Universidad Monteávila
Álgebra Lineal
Ingenierías Ciencia de Datos, Mecatrónica y Telemática
Resumen y Ejercicios de Autovalores, Autovectores y Diagonalización

1. Definiciones y resultados básicos

Sea n un entero positivo y $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal.

Se dice que un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ es un *autovalor* de T si existe un vector **no nulo** $v \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$Tv = \lambda v.$$

En este caso, se dice que v es un *autovector* asociado al autovalor λ.

Observación 1. Es muy importante destacar que en la definición de autovalor, el vector que debe existir y que satisface $Tv = \lambda v$ debe ser no nulo, es decir, diferente del vector 0. Si no pedimos esto, la definición pierde sentido, ya que siempre se cumple $T0 = 0$.

Recordemos que existe una correspondencia natural entre matrices y transformaciones lineales. Si λ es un autovalor de T, v es un autovector asociado al autovalor λ y $A = [T]$ se tendría que

$$Av = \lambda v.$$

Por esta razón los conceptos de autovalor y autovector se usan de manera indistinta, tanto para matrices como para transformaciones lineales.

Precisando: Sea n un entero positivo y sea $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ una matriz $n \times n$.

Se tiene que λ es una autovalor de A si existe un vector no nulo

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ tal que } A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{m2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Como es natural al vector no nulo v se le conoce como autovector asociado al autovalor λ de la matriz A.

Para hallar los autovalores de la matriz A de tamaño $n \times n$A, primero se hallan las soluciones de la ecuación $\det(A - \lambda I_n) = 0$ y, después se resuelven las ecuaciones $Av = \lambda v$ para cada autovalor λ.

Definición 2. Si A es una matriz $n \times n$, al polinomio $\rho(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ se le llama *polinomio característico* de A.

Los autovalores de una matriz A, o de la transformación lineal asociada, son las raíces de su polinomio característico.

2. Semejanza de matrices

Definición 3. Sean A y B dos matrices cuadradas $n \times n$, se dice que A y B son *semejantes* si existe una matriz $n \times n$ invertible, P, tal que

$$A = P^{-1}BP.$$

La semejanza de matrices tiene una cantidad de propiedades que resultarán muy importantes.

Proposición 4. *La semejanza de matrices es una relación de equivalencia, es decir, si A, B y C son matrices $n \times n$, se cumple*

(1) *A es semejante a A.*

(2) *Si A es semejante a B entonces B es semejante a A.*
(3) *Si A es semejante a B y B es semejante a C entonces A es semejante a C.*

También tenemos el siguiente resultado, que puede ser muy útil al momento de efectuar cálculos.

Proposición 5. *Si A y B son matrices $n \times n$ y A es semejante a B, entonces A^k es semejante a B^k para $k = 1, 2, \ldots$ y si $A = P^{-1}BP$ entonces*

$$A^k = P^{-1}B^kP.$$

También tenemos este otro resultado.

Teorema 6. *Sean A y B dos matrices $n \times n$ que son semejantes. Entonces*
(1) $\det A = \det B$.
(2) *A es invertible si y solo si B es invertible.*
(3) *A y B tienen el mismo polinomio característico y, por lo tanto, los mismos autovalores.*
(4) *Si A es semejante a B, $A = P^{-1}BP$ y $v \in \mathbb{R}^n$ es un autovector de B con autovalor λ, entonces $P^{-1}v$ es una autovector de A con autovalor λ.*

3. Diagonalización

Definición 7. Sea A una matriz $n \times n$, se dice que A es *diagonalizable* si existe una matriz diagonal D tal que A es semejante a D.

Una vez dada esta definición, surgen las siguientes preguntas: ¿Cómo saber si una matriz es diagonalizable o no? Si la matriz es diagonalizable ¿Cómo hallar la matriz D?

Supongamos que D es una matriz $n \times n$ diagonal, que los números que aparecen en la diagonal son $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ ($\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$) y que cada elemento λ_i aparece r_i veces en la diagonal.

Como el determinante de una matriz diagonal es el producto de los elementos de la diagonal, tenemos que el polinomio característico de D es

$$\rho_D(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1}(\lambda_2 - \lambda)^{r_2} \cdots (\lambda_k - \lambda)^{r_k}.$$

Por lo tanto, cada λ_i es una raíz de multiplicidad r_i del polinomio $\rho_D(\lambda)$.

Notemos que se debe cumplir $1 \leq r_i \leq n$ y $r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n$.

Se tiene el siguiente resultado.

Teorema 8. *Si D es una matriz diagonal y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ son los elementos de su diagonal, entonces el polinomio característico de D tiene la forma*

$$\rho_D(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1}(\lambda_2 - \lambda)^{r_2} \cdots (\lambda_k - \lambda)^{r_k},$$

además $\dim \text{Núcleo}(D - \lambda_k I) = r_k$ *y* $r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n$.

Definición 9. Sea A una matriz $n \times n$ y sea λ un autovalor de A.

Se define la *multiplicidad geométrica* del autovalor λ como $\dim \text{Núcleo}(A - \lambda I)$ y se define la *multiplicidad algebraica* del autovalor λ como la multiplicidad de λ como raíz del polinomio característico de A.

Observación 10. Tanto la multiplicidad geométrica como la algebraica son enteros comprendidos entre 1 y n. En las matrices diagonales ambas coinciden y la suma de las multiplicidades es n.

Se cumple el siguiente resultado.

Teorema 11. *Sea A una matriz $n \times n$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*
(1) *A es diagonalizable.*

(2) *A posee n autovectores linealmente independientes.*
(3) *Existe una base de $\mathbb{R}^n$ cuyo elementos son autovectores de A.*
(4) *El polinomio característico de A se puede descomponer como producto de factores lineales y la multiplicidad algebraica de cada autovalor coincide con su multiplicidad geométrica.*

Corolario 12. *Si una matriz $n \times n$ posee n autovalores diferentes entonces es diagonalizable.*

Observación 13. Supongamos que sabemos que la matriz $n \times n$, A, es diagonalizable y que ya hallamos una base $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de autovectores de A tales que $Av_i = \lambda_i v_i$, $i = 1, \ldots, n$

¿Cómo hallamos la matriz P tal que
$$D = P^{-1}\,A\,P,$$
o lo que es equivalente
$$P\,D\,P^{-1} = A.$$

Sea P la matriz cuya i-ésima columna es el vector v_i, entonces $Pe_i = v_i$, como la imagen bajo P de una base es una base, se tiene que P es invertible y $P^{-1}v_i = e_i$; por lo tanto,
$$PDP^{-1}v_i = PDe_i = P\lambda_i e_i = \lambda_i Pe_i = \lambda_i v_i,$$
lo que implica que A y PDP^{-1} coinciden en una base y de aquí se deduce que
$$A = PDP^{-1}.$$

Observación 14. Como existe un número infinito de maneras en las cuales se puede elegir un vector característico, existe un número infinito de formas para seleccionar una matriz de diagonalización P. El único consejo es elegir los vectores característicos y la matriz P que permitan un manejo aritmético lo más sencillo posible. En términos generales, esto quiere decir que debe insertarse el mayor número de ceros y unos posible.

Ejercicios

(1) Para cada una de las siguientes matrices, hallar su polinomio característico, sus autovalores y sus autoespacios.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (i) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(2) De un ejemplo de una matriz 2×2, no triangular y con autovalores 2 y 5.
(3) Demostrar que las siguientes matrices A y B no son semejantes.
(a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(4) A continuación se da una diagonalización de la matriz A en la forma $P^{-1}AP = D$. Diga cuáles son los autovalores de A y las bases para los autoespacios correspondientes.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{3}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

(5) Determinar si cada una de las siguientes matrices A son diagonalizables; si es diagonalizable, si es diagonalizable encuentre una matriz invertible P y una matriz diagonal D tales que $P^{-1}AP = D$ y calcules A^3 y A^4.

(a) $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (f) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(g) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (h) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

(6) Justificar la siguiente afirmación: Si A una matriz invertible diagonalizable, entonces A^{-1} también es diagonalizable.