

Inferência Causal

Notas de Aula

Rafael Bassi Stern

Última revisão: 8 de Novembro de 2022

Por favor, enviem comentários, typos e erros para rbstern@gmail.com

Agradecimentos:

“Teaching is giving opportunities to students to discover things by themselves.”

George Pólya

Conteúdo

1. Por que estudar Inferência Causal?	7
1.1. O Paradoxo de Simpson	7
1.1.1. Exercícios	8
2. Modelo Estrutural Causal (SCM)	9
2.1. Elementos de Modelos Probabilísticos em Grafos	9
2.1.1. Grafo Direcionado	9
2.1.2. Grafo Direcionado Acíclico (DAG)	10
2.1.3. Modelo Probabilístico em um DAG	11
2.1.4. Exemplos de Modelo Probabilístico em um DAG	12
Confundidor (Confounder)	12
Mediador (Mediator)	13
Colisor (Collider)	15
2.1.5. Modelo Estrutural Causal (Structural Causal Model)	17
2.1.6. Exercícios	17
2.2. Independência Condicional e D-separação	18
2.2.1. Independência Condicional	18
2.2.2. D-separação	18
2.3. Exercícios	20
A. Demonstrações	25
A.1. Relativas à seção 2.2	25

1. Por que estudar Inferência Causal?

Você já deve ter ouvido diversas vezes que **correlação não implica causalidade**. Contudo, o que é causalidade e como ela pode ser usada para resolver problemas práticos? Antes de estudarmos definições formais, nesta aula veremos como conceitos intuitivos de causalidade podem ser necessários para resolver questões usuais em Inferência Estatística. Para tal, a seguir estudaremos um exemplo de [Glymour et al. \(2016\)](#).

1.1. O Paradoxo de Simpson

Considere que observamos em 500 pacientes 3 variáveis: X e Y são as indicadoras de que, respectivamente, o paciente recebeu um tratamento e o paciente se recuperou de uma doença, e Z é uma variável binária cujo significado será discutido mais tarde. Os dados foram resumidos em uma tabela de contingência:

##	Y	0	1
## Z X			
## 0 0	36	234	
## 1	6	81	
## 1 0	25	55	
## 1	71	192	

Em uma primeira análise desta tabela, podemos verificar a efetividade do tratamento dentro de cada valor de Z . Por exemplo, quando $Z = 0$, a frequência de recuperação dentre aqueles que receberam e não receberam o tratamento são, respectivamente: $\frac{81}{6+81} \approx 0.93$ e $\frac{234}{36+234} \approx 0.87$. Similarmente, quando $Z = 1$, as respectivas frequências são: $\frac{192}{71+192} \approx 0.73$ e $\frac{55}{25+55} \approx 0.69$. À primeira vista, para todos os valores de Z , a taxa de recuperação é maior com o tratamento do que sem ele. Isso nos traz informação de que o tratamento é efetivo na recuperação do paciente?

Em uma segunda análise, podemos considerar apenas as contagens para as variáveis X e Y , sem estratificar por Z . Dentre os pacientes que receberam e não receberam o tratamento as taxa de recuperação são, respectivamente: $\frac{81+192}{6+71+81+192} \approx 0.78$ e $\frac{234+55}{36+25+234+55} \approx 0.83$. Isto é, sem estratificar por Z , a frequência de recuperação é maior dentre aqueles que não receberam o tratamento do que dentre aqueles que o receberam.

O que é possível concluir destas análises? Uma conclusão ingênua poderia ser a de que, se Z não for observada, então o tratamento não é recomendado. Por outro lado, se Z é observada, não importa qual seja o seu valor, o tratamento será recomendado. A falta de sentido desta conclusão ingênua é o que tornou este tipo de dado famoso como sendo um caso de Paradoxo de Simpson ([Simpson, 1951](#)).

Contudo, se a conclusão ingênua é paradoxal e incorreta, então qual conclusão pode ser obtida destes dados? A primeira lição que verificaremos é que não é possível obter uma conclusão sobre o **efeito causal** do tratamento usando apenas a informação na tabela, isto é associações. Para tal, analisaremos a tabela dando dois nomes distintos para a variável Z . Veremos que, usando exatamente os mesmos dados, uma conclusão válida diferente

1. Por que estudar Inferência Causal?

é obtida para cada nome de Z . Em outras palavras, o efeito causal depende de mais informação do que somente aquela disponível na tabela.

Em um primeiro cenário, considere que Z é a indicadora de que o sexo do paciente é masculino. Observando a tabela, notamos que, proporcionalmente, mais homens receberam o tratamento do que mulheres. Como o tratamento não tem qualquer influência sobre o sexo do paciente, podemos imaginar um cenário em que, proporcionalmente, mais homens escolheram receber o tratamento do que mulheres.

Usando esta observação, podemos fazer sentido do Paradoxo anteriormente obtido. Quando agregamos os dados, notamos que o primeiro grupo de pacientes que receberam o tratamento é predominantemente composto por homens e, similarmente, o segundo grupo de pacientes que não receberam o tratamento é predominantemente composto por mulheres. Isto é, na análise dos dados agregados estamos essencialmente comparando a taxa de recuperação de homens que receberam o tratamento com a de mulheres que não receberam o tratamento. Se assumirmos que, independentemente do tratamento, mulheres tem uma probabilidade de recuperação maior do que homens, então a taxa de recuperação menor no primeiro grupo pode ser explicada pelo fato de ele ser composto predominantemente por homens e não pelo fato de ser o grupo de pacientes que recebeu o tratamento. Também, da análise anterior, obtemos que para cada sexo, a taxa de recuperação é maior com o tratamento do que sem ele. Isto é, neste cenário, o tratamento parece efetivo para a recuperação dos pacientes. Isto significa que a análise estratificando Z é sempre a correta?

Caso o significado da variável Z seja outro, veremos que esta conclusão é incorreta. Considere que Z é a indicadora de que a pressão sanguínea do paciente está elevada. Além disso, é sabido que o tratamento tem como efeito colateral aumentar o risco pressão elevada nos pacientes. Neste caso, o fato de que há mais indivíduos com pressão elevada dentre aqueles que receberam o tratamento é um efeito direto do tratamento.

Usando esta observação, podemos chegar a outras conclusões sobre o efeito do tratamento sobre a recuperação dos pacientes. Para tal, considere que o tratamento tem um efeito positivo moderado sobre a recuperação dos pacientes, mas que a pressão sanguínea elevada prejudica gravemente a recuperação. Quando fazemos comparações apenas dentre indivíduos com pressão alta ou apenas dentre indivíduos sem pressão alta, não é possível identificar o efeito colateral do tratamento. Isto é, observamos apenas o efeito positivo moderado que o tratamento tem sobre a recuperação. Por outro lado, quando fazemos a análise agregada, observamos que a frequência de recuperação é maior dentre os indivíduos que não receberam o tratamento do que dentre os que o receberam. Isso ocorre pois o efeito colateral negativo tem um impacto maior sobre a recuperação do paciente do que o efeito geral benéfico. Assim, neste cenário, o tratamento não é eficiente para levar à recuperação do paciente.

Como nossas conclusões dependem de qual história adotamos, podemos ver que a mera apresentação da tabela é insuficiente para determinar a eficiência do tratamento. Observando com cuidado os cenários, identificamos uma explicação geral para as diferentes conclusões. Na primeiro cenário, quando Z é sexo, Z é uma causa do indivíduo receber ou não o tratamento. Já no segundo cenário, quando Z é pressão elevada, o tratamento é causa de Z . Isto é, a diferença nas relações entre as variáveis explica as diferenças entre as conclusões obtidas.

Ao longo do curso, desenvolveremos ferramentas para formalizar a diferença entre estes cenários e, com base nisso, conseguir estimar o efeito causal que X tem sobre Y . Contudo, para tal, será necessário desenvolver um modelo em que seja possível descrever relações causais. Esta questão será tratada no capítulo 2.

1.1.1. Exercícios

Exercício 1.1.1 (Glymour et al. (2016)[p.6]). Há evidência de que há correlação positiva entre uma pessoa estar atrasada e estar apressada. Isso significa que uma pessoa pode evitar atrasos se não tiver pressa? Justifique sua resposta em palavras.

2. Modelo Estrutural Causal (SCM)

No capítulo 1 vimos que as relações causais entre variáveis são essenciais para conseguirmos determinar o efeito que uma variável pode ter em outra. Contudo, como podemos especificar relações causais formalmente?

Como resposta a esta pergunta iremos definir o Modelo Estrutural Causal (SCM), que permite especificar formalmente relações causais. Para tal, será necessário primeiro introduzir modelos probabilísticos em grafos. Um curso completo sobre estes modelos pode ser encontrado, por exemplo, em [Mauá \(2022\)](#). A seguir, estudaremos resultados essenciais destes modelos.

2.1. Elementos de Modelos Probabilísticos em Grafos

2.1.1. Grafo Direcionado

Definição 2.1.1. Um **grafo direcionado**, $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, é composto por um conjunto de vértices, $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_n\}$, e um conjunto de arestas, $\mathcal{E} = \{E_1, \dots, E_m\}$, onde cada aresta é um par ordenado de vértices, isto é, $E_i \in \mathcal{V}^2$.

Para auxiliar nossa intuição sobre a Definição 2.1.1, é comum representarmos o grafo por meio de uma figura. Nesta, representamos cada vértice por meio de um ponto. Além disso, para cada aresta, (V_i, V_j) , traçamos uma seta que aponta de V_i para V_j .

Por exemplo, considere que os vértices são $\mathcal{V} = \{V_1, V_2, V_3\}$ e as arestas são $\mathcal{E} = \{(V_1, V_2), (V_1, V_3), (V_2, V_3)\}$. Neste caso, teremos os 3 pontos como vértices e, além disso, traçaremos setas de V_1 para V_2 e para V_3 e, também, de V_2 para V_3 . Podemos desenhar este grafo utilizando o pacote *dagitty* ([Textor et al., 2016](#)):

```
library(dagitty)
library(ggdag)
library(ggplot2)

# Especificar o grafo
grafo <- dagitty("dag {
  V1 -> { V2 V3 }
  V2 -> V3
}")

# Exibir a figura do grafo
ggdag(grafo, layout = "circle") +
  theme(axis.text.x=element_blank(),
        axis.ticks.x=element_blank(),
        axis.text.y=element_blank(),
        axis.ticks.y=element_blank()) +
  xlab("") + ylab("")
```

2. Modelo Estrutural Causal (SCM)

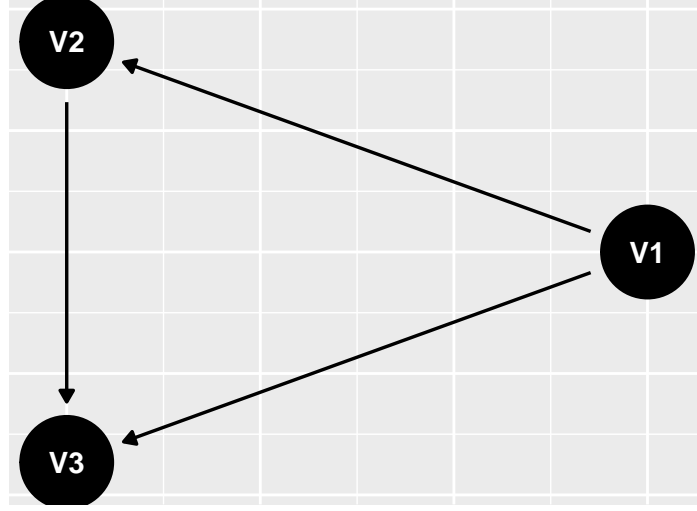


Figura 2.1.: Exemplo de grafo.

Grafos direcionados serão úteis para representar causalidade pois usaremos vértices para representar variáveis e arestas para apontar de cada causa imediata para seu efeito. Por exemplo, no Capítulo 1 consideramos um caso em que Sexo e Tratamento são causas imediatas de recuperação e, além disso, Sexo é causa imediata de Tratamento. O grafo na fig. 2.1 poderia representar estas relações se definirmos que V_1 é Sexo, V_2 é Tratamento e V_3 é Recuperação.

Usando a representação de um grafo, podemos imaginar caminhos sobre ele. Começamos um *caminho direcionado* em um determinado vértice e, seguindo a direção das setas, vamos de um vértice para outro. Por exemplo, (V_1, V_2, V_3) é um caminho direcionado na fig. 2.1, pois existe uma seta de V_1 para V_2 e de V_2 para V_3 . É comum denotarmos este caminho direcionado por $V_1 \rightarrow V_2 \rightarrow V_3$. Similarmente, (V_1, V_3, V_2) não é um caminho direcionado, pois não existe seta de V_3 para V_2 . A definição de caminho direcionado é formalizada a seguir:

Definição 2.1.2. Um **caminho direcionado** é uma sequência de vértices em um grafo direcionado, $C = \{V_1, \dots, V_n\}$ tal que, para cada $1 \leq i < n$, $(V_i, V_{i+1}) \in \mathcal{E}$.

Um *caminho* é uma generalização de caminho direcionado. Em um caminho, começamos em um vértice e, seguindo por setas, mas não necessariamente na direção em que elas apontam, vamos de um vértice para outro. Por exemplo, na fig. 2.1 vimos que (V_1, V_3, V_2) não é um caminho direcionado pois não existe seta de V_3 para V_2 . Contudo, (V_1, V_3, V_2) é um caminho pois existe uma seta ligando V_3 e V_2 , a seta que aponta de V_2 para V_3 . É comum representarmos este caminho por $V_1 \rightarrow V_3 \leftarrow V_2$. Caminho é formalizado a seguir:

Definição 2.1.3. Um **caminho** é uma sequência de vértices, $C = \{V_1, \dots, V_n\}$ tal que, para cada $1 \leq i < n$, $(V_i, V_{i+1}) \in \mathbb{E}$ ou $(V_{i+1}, V_i) \in \mathbb{E}$.

2.1.2. Grafo Direcionado Acíclico (DAG)

Um DAG é um grafo direcionado tal que, para todo vértice, V , não é possível seguir setas partindo de V e voltar para V . Este conceito é formalizado a seguir:

Definição 2.1.4. Um **grafo direcionado acíclico** (DAG) é um grafo direcionado, \mathcal{G} , tal que, para todo vértice, $V \in \mathcal{V}$, não existe um caminho direcionado, $C = \{V_1, \dots, V_n\}$ tal que $V_1 = V = V_n$.

Usualmente representaremos as relações causais por meio de um DAG. Especificamente, existirá uma aresta de V_1 para V_2 para indicar que V_1 é causa imediata de V_2 . Caso um grafo direcionado não seja um DAG, então existe um caminho de V em V , isto é, V seria uma causa de si mesma, o que desejamos evitar.

Um DAG induz uma *ordem parcial* entre os seus vértices. Isto é, se existe uma aresta de V_1 para V_2 , então podemos interpretar que V_1 antecede V_2 causalmente. Com base nesta ordem parcial, é possível construir diversas definições que nos serão úteis.

Dizemos que V_1 é pai de V_2 em um DAG, \mathcal{G} , se existe uma aresta de V_1 a V_2 , isto é, $(V_1, V_2) \in \mathcal{E}$. Denotamos por $Pa(V)$ o conjunto de todos os pais de V :

Definição 2.1.5. Em um DAG, \mathcal{G} , o conjunto de **pais** de $V \in \mathcal{V}$, $Pa(V)$, é:

$$Pa(V) = \{V^* \in \mathcal{V} : (V^*, V) \in \mathcal{E}\}.$$

Similarmente, dizemos que V_1 é um ancestral de V_2 em um DAG, se V_1 antecede V_2 causalmente. Isto é, se V_1 é pai de V_2 ou, pai de pai de V_2 , ou pai de pai de pai de V_2 , e assim por diante ... Denotamos por $Anc(V)$ o conjunto de todos os ancestrais de V :

Definição 2.1.6. Em um DAG, \mathcal{G} , o conjunto de **ancestrais** de $V \in \mathcal{V}$, $Anc(V)$, é tal que $Anc(V) \subseteq \mathcal{V}$ e $V^* \in Anc(V)$ se e somente se existe um caminho direcionado em \mathcal{G} , C , tal que $C_1 = V^*$ e, para algum i , $C_i = V$.

Note que podemos interpretar $Anc(V)$ como o conjunto de todas as causas diretas e indiretas de V .

Finalmente, diremos que um conjunto de vértices, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{V}$ é *ancestral* em um DAG, se não existe algum vértice fora de \mathcal{A} que seja pai de algum vértice em \mathcal{A} . Segundo nossa interpretação causal, \mathcal{A} será ancestral quando nenhum vértice fora de \mathcal{A} é causa direta de algum vértice em \mathcal{A} :

Definição 2.1.7. Em um DAG, \mathcal{G} , dizemos que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{V}$ é **ancestral** se, para todo $V \in \mathcal{A}$, temos que $Pa(V) \subseteq \mathcal{A}$.

Lema 2.1.8. Em um DAG, \mathcal{G} , para todo $V \in \mathcal{V}$, $Anc(V)$ é ancestral.

2.1.3. Modelo Probabilístico em um DAG

Um modelo probabilístico em um DAG é tal que cada um dos vértices é uma variável aleatória. O DAG será usada para descrever relações de independência condicional existentes entre estas variáveis. Mais especificamente, cada vértice será independente dos demais vértices dados os seus pais. Uma maneira alternativa de pensar sobre esta afirmação é imaginar que cada vértice é gerado somente pelos seus pais. Esta intuição é formalizada em Definição 2.1.9:

Definição 2.1.9. Para \mathcal{V} um conjunto de variáveis aleatórias, dizemos que uma função de densidade sobre \mathcal{V} , f , é compatível com um DAG, \mathcal{G} , se:

$$f(v_1, \dots, v_n) = \prod_{i=1}^n f(v_i | Pa(v_i))$$

Na prática, pode ser difícil verificar se a Definição 2.1.9 está satisfeita. Para esses casos, pode ser útil aplicar o Lema 2.1.10:

Lema 2.1.10. Uma função de densidade, f , é compatível com um DAG, \mathcal{G} , se e somente se, existem funções, g_1, \dots, g_n tais que:

$$f(v_1, \dots, v_n) = \prod_{i=1}^n g_i(v_i, Pa(v_i))$$

2. Modelo Estrutural Causal (SCM)

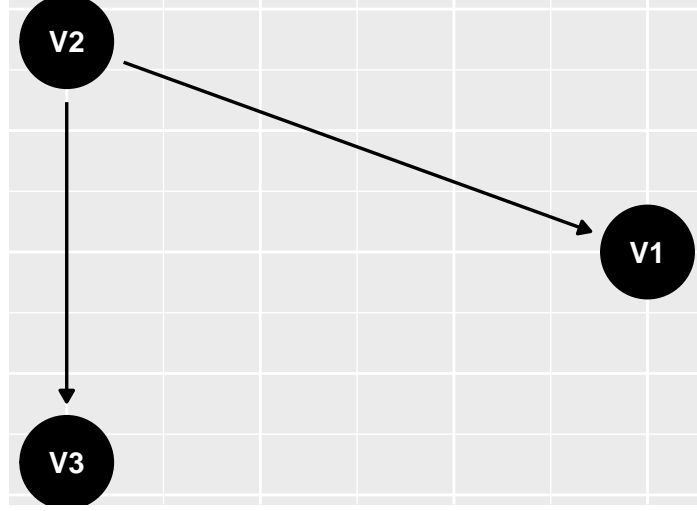


Figura 2.2.: Ilustração de confundidor.

A seguir, estudaremos três tipos fundamentais de modelos probabilísticos em DAG's com 3 vértices. A intuição obtida a partir destes exemplos continuará valendo quando estudarmos grafos mais gerais.

2.1.4. Exemplos de Modelo Probabilístico em um DAG

Nos exemplos a seguir, considere que $\mathcal{V} = (V_1, V_2, V_3)$.

Confundidor (Confounder)

No modelo de confundidor, as únicas duas arestas são (V_2, V_1) e (V_2, V_3) . Uma ilustração de um confundidor pode ser encontrada na fig. 2.2. O modelo de confundidor pode ser usado quando acreditamos que V_2 é uma causa comum a V_1 a V_3 . Além disso, V_1 não é causa imediata de V_3 nem vice-versa.

Em um modelo de confundidor a relação de dependência entre V_1 e V_3 é explicada pelos resultados a seguir:

Lema 2.1.11. *Para qualquer probabilidade compatível com o DAG na fig. 2.2, $V_1 \perp V_3 | V_2$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned}
 f(v_1, v_3 | v_2) &= \frac{f(v_1, v_2, v_3)}{f(v_2)} \\
 &= \frac{f(v_2)f(v_1|v_2)f(v_3|v_2)}{f(v_2)} && \text{Definição 2.1.9} \\
 &= f(v_1|v_2)f(v_3|v_2)
 \end{aligned}$$

□

Lema 2.1.12. *Existe ao menos uma probabilidade compatível com o DAG na fig. 2.2 tal que $V_1 \not\perp V_3$.*

Demonstração. Considere que $V_2 \sim \text{Bernoulli}(0.02)$. Além disso, $V_1, V_3 \in \{0, 1\}$ são independentes dado V_2 . Também, $\mathbb{P}(V_1 = 1 | V_2 = 1) = \mathbb{P}(V_3 = 1 | V_2 = 1) = 0.9$ e $\mathbb{P}(V_1 = 1 | V_2 = 0) = \mathbb{P}(V_3 = 1 | V_2 = 0) = 0.05$. Note que,

por construção, \mathbb{P} é compatível com fig. 2.2. Isto é, $P(v_1, v_2, v_3) = \mathbb{P}(v_2)\mathbb{P}(v_1|v_2)\mathbb{P}(v_3|v_2)$. Além disso,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V_1 = 1) &= \mathbb{P}(V_1 = 1, V_2 = 1) + \mathbb{P}(V_1 = 1, V_2 = 0) \\ &= \mathbb{P}(V_2 = 1)\mathbb{P}(V_1 = 1|V_2 = 1) + \mathbb{P}(V_2 = 0)\mathbb{P}(V_1 = 1|V_2 = 0) \\ &= 0.02 \cdot 0.9 + 0.98 \cdot 0.05 = 0.067\end{aligned}$$

Por simetria, $\mathbb{P}(V_3 = 1) = 0.067$. Além disso,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V_1 = 1, V_3 = 1) &= \mathbb{P}(V_1 = 1, V_3 = 1, V_2 = 1) + \mathbb{P}(V_1 = 1, V_3 = 1, V_2 = 0) \\ &= \mathbb{P}(V_2 = 1)\mathbb{P}(V_1 = 1|V_2 = 1)\mathbb{P}(V_3 = 1|V_2 = 1) + \mathbb{P}(V_2 = 0)\mathbb{P}(V_1 = 1|V_2 = 0)\mathbb{P}(V_3 = 1|V_2 = 0) \\ &= 0.02 \cdot 0.9 \cdot 0.9 + 0.98 \cdot 0.05 \cdot 0.05 = 0.01865\end{aligned}$$

Como $\mathbb{P}(V_1 = 1)\mathbb{P}(V_3 = 1) = 0.067 \cdot 0.067 \approx 0.0045 \neq 0.01865 = \mathbb{P}(V_1 = 1, V_3 = 1)$, temos que V_1 e V_3 não são independentes. \square

Combinando os Lemas 2.1.11 e 2.1.12 é possível compreender melhor como usaremos confundidores num contexto causal. Nestes casos, V_2 será uma causa comum a V_1 e a V_3 . Esta causa comum torna V_1 e V_3 associados, ainda que nenhum seja causa direta ou indireta do outro.

Podemos contextualizar estas ideias em um caso de diagnóstico de dengue. Considere que V_2 é a indicadora de que um indivíduo tem dengue, e V_1 e V_3 são indicadoras de sintomas típicos de dengue, como dor atrás dos olhos e febre. Neste caso, V_1 e V_3 tipicamente são associados: caso um paciente tenha febre, aumenta a probabilidade de que tenha dengue e, portanto, aumenta a probabilidade de que tenha dor atrás dos olhos. Contudo, apesar dessa associação V_3 não tem influência causal sobre V_1 . Se aumentarmos a temperatura corporal do indivíduo, não aumentará a probabilidade de que ele tenha dor atrás dos olhos. A dengue que causa febre, não o contrário.

Mediador (Mediator)

No modelo de mediador, as únicas duas arestas são (V_1, V_2) e (V_2, V_3) . Uma ilustração de um mediador pode ser encontrada na fig. 2.3. Neste modelo, acreditamos que V_1 é causa de V_2 que, por sua vez, é causa de V_3 . Assim, V_1 é ancestral de V_3 , isto é, o primeiro é causa indireta do segundo.

Em um modelo de mediador a relação de dependência entre V_1 e V_3 é explicada pelos resultados a seguir:

Lema 2.1.13. *Para qualquer probabilidade compatível com o DAG na fig. 2.3, $V_1 \perp\!\!\!\perp V_3|V_2$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned}f(v_3|v_1, v_2) &= \frac{f(v_1, v_2, v_3)}{f(v_1, v_2)} \\ &= \frac{f(v_1)f(v_2|v_1)f(v_3|v_2)}{f(v_1)f(v_2|v_1)} && \text{Definição 2.1.9} \\ &= f(v_3|v_2)\end{aligned}$$

\square

Lema 2.1.14. *Existe ao menos uma probabilidade compatível com o DAG na fig. 2.3 tal que $V_1 \not\perp\!\!\!\perp V_3$.*

2. Modelo Estrutural Causal (SCM)

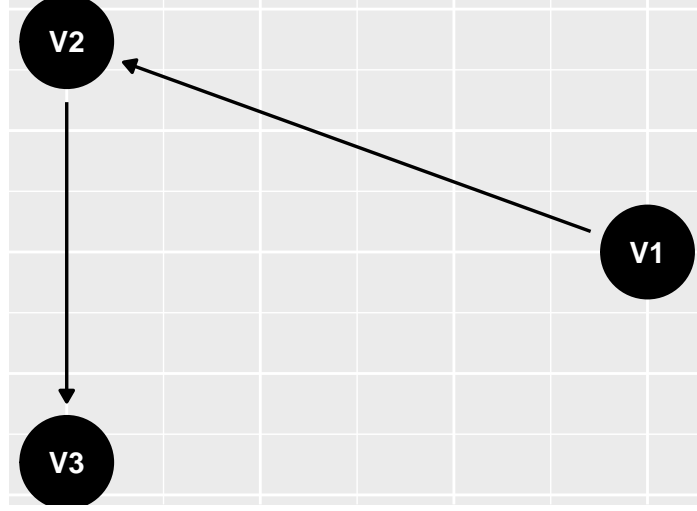


Figura 2.3.: Ilustração de mediador.

Demonstração. Considere que $V_1 \sim \text{Bernoulli}(0.5)$, $\mathbb{P}(V_2 = 1|V_1 = 1) = 0.9$, $\mathbb{P}(V_2 = 1|V_1 = 0) = 0.05$, $\mathbb{P}(V_3 = 1|V_2 = 1, V_1) = 0.9$, e $\mathbb{P}(V_3 = 1|V_2 = 0, V_1) = 0.05$. Note que (V_1, V_2, V_3) formam uma Cadeia de Markov. Note que, por construção, \mathbb{P} é compatível com fig. 2.3. Isto é, $P(v_1, v_2, v_3) = \mathbb{P}(v_1)\mathbb{P}(v_2|v_1)\mathbb{P}(v_3|v_2)$. Além disso,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(V_3 = 1) &= \mathbb{P}(V_1 = 0, V_2 = 0, V_3 = 1) + \mathbb{P}(V_1 = 0, V_2 = 1, V_3 = 1) \\
 &\quad + \mathbb{P}(V_1 = 1, V_2 = 0, V_3 = 1) + \mathbb{P}(V_1 = 1, V_2 = 1, V_3 = 1) \\
 &= 0.5 \cdot 0.9 \cdot 0.05 + 0.5 \cdot 0.05 \cdot 0.9 \\
 &\quad + 0.5 \cdot 0.05 \cdot 0.05 + 0.5 \cdot 0.9 \cdot 0.9 = 0.45125
 \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(V_1 = 1, V_3 = 1) &= \mathbb{P}(V_1 = 1, V_2 = 0, V_3 = 1) + \mathbb{P}(V_1 = 1, V_2 = 1, V_3 = 1) \\
 &= 0.5 \cdot 0.05 \cdot 0.9 + 0.5 \cdot 0.9 \cdot 0.9 = 0.40625
 \end{aligned}$$

Como $\mathbb{P}(V_1 = 1)\mathbb{P}(V_3 = 1) = 0.5 \cdot 0.45125 \approx 0.226 \neq 0.40625 = \mathbb{P}(V_1 = 1, V_3 = 1)$, temos que V_1 e V_3 não são independentes. \square

Combinando os Lemas 2.1.13 e 2.1.14 é possível compreender melhor como usaremos mediadores num contexto causal. Nestes casos, V_2 será uma consequência de V_1 e uma causa de V_3 . Assim, o mediador torna V_1 e V_3 e associados, ainda que nenhum seja causa direta do outro. Contudo, ao contrário do confundidor, neste caso V_1 é uma causa indireta de V_3 , isto é, tem influência causal sobre V_3 .

Para contextualizar estas ideias, considere que V_1 é a indicadora de consumo elevado de sal, V_2 é a indicadora de pressão alta, e V_3 é a indicadora de ocorrência de um derrame. Como consumo elevado de sal causa pressão alta e pressão alta tem influência causal sobre a ocorrência de um derrame, pressão alta é um mediador entre consumo elevado de sal e ocorrência de derrame. Assim, consumo elevado de sal tem influência causal sobre a ocorrência de derrame.

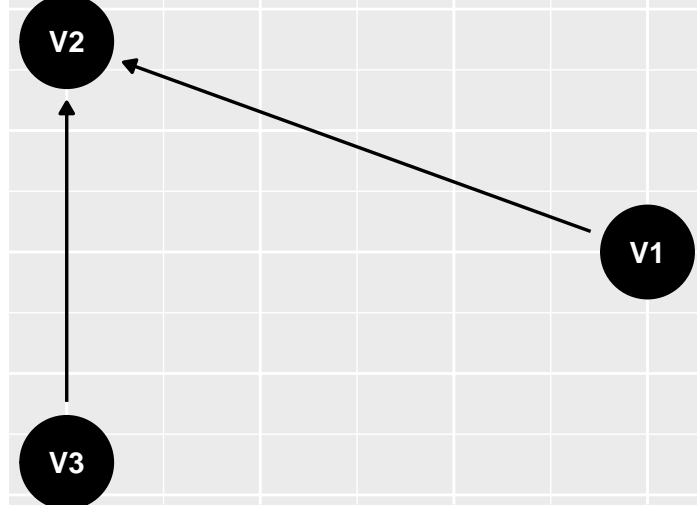


Figura 2.4.: Ilustração de colisor.

Colisor (Collider)

O último exemplo de DAG com 3 vértices que estudaremos é o de modelo de colisor, em que as únicas duas arestas são (V_1, V_2) e (V_3, V_2) . Uma ilustração de um colisor pode ser encontrada na fig. 2.4. O modelo de colisor pode ser usado quando acreditamos que V_1 e V_3 são causas comuns a V_2 . Além disso, V_1 não é causa imediata de V_3 nem vice-versa.

Em um modelo de colisor a relação de dependência entre V_1 e V_3 é explicada pelos resultados a seguir:

Lema 2.1.15. *Para qualquer probabilidade compatível com o DAG na fig. 2.4, $V_1 \perp V_3$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned}
 f(v_1, v_3) &= \sum_{v_2} f(v_1, v_2, v_3) \\
 &= \sum_{v_2} f(v_1) f(v_3) f(v_2 | v_1, v_3) && \text{Definição 2.1.9} \\
 &= f(v_1) f(v_3) \sum_{v_2} f(v_2 | v_1, v_3) \\
 &= f(v_1) f(v_3)
 \end{aligned}$$

□

Lema 2.1.16. *Existe ao menos uma probabilidade compatível com o DAG na fig. 2.4 tal que $V_1 \not\perp V_3 | V_2$.*

Demonstração. Considere que V_1 e V_3 são independentes e tem distribuição Bernoulli(0.5). Além disso, $V_2 \equiv V_1 + V_3$. Como $\mathbb{P}(V_3 = 1) = 0.5$ e $\mathbb{P}(V_3 = 1 | V_1 = 1, V_2 = 2) = 1$, conclua que $V_1 \not\perp V_3 | V_2$. □

Combinando os Lemas 2.1.15 e 2.1.16 vemos como utilizaremos confundidores num contexto causal. Nestes casos, V_1 e V_3 serão causas comuns e independentes de V_2 . Uma vez que obtemos informação sobre o efeito comum, V_2 , V_1 e V_3 passam a ser associados.

2. Modelo Estrutural Causal (SCM)

Esse modelo pode ser contextualizado observando a prevalência de doenças em uma determinada população (Sackett, 1979). Considere que V_1 e V_3 são indicadoras de que um indivíduo tem doenças que ocorrem independentemente na população. Além disso, V_2 é a indicadora de que o indivíduo foi hospitalizado, isto é, V_2 é influenciado causalmente tanto por V_1 quanto por V_3 . Para facilitar as contas envolvidas, desenvolveremos o exemplo com distribuições fictícias. Considere que V_1 e V_3 são independentes e tem distribuição Bernoulli(0.05). Além disso, quanto maior o número de doenças, maior a probabilidade de o indivíduo ser hospitalizado. Por exemplo, $\mathbb{P}(V_2 = 1|V_1 = 0, V_3 = 0) = 0.01$, $\mathbb{P}(V_2 = 1|V_1 = 0, V_3 = 1) = 0.1$, $\mathbb{P}(V_2 = 1|V_1 = 1, V_3 = 0) = 0.1$, e $\mathbb{P}(V_2 = 1|V_1 = 1, V_3 = 1) = 0.5$.

Com base nestas especificações, podemos verificar se V_1 e V_3 estão associados quando $V_2 = 1$. Para tal, primeiramente calcularemos algumas probabilidades conjuntas que serão úteis:

$$\begin{cases} \mathbb{P}(V_1 = 0, V_2 = 1, V_3 = 0) &= 0.95 \cdot 0.01 \cdot 0.95 = 0.009025 \\ \mathbb{P}(V_1 = 0, V_2 = 1, V_3 = 1) &= 0.95 \cdot 0.1 \cdot 0.05 = 0.0475 \\ \mathbb{P}(V_1 = 1, V_2 = 1, V_3 = 0) &= 0.05 \cdot 0.1 \cdot 0.95 = 0.0475 \\ \mathbb{P}(V_1 = 1, V_2 = 1, V_3 = 1) &= 0.05 \cdot 0.5 \cdot 0.05 = 0.00125 \end{cases} \quad (2.1)$$

Com base nestes cálculos é possível obter a prevalência da doença dentre os indivíduos hospitalizados:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V_1 = 1|V_2 = 1) &= \frac{\mathbb{P}(V_1 = 1, V_2 = 1)}{\mathbb{P}(V_2 = 1)} \\ &= \frac{0.0475 + 0.00125}{0.009025 + 0.0475 + 0.0475 + 0.00125} \quad \text{eq. (2.1)} \\ &\approx 0.46 \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V_1 = 1|V_2 = 1, V_3 = 1) &= \frac{\mathbb{P}(V_1 = 1, V_2 = 1, V_3 = 1)}{\mathbb{P}(V_2 = 1, V_3 = 1)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(V_1 = 1, V_2 = 1, V_3 = 1)}{\mathbb{P}(V_1 = 0, V_2 = 1, V_3 = 1) + \mathbb{P}(V_1 = 1, V_2 = 1, V_3 = 1)} \\ &= \frac{0.00125}{0.0475 + 0.00125} \quad \text{eq. (2.1)} \\ &\approx 0.26 \end{aligned}$$

Como $\mathbb{P}(V_1 = 1|V_2 = 1) = 0.46 \neq 0.26 \approx \mathbb{P}(V_1 = 1|V_2 = 1, V_3 = 1)$, verificamos que V_1 não é independente de V_3 dado V_2 . De fato, ao observar que um indivíduo está hospitalizado e tem uma das doenças, a probabilidade de que ele tenha a outra doença é inferior àquela obtida se soubéssemos apenas que o indivíduo está hospitalizado.

Esta observação não implica que uma doença tenha influência causal sobre a outra. Note que a frequência de hospitalização aumenta drasticamente quando um indivíduo tem ao menos uma das doenças. Além disso, cada uma das doenças é relativamente rara na população geral. Assim, dentre os indivíduos hospitalizados, a frequência daqueles que tem somente uma das doenças é maior do que seria caso as doenças não estivessem associadas. Quando fixamos o valor de uma consequência comum (hospitalização), as causas (doenças) passam a ser associadas. Esta associação não significa que, infectar um indivíduo com uma das doenças reduz a probabilidade que ele tenha a outra.

2.1.5. Modelo Estrutural Causal (Structural Causal Model)

Com base nos conceitos abordados anteriormente, finalmente podemos definir formalmente o Modelo Estrutural Causal (SCM):

Definição 2.1.17. Um SCM é um par (\mathcal{G}, f) tal que $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ é um DAG (Definição 2.1.4) e f é uma função de densidade sobre \mathcal{V} compatível com \mathcal{G} (Definição 2.1.9).

Note pela Definição 2.1.17 que um SCM é formalmente um modelo probabilístico em um DAG. O principal atributo de um SCM que o diferencia de um modelo probabilístico genérico em um DAG é como o interpretamos. Existe uma aresta de V_1 em V_2 em um SCM se e somente se V_1 é uma causa direta de V_2 .

No próximo capítulo estudaremos consequências desta interpretação causal. Contudo, antes disso, a próxima seção desenvolverá um resultado fundamental de modelos probabilísticos em DAGs que será fundamental nos capítulos posteriores.

2.1.6. Exercícios

Exercício 2.1.18. Em um DAG, $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, Considere que $Anc^*(V) \subseteq \mathcal{V}$ é definido como o menor conjunto tal que $Pa(V) \subseteq Anc^*(V)$ e, se $V^* \in Anc^*(V)$, então $Pa(V^*) \subseteq Anc^*(V)$. Prove que $Anc(V) \equiv Anc^*(V)$.

Exercício 2.1.19. Prove o Lema 2.1.8.

Exercício 2.1.20. Prove o Lema 2.1.10.

Exercício 2.1.21. Considere que (X_1, X_2) são independentes e tais que $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = 0.5$. Além disso, $Y \equiv X_1 \cdot X_2$.

- (a) Desenhe um DAG compatível com as relações de independência dadas pelo enunciado.
- (b) Prove que Y e X_1 são independentes. Isso contradiz sua resposta para o item anterior?

Exercício 2.1.22. Para cada um dos modelos de confundidor, mediador e colisor, dê exemplos de situações práticas em que este modelo é razoável.

Exercício 2.1.23. Considere que, dado T , X_1, \dots, X_n são i.i.d. e $X_i|T \sim \text{Bernoulli}(T)$. Além disso, $T \sim \text{Beta}(a, b)$.

- (a) Seja $f(t, x_1, \dots, x_n)$ dada pelo enunciado. Exiba um DAG, \mathcal{G} , tal que f é compatível com \mathcal{G} .
- (b) (X_1, \dots, X_n) são independentes?
- (c) Determine $f(x_1, \dots, x_n)$.

Exercício 2.1.24. Exiba um exemplo em que V_1, V_2, V_3 sejam binárias, que V_2 seja um colisor e que, além disso, $\text{Corr}[V_1, V_3|V_2 = 1] > 0$.

Exercício 2.1.25. Seja $\mathcal{V} = (V_1, V_2, V_3)$ Exiba um exemplo de f sobre \mathcal{V} e grafos \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 sobre \mathcal{V} tais que $\mathcal{G}_1 \neq \mathcal{G}_2$ e f é compatível tanto com \mathcal{G}_1 quanto com \mathcal{G}_2 .

Exercício 2.1.26. Seja f uma densidade arbitrária sobre $\mathcal{V} = (V_1, \dots, V_n)$. Exiba um DAG sobre \mathcal{V} , \mathcal{G} , tal que f é compatível com \mathcal{G} .

2.2. Independência Condicional e D-separação

Independência condicional é uma forma fundamental de indicar relações entre variáveis aleatórias. Se $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_d$ e \mathbf{Y} são vetores de variáveis aleatórias, definimos que $(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_d) | \mathbf{Y}$ e dizemos que $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_d$ são independentes dado \mathbf{Y} , se conhecido o valor de \mathbf{Y} , observar quaisquer valores de \mathbf{X} não traz informação sobre os demais valores. Nesta seção veremos que as relações de independência condicional em um SCM estão diretamente ligadas ao seu grafo.

2.2.1. Independência Condicional

Definição 2.2.1. Dizemos que $(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_d)$ são independentes dado \mathbf{Y} se, para qualquer $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ e \mathbf{y} ,

$$f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n | \mathbf{y}) = \prod_{i=1}^d f(\mathbf{x}_i | \mathbf{y})$$

Em particular, $(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_d)$ são independente se, para quaisquer $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$,

$$f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d) = \prod_{i=1}^d f(\mathbf{x}_i)$$

Verificar se a Definição 2.2.1 está satisfeita nem sempre é fácil. A princípio, ela exige obter tanto a distribuição condicional conjunta, $f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d | \mathbf{y})$, quanto cada uma das marginais, $f(\mathbf{x}_i | \mathbf{y})$. O Lema 2.2.2 a seguir apresenta outras condições que são equivalentes a independência condicional:

Lema 2.2.2. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. $(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_d)$ são independentes dado \mathbf{Y} ,
2. Existem funções, h_1, \dots, h_d tais que $f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d | \mathbf{y}) = \prod_{j=1}^d h_j(\mathbf{x}_j, \mathbf{y})$.
3. Para todo i , $f(\mathbf{x}_i | \mathbf{x}_{-i}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}_i | \mathbf{y})$.
4. Para todo i , $f(\mathbf{x}_i | \mathbf{x}_1^{i-1}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}_i | \mathbf{y})$.

As condições no Lema 2.2.2 apresentam condições que, em geral, são mais fáceis de verificar do que a definição direta de independência condicional. A seguir veremos que, em um SMC, pode ser mais fácil ainda verificar muitas das relações de independência condicional.

2.2.2. D-separação

Em um SCM, é possível indicar as relações de independência incondicional em \mathcal{V} por meio do grafo associado. Intuitivamente, haverá uma dependência entre V_1 e V_2 se for possível transmitir a informação de V_1 para V_2 por um caminho que ligue ambos os vértices. Para entender se a informação pode ser transmitida por um caminho, classificaremos a seguir os vértices que o constituem.

Definição 2.2.3. Seja $C = (C_1, \dots, C_n)$ um caminho em um DAG, $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$. Para cada $2 \leq i \leq n - 1$:

1. C_i é um **confundidor** em C se $(C_i, C_{i-1}) \in \mathcal{E}$ e $(C_i, C_{i+1}) \in \mathcal{E}$, isto é, existem arestas apontando de C_i para C_{i-1} e C_{i+1} . Neste caso, desenhamos $C_{i-1} \leftarrow C_i \rightarrow C_{i+1}$.

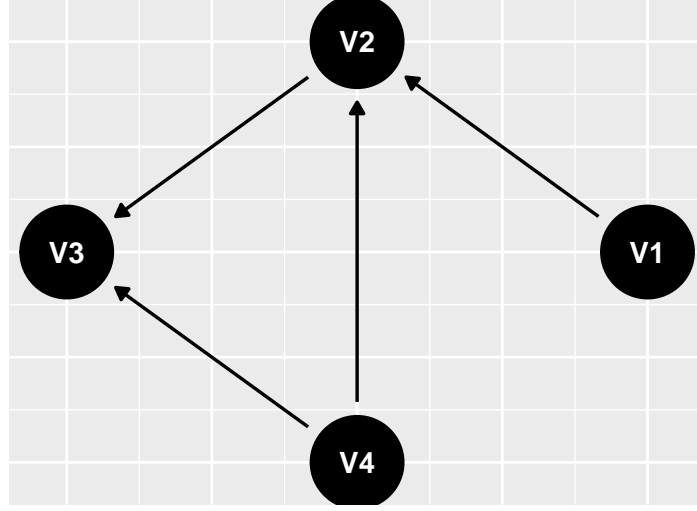


Figura 2.5.: Ilustração do conceito de bloqueio de um caminho. No caminho $(V1, V2, V4)$, $V2$ é um colisor. Isto ocorre pois, para chegar de $V1$ a $V4$ passando apenas por $V2$, as duas arestas apontam para $V2$. Já no caminho $(V1, V2, V3, V4)$ temos que $V2$ é um mediador. Para chegar de $V1$ a $V3$ passando por $V2$, passa-se por duas arestas, uma entrando e outra saindo de $V2$. Como $V2$ é um colisor em $(V1, V2, V4)$, este caminho está bloqueado se e somente se o valor de $V2$ é desconhecido. Como $V2$ é um mediador em $(V1, V2, V3, V4)$, esse caminho está bloqueado quando o valor de $V2$ é conhecido.

2. C_i é um **mediador** em C se $(C_{i-1}, C_i) \in \mathcal{E}$ e $(C_i, C_{i+1}) \in \mathcal{E}$, ou $(C_{i+1}, C_i) \in \mathcal{E}$ e $(C_i, C_{i-1}) \in \mathcal{E}$, isto é, (C_{i-1}, C_i, C_{i+1}) ou (C_{i+1}, C_i, C_{i-1}) é um caminho direcionado. Neste caso, desenhamos $C_{i-1} \rightarrow C_i \rightarrow C_{i+1}$ ou $C_{i-1} \leftarrow C_i \leftarrow C_{i+1}$.
3. C_i é um **colisor** em C se $(C_{i-1}, C_i) \in \mathcal{E}$ e $(C_{i+1}, C_i) \in \mathcal{E}$, isto é, existem arestas apontando de C_{i-1} e de C_{i+1} para C_i . Neste caso, desenhamos $C_{i-1} \rightarrow C_i \leftarrow C_{i+1}$.

Note que a classificação na Definição 2.2.3 generaliza os exemplos de DAG's com 3 vértices na seção 2.1.4.

Essa classificação é ilustrada com o DAG na fig. 2.5. Existem dois caminhos que vão de $V1$ a $V4$: $V1 \rightarrow V2 \leftarrow V4$ e $V1 \rightarrow V2 \rightarrow V3 \leftarrow V4$. No primeiro caminho $V2$ é um colisor, pois o caminho passa por duas arestas que apontam para $V2$. Já no segundo caminho $V2$ é um mediador e $V3$ é um colisor. Note que a classificação do vértice depende do caminho analisado. Enquanto que no primeiro caminho $V2$ é um colisor, no segundo $V2$ é um mediador.

Com base na Definição 2.2.3, é possível compreender se um caminho permite a passagem de informação. Na seção 2.1.4 vimos que, se $V2$ é um confundidor ou um mediador entre $V1$ e $V3$, então $V1$ e $V3$ são independentes dado $V2$. Por analogia, podemos intuir que um vértice que é um confundidor ou um mediador num caminho não permite a passagem de informação quando seu valor é conhecido. Similarmente, na seção 2.1.4, se $V2$ é um colisor entre $V1$ e $V3$, então $V1$ e $V3$ são independentes. Assim, também podemos intuir que um vértice que é um colisor em um caminho não permite a passagem de informação quando seu valor é desconhecido. Finalmente, a informação não passa pelo caminho quando ela não passa por pelo menos um de seus vértices. Neste caso, dizemos que o caminho está *bloqueado*:

Definição 2.2.4. Seja $C = (C_1, \dots, C_n)$ um caminho em um DAG, $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$. Dizemos que C está bloqueado dado $\mathbf{Z} \subset \mathcal{V}$, se

1. Existe algum $2 \leq i \leq n - 1$ tal que C_i é um confundidor ou mediador em C e $C_i \in \mathbf{Z}$, ou

2. Modelo Estrutural Causal (SCM)

2. Existe algum $2 \leq i \leq n - 1$ tal que C_i é um colisor em C e $C_i \notin \text{Anc}(\mathbf{Z})$.

Finalmente, dizemos que \mathbb{V}_1 está d-separado de \mathbb{V}_2 dado \mathbb{V}_3 se todos os caminhos de \mathbb{V}_1 a \mathbb{V}_2 estão bloqueados dado \mathbb{V}_3 :

Definição 2.2.5. Seja $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ um DAG. Para $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, \mathbb{V}_3 \subseteq \mathcal{V}$, dizemos que \mathbb{V}_1 está d-separado de \mathbb{V}_2 dado \mathbb{V}_3 se, para todo caminho $C = (C_1, \dots, C_n)$ tal que $C_1 \in \mathbb{V}_1$ e $C_n \in \mathbb{V}_2$, C está bloqueado dado \mathbb{V}_3 . Neste caso, escrevemos $\mathbb{V}_1 \perp \mathbb{V}_2 | \mathbb{V}_3$.

Intuitivamente, se $\mathbb{V}_1 \perp \mathbb{V}_2 | \mathbb{V}_3$, então não é possível passar informação de \mathbb{V}_1 a \mathbb{V}_2 quando \mathbb{V}_3 é conhecido. Assim, temos razão para acreditar que \mathbb{V}_1 é condicionalmente independente de \mathbb{V}_2 dado \mathbb{V}_3 , isto é $\mathbb{V}_1 \perp\!\!\!\perp \mathbb{V}_2 | \mathbb{V}_3$. Esta conclusão é apresentada no Teorema 2.2.6 a seguir:

Teorema 2.2.6. Seja $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ um DAG e \mathcal{V} um conjunto de variáveis aleatórias. \mathbb{V}_1 está d-separado de \mathbb{V}_2 dado \mathbb{V}_3 se e somente se, para todo f compatível com \mathcal{G} , $\mathbb{V}_1 \perp\!\!\!\perp^f \mathbb{V}_2 | \mathbb{V}_3$.

Exemplo 2.2.7. Ilustração manual de d-separação e com o uso de dagitty.

Lema 2.2.8. Seja $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ um DAG e \mathcal{V} um conjunto de variáveis aleatórias. Se \mathbb{V}_1 não está d-separado de \mathbb{V}_2 dado \mathbb{V}_3 , então existe f compatível com \mathcal{G} tal que \mathbb{V}_1 e \mathbb{V}_2 são condicionalmente dependentes dado \mathbb{V}_3 .

Exemplo 2.2.9. Restrições para que V_1 e V_3 sejam independentes sem condicionar em V_2 , um confundidor.

2.3. Exercícios

Exercício 2.3.1. Considere que f é uma densidade sobre $\mathcal{V} = (V_1, V_2, V_3, V_4)$ que é compatível com o grafo em fig. 2.6. Além disso, cada $V_i \in \{0, 1\}$, $V_1, V_2 \sim \text{Bernoulli}(0.5)$, $V_3 \equiv V_1 \cdot V_2$ e $\mathbb{P}(V_4 = i | V_3 = i) = 0.9$, para todo i .

- (a) V_1 e V_2 são d-separados dado V_3 ?
- (b) V_1 e V_2 são condicionalmente independentes dado V_3 ?
- (c) V_1 e V_2 são d-separados dado V_4 ?
- (d) V_1 e V_2 são condicionalmente independentes dado V_4 ?

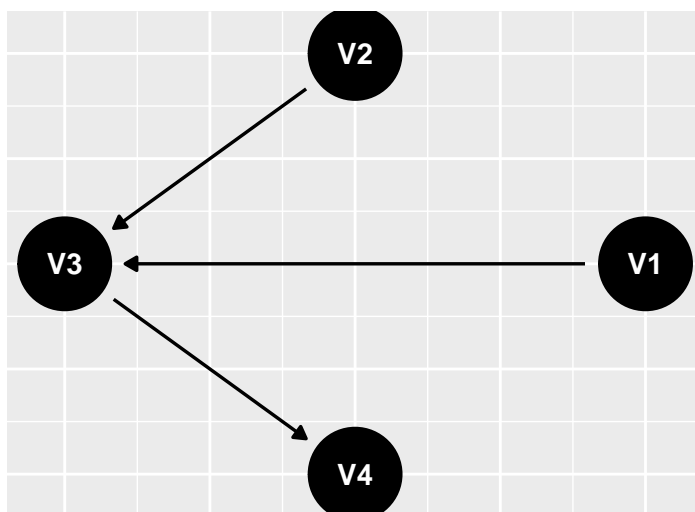


Figura 2.6.: Exemplo em que V4 é um descendente de um colisor, V3.

Bibliografia

- Glymour, M., Pearl, J., and Jewell, N. P. (2016). *Causal inference in statistics: A primer*. John Wiley & Sons.
- Mauá, D. (2022). Probabilistic Graphical Models. <https://www.ime.usp.br/~ddm/courses/mac6916/>. [Online; accessed 22-October-2022].
- Sackett, D. L. (1979). Bias in analytic research. *Journal of Chronic Diseases*, 32(1-2):51–63.
- Simpson, E. H. (1951). The interpretation of interaction in contingency tables. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 13(2):238–241.
- Textor, J., Van der Zander, B., Gilthorpe, M. S., Liśkiewicz, M., and Ellison, G. T. (2016). Robust causal inference using directed acyclic graphs: the r package ‘dagitty’. *International journal of epidemiology*, 45(6):1887–1894.

A. Demonstrações

A.1. Relativas à seção 2.2

Prova do Lema 2.2.2. A prova consistirá em demonstrar que, para cada i , a afirmação i decorre da afirmação $i-1$. Finalmente, a afirmação 1 decorre da afirmação 4. Os símbolos \mathbf{X} e \mathbf{x} referem-se a $(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_d)$ e $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$.

- $(1 \implies 2)$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}|\mathbf{y}) &= \prod_{j=1}^d f(\mathbf{x}_j|\mathbf{y}) \\ &= \prod_{j=1}^d h(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}) \end{aligned} \quad \begin{aligned} h(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}) &= f(\mathbf{x}_j|\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (1)$$

- $(2 \implies 3)$ Note que,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_i|\mathbf{x}_{-i}, \mathbf{y}) &= \frac{f(\mathbf{x}|\mathbf{y})}{f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_d|\mathbf{y})} \\ &= \frac{f(\mathbf{x}|\mathbf{y})}{\int_{\mathbb{R}} f(\mathbf{x}|\mathbf{y}) d\mathbf{x}_i} \\ &= \frac{\prod_{j=1}^d h_j(\mathbf{x}_j, \mathbf{y})}{\int_{\mathbb{R}} \prod_{j=1}^d h_j(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}) d\mathbf{x}_i} \quad (2) \\ &= \frac{\prod_{j=1}^d h_j(\mathbf{x}_j, \mathbf{y})}{\prod_{j \neq i} h_j(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}) \int_{\mathbb{R}} h_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) d\mathbf{x}_i} \\ &= \frac{\tilde{h}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{y})}{\int_{\mathbb{R}} h_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) d\mathbf{x}_i} \\ &= \frac{\prod_{j \neq i} \int_{\mathbb{R}} h_j(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}) d\mathbf{x}_j}{\prod_{j \neq i} \int_{\mathbb{R}} h_j(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}) d\mathbf{x}_j} \cdot \frac{h_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{y})}{\int_{\mathbb{R}} h_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) d\mathbf{x}_i} \\ &= \frac{\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \prod_{j=1}^d h_j(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}) d\mathbf{x}_{-i}}{\int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^d h_j(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}) d\mathbf{x}} \\ &= \frac{\int_{\mathbb{R}^{d-1}} f(\mathbf{x}|\mathbf{y}) d\mathbf{x}_{-i}}{\int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}|\mathbf{y}) d\mathbf{x}} \quad (2) \\ &= f(\mathbf{x}_i|\mathbf{y}) \end{aligned}$$

A. Demonstrações

- (3 \implies 4)

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{x}_i|\mathbf{x}_1^{i-1}, \mathbf{y}) &= \frac{f(\mathbf{x}_1^i|\mathbf{y})}{f(\mathbf{x}_1^{i-1}|\mathbf{y})} \\
 &= \frac{\int_{\mathbb{R}^{d-i}} f(\mathbf{x}|\mathbf{y}) d\mathbf{x}_{i+1}^d}{f(\mathbf{x}_1^{i-1}|\mathbf{y})} \\
 &= \frac{\int_{\mathbb{R}^{d-i}} f(\mathbf{x}_{-i}|\mathbf{y}) f(\mathbf{x}_i|\mathbf{x}_{-i}, \mathbf{y}) d\mathbf{x}_{i+1}^d}{f(\mathbf{x}_1^{i-1}|\mathbf{y})} \\
 &= \frac{f(\mathbf{x}_i|\mathbf{y}) \int_{\mathbb{R}^{d-i}} f(\mathbf{x}_{-i}|\mathbf{y}) d\mathbf{x}_{i+1}^d}{f(\mathbf{x}_1^{i-1}|\mathbf{y})} \\
 &= \frac{f(\mathbf{x}_i|\mathbf{y}) f(\mathbf{x}_1^{i-1}|\mathbf{y})}{f(\mathbf{x}_1^{i-1}|\mathbf{y})} \\
 &= f(\mathbf{x}_i|\mathbf{y})
 \end{aligned} \tag{3}$$

- (4 \implies 1)

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{x}|\mathbf{y}) &= \prod_{i=1}^d f(\mathbf{x}_i|\mathbf{x}_1^{i-1}, \mathbf{y}) \\
 &= \prod_{i=1}^d f(\mathbf{x}_i|\mathbf{y})
 \end{aligned} \tag{4}$$

□

Prova do Teorema 2.2.6.

□

Lema A.1.1.

Demonstração.

□

Prova do Lema 2.2.8.

□