Universidad Monteávila
Álgebra Lineal
Ingenierías Ciencia de Datos, Mecatrónica y Telemática
Resumen de Geometría Analítica

Este es un resumen de resultados de Geometría Analítica, que tiene el objetivo de ayudar en la comprensión del tema. Su estudio debe ser complementado con el Capítulo 2 de la Guía de Estudio que ya tienen en su poder. Es muy importante complementar con la guía, ya que allí pueden encontrar una variedad de gráficos. En cuanto a los ejercicios asignados, lo conveniente es hacerlos a mano (solo con papel, regla y lápiz) y verificar su resultado con algún programa como GeoGebra o Symbolab.

1. La recta

La ecuación general de la recta es $ax + by + c = 0$, donde a, b, c son números reales tales que a y b no se anulan simultáneamente.

Si $b \neq 0$ la ecuación se puede escribir en la forma

$$y = mx + d,$$

donde m es la pendiente de la recta y d es el punto donde la recta corta al eje y.

La pendiente, m, es la tangente del ángulo que forma la recta con el eje x y, si la recta pasa por los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, se tiene que

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Sus características principales son la pendiente m y la ordenada en el origen d.

Dos rectas son paralelas si tienen igual pendiente y son perpendiculares si el producto de sus pendientes es -1.

Si $b = 0$, la ecuación tiene la forma $x = x_o$, donde x_o es una constante; en este caso se trata de una recta vertical que corta el eje x en el punto x_o. En este caso es usual decir que tiene pendiente infinita.

LAS CÓNICAS

Es usual que la ecuación de una cónica se presente en la forma

$$Ax^2 + By^2 + Cy + Dx + E = 0,$$

donde A, B, C, D, E son constantes.

Para identificar el tipo de cónica que corresponde con la ecuación, debemos llevarla a su forma canónica (o simple), utilizando la técnica de completación de cuadrados.

2. La circunferencia

La ecuación canónica de la circunferencia es

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r^2$$

donde x_o, y_o, r son números reales y $r > 0$.

Características principales: El centro que es el punto (x_o, y_o) y el radio que es r.

3. La elipse

La ecuación canónica de la elipse es

$$\frac{(x - x_o)^2}{a^2} + \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1$$

donde x_o, y_o, a, b son números reales y $a, b > 0$.

Notar que la circunferencia corresponde al caso particular de la elipse $a = b = r$.

Características principales:

(1) Centro (x_o, y_o)

(2) Dos ejes de simetría, el horizontal sobre la recta $y = y_o$ y el vertical sobre la recta $x = x_o$; la longitud de estos ejes es $2a$ y $2b$ respectivamente. Al más largo se le llama *eje mayor*, al otro *eje menor*.
(3) Cuatro vértices ubicados en los ejes de simetría, que son los puntos

$$(x_o + a, y_o), (x_o - a, y_o), (x_o, y_o + b), (x_o, y_o - b)$$

Los vértices que están más alejados del centro se suelen llamar *vértices principales*; los otros dos se llaman *vértices secundarios, covértices* o simplemente *extremos del eje menor*. Ciertos autores llaman vértices solamente a los principales.

Por ejemplo si $a > b$ los vértices (principales) son $(x_o + a, y_o)$ y $(x_o - a, y_o)$, el eje mayor está sobre la recta $y = y_o$ y tiene longitud $2a$.

4. La parábola

La ecuación canónica de la parábola es $y = ax^2 + bx + c$, donde a, b, c son constantes y $a \neq 0$.
Características principales

(1) Abre hacia arriba si $a > 0$, abre hacia abajo si $a < 0$.
(2) Tiene un eje de simetría que corresponde con la recta vertical $x = -\dfrac{b}{2a}$ y su vértice es el punto

$$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right).$$

(3) Los posibles puntos de corte del gráfico de f con el eje x son los puntos

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

por lo tanto
- Si $b^2 - 4ac < 0$ la parábola no corta al eje x y está contenida en el semiplano superior o el semiplano inferior.
- Si $b^2 - 4ac = 0$ la parábola corta al eje x en un solo punto y está contenida en el semiplano superior o el semiplano inferior.
- Si $b^2 - 4ac > 0$ la parábola corta al eje x en dos puntos y una parte está contenida en el semiplano superior y otra en el semiplano inferior.

(4) Si $a > 0$ el valor mínimo que tomará y es $\dfrac{4ac - b^2}{4a}$ y lo tomará en $x = -\dfrac{b}{2a}$.
(5) Si $a < 0$ el valor máximo que tomará y es $\dfrac{4ac - b^2}{4a}$ y lo tomará en $x = -\dfrac{b}{2a}$.

5. La hipérbola

La ecuación canónica de la hipérbola puede venir en dos formas

$$\frac{(y - y_o)^2}{b^2} - \frac{(x - x_o)^2}{a^2} = 1 \qquad \text{ó} \qquad \frac{(x - x_o)^2}{a^2} - \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1.$$

Nos limitaremos al segundo caso simplificado $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, el otro caso (simplificado) es muy parecido (ver la guía).
Características principales

(1) Tiene dos eje de simetría, que corresponden con el eje y y el eje x.
(2) Tiene dos vértices, ubicados en $(a, 0)$ y $(-a, 0)$.
(3) Tiene dos asíntotas que son las rectas $y = \dfrac{b}{a}x$ y $y = -\dfrac{b}{a}x$