



# El producto tensorial de conjuntos dendroidales

---

Roger Brascó Garcés

9 de Febrero de 2022

Departamento de Matemáticas e Informàtica  
Universidad de Barcelona

# Introducción

1. Nociones previas
2. Árboles como operadas
3. Conjuntos dendroidales
4. Producto tensorial
5. Conjunto de shuffles

# Nociones previas

- Categorías
- Funtores
- Opéradas coloreadas

## Definición

Una *opérada*  $P$  consiste en una sucesión de conjuntos  $\{P(n)\}_{n \geq 0}$  junto con la siguiente estructura:

- Un elemento *unidad*  $1 \in P(1)$ .
- Un *producto composición*

$$P(n) \times P(k_1) \times \cdots \times P(k_n) \longrightarrow P(k)$$

para cada  $n$  y  $k_1, \dots, k_n$  tal que  $k = \sum_{i=1}^n k_i$ .

- Para cada  $\sigma \in \Sigma_n$  una *acción por la derecha*  $\sigma^*: P(n) \rightarrow P(n)$ .

Además el producto composición es asociativo, equivariante y compatible con la unidad.

## Definición

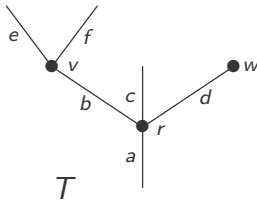
Sea  $P$  una opérada  $C$ -coloreada y  $Q$  una opérada  $D$ -coloreada. Un *morfismo de opéradas*  $f: P \rightarrow Q$  consiste en una aplicación entre los conjuntos de colores  $f: C \rightarrow D$  y aplicaciones

$$f_{c_1, \dots, c_n; c} : P(c_1, \dots, c_n; c) \longrightarrow Q(f(c_1), \dots, f(c_n); c)$$

compatibles con el producto composición, las unidades y la acción del grupo simétrico.

# Formalismo de árboles

Sea  $T$  el siguiente árbol:



# Árboles como opéradas coloreadas

## Definición

Sea  $T$  un árbol planar con raíz. Denotaremos la opérada coloreada no-simétrica generada por  $T$  como  $\Omega_p(T)$ .

## Definición

Sea  $T$  un árbol con raíz. Denotaremos la opérada coloreada simétrica generada por  $T$  como  $\Omega(T)$ .

## Definición

La *categoría de árboles planares con raíz*  $\Omega_p$  es la subcategoría plena de la categoría de opéradas coloreadas no-simétricas cuyos objetos son  $\Omega_p(T)$  para cada árbol  $T$ .

## Definición

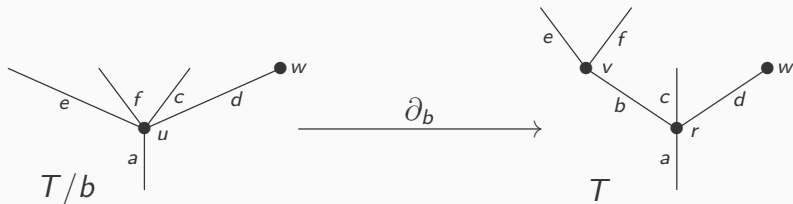
La *categoría de árboles con raíz*  $\Omega$  es la subcategoría plena de la categoría de opéradas coloreadas cuyos objetos son  $\Omega(T)$  para todo árbol  $T$ .



# Morfismos en $\Omega_p$ y $\Omega$

## Ejemplo

Cara interna



## Definición

La categoría  $dSets$  de *conjuntos dendroidales* es la categoría de prehaces en  $\Omega$ . Los objetos son funtores  $\Omega^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$  y los morfismos vienen dados por las transformaciones naturales.

El conjunto  $X_T$  lo llamaremos conjunto de *déndrices con forma  $T$* .

# Nervio dendroidal

El funtor  $\Omega \rightarrow \mathcal{O}per$  que envía un árbol  $T$  a la opéxada coloreada  $\Omega(T)$  induce, por extensión de Kan, la siguiente adjunción

$$\tau_d: dSets \rightleftarrows \mathcal{O}per: N_d$$

El funtor  $N_d$  se llama *nervio dendroidal*. Para toda opéxada  $P$ , su nervio dendroidal es el conjunto dendroidal

$$N_d(P)_T = \mathcal{O}per(\Omega(T), P)$$

Este funtor es plenamente fiel y  $N_d(\Omega(T)) = \Omega[T]$  para cada árbol  $T$  en  $\Omega$ .

# Producto tensorial de Boardman–Vogt

## Definición

Sea  $P$  una opéada simétrica  $C$ -coloreada, y sea  $Q$  una opéada simétrica  $D$ -coloreada. El *producto tensorial de Boardman–Vogt*  $P \otimes_{BV} Q$  es una opéada  $(C \times D)$ -coloreada definida en terminos de generadores y relaciones de la siguiente manera. Para cada color  $d \in D$  y cada operación  $p \in P(c_1, \dots, c_n; c)$  existe un generador

$$p \otimes d \in P \otimes_{BV} Q((c_1, d), \dots, (c_n, d); (c, d))$$

De manera análoga, para cada color  $c \in C$  y cada operación  $q \in Q(d_1, \dots, d_m; d)$ .

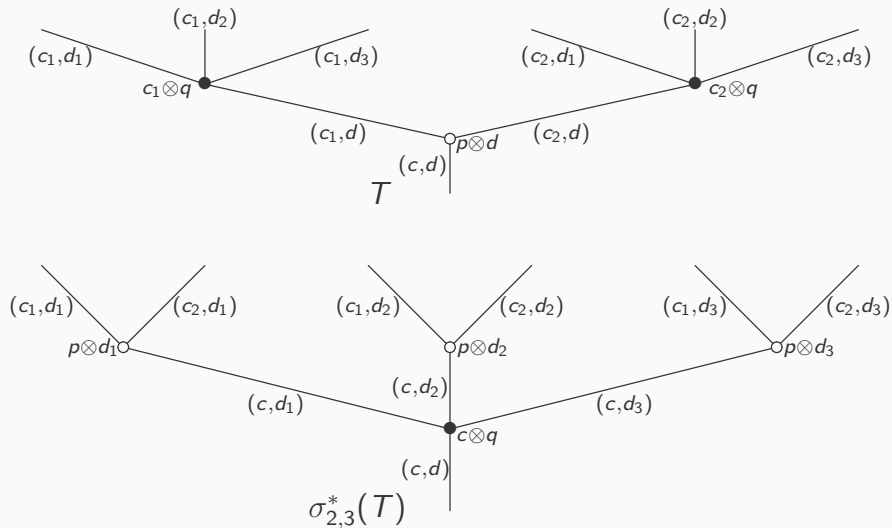
# Producto tensorial de Boardman–Vogt

Estos generadores están sujetos a cinco relaciones:

- (i)  $(p \otimes d) \circ ((p_1 \otimes d), \dots, (p_n \otimes d)) = (p \circ (p_1, \dots, p_n)) \otimes d.$
- (ii)  $\sigma^*(p \otimes d) = (\sigma^*p) \otimes d$ , para cada  $\sigma \in \Sigma_n$ .
- (iii)  $(c \otimes q) \circ ((c \otimes q_1), \dots, (c \otimes q_m)) = c \otimes (q \circ (q_1, \dots, q_m)).$
- (iv)  $\sigma^*(c \otimes q) = c \otimes (\sigma^*q)$ , para cada  $\sigma \in \Sigma_m$ .
- (v)  $\sigma_{n,m}^*((p \otimes d) \circ ((c_1 \otimes q), \dots, (c_n \otimes q))) = (c \otimes q) \circ ((p \otimes d_1), \dots, (p \otimes d_m)),$   
donde  $\sigma_{n,m} \in \Sigma_{nm}$  es una permutación.

# Relación de intercambio

## Ejemplo



# Producto tensorial de conjuntos dendroidales

## Definición

Para todo par de árboles  $T$  y  $S$  en  $\Omega$ , el *producto tensorial* de los representables  $\Omega[T]$  y  $\Omega[S]$  se define como

$$\Omega[T] \otimes \Omega[S] = N_d(\Omega(T) \otimes_{BV} \Omega(S))$$

# Producto tensorial de conjuntos dendroidales

## Definición

Sean  $X$  e  $Y$  dos conjuntos dendroidales y sea  $X = \lim_{\rightarrow} \Omega[T]$  y  $Y = \lim_{\rightarrow} \Omega[S]$  sus expresiones canónicas como colímites de representables. Entonces, definimos el *producto tensorial*  $X \otimes Y$  como

$$X \otimes Y = \lim_{\rightarrow} \Omega[T] \otimes \lim_{\rightarrow} \Omega[S] = \lim_{\rightarrow} N_d(\Omega(T) \otimes_{BV} \Omega(S))$$



# Producto tensorial de conjuntos dendroidales

## Teorema

*La categoría de conjuntos dendroidales admite una estructura monoidal, simétrica y cerrada. Esta estructura monoidal está únicamente determinada (salvo isomorfismo) por la propiedad de que existe un isomorfismo natural*

$$\Omega[T] \otimes \Omega[S] \cong N_d(\Omega(T) \otimes_{BV} \Omega(S))$$

*para cada par  $T$  y  $S$  de objetos de  $\Omega$ . La unidad del producto tensorial es el conjunto dendroidal representable  $\Omega[\eta]$ , donde  $\eta$  es el árbol unitario.*

## Definición

Sea  $S$  y  $T$  dos objetos de  $\Omega$ . Un *shuffle* de  $S$  y  $T$  es un árbol  $R$  cuyo conjunto de aristas es un subconjunto de  $E(S) \times E(T)$ . La raíz de  $R$  es  $(a, x)$ , donde  $a$  es la raíz de  $S$  y  $x$  es la raíz de  $T$ , y sus hojas son todos los pares  $(l_S, l_T)$ , donde  $l_S$  es una hoja de  $S$  y  $l_T$  es una hoja de  $T$ . Los vértices son de la forma



# Conjunto de shuffles

## Proposición

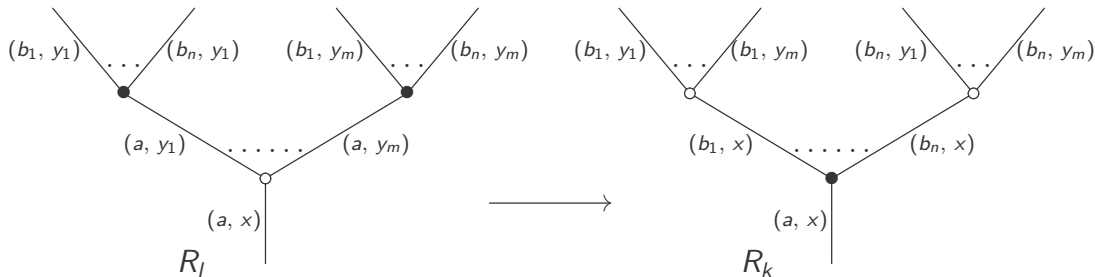
*El número de shuffles  $sh(S, T)$  de dos árboles  $S$  y  $T$  satisface tres propiedades:*

- (i) Simétrico:  $sh(S, T) = sh(T, S)$*
- (ii) Unitario: Si  $T$  es un árbol unitario  $\eta$ , entonces  $sh(S, \eta) = 1$*
- (iii) Inducción: Si  $S = C_n[S_1, \dots, S_n]$  y  $T = C_m[T_1, \dots, T_m]$ , entonces*

$$sh(S, T) = \prod_{i=1}^n sh(S_i, T) + \prod_{j=1}^m sh(S, T_j)$$

# Estructura de orden parcial

Existen los *shuffles intermediarios*  $R_k$  ( $1 < k < N$ ) entre  $R_1$  y  $R_N$ .



Si un shuffle  $R_k$  se obtiene the otro shuffle  $R_l$  mediante la norma de arriba, entonces  $R_l \leq R_k$ .

# Producto tensorial de árboles

## Lema

*Para todo shuffle  $R_i$  de  $S$  y  $T$  tenemos un monomorfismo*

$$m: \Omega[R_i] \hookrightarrow \Omega[S] \otimes \Omega[T]$$

## Corolario

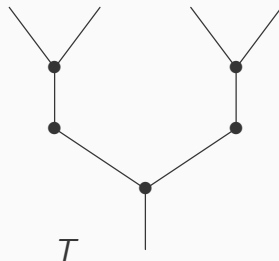
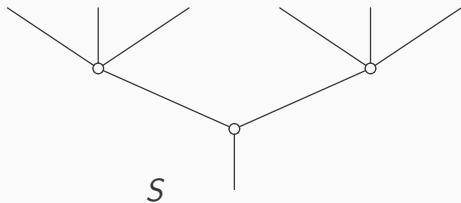
*Para todo objeto  $T$  y  $S$  en  $\Omega$ , tenemos que*

$$\Omega[S] \otimes \Omega[T] = \bigcup_{i=1}^N m(R_i)$$

# Generar shuffles en Python

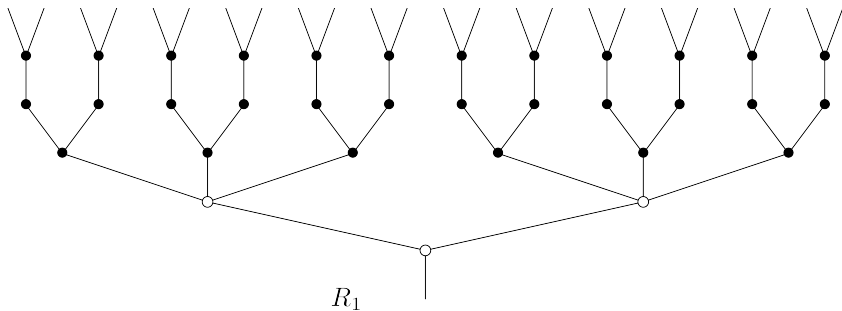
## Ejemplo

Para acabar esta sección, pondremos un ejemplo para enseñar la utilidad del paquete. Sean  $S$  y  $T$  los árboles



# Generar shuffles en Python

El conjunto de shuffles resultante sería



**Gracias por vuestra atención**