Universidad Monteávila
Álgebra Lineal
Ingenierías Ciencia de Datos, Mecatrónica y Telemática
Ejercicios de Espacios Vectoriales

(1) Determinar si el conjunto de vectores dado es linealmente dependiente o independiente.

(a) $\begin{bmatrix} 9 \\ -8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -11 \\ -3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12 \\ -2 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} -10 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}$ (i) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(j) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(2) Determinar si el conjunto dado de vectores genera el espacio vectorial especificado.

(a) $\mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 18 \\ 6 \end{bmatrix}$ (b) $\mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ (c) $\mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} 11 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(d) $\mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -8 \end{bmatrix}$ (f) $\mathbb{R}^4 : \begin{bmatrix} 1 \\ -12 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix}$ (h) $\mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(i) $\mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ -12 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ (j) $\mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ -12 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ 15 \end{bmatrix}$ (k) $\mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$

(3) Sea $\mathcal{P}_2$ el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que 2, determinar si el conjunto B es una base para el espacio vectorial $\mathcal{P}_2$.

(a) $B = \{x, 1 + x, x - x^2\}$ (b) $B = \{1 - x, 1 - x^2, x - x^2\}$
(c) $B = \{1, 1 + 2x + 3x^2\}$ (d) $B = \{1, 2 - x, 3 - x^2, x + 2x^2\}$
(e) $B = \{x^2, 2 + x, x - x^2\}$ (f) $B = \{x^2, 2 + x\}$

(4) Encuentre una base para Span$\{-2x, 2x - x^2, 1 - x^2, 1 + x^2\}$ en $\mathcal{P}_2$.
(5) Encuentre una base para Span$\{1 - x, x - x^2, 1 - x^2, 1 - 2x + x^2\}$ en $\mathcal{P}_2$.
(6) ¿Por qué dos polinomios de grado menor o igual a dos, no pueden generar P_2?.
(7) Para qué valor(es) de α serán linealmente dependientes los vectores

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}?$$

(8) Encuentre una base en R^3 para el conjunto de los vectores contenidos en el plano

$$3x - 2y + 5z = 0.$$

(9) Encuentre una base en R^3 para el conjunto de los vectores contenidos en el plano

$$3x - 2y + z = 0.$$

(10) Demuestre que para cualquier número real t, los vectores

$$\begin{bmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos t \\ -\operatorname{sen} t \end{bmatrix}$$

forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$.

(11) Dar un ejemplo de una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ que no sea la base canónica.

(12) Sea $H = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;:\; a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0\}$, donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales no todos cero. Demuestre que H es un subespacio propio de $\mathbb{R}^n$. A H se le conoce como hiperplano en $\mathbb{R}^n$ que pasa por el origen.

(13) Sean v_1 y v_2 dos vectores en $\mathbb{R}^2$. Demuestre que $H = \{v \;:\; v = av_1 + bv_2;\ a, b \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

(14) Sean H_1 y H_2 subespacios de un espacio vectorial V y sea

$$H_1 + H_2 = \{v \;:\; v = v_1 + v_2 \text{ con } v_1 \in H_1 \text{ y } v_2 \in H_2\}.$$

Demuestre que $H_1 + H_2$ es un subespacio de V.

(15) Determinar si el conjunto de vectores dado es linealmente dependiente o independiente.

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 8 \\ -7 \\ -8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -11 \\ -12 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{(c)} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad \text{(d)} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ -20 \\ -29 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(16) Sea $\mathcal{P}_n$ el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que n, determinar si el conjunto de elementos de $\mathcal{P}_2$ dado es linealmente dependiente o independiente.
 (a) $4 - 3x + 3x^2, 4 - 2x - 2x^2$
 (b) $P_2 : 1 - x, x$
 (c) $P_2 : -x, x^2 - 2x, 3x + 5x^2$
 (d) $x - 1, x - 2, x - 3.x - 4$

(17) Determinar si el conjunto dado de vectores genera el espacio vectorial dado.

$$\text{(a) } \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \text{(b) } \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

 (c) $P_2 : 1 - x, 3 - x^2$ (d) $P_2 : -10 + 3x + 11x^2, 10 + 9x - 4x^2, 5 + x + 4x^2$

(18) Encuentre una base para $\operatorname{Span}\{1, 1 + x, 2x\}$ en $\mathcal{P}_1$.

(19) Encuentre una base para $\operatorname{Span}\{1 - 2x, 2x - x^2, 1 - x^2, 1 + x^2\}$ en $\mathcal{P}_2$.

(20) Encuentre una base para $\operatorname{Span}\{1 - x, x - x^2, 1 - x^2, 1 - 2x + x^2\}$ en $\mathcal{P}_2$.

(21) Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base para un espacio vectorial V y sean $c_1, c_2, \ldots, c_n$ escalares distintos de cero. Demuestre que $\{c_1, c_2, \ldots, c_n, v_n\}$ también es una base para V.

(22) Determine una condición sobre los números a, b, c y d para que

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} y \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

sean vectores linealmente dependientes.

(23) Para cuál(es) valor(es) de α serán linealmente dependientes los vectores

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-1\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\\alpha\\4\end{bmatrix}?$$

(24) Encuentre una base en $\mathbb{R}^3$ para el conjunto de vectores en la recta $x = 2, y = -2t, z = 3t$.
(25) Encuentre una base en $\mathbb{R}^3$ para el conjunto de vectores en la recta $x = 3t, y = -2t, z = t$.
(26) Determinar si el conjunto dado es una base para el espacio vectorial a que se refiere.

(a) $\mathcal{P}_2 : -2 - 11x + 7x^2, -5 - x - 5x^2$ (b) $\mathcal{P}_2 : 1 - x^2, x$
(c) $\mathcal{P}_2 : -3x, 1 + x^2, x^2 - 5$ (d) $\mathcal{P}_2 : 1 + 3x + 7x^2, 5 + 12x + 35x^2, 8 + 5x - 12x^2$
(e) $\mathcal{P}_3 : 1, 1 + x, 1 + x^2, 1 + x^3$ (f) $\mathcal{P}_3 : 3, x^3 - 4x + 6, x^2$

(27) Expresar el vector $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ en términos de la base dada.

(a) $\left\{\begin{bmatrix}7\\-12\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}\right\}$ (b) $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right\}$
(c) $\left\{\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}\right\}$ (d) $\left\{\begin{bmatrix}0\\-7\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-8\\7\end{bmatrix}\right\}$
(e) $\left\{\begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}\right\}$ (f) $\left\{\begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix}\right\}$, donde $ad - bc \neq 0$

(28) Expresar el vector $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ en términos de la base dada.

(a) $\left\{\begin{bmatrix}-5\\0\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\2\\0\end{bmatrix}\right\}$ (b) $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$
(c) $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$ (d) $\left\{\begin{bmatrix}-4\\-1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$

(29) Expresar el polinomio $a_0 + a_1x + a_2x^2$ en $\mathcal{P}_2$ en términos de la base dada.
(a) $\{1, x - 1, x^2 - 1\}$
(b) $\{1 + x + 4x^2, -3 + 4x - 2x^2, 3 - 2x + 4x^2\}$
(c) $\{-2 - 4x - x^2, -4 + 4x - 4x^2, -1 + 5x + 5x^2, -1 + 5x + 15^2\}$

(30) En $\mathbb{R}^2$ suponga que $x_{B_1} = \begin{bmatrix}4\\0\\-1\end{bmatrix}$, donde $B_1 = \left\{\begin{bmatrix}3\\-4\\3\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0\\1\\-4\end{bmatrix} \begin{bmatrix}-3\\2\\-5\end{bmatrix}\right\}$.

Escriba x en términos de la base $B_2 = \left\{\begin{bmatrix}-4\\-2\\-4\end{bmatrix} \begin{bmatrix}-3\\1\\1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}-2\\-2\\-5\end{bmatrix}\right\}$.

(31) En $\mathcal{P}_2$, se tiene que $q_{B_1} = \begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}$, donde $B_1 = \{1 - x, 3x, x^2 - x - 1\}$.

Exprese q en términos de la base $B_2 = \{3 - 2x, 1 + x, x + x^2\}$.

(32) Construir una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ cuyo primer vector tenga la dirección y el sentido del vector

(a) $\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$

(33) Construir una base ortonormal para el espacio o subespacio vectorial dado.
(a) $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$.
(b) $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 0\}$.
(c) $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y = 0\}$.
(d) $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 3t, y = 4t, z = 0; t \in \mathbb{R}\}$.
(e) $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = t, y = 2t, z = -2t; t \in \mathbb{R}\}$.

(34) Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes en un espacio vectorial V. Pruebe que $v_i \neq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, k$. (Sugerencia: Si $v_i = 0$, entonces es sencillo encontrar constantes $c_1, c_2, \ldots, c_k$ con $c_i \neq 0$ tales que $c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_kv_k = 0$.)

(35) En los siguientes problemas se da un subespacio H de un espacio vectorial V y un vector v. Debe hallar la proyección ortogonal de v sobre H y escribir v como $v_1 + v_2$, donde $v_1 \in H$ y $v_2 \in H^\perp$
(a) $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x + y = 0\}$; $v = (-1, 2)$.
(b) $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x - y = 0\}$; $v = (2, -1)$.
(c) $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x + 2y = 0\}$; $v = (2, -1)$.
(d) $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = 0\}$; $v = (-1, 2, 0)$.
(e) $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x - y + z = 0\}$; $v = (1, 2, 0)$.
(f) $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x - y + z = 0\}$; $v = (2, 3, 1)$.

(36) Encuentre una condición sobre los números a, b para que el conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} \right\}$$

sea una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$.