

GRADO EN MATEMÁTICAS

Trabajo final de grado

---

Aspectos combinatorios del  
producto tensorial de conjuntos  
dendroidales

---

Autor: Roger Brascó Garcés

Director: Dr. Javier J. Gutiérrez

Realizado en: Departamento de Matemáticas  
e Informática

Barcelona, 23 de enero de 2022

# Resumen

## Agradecimientos

# Índice

<b>1. Nociones previas</b>	<b>1</b>
1.1. Categorías . . . . .	1
1.1.1. Funtores . . . . .	1
1.2. Opéradas en conjuntos . . . . .	2
1.2.1. Opéradas coloreadas . . . . .	3
<b>2. Conjuntos Simpliciales</b>	<b>4</b>
2.1. Complejos simpliciales . . . . .	4
2.1.1. Morfismos simpliciales . . . . .	4
2.2. Conjunto Delta . . . . .	5
2.2.1. Definición categórica del conjunto Delta . . . . .	5
2.3. Conjunto simplicial . . . . .	6
2.3.1. Definición categórica del conjunto simplicial . . . . .	6
2.4. Realización geométrica . . . . .	7
<b>3. Conjuntos Dendroidales</b>	<b>8</b>
3.1. Árbol como operadas . . . . .	8
3.1.1. Formalismo de árboles . . . . .	8
3.1.2. Árboles planares . . . . .	8
3.2. Morfismos en $\Omega_p$ . . . . .	9
3.2.1. Caras . . . . .	9
3.2.2. Funciones degenerativas . . . . .	10
3.2.3. Identidades dendroidales . . . . .	10
3.3. Árboles no planares . . . . .	12
3.3.1. Prehaz? de estructuras planares . . . . .	12
3.3.2. Relación con la categoría simplicial . . . . .	13
3.4. Conjunto Dendroidal . . . . .	13
3.5. Producto tensorial de conjuntos dendroidales . . . . .	14
3.5.1. Producto tensorial Boardman Vogt . . . . .	14
3.5.2. Producto Producto tensorial de conjuntos dendroidales . . . . .	14
<b>4. Injertos de árboles</b>	<b>15</b>
4.1. Producto tensorial de árboles lineales . . . . .	15
4.2. Producto tensorial de árboles . . . . .	15
4.2.1. Injertos de árboles resultantes . . . . .	15
4.3. Cálculo de árboles resultantes . . . . .	15

4.3.1. Conjunto de árboles resultantes . . . . .	15
4.3.2. Generador de árboles en Python . . . . .	15
<b>5. Conclusiones</b>	<b>16</b>

# 1. Nociones previas

## 1.1. Categorías

**Definición 1.1.** Una *categoría*  $\mathcal{C}$  consiste en:

- Una clase  $\text{Ob}(\mathcal{C})$ , cuyos elementos llamaremos *objetos* de la categoría.
- Para cada par de objetos  $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  un conjunto  $\mathcal{C}(A, B)$  de *morfismos* o *flechas* de  $A$  a  $B$ .
- Para cada tres objetos  $A, B, C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  una *función de composición*

$$\mathcal{C}(B, C) \times \mathcal{C}(A, B) \xrightarrow{\circ} \mathcal{C}(A, C)$$

que envía el par  $(g, f)$  a  $g \circ f$ .

- Para cada objeto  $A$ , un elemento  $\text{id}_A \in \mathcal{C}(A, A)$  que llamaremos la *identidad* en  $A$ .

Además, esta estructura cumple los siguientes axiomas:

- *Asociatividad.* La función de composición es asociativa, esto es, dados  $f \in \mathcal{C}(A, B)$ ,  $g \in \mathcal{C}(B, C)$  y  $h \in \mathcal{C}(C, D)$ , se cumple que  $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ .
- *Unidad.* La identidad es un elemento neutro para la composición, es decir, para toda  $f \in \mathcal{C}(A, B)$  tenemos que  $f \circ \text{id}_A = f = \text{id}_B \circ f$ .

A menudo, denotaremos un objeto  $A$  de  $\mathcal{C}$  como  $A \in \mathcal{C}$ , en vez de  $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  y un morfismo  $f \in \mathcal{C}(A, B)$  como  $f: A \rightarrow B$ . Una categoría  $\mathcal{C}$  es *pequeña* si  $\text{Ob}(\mathcal{C})$  es un conjunto.

**Ejemplo 1.2.** Los siguientes son algunos ejemplos de categorías.

- (i) La categoría  $\text{Set}$  cuyos objetos son todos los conjuntos y cuyos morfismos son las aplicaciones entre conjuntos
- (ii) La categoría  $\text{Grp}$  cuyos objetos son los grupos y cuyos morfismos son los morfismos de grupo.
- (iii) La categoría  $\text{Top}$  cuyos objetos son los espacios topológicos y cuyos morfismos son las aplicaciones continuas.

**Definición 1.3.** Dada una categoría  $\mathcal{C}$ , podemos definir su *categoría opuesta*  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  de la siguiente manera. Los objetos de  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  son los mismos que los de  $\mathcal{C}$ , los morfismos cambian de dirección  $\mathcal{C}^{\text{op}}(A, B) = \mathcal{C}(B, A)$  y la función de composición es  $f \circ^{\text{op}} g = g \circ f$ .

### 1.1.1. Funtores

**Definición 1.4.** Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  dos categorías. Un *functor*  $F$  de  $\mathcal{C}$  en  $\mathcal{D}$ , que denotaremos por  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  consiste en:

- Una aplicación  $\text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})$ . La imagen de un objeto  $A$  de  $\mathcal{C}$  la denotaremos por  $F(A)$

- Para cada par de objetos  $A, B \in \mathcal{C}$  una aplicación

$$\mathcal{C}(A, B) \longrightarrow \mathcal{D}(F(A), F(B)).$$

La imagen de un morfismo  $f: A \rightarrow B$  por esta aplicación la denotaremos por  $F(f): F(A) \rightarrow F(B)$ .

Además, estas aplicaciones son compatibles con la composición y la unidad, esto es, se cumplen los siguientes axiomas:

- Dados  $f \in \mathcal{C}(A, B)$  y  $g \in \mathcal{C}(B, C)$  se cumple que  $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ .
- Para todo objeto  $A \in \mathcal{C}$  se cumple que  $F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$ .

**Observación 1.5.** La noción de funtor que acabamos de llamar también *functor covariante* de  $\mathcal{C}$  en  $\mathcal{D}$ . Un funtor de  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  en  $\mathcal{D}$  se llama *functor contravariante* de  $\mathcal{C}$  en  $\mathcal{D}$ . Observar que si  $F$  es un funtor contravariante de  $\mathcal{C}$  en  $\mathcal{D}$  y  $f: A \rightarrow B$  es un morfismo en  $\mathcal{C}$ , entonces  $F(f): F(B) \rightarrow F(A)$ .

**Ejemplo 1.6.** Dado un conjunto  $X$  cualquiera, podemos construir el grupo libre en los elementos de este conjunto  $F(X)$ . Esto define un funtor  $F: \text{Set} \rightarrow \text{Grp}$ .

**Definición 1.7.** Sea  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un funtor entre dos categorías  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$ . Dados un par de objetos  $A, B \in \mathcal{C}$  consideremos la aplicación

$$F_{A,B}: \mathcal{C}(A, B) \longrightarrow \mathcal{D}(F(A), F(B)).$$

- Diremos que  $F$  es un funtor *fiel* si para cada par de objetos  $A, B \in \mathcal{C}$  la aplicación  $F_{A,B}$  es inyectiva.
- Diremos que  $F$  es un funtor *pleno* si para cada par de objetos  $A, B \in \mathcal{C}$  la aplicación  $F_{A,B}$  es exhaustiva.
- Diremos que  $F$  es un funtor *plenamente fiel* si para cada par de objetos  $A, B \in \mathcal{C}$  la aplicación  $F_{A,B}$  es biyectiva.

## 1.2. Opéradas en conjuntos

Para cada  $n \geq 0$ , denotaremos por  $\Sigma_n$  el grupo simétrico de  $n$  letras (en el caso  $n = 0, 1$ ,  $\Sigma_n$  será el grupo trivial).

**Definición 1.8.** Una *opérada*  $P$  consiste en una sucesión de conjuntos  $\{P(n)\}_{n \geq 0}$  junto con la siguiente estructura:

- Un elemento *unidad*  $1 \in P(1)$ .
- Un *producto composición*

$$P(n) \times P(k_1) \times \cdots \times P(k_n) \longrightarrow P(k)$$

para cada  $n$  y  $k_1, \dots, k_n$  tal que  $k = \sum_{i=1}^n k_i$ .

- Para cada  $\sigma \in \Sigma_n$  una *acción por la derecha*  $\sigma^*: P(n) \rightarrow P(n)$ .

Además el producto composición es asociativo, equivariante y compatible con la unidad.

**Definición 1.9.** Dadas dos opéradas  $P$  y  $Q$ , un morfismo de opéradas  $f: P \rightarrow Q$  consiste en aplicaciones  $f_n: P(n) \rightarrow Q(n)$  para cada  $n \geq 0$  compatibles con el producto composición, la unidad y la acción del grupo simétrico.

### 1.2.1. Opéradas coloreadas

La noción de opérada coloreada generaliza a la vez el concepto de categoría y de opérada.

**Definición 1.10.** Sea  $C$  un conjunto, cuyos elementos llamaremos colores. Una opérada  $C$ -coloreada  $P$  consiste en, para cada  $(n+1)$ -tupla de colores  $(c_1, \dots, c_n, c)$  con  $n \geq 0$ , un conjunto  $P(c_1, \dots, c_n; c)$  (que representará el conjunto de operaciones cuyas entradas están coloreadas por los colores  $c_1, \dots, c_n$  y cuya salida esta coloreada por  $c$ ), junto con la siguiente estructura:

- Un elemento *unidad*  $1_c \in P(c; c)$  para cada  $c \in C$ .
- Un *producto composición*

$$\begin{aligned} P(c_1, \dots, c_n; c) \otimes P(d_{1,1}, \dots, d_{1,k_1}; c_1) \otimes \dots \otimes P(d_{n,1}, \dots, d_{n,k_n}; c_n) \\ \longrightarrow P(d_{1,1}, \dots, d_{1,k_1}, \dots, d_{n,1}, \dots, d_{n,k_n}; c) \end{aligned}$$

para cada  $(n+1)$ -tupla de colores  $(c_1, \dots, c_n; c)$  y  $n$  tuplas cualesquiera

$$(d_{1,1}, \dots, d_{1,k_1}; c_1), \dots, (d_{n,1}, \dots, d_{n,k_n}; c_n)$$

- Para cada elemento  $\sigma \in \Sigma_n$  una *acción*

$$\sigma^* : P(c_1, \dots, c_n; c) \longrightarrow P(c_{\sigma(1)}, \dots, c_{\sigma(n)}; c).$$

Además el producto composición es asociativo, equivariante y compatible con las unidades.

**Definición 1.11.** Sea  $P$  una opérada  $C$ -coloreada y  $Q$  una opérada  $D$ -coloreada. Un *morfismo de opéradas*  $f: P \rightarrow Q$  consiste en una aplicaciones entre los conjuntos de colores  $f: C \rightarrow D$  y aplicaciones

$$f_{c_1, \dots, c_n; c} : P(c_1, \dots, c_n; c) \longrightarrow Q(f(c_1), \dots, f(c_n); c)$$

compatibles con el producto composición, las unidades y la acción del grupo simétrico.

Denotaremos por  $\text{Oper}$  la categoría cuyos objetos son operadas coloreadas y cuyos morfismos son los morfismos de operadas coloreadas.

**Ejemplo 1.12.** Si  $C = \{*\}$ , entonces una opérada  $C$ -coloreada es lo mismo que una opérada. Si  $P$  es una opérada  $C$ -coloreada tal que solamente tiene operaciones de aridad uno, es decir  $P(c_1, \dots, c_n; c) = \emptyset$  si  $n \neq 1$ , entonces  $P$  es una categoría, cuyo conjunto de objetos es  $C$ .



## 2. Conjuntos Simpliciales

### 2.1. Complejos simpliciales

#### Definición 2.1. N-simplex

Un  $n$ -simplex es un politopo de  $n \geq 0$  dimensiones formando una envoltura convexa de  $n + 1$  vertices. Es decir, es un conjunto de puntos afines independientes en un espacio euclídeo de dimensión  $n$ .

Una cara  $m$  de un  $n$ -simplex es una envoltura convexa de  $m \leq n$  vertices.

#### Definición 2.2. Complejo simplicial

Sea  $n \in \mathbb{N}^*$ , un complejo simplicial  $X$  es un conjunto finito de  $m$ -simplex con  $m \leq n$  que cumplen las condiciones:

- (1) Si  $m$ -simplex  $\in X \Rightarrow \forall m' \leq m, m'$ -simplex  $\in X$ .
- (2) Si dos simplices de  $X$  se cortan, entonces su intersección es una cara común.

Sea  $X^k$  un complejo simplicial formado por todos los  $k$ -simplex de  $X$ . Observamos que todo elemento de  $X^k$  es un subconjunto de  $X^0$  con cardinal  $k+1$ , donde  $X^0 = \{v_0, \dots, v_n\}$ . Generalmente, todo subconjunto de  $X^k$  de  $j + 1$  elementos es un elemento de  $X^j$ .

Sea  $X_k$  un conjunto formado por  $k$ -simplices.

#### Definición 2.3. N-simplex ordenado

Un  $n$ -simplex formado por los vértices  $v_0, \dots, v_n \in X^0$  es ordenado cuando los vértices están ordenados, en ese caso nombramos cada vértice por los números  $0, \dots, n$ . Usaremos la notación  $|\Delta^n| = [0, \dots, n]$  para simplificar.

#### 2.1.1. Morfismos simpliciales

#### Definición 2.4. Morfismo simplicial

Sea  $K$  y  $L$  complejos simpliciales. Sea un morfismo simplicial  $F : K \longrightarrow L$  que envía los vertices de  $K$  a los vertices de  $L$ . Es decir,  $\forall v \in K^0, v \longmapsto F(v) \in L^0$ .

#### Definición 2.5. Cara

Para todo  $|\Delta^n|$  tenemos  $n + 1$  caras definidas por los morfismos  $\delta_0, \dots, \delta_n$

$$\begin{aligned} \delta_j : X_n &\longrightarrow X_{n-1} \\ [0, \dots, n] &\longmapsto [0, \dots, \hat{j}, \dots, n] \end{aligned}$$

Donde  $X_n$  y  $X_{n-1}$  son conjuntos de simplices ordenados de  $n$  y  $n - 1$  vértices, respectivamente. Observamos que  $\forall i < j, \delta_i \delta_j = \delta_{j-1} \delta_i$ .

#### Definición 2.6. Morfismo degenerativo

Para todo  $|\Delta^n|$  tenemos  $n + 1$  morfismos degenerativos  $\sigma_0, \dots, \sigma_n$

$$\begin{aligned}\sigma_j : X_n &\longrightarrow X_{n+1} \\ [0, \dots, n] &\longmapsto [0, \dots, j, j, \dots, n]\end{aligned}$$

Donde  $X_n$  y  $X_{n+1}$  son conjuntos de simplices ordenados de  $n$  y  $n + 1$  vértices, respectivamente. Observamos que  $\forall i \leq j, \sigma_i \sigma_j = \sigma_{j+1} \sigma_i$ .

## 2.2. Conjunto Delta

### Definición 2.7. Conjunto Delta

Definimos un conjunto Delta como una secuencia de conjuntos  $X_0, X_1, \dots$  y para cada  $n \geq 0$  las funciones  $\delta_i : X_{n+1} \longrightarrow X_n, \forall 0 \leq i \leq n + 1$ , que cumplen  $\delta_i \delta_j = \delta_{j-1} \delta_i, \forall i \leq j$ . Formando el siguiente diagrama (Falta por hacer)

$$X_0 \xrightarrow{\quad} X_1 \xrightarrow{\quad} X_2 \dots$$

### 2.2.1. Definición categórica del conjunto Delta

#### Definición 2.8. Categoría $\hat{\Delta}$

Sea la categoría  $\hat{\Delta}$  cuyos objetos son los conjuntos estrictamente ordenados finitos  $[n] = \{0, \dots, n\}$  y los morfismos son las funciones, que mantienen el orden estrictamente,  $f : [m] \longrightarrow [n], m \leq n$ . Podemos pensar que sea la inclusión de un  $m$ -simplex como cara de un  $n$ -simplex. Para todo  $0 \leq i \leq n$  consideramos los morfismos:

$$\begin{aligned}d_i : [n] &\longrightarrow [n + 1] \\ \{0, \dots, n\} &\longmapsto \{0, \dots, \hat{i}, \dots, n + 1\}\end{aligned}$$

#### Definición 2.9. Categoría $\hat{\Delta}^{op}$

Sea la categoría  $\hat{\Delta}^{op}$ , la categoría opuesta de  $\hat{\Delta}$ , cuyos objetos son los conjuntos estrictamente ordenados finitos  $[n] = \{0, \dots, n\}$  y los morfismos son las funciones, que mantienen el orden estrictamente,  $f : [n] \longrightarrow [m], m \leq n$ . Podemos pensar que sea la extracción de la cara  $m$ -simplex de un  $n$ -simplex. Para todo  $0 \leq i \leq n$  consideramos los morfismos:

$$\begin{aligned}\delta_i : [n] &\longrightarrow [n - 1] \\ \{0, \dots, n\} &\longmapsto \{0, \dots, \hat{i}, \dots, n\}\end{aligned}$$

### Definición 2.10. Conjunto Delta

Un conjunto Delta es un functor covariante  $X : \hat{\Delta}^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$ , equivalentemente es un functor contravariante  $X : \hat{\Delta} \longrightarrow \mathbf{Set}$ .

Faltan observaciones.

## 2.3. Conjunto simplicial

### Definición 2.11. Conjunto simplicial

Definimos un conjunto simplicial como una secuencia de conjuntos  $X_0, X_1, \dots$  y para cada  $n \geq 0$  las funciones  $\delta_i : X_n \rightarrow X_{n-1}$  y  $\sigma_i : X_n \rightarrow X_{n+1}$ ,  $\forall 0 \leq i \leq n$ , que cumplen:

- (1)  $\delta_i \delta_j = \delta_{j-1} \delta_i$ ,  $i < j$
- (2)  $\delta_i \sigma_j = \sigma_{j-1} \delta_i$ ,  $i < j$
- (3)  $\delta_j \sigma_j = \delta j + 1 \sigma_j = id$
- (4)  $\delta_i \sigma_j = \sigma_j \delta_{i-1}$ ,  $i > j + 1$
- (5)  $\sigma_i \sigma_j = \sigma_{j+1} \sigma_i$ ,  $i \leq j$

Formando el siguiente diagrama (Falta por hacer)

$$X_0 \xrightarrow{\quad} X_1 \xrightarrow{\quad} X_2 \dots$$

### 2.3.1. Definición categórica del conjunto simplicial

#### Definición 2.12. Categoría $\Delta$

Sea la categoría  $\Delta$  cuyos objetos son los conjuntos ordenados finitos  $[n] = \{0, \dots, n\}$  y los morfismos son las funciones, que mantienen solamente el orden,  $f : [m] \rightarrow [n]$ . Para todo  $0 \leq i \leq n$  consideramos los morfismos:

$$\begin{aligned} d_i : [n] &\rightarrow [n+1] \\ \{0, \dots, n\} &\mapsto \{0, \dots, \hat{i}, \dots, n+1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_i : [n+1] &\rightarrow [n] \\ \{0, \dots, n+1\} &\mapsto \{0, \dots, i, i, \dots, n\} \end{aligned}$$

#### Definición 2.13. Categoría $\hat{\Delta}^{op}$

Sea la categoría  $\Delta^{op}$ , la categoría opuesta de  $\Delta$ , cuyos objetos son los conjuntos ordenados finitos  $[n] = \{0, \dots, n\}$  y los morfismos son las funciones, que mantienen solamente el orden,  $f : [m] \rightarrow [n]$ . Para todo  $0 \leq i \leq n$  consideramos los morfismos:

$$\begin{aligned} \delta_i : [n] &\rightarrow [n-1] \\ \{0, \dots, n\} &\mapsto \{0, \dots, \hat{i}, \dots, n\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_i : [n] &\rightarrow [n+1] \\ \{0, \dots, n\} &\mapsto \{0, \dots, i, i, \dots, n\} \end{aligned}$$

### Definición 2.14. Conjunto simplicial

Un conjunto simplicial es un functor covariante  $X : \Delta^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$ , equivalentemente es un functor contravariante  $X : \Delta \longrightarrow \mathbf{Set}$ . Usaremos la notación  $\Delta[n] = \Delta(-, [n])$ .

$$\begin{aligned} \Delta[n] : \Delta^{op} &\longrightarrow \mathbf{Set} \\ [m] &\longmapsto \Delta([m], [n]) \end{aligned}$$

Faltan observaciones.

## 2.4. Realización geométrica

**Definición 2.15.** Realización geométrica

Sea  $X$  un conjunto simplicial. Dotamos cada  $X_n$  con la topología discreta y sea  $|\Delta^n|$  el  $n$ -simplex dotado de su topología estandar. Definimos la realización geométrica como

$$|X| = \coprod_{n=0}^{\infty} X_n \times |\Delta^n| / \sim$$

Donde  $\sim$  es la relación de equivalencia generada por las relaciones:

- (1)  $(x, d_i(p)) \sim (\delta_i(x), p)$ ,  $x \in X_{n+1}$  y  $p \in |\Delta^n|$
- (2)  $(x, s_i(p)) \sim (\sigma_i(x), p)$ ,  $x \in X_{n-1}$  y  $p \in |\Delta^n|$

**Ejemplo 2.16.**  $\Delta[2] = \Delta(-, [2])$

Falta por escribir

### 3. Conjuntos Dendroidales

#### 3.1. Árbol como operadas

##### 3.1.1. Formalismo de árboles

Un *árbol* es un grafo no vacío, finito, conectado y sin lazos. Llamaremos un *vértice exterior* si tiene solamente una arista adjunta. Todos los árboles que consideraremos tendrán *raíz*, es decir, para cada árbol existe un vértice exterior, llamado *output* o *salida*, donde se ve claramente que tiene un conjunto de vértices exteriores, llamado *inputs* o *entradas*. Este último conjunto puede ser vacío y no contiene el vértice output.

Para dibujar dichos árboles, borraremos los vértices output e inputs de la figura. De tal manera que los vértices restantes serán los *vértices* del árbol. Dado un árbol  $T$ , definimos el conjunto de vértices como  $V(T)$  y el conjunto de aristas como  $E(T)$ .

Llamaremos *hojas* o *aristas externas* a las aristas adjuntas de los vértices inputs y *raíz* a la arista adjunta del vértice output. De tal manera que las aristas restantes las llamaremos *aristas internas*. Podemos observar que existe una dirección clara en cada árbol, desde las hojas hasta la raíz.

Sea  $v$  un vértice de un árbol finito con raíz, definimos  $\text{out}(v)$  como la única arista de salida y  $\text{in}(v)$  como el conjunto de aristas de entrada, observamos que este último conjunto puede ser vacío. Llamaremos la *valencia* de  $v$  a la cardinalidad del conjunto  $\text{in}(v)$ .

Finalmente, consideramos a la siguiente figura como un árbol de ejemplo:

##### 3.1.2. Árboles planares

**Definición 3.1.** Un *árbol planar con raíz* es un árbol con raíz  $T$  dotado con un orden lineal del conjunto  $\text{in}(v)$  para cada  $v$  de  $T$ .

**Observación 3.2.** El orden de los conjuntos  $\text{in}(v)$  se obtiene de la idea de dibujar los árboles en un plano. Es decir, para dibujar un árbol siempre pondremos la raíz debajo y las hojas arriba con un orden trivial. Observamos con esta técnica que tendremos varias representaciones planares del mismo árbol. Por ejemplo,

**Definición 3.3.** Un árbol es *unitario* cuando la arista de entrada y salida son la misma. En ese caso lo denotaremos como  $\eta$ .

**Definición 3.4.** Sea  $T$  un árbol planar con raíz. Denotaremos una operada coloreada no-simétrica generada por  $T$  como  $\Omega_p(T)$ . El conjunto de colores de  $\Omega_p(T)$  es el conjunto de aristas  $E(T)$  de  $T$  y las operaciones son generadas por los vértices del árbol. Es decir, para cada vértice  $v$  con entradas  $e_1, \dots, e_n$  y salida  $e$ , definimos una operación  $v \in \Omega_p(T)(e_1, \dots, e_n; e)$ . Las otras operaciones son las operaciones unitarias y las operaciones obtenidas por composición.

**Observación 3.5.** Para todo  $e_1, \dots, e_n, e$ , el conjunto de operaciones  $\Omega_p(T)(e_1, \dots, e_n; e)$  contiene como mucho un solo elemento.

**Ejemplo 3.6.** Vamos a realizar la descripción completa del siguiente árbol  $T$ :

La operada  $\Omega_p(T)$  tiene seis colores  $a, b, c, d, e$ , y  $f$ . Las operaciones generadoras son  $v \in \Omega_p(T)(e, f; b)$ ,  $w \in \Omega_p(T)(\cdot; d)$  y  $r \in \Omega_p(T)(b, c, d; a)$ . Mientras que las otras

operaciones son las operaciones unitarias  $1_a, 1_b, \dots, 1_f$  y las operaciones composición  $r \circ_1 v \in \Omega_p(T)(e, f, c, d; a)$ ,  $r \circ_2 w \in \Omega_p(T)(b, c; a)$  y

$$(r \circ_1 v) \circ_3 w = (r \circ_2 w) \circ_1 v \in \Omega_p(T)(e, f, c; a)$$

**Definición 3.7.** La categoría de árboles planares con raíz  $\Omega_p$  es la subcategoría plena de la categoría de opéradas coloreadas no-simétricas cuyos objetos son  $\Omega_p(T)$  para todo árbol  $T$ .

Podemos pensar que  $\Omega_p$  es una categoría cuyos objetos son árboles planares con raíz. Sean  $S$  y  $T$  dos árboles planares con raíz, el conjunto de morfismos  $\Omega_p(S, T)$  es dado por los morfismos entre opéradas coloreadas no-simétricas de  $\Omega_p(S)$  a  $\Omega_p(T)$ .

**Observación 3.8.** La categoría  $\Omega_p$  extiende la categoría simplicial  $\Delta$ . Para todo  $n \geq 0$  se define un árbol lineal  $L_n$  como un árbol planar con  $n + 1$  aristas y  $n$  vértices  $v_1, \dots, v_n$ , donde la valencia de todos los vértices es uno.

Denotaremos este árbol por  $[n]$ . Toda aplicación que mantiene el orden de manera que envíe  $\{0, \dots, n\}$  a  $\{0, \dots, m\}$ , define un morfismo  $[n] \rightarrow [m]$  en la categoría  $\Omega_p$ . De esta manera obtenemos el siguiente funtor

$$\Delta \xhookrightarrow{i} \Omega_p$$

Este funtor es plenamente fiel. Es decir, para toda flecha  $S \rightarrow T$  en  $\Omega_p$ , si  $T$  es lineal entonces  $S$  también lo es. (Falta demostración)

## 3.2. Morfismos en $\Omega_p$

En las siguientes secciones vamos a tratar con todos los tipos de morfismos en  $\Omega_p$  y dar una descripción más explícita.

### 3.2.1. Caras

Sea  $T$  un árbol planar con raíz.

**Definición 3.9.** Una cara interna asociada a una arista interna  $b$  en  $T$  es una función  $\partial_b: T/b \rightarrow T$  en  $\Omega_p$ , donde  $T/b$  es el árbol que se obtiene al contraer la arista  $b$ .

Esta función es una inclusión de los colores y de las operaciones generadoras de  $\Omega_p(T/b)$ , excepto por la operación  $u$ , que se envía a la composición  $r \circ_b v$ . Donde  $r$  y  $v$  son dos vértices en  $T$  con la arista  $b$  entre ellos, y  $u$  es el vértice correspondiente en  $T/b$ . Tomamos la siguiente figura para visualizar la función.

**Definición 3.10.** Una cara externa asociada a un vértice  $v$  en  $T$ , con solo una arista interna adjunta, es una función  $\partial_v: T/v \rightarrow T$  en  $\Omega_p$ , donde  $T/v$  es el árbol que se obtiene al cortar el vértice  $v$  con todas sus aristas externas.

Esta función es una inclusión de los colores y de las operaciones generadoras de  $\Omega_p(T/v)$ . Donde  $r$  y  $v$  son dos vértices en  $T$  con la arista  $b$  entre ellos, y  $u$  es el vértice correspondiente en  $T/b$ . Tenemos dos tipos de cara externa que mostramos en las siguientes figuras.

**Observación 3.11.** Con esta última definición no queda excluida la posibilidad de cortar la raíz. Esta situación solo sera posible si la raíz tiene solamente una arista interna adjunta. Entonces, no todo árbol  $T$  tiene una cara externa asociada a su raíz.

**Observación 3.12.** Vale la pena mencionar un caso en especial, la inclusión de un árbol sin vértices  $\eta$  en un árbol con un vértice, llamado *corola*. En este caso tendremos  $n + 1$  caras si la corola tiene  $n$  hojas. La opéada  $\Omega_p(\eta)$  consiste solamente de un color y la operación identidad de dicho color. Entonces, una función de opéadas  $\Omega_p(\eta) \rightarrow \Omega(T)$  es simplemente un color de una corola  $T$ .

Para concluir, llamaremos *caras* tanto las caras internas como las caras externas.

### 3.2.2. Funciones degenerativas

Sea  $T$  un árbol planar con raíz y  $v$  un vértice de valencia uno en  $T$ .

**Definición 3.13.** Una *función degenerativa* asociada al vértice  $v$  es una función  $\sigma_v: T \rightarrow T \setminus v$  en  $\Omega_p$ , donde  $T \setminus v$  es el árbol que se obtiene al cortar el vértice  $v$  y juntar las dos aristas adjuntas en una nueva arista  $e$ .

Esta función envía los colores  $e_1$  y  $e_2$  de  $\Omega_p(T)$  al color  $e$  de  $\Omega_p(T \setminus v)$  y envía la operación generativa  $v$  a la operación identidad  $id_e$ , mientras que es la identidad para los colores y operaciones generativas restantes. Tomamos la siguiente figura para visualizar la función.

**Observación 3.14.** Las caras y las funciones degenerativas generan toda la categoría  $\Omega_p$ .

El siguiente lema es una generalización hacia  $\Omega_p$  del lema en la categoría  $\Delta$ , diciendo que toda flecha en dicha categoría se puede escribir como composición de funciones degenerativas seguidas por caras.

**Lema 3.15.** Sea  $S, T$  y  $H$  unos árboles en  $\Omega_p$ , toda flecha  $f: S \rightarrow T$  en  $\Omega_p$  descompone, salvo isomorfías, como

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & T \\ & \searrow \sigma & \uparrow \partial \\ & & H \end{array}$$

donde  $\sigma: S \rightarrow H$  es una composición de funciones degenerativas y  $\partial: H \rightarrow T$  es una composición de caras.

Demo: por hacer

### 3.2.3. Identidades dendroidales

En esta sección vamos a dar las relaciones entre los morfismos generadores de  $\Omega_p$ . Las identidades que obtenemos generalizan los morfismos en la categoría  $\Delta$ .

#### Relaciones elementales de caras

Sea  $\partial_a: T/a \rightarrow T$  y  $\partial_b: T/b \rightarrow T$  dos caras internas distintas de  $T$ . Seguidamente tenemos las caras internas  $\partial_a: (T/b)/a \rightarrow T/b$  y  $\partial_b: (T/a)/b \rightarrow T/a$ . Observamos que

$(T/a)/b = (T/b)/a$ , entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} (T/a)/b & \xrightarrow{\partial_b} & T/a \\ \partial_a \downarrow & & \downarrow \partial_a \\ T/b & \xrightarrow{\partial_b} & T \end{array}$$

Sea  $\partial_v: T/v \rightarrow T$  y  $\partial_w: T/w \rightarrow T$  dos caras externas distintas de  $T$ , y asumimos que  $T$  tiene como mínimo tres vértices. Seguidamente tenemos las caras externas  $\partial_v: (T/w)/v \rightarrow T/w$  y  $\partial_w: (T/v)/w \rightarrow T/v$ . Observamos que  $(T/v)/w = (T/w)/v$ , entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} (T/v)/w & \xrightarrow{\partial_w} & T/v \\ \partial_v \downarrow & & \downarrow \partial_v \\ T/w & \xrightarrow{\partial_w} & T \end{array}$$

En el caso que  $T$  solo tenga dos vértices, existe un diagrama conmutativo similar mediante la inclusión de  $\eta$  a una  $n$ -corla. Último caso componer interna con externa. - por hacer!

### Relaciones elementales de funciones degenerativas

Sea  $\sigma_v: T \rightarrow T \setminus v$  y  $\sigma_w: T \rightarrow T \setminus w$  dos funciones degenerativas distintas de  $T$ . Seguidamente tenemos las funciones degenerativas  $\sigma_v: T \setminus w \rightarrow (T \setminus w) \setminus v$  y  $\sigma_w: T \setminus v \rightarrow (T \setminus v) \setminus w$ . Observamos que  $(T \setminus v) \setminus w = (T \setminus w) \setminus v$ , entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\sigma_w} & T \setminus w \\ \sigma_v \downarrow & & \downarrow \sigma_v \\ T \setminus v & \xrightarrow{\sigma_w} & (T \setminus v) \setminus w \end{array}$$

### Relaciones combinadas

Sea  $\sigma_v: T \rightarrow T \setminus v$  una función degenerativa y  $\partial: T' \rightarrow T$  es una cara de tal manera que la función degenerativa  $\sigma_v: T' \rightarrow T' \setminus v$  esta bien definida. Entonces existe una cara  $\partial: T' \setminus v \rightarrow T \setminus v$  determinada por el mismo vértice o arista que  $\partial: T' \rightarrow T$ . Además, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\sigma_v} & T \setminus v \\ \partial \uparrow & & \uparrow \partial \\ T' & \xrightarrow{\sigma_v} & T' \setminus v \end{array}$$

Sea  $\sigma_v: T \rightarrow T \setminus v$  una función degenerativa y  $\partial: T' \rightarrow T$  es una cara interna en una arista adjunta a  $v$  o una cara externa en  $v$ , si es posible. Entonces, tenemos que  $T' = T \setminus v$  y la composición  $T \setminus v \xrightarrow{\partial} T \xrightarrow{\sigma_v} T \setminus v$  es la función identidad  $id_{T \setminus v}$ .



### 3.3. Árboles no planares

**Definición 3.16.** Sea  $T$  un árbol no-planar. Denotaremos una opéradada coloreada simétrica generada por  $T$  como  $\Omega(T)$ . El conjunto de colores de  $\Omega(T)$  es el conjunto de aristas  $E(T)$  de  $T$ . Las operaciones son generadas por los vértices del árbol, y el grupo simétrico de  $n$  letras  $\Sigma_n$  actúa en cada operación de  $n$  entradas permutando el orden de las entradas. Es decir, para cada vértice  $v$  con entradas  $e_1, \dots, e_n$  y salida  $e$ , definimos una operación  $v \in \Omega(T)(e_1, \dots, e_n; e)$ . Las otras operaciones son las operaciones unitarias, las operaciones obtenidas por composición y la acción del grupo simétrico.

**Ejemplo 3.17.** Consideramos la figura del siguiente árbol  $T$ :

La opéradada  $\Omega(T)$  tiene seis colores  $a, b, c, d, e$ , y  $f$ . Las operaciones generadoras son las mismas que las operaciones generativas en  $\Omega_p(T)$ . Observamos que toda operación de  $\Omega_p(T)$  son operaciones de  $\Omega(T)$ , pero no a la inversa ya que hay más operaciones en  $\Omega(T)$  obtenidas por la acción del grupo simétrico. Por ejemplo, sea  $\sigma$  la transposición de dos elementos de  $\Sigma_2$ , entonces tenemos una operación  $v \circ \sigma \in \Omega(f, e; b)$ .

**Observación 3.18.** Sea  $T$  cualquier árbol, entonces  $\Omega(T) = \Sigma(\Omega_p(\bar{T}))$ , donde  $\bar{T}$  es una representación planar de  $T$ . De hecho, se elige una estructura planar de  $T$  como generador de  $\Omega(T)$ .

**Definición 3.19.** La categoría de árboles con raíz  $\Omega$  es la subcategoría completa|llena de la categoría de opéradadas coloreadas cuyos objetos son  $\Omega(T)$  para todo árbol  $T$ .

Podemos pensar que  $\Omega$  es una categoría cuyos objetos son árboles con raíz. Sean  $S$  y  $T$  dos árboles con raíz, el conjunto de morfismos  $\Omega(S, T)$  es dado por los morfismos entre opéradadas coloreadas de  $\Omega(S)$  a  $\Omega(T)$ .

**Observación 3.20.** Los morfismos de la categoría  $\Omega$  son generados por las caras y las funciones degenerativas, análogas al caso planar, y las isomorfías no-planares.

**Lema 3.21.** Sea  $S, S', T$  y  $T'$  unos árboles en  $\Omega$ , toda flecha  $f: S \rightarrow T$  en  $\Omega$  descompone como

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & T \\ \sigma \downarrow & & \uparrow \partial \\ S' & \xrightarrow{\varphi} & T' \end{array}$$

donde  $\sigma: S \rightarrow S'$  es una composición de funciones degenerativas,  $\varphi: S' \rightarrow T'$  es un isomorfía, y  $\partial: T \rightarrow T'$  es una composición de caras.

Demo: por hacer

#### 3.3.1. Prehaz? de estructuras planares

Sea  $P: \Omega^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$  el prehaz en  $\Omega$  que envía cada árbol a su conjunto de estructuras planares. Observamos que  $P(T)$  es un torsor en  $\text{Aut}(T)$  para cada árbol  $T$ , donde  $\text{Aut}(T)$  denota el conjunto de automorfismos de  $T$ . Recordamos que la categoría  $\Omega \backslash P$  es la categoría cuyos objetos son pares  $(T, x)$  con  $x \in P(T)$ . Sean  $(T, x)$  y  $(S, y)$  dos objetos, un morfismo entre ellos es dado por el morfismo  $f: \rightarrow S$  en  $\Omega$ , tal que  $P(f)(y) = x$ . Entonces, tenemos que  $\Omega \backslash P = \Omega_p$  y existe una proyección  $v: \Omega_p \rightarrow \Omega$ . Tenemos el siguiente

triángulo conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \xrightarrow{u} & \Omega_p \\ & \searrow i & \downarrow v \\ & & \Omega \end{array}$$

Donde  $i$  es un encaje plenamente fiel de  $\Delta$  hacia  $\Omega$ , que envía el objeto  $[n]$  de  $\Delta$  al árbol lineal  $L_n$  de  $\Omega$ , para todo  $n \geq 0$ .

### 3.3.2. Relación con la categoría simplicial

Hemos podido ver que las dos categorías,  $\Omega_p$  y  $\Omega$ , extienden la categoría  $\Delta$ , gracias a ver los objetos de  $\Delta$  como árboles lineales. Además, se puede obtener  $\Delta$  como la categoría coma de  $\Omega_p$  o  $\Omega$ .

Sea  $\eta$  un árbol en  $\Omega$  que no contiene ningún vértice y tan solo una arista, y sea  $\eta_p$  su representación planar en  $\Omega_p$ . Si  $T$  es un árbol cualquiera en  $\Omega$ , entonces  $\Omega(T, \eta)$  consiste en un solo morfismo o es el conjunto vacío, dependiendo si  $T$  es un árbol lineal o no. Pasa lo mismo con  $\Omega_p$  y  $\eta_p$ . Entonces,  $\Omega \setminus \eta = \Omega_p \setminus \eta_p = \Delta$ .

## 3.4. Conjunto Dendroidal

En esta sección vamos a introducir nociones básicas y terminología para la categoría de los conjuntos dendroidales. Describiremos la categoría de los conjuntos dendroidales y los conjuntos dendroidales planares como categorías de los prehaces en  $\Omega$  y  $\Omega_p$ , respectivamente. Hemos visto la relación entre estas categorías con la categoría de conjuntos simpliciales y la categoría de las opéradas, mediante la unión 'adjoint' natural de funtores entre ellas. Más adelante definiremos un nervio dendroidal, desde opéradas hacia conjuntos dendroidales, generalizando así la construcción clásica del nervio, desde categorías pequeñas hacia conjuntos simpliciales.

**Definición 3.22.** La categoría  $d\text{Set}$  de *conjuntos dendroidales* es la categoría de prehaces en  $\Omega$ . Los objetos son funtores  $\Omega^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$  y los morfismos vienen de las transformaciones naturales. La categoría  $pd\text{Set}$  de *conjuntos dendroidales planares* esta definida de manera análoga intercambiando  $\Omega$  por  $\Omega_p$ .

Entonces, un conjunto dendroidal  $X$  viene definido como un conjunto  $X(T)$ , denotado por  $X_T$ , para cada árbol  $T$ , conjuntamente con una función  $\alpha^*: X_T \rightarrow X_S$  para cada morfismo  $\alpha: S \rightarrow T$  en  $\Omega$ . Como  $X$  es un funtor, entonces  $(id)^* = id$  y si  $\alpha: S \rightarrow T$  y  $\beta: R \rightarrow S$  son morfismos en  $\Omega$ , entonces  $(\alpha \circ \beta)^* = \beta^* \circ \alpha^*$ . El conjunto  $X_T$  lo llamaremos conjunto de *dendrices con forma T*, o simplemente como el conjunto de  $T$ -dendrices.

Sean  $X$  y  $Y$  dos conjuntos dendroidales, un *morfismo de conjuntos dendroidales*  $f: X \rightarrow Y$  viene definido por las funciones  $f: X_T \rightarrow Y_T$ , para cada árbol  $T$ , conmutando con las funciones de estructura. Es decir, si  $\alpha: S \rightarrow T$  es cualquier morfismo en  $\Omega$  y  $x \in X_T$ , entonces  $f(\alpha^*x) = \alpha^*f(x)$ .

Decimos que  $Y$  es un *subconjunto dendroidal* de  $X$  si para cada árbol  $T$  tenemos que  $Y_T \subseteq X_T$  y la inclusión  $Y \hookrightarrow X$  es un morfismo de conjuntos dendroidales.

### 3.5. Producto tensorial de conjuntos dendroidales

**Definición 3.23.** Sea  $P$  una opérada simétrica  $C$ -coloreada, y sea  $Q$  una opérada simétrica  $D$ -coloreada. El *producto tensorial Boardman-Vogt*  $P \otimes_{BV} Q$  es una opérada  $(C \times D)$ -coloreada definida en terminos de genreadores y relaciones de la siguiente manera. Para cada color  $d \in D$  y cada operación  $p \in P(c_1, \dots, c_n; c)$  existe un generador

$$p \otimes d \in P \otimes_{BV} Q((c_1, d), \dots, (c_n, d); (c, d))$$

De manera análoga, para cada color  $c \in C$  y cada operación  $q \in Q(d_1, \dots, d_m; d)$  existe un generador

$$c \otimes q \in P \otimes_{BV} Q((c, d_1), \dots, (c, d_m); (c, d))$$

Estos generadores estan sujetos a las siguientes relaciones:

- (i)  $(p \otimes d) \circ ((p_1 \otimes d), \dots, (p_n \otimes d)) = (p \circ (p_1, \dots, p_n)) \otimes d$
- (ii)  $\sigma^*(p \otimes d) = (\sigma^*p) \otimes d$ , para cada  $\sigma \in \Sigma_n$
- (iii)  $(c \otimes q) \circ ((c \otimes q_1), \dots, (c \otimes q_m)) = c \otimes (q \circ (q_1, \dots, q_m))$
- (iv)  $\sigma^*(c \otimes q) = c \otimes (\sigma^*q)$ , para cada  $\sigma \in \Sigma_m$
- (v) Falta

#### 3.5.1. Producto tensorial Boardman Vogt

#### 3.5.2. Producto Producto tensorial de conjuntos dendroidales

- 4. Injertos de árboles
  - 4.1. Producto tensorial de árboles lineales
  - 4.2. Producto tensorial de árboles
    - 4.2.1. Injertos de árboles resultantes
  - 4.3. Cálculo de árboles resultantes
    - 4.3.1. Conjunto de árboles resultantes
    - 4.3.2. Generador de árboles en Python

## 5. Conclusiones

## Referencias

- [1] Batut, C.; Belabas, K.; Bernardi, D.; Cohen, H.; Olivier, M.: User's guide to *PARI-GP*,  
[pari.math.u-bordeaux.fr/pub/pari/manuals/2.3.3/users.pdf](http://pari.math.u-bordeaux.fr/pub/pari/manuals/2.3.3/users.pdf), 2000.
- [2] Chen, J. R.; Wang, T. Z.: On the Goldbach problem, *Acta Math. Sinica*, 32(5):702-718, 1989.
- [3] Deshouillers, J. M.: Sur la constante de Šnirel'man, *Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 17e année: (1975/76), Théorie des nombres: Fac. 2, Exp. No. G16*, pag. 6, Secrétariat Math., Paris, 1977.
- [4] Deshouillers, J. M.; Effinger, G.; te Riele, H.; Zinoviev, D.: A complete Vinogradov 3-primes theorem under the Riemann hypothesis, *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.*, 3:99-104, 1997.
- [5] Dickson, L. E.: *History of the theory of numbers. Vol. I: Divisibility and primality*, Chelsea Publishing Co., New York, 1966.
- [6] Hardy, G. H.; Littlewood, J. E.: Some problems of 'Partitio numerorum'; III: On the expression of a number as a sum of primes, *Acta Math.*, 44(1):1-70, 1923.
- [7] Hardy, G. H.; Ramanujan, S.: Asymptotic formulae in combinatory analysis, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 17:75-115, 1918.
- [8] Hardy, G. H.; Wright, E. M.: *An introduction to the theory of numbers*, 5a edición, Oxford University Press, 1979.
- [9] Helfgott, H. A.: Minor arcs for Goldbach's problem,  
[arXiv:1205.5252v4](https://arxiv.org/abs/1205.5252v4) [math.NT], diciembre de 2013.
- [10] Helfgott, H. A.: Major arcs for Goldbach's problem,  
[arXiv:1305.2897v4](https://arxiv.org/abs/1305.2897v4) [math.NT], abril de 2014.
- [11] Helfgott, H. A.: The ternary Goldbach conjecture is true,  
[arXiv:1312.7748v2](https://arxiv.org/abs/1312.7748v2) [math.NT], enero de 2014.
- [12] Helfgott, H. A.; Platt, D.: Numerical verification of the ternary Goldbach conjecture up to  $8,875 \cdot 10^{30}$ , [arXiv:1305.3062v2](https://arxiv.org/abs/1305.3062v2) [math.NT], abril de 2014.
- [13] Klimov, N. I.; Pil'tjaž, G. Z.; Šeptickaja, T. A.: An estimate of the absolute constant in the Goldbach-Šnirel'man problem, *Studies in number theory, No. 4*, págs. 35-51, Izdat. Saratov. Univ., Saratov, 1972.
- [14] Liu, M. C.; Wang, T.: On the Vinogradov bound in the three primes Goldbach conjecture, *Acta Arith.*, 105(2):133-175, 2002.
- [15] Oliveira e Silva, T.; Herzog, S.; Pardi, S.: Empirical verification of the even Goldbach conjecture and computation of prime gaps up to  $4 \cdot 10^{18}$ , *Math. Comp.*, 83:2033-2060, 2014.
- [16] Ramaré, O.: On Šnirel'man's constant, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, 22(4):645-706, 1995.

- [17] Riesel, H.; Vaughan, R. C.: On sums of primes, *Ark. Mat.*, 21(1):46-74, 1983.
- [18] Rosser, J. B.; Schoenfeld, L.: Approximate formulas for some functions of prime numbers, *Illinois J. Math.*, 6:64-94, 1962.
- [19] Schnirelmann, L.: Über additive Eigenschaften von Zahlen, *Math. Ann.*, 107(1):649-690, 1933.
- [20] Tao, T.: Every odd number greater than 1 is the sum of at most five primes, *Math. Comp.*, 83:997-1038, 2014.
- [21] Travesa, A.: *Aritmètica*, Colecció UB, No. 25, Barcelona, 1998.
- [22] Vaughan, R. C.: On the estimation of Schnirelman's constant, *J. Reine Angew. Math.*, 290:93-108, 1977.
- [23] Vaughan, R. C.: *The Hardy-Littlewood method*, Cambridge Tracts in Mathematics, No. 125, 2a edición, Cambridge University Press, 1997.
- [24] Vinogradov, I. M.: Sur le théorème de Waring, *C. R. Acad. Sci. URSS*, 393-400, 1928.
- [25] Vinogradov, I. M.: Representation of an odd number as a sum of three primes, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 15:291-294, 1937.