos identidad: $F(id_A) = id_{F(A)}$, para cada $A \in Ob(\mathbf{A})$.

1.2. Operadas

1.2.1. Operadas coloradas

2. Conjuntos Simpliciales

2.1. Complejos simpliciales

2.1.1. Morfismos simpliciales

2.2. Conjuntos Delta

2.2.1. Morfismos Delta

2.3. Conjunto simplicial

3. Conjuntos Dendroidales

3.1. Árbol como operadas

3.1.1. Caras

3.1.2. Funciones degenerativas

3.1.3. Identidades de morfismos

3.1.4. Árboles no planares

3.2. Conjunto Dendroidal

3.3. Producto tensorial de conjuntos dendroidales

3.3.1. Producto tensorial Boardman Vogt

3.3.2. Producto Producto tensorial de conjuntos dendroidales

4. Injertos de árboles

4.1. Producto tensorial de árboles lineales

4.2. Producto tensorial de árboles

4.2.1. Injertos de árboles resultantes

4.3. Cálculo de árboles resultantes

4.3.1. Conjunto de árboles resultantes

4.3.2. Generarador de árboles en Python

5. Conclusiones

Referencias

[1] Batut, C.; Belabas, K.; Bernardi, D.; Cohen, H.; Olivier, M.: User's guide to *PARI-GP*,
`pari.math.u-bordeaux.fr/pub/pari/manuals/2.3.3/users.pdf`, 2000.

[2] Chen, J. R.; Wang, T. Z.: On the Goldbach problem, *Acta Math. Sinica*, 32(5):702-718, 1989.

[3] Deshouillers, J. M.: Sur la constante de Šnirel′man, *Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 17e année: (1975/76), Théorie des nombres: Fac. 2, Exp. No.* G16, pág. 6, Secrétariat Math., Paris, 1977.

[4] Deshouillers, J. M.; Effinger, G.; te Riele, H.; Zinoviev, D.: A complete Vinogradov 3-primes theorem under the Riemann hypothesis, *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.*, 3:99-104, 1997.

[5] Dickson, L. E.: *History of the theory of numbers. Vol. I: Divisibility and primality*, Chelsea Publishing Co., New York, 1966.

[6] Hardy, G. H.; Littlewood, J. E.: Some problems of 'Partitio numerorum'; III: On the expression of a number as a sum of primes, *Acta Math.*, 44(1):1-70, 1923.

[7] Hardy, G. H.; Ramanujan, S.: Asymptotic formulae in combinatory analysis, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 17:75-115, 1918.

[8] Hardy, G. H.; Wright, E. M.: *An introduction to the theory of numbers*, 5a edición, Oxford University Press, 1979.

[9] Helfgott, H. A.: Minor arcs for Goldbach's problem,
`arXiv:1205.5252v4 [math.NT]`, diciembre de 2013.

[10] Helfgott, H. A.: Major arcs for Goldbach's problem,
`arXiv:1305.2897v4 [math.NT]`, abril de 2014.

[11] Helfgott, H. A.: The ternary Goldbach conjecture is true,
`arXiv:1312.7748v2 [math.NT]`, enero de 2014.

[12] Helfgott, H. A.; Platt, D.: Numerical verification of the ternary Goldbach conjecture up to $8{,}875 \cdot 10^{30}$, `arXiv:1305.3062v2 [math.NT]`, abril de 2014.

[13] Klimov, N. I.; Pil′tjaĭ, G. Z.; Šeptickaja, T. A.: An estimate of the absolute constant in the Goldbach-Šnirel′man problem, *Studies in number theory, No. 4*, págs. 35-51, Izdat. Saratov. Univ., Saratov, 1972.

[14] Liu, M. C.; Wang, T.: On the Vinogradov bound in the three primes Goldbach conjecture, *Acta Arith.*, 105(2):133-175, 2002.

[15] Oliveira e Silva, T.; Herzog, S.; Pardi, S.: Empirical verification of the even Goldbach conjecture and computation of prime gaps up to $4 \cdot 10^{18}$, *Math. Comp.*, 83:2033-2060, 2014.

[16] Ramaré, O.: On Šnirel′man's constant, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, 22(4):645-706, 1995.

[17] Riesel, H.; Vaughan, R. C.: On sums of primes, *Ark. Mat.*, 21(1):46-74, 1983.

[18] Rosser, J. B.; Schoenfeld, L.: Approximate formulas for some functions of prime numbers, *Illinois J. Math.*, 6:64-94, 1962.

[19] Schnirelmann, L.: Über additive Eigenschaften von Zahlen, *Math. Ann.*, 107(1):649-690, 1933.

[20] Tao, T.: Every odd number greater than 1 is the sum of at most five primes, *Math. Comp.*, 83:997-1038, 2014.

[21] Travesa, A.: *Aritmètica*, Cołecció UB, No. 25, Barcelona, 1998.

[22] Vaughan, R. C.: On the estimation of Schnirelman's constant, *J. Reine Angew. Math.*, 290:93-108, 1977.

[23] Vaughan, R. C.: *The Hardy-Littlewood method*, Cambridge Tracts in Mathematics, No. 125, 2a edición, Cambridge University Press, 1997.

[24] Vinogradov, I. M.: Sur le théorème de Waring, *C. R. Acad. Sci. URSS*, 393-400, 1928.

[25] Vinogradov, I. M.: Representation of an odd number as a sum of three primes, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 15:291-294, 1937.