Universidad Monteávila
Álgebra Lineal
Ingenierías Mecatrónica y Telemática
Segundo examen parcial-A. Fecha:11-12-2025

Apellido(s): ________________________ Nombre(s): ________________________

Cédula: ________________________

1	2	3	4	TOTAL
/5	/5	/5	/5	/20

(1) Justificar la siguiente afirmación:

Para cualquier número real $t \in [-1, 1]$ el conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} -\sqrt{1-t^2} \\ t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t \\ \sqrt{1-t^2} \end{bmatrix} \right\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$.

Solución. Como para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene que $(\sqrt{1-t^2})^2 + t^2 = 1 - t^2 + t^2 = 1$, ambos vectores tienen norma igual a 1.

El producto escalar de los dos vectores es igual a

$$(-\sqrt{1-t^2})(t) + (t)(\sqrt{1-t^2}) = -t\sqrt{1-t^2} + t\sqrt{1-t^2} = 0,$$

por lo tanto, ambos vectores son ortogonales.

Como la dimensión de $\mathbb{R}^2$ es 2, se tiene que el conjunto dado es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$. $\square$

(2) Sea $A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{7} \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ y sea V el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por A.

(a) Encontrar una base de V.

(b) Indicar cuál es la dimensión de V.

Justifique.

Solución. El vector $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$ es un múltiplo escalar del vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ y los vectores $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{7} \\ 0 \end{bmatrix}$ son linealmente independientes, por lo tanto

(a) El conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{7} \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ es una base de V.

(b) La dimensión de V es 2.

$\square$

(3) Considerar el siguiente sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas,

$$\begin{cases} 6x + 10z = 6 \\ 6x + 3y + 3z = 12 \\ x - y + 4z = -1 \end{cases}$$

Utilizar el método de Gauss-Jordan para

(a) Indicar que tipo de sistema es.

(b) En caso de ser compatible, describir el conjunto solución del sistema

Solución. La matriz aumentada del sistema es

La matriz aumentada del sistema es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 10 & 6 \\ 6 & 3 & 3 & 12 \\ 1 & -1 & 4 & -1 \end{array}\right]$$

Utilizando el método de Gauss-Jordan (que debe haber desarrollado cada alumno en su prueba) se llega a la siguiente matriz escalonada reducida equivalente,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{3} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Esto implica que el sistema de ecuaciones es equivalente a

$$\begin{cases} x_1 + \frac{5}{3}x_3 = 1 \\ x_2 - \frac{7}{3}x_3 = 1 \end{cases}$$

que a su vez equivale a

$$\begin{cases} x_1 = 1 - \frac{5}{3}x_3 \\ x_2 = 2 + \frac{7}{3}x_3 \end{cases}$$

Por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado, se puede tomar como variable libre $x_3 = t \in \mathbb{R}$ y se tiene que, el conjunto solución es

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 - \frac{5}{3}t \\ 2 + \frac{7}{3}t \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ t \in \mathbb{R} \right\}$$

Como

$$\begin{bmatrix} 1 - \frac{5}{3}t \\ 2 + \frac{7}{3}t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} \\ 1 \end{bmatrix},$$

el conjunto solución es la recta que pasa por el punto $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ en la dirección del vector $\begin{bmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$.

□

(4) Utilizar el método de Gauss-Jordan para decidir cuáles de las siguientes matrices son invertibles y, en caso de serlo, hallar su inversa

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 6 & 0 & 10 \\ 6 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ Utilizando el método de Gauss-Jordan (que debe haber desarrollado cada alumno en su prueba) se llega a que la matriz es invertible y su inversa es

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 10 \\ 6 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ Esta matriz es la matriz del sistema de ecuaciones del ejercicio (3), como el sistema resultó indeterminado, la matriz no puede ser invertible.

□

Universidad Monteávila
Álgebra Lineal
Ingenierías Mecatrónica y Telemática
Segundo examen parcial-B. Fecha:11-12-2025

Apellido(s): ________________________ Nombre(s): ________________________

Cédula: ________________________

1	2	3	4	TOTAL
/5	/5	/5	/5	/20

(1) Justificar la siguiente afirmación:

Para cualquier número real $t \in [-1,1]$ el conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} \sqrt{1-t^2} \\ -t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t \\ \sqrt{1-t^2} \end{bmatrix} \right\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$.

Solución. Como para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene que $(\sqrt{1-t^2})^2 + t^2 = 1 - t^2 + t^2 = 1$, ambos vectores tienen norma igual a 1.

El producto escalar de los dos vectores es igual a

$$(\sqrt{1-t^2})(t) + (-t)(\sqrt{1-t^2}) = t\sqrt{1-t^2} - t\sqrt{1-t^2} = 0,$$

por lo tanto, ambos vectores son ortogonales.

Como la dimensión de $\mathbb{R}^2$ es 2, se tiene que el conjunto dado es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$. $\square$

(2) Sea $A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{6} \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ y sea V el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por A.

(a) Encontrar una base de V.

(b) Indicar cuál es la dimensión de V.

Justifique.

Solución. El vector $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$ es un múltiplo escalar del vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ y los vectores $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{6} \\ 0 \end{bmatrix}$ son linealmente independientes, por lo tanto

(a) El conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{6} \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ es una base de V.

(b) La dimensión de V es 2.

□

(3) Considerar el siguiente sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas,

$$\begin{cases} 6x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 12 \\ 6x_1 & + & 10x_3 & = & 6 \\ x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & -1 \end{cases}$$

Utilizar el método de Gauss-Jordan para

(a) Indicar que tipo de sistema es.

(b) En caso de ser compatible, describir el conjunto solución del sistema

Solución. La matriz aumentada del sistema es

La matriz aumentada del sistema es

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 & | & 12 \\ 6 & 0 & 10 & | & 6 \\ 1 & -1 & 4 & | & -1 \end{bmatrix}$$

Utilizando el método de Gauss-Jordan (que debe haber desarrollado cada alumno en su prueba) se llega a la siguiente matriz escalonada reducida equivalente,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{3} & | & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Esto implica que el sistema de ecuaciones es equivalente a

$$\begin{cases} x_1 & + & \frac{5}{3}x_3 & = & 1 \\ x_2 & - & \frac{7}{3}x_3 = & 1 \end{cases}$$

que a su vez equivale a

$$\begin{cases} x_1 & = & 1 - \frac{5}{3}x_3 \\ x_2 & = & 2 + \frac{7}{3}x_3 \end{cases}$$

Por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado, se puede tomar como variable libre $x_3 = t \in \mathbb{R}$ y se tiene que, el conjunto solución es

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 - \frac{5}{3}t \\ 2 + \frac{7}{3}t \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ t \in \mathbb{R} \right\}$$

Como

$$\begin{bmatrix} 1 - \frac{5}{3}t \\ 2 + \frac{7}{3}t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} \\ 1 \end{bmatrix},$$

el conjunto solución es la recta que pasa por el punto $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ en la dirección del vector $\begin{bmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$.

□

(4) Utilizar el método de Gauss-Jordan para decidir cuáles de las siguientes matrices son invertibles y, en caso de serlo, hallar su inversa

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \qquad\qquad \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 6 & 0 & 10 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ Utilizando el método de Gauss-Jordan (que debe haber desarrollado cada alumno en su prueba) se llega a que la matriz es invertible y su inversa es

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) $\begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 6 & 0 & 10 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ Esta matriz es la matriz del sistema de ecuaciones del ejercicio (3), como el sistema resultó indeterminado, la matriz no puede ser invertible.

□