Universidad Monteávila
Álgebra Lineal
Ingenierías Ciencia de Datos, Mecatrónica y Telemática
Resumen y Ejercicios de Determinantes

1. Determinante de matrices 2 x 2 y 3 x 3

Definición 1. Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

una matriz 2×2.

El *determinante* de A se define por

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Es usual denotar a $\det A$ por

$$|A| \quad \text{o} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

(no confundir con valor absoluto)

Definición 2. Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

una matriz 3×3.

El *determinante* de A se define por

$$\det A = a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Observación 3 (Otro método para calcular determinantes 3×3). Escribimos la matriz y copiamos a su lado derecho las dos primeras filas, respetando el orden, tal como se muestra en la siguiente figura

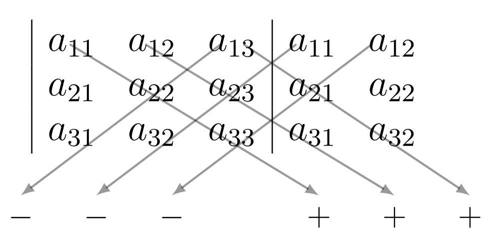

Figura 1. Cálculo determinante 3×3

Se calculan los seis productos indicados por las flechas, poniendo signo mas a los que corresponden con las flechas que apuntan hacia la derecha y signo menos a los que corresponden con las fechas que apuntan hacia la izquierda.

2. Determinante de matrices n x n

El determinante de una matriz $n \times n$ se definirá de manera inductiva, es decir el determinante de una matriz 4 lo definiremos en términos del determinante de una matriz 3×3, el determinante de una matriz 5×5 se definirá en términos del determinante de una matriz 4×4 y así sucesivamente.

Definición 4. Sea A una matriz $n \times n$, el *menor* ij (que denotaremos por M_{ij}) de la matriz A es la matriz $(n-1) \times (n-1)$ que se obtiene de A al eliminar el renglón i y la columna j.

El *cofactor* ij de A, que se denotará por $A(i|j)$ se define por

$$A(i|j) = (-1)^{i+j} \det(M_{ij}).$$

Observación 5. No confundir A_{ij} (entrada ij de la matriz A) con $A(i|j)$ (el cofactor ij de la matriz A).

Definición 6. Sea $A = (a_{ij}$ una matriz $n \times n$.

El determinante de A se define por

$$\det A = a_{11}A_{(1|1)} + a_{12}A_{(1|2)} + \cdots + a_{1n}A_{(1|n)} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{(1|k)}$$

La expresión anterior se conoce como *expansión por cofactores.*

3. Propiedades del determinante

Proposición 7. *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $n \times n$ triangular superior o inferior. Entonces:*

$$\det A = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \cdots a_{nn}$$

Para calcular un determinante, la expansión por cofactores se puede hacer por cualquier renglón o columna, mas precisamente.

Proposición 8.

Si $A = (a_{ij})$ es una matriz $n \times n$, entonces

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{(i|k)} \quad \textit{(para cualquier renglón } i\textit{)}$$

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{(k|j)} \quad \textit{(para cualquier columna } j\textit{)}$$

Además se tiene la siguiente propiedad fundamental.

Teorema 9. *Sean A y B dos matrices $n \times n$. Entonces:*

$$\det AB = \det A \det B$$

Además se cumplen las siguientes propiedades fundamentales.

Teorema 10 (Propiedades fundamentales del determinante)**.** *Sean A y B matrices cuadradas, entonces*

1. *Si cualquier renglón o columna de A es el vector cero, entonces* $\det A = 0$.
2. *Si cualquier renglón (columna) de A se multiplica por un escalar c, entonces* $\det A$ *se multiplica por c.*

(3) *Si A y B son iguales excepto en la columna j, y C tiene en la columna j la suma de las columnas correspondientes de A y B, entonces* $\det C = \det A + \det B$, *en detalle*

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j}+b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Las propiedades (2) y (3) quieren decir que, como función de las columnas de la matriz, la función determinante es lineal en cada columna. Lo mismo ocurre con las filas.

Por esto se dice que la función determinate es multilineal.

(4) *El intercambio de dos renglones o columnas distintos multiplica* $\det A$ *por* -1.
(5) *Si un renglón (columna) es múltiplo de otro, entonces* $\det A = 0$.
(6) *Sumar un múltiplo escalar de un renglón a otro no cambia* $\det A$.
(7) $\det A = \det A^T$.

4. Determinantes y matrices inversas

A partir de las propiedades ya enunciadas del determinante, podemos establecer el siguiente resultado.

Proposición 11. *Sea A una matriz cuadrada.*
Si A es invertible, entonces $\det A \neq 0$ *y*

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Teorema 12.
Sea A una matriz $n \times n$, entonces

(1) $A \cdot \mathrm{adj} A = (\det A) I$
(2) *A es invertible si y solo si* $\det A \neq 0$ *y en este caso,*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \mathrm{adj} A.$$

Teorema 13. *Sea A una matriz $n \times n$.*
Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) *A es invertible.*
(2) *La única solución a $Ax = 0$ es $x = 0$.*
(3) *$Ax = b$ tiene solución única para cada b.*
(4) *A es equivalente por renglones a I_n.*
(5) *La forma escalonada de A tiene n pivotes.*
(6) $\det A \neq 0$.

5. Regla de Cramer

Teorema 14 (Regla de Cramer)**.**
Sea A una matriz $n \times n$ tal que $\det A \neq 0$.
Entonces la solución única al sistema $Ax = b$ está dada por:

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A} \quad \textit{para } j = 1, 2, \dots, n$$

donde A_j es la matriz obtenida al reemplazar la columna j de A por b.

6. Ejercicios

(1) Para $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ verifique que $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

(2) Utilizar los métodos de este capítulo para determinar si la matriz dada es invertible, de ser así, calcule la inversa.

(a) $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -8 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -10 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -8 & -5 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

(3) ¿Para cuáles valores de α la matriz $\begin{bmatrix} \alpha+1 & -3 \\ 5 & 1-\alpha \end{bmatrix}$ no esinvertible?

(4) ¿Para qué valores de α la matriz $\begin{bmatrix} -\alpha & \alpha-1 & \alpha+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2-\alpha & \alpha+3 & \alpha+7 \end{bmatrix}$ no tiene inversa?

(5) Justificar la siguiente afirmación: Si la matriz $n \times n$ A de no es invertible, entonces $(A)(\text{adj } A)$ es la matriz cero.

(6) Muestre que si A es triangular, entonces $\det A \neq 0$ si y sólo si todos los elementos en la diagonal de A son diferentes de cero.

(7) Resolver el sistema dado usando la regla de Cramer.

(a) $\begin{cases} 7x_1 - 8x_2 = 3 \\ 9x_1 + 9x_2 = -8 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = -1 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ -2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 6x_1 - 10x_2 + 4x_3 = -2 \\ 10x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 3 \\ 3x_1 + 9x_2 + 5x_3 = -7 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_3 - x_4 = 4 \\ 3x_3 + 6x_4 = 3 \\ x_1 - x_4 = 5 \end{cases}$