Universidad Monteávila
Álgebra Lineal
Ingenierías Ciencia de Datos, Mecatrónica y Telemática
Resumen de Espacios Vectoriales

1. Definiciones básicas

Definición 1. Un *espacio vectorial* (o *espacio lineal* consta de:

(1) Un conjunto V de objetos, que llamaremos vectores.
(2) Una operación llamada *suma de vectores*, que asigna a cada par de vectores $x, y \in V$ un vector $x + y \in V$, llamado suma de x y de y, de manera que se cumplan las siguientes propiedades:
   (a) La suma es conmutativa, esto es, $x + y = y + x$, para todo $x, y \in V$,
   (b) la suma es asociativa, esto es, $x + (y + z) = (x + y) + z$, para todo $x, y, z \in V$,
   (c) existe un único vector $\mathbf{0}$ en V, llamado el *vector cero*, tal que $x + \mathbf{0} = x$ para todo $x \in V$,
   (d) para cada vector $x \in X$ existe un único vector $-x \in V$ tal que $x + (-x) = 0$.
(3) Una operación llamada *multiplicación por un escalar* , que asigna a cada escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ y a cada vector $x \in V$ un vector λx, llamado producto de λ y de x, de manera que se cumplan las siguientes propiedades:
   (a) $1x = x$ para todo $x \in V$,
   (b) $(\lambda_1\lambda_2)\, x = \lambda_1(\lambda_2 x)$, para todo $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $x \in V$,
   (c) $\lambda\,(x + y) = \lambda x + \lambda y$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $x, y \in V$,
   (d) $(\lambda_1 + \lambda_2)\, x = \lambda_1 x + \lambda_2 x$, para todo $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $x \in V$.

Observación 2. En este contexto, a los números reales se les suele llamar escalares y no se le suele poner flechas en la parte de arriba a los símbolos que denotan vectores.

En todo espacio vectorial V

$$0u = \mathbf{0} \qquad \text{y} \qquad (-1)u = -u \qquad \text{para todo } u \in V.$$

Sea V un espacio vectorial y sean u y $u_1, \dots, u_n$ elementos de V, se dice que u es una *combinación lineal* de $u_1, \dots, u_n$ si existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k.$$

2. Subespacios

Definición 3. Sea V un espacio vectorial y W un subconjunto de V, se dice que W es un *subespacio* de V, si W en si mismo es un espacio vectorial con las mismas operaciones de suma de vectores y multiplicación por un escalar del espacio V

Observación 4. La intersección de subespacios es un subespacio, la unión de subespacios no necesariamente es un subespacio.

Teorema 5. *Sea V un espacio vectorial y sea W un subconjunto de V, entonces W es un subespacio de V si y solo si W es distinto de $\emptyset$ y $u + \alpha v \in W$ para todos $u, v \in W$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Definición 6. Sea V un espacio vectorial y sea A un subconjunto de V. El *subespacio generado* por A, que se denotará por $\operatorname{Span}(A)$, es el subespacio más pequeño de V, que contiene al conjunto A.

Observación 7. Hay ciertos detalles que se deben tomar en cuenta:

- Si V es un espacio vectorial y $A \subseteq V$, el subespacio generado por el conjunto A es igual a la intersección de todos los subespacios de V que contienen a A. Como la intersección de subespacios es un subespacio, este conjunto es un subespacio y, por construcción, cualquier subespacio que contenga a A lo contiene; por eso es el subespacio más pequeño que contiene a A
- El subespacio más pequeño de un espacio vectorial es el conjunto $\{0\}$.
- El subespacio generado por el conjunto $\emptyset$ es $\{0\}$.
- Si $A \neq \emptyset$ el subespacio generado por A es el conjunto de las combinaciones lineales de los elementos de A.

3. Bases, dimensión y coordenadas

Sea V un espacio vectorial.

Definición 8. Sea $A \subset V$, decimos que A es *linealmente independiente* si dados un número natural n, $u_1, \ldots, u_n \in A$ y escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ se tiene que

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0$$

implica que

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

En caso contrario se dice que el conjunto es *linealmente dependiente*.

Definición 9. Sea V un espacio vectorial, se dice que un subconjunto $\mathfrak{B}$ de V es una *base* de V si:

(1) $\mathfrak{B}$ es linealmente independiente,
(2) El subespacio generado por $\mathcal{B}$ es V.

Se cumple el siguiente resultado.

Teorema 10. *Sea V un espacio vectorial, que tiene una base con n elementos, donde n es un entero positivo, entonces:*

(1) *Cualquier otra base de V tiene exactamente n elementos.*
(2) *Todo subconjunto de V con más de n elementos es linealmente dependiente.*
(3) *Todo subconjunto de V linealmente independiente con n vectores es una base de V.*
(4) *Todo subconjunto de V que genere todo el espacio V y que tenga n elementos es linealmente independiente y, por lo tanto, es una base de V.*

Tomando en cuenta el resultado anterior, se da la siguiente definición.

Definición 11. Sea V un espacio vectorial, si V tiene una base con n elementos (n un entero positivo) se dice que la *dimensión* de V es n, en caso de que V no tenga base finita, se dice que V tiene dimensión infinita.

Observación 12. El caso del subespacio $\{0\}$ merece especial atención en lo que se refiere a bases y dimensión. A este espacio se le asigna dimensión 0, podemos aceptar esto como una convención, pero lo que ocurre es que el conjunto vacío ($\emptyset$) genera este subespacio y es linealmente independiente. Como la cantidad de elementos del conjunto vacío es 0, la dimensión del espacio $\{0\}$ es 0.

Si V es un espacio vectorial que contiene vectores no nulos (es decir $\{0\} \subsetneqq V$) el conjunto $\mathfrak{B}$ es una base de V si es linealmente independiente y todo elemento del espacio V es una combinación lineal de elementos de $\mathfrak{B}$.

También se cumple el siguiente resultado.

Teorema 13. *Todo subconjunto linealmente independiente de un espacio vectorial está contenido en una base.*

En palabras: todo subconjunto linealmente independiente se puede "completar" hasta obtener una base.

3.1. **Coordenadas.** Si V es un espacio vectorial de dimensión n, $\mathfrak{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base de V y $u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots x_n u_n$ se dice que las coordenadas de u en la base $\mathfrak{B}$ son $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y se denota por

$$u_{\mathfrak{B}} = [x_1 \; x_2 \; \cdots \; x_n] \qquad \text{ó} \qquad u_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

4. Espacios con producto interno

Definición 14. Sea V un espacio vectorial, un *producto interno* o *producto escalar* en V es una función

$$\langle \; , \; \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

que satisface las siguientes propiedades para $u, v, w \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

(1) $\langle u, u \rangle \geq 0$ y es igual a 0 si y solo si $u = 0$,
(2) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$,
(3) $\langle \alpha\, u, v \rangle = \alpha \, \langle u, v \rangle$,
(4) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.

Definición 15. Sea V un espacio vectorial con producto interno $\langle \; , \; \rangle$, la *norma asociada* a este producto interno se define como

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

Proposición 16 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)**.** *Sea $\langle , \rangle$ un producto interno en el espacio vectorial V. Entonces*

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \, \|v\|$$

para todo $u, v \in V$.

Además se cumple la igualdad si y sólo si $u = \lambda v$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, es decir, u y v son colineales.

Teorema 17. *Sea V un espacio vectorial con producto interno $\langle \; , \; \rangle$ entonces la norma asociada $\| \; \|$ satisface las siguientes propiedades:*

Si u y v son elementos de V y α es un número real, se cumple

(1) $\|u\| \geq 0$, $\|u\| = 0$ *si y solo si* $u = 0$,
(2) $\|\alpha\, u\| = |\alpha| \, \|u\|$,
(3) *(Desigualdad triangular)* $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

En general una función que satisface las propiedades enunciadas en el teorema anterior se le conoce como *norma*, es importante destacar que existen normas no asociadas con un producto interno.

Definición 18. Sea V un espacio vectorial con producto interno $\langle \; , \; \rangle$.

(1) Si $u, v \in V$, se dice que u y v son *ortogonales* (abreviado $u \perp v$) si

$$\langle u, v\rangle = 0.$$

(2) Si $\mathcal{M} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ es un conjunto de vectores, se dice que $\mathcal{M}$ es *ortogonal* si sus elementos son ortogonales dos a dos, es decir

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0 \text{ si } i \neq j.$$

(3) Se dice que $\mathcal{M}$ es *ortonormal* si $\mathcal{M}$ es ortogonal y cada vector u_i tiene norma 1.

Proposición 19. *Sean V un espacio vectorial con producto interno $\langle \; , \; \rangle$, $\mathcal{M} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ un conjunto ortogonal de vectores y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ una colección de escalares, entonces*

(1) *Si $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$ entonces*

$$\|u\| = \sqrt{\alpha_1^2 \|u_1\|^2 + \cdots + \alpha_n^2 \|u_n\|^2}.$$

(2) *Si $\mathcal{M}$ no contiene al vector nulo, entonces $\mathcal{M}$ es linealmente independiente.*
(3) *(Generalización del teorema de Pitágoras) Si $\mathcal{M}$ es ortonormal y $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$, entonces*

$$\|u\| = \sqrt{\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2}.$$

Corolario 20. *Todo conjunto ortonormal es linealmente independiente.*

5. Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt

Sea V un espacio con producto interno y $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es un subconjunto linealmente independiente de V, procediendo de la siguiente manera se obtiene un sistema ortonormal $\{v_1, \ldots, v_n\}$ y que satisface

$$
\begin{aligned}
v_1 =& \frac{u_1}{\|u_1\|} \qquad \operatorname{Span}\{v_1\} = \operatorname{Span}\{u_1\}, \\
v_2 =& \frac{1}{\|u_2 - \langle u_2, v_1\rangle v_1\|}\left(u_2 - \langle u_2, v_1\rangle v_1\right) \qquad \operatorname{Span}\{v_1, v_2\} = \operatorname{Span}\{u_1, u_2\} \\
& \qquad \text{y } v_2 \perp \operatorname{Span}\{u_1\}, \\
v_3 =& \frac{1}{\|\langle u_3, v_1\rangle v_1 - \langle u_3, v_2\rangle v_2\|}\left(u_3 - (\langle u_3, v_1\rangle v_1 - \langle u_3, v_2\rangle v_2\right) \\
& \qquad \operatorname{Span}\{v_1, v_2, v_3\} = \operatorname{Span}\{u_1, u_2, u_3\} \\
& \qquad \text{y } v_3 \perp \operatorname{Span}\{u_1, u_2\}, \\
v_4 =& \frac{1}{\|u_4 - (\langle u_4, v_1\rangle v_1 - \langle u_4, v_2\rangle v_2 - \langle u_4, v_1\rangle v_1\|}\left(u_4 - (\langle u_4, v_1\rangle v_1 - \langle u_4, v_2\rangle v_2 - \langle u_4, v_1\rangle v_1)\right) \\
& \qquad \operatorname{Span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \operatorname{Span}\{u_1, u_2, u_3, u_4\}, \\
& \qquad \text{y } v_4 \perp \operatorname{Span}\{u_1, u_2, u_3\},
\end{aligned}
$$

::

::

El proceso anterior se conoce como *método de ortonormalización de Gram-Schmidt* y es un algoritmo que permite transformar un conjunto de vectores linealmente independientes en un conjunto ortonormal.

Observación 21. Si en el proceso de Gram-Schmidt se omite el paso de dividir ente la norma del vector, se obtiene un conjunto ortogonal.

Una consecuencia del proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt es la siguiente.

Teorema 22. *Todo espacio vectorial de dimensión finita y con producto interno posee una base ortogonal y una base ortonormal.*

Observación 23. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno $\langle\, , \,\rangle$ y sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ortonormal de V. Entonces

(1) Todo vector v de V se escribe en términos de la base de la siguiente manera

$$v = \langle v, v_1\rangle v_1 + \cdots + \langle v, v_n\rangle v_n = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle v_i,$$

es decir, si

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n,$$

entonces

$$\alpha_i = \langle v, v_i\rangle v_i.$$

(2) Se cumple que

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v_1\rangle^2 + \cdots + \langle v, v_n\rangle^2}\ :$$

(3) La proyección del vector v sobre el espacio generado por $\{v_1, \ldots, v_k\}$ $(1 \le k \le n)$ es el vector

$$\langle v, v_1\rangle v_1 + \cdots + \langle v, v_k\rangle v_k = \sum_{i=1}^{k} \langle v, v_i\rangle v_i.$$

(4) El vector del subespacio generado por $\{v_1, \ldots, v_k\}$ $(1 \le k \le n)$ que mejor aproxima a V es

$$\langle v, v_1\rangle v_1 + \cdots + \langle v, v_k\rangle v_k = \sum_{i=1}^{k} \langle v, v_i\rangle v_i,$$

es decir, su proyección ortogonal sobre el subespacio generado por $\{v_1, \ldots, v_k\}$.