Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRADO EN MATEMÁTICAS

Trabajo final de grado

Aspectos combinatorios del producto tensorial de conjuntos dendroidales

Autor: Roger Brascó Garcés

Director: Dr. Javier J. Gutiérrez

Realizado en: Departamento de Matemáticas e Informática

Barcelona, 24 de enero de 2022

Resumen

2010 Mathematics Subject Classification. 11G05, 11G10, 14G10

Agradecimientos

Contents

1 Nociones previas **1**

1.1 Categorías . . . 1

1.1.1 Funtores . . . 1

1.2 Opéradas en conjuntos . . . 2

1.2.1 Opéradas coloreadas . . . 3

2 Conjuntos Simpliciales **4**

2.1 Complejos simpliciales . . . 4

2.1.1 Morfismos simpliciales . . . 4

2.2 Conjunto Delta . . . 5

2.2.1 Definición categórica del conjunto Delta . . . 5

2.3 Conjunto simplicial . . . 6

2.3.1 Definición categórica del conjunto simplicial . . . 6

2.4 Realización geométrica . . . 7

3 Conjuntos Dendroidales **8**

3.1 Árboles como opéradas . . . 8

3.1.1 Formalismo de árboles . . . 8

3.1.2 Árboles planares . . . 8

3.2 Morfismos en Ω_p . . . 10

3.2.1 Caras . . . 10

3.2.2 Degeneraciones . . . 11

3.2.3 Identidades dendroidales . . . 11

3.3 Árboles no planares . . . 13

3.3.1 Prehaz de estructuras planares . . . 15

3.3.2 Relación con la categoría simplicial . . . 15

3.4 Conjuntos Dendroidales . . . 15

3.5 Producto tensorial de conjuntos dendroidales . . . 18

3.5.1 Producto tensorial Boardman-Vogt . . . 18

3.5.2 Producto tensorial de conjuntos dendroidales . . . 19

4 Shuffle de árboles (Naipear, Barajear o mezclar?) **21**

4.1 Producto tensorial de árboles lineales . . . 21

4.2 Producto tensorial de árboles . . . 21

4.2.1 Conjunto de shuffles . . . 21

4.3 Shuffle de árboles en Python . . . 25

5 Conclusiones **27**

1 Nociones previas

1.1 Categorías

Definición 1.1. Una *categoría* $\mathcal{C}$ consiste en:

- Una clase $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, cuyos elementos llamaremos *objetos* de la categoría.
- Para cada par de objectos $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ un conjunto $\mathcal{C}(A, B)$ de *morfismos* o *flechas* de A a B.
- Para cada tres objectos $A, B, C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ una *función de composición*

$$\mathcal{C}(B, C) \times \mathcal{C}(A, B) \xrightarrow{\circ} \mathcal{C}(A, C)$$

  que envía el par (g, f) a $g \circ f$.
- Para cada objeto A, un elemento $\mathrm{id}_A \in \mathcal{C}(A, A)$ que llamaremos la *identidad* en A.

Además, esta estructura cumple los siguientes axiomas:

- *Asociatividad.* La función de composición es asociativa, esto es, dados $f \in \mathcal{C}(A, B)$, $g \in \mathcal{C}(B, C)$ y $h \in \mathcal{C}(C, D)$, se cumple que $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.
- *Unidad.* La identidad es un elemento neutro para la composición, es decir, para toda $f \in \mathcal{C}(A, B)$ tenemos que $f \circ \mathrm{id}_A = f = \mathrm{id}_B \circ f$.

A menudo, denotaremos un objecto A de $\mathcal{C}$ como $A \in \mathcal{C}$, en vez de $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ y un morfismo $f \in \mathcal{C}(A, B)$ como $f \colon A \to B$. Una categoría $\mathcal{C}$ es *pequeña* si $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ es un conjunto.

Ejemplo 1.2. Los siguientes son algunos ejemplos de categorías.

(i) La categoría Set cuyos objetos son todos los conjuntos y cuyos morfismos son la aplicaciones entre conjuntos

(ii) La categoría Grp cuyos objetos son los grupos y cuyos morfismos son los morfismos de grupo.

(iii) La categoría Top cuyos objetos son los espacios topológicos y cuyos morfismos son las aplicaciones continuas.

Definición 1.3. Dada una categoría $\mathcal{C}$, podemos definir su *categoría opuesta* $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ de la siguiente manera. Los objectos de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ son los mismos que los de $\mathcal{C}$, los morfismos cambian de dirección $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(A, B) = \mathcal{C}(B, A)$ y la función de composición es $f \circ^{\mathrm{op}} g = g \circ f$.

1.1.1 Funtores

Definición 1.4. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías. Un *funtor* F de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$, que denotaremos por $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ consiste en:

- Una aplicación $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$. La imagen de un objeto A de $\mathcal{C}$ la denotaremos por $F(A)$

- Para cada par de objetos $A, B \in \mathcal{C}$ una aplicación
$$\mathcal{C}(A,B) \longrightarrow \mathcal{D}(F(A), F(B)).$$
La imagen de un morfismo $f\colon A \to B$ por esta aplicación la denotaremos por $F(f)\colon F(A) \to F(B)$.

Además, estas aplicaciones son compatibles con la composición y la unidad, esto es, se cumplen los siguientes axiomas:

- Dados $f \in \mathcal{C}(A,B)$ y $g \in \mathcal{C}(B,C)$ se cumple que $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.
- Para todo objeto $A \in \mathcal{C}$ se cumple que $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$.

Observación 1.5. La noción de funtor que acabamos se llama también *funtor covariante* de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$. Un funtor de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ en $\mathcal{D}$ se llama *functor contravariante* de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$. Observar que si F es un funtor contravariante de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$ y $f\colon A \to B$ es un morfismo en $\mathcal{C}$, entonces $F(f)\colon F(B) \to F(A)$.

Ejemplo 1.6. Dado un conjunto X cualquiera, podemos construir el grupo libre en los elementos de este conjunto $F(X)$. Esto define un funtor $F\colon \mathrm{Set} \to \mathrm{Grp}$.

Definición 1.7. Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor entre dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$. Dados un par de objetos $A, B \in \mathcal{C}$ consideremos la aplicación
$$F_{A,B}\colon \mathcal{C}(A,B) \longrightarrow \mathcal{D}(F(A), F(B)).$$

- Diremos que F es un funtor *fiel* si para cada par de objetos $A, B \in \mathcal{C}$ la aplicación $F_{A,B}$ es inyectiva.
- Diremos que F es un funtor *pleno* si para cada par de objetos $A, B \in \mathcal{C}$ la aplicación $F_{A,B}$ es exhaustiva.
- Diremos que F es un funtor *plenamente fiel* si para cada par de objetos $A, B \in \mathcal{C}$ la aplicación $F_{A,B}$ es biyectiva.

1.2 Opéradas en conjuntos

Para cada $n \geq 0$, denotaremos por Σ_n el grupo simétrico de n letras (en el caso $n = 0, 1$, Σ_n será el grupo trivial).

Definición 1.8. Una *opérada* P consiste en una sucesión de conjuntos $\{P(n)\}_{n\geq 0}$ junto con la siguiente estructura:

- Un elemento *unidad* $1 \in P(1)$.
- Un *producto composición*
$$P(n) \times P(k_1) \times \cdots \times P(k_n) \longrightarrow P(k)$$
para cada n y $k_1, \ldots, k_n$ tal que $k = \sum_{i=1}^{n} k_i$.
- Para cada $\sigma \in \Sigma_n$ una *acción por la derecha* $\sigma^*\colon P(n) \to P(n)$.

Además el producto composición es asociativo, equivariante y compatible con la unidad.

Definición 1.9. Dadas dos opéradas P y Q, un morfismo de opéradas $f\colon P \to Q$ consiste en aplicaciones $f_n\colon P(n) \to Q(n)$ para cada $n \geq 0$ compatibles con el producto composición, la unidad y la acción del grupo simétrico.

1.2.1 Opéradas coloreadas

La noción de opérada coloreada generaliza a la vez el concepto de categoría y de opérada.

Definición 1.10. Sea C un conjunto, cuyos elementos llameremos colores. Una opérada C-coloreada P consiste en, para cada $(n+1)$-tupla de colores $(c_1, \ldots, c_n, c)$ con $n \geq 0$, un conjunto $P(c_1, \ldots, c_n; c)$ (que representará el conjunto de operaciones cuyas entradas están coloreadas por los colores $c_1, \ldots, c_n$ y cuya salida esta coloreada por c), junto con la siguiente estructura:

- Un elemento *unidad* $1_c \in P(c; c)$ para cada $c \in C$.
- Un *producto composición*

$$P(c_1, \ldots, c_n; c) \otimes P(d_{1,1}, \ldots, d_{1,k_1}; c_1) \otimes \cdots \otimes P(d_{n,1}, \ldots, d_{n,k_n}; c_n) \\ \longrightarrow P(d_{1,1}, \ldots, d_{1,k_1}, \ldots, d_{n,1}, \ldots, d_{n,k_n}; c)$$

  para cada $(n+1)$-tupla de colores $(c_1, \ldots, c_n; c)$ y n tuplas cualesquiera

$$(d_{1,1}, \ldots, d_{1,k_1}; c_1), \ldots, (d_{n,1}, \ldots, d_{n,k_n}; c_n)$$

- Para cada elemento $\sigma \in \Sigma_n$ una *acción*

$$\sigma^* : P(c_1, \ldots, c_n; c) \longrightarrow P(c_{\sigma(1)}, \ldots, c_{\sigma(n)}; c).$$

Además el producto composición es asociativo, equivariante y compatible con las unidades.

Definición 1.11. Sea P una opérada C-coloreada y Q una opérada D-coloreada. Un *morfismo de opéradas* $f\colon P \to Q$ consiste en una aplicaciones entre los conjuntos de colores $f\colon C \to D$ y aplicaciones

$$f_{c_1,\ldots,c_n;c} : P(c_1, \ldots, c_n; c) \longrightarrow Q(f(c_1), \ldots, f(c_n); c)$$

compatibles con el producto composición, las unidades y la acción del grupo simétrico.

Denotaremos por Oper la categoría cuyos objetos son operadas coloreadas y cuyos morfismos son los morfismos de operadas coloreadas.

Ejemplo 1.12. Si $C = \{*\}$, entonces una opérada C-coloreada es lo mismo que una opérada. Si P es una opérad C-coloreada tal que solamente tiene operaciones de aridad uno, es decir $P(c_1, \ldots, c_n; c) = \emptyset$ si $n \neq 1$, entonces P es una categoría, cuyo conjunto de objetos es C.

2 Conjuntos Simpliciales

2.1 Complejos simpliciales

Definición 2.1. N-simplex

Un n-simplex es un politopo de $n \geq 0$ dimensiones formando una envoltura convexa de $n+1$ vertices. Es decir, es un conjunto de puntos afines independientes en un espacio euclídeo de dimensión n.

Una cara m de un n-simplex es una envolutra convexa de $m \leq n$ vertices.

Definición 2.2. Complejo simplicial

Sea $n \in \mathbb{N}^*$, un complejo simplicial X es un conjunto finito de m-simplex con $m \leq n$ que cumplen las condiciones:

(1) Si m-simplex $\in X \Rightarrow \forall m' \leq m$, m'-simplex $\in X$.

(2) Si dos simplices de X se cortan, entonces su intersección es una cara común.

Sea X^k un complejo simplicial formado por todos los k-simplex de X. Observamos que todo elemento de X^k es un subconjunto de X^0 con cardinal $k+1$, donde $X^0 = \{v_0, \dots, v_n\}$. Generalmente, todo subconjunto de X^k de $j+1$ elementos es un elemento de X^j.

Sea X_k un conjunto formado por k-simplices.

Definición 2.3. N-simplex ordenado

Un n-simplex formado por los vértices $v_0, \dots, v_n \in X^0$ es ordenado cuando cuando los vértices estan ordenados, en ese caso nombramos cada vértice por los números $0, \dots, n$. Usaremos la notación $|\Delta^n| = [0, \dots, n]$ para simplificar.

2.1.1 Morfismos simpliciales

Definición 2.4. Morfismo simplicial

Sea K y L complejos simpliciales. Sea un morfismo simplicial $F : K \longrightarrow L$ que envia los vertices de K a los vertices de L. Es decir, $\forall v \in K^0$, $v \longmapsto F(v) \in L^0$.

Definición 2.5. Cara

Para todo $|\Delta^n|$ tenemos $n+1$ caras definidas por los morfismos $\delta_0, \dots, \delta_n$

$$\begin{aligned} \delta_j : X_n &\longrightarrow X_{n-1} \\ [0, \dots, n] &\longmapsto [0, \dots, \hat{j}, \dots, n] \end{aligned}$$

Donde X_n y X_{n-1} son conjuntos de simplices ordenados de n y $n-1$ vértices, respectivamente. Observamos que $\forall i < j$, $\delta_i \delta_j = \delta_{j-1} \delta_i$.

Definición 2.6. Morifismo degenerativo

Para todo $|\Delta^n|$ tenemos $n+1$ morfismos degenerativos $\sigma_0, \ldots, \sigma_n$

$$\begin{aligned} \sigma_j : X_n &\longrightarrow X_{n+1} \\ [0, \ldots, n] &\longmapsto [0, \ldots, j, j, \ldots, n] \end{aligned}$$

Donde X_n y X_{n+1} son conjuntos de simplices ordenados de n y $n+1$ vértices, respectivamente. Observamos que $\forall i \leq j$, $\sigma_i \sigma_j = \sigma_{j+1} \sigma_i$.

2.2 Conjunto Delta

Definición 2.7. Conjunto Delta

Definimos un conjunto Delta como una secuencia de conjuntos $X_0, X_1, \ldots$ y para cada $n \geq 0$ las funciones $\delta_i : X_{n+1} \longrightarrow X_n$, $\forall 0 \leq i \leq n+1$, que cumplen $\delta_i \delta_j = \delta_{j-1} \delta_i$, $\forall i \leq j$. Formando el siguiente diagrama (Falta por hacer)

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, bend left] & X_1 \arrow[r, bend left] & X_2 \ldots \end{tikzcd}$$

2.2.1 Definición categórica del conjunto Delta

Definición 2.8. Categoría $\hat{\Delta}$

Sea la categoría $\hat{\Delta}$ cuyos objetos son los conjuntos estrictamente ordenados finitos $[n] = \{0, \ldots, n\}$ y los morfismos son las funciones, que mantienen el orden estrictamente, $f : [m] \longrightarrow [n]$, $m \leq n$. Podemos pensar que sea la inclusión de un m-simplex como cara de un n-simplex. Para todo $0 \leq i \leq n$ consideramos los morfismos:

$$\begin{aligned} d_i : [n] &\longrightarrow [n+1] \\ \{0, \ldots, n\} &\longmapsto \{0, \ldots, \hat{i}, \ldots, n+1\} \end{aligned}$$

Definición 2.9. Categoría $\hat{\Delta}^{op}$

Sea la categoría $\hat{\Delta}^{op}$, la categoría opuesta de $\hat{\Delta}$, cuyos objetos son los conjuntos estrictamente ordenados finitos $[n] = \{0, \ldots, n\}$ y los morfismos son las funciones, que mantienen el orden estrictamente, $f : [n] \longrightarrow [m]$, $m \leq n$. Podemos pensar que sea la extracción de la cara m-simplex de un n-simplex. Para todo $0 \leq i \leq n$ consideramos los morfismos:

$$\begin{aligned} \delta_i : [n] &\longrightarrow [n-1] \\ \{0, \ldots, n\} &\longmapsto \{0, \ldots, \hat{i}, \ldots, n\} \end{aligned}$$

Definición 2.10. Conjunto Delta

Un conjunto Delta es un functor covariante $X : \hat{\Delta}^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$, equivalentemente es un functor contravariante $X : \hat{\Delta} \longrightarrow \mathbf{Set}$.

Faltan observaciones.

2.3 Conjunto simplicial

Definición 2.11. Conjunto simplicial

Definimos un conjunto simplicial como una secuencia de conjuntos $X_0, X_1, \dots$ y para cada $n \geq 0$ las funciones $\delta_i : X_n \longrightarrow X_{n-1}$ y $\sigma_i : X_n \longrightarrow X_{n+1}$, $\forall 0 \leq i \leq n$, que cumplen:

(1) $\delta_i \delta_j = \delta_{j-1} \delta_i$, $i < j$

(2) $\delta_i \sigma_j = \sigma_{j-1} \delta_i$, $i < j$

(3) $\delta_j \sigma_j = \delta j + 1 \sigma_j = id$

(4) $\delta_i \sigma_j = \sigma_j \delta_{i-1}$, $i > j + 1$

(5) $\sigma_i \sigma_j = \sigma_{j+1} \sigma_i, i \leq j$

Formando el siguiente diagrama (Falta por hacer)

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, bend left] & X_1 \arrow[r, bend left] & X_2 \dots \end{tikzcd}$$

2.3.1 Definición categórica del conjunto simplicial

Definición 2.12. Categoría Δ

Sea la categoría Δ cuyos objetos son los conjuntos ordenados finitos $[n] = \{0, \dots, n\}$ y los morfismos son las funciones, que mantienen solamente el orden, $f : [m] \longrightarrow [n]$. Para todo $0 \leq i \leq n$ consideramos los morfismos:

$$\begin{aligned} d_i : [n] &\longrightarrow [n+1] \\ \{0, \dots, n\} &\longmapsto \{0, \dots, \hat{i}, \dots, n+1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_i : [n+1] &\longrightarrow [n] \\ \{0, \dots, n+1\} &\longmapsto \{0, \dots, i, i, \dots, n\} \end{aligned}$$

Definición 2.13. Categoría $\hat{\Delta}^{op}$

Sea la categoría Δ^{op}, la categoría opuesta de Δ, cuyos objetos son los conjuntos ordenados finitos $[n] = \{0, \dots, n\}$ y los morfismos son las funciones, que mantienen solamente el orden, $f : [m] \longrightarrow [n]$. Para todo $0 \leq i \leq n$ consideramos los morfismos:

$$\begin{aligned} \delta_i : [n] &\longrightarrow [n-1] \\ \{0, \dots, n\} &\longmapsto \{0, \dots, \hat{i}, \dots, n\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_i : [n] &\longrightarrow [n+1] \\ \{0, \dots, n\} &\longmapsto \{0, \dots, i, i, \dots, n\} \end{aligned}$$

Definición 2.14. Conjunto simplicial

Un conjunto simplicial es un functor covariante $X : \Delta^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$, equivalentemente es un functor contravariante $X : \Delta \longrightarrow \mathbf{Set}$. Usaremos la notación $\Delta[n] = \Delta(\_, [n])$.

$$\begin{aligned} \Delta[n] : \Delta^{op} &\longrightarrow \mathbf{Set} \\ [m] &\longmapsto \Delta([m], [n]) \end{aligned}$$

Faltan observaciones.

2.4 Realización geométrica

Definición 2.15. Realización geométrica

Sea X un conjunto simplicial. Dotamos cada X_n con la topología discreta y sea $|\Delta^n$ el n-simplex dotado de su topología estandard. Definimos la realización geométrica como

$$|X| = \coprod_{n=0}^{\infty} X_n \times |\Delta^n| / \sim$$

Donde $\sim$ es la relación de equivalencia generada por las relaciones:

(1) $(x, d_i(p)) \sim (\delta_i(x), p)$, $x \in X_{n+1}$ y $p \in |\Delta^n|$

(2) $(x, s_i(p)) \sim (\sigma_i(x), p)$, $x \in X_{n-1}$ y $p \in |\Delta^n|$

Ejemplo 2.16. $\Delta[2] = \Delta(\_, [2])$

Falta por escribir

3 Conjuntos Dendroidales

3.1 Árboles como opéradas

3.1.1 Formalismo de árboles

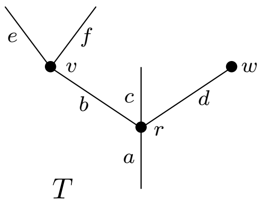
Un *árbol* es un grafo no vacío, finito, conexo y sin lazos. Llamaremos *vértices exteriores* a los vértices que tienen solamente una arista adyacente. Todos los árboles que consideraremos tendrán *raíz*, es decir, para cada árbol existe un vértice exterior, llamado *output* o *salida*. El conjunto de vértices exteriores restantes lo llamaremos *inputs* o *entradas*. Este último conjunto puede ser vacío y no contiene el vértice output.

Para dibujar dichos árboles, borraremos los vértices output e inputs de la figura. De tal manera que los vértices restantes serán los *vértices* del árbol. Dado un árbol T, definimos el conjunto de vértices como $V(T)$ y el conjunto de aristas como $E(T)$.

Llamaremos *hojas* o *aristas externas* a las aristas adyacentes de los vértices inputs y *raíz* a la arista adyacente del vértice output. De tal manera que las aristas restantes las llamaremos *aristas internas*. Podemos observar que existe una dirección clara en cada árbol, desde las hojas hasta la raíz.

Sea v un vértice de un árbol finito con raíz, definimos $\mathrm{out}(v)$ como la única arista de salida y $\mathrm{in}(v)$ como el conjunto de aristas de entrada, observamos que este último conjunto puede ser vacío. Llamaremos la *valencia* de v a la cardinalidad del conjunto $\mathrm{in}(v)$.

Finalmente, la siguiente figura es un árbol de ejemplo:



T (3.1)

Observamos que hemos eliminado el vértice output de la arista a y los vértices inputs en las aristas e, f y c. Este árbol tiene tres vértices r, v y w con valencia 3, 2 y 0, respectivamente. Este árbol tiene tres hojas e, f y c, y dos aristas internas b y d. Finalmente, la raíz es la arista a.

3.1.2 Árboles planares

Definición 3.1. Un *árbol planar con raíz* es un árbol con raíz T dotado con un orden lineal del conjunto $\mathrm{in}(v)$ para cada v de T.

Observación 3.2. El orden de los conjuntos $\mathrm{in}(v)$ se obtiene de la idea de dibujar los árboles en un plano. Es decir, para dibujar un árbol siempre pondremos la raíz debajo y las hojas arriba ordenando de izquierda a derecha. Observamos con esta técnica que tendremos varias representaciones planares del mismo árbol. Por ejemplo,

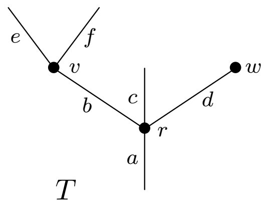
(3.2)

Definición 3.3. Denotaremos por η o *unitario* el árbol que tiene una única arista y ningún vértice.

Definición 3.4. Sea T un árbol planar con raíz. Denotaremos la opérada coloreada no-simétrica generada por T como $\Omega_p(T)$. El conjunto de colores de $\Omega_p(T)$ es el conjunto de aristas $E(T)$ de T y las operaciones están generadas por los vértices del árbol. Es decir, para cada vértice v con entradas $e_1, \ldots, e_n$ y salida e, definimos una operación $v \in \Omega_p(T)(e_1, \ldots, e_n; e)$. Las otras operaciones son las operaciones unitarias y las operaciones obtenidas por composición.

Observación 3.5. Para todo $e_1, \ldots, e_n, e$, el conjunto de operaciones $\Omega_p(T)(e_1, \ldots, e_n; e)$ contiene como mucho un solo elemento.

Ejemplo 3.6. Vamos a realizar la descripción completa de la opérada asociada al árbol T:



T (3.3)

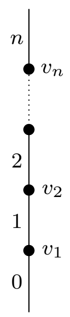
La operada $\Omega_p(T)$ tiene seis colores *a, b, c, d, e,* y *f.* Las operaciones generadoras son $v \in \Omega_p(T)(e, f; b)$, $w \in \Omega_p(T)(\_; d)$ y $r \in \Omega_p(T)(b, c, d; a)$. Mientras que las otras operaciones son las operaciones unitarias $1_a, 1_b, \ldots, 1_f$ y las operaciones composición $r \circ_1 v \in \Omega_p(T)(e, f, c, d; a)$, $r \circ_2 w \in \Omega_p(T)(b, c; a)$ y

$$(r \circ_1 v) \circ_3 w = (r \circ_2 w) \circ_1 v \in \Omega_p(T)(e, f, c; a)$$

Definición 3.7. La *categoría de árboles planares con raíz* Ω_p es la subcategoría plena de la categoría de opéradas coloreadas no-simétricas cuyos objetos son $\Omega_p(T)$ para cada árbol T.

Podemos pensar que Ω_p es una categoría cuyos objetos son árboles planares con raíz. Sean S y T dos árboles planares con raíz, el conjunto de morfismos $\Omega_p(S, T)$ es dado por los morfismos entre opéradas coloreadas no-simétricas de $\Omega_p(S)$ a $\Omega_p(T)$.

Observación 3.8. La categoría Ω_p extiende la categoría simplicial Δ. Para todo $n \geq 0$ se define un *árbol lineal* L_n como un árbol planar con $n+1$ aristas y n vértices $v_1, \ldots, v_n$, donde la valencia de todos los vértices es uno. Es decir, es un árbol cuyos vértices solo tienen una arista de entrada.



L_n (3.4)

Denotaremos este árbol por $[n]$. Toda apliación que mantiene el orden de manera que envíe $\{0, \ldots, n\}$ a $\{0, \ldots, m\}$, define un morfismo $[n] \to [m]$ en la categoría Ω_p. De esta manera obtenemos un encaje

$$\Delta \xhookrightarrow{u} \Omega_p$$

Este encaje es un funtor plenamente fiel. Podemos observar que para toda flecha $S \to T$ en Ω_p, si T es lineal entonces S también lo es.

3.2 Morfismos en Ω_p

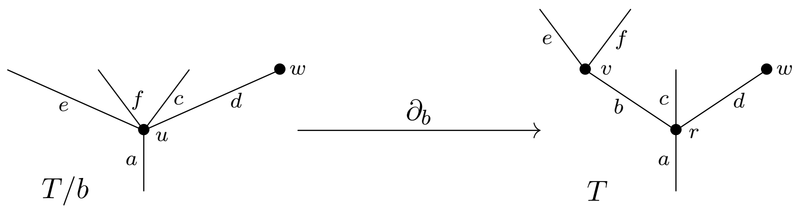
En las siguientes secciones vamos a tratar con todos los tipos de morfismos en Ω_p y dar una descripción más explícita.

3.2.1 Caras

Sea T un árbol planar con raíz.

Definición 3.9. Una *cara interna* asociada a una arista interna b en T es una función $\partial_b \colon T/b \to T$ en Ω_p, donde T/b es el árbol que se obtiene al contraer la arista b de T.

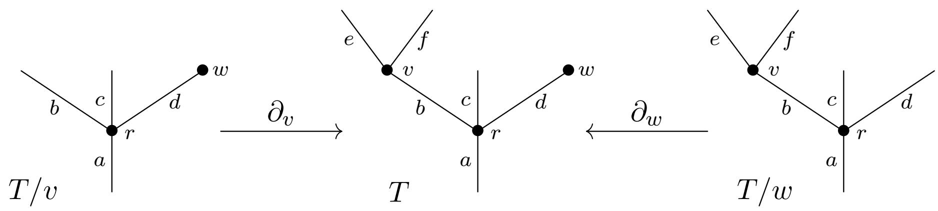
A nivel de opéradas, esta función es una inclusión de los colores y de las operaciones generadoras de $\Omega_p(T/b)$, excepto por la operación u, que se envía a la composición $r \circ_b v$, donde r y v son dos vértices en T con la arista b entre ellos, y u es el vértice correspondiente en T/b. Tomamos la siguiente figura para visualizar la función.



(3.5)

Definición 3.10. Una *cara externa* asociada a un vértice v en T, con solo una arista interna adyacente, es una función $\partial_v \colon T/v \to T$ en Ω_p, donde T/v es el árbol que se obtiene al cortar el vértice v de T con todas sus aristas externas.

A nivel de opéradas, esta función es una inclusión de los colores y de las operaciones generadoras de $\Omega_p(T/v)$, donde r y v son dos vértices en T con la arista b entre ellos, y u es el vértice correspondiente en T/b. Tenemos dos tipos de cara externa que mostramos en las siguientes figuras.



(3.6)

Observación 3.11. Con esta última definición no queda excluída la posibilidad de cortar la raíz. Esta situación solo será posible si la raíz tiene solamente una arista interna adyacente. Entonces, no todo árbol T tiene una cara externa asociada a su raíz.

Observación 3.12. Vale la pena mencionar un caso en especial, la inclusión del árbol sin vértices η en un árbol con un vértice, llamado *corola*. En este caso tendremos $n+1$ caras si la corola tiene n hojas. La opérada $\Omega_p(\eta)$ consiste solamente de un color y la operación identidad de dicho color. Entonces, una función de opéradas $\Omega_p(\eta) \to \Omega(T)$ es simplemente eligir un color de una corola T.

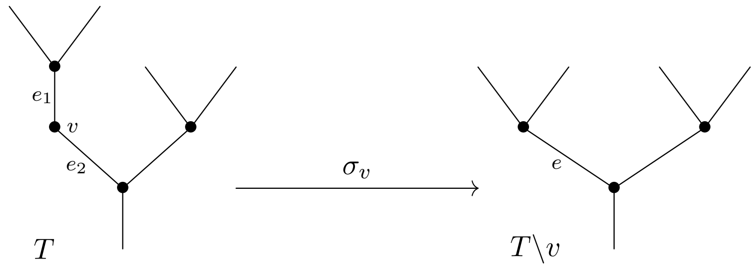
Para concluir, llamaremos *caras* tanto a las caras internas como a las caras externas.

3.2.2 Degeneraciones

Sea T un árbol planar con raíz y v un vértice de valencia uno en T.

Definición 3.13. Una *degeneración* asociada al vértice v es una función $\sigma_v \colon T \to T\backslash v$ en Ω_p, donde $T\backslash v$ es el árbol que se obtiene al cortar el vértice v y juntar las dos aristas adjuntas en una nueva arista e.

A nivel de opéradas, la función envía los colores e_1 y e_2 de $\Omega_p(T)$ al color e de $\Omega_p(T\backslash v)$ y envía la operacion generativa v a la operación identidad id_e, mientras que es la identidad para los colores y operaciones generativas restantes. Tomamos la siguiente figura para visualizar la función.



(3.7)

Observación 3.14. Las caras y las degeneraciones generan todos los morfismos de la categoría Ω_p.

El siguiente lema es una generalización en Ω_p del lema en la categoría Δ, diciendo que toda flecha en dicha categoría se puede escribir como composición de degeneraciones seguidas por caras.

Lema 3.15. *Toda flecha $f \colon S \to T$ en Ω_p descompone, salvo isomorfismos, como*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\sigma"'] & T \\ & H \arrow[u, "\partial"'] \end{tikzcd}$$

donde $\sigma \colon S \to H$ es una composición de degeneraciones y $\partial \colon H \to T$ es una composición de caras.

Proof. Es una demostración análoga a la del lema 3.21. □

3.2.3 Identidades dendroidales

En esta sección vamos a dar las relaciones entre los morfismos generadores de Ω_p. Las identidades que obtenemos generalizan las identidades simpliciales de la categoría Δ.

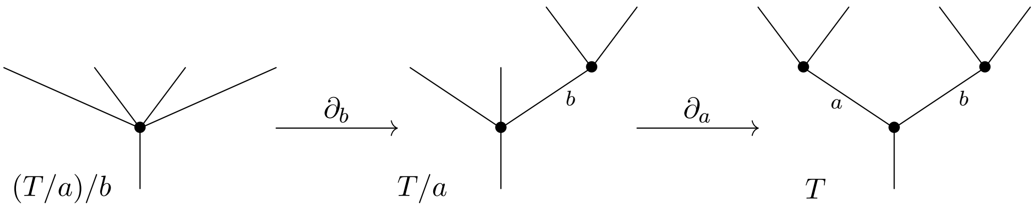
Relaciones elementales de caras

Sea $\partial_a \colon T/a \to T$ y $\partial_b \colon T/b \to T$ dos caras internas distintas de T. Seguidamente tenemos las caras internas $\partial_a \colon (T/b)/a \to T/b$ y $\partial_b \colon (T/a)/b \to T/a$. Observamos que

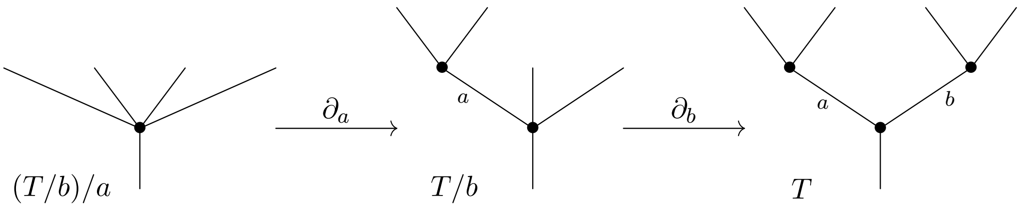
$(T/a)/b = (T/b)/a$, entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
(T/a)/b \arrow[r, "\partial_b"] \arrow[d, "\partial_a"'] & T/a \arrow[d, "\partial_a"] \\
T/b \arrow[r, "\partial_b"] & T
\end{tikzcd}$$

Mostramos esta relación mediante las siguientes figuras:



(3.8)

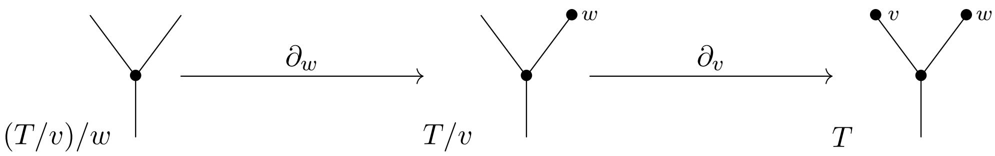


(3.9)

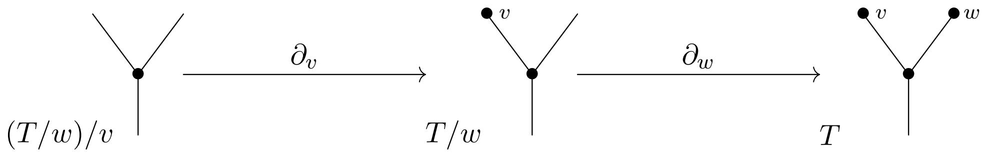
Sea $\partial_v\colon T/v \to T$ y $\partial_w\colon T/w \to T$ dos caras externas distintas de T, y asumimos que T tiene como mínimo tres vértices. Seguidamente tenemos las caras externas $\partial_v\colon (T/w)/v \to T/w$ y $\partial_w\colon (T/v)/w \to T/v$. Observamos que $(T/v)/w = (T/w)/v$, entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
(T/v)/w \arrow[r, "\partial_w"] \arrow[d, "\partial_v"'] & T/v \arrow[d, "\partial_v"] \\
T/w \arrow[r, "\partial_w"] & T
\end{tikzcd}$$

Mostramos esta relación mediante las siguientes figuras:



(3.10)



(3.11)

En el caso que T solo tenga dos vértices, existe un diagrama conmutativo similar mediante la inclusión de η a una n-corola. Existe un último caso para combinar una cara interna con una cara externa, y viceversa; así obteniendo un diagrama conmutativo similar, pero se debe tener cuenta dos condiciones excluyentes. Sean $\partial_v\colon T/v \to T$ y $\partial_e\colon T/e \to T$ una cara externa y una cara interna de T. Tenemos que la combinación de estas dos caras existen si:

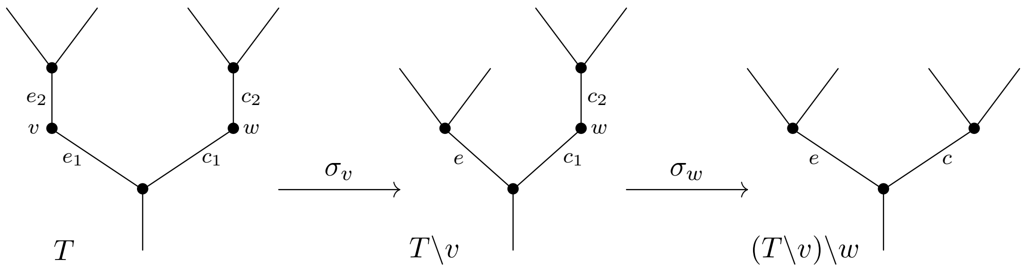
- Si la arista e no es adyacente al vértice v.
- Si la arista e si es adyacente al vértice v, entonces existe otro vértice w adyacente a la arista e.

Relaciones elementales de degeneraciones

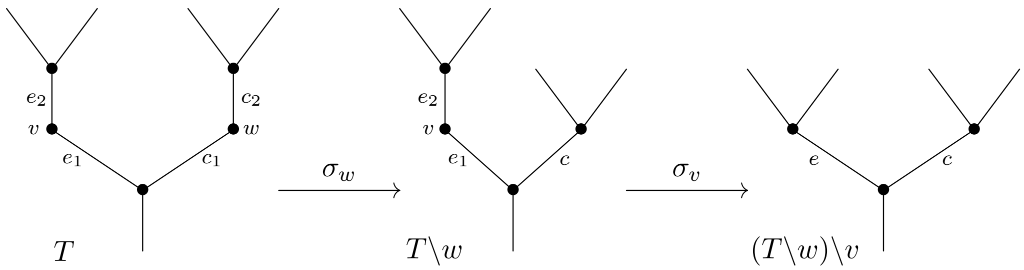
Sea $\sigma_v\colon T \to T\backslash v$ y $\sigma_w\colon T \to T\backslash w$ dos degeneraciones distintas de T. Seguidamente tenemos las degeneraciones $\sigma_v\colon T\backslash w \to (T\backslash w)\backslash v$ y $\sigma_w\colon T\backslash v \to (T\backslash v)\backslash w$. Observamos que $(T\backslash v)\backslash w = (T\backslash w)\backslash v$, entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\sigma_w"] \arrow[d, "\sigma_v"'] & T\backslash w \arrow[d, "\sigma_v"] \\
T\backslash v \arrow[r, "\sigma_w"] & (T\backslash v)\backslash w
\end{tikzcd}$$

Mostramos esta relación mediante las siguientes figuras:



(3.12)



(3.13)

Relaciones combinadas

Sea $\sigma_v\colon T \to T\backslash v$ una degeneración y $\partial\colon T' \to T$ es una cara de tal manera que la degeneración $\sigma_v\colon T' \to T'\backslash v$ esta bien definida. Entonces existe una cara $\partial\colon T'\backslash v \to T\backslash v$ determinada por el mismo vértice o arista que $\partial\colon T' \to T$. Además, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\sigma_v"] & T\backslash v \\
T' \arrow[r, "\sigma_v"] \arrow[u, "\partial"] & T'\backslash v \arrow[u, "\partial"']
\end{tikzcd}$$

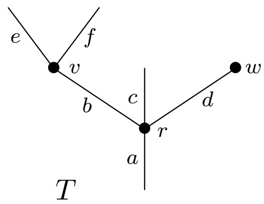
Sea $\sigma_v\colon T \to T\backslash v$ una degeneración y $\partial\colon T' \to T$ es una cara interna en una arista adyacente a v o una cara externa en v, si es posible. Entonces, tenemos que $T' = T\backslash v$ y la composición $T\backslash v \xrightarrow{\partial} T \xrightarrow{\sigma_v} T\backslash v$ es la función identidad $id_{T\backslash v}$.

3.3 Árboles no planares

Definición 3.16. Sea T un árbol no-planar. Denotaremos la opérada coloreada simétrica generada por T como $\Omega(T)$. El conjunto de colores de $\Omega(T)$ es el conjunto de aristas $E(T)$ de T. Las operaciones están generadas por los vértices del árbol, y el grupo simétrico de n

letras Σ_n actúa en cada operación de n entradas permutando el orden de las entradas. Es decir, para cada vértice v con entradas $e_1, \ldots, e_n$ y salida e, definimos una operación $v \in \Omega(T)(e_1, \ldots, e_n; e)$. Las otras operaciones son las operaciones unitarias, las operaciones obtenidas por composición y la acción del grupo simétrico.

Ejemplo 3.17. Consideramos la figura del siguiente árbol T:



T (3.14)

La opérada $\Omega(T)$ tiene seis colores *a, b, c, d, e,* y *f.* Las operaciones generadoras son las mismas que las operaciones generativas en $\Omega_p(T)$. Observamos que toda operación de $\Omega_p(T)$ son operaciones de $\Omega(T)$, pero no a la inversa ya que hay más operaciones en $\Omega(T)$ obtenidas por la acción del grupo simétrico. Por ejemplo, sea σ la transposición de dos elementos de Σ_2, entonces tenemos una operación $v \circ \sigma \in \Omega(f, e; b)$.

Observación 3.18. Sea T cualquier árbol, entonces $\Omega(T) = \Sigma(\Omega_p(\overline{T}))$, donde $\overline{T}$ es una representación planar de T y Σ representa todas las acciones del grupo simétrico posibles aplicadas a las entradas de las operaciones. De hecho, se elige una estructura planar de T como generador de $\Omega(T)$.

Definición 3.19. La *categoría de árboles con raíz* Ω es la subcategoría plena de la categoría de opéradas coloreadas cuyos objetos son $\Omega(T)$ para todo árbol T.

Podemos pensar que Ω es una categoría cuyos objetos son árboles con raíz. Sean S y T dos árboles con raíz, el conjunto de morfismos $\Omega(S,T)$ es dado por los morfismos entre opéradas coloreadas de $\Omega(S)$ a $\Omega(T)$.

Observación 3.20. Los morfismos de la categoría Ω son generados por las caras y las degeneraciones, análogas al caso planar, y los isomorfismos no planares.

Lema 3.21. *Toda flecha $f\colon S \to T$ en Ω descompone como*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\sigma"'] & T \\ S' \arrow[r, "\varphi"] & T' \arrow[u, "\partial"'] \end{tikzcd}$$

donde $\sigma\colon S \to S'$ es una composición de degeneraciones, $\varphi\colon S' \to T'$ es isomorfismo, y $\partial\colon T \to T'$ es una composición de caras.

Proof. Vamos a demostrar por inducción sobre el número de vértices de S y T. Si S y T no tienen vértices, entonces $S = T = \eta$ y f es la identidad. Podemos asumir que f envía la raíz de S a la raíz de T; de lo contrario podemos factorizar f men una función $S \to T'$ que conserva la raíz seguido de otra función $T' \to T$ que es una composición de caras externas. También podemos asumir que f es un epimorfismo en las hojas, de lo contrario podemos factorizar f en $S \to T/v \xrightarrow{\partial_d} T$, donde v es el vértice que está debajo de la hoja en T pero no está en la imágen de f.

Sean a y b son dos aristas de S tales que $f(a) = f(b)$, entonces a y b deberían estar en la misma rama de S y f envía los vértices intermediarios a sus identidades.

Podemos factorizar f como una sobreyección segudia de una inyección con los colores, ya que f es una funcion de opéradas coloreadas. Esto corresponde a una factorización en Ω,

$$S \xrightarrow{\psi} S' \xrightarrow{\xi} T$$

donde ψ es una composición de degeneraciones y ξ es biyectiva en las hojas, envía la raíz de S' a la raíz de T y es inyectiva en los colores.

Si ξ es sobreyectiva en los colores, entonces ξ es un isomorfismo. Si ξ no es sobreyectiva, entonces existe una arista e de T que no está en la imágen de ξ. Como e debe ser una arista interna (no una hoja), podemos factorizar ξ como

$$S' \xrightarrow{\xi'} T/e \xrightarrow{\partial_e} T$$

Ahora continuamos por inducción sobre la función ξ'. $\square$

3.3.1 Prehaz de estructuras planares

Sea $P : \Omega^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ el prehaz en Ω que envía cada árbol a su conjunto de estructuras planares. Recordamos que la categoría $\Omega\backslash P$ es la categoría cuyos objetos son pares (T, x) con $x \in P(T)$. Sean (T, x) y (S, y) dos objetos, un morfismo entre ellos es dado por el morfismo $f\colon T \to S$ en Ω, tal que $P(f)(y) = x$. Entonces, tenemos que $\Omega\backslash P = \Omega_p$ y existe una proyección $v\colon \Omega_p \to \Omega$. Tenemos el siguiente triángulo conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \Delta \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "i"'] & \Omega_p \arrow[d, "v"] \\ & \Omega \end{tikzcd}$$

Donde i es un encaje plenamente fiel de Δ en Ω, que envía el objeto $[n]$ de Δ al árbol lineal L_n de Ω, para todo $n \geq 0$.

3.3.2 Relación con la categoría simplicial

Hemos podido ver que las dos categorías, Ω_p y Ω, extienden la categoría Δ, gracias a ver los objetos de Δ como árboles lineales. Además, se puede obtener Δ como la categoría coma de Ω_p o Ω. Sea η un árbol en Ω que no contiene ningún vértice y tan solo una arista, y sea η_p su representación planar en Ω_p. Si T es un árbol cualquiera en Ω, entonces $\Omega(T, \eta)$ consiste en un solo morfismo o es el conjunto vacío, dependiendo si T es un árbol lineal o no. Pasa lo mismo con Ω_p y η_p. Entonces, $\Omega\backslash\eta = \Omega_p\backslash\eta_p = \Delta$.

3.4 Conjuntos Dendroidales

En esta sección vamos a introducir nociones básicas y terminología para la categoría de los conjuntos dendroidales. Describiremos la categoría de los conjuntos dendroidales y los conjuntos dendroidales planares como categorías de prehaces en Ω y Ω_p, respectivamente. Hemos visto la relación entre estas categorías con la categoría de conjuntos simpliciales y la categoría de las opéradas, mediante una adjunción natural de funtores entre ellas. Más adelante definiremos un nervio dendroidal, desde opéradas hacia conjuntos dendroidales, generalizando así la construcción clásica del nervio, desde categorías pequeñas hacia conjuntos simplicales.

Definición 3.22. La categoría *dSets* de *conjuntos dendroidales* es la categoría de prehaces en Ω. Los objetos son funtores $\Omega^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ y los morfismos vienen dados por las transformaciones naturales. La categoría $pd\,\mathrm{Set}$ de *conjuntos dendroidales planares* esta definida de manera análoga intercambiando Ω por Ω_p.

Entonces, un conjunto dendroidal X viene definido como un conjunto $X(T)$, denotado por X_T, para cada árbol T, conjuntamente con una función $\alpha^*\colon X_T \to X_S$ para cada morfismo $\alpha\colon S \to T$ en Ω. Como X es un funtor, entonces $(id)^* = id$ y si $\alpha\colon S \to T$ y $\beta\colon R \to S$ son morfismos en Ω, entonces $(\alpha \circ \beta)^* = \beta^* \circ \alpha^*$. El conjunto X_T lo llamaremos conjunto de *dendrices con forma* T, o simplemente conjunto de T-dendrices.

Sean X y Y dos conjuntos dendroidales, un *morfismo de conjuntos dendroidales* $f\colon X \to Y$ viene definido por funciones $f\colon X_T \to Y_T$, para cada árbol T, conmutando con las funciones de estructura. Es decir, si $\alpha\colon S \to T$ es cualquier morfismo en Ω y $x \in X_T$, entonces $f(\alpha^* x) = \alpha^* f(x)$.

Decimos que Y es un *subconjunto dendroidal* de X si para cada árbol T tenemos que $Y_T \subseteq X_T$ y la inclusión $Y \hookrightarrow X$ es un morfismo de conjuntos dendroidales.

Definición 3.23. Un dendrex $x \in X_T$ se llama *degenerado* si existe otro dendrex $y \in X_S$ y una degeneración $\sigma\colon T \to S$ tal que $\sigma^*(y) = x$.

Existen inclusiones canónicas y restricciones evidentes

$$\begin{tikzcd} \Delta \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "i"'] & \Omega_p \arrow[d, "v"] \\ & \Omega \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} sSets & pdSets \arrow[l, "u^*"'] \\ & dSets \arrow[ul, "i^*"] \arrow[u, "v^*"'] \end{tikzcd}$$

Donde todos tienen adjuntos por la derecha e izquierda

$$\begin{tikzcd} sSets \arrow[r, shift left, "u_!"] \arrow[dr, shift left, "i_!"] & pdSets \arrow[l, shift left, "u^*"] \arrow[d, shift left, "v_!"] \\ & dSets \arrow[ul, shift left, "i^*"] \arrow[u, shift left, "v^*"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} sSets \arrow[r, shift left, "u_*"] \arrow[dr, shift left, "i_*"] & pdSets \arrow[l, shift left, "u^*"] \arrow[d, shift left, "v^*"] \\ & dSets \arrow[ul, shift left, "i^*"] \arrow[u, shift left, "v_*"] \end{tikzcd}$$

Que vienen dados por las extensiones de Kan correspondientes. Por ejemplo, el funtor i^* envía un conjunto dendroidal X al conjunto simplicial

$$i^*(X)_n = X_{i([n])}$$

Su adjunto por la izquierda $i_!\colon sSets \to dSets$ es una extensión por el zero, y envía un conjunto simplicial X a un conjunto dendroidal dado por

$$i_!(X)_T = \begin{cases} X_n & \text{si } T \cong i([n]) \\ \emptyset & \text{si } T \ncong i([n]) \end{cases}$$

Podemos ver que $i_!$ es plenamente fiel y que $i^*i_!$ es el funtor identidad en los conjuntos simpliciales.

El funtor $\Omega \to Oper$ que envía un árbol T a la opérada coloreada $\Omega(T)$ induce la siguiente adjunción

$$\tau_d \colon dSets \rightleftarrows Oper \colon N_d$$

El funtor N_d se llama *nervio dendroidal.* Para toda opérada P su nervio dendroidal es el conjunto dendroidal

$$N_d(P)_T = Oper(\Omega(T), P)$$

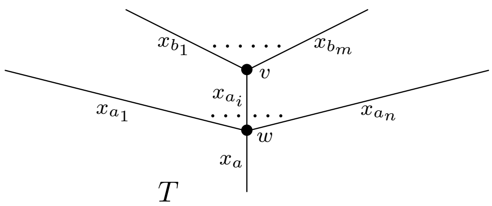
Este funtor es plenamente fiel y $N_d(\Omega(T)) = \Omega[T]$ para cada árbol T en Ω. También extiende el nervio de categorías a conjuntos simpliciales. Sea $\mathcal{C}$ una categoría cualquiera y $\underline{\mathcal{C}}$ es una opérada coloreada asociada, entonces

$$i^*(N_d(\underline{\mathcal{C}})) = N(\mathcal{C})$$

Sea X un conjunto dendroidal, nos referimos a la adjunción por la izquierda $\tau_d(X)$ como la *opérada genreada por X*. Sabemos que el conjunto de colores de $\tau_d(X)$ es igual que el conjunto X_η. Las operaciones de las opéradas son generadas por los elementos de X_{C_n}, donde C_n es la n-ésima corola, con las siguientes relaciones:

(i) $s(x_a) = \mathrm{id}_{x_a} \in \tau_d(X)(x_a; a_a)$ si $x_a \in X_\eta$ y $s = \sigma^*$, donde σ es la degeneración $\sigma \colon C_1 \to \eta$.

(ii) Si T es un árbol de la forma



T (3.15)

y $x \in X_T$, entonces $d_w(x) \circ_{x_{a_i}} d_v(x) = d_{x_{a_i}}(x)$, donde

$$\begin{aligned} d_w(x) &\in \tau_d(X)(x_{a_1}, \dots, x_{a_n}; x_a) \\ d_v(x) &\in \tau_d(X)(x_{b_1}, \dots, x_{b_m}; x_{a_i}) \\ d_{a_{x_i}}(x) &\in \tau_d(X)(x_{a_1}, \dots, x_{a_{i-1}}, x_{b_1}, \dots, x_{b_m}, x_{a_{i+1}}, \dots, x_{a_n}; x_a) \end{aligned}$$

y $d_w = \partial_w^*$ viene inducido por la cara asociada al vértice de la raíz w; $d_v = \partial_v^*$ viene inducido por la cara externa asociada al vértice v; y $d_{x_{a_i}} = \partial_{x_{a_i}}^*$ viene inducido por la cara interna asociada a la arista x_{a_i}.

Entonces, $\tau_d(\Omega[T]) = \Omega(T)$ para todo árbol T en Ω. También extiene el funtor $\tau \colon sSets \to Cat$ al nervio simplicial, es decir, para todo conjunto simplicial X

$$\tau(X) = j^*\tau_d(i_!(X))$$

En particular, tenemos el siguiente diagrama de funtores adjuntos

$$\begin{tikzcd} sSets \arrow[r, shift left, "i_!"] \arrow[d, shift left, "\tau"] & dSets \arrow[l, shift left, "i^*"] \arrow[d, shift left, "\tau_d"] \\ Cat \arrow[u, shift left, "N"] \arrow[r, shift left, "j_!"] & Oper \arrow[l, shift left, "j^*"] \arrow[u, shift left, "N_d"] \end{tikzcd}$$

Tenemos las siguientes relaciones conmutativas salvo isomorfías:

$$\tau N = \mathrm{id},\ \tau_d N_d = \mathrm{id},\ i^* i_! = \mathrm{id},\ j^* j_! = \mathrm{id}$$
$$j_! \tau = \tau_d i_!,\ N j^* = i^* N_d,\ i_! N = N_d j_!$$

3.5 Producto tensorial de conjuntos dendroidales

3.5.1 Producto tensorial Boardman-Vogt

Definición 3.24. Sea P una opérada simétrica C-coloreada, y sea Q una opérada simétrica D-coloreada. El *producto tensorial de Boardman–Vogt* $P \otimes_{BV} Q$ es una opérada $(C \times D)$-coloreada definida en terminos de generadores y relaciones de la siguiente manera. Para cada color $d \in D$ y cada operación $p \in P(c_1, \dots, c_n; c)$ existe un generador

$$p \otimes d \in P \otimes_{BV} Q((c_1, d), \dots, (c_n, d); (c, d))$$

De manera análoga, para cada color $c \in C$ y cada operación $q \in Q(d_1, \dots, d_m; d)$ existe un generador

$$c \otimes q \in P \otimes_{BV} Q((c, d_1), \dots, (c, d_m); (c, d))$$

Estos generadores estan sujetos a las siguientes relaciones:

(i) $(p \otimes d) \circ ((p_1 \otimes d), \dots, (p_n \otimes d)) = (p \circ (p_1, \dots, p_n)) \otimes d$

(ii) $\sigma^*(p \otimes d) = (\sigma^* p) \otimes d$, para cada $\sigma \in \Sigma_n$

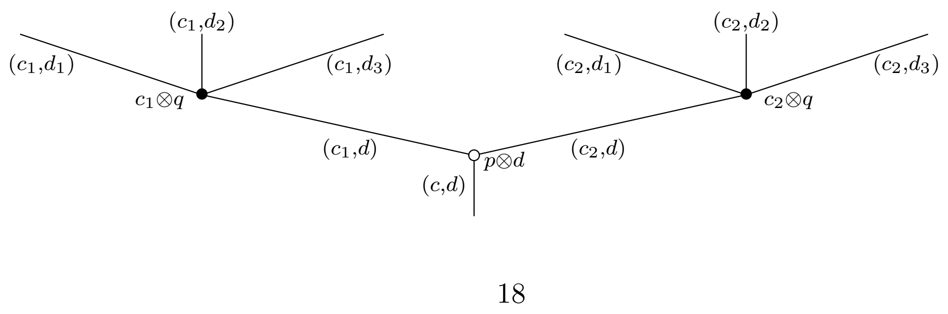
(iii) $(c \otimes q) \circ ((c \otimes q_1), \dots, (c \otimes q_m)) = c \otimes (q \circ (q_1, \dots, q_m))$

(iv) $\sigma^*(c \otimes q) = c \otimes (\sigma^* q)$, para cada $\sigma \in \Sigma_m$

(v) $\sigma^*_{n,m}((p \otimes d) \circ ((c_1 \otimes q), \dots, (c_n \otimes q))) = (c \otimes q) \circ ((p \otimes d_1), \dots, (p \otimes d_m))$, donde $\sigma_{n,m} \in \Sigma_{nm}$ es una permutación que descibimos a continuación. Consideramos el conjunto Σ_{nm} como el conjunto de biyecciones del conjunto $\{0, 1, \dots, nm-1\}$. Cada elemento de dicho conjunto se puede escribir como $kn + j$ de manera única para $0 \leq k < m$ y $0 \leq j < n$; y, análogamente, se puede escribir como $km + j$ para $0 \leq k < n$ y $0 \leq j < m$. Finalmente, la permutación $\sigma_{n,m}$ la definimos de tal manera que $\sigma_{n,m}(kn + j) = jm + k$.

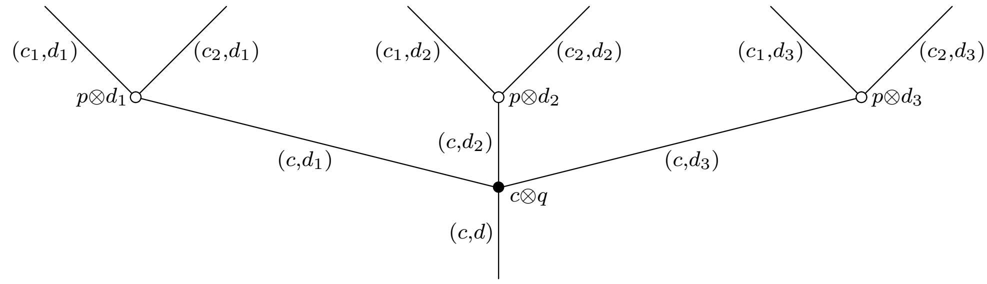
Observación 3.25. Tenemos que las relaciones (i) y (ii) implican que para cada color $d \in D$ la función $P \to P \otimes_{BV} Q$ es una función de opéradas, que viene dada por $p \mapsto p \otimes d$. De manera análoga, tenemos que las relaciones (iii) y (iv) implican que para cada color $c \in C$ la función $Q \to P \otimes_{BV} Q$ es una función de opéradas, que viene dada por $q \mapsto c \otimes q$.

Ejemplo 3.26. Vamos a ilustrar la relación (v), también llamada como la *relación del intercambio* con las siguientes figuras. Suponemos que $n = 2$ y $m = 3$. Representamos mediante el siguiente árbol la operación de la izquierda de la relación (v), antes de aplicar la permutación $\sigma^*_{2,3}$



(3.16)

Representamos mediante el siguiente árbol la operación de la derecha de la relación (v)



(3.17)

Observamos que la permutación $\sigma_{2,3}$ corresponde a la permutación $(2\ 4\ 5\ 3)$ de Σ_6. Hemos pintado los vértices de las operaciones en P de color blanco y para los vértices de las operaciones en Q de color negro.

3.5.2 Producto tensorial de conjuntos dendroidales

La categoría de los conjuntos dendroidales es una categoría de prehaces, y por lo tanto cartesiano. El producto cartesiano de los conjuntos dendroidales extiende el producto cartesiano de conjuntos simpliciales, es decir, para cada par de conjuntos simpliciales X e Y

$$i_!(X \times Y) \cong i_!(X) \times i_!(Y)$$

Definición 3.27. Para todo par de árboles T y S en Ω, el *producto tensorial* de los representables $\Omega[T]$ y $\Omega[S]$ se define como

$$\Omega[T] \otimes \Omega[S] = N_d(\Omega(T) \otimes_{BV} \Omega(S))$$

Donde N_d es el nervio dendroidal, $\Omega(T)$ y $\Omega(S)$ son las opéradas coloreadas asociadas a los árboles T y S, respectivamente; y $\otimes_{BV}$ es el producto tensorial Boardman–Vogt.

Esto define un producto tensorial en toda la categoría de conjuntos dendroidales, ya que es una categoría de prehaces y entonces cada objeto es un colímite canónico de representables y $\otimes$ conserva colímites en cada variable.

Definición 3.28. Sean X e Y dos conjuntos dendroidales y sea $X = \lim_{\rightarrow} \Omega[T]$ y $Y = \lim_{\rightarrow} \Omega[S]$ sus expresiones canónicas como colímites de representables. Entonces, definimos el *producto tensorial* $X \otimes Y$ como

$$X \otimes Y = \lim_{\rightarrow} \Omega[T] \otimes \lim_{\rightarrow} \Omega[S] = \lim_{\rightarrow} N_d(\Omega(T) \otimes_{BV} \Omega(S))$$

Sabemos que este producto tensorial es cerrado gracias a la teoría general de categorías [Kel82], y el conjunto de T-dendrices de la hom interna viene definida por

$$\mathrm{Hom}_{dSets}(X,Y)_T = dSets(\Omega[T] \otimes X, Y)$$

Para cada par X e Y de conjuntos dendroidales y para cada árbol T en Ω.

Teorema 3.29. *La categoría de conjuntos dendroidales admite una estructura cerrada, monoidal y simétrica. Esta estructura monoidal es únicamente determinada (salvando isomorfías) por la propiedad de que existe un isomorfismo natural*

$$\Omega[T] \otimes \Omega[S] \cong N_d(\Omega(T) \otimes_{BV} \Omega(S))$$

Para cada par T y S de objetos de Ω. La unidad del producto tensorial es el conjunto dendroidal representable $\Omega[\eta] = i_!(\Delta[0]) = U$.

Proposición 3.30. *Tenemos las siguientes propiedades:*

(i) *Para cada par X e Y de conjuntos simpliciales, existe un isomorfismo natural*

$$i_!(X) \otimes i_!(Y) \cong i_!(X \times Y)$$

(ii) *Para cada par X e Y de conjuntos simpliciales, existe un isomorfismo natural*

$$\tau_d(X \otimes Y) \cong \tau_d(X) \otimes_{BV} \tau_d(Y)$$

(iii) *Para cada par P e Q de opéradas coloreadas, existe un isomorfismo natural*

$$\tau_d(N_d(P) \otimes N_d(Q)) \cong P \otimes_{BV} Q$$

Proof. (i) Basta con ver que la propiedad se mantiene en los representables en $sSets$. Si vemos que $[n]$ y $[m]$ de Δ como categorías, entonces tenemos

$$j_!([n] \times [m]) \cong j_!([n]) \otimes_{BV} j_!([m])$$

Entonces tenemos la siguiente cadena de isomorfismos naturales

$$\begin{aligned} i_!(\Delta[n] \times \Delta[m]) &\cong i_!(N([n]) \times N([m])) \cong i_!(N([n] \times [m])) \\ &\cong N_d(j_!([n] \times [m])) \cong N_d(j_!([n]) \otimes_{BV} j_!([m])) \\ &\cong N_d(\Omega(L_n) \otimes_{BV} \Omega(L_m)) \cong \Omega[L_n] \otimes \Omega[L_m] \\ &\cong i_!(\Delta[n]) \otimes i_!(\Delta[m]) \end{aligned}$$

Donde L_n y L_m son dos árboles lineales con n y m vértices, y $n+1$ y $m+1$ aristas; respectivamente.

(ii) Basta con ver que la propiedad se mantiene en los representables en $dSets$. Tenemos la siguiente cadena de isomorfismos naturales, usando el isomorfismo natural $\tau_d N_d \cong \mathrm{id}$

$$\begin{aligned} \tau_d(\Omega[T] \otimes \Omega[S]) &\cong \tau_d N_d((\Omega(T) \otimes_{BV} \Omega(S)) \cong \Omega(T) \otimes_{BV} \Omega(S) \\ &\cong \tau_d(\Omega[T]) \otimes_{BV} \tau_d(\Omega[S]) \end{aligned}$$

(iii) Análogamente siguiendo (ii) pero remplazando X por $N_d(P)$ y Y por $N_d(Y)$. $\square$

4 Shuffle de árboles (Naipear, Barajear o mezclar?)

En esta seción describiremos el producto tensorial $\Omega[S] \otimes \Omega[T]$ para todo par de árboles S y T de Ω, y así conseguir que se entienda el resultado del producto tensorial de conjuntos dendroidales.

4.1 Producto tensorial de árboles lineales

Sean $S = L_n$ y $T = L_m$ dos árboles lineales, entonces por la proposición 3.30(i),

$$\Omega[L_n] \otimes \Omega[L_m] = i_!(\Delta[n]) \otimes i_!(\Delta[m]) \cong i_!(\Delta[n] \times \Delta[m])$$

Los simplices no degenerados del producto de dos representables en conjuntos simpliciales son computados mediante un *shuffle*. Un *(n,m)-shuffle* es un camino de longitud máxima en el conjunto de orden parcial $[n] \times [m]$. Los $(n+m)$-simplices no degenerados de $\Delta[n] \times \Delta[m]$ corresponde a los $(n,\ m)$-shuffles. De hecho,

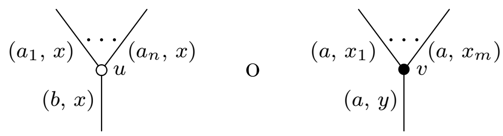
$$\Delta[n] \times \Delta[m] = \bigcup_{(n,m)} \Delta[n+m]$$

Donde la unión recorre todos los posibles (n, m)-shuffles.

Ejemplo 4.1. Sea n... por hacer

4.2 Producto tensorial de árboles

Definición 4.2. Sea S y T dos objetos de Ω. Un *shuffle* de S y T es un árbol R cuyo conjunto de aristas es un subconjunto de $E(S) \times E(T)$. La raíz de R es $(a,\ x)$, donde a es la raíz de S y x es la raíz de T, y sus hojas son todos los pares $(l_S,\ l_T)$, donde l_S es una hoja de S y l_T es una hoja de T. Los vértices son de la forma



Donde u es un vértice de S con entradas $a_1, \ldots, a_n$ y salida b, y v es un vértice de T con entradas $x_1, \ldots, x_m$ y salida y. Nos referiremos a los dos tipos de vértices como *vértices blancos* y *vértices negres*, respectivamente. Para diferenciarlos visualmente los pintaremos con $\circ$ y $\bullet$, respectivamente.

Observamos que existe una biyección entre los shuffles de dos árboles lineales L_n y L_m con los $(n,\ m)$-shuffles de $[n] \times [m]$.

4.2.1 Conjunto de shuffles

Definición 4.3. Sean S y T dos árboles. El *conjunto de shuffles de S y T* es la colección de todos los shuffles posibles entre S y T. La cardinalidad de este conjunto la denotaremos por $sh(S,\ T)$.

Proposición 4.4. *El número de shuffles $sh(S,\ T)$ de dos árboles S y T satisface tres propiedades:*

(i) $sh(S,\ T) = sh(T,\ S)$

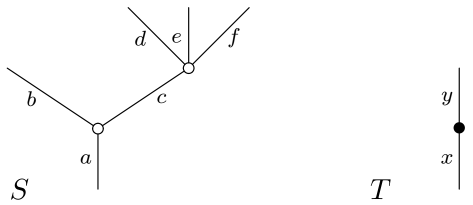
(ii) *Si T es un árbol unitario η, entonces* $sh(S,\ \eta) = 1$

(iii) *Si* $S = C_n[S_1, \ldots, S_n]$ *y* $T = C_m[T_1, \ldots, T_m]$, *entonces*

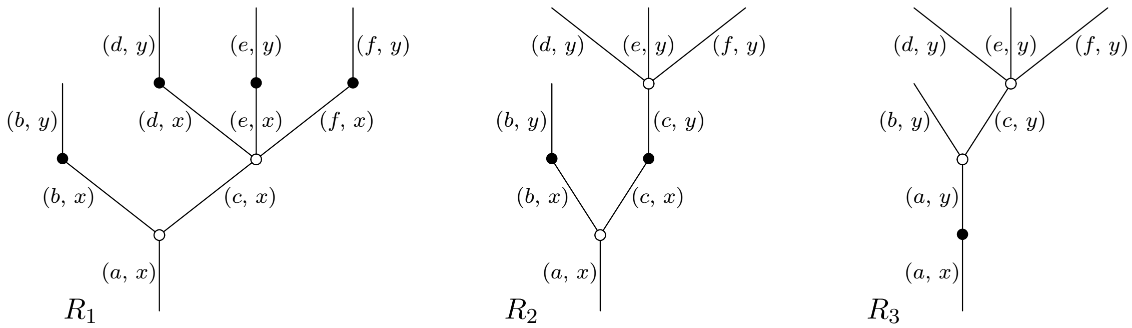
$$sh(S,\ T) = \prod_{i=1}^{n} sh(S_i,\ T) + \prod_{j=1}^{m} sh(S,\ T_j)$$

Donde C_n y C_m son n y m-corolas, respectivamente; y $C_n[S_1, \ldots, S_n]$ es una n-corola que cada hoja i-esima la conectamos con la raíz del árbol S_i.

Ejemplo 4.5. Sean S y T los árboles

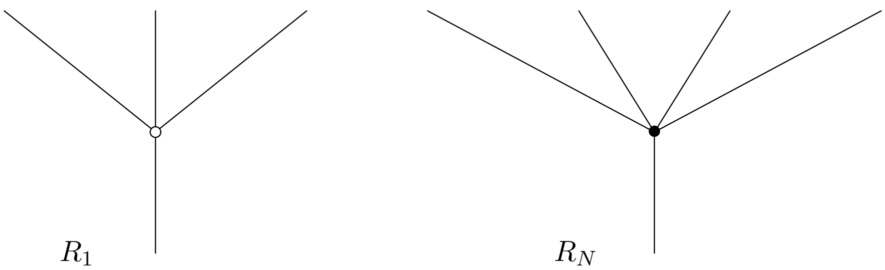


El conjunto de shuffles de S y T consiste de los siguientes tres árboles:

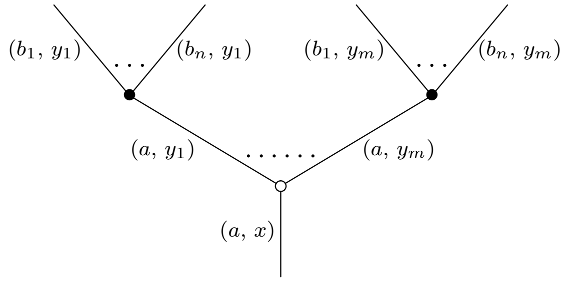


(4.1)

El conjunto de shuffles de S y T es *ordenado parcialmente*. El árbol minimal R_1 en el conjunto ordenado parcialmente se obtiene mediante la inserción de una copia del árbol negro T en cada entrada del árbol blanco S. Es decir, primero hacemos una copia del árbol S de la forma $S \otimes r_T$, donde todas sus aristas han sido renombradas como $(\_,\ r_T)$, siendo r_T la raíz del árbol T. Luego hacemos una copia del árbol T de la forma $l \otimes T$, para toda hoja l de S; donde todas sus aristas han sido renombradas como $(l,\ \_)$. Finalmente, obtenemos el árbol R_1 encajando las últimas copias encima de las hojas de la forma $(l,\ r_T)$ de la primera copia. El árbol maximal R_N en el conjunto ordenado parcialmente se obtiene mediante la inserción de una copia del árbol blanco S en cada entrada del árbol negro T. Los árboles R_1 y R_n deberían lucir de la siguiente manera

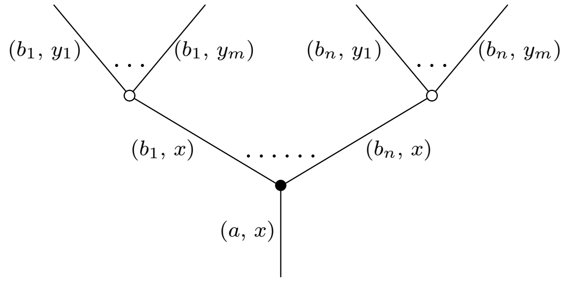


Existen los *shuffles intermediarios* R_k $(1 < k < N)$ entre R_1 y R_N obtenidos filtrando los vértices negros en R_1 hacia la raíz del árbol mediante intercambios con los vértices blancos. Todo R_k se obtiene desde un R_l anterior. Es decir, cada intercambio se basa en transformar una configuración de R_l



(4.2)

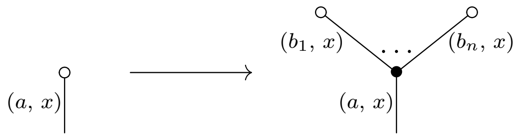
A una configuración de R_k



(4.3)

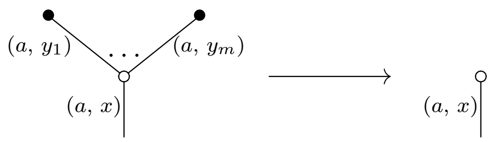
Si un shuffle R_k se obtiene the otro shuffle R_l mediante la norma de arriba, entonces decimos que R_k se obtiene mediante *un solo intercambio* y lo denotaremos por $R_l \leq R_k$. Así, obtenemos un orden parcial en el conjunto de todos los shuffles.

Tenemos que espicificar el caso de un intercambio con un árboles sin entradas, es decir, $n = 0$ o $m = 0$. Si $m = 0$ y $n \neq 0$, entonces tenemos el intercambio



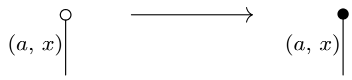
(4.4)

Si $n = 0$ y $m \neq 0$, entonces tenemos el intercambio



(4.5)

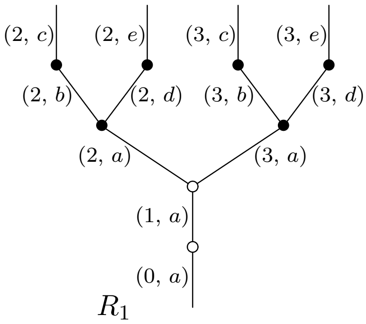
Finalmente, si $n = m = 0$, entonces tenemos el intercambio



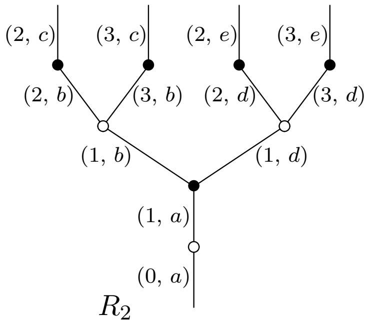
(4.6)

Ejemplo 4.6. Sean S y T los árboles

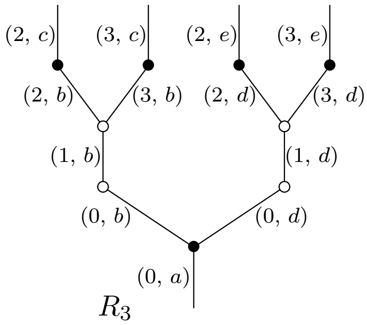
Existen catorce shuffles $R_1, \ldots, R_{14}$ de S y T. Mostramos una lista completa de ellos. Marcaremos los nombres de las aristas en los tres primeros shuffles.



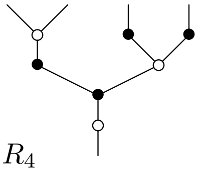
R_1



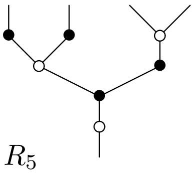
R_2



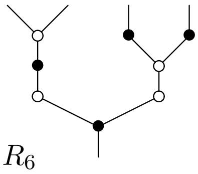
R_3



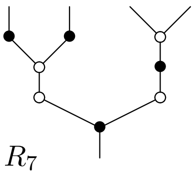
R_4



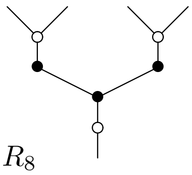
R_5



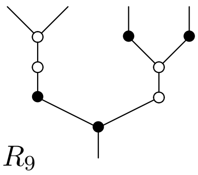
R_6



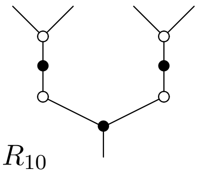
R_7



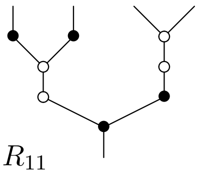
R_8



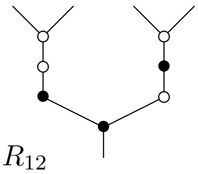
R_9



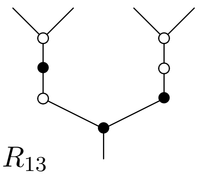
R_{10}



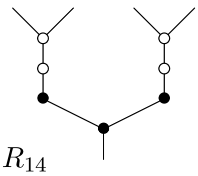
R_{11}



R_{12}



R_{13}



R_{14}

Tenemos la siguiente estructura dentro del conjunto ordenado parcialmente.

$$
\begin{tikzcd}
 & & R_1 \arrow[d, dash] & & \\
 & & R_2 \arrow[dll, dash] \arrow[d, dash] \arrow[drr, dash] & & \\
R_4 \arrow[d, dash] \arrow[drr, dash] & & R_3 \arrow[dll, dash] \arrow[drr, dash] & & R_5 \arrow[dll, dash] \arrow[d, dash] \\
R_6 \arrow[d, dash] \arrow[drr, dash] & & R_8 \arrow[d, dash] & & R_7 \arrow[dll, dash] \arrow[d, dash] \\
R_9 \arrow[dr, dash] & & R_{10} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & R_{11} \arrow[dl, dash] \\
 & R_{12} \arrow[dr, dash] & & R_{13} \arrow[dl, dash] & \\
 & & R_{14} & &
\end{tikzcd}
$$

Ahora vamos a relacionar el conjunto de shuffles con el producto tensorial de conjuntos dendroidales de representables de dos árboles cualesquiera, de esta manera el cálculo del producto resulta ser más fácil.

Lema 4.7. *Para todo shuffle R_i de S y T tenemos un monomorfismo*

$$m\colon \Omega[R_i] \rightarrowtail \Omega[S] \otimes \Omega[T]$$

El subconjunto dendroidal, que viene dado por la imágen de este monomorfismo, lo denotaremos $m(R_i)$.

Proof. Los vérties del conjunto dendroidal $\Omega[R_i]$ son las aristas del árbol R_i. La función m envía aristas nombradas como $(a,\ x)$ en R_i a la arista con el mismo nombre en $\Omega[S]\otimes\Omega[T]$. Vemos que es un monomorfismo. No entiendo. $\square$

Corolario 4.8. *Para todo objeto T y S en Ω, tenemos que*

$$\Omega[S] \otimes \Omega[T] = \bigcup_{i=1}^{N} m(R_i)$$

donde la unión recorre todos los posibles shuffles de S y T.

4.3 Shuffle de árboles en Python

No es complicado ver que tanto encontrar el producto tensorial de conjuntos dendroidales o calcular el conjunto de shuffles para dos árboles cualesquiera, resulta una tarea complicada si los árboles son grandes. Para tal problema, el uso de un programa informático, capaz de almanezar grandes cantidades de información al momento de ejecución, nos resulta cómodo, fácil y rápido.

En esta sección describiré de manera breve el código que he escrito para poder tratar con opéradas, árboles, shuffles y finalmente con el conjunto de shuffles. También, el código incluye una función para formar figuras con el paquete *xy* de *Latex* de un árbol mediante una descripción básica.

Finalmente, dicho código lo podréis encontrar tanto en el Anexo 1 como en el repositorio público de código de Github: Trees Shuffling.

Clases básicas

Definición 4.9. Una *clase informática* es una abastración de propiedades y funciones de un objeto en concreto.

Siguiendo tal definición, tenemos las siguientes clases básicas:

- Operada
- Arbol

5 Conclusiones

Bibliografia

[1] Batut, C.; Belabas, K.; Bernardi, D.; Cohen, H.; Olivier, M.: User's guide to *PARI-GP*,
`pari.math.u-bordeaux.fr/pub/pari/manuals/2.3.3/users.pdf`, 2000.

[2] Chen, J. R.; Wang, T. Z.: On the Goldbach problem, *Acta Math. Sinica*, 32(5):702-718, 1989.

[3] Deshouillers, J. M.: Sur la constante de Šnirel′man, *Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 17e année: (1975/76), Théorie des nombres: Fac. 2, Exp. No.* G16, pág. 6, Secrétariat Math., Paris, 1977.

[4] Deshouillers, J. M.; Effinger, G.; te Riele, H.; Zinoviev, D.: A complete Vinogradov 3-primes theorem under the Riemann hypothesis, *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.*, 3:99-104, 1997.

[5] Dickson, L. E.: *History of the theory of numbers. Vol. I: Divisibility and primality*, Chelsea Publishing Co., New York, 1966.

[6] Hardy, G. H.; Littlewood, J. E.: Some problems of 'Partitio numerorum'; III: On the expression of a number as a sum of primes, *Acta Math.*, 44(1):1-70, 1923.

[7] Hardy, G. H.; Ramanujan, S.: Asymptotic formulae in combinatory analysis, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 17:75-115, 1918.

[8] Hardy, G. H.; Wright, E. M.: *An introduction to the theory of numbers*, 5a edición, Oxford University Press, 1979.

[9] Helfgott, H. A.: Minor arcs for Goldbach's problem,
`arXiv:1205.5252v4 [math.NT]`, diciembre de 2013.

[10] Helfgott, H. A.: Major arcs for Goldbach's problem,
`arXiv:1305.2897v4 [math.NT]`, abril de 2014.

[11] Helfgott, H. A.: The ternary Goldbach conjecture is true,
`arXiv:1312.7748v2 [math.NT]`, enero de 2014.

[12] Helfgott, H. A.; Platt, D.: Numerical verification of the ternary Goldbach conjecture up to $8.875 \cdot 10^{30}$, `arXiv:1305.3062v2 [math.NT]`, abril de 2014.

[13] Klimov, N. I.; Pil′tjaĭ, G. Z.; Šeptickaja, T. A.: An estimate of the absolute constant in the Goldbach-Šnirel′man problem, *Studies in number theory, No. 4*, págs. 35-51, Izdat. Saratov. Univ., Saratov, 1972.

[14] Liu, M. C.; Wang, T.: On the Vinogradov bound in the three primes Goldbach conjecture, *Acta Arith.*, 105(2):133-175, 2002.

[15] Oliveira e Silva, T.; Herzog, S.; Pardi, S.: Empirical verification of the even Goldbach conjecture and computation of prime gaps up to $4 \cdot 10^{18}$, *Math. Comp.*, 83:2033-2060, 2014.