Universidad Monteávila
Álgebra Lineal
Ingenierías Ciencia de Datos, Mecatrónica y Telemática
Resumen y Ejercicios de Álgebra Matricial

1. El espacio vectorial de las matrices m x n

Si m y n son enteros mayores o iguales que 1, una *matriz* $m \times n$ es un arreglo rectangular de $m.n$ números dispuestos en m filas y n columnas

$$A(a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

El conjunto de las matrices $m \times n$ se suele denotar por $\mathbb{R}^{m \times n}$.

La suma de matrices se realiza sumando componente a componente.

Si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son dos matrices $m \times n$ entonces la suma de A y B es una matriz $m \times n$ dada por

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$

El producto de una matriz por un escalar se realiza multiplicando el escalar por cada componente.

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $A = (a_{ij})$ es una matriz $m \times n$ entonces

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})$$

Si A y B son matrices $m \times n$ entonces, se define la matriz $-A$ por

$$-A = (-1)A$$

y se define

$$A - B = A + (-B).$$

Con estas operaciones el conjunto de las matrices $m \times n$ es un espacio vectorial.

2. Producto de matrices.

Bajo ciertas condiciones se puede definir un producto para matrices.

Sean m, n y p enteros mayores o iguales que 1 y sea $A = (a_{ij})$ una matriz $m \times n$ y $B = (b_{ij})$ una matriz $n \times p$. Entonces el producto de A y B es una matriz $C = (c_{ij})$ de tamaño $m \times p$ donde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}.$$

En palabras: fijamos una fila en la primera matriz y una columna en la segunda matriz. Se multiplican las entradas de la fila de la primera matriz por las entradas de la columna de la segunda matriz y luego se suman. El valor obtenido se coloca en la entrada de la matriz producto correspondiente a esa fila y esa columna. Es importante notar que esta operación se puede hacer solamente cuando el número de columnas de la primera matriz debe ser igual al número de filas de la segunda matriz.

Ejemplo 1.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{bmatrix}$$

En general, el producto de matrices no es conmutativo, es decir, puede ocurrir que si A y B son matrices, entonces $AB \neq BA$, mostraremos esto mediante un ejemplo.

Ejemplo 2. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 \\ 5 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 5 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 9 & -5 \end{bmatrix} \\ BA &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 5 & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 + 0 \cdot 5 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

También puede ocurrir que el producto de dos matrices sea igual a la matriz nula, sin que ninguna de las dos matrices sea nula. Sin embargo el producto de matrices sí es asociativo, es decir:

Proposición 3. *Sean A una matriz $m \times n$, B una matriz $n \times p$ y C una matriz $p \times q$ entonces*

$$A(BC) = (AB)C$$

y esta matriz es $m \times q$.

3. Inversa de una matriz y la matriz identidad

En esta sección consideraremos solamente matrices cuadradas.

Entre los tipos sencillos de matrices están las diagonales y las triangulares.

Se dice que una matriz A es *diagonal* si $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$, es decir, cuando todos sus elementos son cero, excepto los de la diagonal que va desde el vértice superior izquierdo al inferior derecho.

Se dice que la matriz A es *triangular superior* si $a_{ij} = 0$ para $i > j$ y se dice que es *triangular inferior* si $a_{ij} = 0$ para $i < j$.

La *matriz identidad* $n \times n$, es la siguiente

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

es decir, es la matriz que tiene todas sus entradas iguales a 0, salvo en la diagonal que tiene solamente el número 1.

Si A es una matriz $n \times n$, se cumple que

$$AI_n = I_n A = A.$$

Si no se presta a confusión se suele escribir simplemente I en vez de I_n.

Definición 4. Sea A una matriz cuadrada $n \times n$.

Se dice que A es invertible si existe una matriz cuadrada B, también $n \times n$, tal que

$$AB = BA = I$$

La matriz B de existir es única, se le llama la inversa de A y se denota por A^{-1}.

Observación 5. No todas matriz no nula es invertible:

Por ejemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

lo que implica que ninguna de estas matrices es invertible.

El producto de matrices invertible también es invertible.

Proposición 6. *Sean A y B matrices $n \times n$, invertibles. Entonces la matriz AB es invertible y*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Demostración.

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

de igual manera se prueba que

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = I.$$

□

4. Cálculo de la inversa de una matriz

Existen caso en los que es sencillo calcular la inversa de una matriz, por ejemplo si

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

es una matriz diagonal, entonces A es invertible si y solo si todos los elementos de la diagonal son diferentes de 0 y, en este caso

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

Si A es una matriz 2×2 dada por

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

y $ad - bc \neq 0$ su inversa es la matriz dada por

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \tag{1}$$

4.1. **Método de Gaus-Jordan para calcular la matriz inversa.** Dada una matriz cuadrada A de tamaño $n \times n$, el método de Gauss-Jordan para encontrar su inversa A^{-1} consiste en:

(1) Construir la matriz aumentada $[A|I_n]$, donde I_n es la matriz identidad de tamaño n.
(2) Aplicar operaciones elementales de fila en la matriz aumentada para transformar A en I_n.
(3) La matriz resultante en el lado derecho será A^{-1}.

Ver los ejemplos de la guía de estudio.

Observación 7.

- El método de Gauss-Jordan es sistemático pero puede volverse computacionalmente intensivo para matrices grandes.
- La aparición de una fila de ceros en el lado izquierdo durante el proceso indica que la matriz no es invertible.
- Las fracciones en los resultados son normales y pueden evitar errores de redondeo.
- Se recomienda verificar siempre el resultado multiplicando $A\,A^{-1}$ para confirmar que da la identidad.

4.2. **Propiedades de las matrices invertibles.**

Definición 8. Si A es una matriz y n es un entero positivo, como es natural , se define

$$A^n = \overbrace{A\,A \cdots A}^{\text{n veces}}.$$

Si A es invertible, se define

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = (A^n)^{-1}.$$

El siguiente resultado resume las propiedades más importantes de las matrices invertibles.

Proposición 9.

(1) *Si A es una matriz invertible, entonces A^{-1} es invertible y $(A^{-1})^{-1} = A$*
(2) *Si A es una matriz invertible y c es un escalar distinto de cero, entonces cA es una matriz invertible y $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$*
(3) *Si A y B son matrices invertibles del mismo tamaño, entonces AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$*
(4) *Si A es una matriz invertible, entonces A^n es invertible para todo entero n no negativo y $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$*

5. Propiedades de la multiplicación de matrices

La multiplicación de matrices, no comparte todas sus propiedades con el producto de los números reales; aunque en muchos aspectos lo hace, existen algunas diferencias significativas.

Ya hemos visto que el producto de dos matrices diferentes de O puede dar la matriz O y que el producto no es conmutativo.

Ver ejemplos en la guía de estudio

El siguiente resultado resume las principales propiedades de la multiplicación de matrices.

Teorema 10. *Sean A, B y C matrices (cuyos tamaños son tales que pueden realizarse las operaciones indicadas) y sea k un escalar. Entonces*

(1) $A(BC) = (AB)C$ *(Asociatividad)*
(2) $A(B + C) = AB + AC$ *(Distributividad izquierda)*

(3) $(A+B)C = AC + BC$ *(Distributividad derecha)*
(4) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$
(5) $I_m A = A = AI_n$ *si* A *es* $m \times n$ *(Identidad multiplicativa)*

Ejemplo 11. Si A y B son matrices cuadradas del mismo tamaño.

$$¿\text{Es } (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2?$$

Veamos

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= (A+B)(A+B) \\ &= (A+B)A + (A+B)B \quad \text{por distributividad izquierda} \\ &= A^2 + BA + AB + B^2 \quad \text{por distributividad derecha}\end{aligned}$$

Por tanto, $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ si y sólo s $BA = AB$.

6. La matriz transpuesta

Definición 12. Sea A un matriz $m \times n$, la *matriz transpuesta* de A, que se denota por A^T es la matriz $n \times m$ definida por

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}.$$

En palabras, la transpuesta de A es la matriz que se obtiene al intercambiar filas y columnas de A, la i-ésima columna de A^T es la i-ésima fila de A.

El siguiente resultado resume algunas de las propiedades más importantes de la transpuesta.

Proposición 13. *Sean A y B matrices (cuyos tamaños son tales que pueden realizarse las operaciones indicadas) y sea k un escalar. Entonces*
(1) $(A^T)^T = A$.
(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$.
(3) $(kA)^T = k(A^T)$.
(4) $(AB)^T = B^T A^T$.
(5) $(A^n)^T = (A^T)^n$ *para todos los enteros n no negativos.*

Observación 14. Las propiedades (b) y (d) del Teorema 13 pueden generalizarse a sumas y productos de un número finito de matrices:

$$(A_1 + A_2 + \cdots + A_k)^T = A_1^T + A_2^T + \cdots + A_k^T \quad \text{y} \quad (A_1 A_2 \cdots A_k)^T = A_k^T \cdots A_2^T A_1^T$$

si supone que los tamaños de las matrices son tales que todas las operaciones pueden realizarse.

7. Ejercicios varios

(1) Sean $A = \begin{bmatrix} 5 & -9 \\ 3 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & -9 \\ 3 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$
   (a) Hallar $6B - 7A + 5C$
   (b) Encuentre una matriz E tal que $A + 2B - 3C + E$ es la matriz cero de 2×3.
   (c) Encuentre una matriz G tal que $A+B+G$ es la matriz de 2×3 con todos sus elementos iguales a 1.

(2) Dados $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, resuelva la siguiente ecuación para X:

$$3(2A + B + X) = 5(X - A + B)$$

(3) Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, y $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, encuentre las condiciones para a, b, c, d tal que $AB = BA$.

(4) Una matriz A $n \times n$ tal que $A^2 = I_n$ se llama involutiva. Pruebe que la siguiente matriz es involutiva:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

(5) Dada la siguiente matriz pruebe que $A^2 = A$:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

(6) Un fabricante de joyería de diseño tiene órdenes por dos anillos, tres pares de aretes, cinco prendedores y un collar. El fabricante estima que le llevará 1 hora de mano de obra hacer un anillo, $1\frac{1}{2}$ horas hacer un par de aretes, $\frac{1}{2}$ hora para un prendedor y 2 horas para un collar.

a) Exprese las órdenes del fabricante como un vector renglón.

b) Exprese los requerimientos en horas para los distintos tipos de joyas como un vector columna.

c) Utilice el producto escalar para calcular el número total de horas que requerirá para terminar las órdenes.

(7) Determinar si la matriz dada en invertible; en caso de serlo, halle su inversa.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

(8) Calcular $(A^T)^{-1}$ y $(A^{-1})^T$ y verifique que son iguales.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ (f) $A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

(9) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones mediante el método de la matriz inversa

(a) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = -7 \\ 2x_1 - x_2 = 4 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \\ 4x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 4 \\ -3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -9 \\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -11 \end{cases}$

(d) Determine si la matriz dada es invertible; de ser invertible, calcule la inversa.

(a) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -8 & 14 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & -12 & -2 & -6 \\ -2 & 10 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ (i) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(e) Muestre que si A, B y C son matrices invertibles, entonces ABC es invertible y $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

(10) Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Hallar, si es que existe, una matriz B tal que $A^2 - A = AB$.

(11) Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$. Resolver la ecuación matricial

$$A^2X - A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$