Universidad Monteávila
Álgebra Lineal
Ingenierías Ciencia de Datos, Mecatrónica y Telemática
Resumen de vectores en el espacio

1. Puntos y vectores en el espacio

Consideremos el espacio tridimensional

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Al igual que $\mathbb{R}^2$ se identifica con el plano, $\mathbb{R}^3$ se identifica con el espacio ambiente. Cada punto P del espacio está en correspondencia con un elemento (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$.

Al punto $(0, 0, 0)$ se le suele llamar el *origen de coordenadas*, o simplemente, el *origen*. Existen tres planos que se destacan en este espacio, que son: el plano "xy", el plano "yz" y el plano "xz".

Como en el caso bidimensional, existe una identificación natural entre los puntos de $\mathbb{R}^3$ y los vectores en el espacio: Al punto (x, y, z) le hacemos corresponder el vector de extremo inicial el origen y de extremo final el punto (x, y, z).

La suma de vectores y el producto por un escalar se definen de manera natural:

Si $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1), \vec{v} = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ y $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2),$$

$$\lambda\vec{u} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1).$$

También en el caso tridimensional, la suma y diferencia de vectores se puede hacer, de manera geométrica, siguiendo la ley del paralelogramo.

2. Distancia entre dos puntos del espacio y norma de vectores

La distancia d entre los puntos (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) es

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

Al igual que en el caso bidimensional, dado un vector $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, definimos la *norma* de $\vec{u}$ como

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Se tiene que $\|\vec{u}\|$ es la distancia del punto (x, y, z) al origen, es decir, la longitud del vector $\vec{u}$.

La norma de los vectores satisface las siguientes propiedades:

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores en el espacio y α un número real, entonces

(1) $\|\vec{u}\| \geq 0$, $\|\vec{u}\| = 0$ si y solo si $\vec{u} = 0$,
(2) $\|\overrightarrow{\alpha\, u}\| = |\alpha|\, \|\vec{u}\|$,
(3) (Desigualdad triangular) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

Decimos que $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ es unitario si $\|\vec{u}\| = 1$.

Dado $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ no nulo, si consideramos

$$\vec{v} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|},$$

obtenemos que $\vec{v}$ es unitario y que tiene la misma dirección que $\vec{u}$.

3. Producto escalar

Sean $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1), \vec{v} = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$. El *producto escalar* de estos vectores se define de manera similar al caso bidimensional, es decir, es igual al producto de las longitudes de los vectores multiplicado por el coseno del ángulo que forman y, en coordenadas se cumple

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Es muy importante notar que, tanto en el caso bidimensional como en el caso tridimensional, el producto escalar siempre es igual a la suma del producto de las coordenadas.

Al igual que en el caso de $\mathbb{R}^2$ el producto interno tiene las siguientes propiedades.

Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ vectores en el espacio y α un número real, entonces

(1) $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0$ y es igual a 0 si y solo si $\vec{u} = 0$,
(2) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$,
(3) $\langle \alpha\, \vec{u}, \vec{v} \rangle = \alpha\, \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$,
(4) $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$.

Nuevamente, los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son *perpendiculares* u *ortogonales* si $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$

También se cumple

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}.$$

4. Ecuación de la recta en el espacio.

Si $\vec{p}_o = (x_o, y_o, z_o)$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, la ecuación de la recta que pasa por el punto $\vec{p}_o$ en la dirección del vector $\vec{u}$ es

$$(x, y, z) = (x_o, y_o, z_o) + t(u_1, u_2, u_3),$$

o lo que es equivalente

$$x = x_o + tu_1, \quad y = y_o + tu_2, \quad z = z_o + tu_3.$$

Si $u_1 \neq 0$, $u_2 \neq 0$ y $u_3 \neq 0$ se puede eliminar t y la ecuación se expresa en su forma cartesiana

$$\frac{x - x_o}{u_1} = \frac{y - y_o}{u_2} = \frac{z - z_o}{u_3}$$

Al igual que en el plano, una recta está determinada si damos dos puntos por los que pasa. Si L es la recta que pasa por los puntos ($\vec{p}_o = (x_o, y_o, z_o)$ y $\vec{p}_1 = (x_1, y_1, z_1)$. la ecuación de L es:

$$\frac{x - x_o}{x_1 - x_o} = \frac{y - y_o}{y_1 - y_o} = \frac{z - z_o}{z_1 - z_o},$$

siempre que $x_1 - x_o \neq 0$, $y_1 - y_o \neq 0$ y $z_1 - z_o \neq 0$.

Dos rectas son *perpendiculares* si sus vectores directores lo son.

Dos rectas son *paralelas* si sus vectores directores son paralelos.

En $\mathbb{R}^3$, si dos rectas son paralelas, entonces son iguales o no se intersectan.

En $\mathbb{R}^3$, si dos rectas no son paralelas, entonces no se cortan o su intersección es un punto.

5. Ecuación del plano

Una manera de determinar un plano es indicar un punto por donde pasa el plano y un vector perpendicular a él.

Sea $\vec{p}_o = (x_o, y_o, z_o)$ un punto del plano y $\vec{u} = (a, b, c)$ un vector perpendicular al plano.

Si $\vec{p} = (x, y, z)$ es otro punto del plano entonces $\vec{p} - \vec{p}_o = (x, y, z) - (x_o, y_o, z_o)$ es perpendicular a $\vec{u} = (a, b, c)$, es decir,

$$\langle (a, b, c), (x, y, z) - (x_o, y_o, z_o) \rangle = 0.$$

Por lo tanto

$$a(x - x_o) + b(y - y_o) + c(z - z_o) = 0.$$

Y así

$$ax + by + cz + d = 0$$

donde $d = -ax_o - by_o - cz_o$. Esta ecuación se llama *ecuación cartesiana del plano* (notar que el vector (a, b, c) es perpendicular al plano).

Un plano también está determinado por dos rectas no paralelas que se cortan.

Sean L_1 y L_2 dos rectas no paralelas de direcciones respectivas $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que se cortan en un punto $\vec{p}_o$. Los puntos $\vec{p}$ sobre el plano determinado por L_1 y L_2 son todos los puntos de la forma

$$\vec{p} = \vec{p}_o + t\vec{u} + s\vec{v},$$

donde $t, s \in \mathbb{R}$.

Esta ecuación se llama también *ecuación vectorial del plano* y las ecuaciones correspondientes entre las componentes se llaman las *ecuaciones paramétricas del plano*, éstas son:

$$x = x_o + tu_1 + sv_1, \qquad y = y_o + tu_2 + sv_2, \qquad z = z_o + tu_3 + sv_3.$$

Un plano está determinado si damos tres puntos no alineados por los que pasa el plano.

Sean $\vec{p}_o, \vec{p}_1, \vec{p}_2$ tres puntos diferentes y no alineados por los que pasa el plano. Sean $\vec{u} = \vec{p}_1 - \vec{p}_o$ y $\vec{v} = \vec{p}_2 - \vec{p}_o$. Sean L_1 y L_2 dos rectas de direcciones respectivas $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que pasan por $\vec{p}_o$. Entonces L_1 y L_2 se cortan en el punto $\vec{p}_o$. Estas dos rectas no paralelas que se cortan, determinan un plano.