Universidad Monteávila
Álgebra Lineal
Ingenierías Ciencia de Datos, Mecatrónica y Telemática
Resumen y Ejercicios de Sistemas de Ecuaciones Lineales y Matrices

1. Sistemas de ecuaciones lineales

Definición 1. Sean m y n enteros positivos. Un *sistema de m ecuaciones lineales* en n variables (o incógnitas) $x_1, x_2, \dots x_n$ es un conjunto de ecuaciones de la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

donde a_{ij} $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, b_k, $1 \leq k \leq m$ son números reales.

Una *solución* del sistema es una lista de números $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ que da validez a cada ecuación cuando se utilizan los valores $s_1, \dots, s_n$ en lugar de $x_1, \dots, x_n$, respectivamente.

El conjunto de todas las posibles soluciones se llama *conjunto solución* del sistema lineal. Se dice que dos sistemas lineales son *equivalentes* si tienen el mismo conjunto solución. Es decir, cada solución del primer sistema es una solución del segundo sistema, y cada solución del segundo sistema también es una solución del primero.

El sistema se dice *homogéneo* si $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, en otro caso se dice *no homogéneo.*

Un sistema de ecuaciones lineales puede tener

(1) ninguna solución, o
(2) exactamente una solución, o
(3) un número infinito de soluciones.

Se dice que un sistema de ecuaciones lineales es *consistente* si tiene una solución o un número infinito de soluciones; un sistema es *inconsistente* cuando no tiene ninguna solución.

2. Matrices y su relación con los sistemas de ecuaciones lineales

Definición 2. Sean m y n enteros mayores o iguales que 1.

Una *matriz* $m \times n$ es un arreglo rectangular de $m \cdot n$ números dispuestos en m filas y n columnas

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

La igualdad anterior la abreviaremos mediante $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$ o simplemente $A = (a_{ij})$.

A los números a_{ij} se les llama *entradas* o *coeficientes* de la matriz A.

La información esencial de un sistema de ecuaciones lineales puede registrarse de forma compacta en una matriz.

Dado el sistema

$$\begin{cases} x_1 \;\; - 2x_2 + \;\; x_3 = \;\; 0 \\ \qquad\;\; 2x_2 - 8x_3 = \;\; 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases} \tag{2}$$

con los coeficientes de cada variable alineados en columnas, la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

se denomina *matriz de coeficientes* del sistema (2), y la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 2 & -8 & | & 8 \\ -4 & 5 & 9 & | & -9 \end{bmatrix}$$

se denomina *matriz aumentada* del sistema (2). (Aquí la segunda fila contiene un cero porque la segunda ecuación podría escribirse como $0 \cdot x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 8$).

Notar que la matriz aumentada de un sistema consiste es la matriz de coeficientes con una columna adicional que contiene las constantes de los miembros derechos de las ecuaciones.

En este ejemplo, la matriz aumentada tiene 3 filas y 4 columnas, por lo que es una matriz 3×4.

La notación matricial es muy útil para simplificar cálculos: ver ejemplos 7.11 y 7.12 de la guía.

3. Matrices escalonadas y matrices reducidas

Utilizar matrices operando sobre sus filas es muy útil para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Vamos a precisar los conceptos referentes a las operaciones que se pueden realizar en las filas de las matrices para resolver ecuaciones lineales.

Definición 3. Las *operaciones elementales fila o renglón* para matrices son las siguientes:

(1) Multiplicar (o dividir) una fila por un número diferente de cero.
(2) Sumar un múltiplo de una fila a otra fila.
(3) Intercambiar dos filas.

Para $c \neq 0$, estas operaciones se denotarán de la siguiente manera:

(1) $R_i \to cR_i$ significa "se sustituye la i-ésima fila por esa misma fila multiplicada por c".
(2) $R_i \to R_i + cR_j$ significa "se sustituye la i-ésima fila por la suma de la fila i más la fila j multiplicada por c".
(3) $R_i \leftrightarrow R_j$ significa "se intercambian las filas i y j".

El proceso de aplicar estas operaciones elementales con filas para simplificar una matriz se llama *reducción por filas.*

Definición 4. Sean A y B dos matrices $m \times n$. Se dice que B es *equivalente por filas* a la matriz A (o simplemente *equivalente* a A), si B se puede obtener de la matriz A a través de una sucesión finita de operaciones elementales de renglón. Si B es equivalente a A se abrevia $B \sim A$.

La relación entre matrices $\sim$ es una relación de equivalencia, es decir, si A, B y C son matrices $m \times n$, se cumple:

(1) $A \sim A$. (Reflexividad)
(2) Si $A \sim B$ entonces $B \sim A$. (Simetría)
(3) Si $A \sim B$ y $B \sim C$ entonces $A \sim C$. (Transitividad)

Definición 5. Se dice que una matriz es *escalonada por filas* si satisface las siguientes condiciones:

(1) Todas las filas cuyos elementos son todos cero (si las hay) aparecen en la parte inferior de la matriz.
(2) El primer número diferente de cero (a partir de la izquierda) en cualquier fila, que no contiene sólo ceros, es 1.
(3) Si dos filas sucesivas no contienen solamente ceros, entonces el primer 1 en la fila inferior ocurre más a la derecha que el primer 1 en el renglón superior.

Se dice que una matriz es *escalonada reducida* si es escalonada por filas y además satisface la siguiente condición adicional:

(4) Cualquier columna que contenga el primer 1 de un renglón tiene ceros en las demás posiciones.

El primer número diferente de cero de una fila (si lo hay) se llama pivote de esa fila.

A través de operaciones elementales fila se puede llevar una matriz a una matriz equivalente que es escalonada por filas y también a una matriz equivalente que es escalonada reducida.

Ejemplo 6. Las siguientes matrices se encuentran en la forma escalonada por renglones:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observación 7. Por lo general, la forma escalonada por renglones de una matriz no es única. Es decir, una matriz puede ser equivalente a más de una matriz en forma escalonada por renglones.

Por ejemplo, las siguientes matrices son diferentes y son equivalentes por renglones

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & -13 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 8. Las siguientes matrices están en la forma escalonada reducida por renglones:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las dos primeras tienen tres pivotes; las otras tres tienen dos pivotes.

4. Métodos de Gauss y de Gauss-Jordan

4.1. **Método de Gauss.** El método de Gauss se utiliza para obtener una matriz escalonada equivalente a una matriz dada.

Su aplicación está ilustrada en la Guía en los ejemplos 7.20 y 7.22.

Observación 9. Debe quedar claro que el propósito fundamental del método de Gauss es obtener una matriz en forma escalonada equivalente a una matriz dada, mediante el uso de las operaciones elementales de renglón en cualquier combinación. Así que el algoritmo anterior sólo es una guía para este propósito. Cualquier modificación es válida siempre y cuando se empleen únicamente las operaciones de renglón para matrices y se alcance el objetivo de obtener una matriz en forma escalonada equivalente por filas a la matriz inicial.

4.2. **Método de Gauss-Jordan.** El método de Gauss se utiliza para obtener una matriz escalonada reducida equivalente a una matriz dada y se procede de la siguiente manera.

(1) Se lleva la matriz a forma escalonada mediante el método de Gauss.
(2) Se hacen ceros todos los elementos arriba de cada pivote utilizando operaciones de renglón.

Está ilustrado en la Guía en los ejemplos 7.23, 7.24, 7.25 y 7.26.

Ver también las aplicaciones prácticas: ejemplos 7.28 y 7.29.

5. Ejercicios varios

(1) Utilizar los métodos de eliminación de Gauss y de Gauss-Jordan para encontrar, si existen, todas las soluciones de los sistemas dados. Verificar con un programa informático.

(a) $\begin{cases} 9x_1 + 9x_2 - 7x_3 = 6 \\ -7x_1 - x_3 = -10 \\ 9x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 45 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 11 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 10 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 9x_2 - 7x_3 = 2 \\ -x_3 = -2 \\ -3x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x_1 - 5x_2 = 0 \\ -x_1 + 5x_2 = 0 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 0 \\ 7x_2 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 = 0 \\ 7x_1 - 3x_2 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 6x_3 = 18 \\ 5x_1 + 8x_3 = -16 \\ 3x_1 + 2x_2 - 10x_3 = -3 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 = 9 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 6 \\ 5x_1 + 28x_2 - 26x_3 = -8 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$

(j) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 1 \\ -3x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \\ -3x_1 + 14x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 3 \\ 6x_1 + 12x_2 - 12x_3 - 6x_4 = 5 \end{cases}$

(k) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 4 \\ -2x_1 - 4x_2 + 8x_3 = -9 \end{cases}$

(l) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_3 - 2x_4 = -8 \\ 4x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 5x_1 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

(2) Un viajero que acaba de regresar de Europa gastó \$30 diarios en Inglaterra, \$20 diarios en Francia y \$20 diarios en España por concepto de hospedaje. En comida gastó \$20 diarios en Inglaterra, \$30 diarios en Francia y \$20 diarios en España. Sus gastos adicionales fueron de \$10 diarios en cada país. Los registros del viajero indican que gastó un total de \$340 en hospedaje, \$320 en comida y \$140 en gastos adicionales durante su viaje por estos tres países. Calcule el número de días que pasó el viajero en cada país o muestre que los registros son incorrectos debido a que las cantidades gastadas no son compatibles una con la otra.

(3) Una embotelladora de refrescos desea cotizar la publicidad de sus productos en televisión, radio y revista, se tienen tres propuestas del plan de medios de acuerdo con el presupuesto asignado acerca de la cantidad de anuncios por medio en el transcurso de un mes. En el primer presupuesto cada anuncio en televisión tiene un coste de \$250 000, en radio \$5 000 y en revista \$30 000. En el segundo presupuesto \$310 000, \$4 000 y \$15 000 y en el último presupuesto \$560 000, \$10 000 y \$35 000. Los totales por presupuesto son los siguientes: \$21 795 000, \$31 767 000 y \$61 225 000. Determine la cantidad de anuncios cotizados por cada medio.

¿Damas o tigres?

A muchos de vosotros os resulta conocida la historia de Frank Stockton, *¿La dama o el tigre?*, en la cual un prisionero debe elegir entre dos habitaciones, en una de las cuales hay una dama y en la otra un tigre. Si elige la primera se casa con la dama; si elige la segunda (probablemente) es comido por el tigre.

El rey de cierta tierra también había leído la historia, y le dio una idea.

—¡Es la manera perfecta de tratar a mis prisioneros! —dijo un día a su ministro—. Lo único es que no se lo dejaré a la suerte; pondré letreros en las puertas de las habitaciones, y en cada caso le daré al prisionero ciertos datos acerca de los letreros. Si es inteligente y puede razonar lógicamente, salvará su vida..., ¡y encima se llevará una hermosa novia!

—¡Es una idea excelente! —dijo el ministro.

LAS PRUEBAS DEL PRIMER DÍA

El primer día hubo tres pruebas. En las tres el rey explicó al prisionero que en cada una de las dos habitaciones había o una dama o un tigre, pero *pudiera* ser que hubiese tigres en las dos habitaciones, o damas en las dos habitaciones, o de nuevo quizá hubiese una dama en una habitación y un tigre en la otra.

1. La primera prueba

—Suponed que en las dos habitaciones hay tigres —preguntó el prisionero—. ¿Qué hago entonces?

—¡Mala suerte! —contestó el rey.

—¿Y suponiendo que haya damas en las dos habitaciones? —preguntó el prisionero.

—Entonces, obviamente, has tenido buena suerte —contestó el rey—. ¡Seguro que podrías haber adivinado esta respuesta!

—Bien, supongamos que en una habitación hay una dama y en la otra un tigre, ¿qué pasa entonces? —preguntó el prisionero.

—En ese caso, no da lo mismo elegir una habitación que otra, ¿no?

—¿Cómo sé qué habitación elegir? —preguntó el prisionero.

El rey señaló los letreros de las puertas de las habitaciones:

I	II
EN ESTA HABITACIÓN HAY UNA DAMA, Y EN LA OTRA UN TIGRE	EN UNA DE ESTAS HABITACIONES HAY UNA DAMA, Y EN UNA DE ESTAS HABITACIONES HAY UN TIGRE

—¿Es verdad lo que dicen los letreros? —preguntó el prisionero.

—Uno de ellos dice la verdad —replicó el rey—, pero el otro no.

Si tú fueras el prisionero, ¿qué puerta abrirías (suponiendo, por supuesto, que prefirieras a la dama)?

2. La segunda prueba

Y así, el primer prisionero salvó su vida y se llevó a la dama. Los letreros de las puertas fueron cambiados y, por consiguiente, se seleccionaron nuevos ocupantes para las habitaciones. Esta vez los letreros decían lo siguiente:

I	II
AL MENOS EN UNA DE ESTAS HABITACIONES HAY UNA DAMA	HAY UN TIGRE EN LA OTRA HABITACIÓN

—¿Es verdad lo que dicen los letreros? —preguntó el segundo prisionero.

—O bien los dos dicen la verdad, o bien los dos mienten —contestó el rey.

¿Qué habitación debería escoger el prisionero?

3. La tercera prueba

En esta prueba el rey indicó que otra vez los letreros eran o ambos verdaderos o ambos falsos. Aquí están los letreros:

I	II
O BIEN HAY UN TIGRE EN ESTA HABITACIÓN, O BIEN HAY UNA DAMA EN LA OTRA HABITACIÓN	HAY UNA DAMA EN LA OTRA HABITACIÓN

La primera habitación, ¿contiene una dama o un tigre? ¿Qué pasa con la otra habitación?

EL SEGUNDO DÍA

—Ayer fue un fracaso —dijo el rey a su ministro—. ¡Los tres prisioneros resolvieron los acertijos! Bueno, hoy vamos a tener cinco pruebas, y creo que las haré un poco más duras.

—¡Es una idea excelente! —dijo el ministro.

Bien, en cada una de las pruebas de este día, el rey explicó que en la habitación de la izquierda (habitación I), si hay una dama en ella, el letrero de la puerta dice la verdad, pero si hay un tigre, el letrero miente. En la habitación de la derecha (habitación II), la situación es al contrario: una dama en la habitación significa que el letrero de la puerta miente, y un tigre en la habitación significa que el letrero dice la verdad. De nuevo, es posible que haya damas en ambas habitaciones, o que haya tigres en ambas habitaciones, o que haya una dama en una habitación y un tigre en la otra.

4. La cuarta prueba

Después de que el rey explicara las reglas precedentes al prisionero, señaló los dos letreros:

I	II
HAY DAMAS EN LAS DOS HABITACIONES	HAY DAMAS EN LAS DOS HABITACIONES

¿Qué habitación debería escoger el prisionero?