Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

El producto tensorial de conjuntos dendroidales

Roger Brascó Garcés

9 de Febrero de 2022

Departamento de Matemáticas e Informática
Universidad de Barcelona

Introducción

1. Nociones previas
2. Árboles como opéradas coloreadas
3. Conjuntos dendroidales
4. Producto tensorial
5. Conjunto de shuffles
6. Conclusiones

Nociones previas

Categorías

Definición

Una *categoría* $\mathcal{C}$ consiste en:

$$\mathcal{C} = (\mathrm{Ob}(\mathcal{C}), \hom(\mathcal{C}), \circ, \mathrm{id})$$

Además, esta estructura cumple los siguientes axiomas:

- *Asociatividad*.
- *Unidad*.

Funtores

Definición

Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías. Un *funtor* F de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$, que denotaremos por $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ consiste en:

- Una aplicación $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$.
- Para cada par de objetos $A, B \in \mathcal{C}$ una aplicación

$$\mathcal{C}(A, B) \longrightarrow \mathcal{D}(F(A), F(B)).$$

Además, estas aplicaciones son compatibles con la composición y la unidad.

Opéradas

Definición

Una *opérada* P consiste en una sucesión de conjuntos $\{P(n)\}_{n\geq 0}$ junto con la siguiente estructura:

- Un elemento *unidad* $1 \in P(1)$.
- Un *producto composición*

  $$P(n) \times P(k_1) \times \cdots \times P(k_n) \longrightarrow P(k)$$

  para cada n y $k_1, \ldots, k_n$ tal que $k = \sum_{i=1}^{n} k_i$.
- Para cada $\sigma \in \Sigma_n$ una *acción por la derecha* $\sigma^* \colon P(n) \to P(n)$.

Además el producto composición es asociativo, equivariante y compatible con la unidad.

Opéradas coloreadas

Definición

Sea C un conjunto. Una opérada C-coloreada P consiste en, para cada $(n+1)$-tupla de colores $(c_1, \ldots, c_n, c)$ con $n \geq 0$, un conjunto $P(c_1, \ldots, c_n; c)$, junto con la siguiente estructura:

- Un elemento *unidad* $1_c \in P(c; c)$ para cada $c \in C$.
- Un *producto composición* con n $(n+1)$-tuplas de colores $(c_1, \ldots, c_n; c)$.
- Para cada elemento $\sigma \in \Sigma_n$ una *acción por la derecha* en sus entradas.

Además el producto composición es asociativo, equivariante y compatible con las unidades.

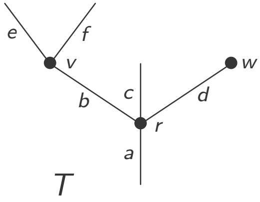
Definición

Sea P una opérada C-coloreada y Q una opérada D-coloreada. Un *morfismo de opéradas* $f : P \to Q$ consiste en una aplicaciones entre los conjuntos de colores

Árboles como opéradas coloreadas

Formalismo de árboles

Sea T el siguiente árbol:



(2.1)

Árboles como opéradas coloreadas

Definición

Sea T un árbol planar con raíz. Denotaremos la opérada coloreada no-simétrica generada por T como $\Omega_p(T)$.

Categorías Ω_p y Ω

Definición

La *categoría de árboles planares con raíz* Ω_p es la subcategoría plena de la categoría de opéradas coloreadas no-simétricas cuyos objetos son $\Omega_p(T)$ para cada árbol T.

Definición

La *categoría de árboles con raíz* Ω es la subcategoría plena de la categoría de opéradas coloreadas cuyos objetos son $\Omega(T)$ para todo árbol T.

Conjuntos dendroidales

Conjuntos dendroidales

Definición

La categoría *dSets* de *conjuntos dendroidales* es la categoría de prehaces en Ω. Los objetos son funtores $\Omega^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ y los morfismos vienen dados por las transformaciones naturales.

El conjunto X_T lo llamaremos conjunto de *déndrices con forma T*.

Nervio dendroidal

El funtor $\Omega \to \mathit{Oper}$ que envía un árbol T a la opérada coloreada $\Omega(T)$ induce, por extensión de Kan, la siguiente adjunción

$$\tau_d : \mathit{dSets} \rightleftarrows \mathit{Oper} : N_d$$

El funtor N_d se llama *nervio dendroidal*. Para toda opérada P, su nervio dendroidal es el conjunto dendroidal

$$N_d(P)_T = \mathit{Oper}(\Omega(T), P)$$

Este funtor es plenamente fiel y $N_d(\Omega(T)) = \Omega[T]$ para cada árbol T en Ω.

Producto tensorial

Producto tensorial de Boardman–Vogt

Definición

Sea P una opérada simétrica C-coloreada, y sea Q una opérada simétrica D-coloreada. El *producto tensorial de Boardman–Vogt* $P \otimes_{BV} Q$ es una opérada $(C \times D)$-coloreada definida en terminos de generadores y relaciones de la siguiente manera. Para cada color $d \in D$ y cada operación $p \in P(c_1, \ldots, c_n; c)$ existe un generador

$$p \otimes d \in P \otimes_{BV} Q((c_1, d), \ldots, (c_n, d); (c, d))$$

De manera análoga, para cada color $c \in C$ y cada operación $q \in Q(d_1, \ldots, d_m; d)$. Estos generadores están sujetos a cinco relaciones:

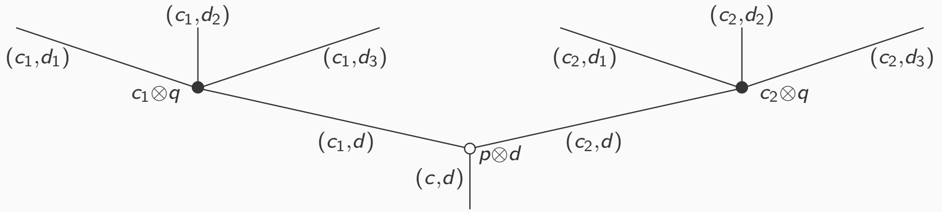
Relación de intercambio

Definición

(v) $\sigma^*_{n,m}((p \otimes d) \circ ((c_1 \otimes q), \ldots, (c_n \otimes q))) = (c \otimes q) \circ ((p \otimes d_1), \ldots, (p \otimes d_m))$,
donde $\sigma_{n,m} \in \Sigma_{nm}$ es una permutación.

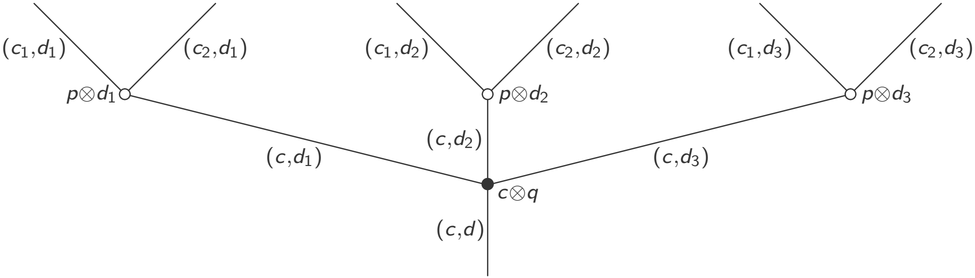
Ejemplo

Suponemos que $n = 2$ y $m = 3$. Antes de aplicar la permutación $\sigma^*_{2,3}$



(4.1)

Después de aplicar la permutación $\sigma^*_{2,3}$



(4.2)

Producto tensorial de conjuntos dendroidales

Definición

Para todo par de árboles T y S en Ω, el *producto tensorial* de los representables $\Omega[T]$ y $\Omega[S]$ se define como

$$\Omega[T] \otimes \Omega[S] = N_d(\Omega(T) \otimes_{BV} \Omega(S))$$

Producto tensorial de conjuntos dendroidales

Definición

Sean X e Y dos conjuntos dendroidales y sea $X = \lim_{\rightarrow} \Omega[T]$ y $Y = \lim_{\rightarrow} \Omega[S]$ sus expresiones canónicas como colímites de representables. Entonces, definimos el *producto tensorial* $X \otimes Y$ como

$$X \otimes Y = \lim_{\rightarrow} \Omega[T] \otimes \lim_{\rightarrow} \Omega[S] = \lim_{\rightarrow} N_d(\Omega(T) \otimes_{BV} \Omega(S))$$

Producto tensorial de conjuntos dendroidales

Teorema

La categoría de conjuntos dendroidales admite una estructura monoidal, simétrica y cerrada. Esta estructura monoidal está únicamente determinada (salvo isomorfismo) por la propiedad de que existe un isomorfismo natural

$$\Omega[T] \otimes \Omega[S] \cong N_d(\Omega(T) \otimes_{BV} \Omega(S))$$

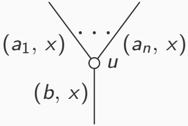
para cada par T y S de objetos de Ω. La unidad del producto tensorial es el conjunto dendroidal representable $\Omega[\eta] = i_!(\Delta[0]) = U$.

Conjunto de shuffles

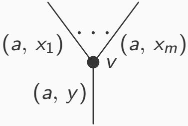
Shuffles

Definición

Sea S y T dos objetos de Ω. Un *shuffle* de S y T es un árbol R cuyo conjunto de aristas es un subconjunto de $E(S) \times E(T)$. La raíz de R es (a, x), donde a es la raíz de S y x es la raíz de T, y sus hojas son todos los pares (l_S, l_T), donde l_S es una hoja de S y l_T es una hoja de T. Los vértices son de la forma



o



Proposición

El número de shuffles $sh(S,\ T)$ *de dos árboles* S *y* T *satisface tres propiedades:*

(i) *Simétrico:* $sh(S,\ T) = sh(T,\ S)$

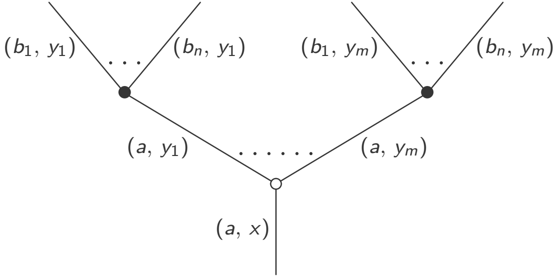
(ii) *Unitario: Si* T *es un árbol unitario* η, *entonces* $sh(S,\ \eta) = 1$

(iii) *Inducción: Si* $S = C_n[S_1, \ldots, S_n]$ *y* $T = C_m[T_1, \ldots, T_m]$, *entonces*

$$sh(S,\ T) = \prod_{i=1}^{n} sh(S_i,\ T) + \prod_{j=1}^{m} sh(S,\ T_j)$$

Estructura de orden parcial

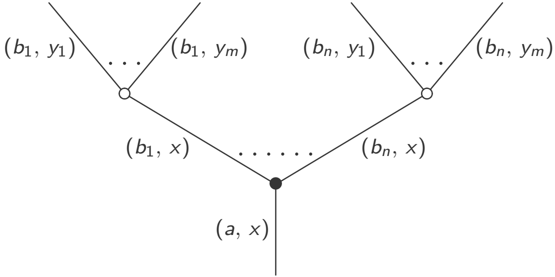
Existen los *shuffles intermediarios* R_k $(1 < k < N)$ entre R_1 y R_N. Todo R_k se obtiene desde un R_l anterior. Es decir, cada intercambio se basa en transformar una configuración de R_l



(5.1)

Estructura de orden parcial

A una configuración de R_k



(5.2)

Si un shuffle R_k se obtiene the otro shuffle R_l mediante la norma de arriba, entonces $R_l \leq R_k$.

Producto tensorial de árboles

Lema

Para todo shuffle R_i de S y T tenemos un monomorfismo

$$m \colon \Omega[R_i] \rightarrowtail \Omega[S] \otimes \Omega[T]$$

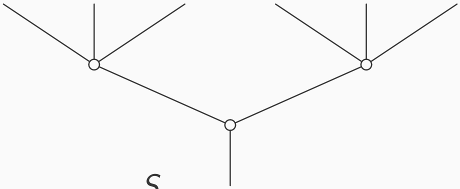
Corolario

Para todo objeto T y S en Ω, tenemos que

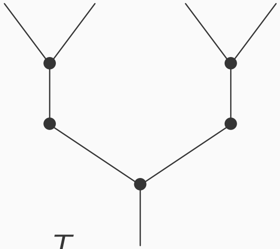
$$\Omega[S] \otimes \Omega[T] = \bigcup_{i=1}^{N} m(R_i)$$

Ejemplo

Para acabar esta sección, pondremos un ejemplo para enseñar la utilidad del paquete. Sean S y T los árboles



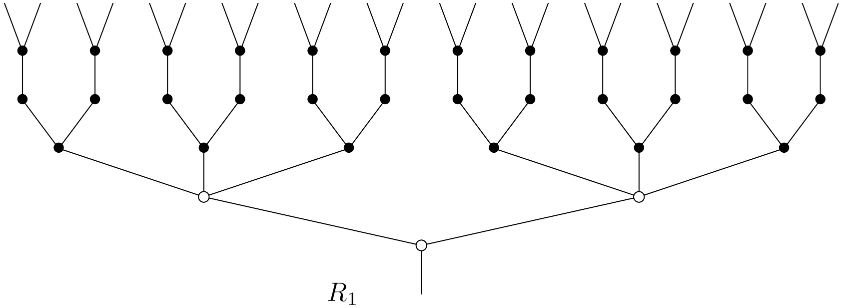
S



T

Generar shuffles en Python

El conjunto de shuffles resultante sería



Conclusiones

Gracias por vuestra atención