Universidad Monteávila
Álgebra Lineal
Ingenierías Ciencia de Datos, Mecatrónica y Telemática
Resumen y Ejercicios de Transformaciones Lineales

1. Conceptos básicos y ejemplos

Definición 1. Sean m y n enteros positivos.

Una *transformación lineal* (o *aplicación lineal* u *operador lineal*) es una función

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

tal que, para todo par de vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$ y todo escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene que

(1) $T(x + y) = T(x) + T(y)$
(2) $T(\alpha x) = \alpha T(x)$

2. Matriz asociada a una transformación lineal

Proposición 2. *A cada transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ le corresponde una y solo una matriz $m \times n$ y recíprocamente, a cada matriz $m \times n$ le corresponde una y solo una transformación lineal $T : T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.*

En la práctica: Supongamos que $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal, si

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \quad T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} \quad \cdots \quad T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

la matriz de T es

$$[T] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

3. Transformaciones lineales y su relación con sus valores en una base

Se cumplen los siguientes resultados.

Teorema 3. *Sean m y n enteros positivos y sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal, entonces T está determinada por sus valores en una base de $\mathbb{R}^n$.*

Corolario 4. *Sean m y n enteros positivos y sean $T, S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dos transformaciones lineales. Si S y T coinciden en una base de $\mathbb{R}^n$, entonces*

$$S = T.$$

Teorema 5. *Sean m y n enteros positivos.*

Sean $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$ y $\{w_1, w_2, \dots, w_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ un conjunto de n vectores.

Entonces existe una única transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que

$$Tv_i = w_i \quad \textit{para } k = 1, 2, \dots, n.$$

Adicionalmente, esta transformación T está dada por la fórmula

$$T(x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n) = x_1w_1 + x_2w_2 + \cdots + x_nw_n,$$

para $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

4. Operaciones básicas con transformaciones lineales

Y

Con $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ denotaremos al conjunto de las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, se cumple el siguiente resultado.

Teorema 6. *Sean m y n enteros positivos entonces $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, con las operaciones usuales de suma y producto por un escalar, también es un espacio vectorial.*

Además si $S, T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$[\lambda S + T] = \lambda[S] + [T].$$

Teorema 7. *Sean m, n y p enteros positivos y sean $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ dos transformaciones lineales, entonces la composición $S \circ T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ definida por*

$$(S \circ T)v = S(Tv)$$

también es una transformación lineal.

Además se tiene que

$$[S \circ T] = [S][T].$$

Para el caso de transformaciones lineales es usual escribir ST en vez de $S \circ T$.

Observación 8. Para los operadores lineales se cumplen propiedades análogas a las enunciadas para matrices.

El espacio $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ (el conjunto de las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$). Como la dimensión de $\mathbb{R}^n$ es n, este espacio está en correspondencia con el espacio de las matrices $n \times n$.

El operador identidad es el operador $I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definido por

$$Iv = v \quad \text{para } v \in \mathbb{R}^n.$$

Al operador identidad le corresponde la matriz identidad (en cualquier base).

Se cumplen las siguientes propiedades, que son fácilmente verificables.

Teorema 9. *Sean $\mathbb{R}^n$ un espacio vectorial, T, T_1, T_2 operadores lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ y λ un escalar, entonces*

(1) $IT = TI = T$.
(2) $T(T_1 + T_2) = T_1T + T_2T$.
(3) $(T_1 + T_2)T = T_1T + T_2T$.
(4) $\lambda(T_1T_2) = (\lambda T_1)T_2 = T_1(\lambda T_2)$.
(5) $T(T_1T_2) = (TT_1)T_2$.

Al igual que con las matrices, la composición de operadores no es una operación conmutativa.

Definición 10. Sea n un entero positivo y $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un operador lineal, se dice que T es *invertible* si existe un operador lineal $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$ST = TS = I.$$

Al operador S se le llama el *inverso* de T y se le denota por T^{-1}.

Al igual que con las matrices, no todo operador lineal no nulo es invertible.

Por la correspondencia entre operadores y matrices se tiene el siguiente resultado.

Teorema 11. *Sea n un entero positivo y $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un operador lineal, entonces T es invertible si y sólo si su matriz es invertible.*

La matriz de la inversa de T es la inversa de la matriz de T

5. Núcleo y rango de una transformación lineal

Definición 12. Sean m y n enteros positivos y sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal.

El *núcleo* de T es el conjunto

$$\text{Núcleo}(T) = \{v \in \mathbb{R}^n \ : \ Tv = 0\}.$$

Como es natural, la *imagen* de T es el conjunto

$$\text{Imagen}(T) = \{Tv \ : \ v \in \mathbb{R}^n\}.$$

Observación 13. Muchos autores se refieren al núcleo de T como *kernel* de T y a la dimensión de la imagen de T le llaman rango de T, para evitar confusiones con la nomenclatura habitual del cálculo se mantendrá la notación y la nomenclatura establecida en la definición anterior.

Teorema 14. *Sean m y n enteros positivos y sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Entonces*

(1) *El núcleo de T es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.*
(2) *El rango de T es un subespacio de $\mathbb{R}^m$.*

Teorema 15 (Teorema del núcleo y la imagen)**.** *Sean m y n enteros positivos y sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal, entonces*

$$\dim \text{Imagen}(T) + \dim \text{Núcleo}(T) = \dim \mathbb{R}^n = n.$$

También tenemos lo siguiente.

Proposición 16. *Sean m y n enteros positivos y sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Entonces T es inyectiva si y solo si* $\text{Núcleo}(T) = \{0\}$*.*

Dicho de otra manera, T es inyectiva si y solo si $\dim \text{Núcleo}(T) = 0$*.*

5.1. **Condiciones equivalentes a la biyectividad.**

Sea n un entero positivo. Recordemos que si W es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ cuya dimensión es igual a n, entonces $W = \mathbb{R}^n$.

Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal, por el Teorema del núcleo y la imagen (Teorema 15) tenemos que

$$\dim \text{Imagen}(T) + \dim \text{Núcleo}(T) = n.$$

Se cumple el siguiente resultado.

Teorema 17. *Sean n un entero positivo y sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *T es sobreyectiva.*
(2) *T es inyectiva.*
(3) *T es biyectiva.*
(4) *La imagen de una base de $\mathbb{R}^n$ por T es una base de $\mathbb{R}^n$.*
(5) $\text{Núcleo}(T) = \{0\}$

6. Ejercicios

(1) Determinar si la transformación indicada es lineal, justifique su respuesta.

(a) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^1;\ T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=x$ (b) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2;\ T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix}$

(c) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2;\ T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\y\end{bmatrix}$ (d) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^1;\ T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=x+1$

(e) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2;\ T\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ (f)$T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2;\ T\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\y\end{bmatrix}$

(g) $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^2;\ T\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}|x_4|\\x_1\end{bmatrix}$ (h) $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^{2\times2};\ T\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x&z\\y&w\end{bmatrix}$

(i) $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n;\ T(x)=\begin{bmatrix}x\\x\\\vdots\\x\end{bmatrix}$

(2) Sea T una transformación lineal de $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ tal que $T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\\3\end{bmatrix}$ y $T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\0\\5\end{bmatrix}$. Hallar el valor de

$$T\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}\qquad \text{y}\qquad T\begin{bmatrix}-3\\7\end{bmatrix}.$$

(3) Defina las transformaciones lineales $S:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^{2\times2}$ y $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ por

$$S:\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+b&b\\0&a-b\end{bmatrix}\ \text{ y }\ T\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2c+d\\-d\end{bmatrix}$$

Calcule $(S\circ T)\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ y $(S\circ T)\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$. ¿Puede calcular $(T\circ S)\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$? Si es así, calcúlelo.

(4) Sea α un número real. Demuestre que $\begin{bmatrix}\cos\alpha&\operatorname{sen}\alpha\\-\operatorname{sen}\alpha&\cos\alpha\end{bmatrix}$ es invertible y encuentre su inversa. Interprete geométricamente.

(5) Encontrar la matriz de la transformación lineal que corresponde con cada una de las siguientes operaciones.
   (a) Rotación de 45° en sentido de las manecillas del reloj, seguida por proyección sobre el eje y, seguida por rotación de 45° en el sentido de las manecillas del reloj.
   (b) Reflexión en la recta $y=x$, seguida por rotación de 30° en sentido contrario al de las manecillas del reloj, seguida por reflexión en la recta $y=-x$

(6) Encontrar la representación matricial $[T]$ de la transformación lineal T. Hallar también su núcleo, su imagen, la dimensión del núcleo y la dimensión de la imagen. Indicar cuáles so inyectiva y cuáles son sobreyectivas.

(a)$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$; $T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y + z \\ -2x + 2y - 2z \end{bmatrix}$

(c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$

(d)$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$; $T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y \\ 3x - 2y \\ y - x \end{bmatrix}$

(e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y + 2z \\ 3x + y + 4z \\ 5x - y + 8z \end{bmatrix}$

(f) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x + 2y + z \\ 2x - 4y - 2z \\ -3x + 6y + 3z \end{bmatrix}$

(g)$T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + z \\ 5w - 4y \end{bmatrix}$

(h) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y + 2z + w \\ -x + 2w \\ x - 2y + 5z + 4w \\ 2x - y + z - w \end{bmatrix}$

(i) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aw + bx \\ cy + dz \end{bmatrix}$

(j) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x - y \\ 3x + 2y \end{bmatrix}$

(k) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + y + z \\ y - 3z \end{bmatrix}$

(l) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + 3y \\ -5x - 4y \\ -6x - 9y \\ x + y \end{bmatrix}$