Universidad Monteávila
Álgebra Lineal
Ingenierías Ciencia de Datos, Mecatrónica y Telemática
Resumen de Vectores en el Plano

Este es un resumen de resultados de Vectores en el Plano, que tiene como objetivo ayudar en la comprensión del tema. Su estudio debe ser complementado con el Capítulo 4 de la Guía de Estudio que ya tienen en su poder. Es muy importante complementar con la guía, ya que allí pueden encontrar explicaciones completas.

1. Vectores libres y ligados

Dos vectores ligados $\overrightarrow{A_1B_1}$ y $\overrightarrow{A_2B_2}$ son *equivalentes* si $B_2 - A_2 = B_1 - A_1$. En particular, todo vector ligado $\overrightarrow{AB}$ es equivalente al vector libre $\overrightarrow{OP}$ donde $P = B - A$, el vector $\overrightarrow{OP}$ se identifica con el punto P.

Si $\overrightarrow{AB}$ es un vector ligado en el plano, su *dirección* es la recta sobre la cual se ubica, su *longitud* es la longitud del segmento $\overline{AB}$ y su *sentido* es el que está determinado por el punto inicial y el punto final.

Por ejemplo, los vectores $\overrightarrow{A_1B_1}$ y $\overrightarrow{A_2B_2}$, donde $A_1 = (1,3), B_1 = (2,1), A_2 = (4,5), B_2 = (5,3)$ son equivalentes ya que $(2,1)-(1,3) = (5,3)-(4,5) = (1,-2)$; ambos vectores equivalen al vector OP, donde $P = (1,-2)$ y se identifican con el punto $(1,-2)$.

Salvo que se especifique lo contrario solamente se considerarán vectores libres, que es lo usual en Álgebra Lineal.

2. Operaciones con vectores

Los vectores pueden ser sumados, restados y multiplicados por un número real. En el contexto de los vectores, a los números reales se les conoce como *escalares*. Geométricamente la suma y la diferencia se hacen de acuerdo a la ley del paralelogramo. Si multiplicamos un vector por un escalar α su longitud se multiplica por $|\alpha|$ y su sentido se mantiene si $\alpha > 0$ y cambia si $\alpha < 0$.

Es usual denotar a los vectores con una letra con una flecha en la parte superior y al especificar las coordenadas se usan las notaciones de vector columna o vector fila según convenga, a veces con paréntesis y a veces con corchetes, por ejemplo el vector $\vec{v} = (a,b)$ puede ser denotado como

$$(a \;\; b), \qquad [a \;\; b], \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Sean $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$, $\vec{w} = (x_3, y_3)$ vectores del plano, $\vec{0} = (0,0)$ el vector nulo y α, β escalares, en coordenadas la suma y el producto por un escalar se hacen de la siguiente manera

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \qquad \alpha\vec{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1),$$

el vector $-\vec{u}$ se define como $-\vec{u} = (-1)\vec{u} = (-x_1, -x_2)$.

Estas operaciones tienen las siguientes propiedades

$$\begin{array}{lll} \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} & (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) & \vec{v} + \vec{0} = \vec{v} \\ \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0} & \alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v} & (\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u} \\ (\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u} & 1\vec{u} = \vec{u} & 0\vec{u} = \vec{0} \end{array}$$

Es importante destacar que los símbolos $+$ y $-$ se usan para dos fines diferentes: suma y resta de escalares, suma y resta de vectores. Esto es usual en el contexto de vectores, por lo que se debe tener muy claro la clase de elementos que involucra cada operación.

3. Ecuación paramétrica de la recta

Consideremos un vector no nulo $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y un punto (o vector) $\vec{p} = (x_o, y_o)$ en el plano $\mathbb{R}^2$.

La ecuación *paramétrica o vectorial de la recta* que pasa por el punto $\vec{p}$ en la dirección del vector $\vec{u}$ es

$$\vec{v}(t) = \vec{p} + t\vec{u}, \qquad -\infty < t < +\infty.$$

Ver la guía para más detalles sobre este tema, incluyendo relación entre la ecuación paramétrica y la cartesiana.

4. Norma y producto escalar

La *norma* de un vector $\vec{u} = (x, y)$, que se denota por $\|\vec{u}\|$ es igual a su longitud, como su longitud es igual a la distancia del punto (x, y) al origen O, se tiene que

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

La norma de los vectores satisface las siguientes propiedades:

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores en el plano y α un número real, entonces

(1) $\|\vec{u}\| \geq 0$, $\|\vec{u}\| = 0$ si y solo si $\vec{u} = 0$,
(2) $\|\overrightarrow{\alpha\, u}\| = |\alpha|\, \|\vec{u}\|$,
(3) (Desigualdad triangular) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

El *producto escalar* o *producto interno* de dos vectores es igual al producto de sus longitudes multiplicada por el coseno del ángulo que forman. El producto interno de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se denota por $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ (algunos autores usan la notación $\vec{u} \cdot \vec{v}$)

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|\, \|\vec{v}\|\, \cos\gamma,$$

y se observa que $\|\vec{u}\| \cos\gamma$ corresponde con la longitud de la proyección de $\vec{u}$ en la dirección de $\vec{v}$.

Es importante tener en cuenta la interpretación geométrica del producto escalar:

(1) El valor absoluto del producto escalar $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ es igual a la longitud de la proyección del vector $\vec{u}$ en la dirección del vector $\vec{v}$, multiplicado por la longitud del vector $\vec{v}$.
(2) Si α es el ángulo entre los dos vectores y los vectores no son nulos, el producto escalar será positivo si $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$, negativo si $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$ y nulo si $\alpha = \frac{\pi}{2}$.
(3) Si la longitud del vector $\vec{v}$ es igual a 1, el valor absoluto del producto escalar $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ es igual a la longitud de la proyección del vector $\vec{u}$ en la dirección del vector $\vec{v}$.
(4) Si dos vectores son ortogonales su producto escalar es igual a 0.
(5) $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \|\vec{u}\|^2$, o lo que es equivalente $\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}$.

En coordenadas se tiene lo siguiente, si $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$, entonces

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1\, v_1 + u_2\, v_2.$$

El producto escalar de vectores satisface las siguientes propiedades:

Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ vectores en el plano y α un número real, entonces

(1) $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0$ y es igual a 0 si y solo si $\vec{u} = 0$,
(2) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$,
(3) $\langle \alpha\, \vec{u}, \vec{v} \rangle = \alpha\, \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$,
(4) $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$.

También se cumple la llamada desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|.$$