

LEHRBUCH

Jan Lunze

# Regelungstechnik 1

Systemtheoretische Grundlagen, Analyse  
und Entwurf einschleifiger Regelungen

*10. Auflage*



Springer Vieweg

---

# **Springer-Lehrbuch**

---

Jan Lunze

# Regelungstechnik 1

Systemtheoretische Grundlagen, Analyse  
und Entwurf einschleifiger Regelungen

10., aktualisierte Auflage

mit 419 Abbildungen, 75 Beispielen, 172 Übungsaufgaben  
sowie einer Einführung in das Programmsystem MATLAB



Springer Vieweg

Professor Dr.-Ing. Jan Lunze  
Ruhr-Universität Bochum  
Lehrstuhl für Automatisierungstechnik  
und Prozessinformatik  
44780 Bochum  
email: Lunze@atp.rub.de

MATLAB ist eingetragenes Warenzeichen der Fa. The MathWorks, Inc.

ISSN 0937-7433

ISBN 978-3-642-53908-4

DOI 10.1007/978-3-642-53909-1

ISBN 978-3-642-53909-1 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Vieweg

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1996, 1999, 2001, 2004, 2005, 2007, 2008, 2010, 2013, 2014

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Ein-speicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Gedruckt auf säurefrei und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Vieweg ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.

[www.springer-vieweg.de](http://www.springer-vieweg.de)

# Vorwort

Die Regelungstechnik ist ein Pflichtfach vieler Ingenieurstudienrichtungen. Für Elektrotechnik-Studenten erweitert sie die Kenntnisse über dynamische Systeme vor allem um das Wichtigste der Regelungstechnik, den Entwurf von Rückführsteuerungen. Für Studierende der Verfahrenstechnik, des Maschinenbaus und anderer Disziplinen kommt ein weiterer Aspekt hinzu. Die Regelungstechnik basiert auf der Beschreibung und der Analyse der Systemdynamik und betont diesen Aspekt gegenüber stationären Modellvorstellungen, wie sie in der Kinetik chemischer Prozesse oder der Kinematik mechanischer Systeme zum Ausdruck kommen.

Modellbildung und Analyse dynamischer Systeme sowie der Entwurf von Regelungen stehen im Mittelpunkt dieses Lehrbuches, das die Leser in anwendungsnaher Weise mit den methodischen Grundlagen der Regelungstechnik vertraut macht.

**Inhalt.** In den ersten Kapiteln wird ausführlich auf das Zeitverhalten dynamischer Systeme eingegangen. Dabei wird das Zustandsraummodell eingeführt, das auf dem fundamentalen und zugleich ingenieurtechnisch sehr gut interpretierbaren Begriff des Systemzustands beruht und eine Standardform dynamischer Systembeschreibungen darstellt. In der nachfolgenden Analyse wird gezeigt, dass nicht nur zwischen der Eigenbewegung und der erzwungenen Bewegung eines Systems zu unterscheiden ist, sondern die erzwungene Bewegung weiter in das Übergangsverhalten und das stationäre Verhalten zerlegt werden kann. Dies hat mehrere Konsequenzen. Aus der Zerlegung wird deutlich, dass wichtige Kenngrößen wie Pole und Nullstellen im Zeitverhalten sichtbar sind. Darüber hinaus erkennt der Leser, dass zwischen Forderungen an das stationäre Verhalten und an das Übergangsverhalten des Regelkreises unterschieden werden muss, wobei sich später herausstellt, dass die erste Gruppe von Forderungen durch eine zweckmäßige Wahl der Reglerstruktur erfüllt werden kann, während die zweite Forderung eine zweckmäßige Parameterauswahl notwendig macht.

Mit dieser ausführlichen Darstellung der Modellformen und der Analysemethoden im Zeitbereich verlässt dieses Buch den traditionellen Weg, einschleifige Regelkreise von vornherein mit Frequenzbereichsmethoden zu behandeln, und umgeht damit die Schwierigkeit, dass die Lernenden von Beginn an Eigenschaften des Zeitverhaltens dynamischer Systeme in den Frequenzbereich transformieren müssen. Hier werden diese Eigenschaften zunächst direkt im Zeitbereich erläutert.

Die Behandlung dynamischer Systeme im Frequenzbereich schließt sich an die Betrachtungen im Zeitbereich an, wobei die bereits behandelten Systemeigenschaften wie Pole und Nullstellen jetzt als Kenngrößen des Frequenzganges bzw. der Übertrag-

gungsfunktion wiedererkannt werden. Deshalb ist es in späteren Kapiteln möglich, wechselweise auf Zeitbereichs- oder Frequenzbereichsdarstellungen zurückzugreifen, je nachdem, wie es die im dritten Teil des Buches behandelten Entwurfsaufgaben erfordern.

Ein wichtiges Ziel bei der Stoffauswahl bestand darin, möglichst viele regelungs-technische Grundprinzipien zu berücksichtigen. So wurden mit der E/A-Normalform des Zustandsraummodells und der damit darstellbaren internen Systemdynamik sowie mit der Modellvereinfachung, dem Inneren-Modell-Prinzip und mit Methoden der Robustheitsanalyse Themen aufgenommen, die in vielen Grundlagenbüchern fehlen, obwohl sie auf wichtige und bereits bei einschleifigen Regelkreisen sehr nutzbringende Methoden führen.

Das Wissen der Regelungstechniker umfasst allgemeingültige Methoden, die durch Blockschatzbilder, Gleichungen und Algorithmen dargestellt werden. Um dieses Wissen anschaulich zu machen, werden zahlreiche **Anwendungsbeispiele** aus so unterschiedlichen Gebieten wie der Elektrotechnik, der Verfahrenstechnik, des Maschinenbaus und der Verkehrstechnik sowie aus der Biologie und Bereichen des täglichen Lebens behandelt. Diese Beispiele demonstrieren gleichzeitig den fach-übergreifenden Charakter der Regelungstechnik und tragen den unterschiedlichen Interessen der Studenten der genannten Fachrichtungen Rechnung.

Zahlreiche **Übungsaufgaben** dienen zur Festigung des Stoffes und regen die Leser an, über Anwendungen oder auch Erweiterungen des Stoffes nachzudenken. Die Lösungen der wichtigsten Aufgaben sind im Anhang angegeben.

Die **Literaturhinweise** am Ende jedes Kapitels beziehen sich auf Aufsätze und Bücher, die maßgeblich zur Entwicklung der Regelungstheorie beigetragen haben. Außerdem werden Lehrbücher für ein vertiefendes Studium einzelner Anwendungsbereiche der Regelungstechnik empfohlen.

Die Lösung praktischer Regelungsaufgaben erfordert umfangreiche numerische Auswertungen, die man problemlos einem Rechner übertragen kann. Um den Anschluss an die rechnergestützte Arbeitsweise der Regelungstechniker herzustellen, werden die grundlegenden Befehle des **Programmsystems MATLAB** angegeben. MATLAB wurde gewählt, weil dieses System an allen Universitäten und in vielen Bereichen der Industrie angewendet wird. Die angeführten MATLAB-Befehle sollen die Leser anregen, den erlernten Stoff an umfangreicheren Beispielen zu erproben, um ein Gefühl für dynamische Vorgänge zu bekommen und um erste Erfahrungen beim Reglerentwurf zu sammeln. Bei der Anwendung dieses Programmsystems wird auch offensichtlich, dass zwar die numerischen Berechnungen einem Rechner übertragen werden können, dass aber die Aufbereitung der Aufgabenstellung und die Interpretation der erhaltenen Ergebnisse dem Ingenieur überlassen bleiben und dass dafür die in diesem Buch vermittelten regelungstechnischen Kenntnisse notwendig sind.

**Erwartete Vorkenntnisse.** Die Lehre in der Regelungstechnik lebt im Spannungsfeld zwischen mathematischer Exaktheit und Allgemeingültigkeit einerseits sowie ingenieurgemäßer Darstellung und Interpretation andererseits. Die Mathematik wird als Sprache verwendet, in der Regelungsaufgaben und Lösungsmethoden kompakt

und so allgemein formuliert werden können, dass sie für sehr unterschiedliche praktische Probleme anwendbar sind. Das Buch zeigt diesen Aspekt der Regelungstechnik, ohne die größtmögliche Allgemeingültigkeit der Darstellung anzustreben. Unter Nutzung praktisch zweckmäßiger Vereinfachungen wird der mathematische Apparat auf das Notwendige beschränkt, so dass von den Lesern lediglich Kenntnisse über die Matrizenrechnung sowie über die Anwendung der Fourier- und Laplace-transformation vorausgesetzt werden müssen. Die Abschnitte zu den Integraltransformationen geben keine mathematisch tiefgründige Einführung, sondern stellen die ingenieurtechnische Interpretation in den Mittelpunkt, die für die Kombination der Denkweisen im Zeitbereich und im Frequenzbereich unabdingbar ist.

Die wichtigsten Ideen der Regelungstechnik lassen sich in Formeln kurz und prägnant ausdrücken. Dennoch besteht das Regelungstechnische Wissen nicht aus einer Formelsammlung, sondern aus dem Verständnis dieser Formeln. Der Denkweise des Ingenieurs entsprechend nimmt die Interpretation der mathematisch beschriebenen Methoden einen breiten Raum ein. Das Buch enthält eine Vielzahl von Beispielen, Kurven und Bildern, die den Inhalt der Formeln illustrieren.

**Leser.** Das Buch ist in zwei Bände unterteilt, wobei der erste Band den Stoff einer Einführungsvorlesung, der zweite Band den einer Vertiefungsvorlesung enthält. Da Beispiele aus allen Anwendungsgebieten behandelt werden, kann es für alle ingenieurtechnischen Studienrichtungen eingesetzt werden.

Nachdem beide Bände durch die Hinzunahme neuer Ideen auf jeweils etwa 700 Seiten angewachsen sind, stellt sich die Frage, welcher Stoff aus diesen Büchern zur „Pflicht“ und welcher zur „Kür“ eines Regelungstechnikers gehört. Diese Frage kann nicht allgemein beantwortet werden, denn die Antwort hängt von der Ausrichtung der Studiengänge bzw. Tätigkeitsfelder der einzelnen Leser ab.

Für Elektrotechnikstudenten können die im ersten Teil behandelten systemtheoretischen Grundlagen kürzer abgehandelt werden als im Buch, weil die Hörer mit dynamischen Modellen und einigen Analysemethoden aus vorhergehenden Lehrveranstaltungen zur Systemtheorie, zu elektrischen Netzwerken und zur Signalanalyse vertraut sind. An der Ruhr-Universität Bochum setze ich dieses Buch für eine Pflichtveranstaltung des Studienschwerpunktes Automatisierungstechnik ein, die an eine für alle Elektrotechnikstudenten obligatorische Einführungsvorlesung in die Automatisierungstechnik anschließt<sup>1</sup>. Die Regelungstechnikvorlesung bietet vor allem mit der Anwendung bekannter Modellbildungsmethoden auf nichtelektrische Systeme und der Analyse rückgekoppelter Systeme Neues und widmet sich dann ausführlich den Reglerentwurfsverfahren. Die Stoffverteilung für diese Lehrveranstaltungen steht auf der Homepage.

Im Unterschied dazu ist den Studenten des Maschinenbaus, der Verfahrenstechnik oder der Informatik die systemtheoretische Denkweise weniger geläufig, so dass für diese Hörer die Modellbildung und die Erläuterung verschiedener Verhaltensweisen dynamischer Systeme einen breiten Raum einnehmen müssen. In allen Fäl-

---

<sup>1</sup> vgl. J. Lunze: *Automatisierungstechnik*, Oldenbourg-Verlag, München 2012 (3. Aufl.)

len geht das Buch deutlich über eine einsemestrigen Lehrveranstaltung hinaus und ermöglicht ein weiterführendes Studium einzelner Themen.

**Danksagung.** Bei der Konzipierung meiner Vorlesung und später dieses Buches wurde mir bewusst, wie stark meine Auffassungen von der Regelungstechnik durch meinen verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. E. h. KARL REINISCH (1921 – 2007), geprägt sind, der in seinen Lehrveranstaltungen in Ilmenau moderne Theorie mit anschaulichen Beispielen aus vielen Bereichen kombinierte. Das in seinem Institut mit Regelungstechnischen Methoden untersuchte Wachstum der Gewächshausgurke war ein anschauliches Beispiel dafür, dass das Anwendungsgebiet der Regelungstechnik nicht auf technische Bereiche beschränkt ist.

Die mehrjährige Ausarbeitung meiner Vorlesung, aus der dieses Buch entstand, haben meine Mitarbeiter und Studenten durch Kritik und Verbesserungsvorschläge unterstützt. Gern habe ich auch Hinweise meiner Fachkollegen, die dieses Buch in ihren Lehrveranstaltungen einsetzen, aufgegriffen. Bei der Überarbeitung des Textes für die zehnte Auflage halfen auch meine Doktoranden Dipl.-Ing. RENÉ SCHUH und M.Sc. ANDREJ MOSEBACH. Frau ANDREA MARSCHALL überarbeitete zahlreiche Abbildungen.

**Zehnte Auflage.** Die zehnte Auflage unterscheidet sich nur in Details von der vorherigen. Die Darstellung der E/A-Normalform und die daran anknüpfenden Erläuterungen der Phänomene der Nullstelle und des nichtminimalphasigen Verhaltens wurden überarbeitet. Die MATLAB-Einführung ist an die aktuelle Version R2014a dieses Programmsystems angepasst.

Bochum, im Mai 2014

JAN LUNZE

Auf der Homepage [www.atp.rub.de/Buch/RT1](http://www.atp.rub.de/Buch/RT1) des Lehrstuhls für Automatisierungstechnik und Prozessinformatik der Ruhr-Universität Bochum finden Interessenten weitere Informationen zu den Beispielen, die zur Erzeugung einiger Bilder verwendeten MATLAB-Programme sowie die Abbildungen dieses Buches für den Gebrauch in der Vorlesung.

# Inhaltsverzeichnis

Verzeichnis der Anwendungsbeispiele .....	XVII
Inhaltsübersicht des zweiten Bandes .....	XXIII
Hinweise zum Gebrauch des Buches .....	XXV

## Teil 1: Einführung

<b>1 Zielstellung und theoretische Grundlagen der Regelungstechnik .....</b>	<b>1</b>
1.1 Aufgaben der Regelungstechnik .....	1
1.2 Prinzipielle Funktionsweise von Regelungen .....	5
1.3 Lösungsweg für Regelungsaufgaben .....	14
1.4 Übersicht über die theoretischen Grundlagen der Regelungstechnik .....	17
Literaturhinweise .....	18
<b>2 Beispiele für technische und nichttechnische Regelungsaufgaben .....</b>	<b>19</b>
2.1 Gebäudeautomatisierung .....	19
2.2 Prozessregelung .....	21
2.3 Regelungsaufgaben in Energiesystemen .....	24
2.4 Robotersteuerungen .....	27
2.5 Regelung von Fahrzeugen .....	29
2.6 Mechatronik .....	30
2.7 Flugregelung .....	30
2.8 Der Mensch als Regler .....	32
2.9 Biologische Regelkreise .....	33
2.10 Gemeinsamkeiten von Regelungen in unterschiedlichen Anwendungsbereichen .....	35
Literaturhinweise .....	38

## Teil 2: Modellbildung und Systemanalyse

<b>3</b>	<b>Strukturelle Beschreibung dynamischer Systeme</b>	39
3.1	Ziele und wichtige Schritte der Modellbildung	39
3.2	Blockschaltbild	41
3.3	Signalflussgraph	52
	Literaturhinweise	54
<b>4</b>	<b>Beschreibung linearer Systeme im Zeitbereich</b>	55
4.1	Modellbildungsaufgabe	55
4.2	Beschreibung linearer Systeme durch Differentialgleichungen	57
4.2.1	Lineare Differentialgleichung $n$ -ter Ordnung	57
4.2.2	Aufstellung der Differentialgleichung	58
4.2.3	Linearität dynamischer Systeme	65
4.2.4	Kausalität	67
4.2.5	Zeitinvarianz	70
4.3	Zustandsraumdarstellung linearer Systeme	70
4.3.1	Einführung des Zustandsraummodells	70
4.3.2	Zustand und Zustandsraum	74
4.3.3	Zustandsraumdarstellung von Mehrgrößensystemen	78
4.4	Aufstellung des Zustandsraummodells	80
4.4.1	Ableitung des Zustandsraummodells aus der Differentialgleichung	81
4.4.2	Aufstellung des Zustandsraummodells aus den physikalischen Grundbeziehungen	89
4.4.3	Zustandsraummodell gekoppelter Systeme	95
4.4.4	Gültigkeitsbereich der Modelle und Normierung	100
4.5	Erweiterungen	105
4.5.1	Linearisierung nichtlinearer Systeme	105
4.5.2	Totzeitsysteme	113
4.5.3	Zeitvariable Systeme	114
4.6	MATLAB-Funktionen für die Beschreibung dynamischer Systeme	115
	Literaturhinweise	116
<b>5</b>	<b>Verhalten linearer Systeme</b>	119
5.1	Vorhersage des Systemverhaltens	119
5.2	Lösung der Zustandsgleichung	120
5.2.1	Lösung einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung	120
5.2.2	Lösung eines Differentialgleichungssystems erster Ordnung	125
5.2.3	Verhalten linearer Systeme	128
5.2.4	Eigenschaften und Berechnungsmethoden für die Übergangsmatrix	133
5.3	Normalformen des Zustandsraummodells	135
5.3.1	Transformation der Zustandsgleichung	135
5.3.2	Kanonische Normalform	137

5.3.3	Erweiterung der kanonischen Normalform für nichtdiagonalähnliche Systemmatrizen . . . . .	145
5.3.4	Bewegungsgleichung in kanonischer Darstellung . . . . .	148
5.3.5	Regelungsnormalform . . . . .	154
5.3.6	Beobachtungsnormalform . . . . .	158
5.3.7	E/A-Normalform . . . . .	161
5.3.8	Invariante Systemeigenschaften . . . . .	168
5.4	Kennfunktionen des dynamischen Übertragungsverhaltens . . . . .	169
5.4.1	Übergangsfunktion . . . . .	169
5.4.2	Gewichtsfunktion . . . . .	171
5.4.3	Zusammenhang zwischen Gewichtsfunktion und Übergangsfunktion . . . . .	174
5.5	E/A-Verhalten . . . . .	176
5.5.1	Darstellung des E/A-Verhaltens mit Hilfe der Gewichtsfunktion . . . . .	176
5.5.2	Übergangsverhalten und stationäres Verhalten . . . . .	179
5.5.3	Bedeutung der Nullstellen für das Übertragungsverhalten . . . . .	185
5.5.4	Nulldynamik . . . . .	188
5.6	Eigenschaften wichtiger Übertragungsglieder im Zeitbereich . . . . .	193
5.6.1	Proportionalglieder . . . . .	193
5.6.2	Integrierglieder . . . . .	199
5.6.3	Differenzierglieder . . . . .	200
5.6.4	Totzeitglieder . . . . .	203
5.7	Modellvereinfachung und Kennwertermittlung . . . . .	205
5.7.1	Modellvereinfachung . . . . .	206
5.7.2	Approximation dynamischer Systeme durch PT <sub>1</sub> -Glieder . . . . .	210
5.7.3	Kennwertermittlung für PT <sub>2</sub> -Glieder . . . . .	214
5.7.4	Kennwertermittlung für PT <sub>1</sub> T <sub>t</sub> -Glieder . . . . .	216
5.8	MATLAB-Funktionen für die Analyse des Zeitverhaltens . . . . .	217
	Literaturhinweise . . . . .	223
<b>6</b>	<b>Beschreibung und Analyse linearer Systeme im Frequenzbereich</b> . . . . .	225
6.1	Zielstellung . . . . .	225
6.2	Fouriertransformation . . . . .	227
6.2.1	Zerlegung periodischer Signale . . . . .	227
6.2.2	Zerlegung nichtperiodischer Signale . . . . .	233
6.3	Frequenzgang . . . . .	237
6.3.1	Lineare Systeme mit sinusförmigen Eingangssignalen . . . . .	237
6.3.2	Berechnung des Frequenzgangs . . . . .	242
6.3.3	Eigenschaften und grafische Darstellung . . . . .	243
6.4	Laplacetransformation . . . . .	246
6.4.1	Definition . . . . .	246
6.4.2	Wichtige Eigenschaften . . . . .	252
6.5	Übertragungsfunktion . . . . .	255
6.5.1	Definition . . . . .	255

6.5.2	Berechnung .....	260
6.5.3	Eigenschaften und grafische Darstellung .....	265
6.5.4	Pole und Nullstellen .....	267
6.5.5	Berechnung des Systemverhaltens .....	275
6.5.6	Übertragungsfunktion gekoppelter Systeme .....	282
6.6	Beziehungen zwischen den Modellen .....	286
6.7	Eigenschaften wichtiger Übertragungsglieder im Frequenzbereich ..	289
6.7.1	Proportionalglieder .....	289
6.7.2	Integrierglieder .....	305
6.7.3	Differenzierglieder .....	307
6.7.4	Übertragungsglieder mit Nullstellen .....	307
6.7.5	Übertragungsglieder mit gebrochen rationaler Übertragungsfunktion .....	309
6.7.6	Allpassglieder und nichtminimalphasige Systeme .....	317
6.7.7	Totzeitglieder .....	331
6.8	MATLAB-Funktionen für die Systemanalyse im Frequenzbereich ..	335
	Literaturhinweise .....	342
<b>7</b>	<b>Der Regelkreis .....</b>	<b>345</b>
7.1	Reglerentwurfsaufgabe .....	345
7.2	Modell des Standardregelkreises .....	351
7.2.1	Beschreibung im Frequenzbereich .....	351
7.2.2	Beschreibung im Zeitbereich .....	356
7.3	Stationäres Verhalten von Regelkreisen .....	357
7.3.1	Stör- und Führungssignale .....	357
7.3.2	Stationäres Verhalten bei impulsförmiger Erregung .....	360
7.3.3	Stationäres Verhalten bei sprungförmiger Erregung .....	361
7.3.4	Stationäres Verhalten bei weiteren Signalklassen .....	363
7.3.5	Sollwertfolge bei Verwendung eines Vorfilters .....	367
7.4	Übergangsverhalten des Regelkreises .....	368
7.4.1	Perfekte Regelung .....	368
7.4.2	Beschränkungen für die erreichbare Regelgüte bei einer Festwertregelung .....	369
7.4.3	Nichtminimalphasenverhalten von Regelkreisen .....	372
7.4.4	Gleichgewichtstheorem .....	373
7.4.5	Empfindlichkeit und Robustheit von Regelkreisen .....	380
7.4.6	Konsequenzen für den Reglerentwurf .....	384
7.5	Entwurf von Vorsteuerungen .....	386
7.5.1	Aufgaben der Folgeregelung .....	386
7.5.2	Inversionsbasierter Vorsteuerungsentwurf .....	387
7.5.3	Trajektorienplanung für Arbeitspunktwechsel .....	392
7.5.4	Vorsteuerung in den stationären Zustand .....	395
7.6	Reglertypen und Richtlinien für die Wahl der Reglerstruktur .....	398
	Literaturhinweise .....	405

<b>8</b>	<b>Stabilität rückgekoppelter Systeme</b>	407
8.1	Zustandsstabilität	407
8.1.1	Stabilitätsbegriff	407
8.1.2	Definition der Zustandsstabilität	408
8.1.3	Kriterien für die Zustandsstabilität	410
8.2	Eingangs-Ausgangs-Stabilität	414
8.2.1	Definition der E/A-Stabilität	414
8.2.2	Kriterien für die E/A-Stabilität	415
8.2.3	Beziehungen zwischen Zustandsstabilität und E/A-Stabilität	417
8.3	Stabilitätsprüfung anhand des charakteristischen Polynoms	418
8.3.1	Vorgehensweise	418
8.3.2	Hurwitzkriterium	419
8.4	Stabilitätsprüfung anhand der Pole des geschlossenen Kreises	422
8.4.1	E/A-Stabilität von Regelkreisen	422
8.4.2	Innere Stabilität von Regelkreisen	425
8.5	Stabilitätsprüfung anhand des Frequenzganges der offenen Kette	427
8.5.1	Herleitung der Stabilitätsbedingung	427
8.5.2	Nyquistkriterium	432
8.5.3	Beispiele	434
8.5.4	Erweiterungen	439
8.5.5	Phasenrandkriterium	445
8.6	Robuste Stabilität	449
8.6.1	Zielsetzung	449
8.6.2	Beschreibung der Modellunbestimmtheiten	449
8.6.3	Nachweis der robusten Stabilität	453
8.7	Stabilitätsanalyse mit MATLAB	458
	Literaturhinweise	461

### Teil 3: Entwurf einschleifiger Regelkreise

<b>9</b>	<b>Entwurf einschleifiger Regelkreise</b>	463
9.1	Allgemeines Vorgehen beim Reglerentwurf	463
9.2	Übersicht über die Entwurfsverfahren	465
9.3	Rechnergestützter Entwurf	467
9.4	Einstellregeln für PID-Regler	468
	Literaturhinweise	472
<b>10</b>	<b>Reglerentwurf anhand des PN-Bildes des geschlossenen Kreises</b>	475
10.1	Beziehungen zwischen dem PN-Bild und den Güteforderungen	475
10.1.1	Regelkreise mit dominierendem Polpaar	475
10.1.2	Regelkreise mit einem dominierenden Pol	483
10.2	Wurzelortskurve	484
10.2.1	Definition	484

10.2.2 Eigenschaften und Konstruktionsvorschriften . . . . .	485
10.3 Reglerentwurf unter Verwendung der Wurzelortskurve . . . . .	496
10.3.1 Entwurfsverfahren . . . . .	496
10.3.2 Regelung mit hoher Kreisverstärkung . . . . .	502
10.3.3 Zusammenfassende Bewertung des Entwurfsverfahrens . . . . .	503
10.4 MATLAB-Funktionen zum Reglerentwurf anhand des PN-Bildes . .	507
Literaturhinweise . . . . .	511
<b>11 Reglerentwurf anhand der Frequenzkennlinie der offenen Kette . . . . .</b>	<b>513</b>
11.1 Frequenzkennlinie und Regelgüte . . . . .	513
11.1.1 Näherung des Regelkreises durch ein $PT_2$ -Glied . . . . .	513
11.1.2 Statisches Verhalten des Regelkreises . . . . .	514
11.1.3 Führungsverhalten des Regelkreises . . . . .	516
11.1.4 Störverhalten des Regelkreises . . . . .	521
11.2 Reglerentwurf unter Beachtung des Führungsverhaltens . . . . .	527
11.2.1 Entwurfsverfahren . . . . .	527
11.2.2 Entwurfsdurchführung . . . . .	528
11.3 Reglerentwurf unter Beachtung des Störverhaltens . . . . .	538
11.4 MATLAB-Programm zum Frequenzkennlinienentwurf . . . . .	541
Literaturhinweise . . . . .	543
<b>12 Weitere Entwurfsverfahren . . . . .</b>	<b>545</b>
12.1 Kompensationsregler . . . . .	545
12.2 Modellbasierte Regelung ( <i>Internal Model Control</i> ) . . . . .	551
12.2.1 Grundidee des Verfahrens . . . . .	551
12.2.2 Entwurf von IMC-Reglern durch $H_2$ -Optimierung . . . . .	554
12.2.3 Entwurf robuster IMC-Regler . . . . .	558
12.2.4 Beziehung zwischen klassischen Reglern und IMC-Reglern .	561
12.3 Smithprädiktor . . . . .	563
Literaturhinweise . . . . .	570
<b>13 Erweiterungen der Regelungsstruktur . . . . .</b>	<b>573</b>
13.1 Vermischte Regelungen . . . . .	573
13.1.1 Störgrößenaufschaltung . . . . .	574
13.1.2 Regelkreis mit Hilfsregelgröße . . . . .	577
13.1.3 Kaskadenregelung . . . . .	579
13.1.4 Regelkreis mit Hilfsstellgröße . . . . .	581
13.2 Mehrgrößenregelungen . . . . .	582
13.3 Robuste, adaptive, nichtlineare und fehlertolerante Regelungen .	584
<b>Literaturverzeichnis . . . . .</b>	<b>587</b>

## Anhänge

<b>Anhang 1: Lösung der Übungsaufgaben</b> .....	593
<b>Anhang 2: Kurze Einführung in MATLAB</b> .....	691
<b>Anhang 3: Aufgaben zur Prüfungsvorbereitung</b> .....	701
<b>Anhang 4: Projektaufgaben</b> .....	705
<b>Anhang 5: Verzeichnis der wichtigsten Formelzeichen</b> .....	713
<b>Anhang 6: Korrespondenztabelle der Laplacetransformation</b> .....	715
<b>Anhang 7: Fachwörter deutsch – englisch</b> .....	717
<b>Sachwortverzeichnis</b> .....	721

# Verzeichnis der Anwendungsbeispiele

## Regelung von Elektroenergieversorgungssystemen

Regelungsaufgaben für Elektroenergienetze (Abschn. 2.3) ..... 24

### • Regelung von Kraftwerken

Nichtminimalphasenverhalten eines Dampferzeugers (Beispiel 6.9) ..... 323  
Nichtminimalphasenverhalten von Wasserkraftwerken (Beispiel 6.8) ..... 321  
Stabilitätsprüfung eines Kraftwerksblocks (Aufgabe 8.5) ..... 422

### • Netzregelung

Frequenzregelung im Inselnetz (Aufgabe 7.4 mit Lösung) ..... 364, 644  
Entwurf der Knotenspannungsregelung (Beispiel 11.1) ..... 533  
Kaskadenstruktur der Knotenspannungsregelung (Aufgabe 13.5) ..... 581

## Flugregelungen

Lageregelung von Raumflugkörpern (Aufgabe 8.13 mit Lösung) ..... 447, 655  
Aufgaben der Flugregelung (Abschn. 2.7) ..... 30  
Nichtminimalphasiges Verhalten von Flugzeugen (Aufgabe 6.30) ..... 329

### • Regelung der Rollbewegung von Flugzeugen

Zustandsraummodell für die Rollbewegung eines Flugzeugs (Beispiel 5.6) ... 151  
Dynamik der Rollbewegung (Aufgabe 6.27) ..... 316  
Dämpfung der Rollbewegung (Aufgabe 11.6 mit Lösung) ..... 537, 674  
Stabilität einer Flugregelung (Projektaufgabe A4.2) ..... 707

### • Regelung von Ruderstellsystemen

Übertragungsfunktion eines hydraulischen Ruderstellsystems (Aufgabe 6.23 mit Lösung) ..... 314, 632  
Lageregelung hydraulischer Ruderstellsysteme (Aufgabe 10.9 mit Lösung) ... 504, 664

**Prozessregelung**

Regelungsaufgaben in der Verfahrenstechnik (Abschn. 2.2) .....	21
Füllstandsregelung mit Vorsteuerung (Beispiel 1.5) .....	12
Temperaturregelung eines Wärmeübertragers (Projektaufgabe A4.3) .....	707

**• Verhalten verfahrenstechnischer Prozesse**

Dynamisches Verhalten einer Stufenreaktion (Aufgabe 5.23) .....	204
Zustandsraummodell eines Behältersystems mit zwei Eingängen und zwei Ausgängen (Beispiel 4.7) .....	78
Linearisierung des nichtlinearen Rührkesselreaktormodells (Beispiel 4.14) ...	112
Zustandsraummodell zur Berechnung der Füllstände in drei gekoppelten Behältern (Aufgabe 4.8 mit Lösung) .....	105, 603
Pole und Nullstellen eines Behältersystems (Beispiel 6.5) .....	271
Eigenbewegung gekoppelter Behälter (Aufgabe 5.1 mit Lösung) .....	124, 606
Blockschaltbild der Regelung eines UASB-Reaktors (Beispiel 3.2) .....	45

**• Temperaturregelung von Rührkesselreaktoren**

Modell für das thermische Verhalten eines Rührkesselreaktors (Beispiel 4.3) .	62
Beschreibung des thermischen Verhaltens bei veränderlicher Heizleistung (Aufgabe 4.2) .....	65
Trajektorienplanung für den Arbeitspunktwechsel (Beispiel 7.4) .....	393
Arbeitspunktwechsel mit stetiger Stellgröße (Aufgabe 7.10) .....	398
Einstellung der Temperaturregelung nach ZIEGLER und NICHOLS (Beispiel 9.1) .....	469
Temperaturregelung mit einem Kompensationsregler (Beispiel 12.1) .....	549
Störgrößenaufschaltung zur Verbesserung der Temperaturregelung (Aufgabe 13.2) .....	577

**• Konzentrationsregelung von Rührkesselreaktoren**

Verhalten zweier Rührkessel (Aufgabe 5.5 mit Lösung) .....	132, 615
Exakte Berechnung und Approximation der Gewichtsfunktion (Aufgabe 5.10 mit Lösung) .....	175, 620
Analyse des Übergangsverhaltens gekoppelter Behälter (Aufgabe 5.30) .....	222
Reaktormodell im Frequenzbereich (Aufgabe 6.35) .....	334
Reaktor mit minimalphasigem und nichtminimalphasigem Verhalten (Beispiel 6.10) .....	326
Konzentrationsregelung mit Smithprädiktor (Beispiel 12.2) .....	565

**• Temperaturregelung eines Klinkerkühlers**

Strukturelle Modellierung von Drehrohrofen und Klinkerkühler (Beispiel 3.1)	43
MATLAB-Programm A.1 zur Analyse der Stabilitätseigenschaften von Drehrohrofen und Klinkerkühler (Aufgabe 8.19 mit Lösung) .....	459, 657

## Gebäudeautomatisierung

Regelungsaufgaben in der Gebäudeautomatisierung (Abschn. 2.1) .....	19
Schwingungstilgung am Hochhaus „Taipei 101“ (Aufgabe 6.38 mit Lösung) .	341, 639

### • Raumtemperaturregelung

Blockschaltbild einer Raumtemperaturregelung (Aufgabe 2.1) .....	21
Heizungspumpenregelung (Aufgabe 2.6) .....	37
Analyse des Zeitverhaltens einer Raumtemperaturregelung: MATLAB-Programm 5.1 (Beispiel 5.14) .....	219
Analyse einer Raumtemperaturregelung im Frequenzbereich: MATLAB-Programm 6.1 (Beispiel 6.11) .....	338
Raumtemperaturregelung mit einem Thermostatventil (Aufgabe 7.9) .....	368
Robustheit von Thermostatventilen (Aufgabe 8.18) .....	458
Störgrößenaufschaltung in einer äußentemperaturgeführten Vorlauftemperaturregelung (Aufgabe 13.1) .....	577

## Steuerung von Fahrzeugen

Beispiele für Regelkreise in Fahrzeugen (Aufgabe 2.5) .....	29
Regelung der Leerlaufdrehzahl eines Verbrennungsmotors (Aufgabe 11.9 mit Lösung) .....	542, 681
Der Chauffeur als Regler (Abschn. 2.8) .....	32
Rückwärtseinparken von Fahrzeugen (Aufgabe 6.31 mit Lösung) .....	330, 636
Abbremsen eines Fahrzeugs (Aufgabe 7.11 mit Lösung) .....	398, 649
Wirkung einer aktiven Fahrzeugdämpfung (Beispiel 7.3) .....	378
Stabilisierung eines Fahrrades (Aufgabe 10.11 mit Lösung) .....	505, 665
Robustheitsprobleme beim Autofahren (Aufgabe 8.16) .....	458
Entwurf der Kompensationsrückführung im Airbag-Sensor (Projektaufgabe A4.5 mit Lösung) .....	709, 685

### • Modellierung der Fahrzeugbewegung

Blockschaltbild des Antriebsstranges eines Kraftfahrzeugs (Aufgabe 3.2 mit Lösung) .....	51, 594
Linearisierung eines Fahrzeugmodells (Beispiel 4.13) .....	110
Bewegungsgleichung eines Fahrzeugs (Aufgabe 5.3 mit Lösung) .....	131, 610
Berechnung der Bewegung einer Eisenbahn (Aufgabe 5.4 mit Lösung) .....	132, 613

### • Abstandsregelung von Kraftfahrzeugen

Struktur des Abstandsreglers bei Fahrzeugen (Aufgabe 7.7 mit Lösung) .....	366, 645
Entwurf einer Abstandsregelung (Aufgabe 11.7 mit Lösung) .....	538, 678

Kaskadenstruktur der Abstandsregelung von Fahrzeugen (Aufgabe 13.6 mit Lösung) ..... 581, 684

#### • Regelung von Schiffen

Dämpfung der Rollbewegung eines Schiffes: MATLAB-Programm A.3 (Aufgabe 10.15 mit Lösung) ..... 510, 670

Steuerung eines Schiffes (Aufgabe 10.8) ..... 504

### Biologische Regelkreise

Herzschrittmacher (Beispiel 1.4) .....	9
Beispiele für biologische Regelkreise (Beispiel 2.9) .....	33
Regelungsaufgaben in der Medizintechnik (Abschn. 2.9) .....	34
Künstliche Beatmung (Aufgabe 3.3 mit Lösung) .....	52, 595
Wirkstoffkonzentrationsverlauf im Blut (Aufgabe 5.18 mit Lösung) .....	198, 622
Körpertemperaturregelung (Beispiel 13.1) .....	576

### Analyse und Regelung einer Verladebrücke

Positionierung einer Last mit einem Portalkran (Beispiel 1.2) .....	7
Verhalten der Verladebrücke (Beispiel 5.1) .....	128
Übertragungsfunktion der Verladebrücke (Aufgabe 6.10 mit Lösung) .....	274, 627
Bodediagramm der Verladebrücke (Aufgabe 6.25 mit Lösung) .....	314, 634
Wurzelortskurve der geregelten Verladebrücke (Aufgabe 10.4 mit Lösung) ...	495, 660
Regelung einer Verladebrücke (Projektaufgabe A4.4) .....	709

### Stabilisierung eines invertierten Pendels

Analyse der Stabilisierbarkeit (Aufgabe 8.4 mit Lösung) .....	421, 651
Entwurf eines stabilisierenden Reglers: MATLAB-Programm 10.1 (Beispiel 10.4) .....	498

### Drehzahlgeregelter Gleichstrommotor

Zustandsraummodell des Gleichstrommotors (Beispiel 5.2) .....	140
Modellvereinfachung (Beispiel 5.12) .....	209
Blockschaltbild und Übertragungsfunktion des Gleichstrommotors (Aufgabe 6.32 mit Lösung) .....	330, 637
Analyse des Übertragungsverhaltens (Aufgabe 6.36) .....	340
Wurzelortskurve des geregelten Gleichstrommotors (Aufgabe 10.4 mit Lösung)	495, 660

Entwurf der Drehzahlregelung mit dem Frequenzkennlinienverfahren (Beispiel 11.2) .....	538
Entwurf der Drehzahlregelung (MATLAB-Programm 11.1) .....	542
Berechnung der Störübergangsfunktion (Aufgabe 11.8) .....	541
Modellunbestimmtheiten eines drehzahlgeregelten Gleichstrommotors (Beispiel 8.10) .....	451
Robustheitsanalyse der Drehzahlregelung (Beispiel 8.11) .....	456
Drehzahlregelung eines Gleichstrommotors (Projektaufgabe A4.1) .....	706

## Weitere Regelungsaufgaben

Regelkreise bei der Lagerhaltung (Beispiel 3.4) .....	49
Budgetverteilung in einem Unternehmen (Beispiel 6.10) .....	326
Bestellstrategien bei der Lagerhaltung (Aufgabe 3.1) .....	51
Robotersteuerung (Abschn. 2.4) .....	27
Strukturelle Modellierung des Flussgebietes der Werra (Beispiel 3.3) .....	47
Füllstandsregelung einer Talsperre (Aufgabe 7.6 mit Lösung) .....	365, 644
Regelung einer Dampfmaschine (Beispiel 1.3) .....	8
Analyse des Fliehkraftreglers von Dampfmaschinen (Aufgabe 7.8 mit Lösung) .....	366, 648
Positionierung eines Radioteleskops (Projektaufgabe A4.6 mit Lösung) .....	711, 690
Steuerung einer Schachtförderung im Steinkohlebergbau (Projektaufgabe A4.7) .....	712
Elektrische Schaltungen mit positiv reeller Übertragungsfunktion (Aufgabe 6.26 mit Lösung) .....	316, 635

### • Regelkreise im täglichen Leben

Temperaturregelung einer Dusche (Beispiel 1.1) .....	7
Verhalten einer Badewanne (Aufgabe 5.21) .....	204
Lautstärkeregler (Aufgabe 2.4 mit Lösung) .....	33, 593
Thermostat im Backofen (Aufgabe 2.7) .....	38
Steuerung eines Abfüllautomaten (Aufgabe 2.2) .....	32
Rückkopplung in Lautsprecher-Mikrofon-Anordnungen (Aufgabe 8.11 mit Lösung) .....	443, 653
Klassifikation alltäglicher Vorgänge nach ihrem dynamischen Verhalten (Aufgabe 5.24 mit Lösung) .....	205, 623

### • Technische Realisierung von Reglern

Technische Realisierung von Reglern (Aufgabe 7.13) .....	404
Technische Realisierung von Nullstellen im Regler (Aufgabe 7.14) .....	404
Technische Realisierung einer Differenziation (Beispiel 4.4) .....	68
Stabilitätsprüfung digital vernetzter Regelungssysteme (Beispiel 8.8) .....	442

# Inhaltsübersicht des zweiten Bandes

## **Beschreibung und Eigenschaften von Mehrgrößensystemen**

- Beschreibungsformen im Zeitbereich und im Frequenzbereich
- Pole und Nullstellen
- Stabilität

## **Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit**

- Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitskriterien
- KALMAN-Zerlegung des Zustandsraummodells
- Strukturelle Analyse linearer Systeme
- Realisierbarkeit und Realisierung von Mehrgrößensystemen

## **Strukturen und Eigenschaften von Mehrgrößenregelkreisen**

- Grundlegende Eigenschaften von Mehrgrößenregelkreisen
- Stabilität von Mehrgrößenregelkreisen
- Stationäres Verhalten
- Kriterien für die Wahl der Regelkreisstruktur

## **Einstellregeln für PI-Mehrgrößenregler**

- Gegenkopplungsbedingung für Mehrgrößensysteme
- Einstellung von PI-Reglern
- Robustheitsanalyse

## **Reglerentwurf zur Polzuweisung**

- Berechnung von Zustandsrückführungen
- Polzuweisung durch Ausgangsrückführung
- Dynamische Kompensation

## **Optimale Regelung**

- Optimale Zustandsrückführung (LQ-Regelung)
- Eigenschaften von LQ-Regelkreisen
- Optimale Ausgangsrückführung
- $H^\infty$ -optimale Regelung

## **Beobachterentwurf**

- Beobachtungsproblem
- Luenbergerbeobachter
- reduzierter Beobachter
- Beziehungen zwischen Luenbergerbeobachter und Kalmanfilter

**Reglerentwurf mit dem Direkten Nyquistverfahren**

- Grundidee des Direkten Nyquistverfahrens
- Stabilitätsanalyse diagonaldominanter Mehrgrößensysteme
- Entwurf mit dem Direkten Nyquistverfahren
- Entkopplung

**Einführung in die digitale Regelung****Beschreibung und Analyse zeitdiskreter Systeme im Zeitbereich**

- Beschreibung und Verhalten zeitdiskreter Systeme
- Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit
- Stabilität

**Beschreibung zeitdiskreter Systeme im Frequenzbereich**

- $\mathcal{Z}$ -Transformation
- $\mathcal{Z}$ -Übertragungsfunktion

**Digitaler Regelkreis**

- Regelkreisstrukturen
- Stabilitätsprüfung
- stationäres Verhalten digitaler Regelkreise

**Entwurf von Abtastreglern**

- Zeitdiskrete Realisierung kontinuierlicher Regler
- Regler mit endlicher Einstellzeit

**Ausblick auf weiterführende Regelungskonzepte**

8. Auflage 2015 mit 274 Abbildungen, 58 Beispielen  
und 103 Übungsaufgaben

# Hinweise zum Gebrauch des Buches

**Formelzeichen.** Die Wahl der Formelzeichen hält sich an folgende Konventionen: Kleine Buchstaben bezeichnen Skalare, z. B.  $x, a, t$ . Vektoren sind durch halbfette Kleinbuchstaben ( $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}$ ) und Matrizen durch halbfette Großbuchstaben ( $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{X}$ ) dargestellt. Entsprechend dieser Festlegung werden die Elemente der Matrizen und Vektoren durch kursive Kleinbuchstaben (mit Indizes) symbolisiert, beispielsweise mit  $x_1, x_2, x_i$  für Elemente des Vektors  $\boldsymbol{x}$  und  $a_{12}, a_{ij}$  für Elemente der Matrix  $\boldsymbol{A}$ . Werden Größen, die im allgemeinen Fall als Vektor oder Matrix geschrieben werden (z. B.  $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}$ ), in einem einfachen Beispiel durch Skalare ersetzt, so wird dies durch den Übergang zu kleinen kursiven Buchstaben ( $x$  bzw.  $a$ ) verdeutlicht. Dann gelten die vorher mit Vektoren und Matrizen geschriebenen Gleichungen mit den skalaren Größen gleichen Namens.  $\boldsymbol{I}$  bzw.  $\boldsymbol{O}$  repräsentieren die Einheitsmatrix bzw. die Nullmatrix.

Vektoren sind stets als Spaltenvektoren definiert. Die Transposition von Vektoren und Matrizen wird durch ein hochgestelltes „ $T$ “ gekennzeichnet ( $\boldsymbol{c}^T$ ).

Mengen sind durch kalligrafische Buchstaben dargestellt:  $\mathcal{Q}, \mathcal{P}$ .

Funktionen der Zeit und deren Fourier- bzw. Laplacetransformierte haben denselben Namen, unterscheiden sich aber in der Größe. So sind der Funktion  $f(t)$  im Zeitbereich die Funktionen  $F(j\omega)$  bzw.  $F(s)$  im Bildbereich zugeordnet.

Bei den Indizes wird zwischen steil gesetzten Abkürzungen und kursiv gesetzten Laufindizes unterschieden. Beispielsweise kennzeichnet der Index „m“ bei  $y_m$  den Messwert einer Ausgangsgröße  $y$ , während er bei  $y_m$  den  $m$ -ten Systemausgang bezeichnet. Im zweiten Fall kann für  $m$  eine beliebige Zahl eingesetzt werden und es gibt außer  $y_m$  z. B. auch die Größe  $y_{m-1}$ .

Die verwendeten Formelzeichen und Bezeichnungen orientieren sich an den international üblichen und weichen deshalb von der DIN 19299 ab. Beispielsweise werden für die Regelgröße und die Stellgröße die Buchstaben  $y$  und  $u$  verwendet.  $x$  bzw.  $\boldsymbol{x}$  sind die international gebräuchlichen Formelzeichen für eine Zustandsvariable bzw. den Zustandsvektor.

Wenn bei einer Gleichung hervorgehoben werden soll, dass es sich um eine Forderung handelt, die durch eine geeignete Wahl von bestimmten Parametern erfüllt werden soll, wird über das Gleichheitszeichen ein Ausrufezeichen gesetzt ( $\stackrel{!}{=}$ ).

Bei Verweisen auf Textstellen des zweiten Bandes (7. Auflage 2012) ist den Kapitelnummern eine römische Zwei vorangestellt, z. B. II-3.

Bei den Beispielen wird mit Zahlengleichungen gearbeitet, in die die physikalischen Größen in einer zuvor festgelegten Maßeinheit einzusetzen sind. Bei den Er-

gebnissen werden die Maßeinheiten wieder an die Größen geschrieben. Dabei wird zur Vereinfachung der Darstellung in den Gleichungen nicht zwischen den physikalischen Größen und ihren auf eine vorgegebene Maßeinheit bezogenen Größen unterschieden (vgl. Abschn. 4.4.4).

**Übungsaufgaben.** Die angegebenen Übungsaufgaben sind ihrem Schwierigkeitsgrad entsprechend folgendermaßen gekennzeichnet:

- Aufgaben ohne Markierung dienen der Wiederholung und Festigung des unmittelbar zuvor vermittelten Stoffes. Sie können in direkter Analogie zu den behandelten Beispielen gelöst werden.
- Aufgaben, die mit einem Stern markiert sind, befassen sich mit der Anwendung des Lehrstoffes auf ein praxisnahe Beispiel. Für ihre Lösung werden vielfach außer dem unmittelbar zuvor erläuterten Stoff auch Ergebnisse und Methoden vorhergehender Kapitel genutzt. Die Leser sollen bei der Bearbeitung dieser Aufgaben zunächst den prinzipiellen Lösungsweg festlegen und erst danach die Lösungsschritte nacheinander ausführen. Die Lösungen dieser Aufgaben sind im Anhang 1 angegeben.
- Aufgaben, die mit zwei Sternen markiert sind, sollen zum weiteren Durchdenken des Stoffes bzw. zu Erweiterungen der angegebenen Methoden anregen. Bei diesen Aufgaben wie auch bei den Projektaufgaben wird der Lösungsweg nicht in strukturierter Form vorgegeben, sondern die Aufstellung des Lösungsweges ist – wie in der Regelungstechnischen Praxis – die erste zu lösende Teilaufgabe.

Aufgaben, die umfangreiche numerische Rechnungen enthalten und deshalb zweckmäßigerweise unter Verwendung von MATLAB gelöst werden sollten, sind durch das Symbol  gekennzeichnet.

**MATLAB.**<sup>2</sup> Eine kurze Einführung in das Programm Paket MATLAB® findet man im Anhang 2. Die wichtigsten Funktionen der *Control System Toolbox* werden am Ende der einzelnen Kapitel erläutert. Dabei wird nur auf die unbedingt notwendigen Befehle und deren einfachste Form eingegangen, denn im Vordergrund steht die Demonstration des prinzipiellen Funktionsumfangs heutiger rechnergestützter Analyse- und Entwurfssysteme. Von diesen Erläuterungen ausgehend können sich die Leser mit Hilfe des MATLAB-Handbuchs den wesentlich größeren Funktionsumfang des Programmsystems leicht erschließen. Programmzeilen sind in der Schreibmaschinenschrift gesetzt.

Die Behandlung von MATLAB zur Demonstration der rechnergestützten Arbeitsweise des Ingenieurs bringt die Schwierigkeit mit sich, dass das Buch mit jeder neuen MATLAB-Version veraltet, weil wichtige Befehle von Version zu Version umgestellt werden. Es sei deshalb darauf hingewiesen, dass derartige Umstellungen zwar die fehlerfreie Nutzung des Programmsystems erschweren, nicht jedoch

---

<sup>2</sup> MATLAB ist eingetragenes Warenzeichen der Fa. The MathWorks, Inc.

die methodischen Grundlagen der Regelungstechnik verändern, die im Mittelpunkt dieses Buches stehen.

Die MATLAB-Programme, mit denen die in diesem Buch gezeigten Abbildungen hergestellt wurden und die deshalb als Muster für die Lösung ähnlicher Analyse- und Entwurfsprobleme dienen können, stehen über die Homepage des Lehrstuhls für Automatisierungstechnik und Prozessinformatik der Ruhr-Universität Bochum

[www.atp.rub.de/Buch/RT1](http://www.atp.rub.de/Buch/RT1)

jedem Interessenten zur Verfügung.

# 1

## Zielstellung und theoretische Grundlagen der Regelungstechnik

*Dieses Kapitel beschreibt die Ziele und Herangehensweisen der Regelungstechnik und gibt eine Übersicht über die in beiden Bänden dieses Lehrbuches behandelten Themen.*

### 1.1 Aufgaben der Regelungstechnik

Die Regelungstechnik befasst sich mit der Aufgabe, einen sich zeitlich verändernden Prozess von außen so zu beeinflussen, dass dieser Prozess in einer vorgegebenen Weise abläuft. Aufgaben diesen Typs findet man nicht nur überall in der Technik, sondern auch im täglichen Leben. Beispielsweise soll die Raumtemperatur, die sich in Abhängigkeit von der Sonneneinstrahlung und anderen Einflüssen zeitlich ändert, zwischen vorgegebenen Grenzwerten bleiben. Der Greifer eines Roboters soll sich entlang der Kante eines Werkstückes bewegen oder so schnell wie möglich von einem zu einem anderen Punkt geführt werden, um dort ein Werkstück zu greifen. Gleichermaßen gilt für den Greifer eines Kranes, der Ziegel zu einem bestimmten Platz auf der Baustelle befördern soll.

In allen diesen Fällen muss eine von außen beeinflussbare Größe so ausgewählt werden, dass das vorgegebene Ziel erreicht wird. Da diese Auswahl in Abhängigkeit davon getroffen wird, inwieweit das Ziel bereits erreicht ist, entsteht ein Regelkreis,

der aus dem gegebenen Prozess und einer neu zu schaffenden Einrichtung, dem Regler, besteht. Im ersten Beispiel war der Prozess der betrachtete Raum und der Regler das Thermoventil, das die aktuelle Lufttemperatur misst und in Abhängigkeit von deren Abweichung von der Solltemperatur mehr oder weniger Wärme in den Heizkörper strömen lässt. Im Roboterbeispiel übernimmt eine Steuereinrichtung die Aufgabe, den Greifer auf einer vorgegebenen Bahn bzw. zu einem gegebenen Punkt zu führen, wobei die Steuerung auf Daten, die von den am Greifer montierten Sensoren geliefert werden, zurückgreift und die Antriebe des Roboters beeinflusst. Im dritten Beispiel stellt der Kranfahrer den Regler dar, der mit Augenmaß die aktuelle Greifposition ermittelt und den Kran steuert.

**Grundbegriffe.** Etwas abstrakter formuliert befasst sich die Regelungstechnik mit der Steuerung dynamischer Systeme. – Diese Begriffsbestimmung bezieht sich auf die zwei wichtigen Begriffe „dynamisches System“ und „Steuerung“, die einer Erläuterung bedürfen.

|| Als *dynamisches System* wird eine Funktionseinheit bezeichnet, deren wichtigsten Kenngrößen sich zeitlich ändern und die deshalb als Funktionen der Zeit dargestellt werden.

Dabei wird zwischen Eingangsgrößen, die auf das System einwirken und die zeitlichen Veränderungen innerhalb des Systems verursachen, und Ausgangsgrößen unterschieden, die das Verhalten des Systems als Reaktion auf die Eingangsgrößen beschreiben. In Abhängigkeit von der betrachteten Problemstellung können sehr unterschiedliche technische Geräte und Anlagen, Lebewesen oder soziale Einheiten als dynamisches System aufgefasst werden. Bei einer Klimaregelung stellt der Raum mit der Heizenergie als Eingangsgröße und der Temperatur als Ausgangsgröße das dynamische System dar. Beim Autofahren ist es das Fahrzeug mit den Winkelstellungen des Gas- und Bremspedals sowie des Lenkrades als Eingangsgrößen und der Geschwindigkeit (mit Betrag und Richtung) als Ausgangsgrößen.

|| Die Veränderungen, die sich in einem dynamischen System abspielen, werden als *dynamischer Prozess* bezeichnet.

Bei der Klimaanlage stellt das Erwärmen der Raumluft den betrachteten Prozess dar. Man kann ein dynamisches System deshalb auch als einen Teil der Welt auffassen, in dem dynamische Prozesse ablaufen. Für Regelungsaufgaben ist der Unterschied zwischen System und Prozess unwesentlich, so dass beide Begriffe synonym verwendet werden.

|| Unter *Steuerung* wird die zielgerichtete Beeinflussung eines dynamischen Systems bezeichnet.

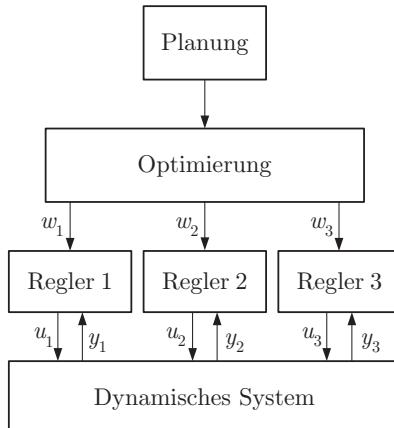


Abb. 1.1: Struktureller Aufbau einer Mehrebenensteuerung

In Abhängigkeit von der Betrachtungsebene können mehrere Arten der Steuerung unterschieden werden (Abb. 1.1). Auf der unteren Ebene wird die Steuergröße  $u_i$  durch den Regler  $i$  direkt in Abhängigkeit von der gemessenen Ausgangsgröße  $y_i$  berechnet. Dies geschieht in sehr kurzen Zeitabschnitten, also kontinuierlich oder quasikontinuierlich. Steuereinrichtung und gesteuertes System stehen in ständiger Wechselwirkung und bilden einen Kreis. Man spricht deshalb von einer Steuerung im geschlossenen Wirkungskreis oder einer *Regelung*. Diese Steuerungsebene steht im Mittelpunkt aller weiteren Betrachtungen. Es wird deshalb an Stelle von „Steuerung“ i. Allg. mit dem Begriff „Regelung“ gearbeitet.

Die höheren Ebenen betreffen längerfristigere Steuerungsaufgaben als die Regelung. Die Optimierung befasst sich mit der Bestimmung von Arbeitspunkten, die im Sinne von Gütekriterien, welche aus Qualitätsparametern, Sicherheitsvorschriften oder ökonomischen Bewertungen abgeleitet werden, besonders günstig sind. Wie die Abbildung zeigt, werden im Ergebnis der Optimierung Vorgaben  $w_i$  für die Ebene der Regelung gemacht. Diese Vorgaben betreffen einen langen Entscheidungshorizont. Für Produktionsprozesse kann schließlich die Ebene des Managements zu den Steuerungsebenen gezählt werden, denn hier werden Entscheidungen getroffen, die das langfristige Verhalten der betrachteten Anlage betreffen. In der Abbildung ist die Produktionsplanung als Beispiel dafür angegeben. Das Planungsergebnis ist ein Zeitplan, der Randbedingungen für die Optimierung festlegt.

Die in vielen Bereichen anwendbaren Begriffe „dynamisches System“ und „Regelung“ sind die Grundlage dafür, dass die Regelungstechnik eine fachübergreifende Ingenieurwissenschaft ist. Ihre Methoden können auf Systeme angewendet werden, deren physikalische Wirkungsprinzipien sich grundlegend voneinander unterscheiden. Diese Tatsache wird durch die vielen in diesem Buch behandelten Regelungsaufgaben aus der Verfahrens- und Energietechnik, dem Maschinenbau, der Gebäudeautomatisierung und aus vielen anderen Bereichen offensichtlich werden.

**Regelungsaufgabe.** Die bisherigen Erläuterungen haben deutlich gemacht, dass sich die Regelungstechnik mit folgender Aufgabenstellung befasst:

**Gegeben** ist ein dynamisches System (*Regelstrecke*, kurz: *Strecke*) mit einer von außen beeinflussbaren Größe (*Stellgröße*) und einer messbaren Größe (*Regelgröße*). Weiterhin ist ein Regelungsziel vorgegeben, das typischerweise die Aufgabe enthält, die messbare Größe auf einem vorgegebenen konstanten Wert zu halten oder in der durch die *Führungsgröße* vorgegebenen Weise zeitlich zu verändern. Gleichzeitig soll die Wirkung der äußeren *Störung* unterdrückt werden.

**Gesucht** ist eine Regeleinrichtung (kurz: *Regler*), die unter Nutzung der gemessenen Werte die *Stellgröße* so vorgibt, dass das geregelte System das Regelungsziel erfüllt.

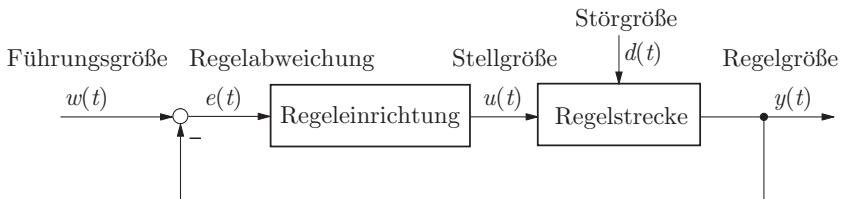


Abb. 1.2: Grundstruktur des Regelkreises

Abbildung 1.2 erläutert diese Aufgabenstellung. Die Regelgröße  $y(t)$  hängt von der Stellgröße  $u(t)$  und einer Störgröße  $d(t)$  ab, die nicht beeinflussbar ist. Ziel der Regelung ist es, die Regelgröße der vorgegebenen Führungsgröße  $w(t)$  nachzuführen, so dass idealerweise  $y(t) = w(t)$  für alle Zeitpunkte  $t$  gilt. Der Regler muss deshalb die Stellgröße  $u(t)$  so vorgeben, dass der Einfluss der Störgröße auf die Regelgröße kompensiert und die Regelgröße der Führungsgröße angepasst wird. Dabei steht dem Regler als Information neben dem gewünschten Wert  $w(t)$  auch der aktuelle Wert  $y(t)$  der Regelgröße zur Verfügung. Als Differenz

$$e(t) = w(t) - y(t)$$

beider Größen kann der Regler die *Regelabweichung* (Regeldifferenz) bestimmen und in Abhängigkeit von dieser die Stellgröße zweckmäßig vorgeben. Der Regler stützt sich also nicht nur auf die Führungsgröße  $w(t)$ , sondern auch auf den aktuellen Istwert  $y(t)$  der Regelgröße. Wenn die Führungsgröße konstant ist ( $w(t) = \bar{w}$ ), bezeichnet man  $\bar{w}$  als Sollwert.

Die beschriebene Regelungsaufgabe wird in diesem Band für Systeme behandelt, die eine Stellgröße und eine Regelgröße haben (einschleifige Regelkreise). Der zweite Band untersucht die Regelungsaufgabe für Strecken mit mehreren Stell- und Regelgrößen (Mehrgrößenregelung).

## 1.2 Prinzipielle Funktionsweise von Regelungen

**Grundstruktur des Regelkreises.** In Abb. 1.3 ist eine gegenüber Abb. 1.2 erweiterte Struktur von Regelkreisen aufgezeichnet. Diese Abbildung zeigt, dass bei Regelungen häufig zwischen der Regelgröße  $y(t)$  und dem Messwert  $y_m(t)$  der Regelgröße unterschieden werden muss, weil das Messglied selbst dynamische Eigenschaften besitzt, aufgrund derer die Messgröße u. U. erheblich von der tatsächlichen Regelgröße abweicht. Dasselbe trifft auf die Eingangsseite der Regelstrecke zu. Der vom Regler vorgegebene Wert  $u(t)$  für die Stellgröße wird durch das Stellglied in den am Prozess wirksamen Wert  $u_R(t)$  umgesetzt. Stellglieder weisen i. Allg. ein eigenes dynamisches Verhalten auf und besitzen sehr häufig nichtlineare Eigenschaften, die sich z. B. in oberen und unteren Schranken für die Stellgröße  $u_R(t)$  oder in einer Ansprechempfindlichkeit bemerkbar machen, aufgrund derer  $u_R(t)$  nur dann verändert wird, wenn sich  $u(t)$  um einen Mindestbetrag verändert. Der Block „Stellglied“ repräsentiert diese typischen Stellgliedeigenschaften.

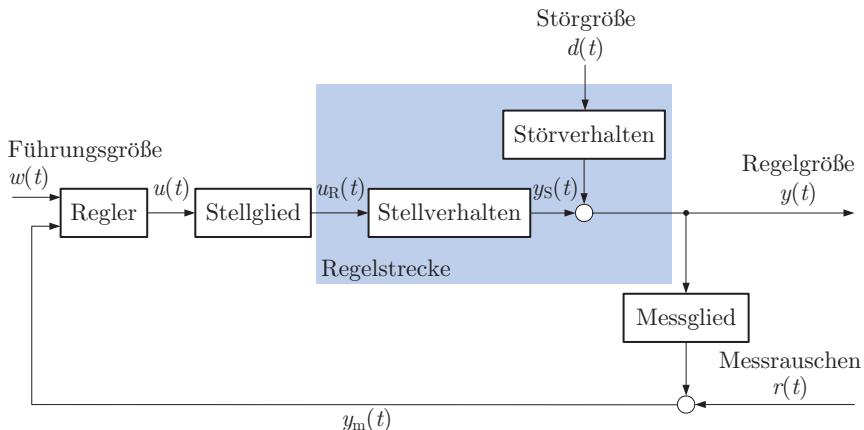


Abb. 1.3: Erweiterte Grundstruktur des Regelkreises

Die Regelgröße hat mit der Stellgröße  $u(t)$  und der Störgröße  $d(t)$  zwei Eingangsgrößen. Wenn man die Wirkung beider Eingänge auf die Regelgröße voneinander trennen will, zerlegt man den Block „Regelstrecke“ aus Abb. 1.2 in zwei Blöcke, die in Abb. 1.3 mit „Stellverhalten“ und „Störverhalten“ bezeichnet sind.

Auch das Reglergesetz kann erweitert werden, so dass der Regler an Stelle der Regelabweichung die Führungsgröße  $w(t)$  und die gemessene Regelgröße  $y_m(t)$  als getrennte Eingangsgrößen erhält. Dies eröffnet z. B. die Möglichkeit, die Führungsgröße zunächst durch ein Vorfilter zu verändern oder das Messrauschen aus der Regelgröße zu filtern, bevor Regel- und Führungsgröße verglichen werden.

In Abhängigkeit von der betrachteten Regelungsaufgabe bzw. den zu untersuchenden Eigenschaften eines geschlossenen Regelkreises wird im Folgenden entweder auf die detaillierte Abb. 1.3 oder die vereinfachte Abb. 1.2 zurückgegriffen. Ab-

bildung 1.2 geht aus Abb. 1.3 durch Zusammenfassung des Stellgliedes, des Stellverhaltens der Strecke und des Messgliedes hervor. Der Vergleich beider Abbildungen zeigt, dass beim vereinfachten Kreis keine Unterschiede zwischen  $u_R(t)$  und  $u(t)$  bzw.  $y_m(t)$  und  $y(t)$  gemacht werden und dass das Stellglied und das Messglied zur Regelstrecke hinzugerechnet werden.

**Prinzipielle Wirkungsweise der Regelung.** Jede Regelung beinhaltet drei wichtige Schritte:

1. **Messen.** Die Regelgröße wird entweder direkt gemessen oder – bei nicht messbaren Regelgrößen wie z. B. Qualitätskennwerten – aus anderen Messgrößen berechnet.
2. **Vergleichen.** Der Wert der Regelgröße wird mit dem Wert der Führungsgröße verglichen. Die Differenz zwischen beiden Größen ist die Regelabweichung  $e(t) = w(t) - y(t)$ .
3. **Stellen.** Aus der Regelabweichung wird unter Berücksichtigung der dynamischen Eigenschaften der Regelstrecke die Stellgröße bestimmt.

**Reglertypen.** Welche Stellgröße  $u(t)$  der Regler bei einer Regelabweichung  $e(t)$  als Eingangsgröße für die Regelstrecke vorgeben soll, wird durch das Reglertypen (1.1) beschrieben, das die allgemeine Form

$$u(t) = k(y(t), w(t)) \quad (1.1)$$

hat und in vielen Fällen als direkte Beziehung zwischen  $e$  und  $u$  geschrieben wird:

$$u(t) = k_R(e(t)). \quad (1.2)$$

Das Reglertypen (also die Funktion  $k$  bzw.  $k_R$ ) kann sehr einfach sein und beispielsweise die Form

$$u(t) = 0,4 e(t)$$

haben, bei der sich der Wert der Stellgröße durch Multiplikation des aktuellen Wertes der Regelabweichung mit 0,4 ergibt. Viele Regler enthalten jedoch dynamische Komponenten wie beispielsweise einen Integrator, der die integrierte Regelabweichung  $e_I(t) = e(0) + \int_0^t e(\tau) d\tau$  ermittelt und dann die Stellgröße

$$u(t) = 0,2 e(t) + 0,8 e_I(t)$$

aus den aktuellen Werten  $e(t)$  und  $e_I(t)$  bestimmt. Bei diesen Reglern hängt der aktuelle Wert  $u(t)$  der Stellgröße nicht nur vom aktuellen Wert, sondern vom Verlauf der Regelabweichung bis zum Zeitpunkt  $t$  ab. Die Funktion  $k$  in Gl. (1.1) ist dann, streng genommen, keine Funktion der reellwertigen Menge der Signalwerte von  $e$  mehr, sondern eine Funktion, die über die Menge der möglichen Zeitverläufe von  $e$

im Intervall  $[0, t]$  definiert ist. Um dies besser zum Ausdruck zu bringen, bezeichnet man den Verlauf der Regelabweichung im angegebenen Intervall mit  $e_{[0,t]}$  und schreibt das Reglergesetz (1.2) in der Form

$$u(t) = k_R(e_{[0,t]}), \quad (1.3)$$

Ganz allgemein kann man jedes dynamische System als Regler einsetzen. Ein wichtiges Ziel der in diesem Buch behandelten Entwurfsmethoden besteht in der Auswahl geeigneter dynamischer Systeme, die als Regler eingesetzt das Verhalten des geschlossenen Regelkreises in der gewünschten Weise beeinflussen.

Obwohl viele Regelungsaufgaben mit einem sehr einfachen Reglergesetz gelöst werden können, ist die Auswahl des Reglergesetzes für eine vorgegebene Regelstrecke und für vorgegebene Güteforderungen nicht einfach. Der Grund dafür liegt in der Dynamik der Regelstrecke. Im einfachsten Fall äußert sich diese Dynamik in einer zeitlichen Verzögerung, mit der die Regelgröße auf die Stellgröße reagiert. Wie die folgenden einfachen Beispiele zeigen, muss die Regelung diese zeitliche Verzögerung unbedingt berücksichtigen.

### **Beispiel 1.1 Temperaturregelung einer Dusche**

Stellen Sie sich vor, Sie stehen unter einer Dusche mit einer Einhebelmischbatterie. Die Dusche ist die Regelstrecke mit der Stellung der Mischbatterie als Stellgröße und der Temperatur des Wassers an der Brause als Regelgröße. Sie selbst übernehmen die Aufgabe des Reglers, die Wassertemperatur Ihren gefühlsmäßigen Vorgaben anzupassen. Sie verstehen den Mischbatteriehebel in Abhängigkeit von der Regelabweichung, also der Differenz aus der „gemessenen“ und der „vorgegebenen“ Temperatur. Dabei müssen Sie berücksichtigen, dass aufgrund des Transportweges des Wassers von den Ventilen zur Brause eine Zeitverzögerung eintritt. Sie müssen warten, bis die Wirkung Ihrer Ventilverstellung als Temperaturveränderung fühlbar wird. Reagieren Sie zu heftig, so verpassen Sie sich selbst Hitze- oder Kälteschauer! □

### **Beispiel 1.2 Positionierung einer Last mit einem Portalkran**

An der Laufkatze eines Portalkrans hängt ein Haken mit einer Last, die zu einem vorgegebenen Punkt transportiert werden soll. Zur Vereinfachung der Aufgabe wird nur die horizontale Bewegung  $y(t)$  der Last betrachtet. Das Regelungsziel besteht in der Bewegung der Last zum Punkt  $\bar{w}$ , d. h., es soll für einen möglichst frühen Zeitpunkt  $T$  die Beziehung  $y(T) = \bar{w}$  gelten. Außerdem wird verlangt, dass die Last nicht schwingt, d. h., dass  $\dot{y}(T) = 0$  gilt. Als Kranführer können Sie die Beschleunigung  $u(t)$  der Laufkatze beeinflussen. Sie übernehmen dabei die Funktion des Reglers.

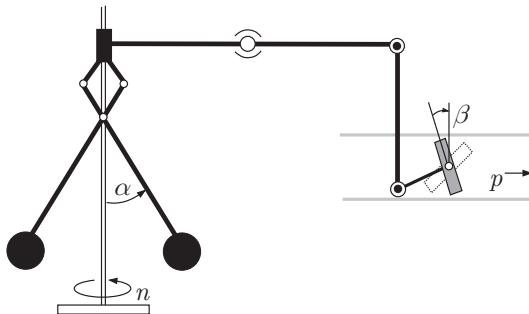
Es ist offensichtlich, dass es nicht ausreicht, die Laufkatze senkrecht über die vorgegebene Position  $\bar{w}$  zu fahren, denn dann würde die Last über dieser Position pendeln und erst nach sehr langer Zeit am Zielpunkt zur Ruhe kommen. Der Kranfahrer muss die Dynamik der aus Laufkatze, Haken und Last bestehenden Regelstrecke beachten. Dafür nutzt ein geübter Kranfahrer kein mathematisches Modell, sondern ein mentales Modell, das er aus Erfahrung besitzt. Er fährt die Laufkatze über die vorgegebene Position  $\bar{w}$  hinweg, um durch ein anschließendes Zurückfahren der Laufkatze die Pendelbewegung der Last zu dämpfen.

Offensichtlich ändert sich die Regelstrecke in Abhängigkeit von der Last. Dies hat Auswirkungen auf die Wahl der Stellgrößen, obwohl das Regelungsziel unverändert bleibt.  $\square$

### Beispiel 1.3 Regelung einer Dampfmaschine

Der Fliehkraftregler für Dampfmaschinen ist einer der ersten industriell genutzten Regler. Die Mitte des 18. Jahrhunderts vor allem im Bergbau eingesetzten Dampfmaschinen mussten unterschiedliche mechanische Arbeitsgeräte antreiben und wurden je nach Bedarf sehr unterschiedlich belastet. Da es zunächst keine Drehzahlregelung gab, änderte sich die Drehzahl in Abhängigkeit von der Last.

J. WATT<sup>1</sup> erfand eine einfache mechanische Rückführung von der Drehzahl auf das Dampfeinlassventil, die diese Drehzahlschwankungen dämpfte. Die Achse des in Abb. 1.4 gezeigten Fliehkraftreglers ist mit der Dampfmaschine verbunden, so dass die Drehzahl  $n$  dieser Anordnung proportional zur Drehzahl der Maschine ist. Aufgrund der gezeigten mechanischen Verbindung ist der Klappenwinkel  $\beta$  vom Winkel  $\alpha$  abhängig, der seinerseits von der Drehzahl  $n$  abhängt. Wird die Drehzahl aufgrund einer Laständerung größer, so hebt die größer werdende Fliehkräfte die beiden rotierenden Massen an und  $\alpha$  vergrößert sich. Damit verkleinern sich  $\beta$ , der Druck  $p$  und der Massenstrom des Dampfes in den Kolben. Auf diese Weise wird der vergrößerten Drehzahl entgegengewirkt, denn mit kleinerer Dampfzufuhr verringert sich die Drehzahl der Maschine.



**Abb. 1.4:** Prinzip des Fliehkraftreglers

Die gezeigte Anordnung weist auf eine wichtige Eigenschaft von Regelkreisen hin: Der Regler muss der Ursache der Drehzahlabweichung *entgegenwirken*. Der Wirkungsweg von der aktuellen Drehzahl über den Regler und das Dampfeinlassventil zurück zur Drehzahl muss ein Minuszeichen enthalten - die Rückkopplung muss also eine *Gegenkopplung* sein. Was passiert, wenn die Wirkungskette dieses Minuszeichen nicht enthält, kann man sich leicht überlegen, wenn man die Klappe des Dampfeinlassventils in der gestrichelt gezeigten Weise einbaut.  $\square$

Das *Know-how* des Regelungstechnikers liegt in der Art und Weise, wie er für ein gegebenes Regelungsproblem das Reglergesetz auswählt. Auch wenn dabei als

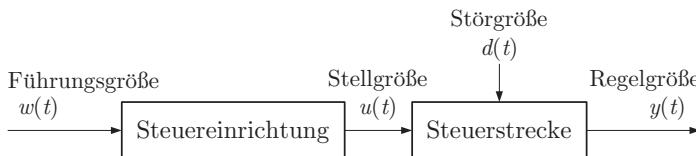
<sup>1</sup> JAMES WATT (1736 – 1819), britischer Ingenieur, verbesserte die Dampfmaschine u. a. durch den Einbau einer Drehzahlregelung

Ergebnis letzten Endes ein sehr einfacher Zusammenhang zwischen  $e(t)$  und  $u(t)$  herauskommt, kann der Weg zu diesem Reglertyp lang und beschwerlich sein. Aus diesem Grund wird mit dem Entwurf des Reglertyps erst im Kap. 7 begonnen. Alle vorhergehenden Erläuterungen dienen der Beschreibung und Analyse dynamischer Systeme, auf denen der Reglerentwurf aufbaut.

**Vergleich von Regelung und Steuerung in der offenen Kette.** Prinzipiell kann ein dynamisches System auch ohne Rückführung gesteuert werden (Abb. 1.5). In einer Steuerkette wird die Stellgröße direkt aus der Führungsgröße ermittelt, d. h., es gilt

$$u(t) = k_S(w(t)).$$

Man spricht dann von der Steuerung in der offenen Wirkungskette oder von *Steuerung* im engeren Sinne des Wortes. Das betrachtete dynamische System heißt Steuerstrecke, die steuernde Einheit Steuereinrichtung (kurz: Steuerung).



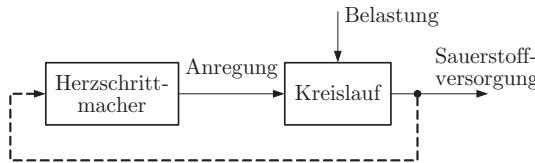
**Abb. 1.5:** Steuerung in der offenen Wirkungskette

Damit in einer Steuerkette das gewünschte Ziel  $y(t) = w(t)$  erreicht wird, müssen zwei Bedingungen erfüllt sein. Erstens muss genau bekannt sein, welche dynamischen Eigenschaften die Steuerstrecke besitzt. Unter Beachtung dieser Eigenschaften kann die Stellgröße so ausgewählt werden, dass die Ausgangsgröße der Steuerstrecke dem zeitlichen Verlauf von  $w(t)$  möglichst nahe kommt. Zweitens darf die Steuerstrecke nicht gestört sein. Da die Steuereinrichtung keine Informationen über die Störgröße erhält, kann sie nicht auf die Störung reagieren. In der Steuerkette überträgt sich die Wirkung der Störung ungemindert auf die Regelgröße.

Wenn die genannten Bedingungen erfüllt sind, kann man das betrachtete System in der offenen Wirkungskette schneller auf den Sollwert bringen als bei einer Regelung. Aufgrund dieses Vorteils gegenüber einer Regelung ergänzt man Regelungen häufig durch eine Vorsteuerung, die eine direkte Wirkung von der Führungsgröße auf die Stellgröße darstellt (Abb. 1.7).

#### Beispiel 1.4 Herzschrittmacher

Herzschrittmacher sind ein Beispiel dafür, dass man unter bestimmten Bedingungen Steuerungen in der offenen Wirkungskette einsetzen muss, obwohl die betrachtete Aufgabe eigentlich nur durch eine Regelung gelöst werden kann (Abb. 1.6). Durch den Herzschrittmacher soll der Kreislauf so aktiviert werden, dass die Sauerstoffversorgung des Körpers sichergestellt ist. Dafür regt der Schrittmacher den Herzmuskel regelmäßig zur Aktivität an.



**Abb. 1.6:** Herzschrittmacher als Steuereinrichtung in einer offenen Wirkungskette

Ein Kreislauf ohne Herzschrittmacher passt seine Aktivität der körperlichen Belastung an, die als Störgröße auf den Sauerstoffgehalt im Blut und in der Muskulatur wirkt. Dabei wirken Sensoren, die eine „Sauerstoffschuld“ erkennen.

Für den Herzschrittmacher müsste man mit derselben Regelungsstruktur arbeiten, denn in der offenen Wirkungskette ist die Unterversorgung mit Sauerstoff bei erhöhter Belastung nicht zu erkennen. Dass Herzschrittmacher dennoch als Steuerung in der offenen Kette wirken, hängt an dem bisher ungelösten Problem, den Sauerstoffgehalt im Blut kontinuierlich mit akzeptablem Aufwand zu messen. □

**Vorteile der Regelung gegenüber der Steuerung in der offenen Wirkungskette.** Aus diesen Betrachtungen wird offensichtlich, dass die Verwendung einer Regelung gegenüber der Steuerung in der offenen Wirkungskette zwei entscheidende Vorteile besitzt. Durch die Steuerung im geschlossenen Wirkungskreis (Regelung) kann das Regelungsziel  $y(t) \stackrel{!}{=} w(t)$  auch dann in guter Näherung erreicht werden,

- wenn die Regelstrecke instabil ist,
- wenn die Regelstrecke durch nichtmessbare Störungen beeinflusst wird und
- wenn die dynamischen Eigenschaften der Regelstrecke nicht genau bekannt sind oder wenn sie sich zeitlich verändern.

Die erste Eigenschaft wird als *Stabilisierung*, die zweite als *Störkompensation* und die dritte Eigenschaft als *Robustheit* bezeichnet. Auf alle drei wird später ausführlich eingegangen. Hier sei nur erwähnt, dass die Störkompensation möglich ist, weil der Regler die Auswirkungen der Störung auf die Regelgröße kennt und ihr durch die geeignete Wahl der Stellgröße entgegenwirken kann. Die Robustheit hat zur Folge, dass ein an einem Regelstreckenmodell entworfener Regler auch dann noch eingesetzt werden kann, wenn sich die Eigenschaften der Regelstrecke wesentlich von denen des Modells unterscheiden.

Um dies zu verdeutlichen, sei an das o. a. Beispiel der Temperaturregelung einer Dusche erinnert. Diese Regelungsaufgabe wird i. Allg. gelöst, ohne vorher die Dusche als nichtlineares System mit Totzeit – wie es in späteren Kapiteln genannt wird – zu modellieren. Grobe Kenntnisse über die Funktionsweise sind ausreichend. Außerdem kann die Temperaturregelung auch dann erfolgreich ausgeführt werden, wenn das heiße Wasser langsam kälter wird, also eine äußere Störung wirkt. Die Dusche in der offenen Wirkungskette zu steuern hieße, den Hebel der Mischbatterie ohne Berücksichtigung der tatsächlich eintretenden Wassertemperatur auf eine vorgegebene Winkelstellung einzustellen und sich dann unter die Dusche zu stellen.

Die beiden genannten Vorteile der Regelung beruhen auf dem Prinzip der *Rückkopplung*. Jede Rückkopplung besitzt die Eigenschaft, dass Informationen über das aktuelle Verhalten der Regelstrecke zur Regeleinrichtung zurückgeführt werden. Der Regler kann deshalb die Stellgröße in Abhängigkeit von den sich tatsächlich einstellenden Werten der Regelgröße – und nicht nur in Abhängigkeit von dem mit einem Modell vorhergesagten Verhalten der Regelstrecke – festlegen.

|| Die Rückkopplung von Informationen ist das wichtigste Grundprinzip der Regelungstechnik.

Um die Steuerung in der offenen Wirkungskette von der im geschlossenen Wirkungskreis zu unterscheiden, wird im Folgenden mit den Begriffen *Steuerkette* und *Regelkreis* gearbeitet. Diesen deutschen Bezeichnungen entsprechen im englischen Sprachraum die Worte *feedforward control* bzw. *feedback control*. In der deutschsprachigen Literatur wird der Begriff „*Steuerung*“ vor allem für diskrete Steuerungen verwendet, die auf *diskrete* Messwerte mit diskreten Stelleingriffen reagieren und dabei einen Regelkreis bilden, der im Unterschied zu dem hier behandelten Regelkreis nicht kontinuierlich, sondern nur zu den Zeitpunkten arbeitet, an denen die Steuerstrecke Messereignisse erzeugt.

**Kombination von Regelung und Vorsteuerung.** Die wünschenswerten Eigenschaften einer Regelung in Bezug auf Störung und Modellunbestimmtheiten einerseits und die Möglichkeit zu einer schnelleren Umsteuerung eines Systems durch eine Steuerung in der offenen Wirkungskette andererseits sind der Grund dafür, dass man beide Arten von Steuerungen in der Praxis kombiniert (Abb. 1.7). Die Stellgröße  $u$  setzt sich dann aus einem Anteil  $u_V$  der Vorsteuerung und einem Anteil  $u_R$  der Regelung zusammen. Dabei wird die Vorsteuerung so gewählt, dass die Strecke möglichst schnell der Führungsgröße  $w$  nachgeführt wird. Die Regelung sorgt dafür, dass die Störung  $d$  sowie die Wirkung von Modellunbestimmtheiten ausgeglichen werden. Man bezeichnet den Regelkreis in Abb. 1.7 auch als *Regelkreis mit zwei Freiheitsgraden*, weil man mit dem Regler und der Vorsteuerung zwei Blöcke frei entwerfen kann.

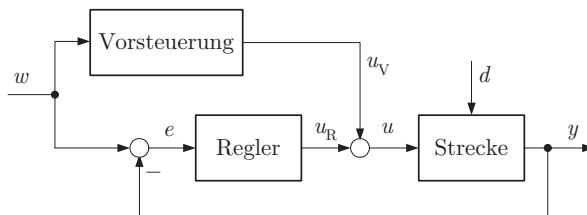


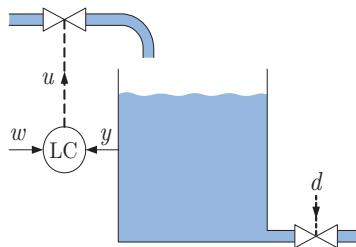
Abb. 1.7: Regelkreis mit zwei Freiheitsgraden

Da die beiden Bestandteile einer Regelung mit zwei Freiheitsgraden unterschiedliche Aufgaben zu erfüllen haben, kann man sie weitgehend unabhängig voneinander entwerfen:

- **Stabilisierung und Störkompensation:** Der Regler muss so gewählt werden, dass der Regelkreis stabil ist und dabei gegebenenfalls eine instabile Regelstrecke stabilisiert wird und dass der Regelkreis ein gutes Störverhalten besitzt.
- **Führungsverhalten:** Die Vorsteuerung wird im Sinne eines guten Führungsverhaltens entworfen.

### Beispiel 1.5 Füllstandsregelung mit Vorsteuerung

Es wird die Füllstandsregelung (LC - level control) aus Abb. 1.8 betrachtet, bei der die Stellgröße  $u$  den Volumenstrom in einen Behälter beeinflusst und das Regelungsziel darin besteht, den Füllstand des anfangs leeren Behälters auf den vorgegebenen Sollwert  $w = 1 \text{ m}$  zu bringen und dort zu halten. Die Entnahme der Flüssigkeit durch das untere Ventil wirkt als Störung  $d$ .



**Abb. 1.8:** Füllstandsregelung

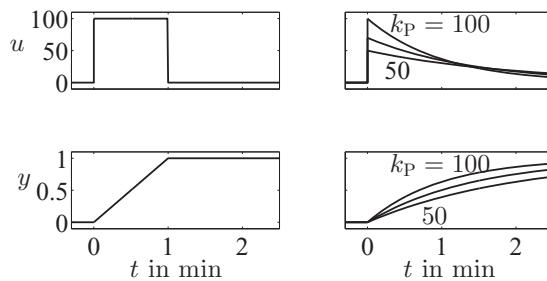
Mit einer Steuerung in der offenen Wirkungskette kann man den Behälter sehr schnell auf den Füllstand von 1 m bringen, indem man die Stellgröße 1 Minute lang auf ihren maximalen Wert  $100 \frac{1}{\text{min}}$  stellt (Abb. 1.9 (links)). Die Zeit von 1 Minute ergibt sich aus dem Behälterquerschnitt von  $0,1 \text{ m}^2$  und dem maximalen Volumenstrom.

Verwendet man eine Regelung, so kann die Stellgröße nicht denselben Verlauf wie bei einer Steuerung in der offenen Wirkungskette haben, denn sie ist jetzt von der Regelabweichung  $e(t) = w(t) - y(t)$  abhängig, die während des Füllvorganges ständig kleiner wird. Dementsprechend nimmt auch der Wert der Stellgröße ab und der Füllvorgang wird langsamer.

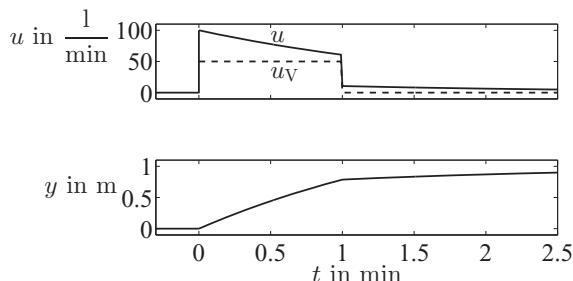
Abbildung 1.9 (rechts) zeigt den Füllvorgang bei einer proportionalen Regelung

$$u(t) = k_P e(t) \quad (1.4)$$

mit  $w(t) = 1 \text{ m}$  bei unterschiedlicher Reglerverstärkung  $k_P$ . Für  $k_P = 100$  hat die Stellgröße zu Beginn des Füllvorganges ihren maximalen Wert von  $100 \frac{1}{\text{min}}$ , so dass man diesen Fall am bestem mit der Steuerung in der offenen Wirkungskette vergleichen kann. Der Füllvorgang dauert bei der Regelung ungefähr 2,5 mal so lange wie vorher.

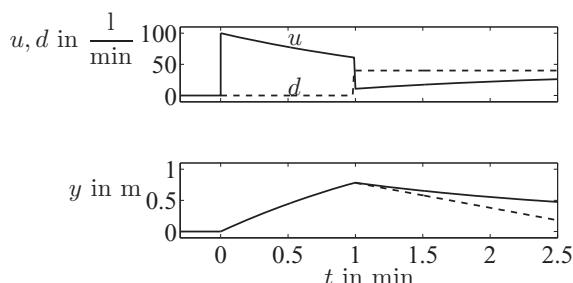


**Abb. 1.9:** Verhalten des Behälters bei einer Steuerung in der offenen Wirkungskette (links) und einer Regelung (rechts)



**Abb. 1.10:** Verhalten des Behälters bei einer Regelung mit Vorsteuerung

Aus dem Blockschaltbild (Abb. 1.7) ist offensichtlich, dass eine Vorsteuerung nur bei genauer Kenntnis der Anfangsfüllhöhe und des Behälterquerschnitts ihre Aufgabe erfüllen kann. Wäre der Behälter beispielsweise schon etwas mit Flüssigkeit gefüllt oder hätte der Behälter einen etwas kleineren Querschnitt als bei der Berechnung der Steuergröße angenommen wurde, so würde der Füllstand bei der Steuerung in der offenen Wirkungskette den gegebenen Sollwert überschreiten. Im Unterschied dazu kann die Regelung den Behälter von dem veränderten Anfangsfüllstand aus und bei verändertem Behälterquerschnitt auf den gewünschten Sollwert füllen.



**Abb. 1.11:** Störverhalten des Behälters

Deshalb verwendet man in der Praxis häufig eine Kombination von Vorsteuerung und Regelung. Der im oberen Teil von Abb. 1.10 gezeigte Verlauf der Stellgröße  $u$  ergibt sich aus der gestrichelt dargestellten Vorsteuerung  $u_V$  und der durch eine proportionale Regelung mit dem Reglerparameter  $k_R = 50$  erzeugten Stellgröße  $u_R$ . Die Amplitude der Vorsteuerung und der Reglerparameter wurden so gewählt, dass die Stellgrößenbeschränkung nicht überschritten wird, so dass alle drei Abbildungen untereinander vergleichbar sind. Offenbar wird der Behälter jetzt schneller gefüllt als bei einer reinen Regelung.

Der Vorteil der Kombination von Vorsteuerung und Regelung wird sichtbar, wenn man den Füllvorgang durch Entnahme von Flüssigkeit stört. Der Volumenstrom  $d$  aus dem Behälter ist im oberen Teil von Abb. 1.11 durch eine gestrichelte Linie eingetragen. Ohne Regelung würde der Füllstand stark abfallen, wie es die gestrichelte Linie im unteren Teil der Abbildung zeigt. Durch die Regelung wird die Stellgröße angehoben, so dass die Störung wenigstens teilweise kompensiert wird. Die Abb. 1.10 und 1.11 zeigen im Vergleich mit Abb. 1.9 (rechts) den Vorteil einer Kombination von Vorsteuerung und Regelung: Der Füllvorgang ist schneller und die Steuerung kann Störungen kompensieren. Wie in Abb. 1.10 gezeigt ist, trägt häufig die Vorsteuerung  $u_V$  den größeren Anteil zur Amplitude der Stellgröße  $u$  bei ( $u_V(t) > u_R(t)$ ).

Weshalb die hier verwendete proportionale Regelung die Störung nicht vollständig kompensieren kann, wird später untersucht (Aufg. 7.6). □

### 1.3 Lösungsweg für Regelungsaufgaben

Gegenstand dieses Lehrbuches ist das Problem, für eine gegebene Regelungsaufgabe ein geeignetes Reglergesetz  $k_R$  zu bestimmen bzw. gegebenenfalls zu erkennen, dass und warum die Regelungsaufgabe nicht lösbar ist. Der dabei verwendete Lösungsweg umfasst die folgenden sieben Schritte:

1. **Formulierung der Regelungsaufgabe:** In der Aufgabenstellung wird festgehalten, welche Eigenschaften der geschlossene Regelkreis besitzen soll. Dabei ist es vom Anwendungsfall abhängt, ob die Regelung vorrangig zur Kompensation von Störungen eingesetzt werden soll (Festwertregelung), die Regelgröße einer Solltrajektorie nachführen soll (Folgeregelung) oder die dynamischen Eigenschaften der Regelstrecke verändern soll. Als Beispiele für diese drei Aufgabenklassen werden später u. a. die Frequenzregelung von Elektroenergienetzen (Aufgabe 7.4), die Drehzahlregelung eines Gleichstrommotors (Beispiel 11.2) und die Dämpfung der Rollbewegung eines Schiffes (Aufgabe 10.15) behandelt.
2. **Auswahl der Regelgröße:** Welche Größe bei dieser Regelungsaufgabe als Regelgröße fungiert, geht in vielen Fällen direkt aus den Güteforderungen hervor. Schwierigkeiten entstehen, wenn wichtige Signale nicht messbar sind und deshalb anstelle der originären Regelgröße eine gut messbare Ersatzgröße als Ausgang  $y(t)$  betrachtet werden muss. Das in Aufgabe 7.4 behandelte Netzkennlinienverfahren für die Leistungsregelung von Elektroenergienetzen ist ein Beispiel dafür, dass durch eine geschickte Wahl einer Ersatzregelgröße die Regelungsziele auch bei komplexen Wirkungsmechanismen in der Regelstrecke erfüllt werden können.

3. **Auswahl der Stellgröße:** Häufig stehen mehrere Signale als mögliche Stellgrößen zur Verfügung. Eine Analyse der physikalischen Wirkprinzipien muss dann ergeben, welche dieser Größen einen ausreichend großen und wenig verzögerten Einfluss auf die Regelgröße hat. Geringe Kosten für das Stellglied und eine möglichst kleine Erregung anderer Signale sind weitere Entscheidungskriterien.
4. **Modellierung der Regelstrecke:** Grundlage aller weiteren Lösungsschritte ist ein mathematisches Modell der Regelstrecke, das in diesem Schritt aufgestellt wird. Die Modellierung führt häufig zunächst auf das im Kap. 4 eingeführte Zustandsraummodell, aus dem entsprechend Kap. 6 ein Modell im Frequenzbereich berechnet werden kann, auf das sich die in diesem Band behandelten Entwurfsverfahren beziehen. Mit dem Modell können wichtige Eigenschaften der Regelstrecke wie die Pole und Nullstellen ermittelt werden (Kap. 5 und 6).
5. **Reglerentwurf:** Der wichtigste Schritt bei der Lösung von Regelungsaufgaben besteht im Reglerentwurf, also der Ermittlung eines Reglertyps  $k_R$  in Gl. (1.3), mit dem der geschlossene Kreis die Güteforderungen erfüllt. Obwohl sich die Kap. 9 bis 12 auf den Entwurf einer reinen Rückführsteuerung (1.3) konzentrieren, enthält das Repertoire des Regelungstechnikers vielfältige weitere Lösungsansätze. So kann eine Vorsteuerung verwendet werden, um das Führungsverhalten des Regelkreises schneller zu machen (siehe Abschn. 7.5) oder der Regelkreis durch die Verwendung von Hilfsstellgrößen oder Hilfsregelgrößen in mehrere verkoppelte Regelkreise zerlegt werden (Kap. 13).
6. **Analyse des Verhaltens des geschlossenen Regelkreises:** Da die meisten Entwurfsverfahren die in der Regelungsaufgabe genannten Güteforderungen nicht direkt berücksichtigen, sondern in Ersatzforderungen an den Regelkreis bzw. die offene Kette überführen, muss vor der Realisierung der Regelung überprüft werden, ob der Regler die ursprünglichen Güteforderungen erfüllt. Dieser Schritt beruht im Wesentlichen auf Simulationsuntersuchungen des Regelkreises, in die man auch die im Modell vernachlässigten Aspekte wie Stellgrößenbeschränkungen, Messrauschen, nichtlineare Wirkungsabläufe oder Modellunbestimmtheiten einbeziehen kann.
7. **Realisierung des Reglers:** Die Realisierung des Reglertyps  $k_R$  erfolgt heute weitgehend unter Verwendung von Mikrorechnern, deren Reglerprogramme entsprechend der Struktur und der Parameter des Reglertyps  $k_R$  zu konfigurieren und parametrieren sind.

Die Lösung der Schritte 1 bis 3 erfordert gute Kenntnisse und Erfahrungen aus dem Anwendungsgebiet. Als wichtiges Ergebnis entsteht das Blockschaltbild des Regelkreises, von dem im Folgenden stets ausgegangen wird. Die hier behandelten Methoden dienen vor allem zur Durchführung der Schritte 4 bis 6. Die gerätetechnische Realisierung wird nur insoweit betrachtet, wie sie die Wahl des Reglertyps beeinflusst.

**Modellbasierte Verfahren der Regelungstechnik.** Die wichtigsten Analyse- und Entwurfsverfahren der Regelungstechnik beziehen sich auf ein Modell der Regelstrecke, weshalb man von *modellbasierten Verfahren* spricht. Das dabei entstehende Reglertesetz  $k_R$  muss jedoch das Modell der Regelstrecke nicht enthalten. Entscheidend für das Attribut „modellbasiert“ ist, dass der Reglerentwurf mit Hilfe des Regelstreckenmodells erfolgt. Einige moderne Entwurfsverfahren führen jedoch dazu, dass das Streckenmodell auch ein Bestandteil des Reglerteszes ist, wie beispielsweise die im Abschn. 12.2 behandelte IMC-Regelung.

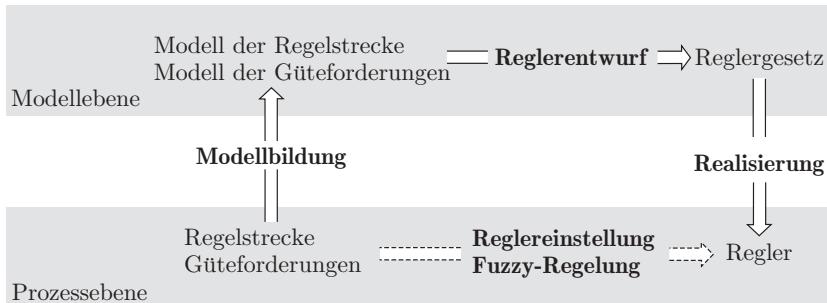


Abb. 1.12: Prinzipieller Lösungsweg für Regelungsaufgaben

Die Lösungsschritte 4 bis 6, auf die sich dieses Lehrbuch konzentriert, sind in Abb. 1.12 dargestellt. Es wird zwischen der Prozessebene und der Modellebene unterschieden. Ausgangs- und Endpunkt für Regelungsaufgaben ist die Prozessebene, auf der die Regelstrecke als Gerät vor dem Betrachter steht und der Regler als neue Komponente in Betrieb genommen werden soll. Demgegenüber wird auf der Modellebene mit mathematischen Beschreibungen für die Regelstrecke, die Güteforderungen und das Reglertesetz gearbeitet.

Mit der Modellbildung wird der Schritt von der Prozessebene zur Modellebene vollzogen. Die Analyse der Regelstrecke, der Reglerentwurf und die Analyse des Regelkreisverhaltens erfolgen auf der Modellebene. Um den Regler in Betrieb zu nehmen, muss das Reglertesetz gerätetechnisch realisiert werden, womit der Schritt zurück zur Prozessebene vollzogen wird.

**Reglereinstellung und Fuzzyregelung.** Der alternative (nicht modellbasierte) Weg für die Lösung von Regelungsaufgaben ist in Abb. 1.12 durch den gestrichelten Pfeil auf der Prozessebene eingetragen. Bei diesem Lösungsweg wird versucht, die häufig recht aufwändige Modellbildung zu umgehen und den Regler direkt am Prozess einzustellen. Dieser Lösungsweg verwendet die im Abschn. 9.4 behandelten Einstellregeln und wird bei der hier nicht behandelten *Fuzzyregelung* beschritten, bei der das als bekannt vorausgesetzte Reglertesetz in Form von Regeln notiert und mit Hilfe eines Verfahrens zur Verarbeitung unscharfer Regeln realisiert wird.

## 1.4 Übersicht über die theoretischen Grundlagen der Regelungstechnik

Die Methoden der Regelungstechnik dienen dem Ziel, Kriterien, Richtlinien und systematische Verfahren für die Auswahl des Reglergesetzes  $k_R$  zu finden. Grundlagen dafür bilden Methoden zur Beschreibung dynamischer Systeme und zur Analyse von Regelkreisen. Die Modellbildung, die Analyse dynamischer Systeme und der Reglerentwurf bilden die drei Schwerpunkte dieses Buches.

**Modellbildung.** Der erste Teil dieses Buches befasst sich mit der Modellbildung. Für ein dynamisches System sind Modelle aufzustellen, die für die Analyse des Regelstreckenverhaltens und für den Entwurf von Reglern verwendet werden können. Dabei wird in drei Schritten vorgegangen:

1. Das im Kap. 3 behandelte Blockschaltbild zeigt die Gliederung des Systems in seine Elemente und deren Verkopplung, gibt jedoch die dynamischen Eigenchaften der Elemente noch nicht genau wieder. Dennoch erweist sich diese strukturelle Beschreibung als aussagekräftig und übersichtlich genug, um wichtige Phänomene von Regelkreisen erklären zu können.
2. Modelle in Form von Differentialgleichungen beschreiben das zeitliche Verhalten dynamischer Systeme quantitativ exakt. Im Kap. 4 wird das Zustandsraummodell als eine standardisierte Modellform eingeführt, auf der viele Analyse- und Entwurfsverfahren für Regelkreise beruhen.
3. Für den Reglerentwurf spielt neben dem zeitlichen Verhalten auch das Verhalten dynamischer Systeme im Frequenzbereich eine wichtige Rolle. Diese Form der Systembeschreibung wird im Kap. 6 eingeführt.

**Analyse rückgekoppelter Systeme.** Die zweite Grundlage für die Lösung von Regelungsaufgaben bilden Verfahren zur Analyse rückgekoppelter dynamischer Systeme.

1. Im Kap. 5 wird gezeigt, wie mit Hilfe des Zustandsraummodells für eine gegebene Eingangsgröße  $u(t)$  die durch das System erzeugte Ausgangsgröße  $y(t)$  berechnet werden kann. Ein anderer Weg zur Berechnung des Eingangs-Ausgangs-Verhaltens beruht auf der Verwendung der im Kap. 6 eingeführten Übertragungsfunktion.
2. Neben den quantitativ exakten Verhaltensbeschreibungen spielt eine qualitative Bewertung der Eigenschaften der Regelstrecke bzw. des Regelkreises eine große Rolle. Diese Bewertung beruht auf der Zerlegung des Systems in elementare Übertragungsglieder, von denen nicht die exakten Parameterwerte, sondern deren Zugehörigkeit zur Klasse der proportionalen, integralen oder differenzierenden Übertragungsglieder maßgebend sind. Diese Klassifikation wird in den Abschnitten 5.6 und 6.7 erläutert.

3. Um Aussagen über die Lösbarkeit von Regelungsaufgaben sowie über die Art der eingesetzten Regler machen zu können, wird im Kap. 7 gezeigt, wie das stationäre Verhalten und das Übergangsverhalten von Regelkreisen durch die Wahl des Reglers beeinflusst werden, welche Regelgüte erreicht werden kann bzw. welche Entwurfskompromisse gemacht werden müssen.
4. Die Stabilitätsanalyse von rückgekoppelten Systemen spielt eine zentrale Rolle beim Reglerentwurf, wobei die im Kap. 8 behandelten Stabilitätskriterien eingesetzt werden.

**Reglerentwurf.** Der dritte Teil des Lehrbuches behandelt Verfahren zum Reglerentwurf mit folgenden Schwerpunkten:

1. Kapitel 9 gibt eine Übersicht über die Entwurfsverfahren und behandelt die Regereinstellung ohne Modell.
2. Zwei ausführlich behandelte Entwurfsverfahren beruhen auf der Konstruktion der Wurzelortskurve (Kap. 10) bzw. der Veränderung des Frequenzganges der offenen Kette (Kap. 11).
3. Weitere Entwurfsverfahren werden im Kap. 12 behandelt, insbesondere solche, bei denen der Regler das Regelstreckenmodell enthält.
4. Einen Ausblick auf mehrschleifige Regelkreise gibt das Kap. 13.

Mit den in diesem Band behandelten Methoden für einschleifige Regelungen werden die Grundlagen für die Lösung von Regelungsaufgaben gelegt. Vermischte Regelungen, Mehrgrößenregelungen und dezentrale Regelungen beruhen ebenfalls auf den in diesem Band eingeführten Modellen und Analyseverfahren. Diese Themen sind Gegenstand des zweiten Bandes. Dort werden die bei Mehrgrößensystemen auftretenden neuen dynamischen Phänomene, die zusätzlichen Freiheitsgrade von Mehrgrößenreglern und die Entwurfsverfahren für Systeme mit mehreren Stell- und Regelgrößen erläutert. Außerdem wird mit der digitalen Regelung ein für die technische Realisierung von Reglern wichtiges Thema behandelt.

## Literaturhinweise

Es gibt zahlreiche Abhandlungen zur Entstehung der Regelungstechnik als eigenständige Disziplin, beispielsweise in den Sonderausgaben des *IEEE Control System Magazine* [12, 19] und des *European Journal of Control* [13]. Als erste Veröffentlichung auf dem Gebiet der Regelungstechnik gilt die Arbeit von J. C. MAXWELL von 1868 [76], in der die Differentialgleichung des geschlossenen Regelkreises angegeben wird, wobei es wie bei vielen Veröffentlichungen dieser Zeit zunächst um die Regelung von Arbeitskraftmaschinen ging.

Die Entwicklung der Regelungstechnik in Deutschland wird in [29] dargestellt.

# 2

## Beispiele für technische und nichttechnische Regelungsaufgaben

An vielfältigen Beispielen illustriert dieses Kapitel das breite Einsatzgebiet der Regelungstechnik und weist auf wichtige Randbedingungen für die Lösung von Regelungsaufgaben hin. Es zeigt dabei, dass sich die aus unterschiedlichen Anwendungsbereichen stammenden Aufgaben in einheitlicher Weise systemtheoretisch formulieren lassen.

### 2.1 Gebäudeautomatisierung

Die Gebäudeautomatisierung befasst sich mit Steuerungen und Regelungen zur Herstellung und Aufrechterhaltung eines vorgegebenen Raumklimas. Dieses weite Feld reicht von der Regelung der Raumtemperatur bis zur Klimatisierung großer Räume, das einen ausreichenden Luftaustausch und die Sicherung einer angemessenen Luftfeuchtigkeit einschließt. Als wichtige Aufgabe wird im Folgenden auf die Raumtemperaturregelung eingegangen.

Die Regelung der Raumtemperatur ist notwendig, weil die Temperatur durch unterschiedliche Störgrößen wie Sonneneinstrahlung, Lüftung und die Anwesenheit von Personen beeinflusst wird, die Führungsgröße jedoch einen konstanten Wert vorschreibt. Im einfachsten Fall wird die Raumtemperatur einer Wohnung geregelt (Abb. 2.1 (oben)). Durch den Temperaturregler TC wird der Brenner solange eingeschaltet, bis der Referenzraum (z. B. das Wohnzimmer) die vorgegebene Temperatur

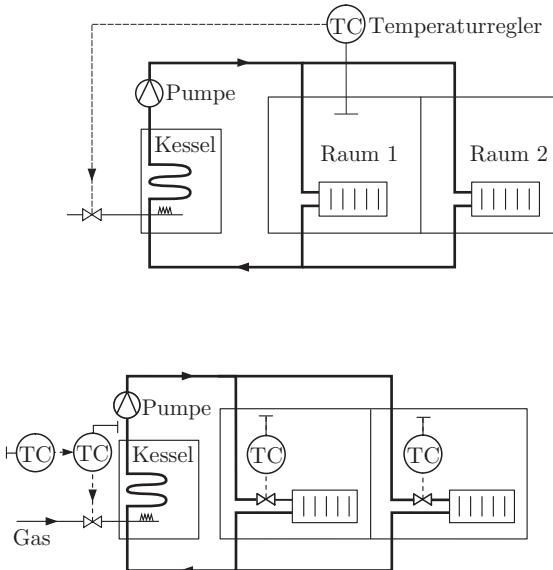


Abb. 2.1: Raumtemperaturregelungen

erreicht hat. Abbildung 2.2 zeigt das Blockschaltbild des Regelkreises, das dieselbe Struktur wie in Abb. 1.2 hat. Heizkessel, Heizkörper und Raum stellen die Regelstrecke dar. Die Stellgröße ist die Brennerleistung.

Abgesehen von der Tatsache, dass diese Regelung die Brennerleistung nicht kontinuierlich verstetigen, sondern nur ein- und ausschalten kann und daraus Schwankungen in der Raumtemperatur entstehen, besteht der wesentliche Mangel dieser Regelung in der Tatsache, dass diese Regelung nur *einen* Raum auf der vorgegebenen Temperatur halten kann, weil nicht mehr als *eine* Stellgröße zur Verfügung steht. Unterliegen die anderen Räume anderen Wärmebelastungen, so kann deren Temperatur wesentlich von der des Referenzraumes abweichen.

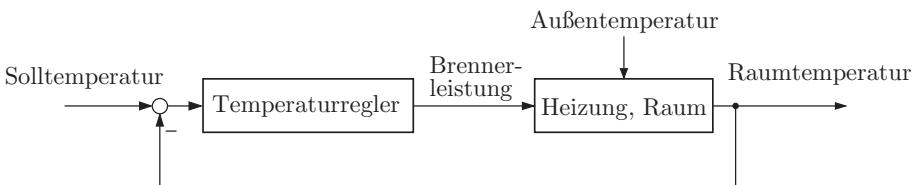


Abb. 2.2: Blockschaltbild der Raumtemperaturregelung

Eine Verbesserung der Regelgüte erreicht man durch zwei Maßnahmen (Abb. 2.1 (unten)). Die Vorlauftemperatur der Heizung wird über eine Kesselregelung konstant gehalten und die Räume werden einzeln durch Thermostatventile geregelt. Dabei

kann der Sollwert für jeden Raum einzeln festgelegt und die Raumtemperatur einzeln durch eine geeignete Einstellung der in die Heizkörper fließenden Wärmemengen beeinflusst werden (vgl. Aufgabe 7.9). Bei diesem Prinzip ist aus ökonomischen Gründen eine weitere Maßnahme notwendig. Wenn bei relativ hoher Außentemperatur die Thermostatventile überwiegend in der Nähe ihres Schließbereiches arbeiten, geht viel Energie bei der Wärmeerzeugung und dem -transport verloren. Deshalb wird der Sollwert der Vorlauftemperatur der Außentemperatur angepasst, also bei kaltem Wetter herauf- und bei warmem Wetter herabgesetzt. Diese außentemperaturgeführte Vorlauftemperaturregelung realisiert eine Störgrößenaufschaltung (vgl. Kap. 13 und Aufgabe 13.1).

Dieses einfache Beispiel lässt die Komplexität von Regelungsaufgaben erahnen, die zur Herstellung und Aufrechterhaltung eines angenehmen Klimas in großen Räumen gelöst werden müssen. Dort kommt es nicht nur auf eine gute mittlere Temperatur, sondern auch auf eine angenehme Temperaturverteilung im Raum sowie auf die Erzeugung einer passenden Luftfeuchtigkeit an. Um übermäßigen Luftzug zu verhindern, muss gleichmäßig über die gesamte Fläche des Raumes eingegriffen werden, beispielsweise über Lüftungen an den Rückenlehnen vieler Sitze.

Die Gebäudeautomatisierung beinhaltet einerseits einfache Regelkreise wie die durch die Thermostatventile realisierten. Andererseits weist sie viele verkoppelte Regelungen auf, die dynamisch nicht voneinander getrennt behandelt und deshalb nicht in mehrere Einfachregelungen zerlegt werden können. Hier müssen die im Kap. 13 beschriebenen Prinzipien vermaschter Regelungen angewendet werden. Da sich die Leistung von Brennern nicht kontinuierlich einstellen lässt, muss der Regler nichtlineares Verhalten, insbesondere Hystereseverhalten, aufweisen. Er kann mit Methoden der nichtlinearen Regelung entworfen werden.

### Aufgabe 2.1 Blockschaltbild einer Raumtemperaturregelung

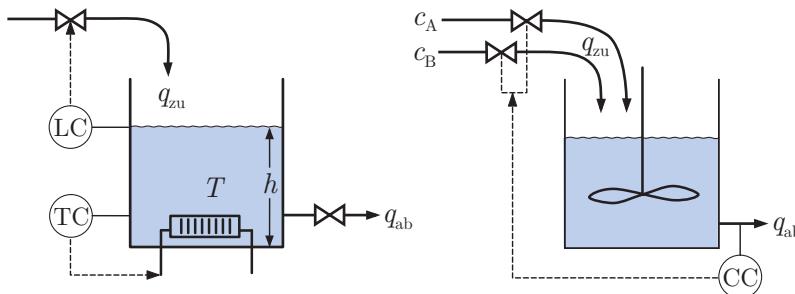
Die Temperatur in einem Raum soll unabhängig von äußeren Einwirkungen konstant gehalten werden.

1. Durch Veränderung der Heizkörperventilstellung wird die Zimmertemperatur gesteuert. Wenden Sie Abb. 1.5 auf dieses Beispiel an. Wie sieht dieses Blockschaltbild für die Temperatursteuerung eines Raumes aus?
2. Thermoventile dienen der Temperaturregelung. Was sind die Elemente dieses Regelkreises und wie sieht Abb. 1.3 für dieses Beispiel aus? □

## 2.2 Prozessregelung

In der Verfahrenstechnik spielt die Regelungstechnik eine sehr große Rolle, so dass sie dort mit einem eigenen Begriff belegt wird: Prozessregelung. Der Grund liegt darin, dass verfahrenstechnische Anlagen nur dann zum gewünschten Ergebnis führen und dieses Ergebnis auf ökonomisch und ökologisch bestem Wege erzielen, wenn die

verarbeiteten Ausgangsstoffe genau in einer gegebenen Menge, Konzentration und Temperatur vorliegen und der Prozess einen vorgegebenen zeitlichen Ablauf besitzt. Im Folgenden wird an einigen Beispielen die Vielfalt der Regelungsaufgaben und die Vielzahl der mit der Realisierung einer Regelung verbundenen Probleme erläutert.



**Abb. 2.3:** Rührkesselregelungen (LC = Füllstandsregelung; TC = Temperaturregelung; CC = Konzentrationsregelung)

Viele verfahrenstechnische Prozesse laufen in Reaktoren ab, so dass Füllstands-, Durchfluss- und Temperaturregelungen zu den Grundaufgaben der Prozessregelung gehören. Im linken Beispiel von Abb. 2.3 besteht die Aufgabe der beiden angegebenen Regelkreise darin, den Füllstand  $h$  konstant zu halten und den Stoff auf eine vorgegebene Temperatur  $T$  zu erwärmen. Als Störgröße wirkt die Stoffentnahme  $q_{ab}$ , die durch einen entsprechenden Zufluss  $q_{zu}$  ausgeglichen werden muss.

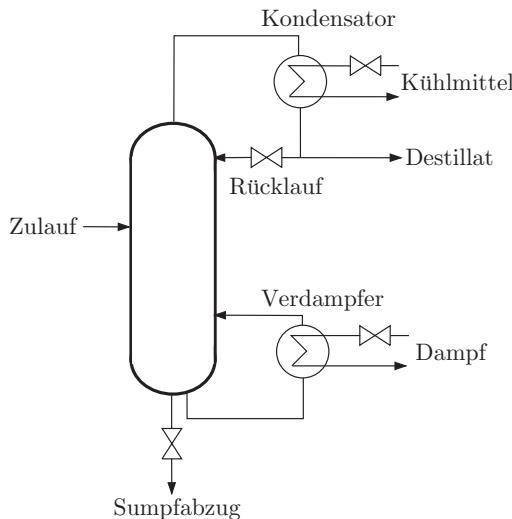
Diese Regelungsaufgabe ist relativ einfach, weil einerseits die Regelgrößen gut messbar sind und andererseits das dynamische Verhalten des Behälters bezüglich Veränderungen des Zulaufs und der Heizleistung in sehr einfacher Weise beschrieben werden können. Typisch für verfahrenstechnische Anlagen ist die Tatsache, dass mehrere voneinander unabhängige Regler an derselben Anlage arbeiten.

Komplizierter wird die Regelungsaufgabe, wenn in dem Behälter eine chemische Reaktion abläuft. Im rechten Teil von Abb. 2.3 ist ein Rührkesselreaktor dargestellt, der mit zwei Stoffen  $A$  und  $B$  gefüllt wird. Der Reaktor kann aufgrund des Rührwerkes als homogen durchmischt angesehen werden. Die beiden Stoffe reagieren miteinander, wodurch sich die Konzentrationen im Reaktor verändern. Durch die Regelung soll erreicht werden, dass dem Reaktor ständig ein Produkt entnommen werden kann, in dem die Stoffe  $A$  und  $B$  in vorgegebener Konzentration auftreten.

Reaktoren dieser Art werden kontinuierlich betrieben (Konti-Reaktor), d. h., die dem Reaktor pro Zeiteinheit zugeführte Stoffmenge ist gleich der abgeföhrten Menge ( $q_{ab} = q_{zu}$ ). Die Regelung ist notwendig, weil sich die Konzentrationen  $c_A$  und  $c_B$ , mit denen die Stoffe  $A$  und  $B$  in den beiden Zuflüssen vorliegen, ändern. Stellgrößen sind die über die beiden Ventile festgelegten Massenströme, wobei jedoch der gesamte Zulaufstrom  $q_{zu}$  konstant bleibt.

Die Regelung muss auf zwei dynamische Effekte Rücksicht nehmen. Erstens verändern sich die Stoffkonzentrationen im Reaktor aufgrund veränderter Stoffkon-

zentrationen im Zulauf, wobei sich die zugegebenen Stoffe auf das gesamte Reaktorvolumen verteilen und mit den bereits vorhandenen Stoffen mischen. Zweitens ist die Reaktionsrate sowohl von der Verweilzeit als auch von der Temperatur abhängig. Die Temperaturabhängigkeit wird häufig dadurch kompensiert, dass außer der in der Abbildung eingetragenen Regelung eine Temperaturregelung für den Reaktor installiert wird und dass bei besonders empfindlichen Reaktionen die Ausgangsstoffe dem Reaktor mit einer vorgegebenen und durch eine Regelung konstant gehaltenen Temperatur zugeführt werden.



**Abb. 2.4:** Destillationskolonne

**Regelung einer Destillationskolonne.** Die Realisierung der Regelung wird noch schwieriger, wenn ein Teil des Produktes in die Apparatur zurückgeführt wird (*Recycling*). Diese Methode wird in der Verfahrenstechnik sehr häufig angewendet, beispielsweise bei Destillationskolonnen (Abb. 2.4). Sie ist sehr wichtig, da sich mit ihr durch geeignete Wahl des Rücklaufverhältnisses das statische Verhalten der Anlage einstellen lässt. Die Rückführungen haben aber auch wichtige Konsequenzen für das dynamische Verhalten, das für die Regelung ausschlaggebend ist.

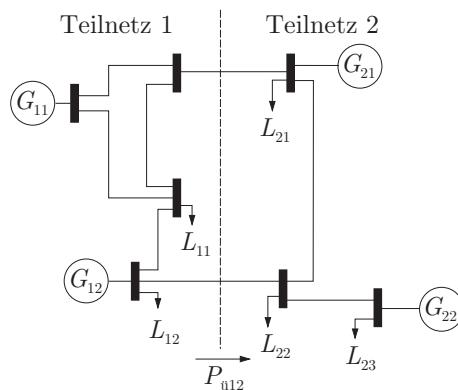
Destillationskolonnen dienen zur Trennung von Stoffgemischen. Regelgrößen sind die Konzentrationen der Stoffe im Destillat und im Sumpfabzug. Stellgrößen sind die Heizleistung des Verdampfers, das Rücklaufverhältnis, das den auf den Zulauf bezogenen Anteil des in den Kopf der Kolonne rückgeführten Destillats beschreibt, sowie der Volumenstrom am Sumpfabzug. Die Regelung muss den Temperaturverlauf längs der Destillationskolonne gegenüber Umgebungseinflüssen konstant halten und Störungen in Form schwankender Stoffkonzentrationen im Zulauf ausgleichen.

Destillationskolonnen haben ein wesentlich komplizierteres dynamisches Verhalten als die zuvor beschriebenen Rührkessel. Da die genannten Stell- und Regelgrößen dynamisch streng verkoppelt sind, kann die Regelungsaufgabe nicht mit einschleifigen Regelkreisen gelöst werden, sondern es müssen vermaschte Regelungen (Kap. 13) oder Mehrgrößenregelungen (Band 2) angewendet werden.

Weitere Schwierigkeiten für den Reglerentwurf entstehen durch die Tatsache, dass die Parameter des Kolonnenmodells nicht exakt bekannt sind. Die Regelung muss deshalb so entworfen werden, dass sie gegenüber Modellfehlern robust ist und die Regelungsaufgabe auch dann erfüllt wird, wenn sich die Regelstrecke in Wirklichkeit etwas anders verhält als ihr Modell. Überdies weist die Kolonne ein ausgeprägtes nichtlineares Verhalten auf, das allerdings in der Umgebung des Arbeitspunktes linearisiert werden kann.

## 2.3 Regelungsaufgaben in Energiesystemen

Große Energieverbundsysteme, deren Aufgabe in der Versorgung einer großen Anzahl von Abnehmern mit elektrischem Strom, Gas oder Wärme besteht, sind vernetzte Systeme, in denen mehrere Regelungsaufgaben gleichzeitig durch jeweils eine größere Anzahl von Reglern gelöst werden müssen. Als Beispiel wird das in Abb. 2.5 gezeigte Elektroenergienetz betrachtet. Die in der Energietechnik übliche Darstellung zeigt, dass das Netz vier Generatoren besitzt, die in unterschiedlichen Knoten Energie einspeisen. Das Netz transportiert diese Energie über die dargestellten Leitungen zu fünf Verbrauchern. Sowohl die Generatoren  $G$  als auch die Last  $L$  stellen summarisch die erzeugte Energie mehrerer Kraftwerksblöcke bzw. den Energieverbrauch mehrerer (i. Allg. sehr vieler) Verbraucher dar.



**Abb. 2.5:** Ein aus zwei Teilnetzen bestehendes Elektroenergiverbundsystem

Entsprechend der Aufgabe des Netzes muss durch geeignete Regelungen dafür gesorgt werden, dass die Verbraucher zu jeder Zeit die von ihnen benötigte Elektro-

energie erhalten, wobei es nicht nur auf die geforderte Leistung, sondern auch darauf ankommt, dass die Energie für den Verbraucher mit konstanter Spannung (230 V) und konstanter Frequenz (50 Hz) zur Verfügung steht. Diese Zielstellung kann nur dann erreicht werden, wenn die erzeugte Leistung  $p_G$  ständig der verbrauchten Leistung  $p_V$  angepasst wird, so dass

$$p_G(t) = p_V(t)$$

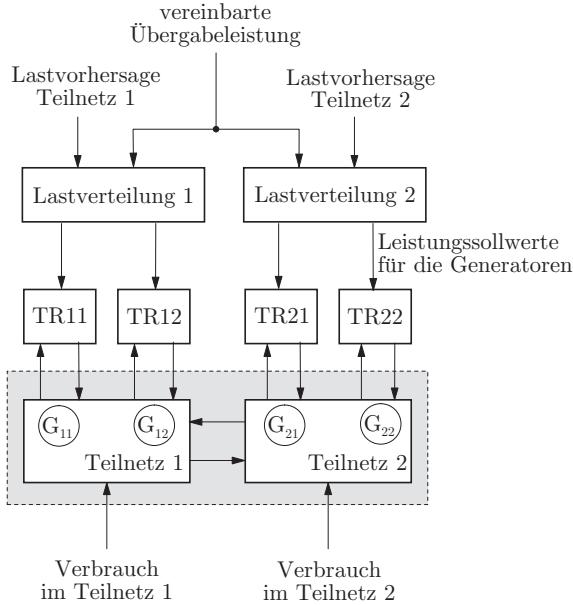
gilt. Da nur große Abnehmer ihren Verbrauch im Voraus den Energieerzeugern mitteilen müssen, besteht das Regelungsproblem im Ausgleich der nicht vorhersehbaren Änderungen des Leistungsbedarfs  $p_V(t)$  der Verbraucher und im Ausgleich von Änderungen der Leistungserzeugung, die beispielsweise aufgrund des unvorhersehbaren Ausfalls von Kraftwerksblöcken entstehen.

Die Steuerung erfolgt in der in Abb. 1.1 gezeigten hierarchischen Struktur. Die Planungskomponente liefert die Lastvorhersage, die den zeitlichen Verlauf des Leistungsbedarfs für einen oder mehrere Tage beschreibt (Tagesgang). Zwischen den Betreibern der einzelnen Netze ist eine Übergabeleistung vereinbart. Um diese muss die in einem Netz erzeugte Leistung höher bzw. niedriger als die verbrauchte Leistung sein. Aus diesen Angaben werden Einsatzzeiten und Arbeitspunkte aller Kraftwerke festgelegt. Diese Aufgabe gehört zur Schicht „Optimierung“ in Abb. 1.1. Sie wird für jedes Netz einzeln gelöst.

Die Lastverteilung beruht auf Lastflussrechnungen, aus denen hervorgeht, welcher Leistungsfluss sich für vorgegebene Leistungserzeugung und vorgegebenen Verbrauch im Netz einstellt, wobei auch die Spannungen an den Einspeiseknoten der Erzeuger eine wichtige Rolle spielen. Ziel dieses Schrittes ist es, den zeitlichen Verlauf der Energieerzeugung und der Einspeisespannungen so festzulegen, dass keine Übertragungsleitung überlastet wird und das System in einem wirtschaftlich günstigen Arbeitspunkt arbeitet. Diese Aufgabe kann mit Hilfe einer statischen Netzbeschreibung gelöst werden, in die die Struktur und die Parameter aller im Netz vorhandenen Leitungen, Erzeuger und Verbraucher eingehen. Als Ergebnis entstehen die Sollwerte  $w_i$  für die unterlagerten Regelkreise.

Aufgabe der Regelungen ist es, diese Arbeitspunkte einzustellen und Störungen, die in Form von Abweichungen der erzeugten bzw. verbrauchten Leistung von den Arbeitspunktewerten auf das System einwirken, auszugleichen (s. Aufgabe 7.4). Die Regelungen werden für die einzelnen Teilnetze getrennt voneinander aufgebaut und bestehen für jedes Netz selbst wiederum aus mehreren unabhängigen Teilreglern (TR). Es entsteht also eine *dezentrale Regelung*. Die Regler schreiben Sollwerte für die von jedem Kraftwerk zu erzeugende Leistung sowie für die Generatorenspannung vor. Dafür stehen den Reglern die aktuellen Werte der Netzfrequenz, der Übergabeleistung und der Knotenspannungen zur Verfügung.

Die beschriebene Regelungsaufgabe kann in zwei weitgehend separate Teilaufgaben zerlegt werden, die als UQ-Regelung bzw. FÜ-Regelung bezeichnet werden. Einerseits wird die Spannung, die sich an den wichtigsten Netzknoten einstellt, maßgebend vom Blindleistungsfluss beeinflusst. Das zur Erzielung des beabsichtigten Leistungsflusses notwendige Spannungsprofil über dem Netz wird deshalb durch



**Abb. 2.6:** Steuerung von Elektroenergieverbundsystemen

Veränderung von Transformatorstufungen und Blindleistungseinspeisungen erzeugt, wofür eine Spannungs-Blindleistungsregelung (UQ-Regelung) aufgebaut wird. Andererseits hängen die Netzfrequenz und die Wirkleistungsbilanz eng miteinander zusammen, so dass die aktuelle Netzfrequenz als Indikator für die aktuelle Leistungsbilanz  $p_G(t) - p_L(t)$  verwendet und das Regelungsziel im Ausgleich der Frequenzabweichung  $\Delta f$  besteht:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta f(t) = 0.$$

Da mit dieser Regelung gleichzeitig die zwischen den Teilnetzen fließende Übergabeleistung  $p_{ü12}$  auf dem vereinbarten Wert gehalten wird, spricht man von der Frequenz-Übergabeleistungsregelung (FÜ-Regelung).

Die Aufgabe der Frequenz-Übergabeleistungsregelung wird durch zwei verkoppelte Regelungen gelöst. Weil der Leistungsbedarf eines Teiles der Verbraucher wie auch die erzeugte Leistung der Kraftwerke von der Frequenz abhängen, gleicht das Netz einen Teil des Fehlers  $\Delta p = p_G - p_L$  in der Leistungsbilanz selbstständig aus, wobei sich ein erhöhter Bedarf ( $\Delta p < 0$ ) in einer Frequenzabsenkung bemerkbar macht. Diese Regelung wird Primärregelung genannt. Sie beruht auf der Tatsache, dass die Leistungsaufnahme der synchron mit der Netzfrequenz rotierenden Maschinen bei Verkleinerung der Netzfrequenz abnimmt und dass andererseits die Drehzahlregler der Kraftwerksblöcke bei einer Abnahme der Drehzahl für eine Erhöhung der Leistungserzeugung sorgen.

Die Primärregelung ist jedoch nicht in der Lage, das Leistungsdefizit vollständig abzubauen. Ihr wird deshalb eine Sekundärregelung überlagert, die für jedes Netz separat die Leistungsbilanz ausgleicht

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta p_i(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (p_{Gi}(t) - p_{Li}(t)) = 0$$

und gleichzeitig die Netzfrequenz und die Übergabeleistung auf die Sollwerte bringt.

Abbildung 2.6 ist also sowohl für die FÜ- als auch für die UQ-Regelung gültig, wobei im ersten Falle die angegebenen Teilregler aus der Netzfrequenz und der Übergabeleistung die Sollwerte der Generatorleistungen berechnen und im zweiten Fall die Knotenspannung durch Verstellung der Transformatorstufungen und über eine Veränderung der Sollwerte der Generatorenspannungen geregelt werden. In beiden Fällen wirken die Kraftwerke als Stellglieder, über die das Verhalten des Verbundsystems als Ganzes beeinflusst wird. Diese Regelungen werden u. a. in den Aufgaben 7.4 und 13.5 sowie im Beispiel 11.1 genauer behandelt.

Neue Regelungsaufgaben ergeben sich gegenwärtig durch die Einführung „erneuerbarer Energiequellen“ wie Windkraftanlagen und Solaranlagen. Das dabei entstehende intelligente Energienetz (*Smart grid*) stellt nicht nur Regelungsaufgaben für die Energieerzeuger, sondern fordert auch eine Regelung der Energieverbraucher, beispielsweise zur zustandsabhängigen Aufladung der Batterien von Elektrofahrzeugen oder für die Energieeinspeisung aus Solar- und Windkraftanlagen.

## 2.4 Robotersteuerungen

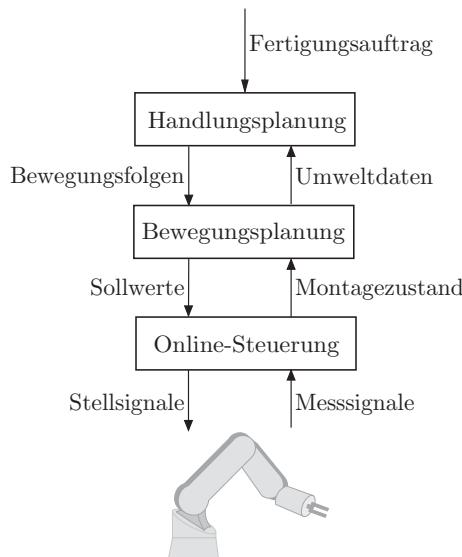
Roboter sind ein wichtiger Bestandteil der Fertigungsautomatisierung. Sie übernehmen Füge-, Montage- und Transportarbeiten, beispielsweise im Fahrzeugbau das Schweißen und Lackieren der Karosserie oder die Montage von Getrieben. In Fertigungszellen sind sie für den Wechsel von Werkstücken und Werkzeugen verantwortlich. Neben einer Qualitätserhöhung der Produkte kann durch den Einsatz von Robotern vor allem eine Flexibilisierung der Produktionsanlagen erreicht werden, denn die Bewegungsabläufe der Roboter können durch eine entsprechende Programmierung der Steuerung in sehr einfacher Weise verändert werden.

Die Entwicklung von Industrierobotern wird in drei Generationen unterteilt. Roboter der ersten Generation können vorprogrammierte Bewegungssequenzen ausführen. Die Steuerung erfolgt in der offenen Wirkungskette (vgl. Abb. 1.5), so dass Störungen, die die Arbeitsweise des Roboters oder die Größe oder Positionierung der zu bearbeitenden Werkstücke betreffen, nicht berücksichtigt werden können. Man spricht deshalb auch von einer Robotersteuerung und keiner Roboterregelung. Roboter der ersten Generation sind in den traditionellen Einsatzgebieten des Punktschweißens, Lackierens sowie der Werkstückhandhabung einsetzbar, wo einfache Bewegungsabläufe häufig wiederholt werden müssen und wenige Störungen im Arbeitsablauf auftreten.

Der Übergang von der ersten zur zweiten Generation wurde mit dem Einbau von Sensoren vollzogen. Dieser Schritt ist regelungstechnisch sehr bedeutend, denn

über die Sensoren erhält die Steuerung Informationen über die aktuelle Bewegung des Greifers einschließlich der vom Greifer auf das Werkzeug bzw. die Werkstücke ausgeübten Kräfte sowie über die Werkstückposition und über die Umgebung des Roboters. Damit wird aus der Robotersteuerung eine Roboterregelung (obwohl sich dieser Begriff nicht eingebürgert hat). Der Roboter kann seine Bewegung an veränderte Werkstückgeometrie und -position anpassen und gegebenenfalls auf alternative Handhabungssequenzen umschalten. Infolge dessen wird der Einsatzbereich von Robotern auf Gebiete ausgeweitet, bei denen komplizierte Konturen verfolgt oder Montageaufgaben gelöst werden müssen, bei denen die Werkstücke größere geometrische Unsicherheiten aufweisen.

Der Entwurf der Robotersteuerung ist durch zwei wichtige praktische Randbedingungen gekennzeichnet. Erstens kann von Robotern als Regelstrecke ein sehr gutes Modell aufgestellt werden, was für Analyse- und Entwurfsaufgaben vorteilhaft ist. Darin unterscheidet sich die Robotersteuerung – wie auch viele andere Regelungsaufgaben für mechanische Systeme – wesentlich von der Regelung verfahrenstechnischer Prozesse. Die erhaltenen Modelle sind allerdings i. Allg. stark nichtlinear. Zweitens muss berücksichtigt werden, dass sich wichtige Parameter wie Trägheitsmomente oder Gewichtsangaben während der Bewegung des Roboters bzw. durch das Greifen von Werkstücken ändern. Die Regelung muss robust gegenüber diesen Parameteränderungen sein oder sich diesen Veränderungen anpassen (adaptive Regelung).



**Abb. 2.7:** Hierarchische Struktur von Robotersteuerungen

Die Robotersteuerung beruht in den beiden genannten Generationen auf einer expliziten Programmierung, bei der die Folge der auszuführenden Aktionen Schritt

für Schritt vorgeschrieben werden muss. Mit dem gegenwärtigen Übergang zu Robotern der dritten Generation soll diese Steuerung um Komponenten für die Bewegungsplanung und die Handlungsplanung erweitert werden, so dass der Roboter die Folge der auszuführenden Bewegungen selbst aus einer gegebenen Aufgabenstellung ableiten kann. Die Robotersteuerung erhält dabei den in Abb. 2.7 gezeigten hierarchischen Aufbau. Die Online-Steuerung und Regelung in der untersten Ebene sorgt dafür, dass der Roboter einer bestimmten Sollkurve folgt bzw. den Greifer an einer vorgegebenen Stelle positioniert. Übergeordnet ist die Bewegungsplanung, durch die in Abhängigkeit vom aktuellen Montagezustand und unter Berücksichtigung von Hindernissen in der Roboterumgebung eine Solltrajektorie für die Online-Steuerung vorgegeben wird. In der obersten Ebene wird die durch den Roboter auszuführende Handlungsfolge aus einem gegebenen Fertigungsauftrag ermittelt.

Ein anderer Entwicklungsweg führt zu Leichtbaurobotern, bei denen das Gewicht des Roboters im Vergleich zum Gewicht der bewegten Teile wesentlich günstiger ist als bei den heute eingesetzten Robotern, deren Gewicht i. Allg. das der bewegten Teile deutlich übersteigt. Bei Leichtbaurobotern muss bei der Positionierung des Greifers und bei der Bewegung berücksichtigt werden, dass sich die Arme in Abhängigkeit von den auftretenden Kräften elastisch verformen. Der Einsatz derartiger Roboter wird erst durch Verwendung geeigneter Regelungen ermöglicht. Die Regelung sorgt dafür, dass der Greifer trotz elastischer Verformungen des Roboters die vorgegebene Position erreicht bzw. auf das Werkstück die geforderte Kraft ausübt.

## 2.5 Regelung von Fahrzeugen

Fahrzeuge sind ein sehr umfangreiches Anwendungsgebiet der Regelungstechnik. Sie sind heute mit einer Vielzahl von Regelkreisen ausgestattet, von denen das Antiblockiersystem (ABS), die Antriebsschlupfregelung, die Fahrdynamikregelung und elektronische Stabilisierung (ESP) oder die aktive Dämpfung die bekanntesten sind. Aber auch der Zündvorgang wird heute durch aufwändige Steuerungen überwacht und dem aktuellen Fahrzustand angepasst. Moderne Autos verfügen darüber hinaus über Geschwindigkeitsregler und überwachen den Abstand zum vorausfahrenden Fahrzeug. Die Grundideen dieser Regelungen wird in den Aufgaben 3.2, 7.7 und 11.7 behandelt.

Bei Schienenfahrzeugen ist die Neigetechnik nur durch regelungstechnische Eingriffe möglich. Auch das Prinzip der Magnetschwebebahn ist nur mit Hilfe einer Regelung realisierbar. Um den Fahrkörper in einem bestimmten Abstand über der Schiene zu halten, sind nicht nur starke Elektromagnete notwendig, sondern auch eine Regelung, die die Magnetkraft so der aktuellen Lage des Fahrkörpers anpasst, dass der Abstand zur Schiene konstant gehalten wird (vgl. Aufgabe II-6.5). Im regelungstechnischen Sinne bildet die Magnetschwebebahn eine instabile Regelstrecke, die durch die Regelung stabilisiert werden muss. Die Regelung dient hier also nicht nur zur dynamisch günstigen Auslegung des Systems, sondern ist ein unverzichtba-

res Hilfsmittel, um das physikalische Wirkprinzip dieses Verkehrsmittels realisieren zu können.

Bei vielen der angeführten Beispiele wird das Prinzip verwendet, mit Hilfe von Regelungen mechanische Systeme konstruktiv zu vereinfachen bzw. deren dynamisches Verhalten relativ frei zu gestalten. So beruht die aktive Federung von Fahrzeugen auf einer Regelung, die die Position bzw. Beschleunigung des Fahrzeugaufbaus misst und über Hydraulikventile das Verhalten der Federbeine beeinflusst. Dies verbessert nicht nur das dynamische Verhalten des Fahrzeugs, sondern ermöglicht es auch, dass die Dämpfung der Federung der aktuellen Situation angepasst wird, also beispielsweise für die Fahrt auf der Autobahn härter und für die Fahrt im Gelände weicher eingestellt wird. Ohne Regelung ließe sich eine derartige Anpassung nur durch konstruktive Veränderungen des Fahrzeugs realisieren.

## 2.6 Mechatronik

Als Mechatronik wird ein aktuelles Gebiet bezeichnet, in dem durch Verknüpfung von Methoden des Maschinenbaus, der Regelungstechnik und der Informatik neue Funktionsprinzipien und Verhaltensformen für mechanische Systeme realisiert werden. Auf der Grundlage regelungstechnischer Methoden und realisiert mit Rechnerarchitekturen und Programmiermethoden der Echtzeitdatenverarbeitung wird das dynamische Verhalten mechanischer Systeme Forderungen angepasst, die allein durch konstruktive Maßnahmen nicht erfüllbar wären. Wichtige Schnittstellen zwischen dem zu steuernden mechanischen System und der Regelung bilden Sensoren und Aktoren, über die der aus dem mechanischen System und einem Rechner bestehende Regelkreis geschlossen wird. Die Integration der drei genannten Fachdisziplinen wird besonders offensichtlich, wenn mechanische und informationsverarbeitende Elemente auf einem gemeinsamen Chip vereinigt werden, wie es beispielsweise beim Airbag-Sensor geschieht (Aufg. A4.5).

## 2.7 Flugregelung

Die Steuerung von Flugzeugen und Raumflugkörpern ist ein umfangreiches Gebiet, in dem die Regelungstechnik eine große Rolle spielt. Das soll hier beispielhaft an der Regelung von Flugzeugen erläutert werden. Ziel dieser Regelungen ist die Einhaltung vorgegebener Flugbahnen und die Kompensation der auf das Flugzeug wirkenden atmosphärischen Störungen.

Die Regelung hat den bereits mehrfach erwähnten hierarchischen Aufbau, durch den unterschiedliche Regelungsaufgaben zwar weitgehend voneinander entkoppelt, aber dennoch unter Beachtung ihrer Interaktion gelöst werden. Auf der untersten Ebene besteht die Aufgabe in der Stabilisierung des Flugzeugs im Raum. Roll- und Nickwinkel sollen auf Sollwerten gehalten werden. Dies erfolgt manuell durch

den Piloten, der einen „künstlichen Horizont“ auf der Instrumententafel sieht und das Flugzeug danach ausrichtet. Automatisch kann diese Aufgabe gelöst werden, wenn die Winkelgeschwindigkeiten in beiden Richtungen durch Kreisel gemessen und durch Regler auf die Ruder zurückgeführt werden. Als Beispiel wird später die Stabilisierung der Rollbewegung behandelt (Aufgaben 6.27, 11.6 und A4.2). Diese Regelungen nutzen die Ruder als Stellglieder, die ihrerseits wiederum durch Regelungen in die vorgegebene Position gebracht werden. Als Beispiel hierfür wird in Aufgabe 10.9 die Regelung eines hydraulischen Ruderstellventils betrachtet.

Der Vorteil der automatischen Flugregelung liegt nicht nur in der Entlastung des Piloten von Routineaufgaben. Eine Regelung kann auch schneller reagieren als ein Pilot. Dies trifft insbesondere auf außergewöhnliche Situationen zu. Fällt beispielsweise ein Triebwerk aus, so erzeugen die verbleibenden Triebwerke eine Gierbeschleunigung (Drehbeschleunigung bezüglich der Hochachse), die mit Hilfe des Seitenruders ausgeglichen werden muss. Piloten reagieren typischerweise erst 2 Sekunden nach einem plötzlichen Triebwerksausfall und versuchen, ihre verspätete Reaktion durch einen starken Ruderausschlag zu kompensieren. Das Ruder muss so konstruiert sein, dass es die dabei entstehenden hohen Kräfte übertragen kann. Eine automatische Regelung, die schneller reagiert, kommt mit kleineren Ruderausschlägen aus, so dass die Ruder „leichter“ dimensioniert werden können. Der Einsatz einer automatischen Regelung hat also nicht nur eine Verbesserung des Verhaltens des Flugzeugs zur Folge, sondern erhöht die Sicherheit und ermöglicht auch eine leichtere Bauweise des Flugzeugs.

Auf der zweiten Steuerungsebene befinden sich Regelungen zur Kurs- und Geschwindigkeitshaltung. Diese Regelungen verwenden dieselben Aktoren, arbeiten jedoch in einem viel langsameren Zeitmaßstab.

Die dritte Regelungsebene betrifft die Bahnhaltung. Regelgrößen sind die Flughöhe und -richtung. Stellgröße ist der Triebwerksschub. Funknavigation wird zur Ortung eingesetzt.

Die Regelungen der zweiten und dritten Ebene führen dazu, dass der Pilot bei modernen Maschinen nur noch Sollwerte für Richtung, Höhe und Geschwindigkeit vorgibt. Durch diese Regelungen braucht sich der Pilot nicht mehr mit den in kurzen Zeitabständen notwendigen Steuerhandlungen zu befassen. Seine Aufgabe besteht jetzt in der Überwachung des Fluges.

Bei diesen Regelungen wird das Flugzeug als Regelstrecke betrachtet. Regelgrößen sind die Koordinaten und Bewegungsrichtungen des Flugzeugs im Raum, wobei für die unterste Regelungsebene die Ausrichtung des Flugzeugs im Raum und für die beiden höheren Ebenen das Flugzeug als Bewegung eines Punktes im Raum von Bedeutung ist. Stellgrößen sind die Winkel der Quer-, Seiten- und Höhenruder, der Flügelklappen sowie der Schub.

Diesen Regelungen des einzelnen Flugzeugs ist die Flugsicherung übergeordnet, die die Bahnen der Flugzeuge untereinander koordiniert und Vorgaben für den Weg der Flugzeuge macht. Im Gegensatz zur Regelung umfasst die Flugsicherung vor allem Planungsaufgaben, die in der Zuweisung von bestimmten Korridoren und in Zeitvorgaben für die einzelnen Flugzeuge resultieren.

Hohe Sicherheitsanforderungen waren der Grund dafür, dass selbsttätige Regelungen, bei denen sich der Pilot nicht mehr direkt im Regelkreis befindet, sehr zögernd und stets mit Hilfe redundanter Mess- und Stellsysteme eingeführt wurden. Besondere Vorbehalte gab es aus sicherheitstechnischen Gründen bei der Einführung des *fly-by-wire*, also von Regelungen, die elektronisch realisiert sind und in der zivilen Luftfahrt erst seit Einsatz des „Airbus“ angewendet werden. Traditionell wurden Regelkreise durch hydraulische oder mechanische Komponenten ausgeführt.

## 2.8 Der Mensch als Regler

Bei vielen Problemen des täglichen Lebens muss der Mensch Geräte oder Maschinen steuern. Dabei beobachtet er das Resultat seiner Handlungen, vergleicht dieses mit dem gewünschten Ergebnis und verändert gegebenenfalls seine Handlung. Der Mensch steht also als Regler direkt im Regelkreis.

Eine große Zahl von Beispielen aus dem täglichen Leben zeigt, dass die Lösung von Regelungsaufgaben tatsächlich „alltäglich“ ist. Die Positionierung eines Cursors mit Hilfe der Maus ist genauso ein Regelungsvorgang wie Fahrrad fahren, wobei der Mensch sogar eine instabile Regelstrecke stabilisieren muss (vgl. Aufgabe 10.11).

Andererseits verlangen viele technologische Prozesse, dass der Mensch als Regler wirkt und den Prozess in einer vorgegebenen Weise steuert. Der Mensch muss dabei jedoch nicht wie in den Beispielen, die in den folgenden Kapiteln behandelt werden, kontinuierlich auf den Prozess einwirken. Seine Aufgaben liegen auf dem Gebiet der Prozessüberwachung und der operativen Steuerung, also auf den in Abb. 1.1 gezeigten höheren Steuerungsebenen. Die Überwachung und der Eingriff in den Prozess erfolgt nur in bestimmten, häufig unregelmäßigen Zeitabständen, während im Folgenden von einer kontinuierlich wirkenden Regelung ausgegangen wird. Trotz dieser Unterschiede sind auch die den Mensch einschließenden Regelkreise rückgekoppelte Systeme mit den diesen Systemen eigenen Stabilitätsproblemen.

<b>Aufgabe 2.2 Steuerung eines Abfüllautomaten</b>
----------------------------------------------------

Ein Abfüllautomat hat die Aufgabe, Behälter mit einer Flüssigkeit zu füllen, ohne dass die Behälter überlaufen.

1. Diese Aufgabe wird heute meist durch eine Steuerung (in der offenen Wirkungskette) gelöst. Zeichnen Sie die dazugehörige Steuerkette entsprechend Abb. 1.5. Inwiefern muss bei der Festlegung der Steuerung ein Modell der zu füllenden Behälter verwendet werden? Überlegen Sie, was passiert, wenn die Steuerstrecke verändert wird, indem andersartige Behälter zum Füllen bereitgestellt werden. Was sind denkbare Störungen, auf die die Steuerung nicht reagieren kann?
2. Ergänzen Sie den Abfüllautomat so, dass der Füllvorgang durch eine Regelung beeinflusst wird. Was passiert im Regelkreis, wenn Behälter ausgetauscht werden oder Störungen wirken? □

**Aufgabe 2.3** Der Chauffeur als Regler

Jeder Autofahrer ist ein Regler. Zeichnen Sie das Strukturbild dieser Regelung und erläutern Sie, welche Führungs- und Störgrößen auftreten sowie was „messen“, „vergleichen“, und „stellen“ in diesem Regelkreis bedeuten. □

**Aufgabe 2.4\*** Lautstärkeregler

Warum ist der „Lautstärkeregler“ Ihres Radios oder der HiFi-Anlage kein Regler in dem hier verwendeten Sinn? Welchem Regelungstechnischen Begriff entspricht diese umgangssprachlichen Bezeichnung? □

## 2.9 Biologische Regelkreise

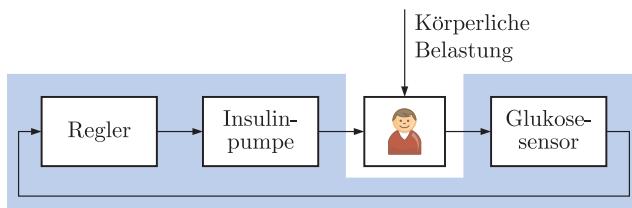
In der Biologie besteht die Aufgabe von Regelungen darin, die Bedingungen im Inneren von Organismen konstant zu halten. Höher entwickelte Lebewesen sind existenziell davon abhängig, dass sie eine gleichbleibende Körpertemperatur haben, in ihren Zellen ein konstanter pH-Wert vorliegt und der Blutdruck und der Blutzuckerspiegel nach einer körperlichen Belastung auf Normalwerte zurückgehen. Das Konstanthalten der inneren Lebensbedingungen wird bei Lebewesen *Homöostase* genannt.

Die Analogien zwischen technischen und biologischen Regelungen betreffen sowohl den strukturellen Aufbau von Regelkreisen als auch die dynamischen Phänomene, die sich in diesen Regelkreisen abspielen. Beispielsweise kann die Körpertemperaturregelung des Menschen mit Hilfe des in Abb. 1.2 auf S. 4 gezeigten Blockschaltbildes erklärt werden. Die Regelgröße  $y(t)$  ist die Körpertemperatur, genauer gesagt die Bluttemperatur im Zwischenhirn, die durch temperaturempfindliche Nervenzellen „gemessen“ wird. Die Stellgröße  $u(t)$  erzeugt Anreize, die die Wärmeabgabe des Körpers über die Haut an die Umgebung oder die Wärmebildung in den Muskeln stimulieren. Der Versuch des Körpers, seine Temperatur durch ein Muskelzittern zu erhöhen, wie es im Freibad zu beobachten ist, ist eine Reaktion auf diese Stellgröße. Das Ziel dieses Regelkreises ist die Kompensation von Störungen auf die Körpertemperatur, die in einer zu hohen oder zu niedrigen Umgebungstemperatur oder in aktiver körperlicher Bewegung bestehen. Interessanterweise ist der Regelkreis durch eine Störgrößenaufschaltung (vgl. Abschn. 13.1.1) erweitert, denn die Thermorezeptoren auf der Haut erkennen eine zu hohe bzw. zu niedrige Umgebungstemperatur, so dass der Körper auf veränderte Umgebungsbedingungen reagieren kann, bevor sich diese Störung auf die Körpertemperatur auswirkt.

Ähnliche Regelkreise arbeiten, um den Blutdruck und den Blutzuckerspiegel konstant zu halten, um die Lichtstärke auf der Netzhaut mit Hilfe der Pupillen einzuschränken, um den Kreislauf an den aktuellen Sauerstoffverbrauch anzupassen usw. Zwar treten im Gegensatz zu technischen Regelungen an die Stelle von Messgliedern Rezeptoren, an die Stelle des durch einen Computer realisierten Reglers nervöse

oder hormonelle Regelungsvorgänge und an die Stelle von Stellgliedern biologische Effektoren. Jedoch wird in beiden Gebieten das gemeinsame Grundprinzip der Informationsrückkopplung genutzt.

Obwohl biologische Regelkreise stark nichtlineare Elemente enthalten, hat das typisch regelungstechnische Vorgehen, den Regelkreis durch Blockschaltbilder zu beschreiben und die Elemente einzeln und in ihrem Zusammenspiel zu analysieren, ermöglicht, dass eine Reihe dieser Regelungen auch parametrisch beschrieben werden können. In jüngster Zeit hat das starke Interesse, systemtheoretische Methoden für biologische Prozesse einzusetzen, zum Entstehen des neuen Gebietes der *Systembiologie* geführt, deren Ziel es ist, neue Methoden zur Modellbildung und Analyse biologischer Systeme zu erarbeiten, die spezifische Eigenschaften derartiger Systeme, wie z. B. Rückführstrukturen in Reaktionsketten, berücksichtigen.



**Abb. 2.8:** Strukturbild der Blutzuckerregelung

**Medizintechnik.** Ein wichtiges Teilgebiet der Medizintechnik beschäftigt sich mit der Frage, wie physiologische Regelkreise im Menschen, die krankheitsbedingt nicht oder schlecht funktionieren, mit technischen Mitteln aufrechterhalten werden können. In diesen Situationen ist der Mensch die Regelstrecke und das medizintechnische Gerät der Regler. Eines der bekanntesten und erfolgreichsten Beispiele ist der Herzschrittmacher, der allerdings – wie im Beispiel 1.4 dargestellt ist – eine Steuerung in der offenen Wirkungskette realisiert. Die künstliche Bauchspeicheldrüse, die bei Diabetes-Patienten die Regelung des Blutzuckerspiegels übernehmen soll, kann nur im geschlossenen Regelkreis funktionieren, denn sie soll die Wirkung von Störungen wie beispielsweise körperliche Belastung kompensieren (Abb. 2.8). Das Strukturbild dieser Regelung weist auf ein fundamentales Problem technischer Regelungen für den Menschen hin: Neben einem geeigneten Regelalgorithmus bilden die Schnittstellen zwischen dem Menschen und dem künstlichen Ersatzorgan, die in diesem Anwendungsfall durch die Insulinpumpe und den Glukosesensor repräsentiert werden, ein Hauptproblem der Realisierung.

Ein anderes wichtiges Teilgebiet der Medizintechnik betrifft die Intensivmedizin, bei der Geräte außerhalb des Körpers dazu dienen, den Patienten temporär zu überwachen oder Organfunktionen zu übernehmen. So werden Anästhesiegeräte eingesetzt, um während einer Operation die Tiefe und die Dauer der Narkose vorzugeben. Auch hier fehlt bisher eine Möglichkeit der quantitative Bestimmung der Anästhe-

siewirkung, mit der die bisherige Steuerung in der offenen Wirkungskette durch eine Regelung ersetzt werden kann.

## 2.10 Gemeinsamkeiten von Regelungen in unterschiedlichen Anwendungsgebieten

Die aufgeführten Beispiele haben Gemeinsamkeiten von Regelungsaufgaben aus unterschiedlichen Anwendungsgebieten gezeigt und Probleme bei der Realisierung offensichtlich werden lassen.

Gemeinsam ist allen Aufgaben, dass die behandelten Steuerungsprobleme durch einen Regelkreis gelöst werden, wobei Regel- und Stellgrößen von Fall zu Fall physikalisch völlig unterschiedliche Größen darstellen, in jedem Fall aber Signalen entsprechen, die das Verhalten des Systems beschreiben bzw. durch die das Verhalten des Systems beeinflusst werden kann.

Die Regelstrecke ist ein dynamisches System mit u. U. sehr kompliziertem dynamischen Verhalten. Um die Regelungsaufgabe lösen zu können, muss deshalb bekannt sein, welche Wirkungen die Einganggröße auf das zeitliche Verhalten der Regelstrecke hat. Die mathematische Beschreibung linearer dynamischer Systeme und die Berechnung des Systemverhaltens sind deshalb Gegenstand der Kap. 3 bis 6.

Regelungen sind notwendig, um

- Störungen auszugleichen,
- die Regelgröße dem zeitlichen Verlauf der Führungsgröße anzupassen,
- die Dynamik der Regelstrecke zu verändern, insbesondere instabile Systeme zu stabilisieren,
- die Steuerungsaufgaben trotz veränderter Eigenschaften der Regelstrecke zu erfüllen.

Wie die in diesem Kapitel behandelten Beispiele gezeigt haben, wird die Regelung bei vielen System nicht nur gebraucht, um das Verhalten des Systems zu verbessern, sondern um den bestimmungsgemäßen Betrieb der Anlage überhaupt zu ermöglichen.

Voraussetzung für die Realisierung einer Regelung ist, dass die Regelgröße gemessen, die Regelstrecke über Stellgrößen in ihrem Verhalten beeinflusst und der Sollwert exakt vorgegeben werden kann und dass alle diese Daten schnell genug zum und vom Regler übertragen werden können. Für viele technische Systeme ist die letzte Forderung sehr einfach erfüllbar, die erste aber mit Problemen behaftet, weil beispielsweise pH-Wert-Sensoren einen hohen Wartungsaufwand erfordern und deshalb die Güte von pH-Wert-Regelungen entscheidend von den Sensoren abhängig ist. Ein anderes Beispiel, das Probleme bei der Messung der Regelgröße verdeutlicht, sind sensorgeführte Roboter. Roboter, bei denen der Greifer über keine

Sensorik verfügt, können nur in der offenen Wirkungskette gesteuert werden. Damit kann die für Montageaufgaben erforderliche Genauigkeit bei der Positionierung nur bedingt erreicht werden, weil die Steuerung nicht auf Änderungen in der Arbeitsweise des Roboters reagieren kann, die sich beispielsweise durch unterschiedliche Last im Greifer ergeben. Nur wenn Sensoren vorhanden sind, kann die Kraft, die ein Werkzeug auf ein Werkstück ausübt, oder die Position des Greifers exakt durch eine Regelung eingestellt werden.

Dass auch die Sollwertvorgabe Schwierigkeiten bereiten kann, wird beim Kran auf einer Baustelle deutlich. Die Aufgabe, den Lasthaken an eine vorgegebene Position zu bewegen, könnte ohne weiteres automatisiert werden, wenn man dafür nicht die aktuelle Position messen und die gewünschte Position exakt vorgeben müsste. Die quantitativ exakte Vorgabe des Sollwertes würde es notwendig machen, ein Koordinatensystem für die Baustelle einzuführen und die Sollpositionen bezogen auf dieses Koordinatensystem dem Regler mitzuteilen. Diese Schwierigkeiten führen dazu, dass das Kranfahren noch nicht automatisiert ist und nach wie vor durch einen Kranfahrer, der einen menschlichen Regler darstellt, ausgeführt wird. Die Steuerung erfolgt zwar nicht automatisch, aber auch der Mensch nutzt das Rückführprinzip, um die ihm gestellte Steuerungsaufgabe zu lösen.

Probleme bezüglich der Schnelligkeit der Mess- und Stellwertübertragung treten bei geografisch weit verteilten Systemen, wie beispielsweise bei Elektroenergieverbundsystemen, auf. Da es nicht möglich ist, alle Daten in der für die Regelung elektroenergetischer Vorgänge notwendigen Geschwindigkeit und mit der erforderlichen Sicherheit zu übertragen, werden mehrere Einzelregler (dezentrale Regler) verwendet, die gemeinsam die gestellte Regelungsaufgabe erfüllen.

**Systemtheoretische Betrachtungen zum Messen und Stellen.** Die soeben angesprochenen Probleme betrafen die technische Realisierung des Messens und Stellens, wobei nur die konkrete Ausführbarkeit dieser Vorgänge und nicht die technische Realisierung im Detail angesprochen wurde. Um diese Vorgänge technisch realisieren zu können, ist es notwendig, auch die auf den Signalwegen notwendigen Wandlungen der physikalischen Messsignale in analoge und digitale Größen, Randbedingungen für eine möglichst fehlerfreie Übertragung usw. zu berücksichtigen.

Im Folgenden wird vereinfachend angenommen, dass sich diese technischen Probleme lösen lassen und zwar so schnell und fehlerfrei, dass die in Wirklichkeit nur zu bestimmten Abtastzeitpunkten auftretenden binär kodierten Signale wie kontinuierliche, exakte Signale behandelt werden können. Auch der Regleralgorithmus, der u. U. umfangreiche numerische Operationen erfordert, soll so schnell ablaufen, dass seine Abarbeitung keine nennenswerte Verzögerungen hervorruft.

Obwohl die genannten technischen Probleme hier außer Acht gelassen werden, sollen die mit der Messung und dem Stellen verbundenen dynamischen Wirkungen in die Betrachtungen einbezogen werden. So kann beispielsweise nicht davon ausgeganen werden, dass auf dem Weg vom Sensor zum Regler Signale beliebig hoher Frequenz verzögerungsfrei übertragen werden. Um dieser Tatsache gerecht zu werden, kann die Messdynamik beispielsweise durch eine Differentialgleichung erster Ordnung dargestellt werden. Ähnliches gilt für den Signalweg vom Regler zum Stell-

glied bzw. für das Stellglied selbst. Steht als Stellglied beispielsweise ein durch einen Motor betätigtes Ventil zur Verfügung, so hat das Stellglied ein integrales Verhalten, denn seine Öffnung ist proportional dem Integral des Stellsignals  $u$ . Dies kann ebenfalls durch eine Differentialgleichung erster Ordnung erfasst werden.

Im Folgenden wird stets von linearen Systemen ausgegangen, obwohl viele Regelstrecken nichtlineares Verhalten besitzen. Insbesondere sind viele Stellglieder und Sensoren nichtlinear. Dennoch können die meisten Regelungsaufgaben mit Hilfe linearer Modelle der Regelstrecke gelöst werden. Der Grund dafür liegt in der Tatsache, dass sich diese Regelungen damit befassen, ein System in der Nähe eines vorgegebenen Arbeitspunktes zu halten, so dass nur Abweichungen um den Arbeitspunkt von Interesse sind. In der Nähe des Arbeitspunktes kann das Verhalten vieler Regelstrecken näherungsweise durch ein lineares Modell beschrieben werden. Außerdem können Nichtlinearitäten von Stell- und Messgliedern häufig dadurch kompensiert werden, dass die inverse Nichtlinearität diesen Gliedern vor- bzw. nachgeschaltet wird, so dass die Reihenschaltung aus Kompensation und Stell- bzw. Messglied näherungsweise linear ist.

#### Aufgabe 2.5\* Praktische Regelungsaufgaben

Überlegen Sie sich, warum die folgenden technischen Probleme nur mit Hilfe von Regelungen gelöst werden können:

- Die Temperatur der Kühlflüssigkeit im Motor eines Kraftfahrzeugs soll konstant sein.
  - Ein Raumflugkörper soll mit einer Radarantenne verfolgt werden.
  - Die Papiergeschwindigkeit in einer Druckmaschine soll konstant sein.
  - Temperatur, Druck und Luftfeuchtigkeit in einer Flugzeugkabine sollen konstant sein.
- Inwiefern ist die Lösung dieser Regelungsaufgaben für die Realisierbarkeit technologischer Wirkprinzipien notwendig? Welche Ähnlichkeiten weisen die genannten Regelungsaufgaben trotz der unterschiedlichen Anwendungsgebiete auf? □

#### Aufgabe 2.6 Heizungspumpenregelung

In einer Anzeige mit der Überschrift „Stromersparnis durch Heizungspumpenregelung“ heißt es: „Der Thermodrive-Heizungsregler ist ein elektronisches Vorschaltgerät, dass die Temperaturen des Vor- und Rücklaufes einer Heizung misst und die Leistungsaufnahme der Pumpe regelt. Ziel ist es, die Wärme möglichst energiesparend zu transportieren. Dazu wird die Temperaturdifferenz zwischen Vor- und Rücklauf konstant gehalten und der Massenstrom durch Änderung der Pumpenleistung variiert.“

Beschreiben Sie den Aufbau des Regelkreises, die Wirkungsweise der Regelung und begründen Sie, warum diese Regelung zur Energieeinsparung beitragen kann. □

**Aufgabe 2.7 Thermostat im Backofen**

Moderne Backöfen besitzen einen Thermostat, der die Temperatur im Backraum auf einem vorgegebenen Sollwert hält.

1. Warum ist eine solche Regelung notwendig?
2. Diskutieren Sie die Tätigkeit des Bäckers an Backöfen mit bzw. ohne Thermostat und erläutern Sie, inwiefern der Thermostat die Benutzung des Backofens vereinfacht. □

## Literaturhinweise

Für jedes der angegebenen Anwendungsgebiete gibt es Spezialliteratur, in der die typischen Regelungsprobleme und die bewährten Regelungsverfahren im Detail beschrieben sind. Empfohlen werden können u. a. [95] für die Prozessregelung, [106] für die Regelung von Elektroenergiesystemen, [54, 58] für die Regelung von Fahrzeugen, [16, 78, 77, 98] für Flugregelungen und [53, 96] für biologische Regelkreise. In [38] sind mehrere Mechanismen der Blutdruckregelung beschrieben und dafür die regelungstechnischen Blockschaltbilder angegeben. Anwendungen in der Medizintechnik findet man in [104], wo auch Einzelheiten über die Steuerungsstruktur von Herzschrittmachern (Beispiel 1.4) dargestellt sind. Der aktuelle Stand der Forschung auf dem Gebiet der Blutzuckerregelung ist in [22] wiedergegeben. Eine Übersicht über die Regelung des Wärmehaushalts im menschlichen Körper gibt [86].

Als Literatur zu Stellgeräten wird auf [27, 81] verwiesen.

Allgemeinverständliche Einführungen in die Regelungstechnik mit vielen Anwendungsbildern geben [3, 7].

# 3

## Strukturelle Beschreibung dynamischer Systeme

Nach einer kurzen Übersicht über Ziele und Methodik der Modellbildung wird das Blockschaltbild dynamischer Systeme eingeführt und an Beispielen erläutert. Dann wird auf den Signalflussgraphen als alternative Beschreibungsform eingegangen.

### 3.1 Ziele und wichtige Schritte der Modellbildung

In der Regelungstechnik wird mit Modellen gearbeitet, die das Verhalten dynamischer Systeme durch Signale und Signalumformungen beschreiben. Ein *dynamisches System* wird als Funktionseinheit zur Verarbeitung und Übertragung von Signalen definiert, wobei unter *Signalen* zeitveränderliche Größen verstanden werden. Die Modelle haben deshalb typischerweise die Form von (linearen) Differentialgleichungen, in denen die Signale und deren zeitliche Ableitungen sowie Koeffizienten vorkommen, die von den physikalischen Parametern des betrachteten Systems abhängen.

Um für eine gegebene Anlage zu dem gesuchten Modell zu gelangen, muss vom physikalischen Charakter der dynamischen Vorgänge abstrahiert werden, wobei alle zeitlichen Vorgänge durch Zeitfunktionen (Signale) beschrieben und alle Beziehungen zwischen diesen Vorgängen als funktionale Abhängigkeiten zwischen den Zeitfunktionen interpretiert werden. Es ist dabei vollkommen gleichgültig, ob die zeit-

lich veränderlichen Größen Energie-, Massen- oder Kapitalströme darstellen. Wichtig ist, welche sich zeitlich ändernden Beschreibungsrößen dieser Phänomene das dynamische Verhalten des betrachteten Systems wiedergeben. Von unterschiedlichen physikalischen Flüssen wird also der Informationsfluss abstrahiert. Beispiele werden zeigen, dass verschiedenartige Wirkprinzipien in Bezug auf die Signalübertragung gleiche oder ähnliche Eigenschaften aufweisen können.

Die Modellbildung vollzieht sich typischerweise in folgenden Schritten:

1. **Beschreibung des Modellierungsziels.** Die zu lösende Regelungsaufgabe bestimmt, was durch das Modell dargestellt werden soll. Aus der Regelungsaufgabe wird ersichtlich, auf welchen Teil der Anlage sich die Regelung bezieht, welche Einflussgrößen von der Umgebung auf die Strecke einwirken (Eingangsgrößen) und welche Größen die Reaktion der Strecke auf die Umgebung kennzeichnen (Ausgangsgrößen). Es ist ferner festzulegen, mit welcher Genauigkeit die Regelstrecke zu modellieren ist, ob also beispielsweise Nichtlinearitäten zu berücksichtigen sind oder mit linearisierten Beschreibungen gearbeitet werden kann.
2. **Auswahl der Modellannahmen.** In Abhängigkeit von den Modellierungszielen wird festgelegt, welche Phänomene, Teilsysteme, Wechselwirkungen mit der Umgebung usw. im Modell berücksichtigt werden müssen und was das Modell *nicht* enthalten muss. Diese Festlegungen bilden die Modellannahmen, auf die sich die weiteren Modellierungsschritte beziehen.
3. **Verbale Beschreibung der Regelstrecke.** Das Modell entsteht häufig zunächst in Form einer umgangssprachlichen Beschreibung des Systems und seiner Elemente, Funktionen und strukturellen Verknüpfungen. Dieses „Wortmodell“ kann von allen an der Modellbildung Beteiligten (und nicht nur von Regelungstechnikern) verstanden und überprüft werden.
4. **Aufstellung des Blockschaltbildes.** Aus dem Wortmodell werden die wichtigsten Elemente (Teilsysteme, Komponenten) des Systems und deren Verknüpfungen herausgearbeitet und in einem Blockschaltbild dargestellt. Die Zerlegung des Systems in seine Komponenten reduziert die Komplexität der Modellbildung, weil die Komponenten in den weiteren Modellierungsschritten zunächst unabhängig voneinander betrachtet werden können. Die Verknüpfung der Komponenten über Signale beschreibt die innere Struktur des Systems. Für die Aufstellung des Blockschaltbildes müssen die quantitativen Modelle der Teilsysteme noch nicht bekannt sein.
5. **Aufstellung der Modellgleichungen.** Für jede einzelne Komponente muss man nun quantitativ in Form von Gleichungen aufschreiben, wie aus den Eingangsgrößen des Elementes die Ausgangsgrößen entstehen. Diese Gleichungen werden anschließend unter Beachtung der Systemstruktur zu einem Modell des Ge-

samtsystems verknüpft. Die gesuchten quantitativen Beziehungen können entweder durch eine theoretische Modellbildung aus den in den Elementen wirkenden physikalischen Gesetzmäßigkeiten abgeleitet oder, sofern das betrachtete System experimentell untersucht werden kann, aus Messdaten bestimmt werden (experimentelle Modellbildung, Identifikation). Das Ergebnis ist in beiden Fällen ein quantitatives Modell des betrachteten Systems.

6. **Modellvalidierung.** Die Überprüfung des Modells erfolgt im Idealfall durch einen Vergleich des mit dem Modell berechneten und des experimentell ermittelten Systemverhaltens. Wenn keine ausreichenden Experimentdaten vorliegen, kann die Modellgenauigkeit durch Analyse von Teilmodellen, Überprüfung stationärer Vorgänge oder qualitative Betrachtungen bewertet werden.

Als Ergebnis erhält man ein Modell in Form einer Differentialgleichung oder eines Zustandsraummodells (Kap. 4), das für die Systemanalyse mit den später behandelten Methoden eingesetzt werden kann. Als sehr wichtiges „Nebenergebnis“ führt die Modellbildung aber auch zu einem tiefgründigen Verständnis der in dem zu steuernden Prozess ablaufenden physikalischen Vorgänge, denn:

|| Man muss die physikalischen Prozesse verstanden haben, um sie regeln zu können.

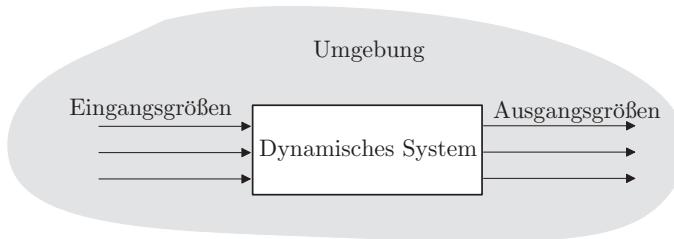
## 3.2 Blockschaltbild

Das im Folgenden eingeführte Blockschaltbild entsteht in einer frühen Phase der Modellierung, bevor zur quantitativen Beschreibung übergegangen wird. Es ist ein wichtiges Handwerkszeug des Regelungstechnikers, das nicht nur als Zwischenschritt der Modellbildung, sondern auch bei der Systemanalyse und beim Reglerentwurf eingesetzt wird. Dieses Buch enthält deshalb viele Blockschaltbilder.

**Struktur dynamischer Systeme.** Obwohl der Begriff „Struktur“ unterschiedliche Bedeutungen hat, wird er immer dann verwendet, wenn Eigenschaften von bestimmten Parametern weitgehend unabhängig und deshalb typisch für eine ganze Klasse von Systemen sind. Das Blockschaltbild beschreibt, aus welchen Teilsystemen sich ein System zusammensetzt und wie die Teilsysteme verkoppelt sind. Dieses Bild ist weitgehend unabhängig von den Systemparametern. In ähnlicher Form wird der Strukturbegriff im Kap. II-3 verwendet, wo aus den Matrizen des Zustandsraummodells Strukturmatrizen abgeleitet werden, die nur aussagen, welche Elemente von null verschieden sind und welche nicht. Dass zunächst der strukturelle Aufbau eines dynamischen Systems betrachtet wird, hat zwei Gründe:

- Die Genauigkeit jedes Modells hängt in entscheidender Weise davon ab, ob das Modell das betrachtete reale System strukturell richtig beschreibt.
- Strukturelle Darstellungen vermitteln eine Übersicht über den Aufbau des Systems und tragen entscheidend zum Verständnis des Systemverhaltens bei. Sie zeigen, wie die Signale untereinander verkoppelt sind, wo Rückkopplungen auftreten und ob das System in unabhängige Teilsysteme zerlegt werden kann.

Strukturelle Modelle können häufig schon aus einer verbalen Beschreibung des Systems abgeleitet werden.



**Abb. 3.1:** Blockschaltbild eines Systems

**Blockschaltbild.** Das Blockschaltbild, das auch als *Wirkungsschema* oder *Strukturbild* bezeichnet wird, geht von einer Abgrenzung des Systems von seiner Umgebung aus, die bildlich durch einen Block gekennzeichnet wird (Abb. 3.1). Die Wechselwirkungen zwischen dem System und der Umgebung werden durch Signale beschrieben. Die Eingangsgrößen sind diejenigen Größen, durch die die Umwelt auf das System einwirkt und die folglich die Ursachen für alle in dem System ablaufenden Vorgänge beschreiben. Ausgangsgrößen sind diejenigen Größen, die das Verhalten des Systems kennzeichnen und durch die das System möglicherweise auf seine Umwelt zurückwirkt. Bei einer detaillierteren Darstellung wird das Innere des Gesamtsystems in Teilsysteme zerlegt.

In Abb. 3.1 und bei allen weiteren Abbildungen ist folgendes sehr wichtig:

- **Pfeile** stellen Signale, also zeitlich veränderliche Größen, dar.
- **Blöcke** repräsentieren dynamische Systeme, also Verarbeitungseinheiten der Signale.
- Signale haben eine eindeutige **Wirkungsrichtung**, die durch die Pfeile beschrieben wird. Der Pfeilanfang beschreibt, wo das Signal entsteht. Die Pfeilspitze weist auf den Block, in dem das Signal als Ursache anderer Vorgänge auftritt.

Alle Blöcke sind grundsätzlich *rückwirkungsfrei*, d. h., die Vorgänge innerhalb eines Blockes verändern die Eingangssignale nicht (es sei denn, ein Ausgangssignal wird zum Eingang desselben Blockes zurückgeführt).

Die Blöcke werden auch als *Übertragungsglieder* bezeichnet, wenn sie lediglich eine Eingangsgröße und eine Ausgangsgröße besitzen. Im Allgemeinen sind mehrere dieser Signale möglich, wobei vektoriell zusammengefasste Signale häufig durch einen Doppelpfeil  $\Rightarrow$  gekennzeichnet werden.

**Spezielle Symbole.** Für eine Reihe spezieller funktionaler Abhängigkeiten sind einfache Symbole eingeführt worden (Abb. 3.2). Eine *Signalverzweigung* wird durch einen Punkt dargestellt. Die beiden Pfeilenden stellen dasselbe Signal dar (und nicht etwa Teilströme eines von links zum Knoten fließenden Stromes!). Bei der *Summationsstelle* kann mit Hilfe eines Minuszeichens, das rechts von der Pfeilspitze steht, eine Subtraktion angezeigt werden. *Nichtlineare Übertragungsglieder* werden besonders gekennzeichnet, weil von allen anderen Blöcken in der Regelungstechnik häufig die Linearität vorausgesetzt wird.

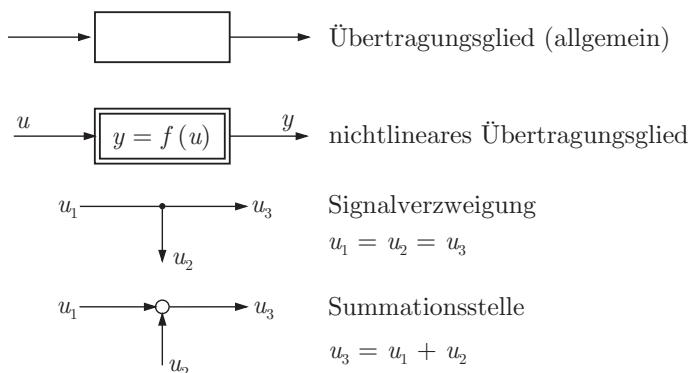
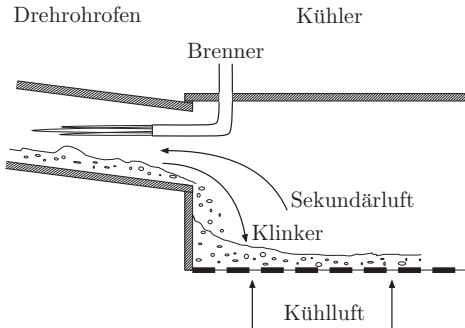


Abb. 3.2: Spezielle Symbole in Blockschaltbildern

### Beispiel 3.1 Strukturelle Modellierung von Drehrohrofen und Klinkerkühler

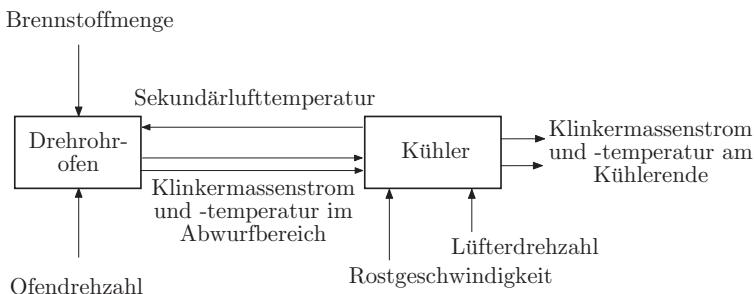
Bei der Zementherstellung wird ein Gemisch aus Kalkstein, Mergel, Ton und Sand in einem Drehrohrofen bei etwa  $1600^{\circ}\text{C}$  gebrannt und der dabei entstehende Klinker wird in einem Kühler abgekühlt. Abbildung 3.3 veranschaulicht die Wechselwirkungen, die dabei zwischen dem Ofen und dem Kühler auftreten und das dynamische Verhalten dieses Prozesses maßgebend bestimmen. In dem dargestellten rechten Ende des Ofens findet der Brennprozess statt. Der gebrannte Klinker fällt mit einer Temperatur um  $1350^{\circ}\text{C}$  aus dem sich drehenden Ofen auf einen Rost im Kühler, durch den von unten Luft geblasen wird. Der Rost bewegt sich und transportiert den sich abkühlenden Klinker nach rechts. Die beim Abkühlen des Klinkers erhitzte Luft wird nach dem Gegenstromprinzip als Sekundärluft mit einer Temperatur von  $950^{\circ}\text{C}$  dem Brennraum zugeführt, wodurch die rückgewonnene Wärme beim Brennen wiederverwendet werden kann.

Um eine gute Zementqualität zu erreichen, muss der Brandprozess möglichst gleichmäßig ablaufen. Wesentliche Störungen resultieren aus zeitlich wechselnden Eigenschaften der Ausgangsstoffe und des Brennstoffs. Um das Verhalten der Regelstrecke verstehen zu



**Abb. 3.3:** Drehrohrofen und Klinkerkühler

können, soll ein Blockschaltbild für die dynamischen Wechselwirkungen von Ofen und Kühler aufgestellt werden.



**Abb. 3.4:** Blockschaltbild zur Beschreibung der dynamischen Wechselwirkungen von Drehrohrofen und Klinkerkühler

In einem sehr einfachen Blockschaltbild erscheinen Ofen und Kühler jeweils als ein Block. Der Ofen beeinflusst das Verhalten des Kühlers durch den mit hoher Temperatur auf den Rost fallenden Klinker, dessen wichtigste sich zeitlich verändernden Größen die pro Zeiteinheit herabfallende Masse und die Temperatur sind. Beides wird durch die Ofendrehzahl und die pro Zeiteinheit zugeführte Brennstoffmenge beeinflusst. Als weitere wichtige Größe beeinflusst die pro Zeiteinheit vom Kühler in den Ofen zurückgeführte Wärmemenge den Brandprozess. Da mit einem näherungsweise konstanten Luftvolumenstrom gearbeitet wird, ist die Sekundärlufttemperatur das diese Rückkopplung beschreibende Signal. Weitere Einflussgrößen wie der Massenstrom der Ausgangsstoffe werden bei diesen Betrachtungen als konstant angesehen und erscheinen deshalb nicht als Signale im Blockschaltbild, sondern müssen in einer detaillierten quantitativen Beschreibung später als Parameter berücksichtigt werden.

Das Verhalten des Klinkerkühlers wird auch durch die Rostgeschwindigkeit und die Lüfterdrehzahl beeinflusst, die für die KühlLuftmenge maßgebend ist. Ausgangsgrößen sind der Klinkermassenstrom und die Klinkertemperatur am Ende des Kühlers.

Abbildung 3.4 zeigt das aus diesen Überlegungen abgeleitete Blockschaltbild. Obwohl dieses Bild nur eine strukturelle Darstellung der komplexen dynamischen Vorgänge ist,

weist es auf wichtige gegenseitige Abhängigkeiten der betrachteten Größen hin. Typischerweise wird durch eine Kühlerregelung versucht, Schwankungen in der Sekundärlufttemperatur abzubauen, wobei die Rostgeschwindigkeit und die Lüfterdrehzahl als Stellgrößen verwendet werden. Das Blockschaltbild zeigt, dass dabei nicht der Kühler allein als Regelstrecke wirkt, sondern die dynamischen Eigenschaften der Regelstrecke wesentlich durch Ofen und Kühler gemeinsam bestimmt werden. Beide Anlagen befinden sich nämlich in einer Rückkopplungsschaltung. Veränderungen im Brandprozess führen zu Schwankungen im Klinkermassenstrom und in der Klinkertemperatur, die sich wiederum in Schwankungen der Sekundärlufttemperatur niederschlagen und weitere Veränderungen im Brandprozess hervorrufen. Eine genauere Analyse zeigt, dass dieses rückgekoppelte System zu Schwingen neigt (Aufg. 8.19). Der zu entwerfende Regler muss auf diese Eigenschaft der Regelstrecke Rücksicht nehmen.

Dieses Beispiel zeigt, dass sich eine regelungstechnische Betrachtung von einer verfahrenstechnischen grundlegend unterscheiden kann. Drehrohrofen und Klinkerkühler werden beim Aufbau eines Zementwerkes häufig von unterschiedlichen Herstellern geliefert, die sich jeweils nur um die Funktion des von ihnen aufgestellten Teils der Anlage kümmern. Aus regelungstechnischer Sicht können viele Einzelheiten der Anlage vernachlässigt werden bzw. gehen als Parameter in die dynamischen Modelle ein. Im Gegensatz zu den Herstellern spielt jedoch das Zusammenspiel beider Anlagen die entscheidende Rolle bei der Analyse des dynamischen Verhaltens und beim Reglerentwurf. □

### Beispiel 3.2 Blockschaltbild der Regelung eines UASB-Reaktors

Abbildung 3.5 zeigt den Aufbau eines UASB-Reaktors (*Upflow Anaerobic Sludge Blanket Reactor*), in dem Abwasser durch Bioorganismen gereinigt wird. Das Abwasser wird durch eine Zulaufpumpe in den Zirkulationskreis des Reaktors geführt. Der Zirkulationskreis entnimmt Abwasser aus dem oberen Bereich des Reaktors und pumpt es im unteren Bereich wieder in den Reaktor hinein. Dadurch wird eine gute Durchmischung von Abwasser und Biomasse erreicht und die Biomasse über die gesamte Höhe des Reaktors verteilt. Das geklärte Wasser wird am Reaktorkopf abgezogen, wobei ein Sedimentierer verhindert, dass Biomasse auf diesem Weg den Reaktor verlässt. Das Biogas, das im Wesentlichen aus Methan besteht, wird vor der weiteren Verwendung gereinigt. Durch den Heizmantel wird der Reaktor auf einer Temperatur von  $38^{\circ}\text{C}$  gehalten.

Abbildung 3.5 zeigt eine für verfahrenstechnische Betrachtungen typische Darstellung einer solchen Anlage. Für regelungstechnische Untersuchungen kann diese Darstellung wesentlich vereinfacht werden, was im Folgenden am Beispiel der pH-Wert-Regelung veranschaulicht wird. Die Regelung erscheint in Abb. 3.5 als Rückführung der Messgröße „pH-Wert“ auf die Drehzahl der Zulaufpumpe. Um das Blockschaltbild dieser Regelung aufzustellen, kann von vielen Einzelheiten des Anlagenschemas abstrahiert werden. Aufgrund des Zirkulationskreises kann davon ausgegangen werden, dass der Reaktor homogen durchmischt ist und insbesondere der pH-Wert des Reaktorinhaltens überall derselbe ist. Folglich spielt im Weiteren der Zirkulationskreis keine Rolle mehr.

Aufgrund der im Anlagenschema durch einen Kreis mit der Bezeichnung TC eingetragenen Temperaturregelung kann davon ausgegangen werden, dass der Reaktor eine konstante Temperatur besitzt, so dass wechselnde Temperaturen des zugeführten Abwassers und der Reaktorumgebung nicht als Störgröße betrachtet werden müssen.

Regelgröße ist der pH-Wert, Stellgröße die Substratzufuhr, also die Nährstoffzufuhr für die Bioorganismen. Die Substratzufuhr wird im Wesentlichen durch die Drehzahl der Zulaufpumpe bestimmt. Genau genommen, gibt der Regler die Spannung für den Motor der

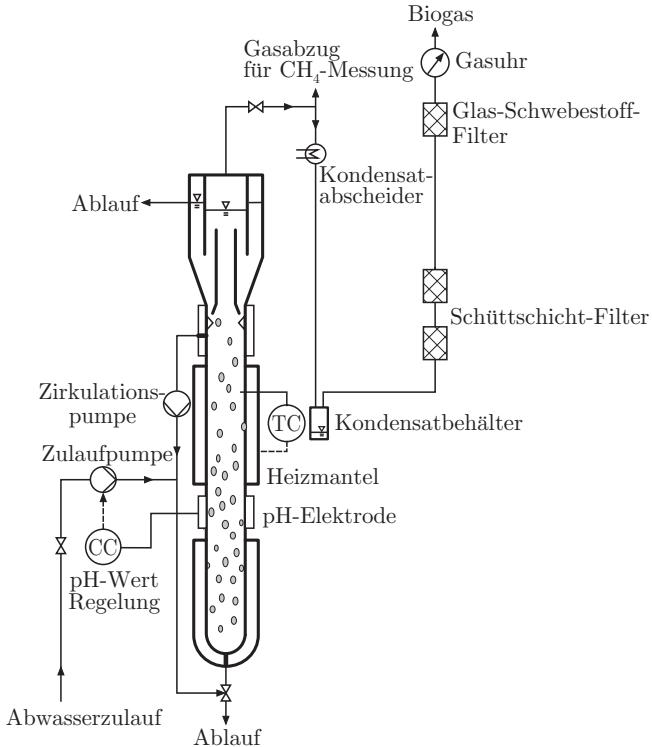


Abb. 3.5: UASB-Reaktor

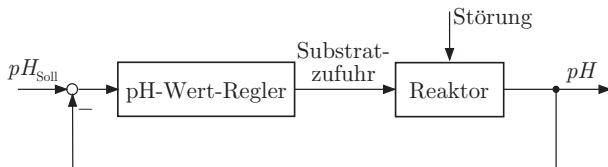


Abb. 3.6: Blockschaubild der pH-Wert-Regelung

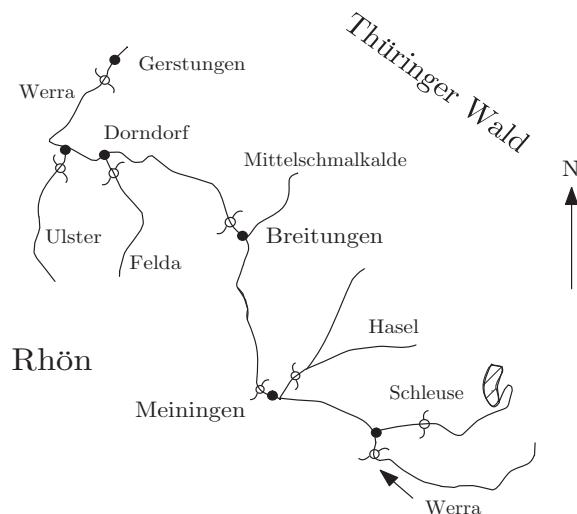
Zulaufpumpe vor. Wenn man aber die Wirkung einer Spannungsänderung auf eine Drehzahländerung und damit auf eine Änderung der Substratzufuhr als verzögerungsfrei betrachten kann, so unterscheiden sich Substratzufuhr und Spannung nur um einen konstanten Faktor und man kann mit dem in Abb. 3.6 gezeigten Blockschaltbild arbeiten.

Die Regelgröße wird durch den Abbauprozess ständig verändert. Die Regelung soll diese „Störung“ ausgleichen und den pH-Wert dem vorgegebenen Sollwert  $pH_{soll}$  anleiten. Als weitere Störung wirkt die sich zeitlich verändernde Zusammensetzung des Abwassers. Die Hauptaufgabe der Regelung besteht hier also in der Kompensation von Störungen. Abbildung 3.6 zeigt das aus diesen Überlegungen entstehende Blockschaltbild.

Der Übergang von Abb. 3.5 zu Abb. 3.6 macht deutlich, wie der Regelungstechniker aus einem oft sehr komplizierten Anlagenschema ein häufig recht einfaches Blockschaltbild

konstruiert. Das Blockschaltbild zeigt, welche Teile der Anlage dynamisch modelliert und beim Reglerentwurf berücksichtigt werden müssen. Die Analyse der Regelstrecke führt bei der Bearbeitung der Regelungsaufgabe häufig zu einem detaillierteren Blockschaltbild, bei dem die jetzt in einem Block zusammengefassten Ursache-Wirkungs-Beziehungen durch mehrere verkoppelte Blöcke dargestellt werden. Dass dabei das Blockschaltbild wieder komplizierter wird, ist kein Mangel, sondern Ausdruck des besseren Verstehens der Regelstrecke. Wichtig ist, dass der Regelungstechniker dabei auf der Abstraktionsebene des Blockschaltbildes bleibt, also alle Einzelheiten der Anlage durch Signale und Signalübertragungen beschreibt. □

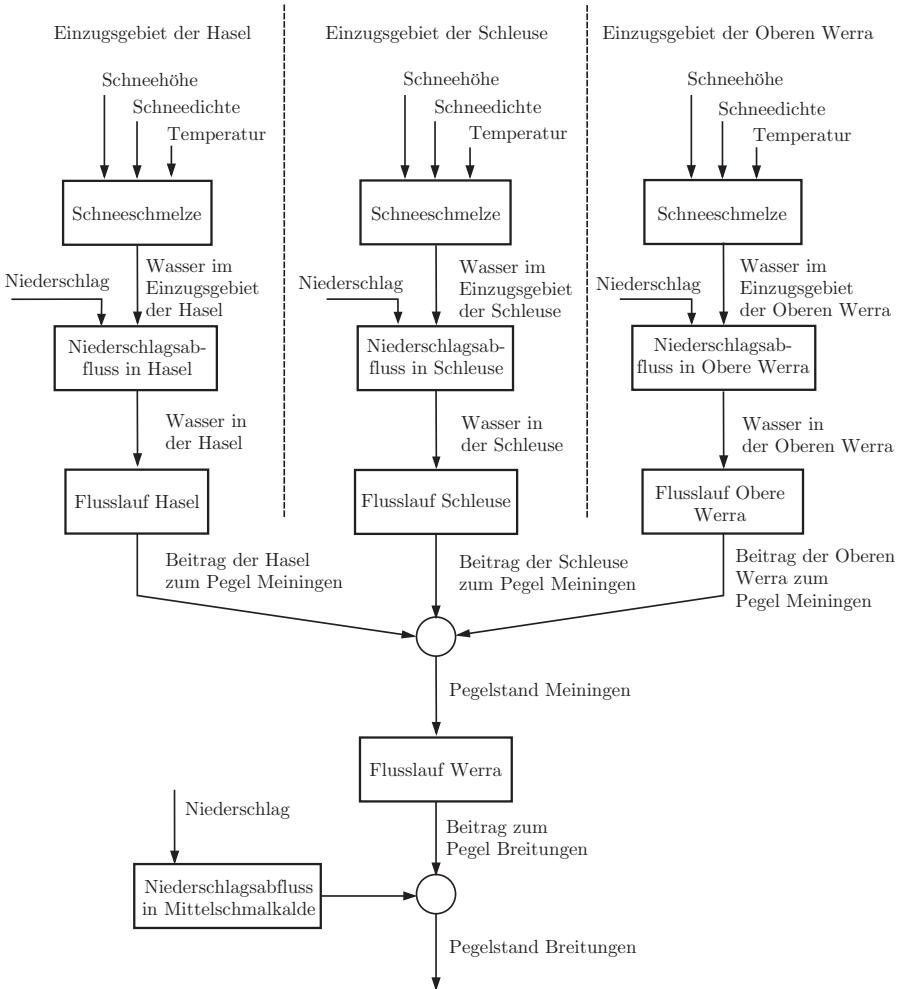
Die folgenden Beispiele wurden aus dem nichttechnischen Bereich ausgewählt, um einerseits zu zeigen, dass regelungstechnische Betrachtungsweisen nicht auf elektrische, verfahrenstechnische oder mechanische Systeme beschränkt sind. Andererseits wird bei diesen Beispielen besonders offensichtlich, dass auch dann ein Blockschaltbild aufgestellt werden kann, wenn die das System beschreibenden quantitativen Zusammenhänge nicht vollständig bekannt sind.



**Abb. 3.7:** Flussgebiet der Werra im Raum Thüringen

### Beispiel 3.3 Strukturelle Modellierung des Flussgebietes der Werra

Für die Vorhersage der Wasserstände der Werra im Gebiet des Thüringer Waldes (Abb. 3.7) ist ein Modell aufzustellen. Das betrachtete System, das in der Abbildung geografisch dargestellt ist, ist durch den Niederschlag in Form von Regen oder Schnee (beschrieben durch die Schneehöhe und Schneedichte) als Eingangsgrößen sowie die in der Karte eingetragenen Pegelstände als Ausgangsgrößen charakterisiert. Da die Niederschläge gebietsweise unterschiedlich sind, muss mit mehreren Eingangsgrößen gearbeitet werden.



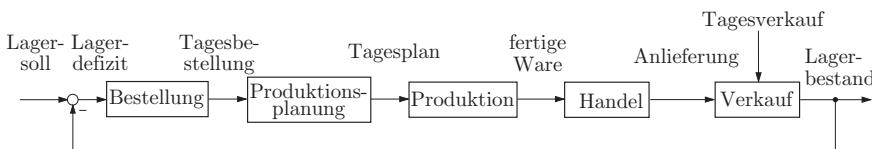
**Abb. 3.8:** Blockschaltbild zur Beschreibung der Pegelstände der Werra

Durch einzelne Blöcke sind folgende Prozesse zu erfassen: die Schneeschmelze in den einzelnen Gebieten, der Abfluss des Wassers aus dem Gebirge in die einzelnen Nebenflüsse der Werra, der Transport des Wassers entlang der einzelnen Flüsse, deren Zusammenführung in der Werra und der Transport des Wassers in der Werra (Abb. 3.8).

Die Blöcke stellen dynamische Elemente dar, die den Transport des Niederschlages erheblich verzögern. Die Verzögerungen entstehen durch das Schmelzen des Schnees bzw. den Transport des Wassers. Die Summationsstellen zeigen, dass sich die Wassermenge der Nebenflüsse am Zusammenfluss addieren. Das System besteht aus in Reihe bzw. parallel geschalteten Blöcken, die der geografischen Struktur entsprechen. Es gibt keine Rückkopplungen. □

**Beispiel 3.4** Modell einer Lagerhaltung

Das Modell soll die Dynamik der mit dem Verkauf, der Lagerhaltung und der Bestellung verbundenen Prozesse zwischen Kunden, Einzelverkauf und Großhandel darstellen. Damit kann das Modell z. B. für die Untersuchung der Einflüsse von Bestellstrategien und Lieferzeiten auf die Lagerbestände eingesetzt werden. Die Tagesbestellung, die von der Verkaufsstelle an den Hersteller übermittelt wird, ist die Steuergröße. Ziel ist es, einen vorgegebenen Lagerbestand zu erreichen. Der Verkauf wirkt dabei im Regelungstechnischen Sinn als Störgröße. Entsprechend dieser Abgrenzung der Regelstrecke ist die Tagesbestellung die Eingangsgröße und der Lagerbestand die Ausgangsgröße. Der Bestellvorgang hat die Funktion eines Reglers.



**Abb. 3.9:** Blockschaltbild einer Lagerhaltung

Das System kann in der in Abb. 3.9 dargestellten Weise strukturiert werden. Der Lagerbestand wird aus der Differenz zwischen angelieferter und verkaufter Stückzahl sowie dem Vortagesbestand gebildet. In Abhängigkeit vom Lagerdefizit wird die Ware nachbestellt.

Wesentliche dynamische Eigenschaften entstehen dadurch, dass von der Tagesbestellung bis zur Anlieferung der bestellten Ware eine erhebliche Zeit („Totzeit“) vergeht. Die Bestellung darf also keinesfalls so vorgenommen werden, dass jeweils das aktuelle Lagerdefizit als Tagesbestellung verwendet wird. Der Bestellvorgang muss selbst dynamisch sein, wobei sich der Verkäufer im einfachsten Fall alle bereits abgegebenen, aber noch nicht realisierten Tagesbestellungen merkt und versucht, nur das darüber hinausgehende Lagerdefizit auszugleichen.

Als wichtige Eigenschaft gibt das Blockschaltbild die Rückkopplungsschleife wieder. Wie später noch ausführlich behandelt wird, sind Totzeiten in rückgekoppelten Systemen kritisch für die Stabilität des Systems. Dass der Bestellvorgang auf diese Totzeit Rücksicht nehmen muss, ist bereits aus dem Blockschaltbild ersichtlich. Im Übrigen zeigt dieses Beispiel, dass wichtige Eigenschaften der Lagerhaltung aus dem Blockschaltbild erkannt werden können, ohne dass für die einzelnen Blöcke dieses Bildes ein quantitatives Modell bekannt ist. □

**Andere strukturelle Beschreibungen technischer Systeme.** In den einzelnen Anwendungsgebieten der Regelungstechnik sind sehr verschiedene Darstellungsformen gebräuchlich, wie die Beispiele im Kap. 2 gezeigt haben. So geben technologische Schemata einen Überblick über den Aufbau einer Anlage. In ihnen sind u. U. auch die für die Lösung von Regelungsaufgaben wichtigen Mess- und Stellglieder sowie die eingesetzten Regler eingetragen. Derartige Diagramme sind in Anwendungen die Vorstufe für Baugliedpläne oder Mess-, Steuer- und Regel-Schemata (MSR-Schemata), in denen alle einzusetzenden Baugruppen einer Regelung aufgeführt sind.

Diese Darstellungen, die wie das Blockschaltbild die Anlagen strukturelle beschreiben, entstehen im Lauf der Projektierung einer Automatisierungseinrichtung, wobei der Projektant im Einzelnen festlegen muss, mit welchen Messprinzipien die Informationen gewonnen und mit welchen Geräten die Signale übertragen, in andere Signale gewandelt und verarbeitet werden. Um diese Entscheidungen treffen zu können, muss vorher jedoch entschieden werden, welche Regelungsstruktur und welche Regler zur Anwendung kommen. Dies ist die wichtigste Frage, die in den folgenden Kapiteln behandelt wird. Für deren Lösung ist die systemtheoretische Betrachtungsweise notwendig, bei der alle Elemente einer Anlage als Systeme und alle wichtigen zeitabhängigen Größen als Signale interpretiert werden und die im Blockschaltbild mündet.

**Einseitige und mehrseitige Kopplungen zwischen Teilsystemen.** Die Verwendung von Blockschaltbildern setzt voraus, dass man die Wirkungsrichtung der Signale kennt, also weiß, in welchem Teilsystem ein Signal gebildet wird und wo es rückwirkungsfrei andere Signale beeinflusst. Informationen darüber sind bei der Betrachtung von Regelkreisen immer eindeutig, denn Sensoren werden dazu verwendet, um die Regelgröße zu messen und diese Information an den Regler zu übermitteln und die Stellgröße wird im Regler gebildet und an das Stellglied gesendet (und niemals umgekehrt).

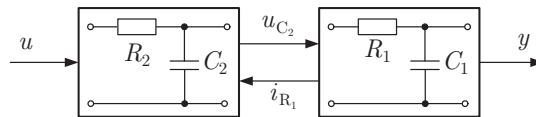


Abb. 3.10: Blockschaltbild für die Schaltung aus Abb. 4.20

Wenn man jedoch physikalische Systeme in kleinere Teilsysteme zerlegt, ist die Wirkungsrichtung der dort auftretenden Signale nicht immer eindeutig und es entstehen häufig mehrseitige Kopplungen. Dieser Sachverhalt soll anhand der zwei verkoppelten RC-Glieder in Abb. 4.20 auf S. 104 erläutert werden. Aus Sicht der Funktion des Gesamtsystems könnte man annehmen, dass das Eingangssignal  $u(t)$  die Spannung  $u_{C_2}(t)$  über dem Kondensator  $C_2$  und diese Spannung die Ausgangsgröße  $y(t)$  hervorruft, so dass man als Blockschaltbild auf eine Reihenschaltung des Teilsystems 1 mit der Eingangsgröße  $u(t)$  und der Ausgangsgröße  $u_{C_2}(t)$  mit einem Teilsystem 2 kommt, das die Eingangsgröße  $u_{C_2}(t)$  und die Ausgangsgröße  $y(t)$  besitzt. Dieses Blockschaltbild ist jedoch falsch, denn die Reihenschaltung würde bedeuten, dass man  $u_{C_2}(t)$  aus  $u(t)$  berechnen kann und zwar unabhängig davon, ob das Teilsystem 2 angekoppelt ist und welche Eigenschaften dieses Teilsystem besitzt. Tatsächlich zeigen die Modellgleichungen auf S. 601, dass die Parameter  $R_1$  und  $C_1$  des Teilsystems 2 die Ausgangsspannung des Teilsystems 1 mitbestimmen. Beide Teilsysteme wirken also gegenseitig aufeinander ein und man muss im Blockschaltbild auch die Wirkung des Teilsystems 2 auf das Teilsystem 1 durch ein Signal repräsentieren, beispielsweise durch den Strom  $i_{R_1}(t)$  (Abb. 3.10).

Bei der Zerlegung physikalischer Teilsysteme erhält man sehr häufig eine beidseitige Kopplung von Teilsystemen. Eine *Kopplung* von Teilsystemen heißt dort, dass bestimmte Signale von zwei oder mehrere Teilsystemen gemeinsam beeinflusst werden. Die Verkopplung der beiden RC-Glieder in Abb. 3.10 bewirkt deshalb, dass sowohl die Spannung zwischen den Klemmen beider Teilschaltungen gleich groß ist als auch dass der Strom aus dem einen RC-Glied gleich dem Strom in das zweite RC-Glied ist. Die Signale  $u_{C_2}(t)$  und  $i_{R_1}(t)$  hängen vom Verhalten beider Teilschaltungen ab. Nur in Ausnahmefällen entstehen einseitige Kopplungen wie in einer Reihenschaltung.

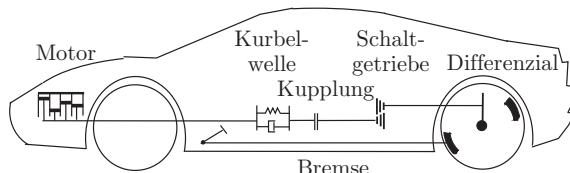
**Aufgabe 3.1** Erweiterung des Blockschaltbildes der Lagerhaltung

Beantworten Sie folgende Fragen zum Modell der Lagerhaltung aus Beispiel 3.4:

1. Kann der Block „Verkauf“ in Abb. 3.9 durch ein Summationsglied ersetzt werden?
2. Eine einfache Bestellstrategie besagt, dass täglich soviel Ware nachbestellt werden muss, wie verkauft wurde. Wie vereinfacht sich bei dieser Bestellstrategie das Blockschaltbild? Entspricht diese Bestellstrategie einer Steuerung in der offenen Wirkungskette oder einer Regelung im geschlossenen Wirkungskreis?
3. Unter welchen Bedingungen ist die in Abb. 3.9 gezeigte Abhängigkeit der Tagesbestellung vom Lagerdefizit besser als die Verwendung des Tagesverkaufes als Grundlage der Bestellung?
4. Für den Inhaber einer Verkaufsstelle ist es wünschenswert, die Lagerbestände der erwarteten Nachfrage anzupassen. Er wird vor einer erwarteten hohen Nachfrage das Lager rechtzeitig auffüllen, aber während des Verkaufes nur noch einen Teil der verkauften Ware nachbestellen. Wie muss das Blockschaltbild erweitert werden, wenn der Verkäufer diese Zielstellungen bei seiner Bestellung berücksichtigt? □

**Aufgabe 3.2\*** Blockschaltbild des Antriebsstranges eines Kraftfahrzeugs

In Abb. 3.11 ist schematisch der Antriebsstrang eines Kraftfahrzeugs dargestellt. Der Motor erzeugt ein Antriebsmoment, das über die Kurbelwelle, die Kupplung, das Schaltgetriebe und das Differenzial (sowie weitere Komponenten) auf die Antriebsräder übertragen wird. Das Drehmoment auf die Räder beschleunigt das Fahrzeug, das sich dann mit einer Geschwindigkeit  $v$  bewegt.



**Abb. 3.11:** Schematische Darstellung des Antriebsstranges eines Kraftfahrzeugs

Zeichnen Sie ein Blockschaltbild, das die Signalübertragung vom Gaspedalwinkel zur Fahrzeuggeschwindigkeit beschreibt. Tragen Sie alle wichtigen Signale in das Blockschaltbild ein. Wie entsteht daraus der Regelkreis für die Geschwindigkeitsregelung, über die heute einige Fahrzeuge verfügen?  $\square$

**Aufgabe 3.3\*** *Künstliche Beatmung*

Durch die Atmung nimmt der Mensch Sauerstoff aus der Umgebungsluft auf und scheidet Kohlendioxid aus. Dabei wird die Atemfrequenz durch einen inneren Regelkreis so eingestellt, dass die Partialdrücke  $p_{O_2}(t)$  und  $p_{CO_2}(t)$  beider Gase in den Arterien vorgegebene Werte haben. Als Störung wirkt beispielsweise ein körperliche Belastung, durch die mehr Sauerstoff benötigt und mehr Kohlendioxid im Körper produziert wird.

Wenn die eigene Atmung aufgrund einer Erkrankung den Gasaustausch nicht aufrecht erhalten kann, muss der Mensch beatmet werden. Dabei presst das Beatmungsgerät über eine Maske Luft mit einem vorgegebenen Druck  $p_{Mund}(t)$  in den Mund des Patienten oder erzeugt einen vorgegebenen Volumenstrom  $V_{Mund}(t)$ , wodurch ein bestimmter Druck  $p_{Lunge}(t)$  in der Lunge entsteht und die Lunge mit einem bestimmten Gasvolumen  $V_{Lunge}(t)$  gefüllt ist. Durch den Gasaustausch ergeben sich daraus im Blut die Partialdrücke  $p_{O_2}(t)$  und  $p_{CO_2}(t)$ . Bei dem Beatmungsgerät können u. a. der Druck  $p_{Luft}(t)$  der Atemluft, die Atemfrequenz  $RR(t)$  (*respiratory rate*) und die Sauerstoffkonzentration  $f_{O_2}(t)$  vorgegeben werden.

1. Zeichnen Sie ein Blockschaltbild, aus dem die Abhängigkeit der arteriellen Partialdrücke  $p_{O_2}(t)$  und  $p_{CO_2}(t)$  von den Vorgaben für das Beatmungsgerät hervorgeht.
2. Erfolgt die Steuerung in der offenen Wirkungskette oder im geschlossenen Regelkreis?
3. Ergänzen Sie das Blockschaltbild, wenn die Einstellwerte des Beatmungsgerätes in Abhängigkeit von Messwerten für die Partialdrücke  $p_{O_2}(t)$  und  $p_{CO_2}(t)$  so verändert werden, dass diese Größen auch unter Wirkung der Störungen an vorgegebene Sollwerte  $p_{O_2Soll}$  und  $p_{CO_2Soll}$  angepasst werden.  $\square$

### 3.3 Signalflussgraph

Um die gegenseitige Beeinflussung einzelner Signale untereinander genauer darstellen zu können, wird später außer dem Blockschaltbild der *Signalflussgraph* eingesetzt. Der Signalflussgraph ist ein gerichteter Graph, bei dem die Knoten Signale und die Kanten Übertragungseigenschaften beschreiben. Er hat folgende Interpretation:

Der Wert jedes Signals kann in Abhängigkeit von den Signalen bestimmt werden, von denen Pfeile auf das betreffende Signal zeigen. Die Wirkung jedes Pfeiles ergibt sich als Produkt des Kantengewichts und des Wertes desjenigen Signals, von dem die Kante ausgeht. Zeigen zwei oder mehrere Kanten auf denselben Knoten, so addieren sich ihre Wirkungen.

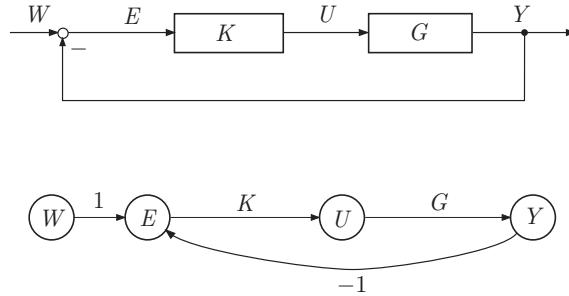
**Beispiel 3.5** Signalflossgraph

Der in Abb. 3.12 dargestellte Signalflossgraph ist äquivalent zu folgendem Gleichungssystem:

$$E = W - Y$$

$$U = KE$$

$$Y = GU.$$



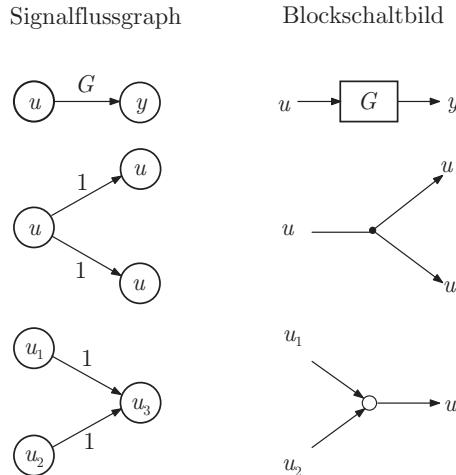
**Abb. 3.12:** Blockschaltbild (oben) und Signalflossgraph (unten) eines Regelkreises

Über dem Signalflossgraphen ist zum Vergleich das Blockschaltbild angegeben. Die Signale, die im Signalflossgraphen durch Knoten dargestellt werden, werden im Blockschaltbild durch Pfeile repräsentiert. Dementsprechend erscheint die Wichtung der Kanten des Signalflossgraphen im Blockschaltbild als Übertragungseigenschaft der Blöcke. Auf die Bedeutung der hier angegebenen Gleichungen wird später noch ausführlich eingegangen. □

**Vergleich von Signalflossgraph und Blockschaltbild.** Abbildung 3.13 vergleicht die Elemente von Blockschaltbildern mit denen von Signalflossgraphen. Man erkennt, dass bei beiden Darstellungsformen die Bedeutung der Kanten (Pfeile) und Blöcke bzw. Knoten vertauscht ist.

Drei wichtige Eigenschaften haben beide Darstellungsformen gemeinsam:

- Sie beschreiben die Struktur des Systems, ohne auf detaillierte dynamische Eigenschaften einzugehen.
- Die Darstellung eines Systems kann aus den entsprechenden Darstellungen der Teilsysteme zusammengesetzt werden, denn die Elemente der Blockschaltbilder bzw. der Signalflossgraphen sind beliebig kombinierbar. Man spricht in diesem Zusammenhang von *kompositionaler Modellbildung*.
- Beide Darstellungen abstrahieren von der physikalischen Realität, die im Gegensatz dazu in elektrischen Netzwerken oder RI-Schemata gut erkennbar ist.



**Abb. 3.13:** Vergleich der wichtigsten Elemente von Signalflussgraphen und Blockschaltbildern

Im Unterschied zum Blockschaltbild beschreibt der Signalflussgraph nicht nur den globalen Zusammenhang zwischen den Signalen, sondern auch, wie die Signale im Einzelnen miteinander verknüpft werden. Er steht deshalb in sehr engem Zusammenhang mit dem quantitativen Modell des betrachteten Systems. Demgegenüber kann das Blockschaltbild als globale Darstellung auch aus einer verbalen Beschreibung des Systems aufgestellt werden. Ein weiterer Unterschied besteht in der Tatsache, dass der Signalflussgraph im Wesentlichen nur bei linearen Systemen angewendet werden kann.

## Literaturhinweise

Für eine ausführlichere Erläuterung der kybernetischen Grundbegriffe wie System, Element, Bewegung, Verhalten, Signal und Information wird auf [90], Kap. 2 und 5 verwiesen.

Die im Abschn. 3.1 angegebenen Schritte der Modellbildung sind ausführlich in [18] und [71], Kap. 7 erläutert, wobei in [18] auch auf Beispiele aus der Ökologie zurückgegriffen und damit demonstriert wird, dass die hier dargestellte Herangehensweise bei der Modellbildung sehr vielseitig angewendet werden kann. Im Beispiel 3.1 wird die in [26] angeregte systemtheoretische Betrachtungsweise für die Klinkerherstellung in der Zementindustrie verwendet. Der im Beispiel 3.2 beschriebene Reaktortyp ist aus regelungstechnischer Sicht in [84] untersucht worden. Problemstellung und Blockschaltbild des Beispiels 3.3 sind [105] entnommen. Das Beispiel 3.4 entstand in Anlehnung an die systemtheoretische Behandlung von Lagerhaltungsproblemen in [18]. Eine ausführliche regelungstechnische Analyse der in Aufgabe 3.3 behandelten künstlichen Beatmung findet man in [64].

# 4

## Beschreibung linearer Systeme im Zeitbereich

Nach der Darstellung linearer Systeme durch Differentialgleichungen wird in diesem Kapitel das Zustandsraummodell eingeführt, das auf dem fundamentalen systemtheoretischen Begriff des Zustands eines dynamischen Systems basiert. Es ist eine Modellform, auf der viele Analyse- und Entwurfsverfahren für Regelungen aufbauen.

### 4.1 Modellbildungsaufgabe

Dieses Kapitel befasst sich mit der Aufstellung mathematischer Modelle. Entsprechend Abb. 4.1 wird ein dynamisches System  $\Sigma$  mit einer Eingangsgröße  $u(t)$  und einer Ausgangsgröße  $y(t)$  betrachtet. Das Modell soll den Zusammenhang zwischen beiden Signalen beschreiben, so dass man für ein gegebenes Eingangssignal  $u(t)$  das vom System  $\Sigma$  erzeugte Ausgangssignal  $y(t)$  berechnen kann.



**Abb. 4.1:** Strukturbild des Systems

In diesem Kapitel werden zwei Modellformen behandelt. Zunächst wird gezeigt, wie man dynamische Systeme durch Differentialgleichungen darstellen kann. Danach wird das Zustandsraummodell eingeführt. Die in beiden Fällen zu lösende Modellbildungsaufgabe kann folgendermaßen zusammengefasst werden:

### Modellbildungsaufgabe

- |          |                                                                            |
|----------|----------------------------------------------------------------------------|
| Gegeben: | Dynamisches System $\Sigma$<br>mit Eingangsgröße $u$ und Ausgangsgröße $y$ |
| Gesucht: | Differentialgleichung oder Zustandsraummodell                              |

Im Kap. 6 werden weitere Modellformen behandelt, die das System  $\Sigma$  im Frequenzbereich repräsentieren.

Für die Verwendung der genannten Modelle ist es nicht nur wichtig zu wissen, welche mathematischen Eigenschaften diese Modelle haben. Für die Anwendung ist es mindestens genauso wichtig zu wissen, wie sich die physikalischen Eigenschaften dynamischer Systeme in diesen Modellen niederschlagen.

Bei der Aufstellung der Modelle geht man i. Allg. von den physikalischen Grundgesetzen aus. Dies sind bei elektrischen Systemen z. B. die Kirchhoff'schen Gesetze und bei mechanischen Systemen die Erhaltungssätze für Energie und Impuls. Das Aufstellen der in einem System wirkenden physikalischen Beziehungen und deren Umformung in eine Differentialgleichung bzw. in ein Zustandsraummodell bezeichnet man als *theoretische Modellbildung*. Dieser Modellbildungsweg wird für die meisten in diesem Buch behandelten Beispiele beschritten.

Der alternative Weg geht von Experimenten aus, bei denen man für eine spezielle Eingangsgröße  $u$  die Ausgangsgröße  $y$  misst und das Modell dann so auswählt, dass es den gemessenen Verlauf der Ausgangsgröße reproduziert. Dieser Modellbildungsweg wird als *experimentelle Prozessanalyse* oder *Identifikation* bezeichnet. Im Abschn. 5.7 wird kurz auf diesen Modellbildungsweg eingegangen.

**Voraussetzungen.** Im Folgenden werden nur Systeme betrachtet, die als Systeme mit konzentrierten Parametern behandelt werden können und für die als Modell folglich eine gewöhnliche Differentialgleichung entsteht. Die dynamischen Eigenschaften der Systeme sollen zeitlich unveränderlich sein, so dass die Differentialgleichung konstante Koeffizienten bzw. die im Zustandsraummodell vorkommenden Matrizen und Vektoren konstante Elemente besitzen.

Das Verhalten der Systeme wird im Zeitintervall  $t = 0 \dots \infty$  untersucht und die Nachwirkung, die die Bewegung des Systems im Zeitintervall  $-\infty \dots 0$  auf das Systemverhalten im Zeitintervall  $0 \dots \infty$  hat, durch die Anfangsbedingung der Differentialgleichung bzw. den Anfangszustand des Systems erfasst. Deshalb werden alle Signale nur für das Zeitintervall  $t = 0 \dots \infty$  beschrieben und es wird angenommen, dass die Signale für  $t < 0$  verschwinden. Man nennt derartige Signale auch *kausale Signale*. Wenn man beispielsweise eine sinusförmige Eingangsgröße  $u(t)$  mit der Frequenz  $\omega$  und der Amplitude  $\bar{u}$  betrachtet, so ist die vollständige Beschreibung des Signals

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \bar{u} \sin \omega t & \text{für } t \geq 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

sehr umständlich. Um dies abzukürzen, wird im Folgenden für alle Signale angenommen, dass die erste Zeile von Gl. (4.1) gilt und es wird nur die zweite Zeile

$$u(t) = \bar{u} \sin \omega t \quad (4.2)$$

aufgeschrieben, ohne auf den Gültigkeitsbereich  $t \geq 0$  hinzuweisen.

Die vereinfachte Darstellung (4.2) kann zu Fehlern führen, wenn man die Signale in der Umgebung von  $t = 0$  betrachtet. Beispielsweise kann man aus dieser Darstellung nicht erkennen, dass  $u(t)$  an der Stelle  $t = 0$  nicht differenzierbar ist. Um derartige Fehler zu vermeiden, wird an den entsprechenden Stellen auf die exakte Darstellung (4.1) verwiesen.

## 4.2 Beschreibung linearer Systeme durch Differentialgleichungen

### 4.2.1 Lineare Differentialgleichung $n$ -ter Ordnung

Die Differentialgleichung beschreibt den dynamischen Zusammenhang zwischen der Eingangsgröße  $u(t)$  und der Ausgangsgröße  $y(t)$ , also die Übertragungseigenschaften des in Abb. 4.1 gezeigten Blocks. Sie hat die allgemeine Form

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = \\ = b_q \frac{d^q u(t)}{dt^q} + b_{q-1} \frac{d^{q-1} u(t)}{dt^{q-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Gleichung (4.3) ist eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung.  $a_i$  und  $b_i$  sind reellwertige Koeffizienten, die aus den physikalischen Parametern des Systems berechnet werden können. Die erste und zweite Ableitung nach der Zeit kennzeichnet man oft mit einem bzw. zwei Punkten über der abgeleiteten Größe:

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= \dot{y}(t), & \frac{du(t)}{dt} &= \dot{u}(t) \\ \frac{d^2 y(t)}{dt^2} &= \ddot{y}(t), & \frac{d^2 u(t)}{dt^2} &= \ddot{u}(t). \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung wird häufig so umgeformt, dass  $a_n = 1$  gilt:

Systembeschreibung durch eine Differentialgleichung:

$$\Sigma : \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_q \frac{d^q u}{dt^q} + \dots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t). \quad (4.4)$$

Es wird angenommen, dass für die Grade der höchsten Ableitungen von  $y$  und  $u$  die Beziehung

$$q \leq n$$

gilt, weil nur Systeme, die diese Bedingung erfüllen, technisch realisierbar sind. Die Differenz

für technisch realisierbare Systeme:  $r = n - q \geq 0$

(4.5)

wird als *relativer Grad* (oder Relativgrad, Differenzordnung, Differenzgrad) des Systems bezeichnet. Dieser Wert wird im Folgenden eine wichtige Rolle spielen.

Bei der Systembeschreibung durch eine Differentialgleichung interessiert man sich für die zukünftige Bewegung, also für  $y(t)$  für  $t \geq 0$  (oder allgemeiner  $t \geq t_0$ ). Deshalb muss auch die Eingangsgröße nur für  $t \geq 0$  bekannt sein. Die Wirkung der Eingangsgröße für  $t < 0$  spiegelt sich in den  $n$  Anfangsbedingungen der Differentialgleichung wider, für die Werte  $y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n}$  gegeben sein müssen:

$$\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}(0) = y_{0n}, \dots, \dot{y}(0) = y_{02}, \quad y(0) = y_{01}. \quad (4.6)$$

Die lineare Differentialgleichung (4.4) hat die Eigenschaft, dass sie für eine beliebige im Zeitintervall  $t \geq 0$  gegebene Eingangsgröße  $u(t)$  eine eindeutige Lösung  $y(t)$  ( $t \geq 0$ ) besitzt.

#### 4.2.2 Aufstellung der Differentialgleichung

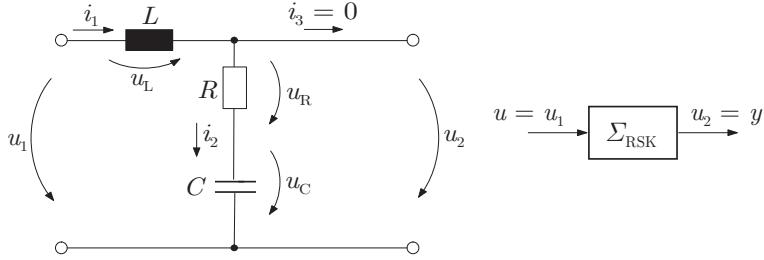
Die folgenden Beispiele zeigen, wie die Differentialgleichung (4.3) aus den physikalischen Grundgleichungen abgeleitet werden kann. Dabei wird offensichtlich, dass die Form der Gleichung unabhängig davon ist, ob elektrische, mechanische oder verfahrenstechnische Prozesse betrachtet werden. Bei allen weiteren regelungstechnischen Untersuchungen kann also davon ausgegangen werden, dass von der Regelstrecke ein Modell der Form (4.3) zur Verfügung steht.

##### **Beispiel 4.1** Aufstellung der Differentialgleichung eines Reihenschwingkreises

Betrachtet wird der Reihenschwingkreis  $\Sigma_{RSK}$  in Abb. 4.2, in der die Spannung  $u_1(t)$  eine von außen beeinflussbare Größe darstellt und die Spannung  $u_2(t)$  als Reaktion des Schwingkreises gemessen wird. Das System hat also das in der Abbildung rechts angegebene Strukturbild.  $R$ ,  $L$  und  $C$  stellen einen ohmschen Widerstand, eine Induktivität und eine Kapazität dar. Es wird angenommen, dass zur Zeit  $t = 0$  kein Strom durch die Induktivität fließt und die Kondensatorspannung einen bekannten Wert  $u_0$  besitzt:

$$i_1(0) = 0, \quad u_C(0) = u_0. \quad (4.7)$$

Ferner wird angenommen, dass der Schwingkreis nicht belastet ist und folglich  $i_3(t) = 0$  und  $i_1(t) = i_2(t)$  gilt.



**Abb. 4.2:** Schaltung und Blockschaltbild eines Reihenschwingkreises

Die Bauelemente sind durch die folgenden Gleichungen beschrieben:

$$u_R(t) = R i_1(t) \quad (4.8)$$

$$u_L(t) = L \frac{di_1(t)}{dt} \quad (4.9)$$

$$u_C(t) = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_1(\tau) d\tau. \quad (4.10)$$

Die Kirchhoff'schen Gesetze besagen, dass die Summe der Spannungen innerhalb einer Masche gleich null ist. Also gilt für die rechte Masche

$$u_2(t) = u_R(t) + u_C(t) \quad (4.11)$$

und für die linke Masche

$$u_1(t) = u_L(t) + u_R(t) + u_C(t). \quad (4.12)$$

Im Folgenden ist aus den angegebenen Gleichungen eine Differentialgleichung abzuleiten, in der nur noch die Eingangsgröße  $u(t) = u_1(t)$  und die Ausgangsgröße  $y(t) = u_2(t)$  sowie deren Ableitungen vorkommen. Aus (4.9), (4.11) und (4.12) folgen die Beziehungen

$$u_1(t) = L \frac{di_1(t)}{dt} + u_2(t)$$

und

$$\frac{di_1(t)}{dt} = \frac{1}{L}(u_1(t) - u_2(t)). \quad (4.13)$$

Wird die zweite Gleichung nach der Zeit abgeleitet, so erhält man

$$\frac{d^2i_1(t)}{dt^2} = \frac{1}{L} \left( \frac{du_1(t)}{dt} - \frac{du_2(t)}{dt} \right). \quad (4.14)$$

Aus den Gl. (4.8), (4.10) und (4.11) erhält man die Beziehung

$$u_2(t) = R i_1(t) + u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_1(\tau) d\tau, \quad (4.15)$$

die zweimal nach der Zeit abgeleitet die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} = R \frac{d^2 i_1(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} \frac{di_1(t)}{dt}$$

ergibt. Mit Hilfe der Gln. (4.13) und (4.14) erhält man schließlich die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{u}_2(t) = \frac{R}{L}(\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)) + \frac{1}{LC}(u_1(t) - u_2(t)).$$

Diese Gleichung kann in die Standardform überführt werden:

$$\Sigma_{\text{RSK}} : CL\ddot{u}_2(t) + CR\dot{u}_2(t) + u_2(t) = CR\dot{u}_1(t) + u_1(t). \quad (4.16)$$

Gleichung (4.3) gilt mit

$$\begin{aligned} a_2 &= CL, & a_1 &= CR, & a_0 &= 1 \\ b_1 &= CR, & b_0 &= 1. \end{aligned}$$

Für die Anfangsbedingungen (4.7) erhält man aus Gl. (4.15) die Beziehung

$$u_2(0) = u_0.$$

Eine Differenziation von Gl. (4.15) und Einsetzen von Gl. (4.13) liefert

$$\dot{u}_2(t) = \frac{R}{L}(u_1(t) - u_2(t)) + \frac{1}{C}i_1(t).$$

Da nach Voraussetzung  $i_1(0) = i_2(0) = 0$  ist und  $u_1(t) = 0$  für  $t < 0$  gilt, ist die zweite Anfangsbedingung

$$\dot{u}_2(0) = -\frac{R}{L}u_0. \quad \square$$

### Beispiel 4.2 Aufstellung der Differentialgleichung eines Feder-Masse-Schwingers

Als Beispiel eines mechanischen Systems wird der Feder-Masse-Schwinger  $\Sigma_{\text{FMS}}$  in Abb. 4.3 betrachtet, bei dem  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  und  $x_3(t)$  die Positionen der in der Abbildung gekennzeichneten Punkte bezeichnen. Es wird angenommen, dass das System nur Bewegungen entlang einer vertikalen Achse ausführen kann.  $x_1(t)$  ist die Eingangsgröße des Systems, d. h., der Schwinger wird bei einer von außen erzwungenen Bewegung des oberen Endes der Feder betrachtet. Beobachtet wird die Position  $x_3(t)$  der Masse  $m$ .  $c$  ist die Federkonstante und  $d$  die Dämpfungskonstante. Es wird davon ausgegangen, dass die Größen  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  und  $x_3(t)$  so gemessen werden, dass in der Ruhelage  $x_i = 0$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) gilt. Die Erdanziehung wird im Folgenden vernachlässigt.

Entsprechend dem Newton'schen Gesetz ist die Beschleunigung der Masse  $m$  proportional zur Summe der äußeren Kräfte  $F_m$ :

$$F_m(t) = m \ddot{x}_3(t). \quad (4.17)$$

Bei geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung wird die durch den Dämpfer übertragene Kraft  $F_d(t)$  durch die Relativbewegung der beiden Enden des Dämpfers und die Dämpfungskonstante bestimmt:

$$F_d(t) = d (\dot{x}_2(t) - \dot{x}_3(t)). \quad (4.18)$$

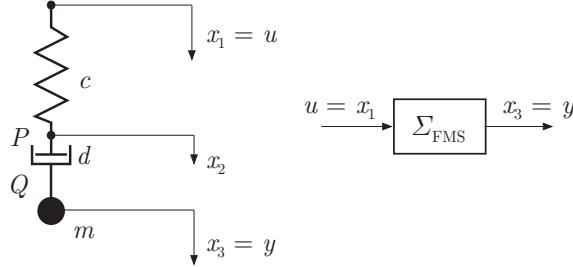


Abb. 4.3: Feder-Masse-Schwinger

Die Federkraft  $F_c(t)$  lässt sich aus den Positionen  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  der Federenden sowie der Federkonstanten berechnen:

$$F_c(t) = c(x_1(t) - x_2(t)). \quad (4.19)$$

Für die Kopplung der drei Elemente erhält man aus den Kräftegleichgewichten an den Punkten  $P$  und  $Q$  zwei algebraische Beziehungen. Da die Erdanziehung vernachlässigt wird, ist am Punkt  $Q$  die auf die Masse wirkende Kraft  $F_m(t)$  gleich der vom Dämpfer ausgeübten Kraft  $F_d(t)$ :

$$F_m(t) = F_d(t). \quad (4.20)$$

Andererseits stimmt im Punkt  $P$  die Federkraft  $F_c(t)$  mit der Dämpferkraft  $F_d(t)$  überein:

$$F_d(t) = F_c(t). \quad (4.21)$$

Die Gln. (4.17) – (4.21) beschreiben das Feder-Masse-System vollständig. Die folgenden Umformungen dienen dazu, aus diesen Beziehungen eine Differentialgleichung abzuleiten, in der nur die Eingangsgröße  $u(t) = x_1(t)$  und die Ausgangsgröße  $y(t) = x_3(t)$  vorkommt. Aus den Gln. (4.17) und (4.19) – (4.21) erhält man

$$\ddot{x}_3(t) = \frac{c}{m}(x_1(t) - x_2(t)) \quad (4.22)$$

und aus den Gln. (4.17), (4.18) und (4.20)

$$\dot{x}_2(t) = \frac{m}{d}\ddot{x}_3(t) + \dot{x}_3(t).$$

Um  $x_2(t)$  aus Gl. (4.22) zu eliminieren, wird die letzte Gleichung nach der Zeit integriert:

$$x_2(t) - x_2(0) = \frac{m}{d}\dot{x}_3(t) + x_3(t) - \left(\frac{m}{d}\dot{x}_3(0) + x_3(0)\right).$$

Damit diese Gleichung für alle Zeitpunkte  $t$  erfüllt ist, muss

$$x_2(t) = \frac{m}{d}\dot{x}_3(t) + x_3(t)$$

gelten. In Gl. (4.22) eingesetzt erhält man die gesuchte Differentialgleichung

$$\Sigma_{\text{FMS}} : \quad \ddot{x}_3(t) = \frac{c}{m}x_1(t) - \frac{c}{m}\frac{m}{d}\dot{x}_3(t) - \frac{c}{m}x_3(t)$$

und nach Umstellung

$$\frac{m}{c} \ddot{x}_3(t) + \frac{m}{d} \dot{x}_3(t) + x_3(t) = x_1(t). \quad (4.23)$$

Diese Gleichung hat die Standardform (4.3) mit

$$a_2 = \frac{m}{c}, \quad a_1 = \frac{m}{d}, \quad a_0 = 1, \quad b_0 = 1. \quad \square$$

### Beispiel 4.3 Aufstellung der Differentialgleichung für einen Rührkesselreaktor

Als drittes Beispiel wird gezeigt, wie für den in Abb. 4.4 gezeigten homogen durchmischten Rührkesselreaktor  $\Sigma_{\text{RKR}}$  ein dynamisches Modell aufgestellt werden kann. Der Reaktor arbeitet mit konstanter Flüssigkeitshöhe, d. h., der Massenstrom  $w$  (gemessen in  $\frac{\text{kg}}{\text{min}}$ ) der zulaufenden Flüssigkeit ist gleich dem der ablaufenden Flüssigkeit.

Die elektrische Heizung des Reaktors liefert pro Zeiteinheit eine konstante Wärmemenge  $\dot{Q}$ . Die Temperatur  $T_z(t)$  der zulaufenden Flüssigkeit beeinflusst die Temperatur  $T(t)$  der im Reaktor befindlichen Flüssigkeit. Das Modell soll den Zusammenhang zwischen beiden Temperaturen beschreiben.

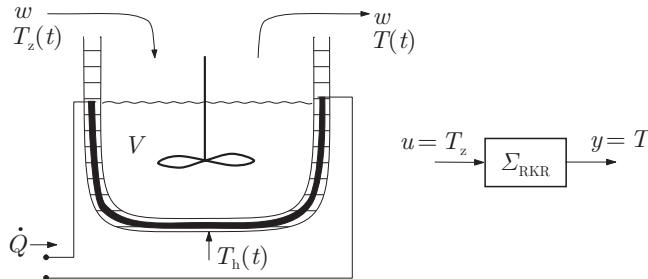


Abb. 4.4: Rührkesselreaktor

In die Wärmebilanz der Flüssigkeit gehen die durch den Zulauf pro Zeiteinheit dem Reaktor zugeführte Wärme  $w c T_z(t)$ , die durch den Ablauf entnommene Wärme  $w c T$  sowie die über die Heizung pro Zeiteinheit zugeführte Wärme  $\alpha A(T_h(t) - T(t))$  ein. Dabei bezeichnet  $c$  die spezifische Wärmekapazität der Flüssigkeit,  $\alpha$  den Wärmeübergangskoeffizienten der Reaktorwand zur Flüssigkeit sowie  $A$  die Fläche der geheizten Reaktorwand. Da sich die Summe dieser pro Zeiteinheit dem Reaktor zugeführten Wärme in einer Temperaturerhöhung niederschlägt, erhält man folgende Differentialgleichung:

$$mc \frac{dT(t)}{dt} = w c T_z(t) - w c T(t) + \alpha A(T_h(t) - T(t)). \quad (4.24)$$

In die Wärmebilanz der geheizten Reaktorwand geht die pro Zeiteinheit durch die Heizung der Wand zugeführte Wärme  $\dot{Q}$  sowie die an die Flüssigkeit abgegebene Wärme  $\alpha A(T_h(t) - T(t))$  ein, woraus sich folgende Differentialgleichung ergibt:

$$m_h c_h \frac{dT_h(t)}{dt} = \dot{Q} - \alpha A(T_h(t) - T(t)). \quad (4.25)$$

Dabei bezeichnen  $m_h$  und  $c_h$  die Masse bzw. die spezifische Wärmekapazität der Reaktorwand.

Die gesuchte Differentialgleichung für den Reaktor erhält man durch Umformung der beiden angegebenen Gleichungen. Stellt man die erste Gleichung nach  $T_h(t)$  um, so erhält man

$$T_h(t) = \frac{mc}{\alpha A} \frac{dT(t)}{dt} - \frac{wc}{\alpha A} T_z(t) + \frac{wc}{\alpha A} T(t) + T(t).$$

Durch Differenziation ergibt sich daraus

$$\frac{dT_h(t)}{dt} = \frac{mc}{\alpha A} \frac{d^2T(t)}{dt^2} - \frac{wc}{\alpha A} \frac{dT_z(t)}{dt} + \left(1 + \frac{wc}{\alpha A}\right) \frac{dT(t)}{dt}.$$

Nachdem man beide Gleichungen in (4.25) eingesetzt hat, erhält man

$$\begin{aligned} m_h c_h \left( \frac{mc}{\alpha A} \frac{d^2T(t)}{dt^2} - \frac{wc}{\alpha A} \frac{dT_z(t)}{dt} + \left(1 + \frac{wc}{\alpha A}\right) \frac{dT(t)}{dt} \right) \\ = \dot{Q} - \alpha A \left( \frac{mc}{\alpha A} \frac{dT(t)}{dt} - \frac{wc}{\alpha A} T_z(t) + \frac{wc}{\alpha A} T(t) + T(t) - T(t) \right) \end{aligned}$$

und nach Umstellung

$$\begin{aligned} \frac{m_h c_h mc}{\alpha A} \frac{d^2T(t)}{dt^2} + \left(m_h c_h \left(1 + \frac{wc}{\alpha A}\right) + mc\right) \frac{dT(t)}{dt} + wc T(t) \\ = \frac{m_h c_h wc}{\alpha A} \frac{dT_z(t)}{dt} + wc T_z(t) + \dot{Q} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \Sigma_{RKR} : \quad & \frac{m_h c_h m}{w \alpha A} \frac{d^2T(t)}{dt^2} + \left(\frac{m_h c_h}{wc} + \frac{m_h c_h}{\alpha A} + \frac{m}{w}\right) \frac{dT(t)}{dt} + T(t) \\ & = \frac{m_h c_h}{\alpha A} \frac{dT_z(t)}{dt} + T_z(t) + \frac{1}{wc} \dot{Q}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Dies ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, in der als zeitabhängige Größen die Eingangsgröße  $T_z(t)$  und die Ausgangsgröße  $T(t)$  des Reaktors vorkommen. Die Gleichung hat aber noch nicht die vorgeschriebene Gestalt (4.3), denn auf der rechten Seite steht die Konstante  $\frac{\dot{Q}}{wc}$ .

Diese Konstante kann man dadurch eliminieren, dass man das statische Verhalten des Reaktors berechnet und im Modell nur die Abweichungen von diesem Verhalten berücksichtigt. Bei konstanter Zulauftemperatur  $T_z(t) = \bar{T}_z$  stellt sich nach langer Zeit (theoretisch bei  $t \rightarrow \infty$ ) eine konstante Temperatur  $T(t) = \bar{T}$  ein, die man dadurch berechnen kann, dass man dem statischen Zustand entsprechend alle Ableitungen gleich null setzt. Man erhält die Gleichung

$$\bar{T} = \bar{T}_z + \frac{1}{wc} \dot{Q}, \quad (4.27)$$

die aussagt, dass sich die Reaktortemperatur gegenüber der Zulauftemperatur erhöht und zwar um den auf die Zulaufmenge und die spezifische Wärmekapazität der Flüssigkeit bezogene Wärmestrom  $\dot{Q}$  der Heizung.

Bezeichnen  $\delta T(t)$  und  $\delta T_z(t)$  die Abweichungen der Temperaturen von diesen Arbeitspunktswerten

$$\begin{aligned} \delta T(t) &= T(t) - \bar{T} \\ \delta T_z(t) &= T_z(t) - \bar{T}_z, \end{aligned}$$

so gelangt man durch Einsetzen in die Gl. (4.26) zu der Differentialgleichung

$$\frac{m_h c_h m}{w \alpha A} \frac{d^2 \delta T(t)}{dt^2} + \left( \frac{m_h c_h}{w c} + \frac{m_h c_h}{\alpha A} + \frac{m}{w} \right) \frac{d \delta T(t)}{dt} + \delta T(t) = \frac{m_h c_h}{\alpha A} \frac{d \delta T_z(t)}{dt} + \delta T_z(t),$$

die die vorgegebene Form (4.3) besitzt. Da in der Regelungstechnik häufig nicht mit absoluten Werten, sondern mit Abweichungen von einem gegebenen Arbeitspunkt gearbeitet wird, ist es üblich, an Stelle der Abweichungen  $\delta T$  und  $\delta T_z$  wieder die alten Formelzeichen  $T$  bzw.  $T_z$  zu schreiben und sich dabei zu merken, dass in das Modell die Abweichungen vom Arbeitspunkt eingehen:

$$\Sigma_{RKR} : \frac{m_h c_h m}{w \alpha A} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \left( \frac{m_h c_h}{w c} + \frac{m_h c_h}{\alpha A} + \frac{m}{w} \right) \frac{dT(t)}{dt} + T(t) = \frac{m_h c_h}{\alpha A} \frac{dT_z(t)}{dt} + T_z(t).$$

Diese Gleichung hat die Standardform (4.3), wobei gilt

$$a_2 = \frac{m_h c_h m}{w \alpha A}, \quad a_1 = \frac{m_h c_h}{w c} + \frac{m_h c_h}{\alpha A} + \frac{m}{w}, \quad a_0 = 1 \\ b_1 = \frac{m_h c_h}{\alpha A}, \quad b_0 = 1. \quad \square$$

Die Beispiele zeigen, dass die Differentialgleichung (4.3) in vier Schritten abgeleitet wird:

---

#### Algorithmus 4.1 Aufstellung einer Differentialgleichung

---

**Gegeben:** Kontinuierliches System  $\Sigma$  mit Eingang  $u$  und Ausgang  $y$

1. **Systemzerlegung:** Zerlegen Sie das System in Komponenten.
2. **Komponentenmodelle:** Schreiben Sie die physikalischen Gesetze auf, die das Verhalten der Komponenten beschreiben.
3. **Kopplungsbeziehungen:** Schreiben Sie die Beziehungen auf, die zwischen den Komponenten bestehen.
4. **Modellumformung:** Fassen Sie die Gleichungen zu einer Differentialgleichung zusammen.

**Ergebnis:** Differentialgleichung der Form (4.3), die das System  $\Sigma$  repräsentiert.

---

Nur der vierte Schritt hängt davon ab, welches Signal als Eingangsgröße und welches als Ausgangsgröße betrachtet wird. So könnte bei dem Reihenschwingkreis an Stelle der Spannung  $u_2(t)$  auch der Strom  $i_2(t)$  als Ausgangsgröße genutzt werden. Bei der Modellierung würden dann dieselben Bauelementebeschreibungen und Maschengleichungen verwendet, diese jedoch zu einer Differentialgleichung umgeformt werden, in die  $i_2(t)$  an Stelle von  $u_2(t)$  als Ausgangsgröße eingingen.

Welche Methoden bzw. Gesetze angewendet werden müssen, um zu den Komponentenmodellen und den Kopplungsbeziehungen zu gelangen, hängt vom Charakter des betrachteten Systems ab.

- **Elektrische und elektronische Systeme** werden durch die Maxwell'schen Gleichungen beschrieben. Kann man das System zunächst in ein Schaltbild überführen, so wendet man für die Modellbildung die Kirchhoff'schen Gesetze an.
- **Verfahrenstechnische Anlagen** werden zunächst in Bilanzräume unterteilt. Für diese Räume werden dann Energie- und Stoffbilanzen aufgestellt. Die Koppelgleichungen für die Bilanzräume ergeben sich aus dem Energie- bzw. Stoffaus tausch zwischen diesen Räumen.
- **Mechanische Systeme** werden durch Kräfte- und Momentengleichungen beschrieben.

Die hier aufgezählten Prinzipien werden auch in vielen anderen Disziplinen eingesetzt, beispielsweise bei der Verkehrsflussmodellierung, bei der ein „Erhaltungssatz“ für die in einen Straßenabschnitt hinein- bzw. herausfahrenden Fahrzeuge als Grundlage der Modellbildung dient.

#### Aufgabe 4.1 Erweiterung des Modells aus Beispiel 4.1

Wie muss das in Beispiel 4.1 aufgestellte Modell erweitert werden, wenn die rechten Klemmen des Schwingkreises entweder durch einen ohmschen Widerstand  $R_1$  oder durch eine Kapazität  $C_2$  verbunden werden? Geben Sie für beide Fälle die Differentialgleichung an. Hat sich die Ordnung der Differentialgleichung geändert? □

#### Aufgabe 4.2 Thermisches Verhalten eines Rührkesselreaktors

Im Beispiel 4.3 wurde ein Rührkesselreaktor bei konstanter Heizleistung  $\dot{Q}$  und veränderlicher Temperatur  $T_z(t)$  des Zuflusses betrachtet. Wenn man eine Regelung entwerfen will, die die Flüssigkeitstemperatur  $T(t)$  im Reaktor durch Veränderung der Heizleistung  $\dot{Q}(t)$  konstant halten soll, braucht man ein Modell, das den Zusammenhang zwischen der Heizleistung  $\dot{Q}(t)$  als Eingangsgröße und der Flüssigkeitstemperatur  $T(t)$  als Ausgangsgröße bei konstanter Temperatur  $T_z$  des Zuflusses beschreibt. Wie heißt diese Differentialgleichung? Wodurch unterscheidet sich der Modellbildungsweg, auf dem Sie diese Differentialgleichung erhalten, von dem im Beispiel 4.3 behandelten? □

### 4.2.3 Linearität dynamischer Systeme

Ein dynamisches System  $\Sigma$  heißt *linear*, wenn sich die Wirkungen zweier linear überlagerter Eingangssignale am Ausgang des Systems in gleicher Weise linear überlagern (*Superpositionsprinzip*). Wird also für  $u(t)$  die Linearkombination

$$u(t) = k u_1(t) + l u_2(t) \quad (4.28)$$

der beiden Funktionen  $u_1(t)$  und  $u_2(t)$  eingesetzt, so fordert das Superpositionsprinzip, dass sich die dabei erhaltene Ausgangsgröße  $y(t)$  als Linearkombination

$$y(t) = k y_1(t) + l y_2(t) \quad (4.29)$$

darstellen lässt. Dabei ist  $y_1(t)$  die Lösung der Differentialgleichung (4.3) mit  $u = u_1(t)$  und  $y_2(t)$  die Lösung für  $u = u_2(t)$ , d. h., es gilt

$$a_n \frac{d^n y_1}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy_1}{dt} + a_0 y_1(t) = b_q \frac{d^q u_1}{dt^q} + \dots + b_1 \frac{du_1}{dt} + b_0 u_1(t) \quad (4.30)$$

$$a_n \frac{d^n y_2}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy_2}{dt} + a_0 y_2(t) = b_q \frac{d^q u_2}{dt^q} + \dots + b_1 \frac{du_2}{dt} + b_0 u_2(t). \quad (4.31)$$

Für diese Beziehung wird die vereinfachende Schreibweise

$$u_1(t) \mapsto y_1(t), \quad u_2(t) \mapsto y_2(t) \quad (4.32)$$

eingeführt. Der Pfeil  $\mapsto$  kennzeichnet also das durch Gl. (4.3) beschriebene dynamische System  $\Sigma$  als Funktionseinheit, die  $u_1(t)$  in  $y_1(t)$  bzw.  $u_2(t)$  in  $y_2(t)$  überführt.

Mit dieser Schreibweise kann die Linearitätseigenschaft des dynamischen Systems durch

$$\text{Linearität: } u(t) = k u_1(t) + l u_2(t) \mapsto y(t) = k y_1(t) + l y_2(t) \quad (4.33)$$

dargestellt werden, wobei für die Komponenten von  $y(t)$  und  $u(t)$  die Beziehung (4.32) erfüllt ist. Zu beachten ist, dass die Beziehung (4.33) auch für die Anfangsbedingungen (4.6) gelten muss, d. h., die Linearitätseigenschaft gilt nur unter der Bedingung

$$\frac{d^i y}{dt^i}(0) = k \frac{d^i y_1}{dt^i}(0) + l \frac{d^i y_2}{dt^i}(0), \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (4.34)$$

Diese Bedingung ist insbesondere dann erfüllt, wenn sich das System zur Zeit  $t = 0$  in der Ruhelage befindet und folglich alle Anfangsbedingungen verschwinden.

**Beweis der Linearitätseigenschaft.** Um die angegebene Linearitätseigenschaft zu beweisen, setzt man die Beziehungen (4.28) und (4.29) in die linke Seite von der Differentialgleichung (4.3) ein, wodurch man

$$\begin{aligned} & a_n \frac{d^n(k y_1 + l y_2)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d(k y_1 + l y_2)}{dt} + a_0(k y_1 + l y_2) \\ &= k \left( a_n \frac{d^n y_1}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy_1}{dt} + a_0 y_1 \right) + l \left( a_n \frac{d^n y_2}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy_2}{dt} + a_0 y_2 \right) \end{aligned}$$

erhält. Ein Vergleich der letzten Zeile mit den Gln. (4.30) und (4.31) zeigt, dass

$$\begin{aligned} & a_n \frac{d^n(k y_1 + l y_2)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d(k y_1 + l y_2)}{dt} + a_0(k y_1 + l y_2) \\ &= k \left( b_q \frac{d^q u_1}{dt^q} + \dots + b_1 \frac{du_1}{dt} + b_0 u_1 \right) + l \left( b_q \frac{d^q u_2}{dt^q} + \dots + b_1 \frac{du_2}{dt} + b_0 u_2 \right) \\ &= b_q \frac{d^q u}{dt^q} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u \end{aligned}$$

gilt und  $y(t) = ky_1(t) + ly_2(t)$  folglich die Lösung der Differentialgleichung (4.3) für  $u(t) = ku_1(t) + lu_2(t)$  darstellt.

**Diskussion.** Die Linearität des Systems schlägt sich in der Tatsache nieder, dass die das System beschreibende Differentialgleichung linear ist. Beide Seiten der Gleichung stellen Linearkombinationen der Signale  $u(t)$  und  $y(t)$  sowie deren Ableitungen dar. Es muss jedoch darauf hingewiesen werden, dass die Klasse der linearen Differentialgleichungen nicht auf die der Form (4.3) beschränkt ist.

Gewöhnliche Differentialgleichungen heißen linear, wenn sie die Form

$$f_n(t) \frac{d^n y(t)}{dt^n} + f_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + f_1(t) \frac{dy(t)}{dt} + f_0(t)y(t) + f(t) = 0 \quad (4.35)$$

haben, wobei  $f(t), f_0(t), f_1(t), \dots, f_n(t)$  gegebene Funktionen der Zeit  $t$  oder Konstante sind. Diese Gleichungen sind linear in dem Sinne, dass sich ihre Lösungen  $y(t)$  aus den Lösungen der homogenen und der inhomogenen Gleichungen zusammensetzen (vgl. Abschn. 5.2.1).

Die Differentialgleichung (4.3) ist linear, denn die Funktionen  $f_0(t), f_1(t), \dots, f_n(t)$  entsprechen den Konstanten  $a_0, a_1, \dots, a_n$  und die rechte Seite der Funktion  $-f(t)$ . Aus diesem Vergleich sieht man, dass bei linearen Systemen die Funktion  $f(t)$  in Gl. (4.35) auf Linearkombinationen von  $u(t), \dot{u}(t), \dots, \frac{d^q u(t)}{dt^q}$  eingeschränkt wird und insbesondere keine Konstante enthält. Der Grund dafür liegt in der Tatsache, dass bei dynamischen Systemen nicht wie in der Mathematik die Überlagerung der homogenen und inhomogenen Lösungen als Kriterium für die Linearität herangezogen wird, sondern die Tatsache, dass Linearkombinationen von Eingangsgrößen durch das System entsprechend Gl. (4.33) in Linearkombinationen von Ausgangsgrößen abgebildet werden. Lineare dynamische Systeme sind also durch eine spezielle Klasse linearer Differentialgleichungen beschrieben.

#### 4.2.4 Kausalität

Eine wichtige Eigenschaft dynamischer Systeme ist ihre Kausalität. Die Kausalität besagt, dass der Wert der Eingangsgröße zur Zeit  $\bar{t}$  das Verhalten des Systems nur für zukünftige Zeitpunkte  $t \geq \bar{t}$  beeinflussen kann.

Betrachtet man die in einem System ablaufenden physikalischen Vorgänge, so ist die Kausalität eine selbstverständliche Eigenschaft. Beim Entwurf von Reglern kann es jedoch vorkommen, dass Reglertypen entstehen, für die diese Kausalitäts-eigenschaft nicht zutrifft. Im Folgenden muss deshalb untersucht werden, wie man erkennen kann, ob ein System kausal ist.

Zur Definition der Kausalität wird das Verhalten des Systems für zwei „Experimente“ betrachtet, bei denen das System mit den Eingangsgrößen  $u = u_1$  bzw.  $u = u_2$  angeregt wird, die bis zum Zeitpunkt  $T$  gleich sind, d. h., für die die Beziehung

$$u_1(t) = u_2(t) \quad \text{für } 0 \leq t \leq T \quad (4.36)$$

gilt. Es wird vorausgesetzt, dass alle Anfangsbedingungen der Differentialgleichung verschwinden. Ein dynamisches System ist kausal, wenn für beliebige Zeitpunkte  $T$  und beliebig gewählte Funktionen  $u_1(t)$  und  $u_2(t)$  mit  $0 \leq t \leq \infty$ , für die die

Beziehung (4.36) gilt, die beiden durch diese Eingangsgrößen hervorgerufenen Ausgangsgrößen  $y_1$  und  $y_2$  die Beziehung

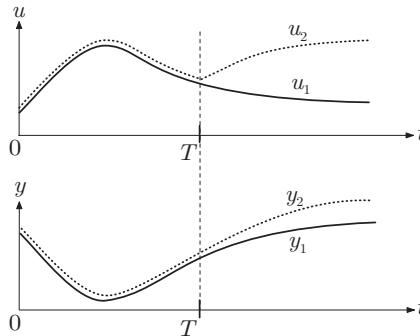
$$y_1(t) = y_2(t) \quad \text{für } 0 \leq t \leq T \quad (4.37)$$

erfüllen.  $y_1(t)$  und  $y_2(t)$  können sich also erst für  $t > T$  unterscheiden (Abb. 4.5). Dabei wird wieder mit der Beziehung (4.32) zwischen den Eingangs- und Ausgangsgrößen gearbeitet. In abgekürzter Schreibweise kann dieser Sachverhalt durch

Kausalität:  $u_1(t) = u_2(t) \mapsto y_1(t) = y_2(t) \quad \text{für } 0 \leq t \leq T$

(4.38)

beschrieben werden.



**Abb. 4.5:** Interpretation der Kausalität dynamischer Systeme

In der Differentialgleichung (4.3) äußert sich die Kausalität in der Tatsache, dass die Eingangsgröße  $u$  nicht mit höherer Ableitung als die Ausgangsgröße  $y$  erscheint, d. h., dass Gl. (4.5)

Kausalität linearer Systeme:  $q \leq n$

(4.39)

gilt. Diese Bedingung schränkt die Klasse der Differentialgleichungen der Form (4.3) auf die Klasse kausaler dynamischer Systeme ein. Wäre diese Bedingung verletzt, so müsste das System reine Differenziationen der Eingangsgröße ausführen, die, wie das folgende Beispiel zeigt, physikalisch nicht realisierbar sind.

#### Beispiel 4.4 Technische Realisierung einer Differenziation

Die über einer Induktivität gemessene Spannung ist bekanntlich proportional zur zeitlichen Ableitung des durch die Induktivität fließenden Stromes. Man kann eine Induktivität deshalb als technische Realisierung einer „reinen“ Differenziation betrachten. Sieht man sich

den Zusammenhang zwischen dem durch eine Stromquelle mit Innenwiderstand  $R$  vorgegebenen Strom  $u(t)$ <sup>1</sup> und der Spannung  $y(t)$  über der Induktivität anhand der Abb. 4.6 genauer an, so erhält man für das dort abgebildete RL-Glied  $\Sigma_{RL}$  folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} y(t) &= L \frac{di_L(t)}{dt} \\ i_L(t) &= u(t) - i_R(t) \\ i_R(t) &= \frac{1}{R}y(t). \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt die Differentialgleichung

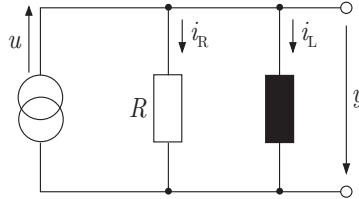
$$\Sigma_{RL} : \quad \frac{L}{R}\dot{y}(t) + y(t) = L\dot{u}(t), \quad (4.40)$$

die offensichtlich die Kausalitätseigenschaft (4.39) erfüllt. Mit dem endlichen Widerstand  $R$  ist die Schaltung technisch realisierbar. Sie führt allerdings keine exakte Differenziation aus, sondern enthält eine Zeitverzögerung.

Die gewünschte reine Differenziation

$$y(t) = L\dot{u}(t) \quad (4.41)$$

erhält man nur unter der idealisierenden Annahme, dass der Innenwiderstand  $R$  der Stromquelle unendlich groß ist. Die exakte Differenziation ist also technisch nicht realisierbar.



**Abb. 4.6:** RL-Glied zur Differenziation

Das Beispiel macht außerdem deutlich, dass in der Differentialgleichung (4.3) dynamischer Systeme auf der rechten Seite zwar Ableitungen der Eingangsgröße stehen können, innerhalb des Systems diese Ableitungen jedoch nicht durch reine Differenzierglieder tatsächlich gebildet werden. In dem in Abb. 4.6 gezeigten RL-Glied tritt nämlich nicht  $L \frac{du(t)}{dt}$ , sondern

$$y(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = L \frac{du(t)}{dt} - \frac{L}{R} \frac{dy(t)}{dt}$$

als Signal auf. Nur unter der genannten, technisch nicht erfüllbaren Bedingung  $R \rightarrow \infty$  ist das Signal  $L \frac{du(t)}{dt}$  tatsächlich tatsächlich vorhanden und messbar.  $\square$

Aus den im Beispiel genannten Gründen bezeichnet man Systeme, die die Bedingung (4.39) erfüllen, als *technisch realisierbar*. Die Forderung nach technischer Realisierbarkeit schränkt auch die Klasse der einsetzbaren Reglergesetze ein.

<sup>1</sup> Die Verwendung des Symbols  $u$  für einen Strom folgt der systemtheoretischen Sichtweise, bei der der Strom in dieser Schaltung als Eingangsgröße wirkt.

Die Realisierbarkeitsbedingung muss offensichtlich erfüllt sein, wenn der Regler durch analoge Bauelemente gerätetechnisch realisiert werden soll. Es ist jedoch ein Trugschluss anzunehmen, dass sie verletzt werden kann, wenn man den Regler mit Hilfe eines Rechners realisiert und damit nicht mehr an dieselben technischen Randbedingungen gebunden ist wie bei einer analogen Realisierung. Versucht man nämlich, ein dynamisches System (4.3) mit  $q > n$  durch einen Algorithmus zu realisieren, so muss diese Realisierung reine Differenziationen der Eingangsgröße ausführen. Für zeitgetaktete Signale, wie sie ein Rechner verarbeiten kann, müssen die Differentialquotienten durch Differenzenquotienten ersetzt werden, was gleichbedeutend damit ist, dass wiederum ein verzögertes an Stelle eines reinen Differenziergliedes verwendet wird. Auch hier gilt also die Realisierbarkeitsbedingung!

#### 4.2.5 Zeitinvarianz

Eine weitere Eigenschaft der hier behandelten Systeme besteht darin, dass die Koeffizienten der Differentialgleichung von der Zeit unabhängig sind. Das System ist *zeitinvariant*. Es reagiert auf eine Erregung (also einen vorgegebenen Verlauf  $u(t)$ ) unabhängig davon, wann die Erregung eintrifft. Das heißt, dass eine Verschiebung der Eingangsgröße auf der Zeitachse nach rechts eine gleichgroße Verschiebung der Ausgangsgröße bewirkt. Man spricht hierbei auch vom Verschiebeprinzip.

Bezeichnet man die Verschiebung mit  $T_t$  ( $T_t > 0$ ), so gilt in der bereits in Gl. (4.33) verwendeten Schreibweise

$$\text{Zeitinvarianz: } u_1(t) = u_2(t - T_t) \mapsto y_1(t) = y_2(t - T_t), \quad (4.42)$$

wobei wiederum vorausgesetzt wird, dass alle Anfangsbedingungen verschwinden.

Viele Regelungssysteme können als zeitinvariante Systeme aufgefasst werden, wenn man annimmt, dass eine Parameterdrift oder Veränderungen in der Systemstruktur entweder ganz vernachlässigt werden können oder sich so langsam vollziehen, dass sie auf das Verhalten des Regelkreises keinen Einfluss haben.

### 4.3 Zustandsraumdarstellung linearer Systeme

#### 4.3.1 Einführung des Zustandsraummodells

In der Regelungstechnik wird an Stelle von der Differentialgleichung (4.3) von einem Zustandsraummodell ausgegangen. Dieses Modell besteht aus einer Menge von  $n$  Differentialgleichungen erster Ordnung. Wie noch gezeigt werden wird, kann es aus der Differentialgleichung (4.3) abgeleitet werden und ist somit eine äquivalente mathematische Beschreibung des Systems  $\Sigma$ .

Das Zustandsraummodell wird gegenüber der Differentialgleichung bevorzugt, weil es mit dem Systemzustand eine ingenieurtechnisch gut interpretierbare Größe

beschreibt und dieser Zustand ein wichtiges Element bei der Analyse dynamischer Systeme und beim Reglerentwurf darstellt. Außerdem hat das Zustandsraummodell eine Form, die sich sehr gut für die rechnergestützte Verarbeitung eignet.

Die Aufstellung eines Zustandsraummodells soll zunächst an einem Beispiel betrachtet werden.

**Beispiel 4.5** Zustandsraummodell für einen Reihenschwingkreis

Für den Reihenschwingkreis  $\Sigma_{\text{RSK}}$  in Abb. 4.2 werden jetzt an Stelle der im Beispiel 4.1 angegebenen Differentialgleichung zweiter Ordnung zwei Differentialgleichungen erster Ordnung abgeleitet. Die Differentialgleichungen werden so geschrieben, dass die abgeleiteten Größen auf der linken Seite stehen. Als erste Gleichung wird Gl. (4.13) übernommen:

$$\frac{di_1(t)}{dt} = \frac{1}{L}(u_1(t) - u_2(t)).$$

Die zweite Gleichung erhält man durch einmalige Differenzierung der Gl. (4.15)

$$\begin{aligned}\frac{du_2(t)}{dt} &= R \frac{di_1(t)}{dt} + \frac{1}{C} i_1(t) \\ &= \frac{R}{L} u_1(t) - \frac{R}{L} u_2(t) + \frac{1}{C} i_1(t),\end{aligned}$$

wobei zur Umformung in die zweite Zeile wieder die Beziehung (4.13) verwendet wurde. Ordnet man die rechten Seiten so, dass die Summanden mit der Eingangsgröße  $u_1$  ganz rechts stehen, so kann man beide Gleichungen zu folgendem Differentialgleichungssystem zusammenfassen:

$$\begin{aligned}\frac{di_1(t)}{dt} &= -\frac{1}{L} u_2(t) + \frac{1}{L} u_1(t) \\ \frac{du_2(t)}{dt} &= \frac{1}{C} i_1(t) - \frac{R}{L} u_2(t) + \frac{R}{L} u_1(t).\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem kann übersichtlicher dargestellt werden, wenn man den Vektor

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} i_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

einführt und zu folgender Matrzenschreibweise übergeht:

$$\begin{pmatrix} \frac{di_1(t)}{dt} \\ \frac{du_2(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ \frac{R}{L} \end{pmatrix} u_1(t).$$

Mit dem eingeführten Zustandsvektor heißt die Gleichung

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ \frac{R}{L} \end{pmatrix} u_1(t),$$

wobei die Ableitung nach der Zeit durch den Punkt über dem Vektor  $\boldsymbol{x}$  dargestellt wird. Sie beschreibt den Zusammenhang zwischen der Eingangsgröße  $u_1(t)$  und den Signalen  $i_1(t)$  und  $u_2(t)$  des Schwingkreises. Im Gegensatz zur Differentialgleichung (4.16) tritt

hier das Signal  $i_1(t)$  auf, obwohl es weder Eingangs- noch Ausgangsgröße des Systems ist. Es erscheint in der Gleichung, weil die Form jeder einzelnen Gleichung auf eine Differentialgleichung *erster* Ordnung festgelegt wurde.

Die Ausgangsgröße  $y(t) = u_2(t)$  erhält man als zweites Element des Zustandsvektors  $\mathbf{x}(t)$ :

$$u_2(t) = (0 \quad 1) \mathbf{x}(t).$$

Zusammengefasst heißt das Modell des Schwingkreises folgendermaßen:

$$\Sigma_{\text{RSK}} : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ \frac{R}{L} \end{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) = (0 \quad 1) \mathbf{x}(t). \square \end{cases} \quad (4.44)$$

Die Gleichung (4.44) kann in der allgemeinen Form

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)$$

mit einem  $n$ -dimensionalen Vektor  $\mathbf{x}$ , einer  $(n, n)$ -Matrix  $\mathbf{A}$  und einem  $n$ -dimensionalen Vektor  $\mathbf{b}$  geschrieben werden. Im Allgemeinen ist die Ausgangsgröße eine Linearkombination der Zustandsgrößen  $x_i$  und der Eingangsgröße  $u$  und kann deshalb in der Form

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + du(t)$$

dargestellt werden, wobei  $\mathbf{c}$  ein Vektor mit derselben Dimension wie  $\mathbf{x}$  und  $d$  ein Skalar ist.

Aus diesen Gleichungen erhält man die gebräuchliche Form des Zustandsraummodells eines linearen Systems mit einer Eingangsgröße und einer Ausgangsgröße, wenn die zeitliche Ableitung wieder durch einen Punkt über der abzuleitenden Größe symbolisiert wird:

$$\text{Zustandsraummodell : } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + du(t). \end{cases} \quad (4.45)$$

Die erste Gleichung wird als *Zustandsgleichung*, die zweite als *Ausgabegleichung* bezeichnet.

$\mathbf{x}$  ist i. Allg. ein  $n$ -dimensionaler Vektor mit den zeitabhängigen Elementen  $x_i(t)$ , so dass sich der Vektor  $\dot{\mathbf{x}}$  aus den Ableitungen der einzelnen Elemente zusammensetzt:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{A}$  eine konstante  $(n, n)$ -Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$\mathbf{b}$  ein  $n$ -dimensionaler Spaltenvektor

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

und  $\mathbf{c}^T$  ein  $n$ -dimensionaler Zeilenvektor mit konstanten Elementen

$$\mathbf{c}^T = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n).$$

$d$  ist ein Skalar, der bei vielen Systemen gleich null ist.  $\mathbf{A}$  wird als *Systemmatrix* bezeichnet.

Die geschweifte Klammer in Gl. (4.45) zeigt, dass das System  $\Sigma$  durch beide Gleichungen gemeinsam beschrieben wird. Wenn man mit diesem Modell arbeiten will, so muss man die Matrix  $\mathbf{A}$ , die Vektoren  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}^T$  sowie den Skalar  $d$  kennen. Man schreibt deshalb auch  $\Sigma = (\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T, d)$  als Abkürzung für das Zustandsraummodell des Systems  $\Sigma$ . Das Quadrupel  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T, d)$  bildet das Argument des entsprechenden MATLAB-Befehls (4.114).

$\mathbf{x}_0$  ist ein  $n$ -dimensionaler Vektor, der die Anfangsbedingungen aller Komponenten von  $\mathbf{x}$  beschreibt. Bei der Anwendung des Modells (4.45) wird i. Allg. vorausgesetzt, dass der Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  bekannt ist. Die Dimension  $n$  der Vektoren und der Matrix heißt Ordnung des Systems.

**Zustandsraummodell autonomer Systeme.** Systeme ohne Eingangsgröße ( $u(t) = 0$ ) bezeichnet man als autonome Systeme oder ungestörte Systeme. In ihrem Zustandsraummodell fehlen die Summanden mit  $u(t)$ :

$$\text{Autonomes System : } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t). \end{cases} \quad (4.46)$$

Es wird sich zeigen, dass das Verhalten des autonomen Systems wichtige Anhaltspunkte für das Verhalten des gesteuerten Systems ( $u(t) \neq 0$ ) gibt. Beispielsweise kann die Zustandsstabilität des Systems (4.45) anhand des aus diesem System abgeleiteten autonomen Systems (4.46) untersucht werden (Abschn. 8.1).

**Zustandsraummodell gestörter Systeme.** Wenn das System  $\Sigma$  neben der Eingangsgröße  $u(t)$  eine zweite Eingangsgröße  $d(t)$  besitzt, so enthält das Zustandsraummodell zusätzliche Summanden mit diesem Signal:

Gestörtes System : 
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) + \mathbf{e}d(t), & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y(t) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}(t) + du(t) + fd(t). \end{cases} \quad (4.47)$$

Wenn es sich bei dem System um eine Regelstrecke handelt, bezeichnet  $u(t)$  typischerweise das Stellsignal und  $d(t)$  die Störgroße. Der durch den Faktor  $f$  dargestellte Zusammenhang zwischen der Ausgangsgröße  $y(t)$  und der zur selben Zeit anliegenden Störgroße  $d(t)$  tritt ebenso wie die über  $d$  dargestellte Abhängigkeit von  $y(t)$  von  $u(t)$  selten auf.

**Grafische Veranschaulichung des Zustandsraummodells.** Die durch die Gl. (4.45) beschriebenen Zusammenhänge zwischen den Signalen  $u(t)$ ,  $x_i(t)$  und  $y(t)$  sind in der Abb. 4.7 durch ein Blockschaltbild veranschaulicht. Doppelpfeile stellen vektorielle Größen dar. Vier Blöcke sind statische Übertragungsglieder mit den Übertragungsfaktoren  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}^T$  und  $d$ . Der mittlere Block enthält  $n$  Integratoren.

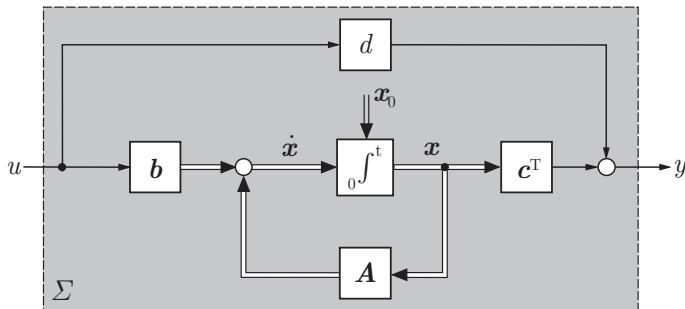


Abb. 4.7: Strukturbild des Zustandsraummodells

Eine detailliertere Darstellung als das Blockschaltbild erfolgt im Signalflussgraphen in Abb. 4.8, in dem alle Signale einzeln durch Knoten repräsentiert werden. Die gerichteten Kanten zeigen, welches Signal direkt auf welches andere Signal einwirkt. Die Elemente der Matrix  $\mathbf{A}$  bzw. der Vektoren  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}^T$  sowie der Skalar  $d$  treten als Kantengewichte auf. Sind die entsprechenden Elemente gleich null, so wird keine Kante in den Signalflussgraphen eingetragen.

### 4.3.2 Zustand und Zustandsraum

Aus der Mathematik ist bekannt, dass jede lineare Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung in ein System von  $n$  Differentialgleichungen erster Ordnung überführt werden kann. Es ist deshalb stets möglich, für ein gegebenes System (4.3) ein Modell der Form (4.45) aufzustellen. Außerdem ist bekannt, dass für eine gegebene Anfangsbedingung (4.6) die Differentialgleichung (4.3) eine eindeutige Lösung hat. Dies gilt folglich auch für das Differentialgleichungssystem (4.45) mit der durch  $\mathbf{x}_0$  gegebenen Anfangsbedingung.

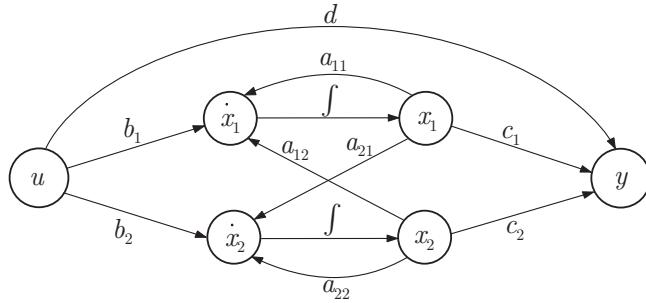


Abb. 4.8: Signalflussgraph eines Systems zweiter Ordnung

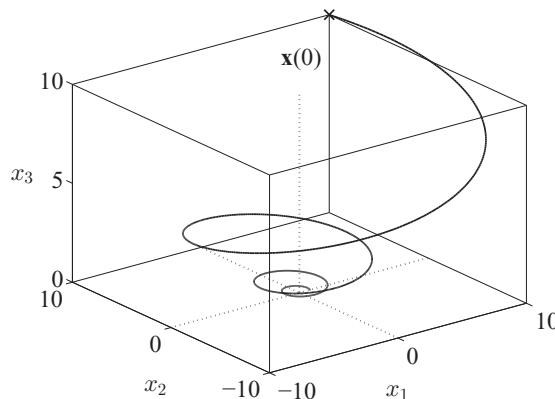
Das heißt, dass die in  $\boldsymbol{x}(0)$  enthaltenen Informationen ausreichen, um für eine beliebig gegebene Eingangsgröße  $u(t)$ ,  $t \geq 0$  die Ausgangsgröße  $y(t)$  für  $t \geq 0$  eindeutig zu berechnen.  $\boldsymbol{x}(0)$  beschreibt also den Zustand, in dem sich das System zum Zeitpunkt  $t = 0$  befindet. Diese Eigenschaft gilt für jeden beliebigen Zeitpunkt  $\bar{t}$ . Das heißt, wenn  $\boldsymbol{x}(\bar{t})$  bekannt und die Eingangsgröße  $u(t)$  für  $t \geq \bar{t}$  gegeben ist, so kann mit dem Modell (4.45) die Ausgangsgröße  $y(t)$  für den Zeitraum  $t \geq \bar{t}$  eindeutig berechnet werden.  $\boldsymbol{x}(t)$  heißt deshalb *Zustand* des Systems zum Zeitpunkt  $t$ .

**Definition 4.1 (Zustand eines dynamischen Systems)**

Ein Vektor  $\boldsymbol{x}$  wird *Zustand eines Systems* genannt, wenn für eine beliebige Zeit  $t_e \geq 0$  die Elemente  $x_i(0)$  von  $\boldsymbol{x}$  zum Zeitpunkt 0 zusammen mit dem Verlauf der Eingangsgröße  $u(\tau)$  für  $0 \leq \tau \leq t_e$  den Wert  $\boldsymbol{x}(t_e)$  und den Wert der Ausgangsgröße  $y(t_e)$  eindeutig bestimmen.  $\boldsymbol{x}$  heißt auch *Zustandsvektor* und die Komponenten  $x_i(t)$  von  $\boldsymbol{x}$  *Zustandsvariable* oder *Zustandsgrößen*.

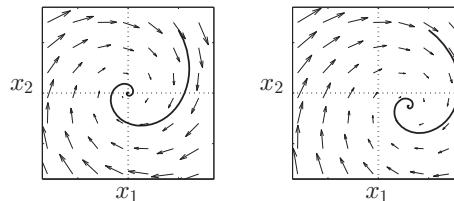
Verschiedene physikalische Größen können als Zustandsvariablen verwendet werden. Bei elektrischen Systemen sind es in der Regel Ströme und Spannungen, bei mechanischen Systemen Winkel, Wege, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen. Dies sind physikalische Größen, die das Verhalten von Speicherelementen wie z. B. Kapazitäten, Induktivitäten, Massen oder Federn beschreiben. Wenn man diese Größen zum Zeitpunkt 0 kennt, so kann man das Systemverhalten für  $\tau > 0$  vorhersagen, wobei in die Vorhersage natürlich auch die Eingangsgröße eingeht.

Die Systemordnung  $n$  stimmt in der Regel mit der Anzahl der im System enthaltenen Speicherelementen überein. Beispielsweise haben der Reihenschwingkreis und das Feder-Masse-System aus den Beispielen 4.1 und 4.2 mit Kapazität und Induktivität bzw. Masse und Feder je zwei Speicherelemente, so dass ihre dynamische Ordnung gleich zwei ist. Es können aber auch Größen als Zustandsvariablen verwendet werden, die physikalisch nicht interpretierbar sind (vgl. Abschn. 5.3).



**Abb. 4.9:** Trajektorie eines Systems dritter Ordnung im Zustandsraum

**Zustandsraum.** Die zeitliche Abhängigkeit des  $n$ -dimensionalen Vektors  $\boldsymbol{x}$  kann man sich als Bewegung eines Punktes im  $n$ -dimensionalen Vektorraum  $\mathbb{R}^n$  vorstellen (Abb. 4.9).  $\mathbb{R}^n$  wird deshalb als *Zustandsraum* oder Phasenraum bezeichnet. Der durch die Koordinaten von  $\boldsymbol{x}$  beschriebene Punkt verändert sich mit der Zeit und beschreibt eine Kurve, die *Trajektorie* oder *Zustandskurve* (Bahnkurve) des Systems heißt. Die Menge aller Trajektorien, die ein System ausgehend von allen möglichen Anfangszuständen erzeugen kann, wird *Phasenporträt* genannt.



**Abb. 4.10:** Vektorfeld eines schwingungsfähigen Systems

Die Zustandsgleichung (4.45) beschreibt für jeden Punkt  $\boldsymbol{x}$  des Zustandsraumes die zeitliche Ableitung  $\dot{\boldsymbol{x}}$  der Bewegung  $\boldsymbol{x}(t)$ . Hat das System keine Eingangsgröße ( $u(t) = 0$ ), so erhält man  $\dot{\boldsymbol{x}}$  aus der Beziehung

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}.$$

Die „Geschwindigkeit“  $\dot{\boldsymbol{x}}$ , mit der sich das System im Punkt  $\boldsymbol{x}$  des Zustandsraumes bewegt, wird durch die Pfeile in Abb. 4.10 dargestellt, deren Betrag und Richtung sich von Punkt zu Punkt ändern. Da mit steigender Entfernung des Punktes  $\boldsymbol{x}$  vom Ursprung des zweidimensionalen Zustandsraumes auch der Betrag von  $\dot{\boldsymbol{x}}$  steigt, sind

die äußeren Pfeile länger als die weiter innen liegenden. Außerdem ist zu sehen, dass sich die Pfeilrichtung ändert.

Da die Gleichung  $\dot{x} = Ax$  jedem Punkt  $x$  des Raumes  $\mathbb{R}^n$  einen Vektor  $\dot{x}$  zuordnet, spricht man bei der Funktion  $f(x) = Ax$  auch von einem Vektorfeld. Dieser in der Mathematik gebräuchliche Begriff ist für die Analyse dynamischer Systeme sehr anschaulich. Interpretiert man  $\dot{x}$  als Strömungsfeld, so kann man sich das Verhalten eines Systems ausgehend vom Anfangszustand  $x_0$  als Bewegung eines Partikels in diesem Strömungsfeld vorstellen. In jedem Punkt des Zustandsraumes erfährt das Partikel eine Beschleunigung, durch die seine Geschwindigkeit in Betrag und Richtung den Pfeilen entspricht. Dabei entsteht eine Trajektorie wie die in der Abbildung eingetragene Kurve.

Wirkt auf das System eine Eingangsgröße  $u(t)$ , so verändert sich das Vektorfeld

$$\dot{x} = Ax + bu$$

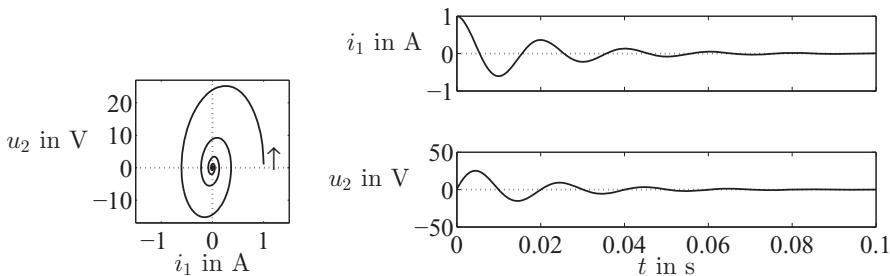
nicht nur von Ort zu Ort, sondern auch von Zeitpunkt zu Zeitpunkt. Damit ist die Kraft, die auf das Partikel einwirkt, nicht mehr nur von der Position  $x$ , sondern auch von der Eingangsgröße  $u(t)$  abhängig. Durch die Wirkung von  $u$  wird beispielsweise das in der Abb. 4.10 links gezeigte Vektorfeld zu dem im rechten Abbildungsteil dargestellten Vektorfeld verändert. In dem Beispiel wurde mit einer konstanten Eingangsgröße  $u(t) = \bar{u}$  gerechnet, wodurch das Vektorfeld um  $b\bar{u}$  verschoben wurde. Das System schwingt nicht mehr in den Ursprung des Zustandsraumes, sondern in den Punkt  $-A^{-1}b\bar{u}$  ein, den man aus der Zustandsgleichung für  $\dot{x} = 0$  berechnen kann.

#### Beispiel 4.6 Trajektorie eines Reihenschwingkreises

Der Reihenschwingkreis mit der Zustandsgleichung (4.44) wird für die Eingangsgröße  $u_1(t) = 0 \text{ V}$  und den Anfangszustand  $i_1(0) = 1 \text{ A}$  und  $u_2(0) = 1 \text{ V}$  betrachtet. Mit den Parametern  $R = 10 \Omega$ ,  $C = 100 \mu\text{F}$  und  $L = 100 \text{ mH}$  erhält man bei Messung des Stromes  $i_1$  in Ampere, der Spannung  $u_2$  in Volt und der Zeit in Sekunden das Modell

$$\begin{pmatrix} \frac{di_1(t)}{dt} \\ \frac{du_2(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ 10000 & -100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das Systemverhalten kann man sich in unterschiedlicher Weise grafisch veranschaulichen. Abbildung 4.11 zeigt rechts den zeitlichen Verlauf von Strom und Spannung. Diese Darstellung hat den Vorteil, dass man ablesen kann, welche Werte beide Zustandsvariablen zu bestimmten Zeitpunkten annehmen. Links ist die Trajektorie im Zustandsraum, also in der  $i_1/u_2$ -Ebene dargestellt. Dieses Bild lässt erkennen, welche Werte die Zustandsvariablen  $i_1$  und  $u_2$  gleichzeitig annehmen. Die Zeit kann jedoch nicht mehr abgelesen werden. Mit fortlaufender Zeit  $t$  bewegt sich das System vom Anfangspunkt  $(1 \ 1)^T$  auf der spiralförmigen Kurve nach innen. Dass die Zustandstrajektorie eine Spirale ist, ist typisch für schwingende Systeme.  $\square$



**Abb. 4.11:** Verlauf von Strom und Spannung des Reihenschwingkreises

### 4.3.3 Zustandsraumdarstellung von Mehrgrößensystemen

Das Modell (4.45) kann für Systeme erweitert werden, die mehr als eine Eingangsgröße  $u(t)$  und mehr als eine Ausgangsgröße  $y(t)$  besitzen. Derartige Systeme werden Mehrgrößensysteme genannt. Ihre  $m$  Eingangssignale  $u_i(t)$  und  $r$  Ausgangssignale  $y_i(t)$  werden zu den Vektoren  $\mathbf{u}(t)$  bzw.  $\mathbf{y}(t)$  zusammengefasst:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}.$$

Das Modell (4.45) hat dann die allgemeine Form

$$\text{Mehrgrößensystem : } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t), & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{Cx}(t) + \mathbf{Du}(t). \end{cases} \quad (4.48)$$

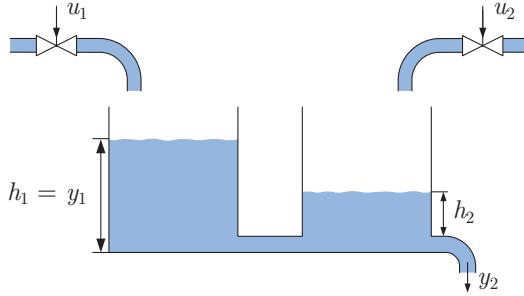
Dabei gelten folgende Bezeichnungen und Formate:

Zustandsvektor	$\mathbf{x}$	( $n, 1$ )-Vektor
Eingangsvektor	$\mathbf{u}$	( $m, 1$ )-Vektor
Ausgangsvektor	$\mathbf{y}$	( $r, 1$ )-Vektor
Systemmatrix	$\mathbf{A}$	( $n, n$ )-Matrix
Steuermatrix	$\mathbf{B}$	( $n, m$ )-Matrix
Beobachtungsmatrix	$\mathbf{C}$	( $r, n$ )-Matrix
Durchgangsmatrix	$\mathbf{D}$	( $r, m$ )-Matrix

#### Beispiel 4.7 Zustandsraummodell eines Behältersystems

Das in Abb. 4.12 gezeigte Behältersystem  $\Sigma_B$  hat die beiden Ventilstellungen als Eingangsgrößen  $u_1(t)$  und  $u_2(t)$  und den Füllstand des linken Behälters sowie den Volumenstrom aus dem rechten Behälter als Ausgangsgrößen  $y_1(t)$  und  $y_2(t)$ .

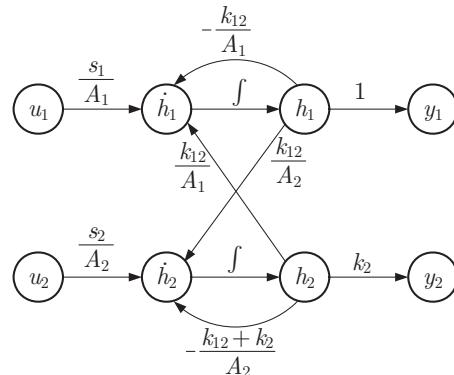
Die Füllstände  $h_1(t)$  und  $h_2(t)$  bilden den Zustand des Systems, das durch das Modell



**Abb. 4.12:** Behältersystem mit zwei Eingängen und zwei Ausgängen

$$\Sigma_B : \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{h}_1(t) \\ \dot{h}_2(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{k_{12}}{A_1} & \frac{k_{12}}{A_1} \\ \frac{k_{12}}{A_2} & -\frac{k_{12}+k_2}{A_2} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{s_1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{s_2}{A_2} \end{pmatrix}}_B \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}}_C \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (4.49)$$

beschrieben wird, in dem  $A_1$  und  $A_2$  die Querschnitte der zylinderförmigen Behälter,  $k_{12}$  und  $k_2$  Proportionalitätsfaktoren, die von der Geometrie der beiden gezeigten Rohrleitungen abhängen, und  $s_1$  und  $s_2$  Proportionalitätsfaktoren der Ventile bezeichnen (zur Aufstellung dieses Modells siehe Aufgabe 4.8).



**Abb. 4.13:** Signalflussgraph des Modells (4.49)

Abbildung 4.13 zeigt den Signalflussgraphen des Systems  $\Sigma$ . Man erkennt, dass die Eingangsgrößen auf unterschiedliche Zustandsvariablen wirken und sich die Ausgangsgrößen dadurch unterscheiden, dass sie von unterschiedlichen Zustandsvariablen direkt beeinflusst werden. Diese Unterschiede schlagen sich im Modell (4.49) in den zu den beiden Eingangsgrößen gehörenden Spalten

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} \frac{s_1}{A_1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{s_2}{A_2} \end{pmatrix}$$

der Matrix  $\mathbf{B}$  nieder. Zu den Ausgangsgrößen gehören die beiden Zeilen der Matrix  $\mathbf{C}$

$$\mathbf{c}_1^T = (1 \ 0) \quad \text{und} \quad \mathbf{c}_2^T = (0 \ k_2).$$

Diese Unterschiede im Modell geben die Tatsache wieder, dass die beiden Eingangsgrößen einen unterschiedlichen Einfluss auf die Systemdynamik haben und die beiden Ausgangsgrößen das Systemverhalten unterschiedlich erfassen, so wie man es aus dem Aufbau des Behältersystems auch erwartet. Die sich daraus ergebenden Unterschiede im Übertragungsverhalten werden im Beispiel 6.5 auf S. 271 behandelt.

Bei diesem Beispiel wirken die beiden Eingangsgrößen  $u_1(t)$  und  $u_2(t)$  auf nur jeweils eine der beiden Zustandsvariablen  $h_1(t)$  und  $h_2(t)$  und die beiden Ausgangsgrößen  $y_1(t)$  und  $y_2(t)$  sind von nur jeweils einer Zustandsvariablen abhängig. Bei anderen Beispielen können die Eingangsgrößen mehrere Zustandsvariablen gleichzeitig beeinflussen und die Ausgangsgrößen aus Linearkombinationen der Zustandsvariablen entstehen.  $\square$

#### Aufgabe 4.3 Zustandsraummodell eines Feder-Masse-Schwingers

Leiten Sie aus den Gln. (4.17) – (4.21) das Zustandsraummodell des Feder-Masse-Schwingers aus Beispiel 4.2 ab.  $\square$

#### Aufgabe 4.4\* Phasenporträt eines ungedämpften Schwingkreises

Zeigen Sie unter Verwendung des Zustandsraummodells (4.44) des gedämpften Schwingkreises, dass das Phasenporträt eines *ungedämpften* Schwingkreises ohne Eingangsgröße aus Kreisen bzw. Ellipsen besteht.  $\square$

## 4.4 Aufstellung des Zustandsraummodells

In diesem Abschnitt werden mehrere Wege gezeigt, um für ein System  $\Sigma$  zum Zustandsraummodell zu gelangen. Ausgangspunkte sind die aus den physikalischen Gesetzen des Systems abgeleitete Differentialgleichung, ein System von Differenzial- und algebraischen Gleichungen bzw. Zustandsraummodelle für die Teilsysteme des Systems  $\Sigma$ . Im Abschn. 4.4.4 wird gezeigt, wie man aus den mit physikalischen Einheiten behafteten Gleichungen (Größengleichungen) zu Zahlengleichungen kommt.

#### 4.4.1 Ableitung des Zustandsraummodells aus der Differentialgleichung

**Differentialgleichungen mit  $q = 0$ .** Es wird nun ein Weg angegeben, auf dem aus der Differentialgleichung (4.3) ein Zustandsraummodell abgeleitet werden kann. Dabei wird zunächst von einer Differentialgleichung ausgegangen, in der keine Ableitungen der Eingangsgröße vorkommen ( $q = 0$ ). Das System hat folglich den relativen Grad  $r = n$ . Außerdem wird angenommen, dass die Gleichung so umgeformt ist, dass  $a_n = 1$  gilt:

$$\Sigma : \quad \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 u(t) \quad (4.50)$$

$$\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}(0) = y_{0n}, \dots, \frac{dy}{dt}(0) = y_{02}, \quad y(0) = y_{01}. \quad (4.51)$$

Der wichtigste Schritt bei der Ableitung des Zustandsraummodells besteht in der Wahl der Zustandsvariablen. Aus der Differentialgleichung ist die Anzahl  $n$  der zu definierenden Zustandsvariablen bekannt.

Als Zustandsvariablen  $x_i$  werden die Ausgangsgröße  $y(t)$  sowie deren Ableitungen  $\dot{y}, \ddot{y}, \dots, \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}$  multipliziert mit  $\frac{1}{b_0}$  verwendet

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{b_0} \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} \end{pmatrix},$$

so dass man für die Ableitungen  $\dot{x}_i(t)$  die Beziehung

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \frac{1}{b_0} \dot{y}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{1}{b_0} \ddot{y}(t) = x_3(t) \end{aligned} \quad (4.52)$$

⋮

$$\begin{aligned} \dot{x}_{n-1}(t) &= \frac{1}{b_0} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} = x_n(t) \\ \dot{x}_n(t) &= \frac{1}{b_0} \frac{d^n y(t)}{dt^n} \end{aligned} \quad (4.53)$$

erhält. Für  $\dot{x}_n(t)$  entsteht aus Gl. (4.50) die Beziehung

$$\begin{aligned} \dot{x}_n(t) &= \frac{1}{b_0} \frac{d^n y(t)}{dt^n} \\ &= -a_{n-1} \frac{1}{b_0} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} - \dots - a_1 \frac{1}{b_0} \dot{y}(t) - a_0 \frac{1}{b_0} y(t) + u(t) \\ &= -a_{n-1} x_n(t) - \dots - a_1 x_2(t) - a_0 x_1(t) + u(t). \end{aligned}$$

Werden die voranstehenden Gleichungen zusammengefasst, so erhält man für das System  $\Sigma$  ein Zustandsraummodell (4.45) mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.55)$$

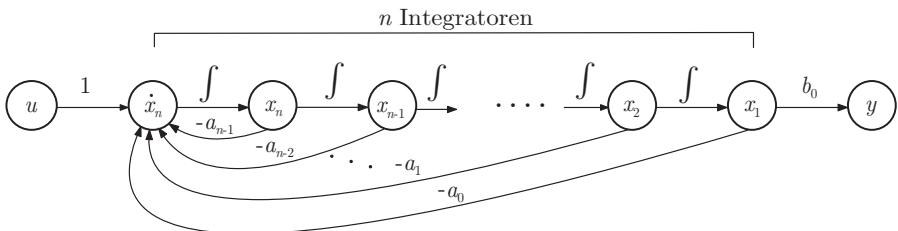
$$\mathbf{c}^T = (b_0 \ 0 \ 0 \dots 0) \quad (4.56)$$

$$d = 0. \quad (4.57)$$

Die Matrix  $\mathbf{A}$  mit der Form (4.54) wird als *Begleitmatrix* oder *Frobeniusmatrix* bezeichnet.

Die Anfangsbedingungen (4.51) der Differentialgleichung lassen sich aufgrund der Definition des Zustands direkt zum Vektor  $\mathbf{x}_0$  zusammenfassen:

$$\mathbf{x}(0) = \frac{1}{b_0} \begin{pmatrix} y_{01} \\ y_{02} \\ \vdots \\ y_{0n} \end{pmatrix}. \quad (4.58)$$



**Abb. 4.14:** Signalflussgraph für ein Zustandsraummodell mit Systemmatrix in Frobeniusform ( $r = n$ )

Abbildung 4.14 zeigt den Signalflussgraphen des Zustandsraummodells. Aufgrund des speziellen Aufbaus von  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{b}$  gibt es nur sehr wenige direkte Kopplungen zwischen den Signalen. Der Eingang  $u$  wirkt nur auf  $\dot{x}_n$  direkt; der Ausgang ist

proportional zur Zustandsvariablen  $x_1$ . Die dynamischen Eigenschaften des Systems werden durch die mit den Koeffizienten  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$  der Differentialgleichung gewichteten Rückführungen der Zustandsvariablen auf die Größe  $\dot{x}_n$  bestimmt.

Das Interessante an diesem Signalflussgraphen ist die Tatsache, dass das System durch eine rückgeführte Integratorkette dargestellt werden kann. Obwohl in der Differentialgleichung die Ausgangsgröße  $y$  und deren Ableitungen vorkommen, braucht man zur Systemdarstellung keine Differenzierglieder, sondern kann Integrierglieder verwenden, die im Gegensatz zu den Differenziergliedern technisch realisierbar sind.

#### Beispiel 4.8 Zustandsraummodell eines Feder-Masse-Schwingers

Um aus der im Beispiel 4.2 abgeleiteten Differentialgleichung (4.23) des Feder-Masse-Schwingers  $\Sigma_{\text{FMS}}$  das Zustandsraummodell ablesen zu können, wird die Differentialgleichung in die Form (4.50) gebracht:

$$\ddot{x}_3(t) + \frac{c}{d} \dot{x}_3(t) + \frac{c}{m} x_3(t) = \frac{c}{m} x_1(t).$$

Mit Hilfe der Beziehungen (4.54) – (4.57) erhält man dann das Zustandsraummodell

$$\Sigma_{\text{FMS}} : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{m} & -\frac{c}{d} \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \left( \begin{array}{cc} \frac{c}{m} & 0 \end{array} \right) \mathbf{x}(t). \end{cases} \quad (4.59)$$

Dabei ist aus Gl. (4.52) die Bedeutung der beiden Zustandsvariablen bekannt:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{m}{c} y(t) \\ x_2(t) &= \frac{m}{c} \dot{y}(t). \end{aligned}$$

Die Zustandsvariablen beschreiben also die mit dem Faktor  $\frac{m}{c}$  multiplizierte Position bzw. Geschwindigkeit der Masse. Dementsprechend gehen in den Anfangszustand  $\mathbf{x}(0)$  die Position und die Geschwindigkeit der Masse zum Zeitpunkt  $t = 0$  ein, die mit  $\frac{m}{c}$  multipliziert werden:

$$\mathbf{x}(0) = \frac{m}{c} \begin{pmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \end{pmatrix}. \quad \square$$

**Erweiterung auf Differentialgleichungen mit  $q \neq 0$ .** Die bisher beschriebene Methode kann auf Differentialgleichungen (4.3) mit  $q \neq 0$  erweitert werden, wobei zur Vereinfachung der Darstellung wieder mit  $a_n = 1$  gearbeitet wird:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_q \frac{d^q u(t)}{dt^q} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \quad (4.60)$$

$$\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}(0) = y_{0n}, \dots, \frac{dy}{dt}(0) = y_{02}, \quad y(0) = y_{01}. \quad (4.61)$$

Dabei wird ausgenutzt, dass aufgrund der Linearität der Differentialgleichung die Beziehung

$$u(t) \mapsto y(t) \implies \frac{du(t)}{dt} \mapsto \frac{dy(t)}{dt} \quad (4.62)$$

gilt. Das heißt, wenn man an Stelle einer Funktion  $u(t)$  deren Ableitung  $\dot{u}(t)$  als Eingangsgröße verwendet, so entsteht als Lösung der Differentialgleichung die Ableitung  $\dot{y}$  der für  $u$  erhaltenen Lösung  $y$ . Fasst man die rechte Seite der Differentialgleichung als eine Summe von  $q$  unterschiedlichen Eingangssignalen auf und überlagert die durch diese Eingänge einzeln hervorgerufenen Ausgangssignale, so erhält man für  $q = n$  ein Zustandsraummodell (4.45) mit

$$\boxed{\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad (4.63)$$

$$\mathbf{c}^T = (b_0 - b_n a_0 \quad b_1 - b_n a_1 \quad \dots \quad b_{n-1} - b_n a_{n-1}) \quad (4.64)$$

$$d = b_n. \quad (4.65)$$

Für  $q < n$  haben  $\mathbf{c}^T$  und  $d$  die einfachere Form

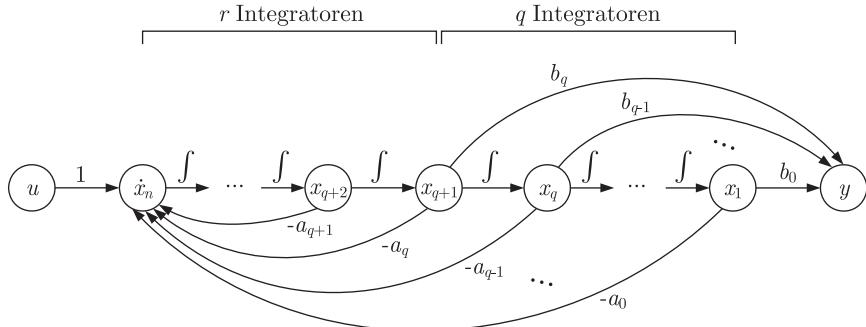
$$\mathbf{c}^T = (b_0 \quad b_1 \dots b_q \quad 0 \dots 0), \quad d = 0, \quad (4.66)$$

bei der im Vektor  $\mathbf{c}^T$   $r - 1$  Nullen stehen.

Der Vollständigkeit halber sei darauf hingewiesen, dass die hier angegebene Normalform für die Differentialgleichung (4.60) nur dann gilt, wenn diese Differentialgleichung eine Minimalrealisierung des betrachteten Systems darstellt, d. h., dass die rechte und linke Seite dieser Gleichung so vereinfacht sind, dass das auf S. 269 behandelte Kürzen von Polen und Nullstellen in der zugehörigen Übertragungsfunktion nicht möglich ist (vgl. auch Abschn. II-3.5).

Ein Zustandsraummodell (4.45) mit der Matrix  $\mathbf{A}$  in Begleitmatrixform (4.63) und dem Vektor  $\mathbf{b}$  in der Form (4.63) heißt Modell in *Regelungsnormalform* (oder auch Steuerungsnormalform). Die speziellen Strukturen von  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{b}$  erleichtern die Analyse des Systems und den Reglerentwurf. Im Abschn. 5.3.5 wird deshalb gezeigt, wie man Zustandsraummodelle mit beliebigen Matrizen  $\mathbf{A}$  und Vektoren  $\mathbf{b}$  durch eine Koordinatentransformation in diese Form bringen kann.

Auch für  $q > 0$  kann man das System mit einer Kette von  $n$  Integratoren darstellen. Im Unterschied zu Abb. 4.14 wird jetzt die Ausgangsgröße nicht nur durch die erste Zustandsvariable  $x_1$ , sondern durch die ersten  $(q + 1)$  Zustandsvariablen  $x_1, x_2, \dots, x_{q+1}$  bestimmt. In Abb. 4.15 ist diese Abhängigkeit durch die Kanten mit den Gewichten  $b_0, b_1, \dots, b_q$  dargestellt. Wie in Abb. 4.14 beeinflussen alle Zustandsvariablen die Größe  $\dot{x}_n$ , was an den Kanten mit den Gewichten  $a_i$  in der Abbildung



**Abb. 4.15:** Signalflussgraph für ein Zustandsraummodell in Regelungsnormalform ( $0 < r \leq n$ )

gezeigt wird. Für  $r = 0$  gibt es zusätzlich eine direkte Kante von der Eingangsgröße  $u$  zur Ausgangsgröße  $y$  und die Gewichte der Kanten von den Zustandsvariablen  $x_i$  nach  $y$  ändern sich entsprechend Gl. (4.64)

Der in Gl. (4.5) definierte relative Grad  $r = n - q$  gibt an, wie viele Integratoren der linke Teil der Integratorkette enthält, der keinen direkten Einfluss auf die Ausgangsgröße  $y$  hat. Die Eingangsgröße  $u$  kann nicht die Ausgangsgröße  $y$  selbst, sondern nur die  $r$ -te und höhere Ableitungen der Ausgangsgröße verändern (siehe Abschn. 5.3.5). Die Abbildung zeigt anschaulich, dass ein System umso schneller auf eine Veränderung der Eingangsgröße  $u$  mit einer Änderung der Ausgangsgröße  $y$  reagieren kann, je kleiner der relative Grad ist, denn umso weniger Integratoren muss die Eingangsgröße durchlaufen, bevor sie die Ausgangsgröße beeinflusst. Im „schwierigsten Fall“ gilt  $r = n$  und das Eingangssignal kann nur über eine Kette von  $n$  Integratoren hindurch auf den Ausgang einwirken (Abb. 4.14).

Gilt andererseits  $r = 0$ , so hat der Eingang einen direkten Einfluss auf den Ausgang, was sich im Zustandsraummodell durch den nicht verschwindenden Parameter  $d = b_n \neq 0$  niederschlägt (vgl. Gl. (4.65)). Wie später noch genauer untersucht werden wird, ist ein solches System *sprungfähig*, denn eine sprungförmige Änderung der Eingangsgröße wird unverzögert auf den Ausgang übertragen und führt dort zu einer sprungförmigen Änderung. Die hier abgeleiteten Beziehungen zwischen der Differentialgleichung (4.50) und dem Zustandsraummodell zeigen, dass ein System genau dann *sprungfähig* ist, wenn  $u(t)$  und  $y(t)$  in die Differentialgleichung mit der selben höchsten Ableitung eingehen ( $q = n$ ). Für die meisten technischen Systeme gilt  $q < n$  und folglich  $d = 0$  und  $r \geq 1$ . Diese Systeme sind *nicht sprungfähig*.

**Erläuterungen.** Um die Ableitung der Regelungsnormalform aus der Differentialgleichung im Einzelnen darstellen zu können, wird zunächst die Differentialgleichung (4.50) mit  $b_0 = 1$  betrachtet, wobei  $y$  durch  $\tilde{y}$  und  $u$  durch  $\tilde{u}$  ersetzt und verschwindende Anfangsbedingungen angenommen werden:

$$\frac{d^n \tilde{y}(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} \tilde{y}(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d \tilde{y}(t)}{dt} + a_0 \tilde{y}(t) = \tilde{u}(t), \quad (4.67)$$

$$\frac{d^{n-1}\tilde{y}}{dt^{n-1}}(0) = 0, \dots, \quad \frac{dy}{dt}(0) = 0, \quad \tilde{y}(0) = 0.$$

Diese Gleichung ergibt für eine gegebene Eingangsgröße  $\tilde{u}(t)$  die Lösung  $\tilde{y}(t)$ :

$$\tilde{u}(t) \mapsto \tilde{y}(t).$$

Wird an Stelle der Funktion  $\tilde{u}(t)$  die Ableitung  $\frac{d\tilde{u}}{dt}$  als Eingangsgröße verwendet, so entsteht als Lösung der Differentialgleichung (4.67) die Ableitung  $\frac{d\tilde{y}}{dt}$  der bisherigen Lösung:

$$\frac{d\tilde{u}(t)}{dt} \mapsto \frac{d\tilde{y}(t)}{dt}.$$

Um dies zu zeigen, wird Gl. (4.67) noch einmal für  $\bar{u}$  bzw.  $\bar{y}$  an Stelle von  $\tilde{u}$  bzw.  $\tilde{y}$  aufgeschrieben:

$$\begin{aligned} \frac{d^n\bar{y}(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}\bar{y}(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d\bar{y}(t)}{dt} + a_0 \bar{y}(t) &= \bar{u}(t). \\ \frac{d^{n-1}\bar{y}}{dt^{n-1}}(0) = 0, \dots, \quad \frac{d\bar{y}}{dt}(0) = 0, \quad \bar{y}(0) = 0. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Diese Gleichung ergibt für die Eingangsgröße  $\bar{u}(t)$  die Lösung  $\bar{y}(t)$ . Wird nun  $\bar{u}(t) = \frac{d\tilde{u}}{dt}$  gesetzt, so erhält man aus Gl. (4.68) die Beziehung

$$\frac{d^n\bar{y}(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}\bar{y}(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d\bar{y}(t)}{dt} + a_0 \bar{y}(t) = \frac{d\tilde{u}(t)}{dt}$$

und aus Gl. (4.67) durch Differenziation die Gleichung

$$\frac{d^{n+1}\tilde{y}(t)}{dt^{n+1}} + a_{n-1} \frac{d^n\tilde{y}(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d^2\tilde{y}(t)}{dt^2} + a_0 \frac{d\tilde{y}(t)}{dt} = \frac{d\tilde{u}(t)}{dt}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\frac{d^n\tilde{y}}{dt^n}(0) = 0, \dots, \quad \frac{d^2\tilde{y}}{dt^2}(0) = 0, \quad \frac{d\tilde{y}}{dt}(0) = 0.$$

Da diese beiden Gleichungen dieselbe rechte Seite und verschwindende Anfangsbedingungen haben, folgt aus ihnen

$$\bar{y}(t) = \frac{d\tilde{y}(t)}{dt}.$$

Dieses Ergebnis kann symbolisch durch Gl. (4.62) dargestellt werden. Es gilt nicht nur für Gl. (4.67), sondern für beliebige lineare Differentialgleichungen der Form (4.3).

Die Lösung der Differentialgleichung (4.60) kann als Lösung  $\tilde{y}$  der Differentialgleichung (4.67) für

$$\tilde{u}(t) = b_q \frac{d^q u(t)}{dt^q} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$$

berechnet werden, wobei aufgrund der Beziehung (4.62) und des Superpositionsprinzips (4.33) die Beziehung

$$y(t) = b_q \frac{d^q \tilde{y}(t)}{dt^q} + \dots + b_1 \frac{d\tilde{y}(t)}{dt} + b_0 \tilde{y}(t) \quad (4.69)$$

entsteht.

Besitzt die gegebene Differentialgleichung im Gegensatz zu Gl. (4.50) nicht verschwindende Anfangsbedingungen (4.61)

$$\frac{d^{n-1}\tilde{y}}{dt^{n-1}}(0) = \tilde{y}_{0n}, \dots, \quad \frac{d\tilde{y}}{dt}(0) = \tilde{y}_{02}, \quad \tilde{y}(0) = \tilde{y}_{01}, \quad (4.70)$$

dann muss die Beziehung (4.69) um die Lösung  $\tilde{y}_h(t)$  der homogenen Differentialgleichung

$$\frac{d^n\tilde{y}_h(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}\tilde{y}_h(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1\frac{d\tilde{y}_h(t)}{dt} + a_0\tilde{y}_h(t) = 0,$$

für die Anfangsbedingungen (4.70) zu

$$y(t) = b_q\frac{d^q\tilde{y}(t)}{dt^q} + \dots + b_1\frac{d\tilde{y}(t)}{dt} + b_0\tilde{y}(t) + \tilde{y}_h(t)$$

ergänzt werden. Die Anfangsbedingungen  $\tilde{y}_{0n}, \dots, \tilde{y}_{01}$  sind aus den Anfangsbedingungen (4.61) berechenbar, stimmen jedoch i. Allg. nicht mit diesen überein.

Zur Differentialgleichung (4.67) gehört das Zustandsraummodell (4.45) mit  $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T$  und  $d$  aus Gln. (4.54) – (4.57) mit  $b_0 = 1$ , wobei die Zustandsvariablen entsprechend

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \tilde{y}(t) \\ x_2(t) &= \frac{d\tilde{y}(t)}{dt} \\ &\vdots \\ x_n(t) &= \frac{d^{n-1}\tilde{y}(t)}{dt^{n-1}} \end{aligned}$$

definiert sind und für den Anfangszustand die Beziehung

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} \tilde{y}_{01} \\ \tilde{y}_{02} \\ \vdots \\ \tilde{y}_{0n} \end{pmatrix} \quad (4.71)$$

gilt. Der Systemausgang  $y(t)$  lässt sich entsprechend

$$y(t) = b_q x_{q+1}(t) + b_{q-1} x_q(t) + \dots + b_1 x_2(t) + b_0 x_1(t)$$

aus den ersten  $q+1$  Zustandsgrößen bilden, vorausgesetzt, dass  $q < n$  gilt. Diese Gleichung kann insbesondere verwendet werden, um die Anfangsbedingungen (4.61) der Differentialgleichung in den Anfangszustand (4.71) des Zustandsraummodells umzurechnen. Man erhält also für die Differentialgleichung (4.3) das Zustandsraummodell (4.45) mit  $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T$  und  $d$  aus (4.63), und (4.66). Ist  $q = n$ , so hängt  $y(t)$  auch von der  $n$ -ten Ableitung von  $\tilde{y}(t)$  ab:

$$\begin{aligned} y(t) &= b_n \dot{x}_n(t) + b_{n-1} x_n(t) + \dots + b_1 x_2(t) + b_0 x_1(t) \\ &= b_n(-a_0 x_1(t) - \dots - a_{n-1} x_n(t) + u(t)) + b_{n-1} x_n(t) + \dots + b_0 x_1(t) \\ &= (b_0 - b_n a_0) x_1(t) + \dots + (b_{n-1} - b_n a_{n-1}) x_n(t) + b_n u(t). \end{aligned}$$

In der zweiten Zeile wurde die Darstellung von  $\dot{x}_n$  in Abhängigkeit von  $x_1, x_2, \dots, x_n$  und  $u$  verwendet, die als letzte Zeile im Modell (4.45), (4.63) steht. Damit ist das Modell (4.45) mit  $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T$  und  $d$  nach Gln. (4.63) – (4.65) abgeleitet.

**Beispiel 4.9 Zustandsraummodell eines Reihenschwingkreises**

Aus der Differentialgleichung (4.16) kann für den Reihenschwingkreis aus Abb. 4.2 auf S. 59 mit Hilfe der Beziehungen (4.63), und (4.66) ein Zustandsraummodell gebildet werden. Dazu muss die Differentialgleichung zunächst durch Division durch  $a_2 = CL$  in die Form (4.60) gebracht werden:

$$\ddot{u}_2(t) + \frac{R}{L}\dot{u}_2(t) + \frac{1}{CL}u_2(t) = \frac{R}{L}\dot{u}_1(t) + \frac{1}{CL}u_1(t)$$

$$u_2(0) = u_0, \quad \dot{u}_2(0) = -\frac{R}{L}u_0.$$

Damit erhält man das Zustandsraummodell

$$\Sigma_{\text{RSK}} : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{CL} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_1(t), & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ u_2(t) = \left( \frac{1}{CL} \quad \frac{R}{L} \right) \mathbf{x}(t), \end{cases} \quad (4.72)$$

in dem die Signalbezeichnungen  $u_1(t)$  für die Eingangsspannung und  $u_2(t)$  für die Ausgangsspannung beibehalten wurden. Den Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  erhält man aus den im Beispiel 4.1 angegebenen Anfangsbedingungen für  $u_2(0)$  und  $\dot{u}_2(0)$  durch Einsetzen in die Ausgabegleichung und die einmal abgeleitete Ausgabegleichung.

Das Zustandsraummodell (4.72) des Reihenschwingkreises  $\Sigma_{\text{RSK}}$  unterscheidet sich von dem im Beispiel 4.5 auf S. 71 angegebenen Modell in zweierlei Weise. Erstens sind die Zustandsvariablen im Modell (4.44) physikalisch interpretierbar, denn sie bezeichnen den Strom  $i_1$  und die Spannung  $u_2$ , während in dem hier erhaltenen Modell die Zustandsvariablen Linearkombinationen dieser Größen darstellen und deshalb keine direkte physikalische Bedeutung haben. Zweitens hat die Systemmatrix des hier erhaltenen Modells die Frobeniusform und nur das unterste Element des Eingangsvektors  $b$  ist von null verschieden, während beide Modellgrößen in dem physikalisch interpretierbaren Modell keine spezielle Form haben. Deshalb führt das hier angegebene Modell für einige Analyseaufgaben auf einfachere Lösungen. Beide Modelle repräsentieren jedoch dasselbe Eingangs-Ausgangsverhalten, denn beide stellen den Zusammenhang zwischen der Eingangsspannung  $u_1$  und der Ausgangsspannung  $u_2$  desselben Schwingkreises dar.  $\square$

Der gezeigte Weg, ein Zustandsraummodell aus einer Differentialgleichung abzuleiten, zeigt noch eine weitere Tatsache: Offenbar gibt es für Systeme, in deren Differentialgleichung der Grad der höchsten Ableitung der Eingangsgröße den der Ausgangsgröße überschreitet ( $q > n$ ), kein Zustandsraummodell. Man kann also beispielsweise für die Differenziation (4.41) kein Zustandsraummodell angeben. Allgemein gilt:

|| Zustandsraummodelle gibt es nur für kausale, also technisch realisierbare Systeme ( $q \leq n$ ).

#### 4.4.2 Aufstellung des Zustandsraummodells aus den physikalischen Grundbeziehungen

Bei vielen Anwendungen soll das Zustandsraummodell direkt aus den physikalischen Grundbeziehungen, die das gegebene System beschreiben, abgeleitet und dabei die Differentialgleichung als Zwischenergebnis umgangen werden. Dieser Weg wurde im Beispiel 4.5 für einen Reihenschwingkreis gezeigt. Die für die Komponenten und die Kopplungen aufgestellten Gleichungen werden dabei nicht zu einer Differentialgleichung, sondern zu einem Zustandsraummodell umgeformt. Dieses dem Algorithmus 4.1 sehr ähnliche Vorgehen ist im Folgenden zusammengefasst:

---

##### **Algorithmus 4.2 Aufstellung eines Zustandsraummodells**

---

**Gegeben:** Kontinuierliches System  $\Sigma$  mit Eingang  $u$  und Ausgang  $y$

1. **Systemzerlegung:** Zerlegen Sie das System in Komponenten.
2. **Komponentenmodelle:** Schreiben Sie die physikalischen Gesetze auf, die das Verhalten der Komponenten beschreiben.
3. **Kopplungsbeziehungen:** Schreiben Sie die Beziehungen auf, die zwischen den Komponenten bestehen.
4. **Modellumformung:** Fassen Sie die Gleichungen zu einem Zustandsraummodell zusammen.

**Ergebnis:** Zustandsraummodell (4.45) des Systems  $\Sigma$

---

Ein wichtiges Problem bei der Aufstellung des Zustandsraummodells entsteht bei der Modellumformung aus der Tatsache, dass aus den physikalischen Grundbeziehungen nicht nur Differentialgleichungen, sondern auch algebraische Gleichungen folgen. Der Reihenschwingkreis im Beispiel 4.1 ist durch die Differentialgleichungen (4.9) und (4.10) für die Induktivität und die Kapazität sowie durch die algebraischen Gleichungen (4.8), (4.11) und (4.12) für den Widerstand und die beiden Maschen beschrieben.

Für die Aufstellung des Zustandsraummodells müssen erstens die algebraischen Gleichungen eliminiert werden, denn im Zustandsraummodell treten nur Differentialgleichungen auf. Zweitens enthalten die aufgestellten Gleichungen mehr Signale, als für das Zustandsraummodell notwendig sind. Alle nicht als Zustandsvariablen bzw. Eingangsgröße fungierenden Signale sind ebenfalls zu eliminieren. Für die praktische Durchführung dieser Schritte steht die Frage, unter welcher Bedingung alle algebraischen Gleichungen eliminiert werden können und wie die Elimination auf möglichst systematischem Wege erfolgen kann.

Um die genannten Schritte durchzuführen, reduziert man zunächst alle Differentialgleichungen auf solche erster Ordnung, indem man, ähnlich wie in Gl. (4.52), für höhere Ableitungen neue Signale einführt. Anschließend werden alle Differential-

gleichungen und alle algebraischen Gleichungen untereinander geschrieben, so dass ein Gleichungssystem der Form

$$\text{Deskriptorsystem } \Sigma : \begin{cases} \mathbf{E}\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{z}(t) + \mathbf{g}u(t), & \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0 \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{h}^T\mathbf{z}(t) + ku(t) \end{cases} \quad (4.73)$$

entsteht.  $\mathbf{z}$  ist ein  $n_d$ -dimensionaler Vektor,  $\mathbf{E}$  eine  $(n_e, n_d)$ -Matrix mit  $n_e \geq n_d$ . Ist die  $i$ -te Zeile von Gl. (4.73) eine Differentialgleichung, so ist mindestens ein Element  $e_{ij}$ , ( $j = 1, 2, \dots, n_d$ ) der Matrix  $\mathbf{E}$  von null verschieden. Stellt diese Zeile eine algebraische Gleichung dar, so verschwinden alle Matrixelemente auf der linken Seite dieser Zeile.  $\mathbf{g}$  und  $\mathbf{h}$  sind  $n_e$ - bzw.  $n_d$ -dimensionale Vektoren. Die zweite Zeile in Gl. (4.73) beschreibt die Abhängigkeit der Ausgangsgröße  $y$  von der Eingangsgröße  $u$  sowie vom Vektor  $\mathbf{z}$ . Das Modell (4.73) wird als *Deskriptorsystem* bezeichnet.

Da die Matrix  $\mathbf{E}$  rechteckig ist, kann sie nicht invertiert werden, so dass eine direkte Umformung der Gl. (4.73) in die Standardform (4.45) des Zustandsraummodells durch Multiplikation mit  $\mathbf{E}^{-1}$  nicht möglich ist. Mit  $n$  wird der Rang von  $\mathbf{E}$  bezeichnet:

$$\text{Rang } \mathbf{E} = n. \quad (4.74)$$

Es wird sich zeigen, dass dieser Rang die Dimension des Zustandsvektors in der Zustandsgleichung bestimmt, so dass die Gl. (4.74) zur Bestimmung der unbekannten Systemordnung  $n$  verwendet werden kann.

**Überführung des Deskriptorsystems in ein Zustandsraummodell.** Im Weiteren wird zunächst von der Voraussetzung ausgegangen, dass die Matrix  $\mathbf{E}$  durch Umordnen der Zeilen in Gl. (4.73) sowie durch Umordnen der Elemente des Vektors  $\mathbf{z}$  auf die Form

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{11} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix} \quad (4.75)$$

gebracht wurde, wobei die  $(n, n)$ -Matrix  $\mathbf{E}_{11}$  den Rang  $n$  hat. Nun werden der Vektor  $\mathbf{z}$ , die Matrix  $\mathbf{F}$  und die Vektoren  $\mathbf{g}$  und  $\mathbf{h}$  in

$$\mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1(t) \\ \mathbf{z}_2(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{11} & \mathbf{F}_{12} \\ \mathbf{F}_{21} & \mathbf{F}_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}^T = (\mathbf{h}_1^T \ \mathbf{h}_2^T)$$

zerlegt, wobei  $\mathbf{z}_1$ ,  $\mathbf{g}_1$  und  $\mathbf{h}_1$   $n$ -dimensionale Vektoren und  $\mathbf{F}_{11}$  eine  $(n, n)$ -Matrix ist. Aufgrund dieser Zerlegungen zerfallen die Gln. (4.73) in

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{11}\dot{\mathbf{z}}_1(t) &= \mathbf{F}_{11}\mathbf{z}_1(t) + \mathbf{F}_{12}\mathbf{z}_2(t) + \mathbf{g}_1u(t) \\ \mathbf{O} &= \mathbf{F}_{21}\mathbf{z}_1(t) + \mathbf{F}_{22}\mathbf{z}_2(t) + \mathbf{g}_2u(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{h}_1^T\mathbf{z}_1(t) + \mathbf{h}_2^T\mathbf{z}_2(t) + ku(t). \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung kann in

$$\mathbf{z}_2(t) = -\mathbf{F}_{22}^{-1}\mathbf{F}_{21}\mathbf{z}_1(t) - \mathbf{F}_{22}^{-1}\mathbf{g}_2u(t)$$

umgestellt werden, wenn  $\mathbf{F}_{22}$  invertierbar ist, was hier vorausgesetzt wird. Das Einsetzen dieser Beziehung in die erste und dritte Gleichung ergibt das Zustandsraummodell

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\mathbf{z}}_1(t) = \mathbf{E}_{11}^{-1} (\mathbf{F}_{11} - \mathbf{F}_{12}\mathbf{F}_{22}^{-1}\mathbf{F}_{21}) \mathbf{z}_1(t) + \mathbf{E}_{11}^{-1}(\mathbf{g}_1 - \mathbf{F}_{12}\mathbf{F}_{22}^{-1}\mathbf{g}_2) u(t) \\ y(t) = (\mathbf{h}_1^T - \mathbf{h}_2^T\mathbf{F}_{22}^{-1}\mathbf{F}_{21}) \mathbf{z}_1(t) + (k - \mathbf{h}_2^T\mathbf{F}_{22}^{-1}\mathbf{g}_2) u(t). \end{cases} \quad (4.76)$$

Aus diesen Gleichungen kann man sehen, wie sich die Komponenten  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}^T$  und  $d$  des Zustandsraummodells (4.45) aus den entsprechenden Komponenten des Deskriptorsystems (4.73) zusammensetzen. Das Zustandsraummodell (4.76) und das Deskriptorsystem sind äquivalente Darstellungen des Systems  $\Sigma$ .

**Überführung der Matrix  $\mathbf{E}$  in die geforderte Form.** Der beschriebene Weg für die Aufstellung des Zustandsraummodells setzt voraus, dass die Matrix  $\mathbf{E}$  zuvor in die Form (4.75) überführt wurde. Außerdem müssen die Matrizen  $\mathbf{E}_{11}$  und  $\mathbf{F}_{22}$  invertierbar sein. Um  $\mathbf{E}$  in der gewünschten Weise zu zerlegen, sortiert man die in (4.73) vorkommenden  $n_e$  Gleichungen so, dass alle Differentialgleichungen oben und die algebraischen Gleichungen unten stehen. Dieser Schritt kann durch Multiplikation der Gl. (4.73) von links mit einer  $(n_e, n_e)$ -Permutationsmatrix<sup>2</sup>  $\mathbf{V}$  dargestellt werden. Anschließend versucht man, die Elemente des Vektors  $\mathbf{z}$  so umzuordnen, dass der obere rechte Block in  $\mathbf{E}$  eine Nullmatrix wird. Dieser Schritt bedeutet die Multiplikation des Vektors  $\mathbf{z}$  mit einer  $(n_d, n_d)$ -Permutationsmatrix  $\mathbf{W}$ , wobei der neue Vektor

$$\tilde{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{W}\mathbf{z}(t)$$

entsteht. Da die Gl. (4.73) offenbar äquivalent zu

$$\mathbf{V}\mathbf{E}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{W}\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{V}\mathbf{F}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{W}\mathbf{z}(t) + \mathbf{V}\mathbf{g}u(t)$$

ist, erhält man durch die beiden beschriebenen Schritte eine neue Matrix  $\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{V}\mathbf{E}\mathbf{W}^{-1}$  auf der linken Seite, für die durch geeignete Wahl von  $\mathbf{V}$  und  $\mathbf{W}$  erreicht werden soll, dass sie in der Form (4.75) zerlegt werden kann. Das Deskriptorsystem hat dann die neue Form

$$\tilde{\mathbf{E}}\tilde{\mathbf{z}}(t) = \tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{z}}(t) + \tilde{\mathbf{g}}u(t), \quad (4.77)$$

auf die das oben beschriebene Vorgehen angewendet werden kann.

Da viele Systeme aus kleineren, überschaubaren Einheiten bestehen, beispielsweise elektrische Netzwerke aus mehreren Maschen, kann die gewünschte Struktur der Gl. (4.73) sehr häufig durch einfaches Umordnen gefunden werden. Gelingt dieser Schritt nicht, so müssen  $\mathbf{V}$  und  $\mathbf{W}$  als beliebige reguläre Matrizen gewählt werden. Die Multiplikation mit  $\mathbf{V}$  bedeutet dann, dass die Gleichungen linear kombiniert werden. Die Operation mit der Matrix  $\mathbf{W}$  entspricht einer Transformation des Vektors  $\mathbf{z}$ .

<sup>2</sup> Eine Permutationsmatrix ist eine quadratische Matrix, bei der in jeder Zeile und in jeder Spalte genau eine Eins vorkommt und alle anderen Elemente Nullen sind.

Wenn die Matrix  $E$  auf die gewünschte Form gebracht wurde, muss  $F_{22}$  quadratisch und invertierbar sein. Diese Bedingung bedeutet, dass ausreichend viele algebraischen Gleichungen vorhanden sind, um die in  $z_2$  stehenden Signale aus dem Modell zu eliminieren, und dass diese Gleichungen linear unabhängig voneinander sind. Ist  $F_{22}$  rechteckig, so müssen algebraische Gleichungen gestrichen oder neue Gleichungen hinzugefügt werden. Ist die Matrix singulär, so müssen linear abhängige Gleichungen gegen neue, linear unabhängige Gleichungen ausgetauscht werden.

#### Beispiel 4.10 Aufstellung des Zustandsraummodells eines Reihenschwingkreises

Der in Abb. 4.2 gezeigte Reihenschwingkreis aus Beispiel 4.1 ist durch die Gl. (4.8) – (4.12) beschrieben, die hier in folgender Reihenfolge angegeben werden:

$$\begin{aligned} u_2 &= u_R + u_C \\ u_1 &= u_L + u_R + u_C \\ u_R &= R i_1 \\ u_L &= L \frac{di_1}{dt} \\ i_1 &= C \frac{du_C}{dt}. \end{aligned}$$

Aus Platzgründen wird im Folgenden die Zeitabhängigkeit der Signale nicht explizit gekennzeichnet. Die Differentialgleichungen und algebraischen Gleichungen lassen sich in der Form (4.73) zusammenfassen:

$$\Sigma_{\text{RSK}} : \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L \\ 0 & C & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_R \\ \dot{u}_C \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_L \\ \dot{i}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -R \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_R \\ u_C \\ u_2 \\ u_L \\ i_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_1 \\ u_2 = (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} u_R \\ u_C \\ u_2 \\ u_L \\ i_1 \end{pmatrix}. \end{array} \right.$$

Dieses Deskriptorsystems stellt eine vollständige Repräsentation des Systems  $\Sigma_{\text{RSK}}$  dar. Es soll jetzt in die Form eines Zustandsraummodells überführt werden.

Offensichtlich ist der Rang von  $E$  gleich 2, d. h., dass ein Zustandsraummodell mit der Ordnung  $n = 2$  aufzustellen ist. Um die in Gl. (4.75) vorgegebene Struktur von  $E$  zu erzeugen, werden als erstes die beiden Differentialgleichungen nach oben verschoben, so dass

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & L \\ 0 & C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_R \\ \dot{u}_C \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_L \\ \dot{i}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_R \\ u_C \\ u_2 \\ u_L \\ i_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} u_1$$

entsteht. Dies entspricht der Multiplikation des Deskriptorsystems mit der Matrix

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Im zweiten Schritt werden die Elemente  $u_R$  und  $i_1$  im Vektor  $\mathbf{z}$  getauscht, was einer Multiplikation dieses Vektors von links mit der Permutationsmatrix

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

entspricht:

$$\begin{pmatrix} L & 0 & : & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & : & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & : & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & : & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & : & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ \dot{u}_C \\ \dots \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_L \\ \dot{u}_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & : & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & : & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & : & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & : & 0 & 1 & 1 \\ -R & 0 & : & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ u_C \\ \dots \\ u_2 \\ u_L \\ u_R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} u_1.$$

Die Matrizen

$$\mathbf{E}_{11} = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{F}_{22} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sind regular.

Die angegebenen Gleichungen beschreiben den Reihenschwingkreis also vollständig. Entsprechend der Gln. (4.76) erhält man das gesuchte Zustandsraummodell

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_1(t) \\ u_C(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ -R & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} i_1(t) \\ u_C(t) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) u_1(t) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1(t) \\ u_C(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) &= \left( (0 \ 0) - (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ -R & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} i_1(t) \\ u_C(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( 0 - (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) u(t) \\
& = (R - 1) \begin{pmatrix} i_1(t) \\ u_C(t) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

also

$$\Sigma_{RSK} : \begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_1(t) \\ u_C(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1(t) \\ u_C(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) = (R - 1) \begin{pmatrix} i_1(t) \\ u_C(t) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Die beiden Modelle des Systems  $\Sigma_{RSK}$  haben dasselbe E/A-Verhalten. Das angegebene Zustandsraummodell unterscheidet sich vom Modell (4.72), kann aber durch eine Zustandstransformation (5.25) in dieses Modell überführt werden (mit welcher Transformationsmatrix  $T^?$ ).  $\square$

Deskriptorsysteme (4.73) wurden hier als Zwischenschritt der Modellbildung eingeführt. Es soll abschließend erwähnt werden, dass die Klasse derjenigen Systeme, die durch Deskriptorgleichungen beschrieben werden können, größer ist als die Klasse der Systeme, für die man ein Zustandsraummodell aufstellen kann. Durch Deskriptorgleichungen können insbesondere auch technisch nicht realisierbare Systeme dargestellt werden wie beispielsweise ein Differenzierglied, für das die Beziehung

$$y(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

gilt. Die Deskriptorgleichung dieses Übertragungsgliedes heisst

$$\text{Differenzierglied : } \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = (1 \ 0) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (4.78)$$

**Aufgabe 4.5** Zustandsraummodell des Feder-Masse-Schwingers

Stellen Sie mit Hilfe der Gln. (4.17) – (4.21) ein Modell der Form (4.76) für den Feder-Masse-Schwinger aus Beispiel 4.2 auf und formen Sie dieses Modell in ein Zustandsraummodell (4.45) um. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Modell (4.59).  $\square$

**Aufgabe 4.6\*** Zustandsraummodell eines gekoppelten Feder-Masse-Systems

Bei dem in Abb. 4.16 gezeigten System ist die Kraft  $f_e(t)$  die Eingangsgröße und die Position  $y(t)$  der linken Masse die Ausgangsgröße.

1. Stellen Sie die Zustandsgleichung des Systems auf, wobei Sie in der im Algorithmus 4.2 zusammengefassten Schritten vorgehen.
2. Zeichnen Sie den Signalflussgraphen und interpretieren Sie ihn. Erklären Sie, warum viele Signale nicht direkt verkoppelt, also im Signalflussgraphen nicht durch direkte Kanten verbunden sind.  $\square$

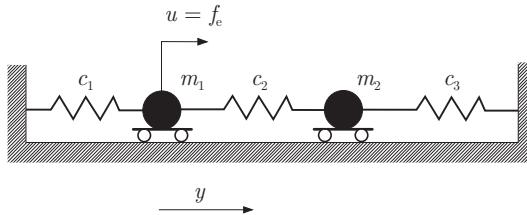


Abb. 4.16: Gekoppeltes Feder-Masse-System

#### 4.4.3 Zustandsraummodell gekoppelter Systeme

Bei größeren Systemen wird man bei der Modellbildung zunächst Zustandsraummodelle für Teilsysteme aufschreiben und diese dann entsprechend den im Gesamtsystem geltenden Koppelbeziehungen verknüpfen. Diese Vorgehensweise soll hier für die Reihenschaltung, die Parallelschaltung sowie die in Abb. 4.19 dargestellte Rückkopplung zweier Teilsysteme beschrieben werden. Alle Überlegungen lassen sich leicht auf mehr als zwei Teilsysteme erweitern.

Gegeben seien die Zustandsraummodelle der beiden Teilsysteme

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{b}_1 u_1(t), & \mathbf{x}_1(0) = \mathbf{x}_{10} \\ y_1(t) = \mathbf{c}_1^T \mathbf{x}_1(t) + d_1 u_1(t) \end{cases} \quad (4.79)$$

und

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_2(t) = \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2(t) + \mathbf{b}_2 u_2(t), & \mathbf{x}_2(0) = \mathbf{x}_{20} \\ y_2(t) = \mathbf{c}_2^T \mathbf{x}_2(t) + d_2 u_2(t). \end{cases} \quad (4.80)$$

Gesucht ist das Zustandsraummodell

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} u(t), & \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(0) \\ \mathbf{x}_2(0) \end{pmatrix} \\ y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + d u(t) \end{cases} \quad (4.81)$$

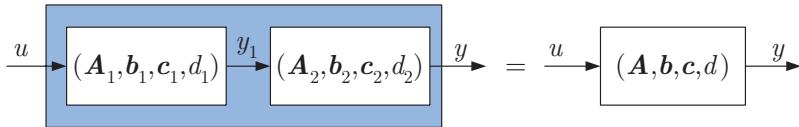
der Zusammenschaltung beider Teilsysteme. Für alle drei Verknüpfungen der Teilsysteme setzt sich der Zustandsvektor des Gesamtsystems  $\Sigma$  aus den beiden Zustandsvektoren der Teilsysteme  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  zusammen:

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1(t) \\ \boldsymbol{x}_2(t) \end{pmatrix}.$$

Für die dynamische Ordnung  $n$  des Gesamtsystems gilt deshalb

$$n = n_1 + n_2,$$

wobei  $n_1$  und  $n_2$  die dynamischen Ordnungen der Teilsysteme bezeichnen.



**Abb. 4.17:** Reihenschaltung zweier Teilsysteme

**Reihenschaltung.** Bei der Reihenschaltung ist der Ausgang  $y_1$  des ersten Teilsystems gleich dem Eingang  $u_2$  des zweiten Teilsystems (Abb. 4.17):

$$\begin{aligned} u(t) &= u_1(t) \\ u_2(t) &= y_1(t) \\ y(t) &= y_2(t). \end{aligned}$$

Verknüpft man die Teilsystemgleichungen in dieser Weise, so erhält man das Modell (4.81) des Gesamtsystems  $\Sigma = (\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T, d)$  mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{b}_2 \mathbf{c}_1^T & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ d_1 \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} \quad (4.82)$$

$$\mathbf{c}^T = (d_2 \mathbf{c}_1^T \quad \mathbf{c}_2^T), \quad d = d_1 d_2. \quad (4.83)$$

**Parallelschaltung.** Bei der Parallelschaltung entsteht der Ausgang des Gesamtsystems durch Addition der Ausgänge  $y_1$  und  $y_2$  der Teilsysteme, die denselben Eingang  $u$  erhalten (Abb. 4.18):

$$\begin{aligned} u(t) &= u_1(t) = u_2(t) \\ y(t) &= y_1(t) + y_2(t). \end{aligned}$$

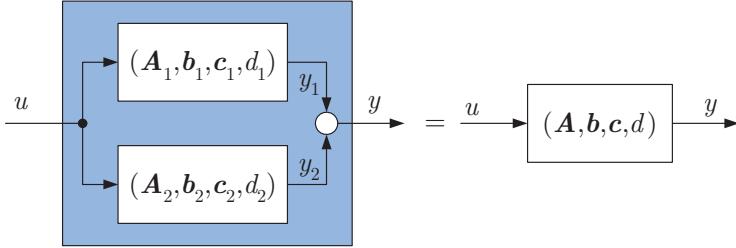


Abb. 4.18: Parallelschaltung zweier Teilsysteme

Aus diesen Koppelbeziehungen und den Teilsystemgleichungen erhält man für die Parallelschaltung das Modell  $\Sigma = (\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T, \mathbf{d})$  mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} \quad (4.84)$$

$$\mathbf{c}^T = (\mathbf{c}_1^T \ \mathbf{c}_2^T), \quad \mathbf{d} = \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2. \quad (4.85)$$

**Rückkopplungsschaltung.** Entsprechend Abb. 4.19 gelten für die Rückkopplungsschaltung folgende Beziehungen:

$$y(t) = y_1(t) \quad (4.86)$$

$$u_1(t) = u(t) - y_2(t) \quad (4.87)$$

$$u_2(t) = y_1(t). \quad (4.88)$$

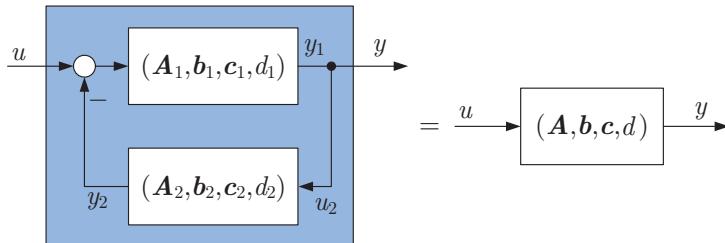


Abb. 4.19: Rückkopplungsschaltung zweier Teilsysteme

Das Zustandsraummodell des Gesamtsystems erhält man besonders schnell, wenn beide Teilsysteme nicht sprungfähig sind, also  $d_1 = 0$  und  $d_2 = 0$  gilt. Dann setzt man die Beziehung (4.87) in die Zustandsgleichung (4.79) des ersten Teilsystems ein und erhält unter Verwendung von Gl. (4.80) die Beziehung

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1(t) &= \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{b}_1(u(t) - y_2(t)) \\ &= \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1(t) - \mathbf{b}_1 \mathbf{c}_2^T \mathbf{x}_2(t) + \mathbf{b}_1 u(t).\end{aligned}\quad (4.89)$$

Auf ähnliche Weise erhält man aus den Gln. (4.79), (4.80) und (4.88) die Gleichung

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_2(t) &= \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2(t) + \mathbf{b}_2 y_1(t) \\ &= \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2(t) + \mathbf{b}_2 \mathbf{c}_1^T \mathbf{x}_1(t).\end{aligned}\quad (4.90)$$

Für die Ausgangsgröße  $y$  gilt entsprechend Gl. (4.86)

$$y(t) = \mathbf{c}_1^T \mathbf{x}_1(t). \quad (4.91)$$

Schreibt man die Gln. (4.89), (4.90) und (4.91) untereinander, so erhält man

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & -\mathbf{b}_1 \mathbf{c}_2^T \\ \mathbf{b}_2 \mathbf{c}_1^T & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} u(t)$$

und schließlich die Darstellung  $\Sigma = (\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T, d)$  mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & -\mathbf{b}_1 \mathbf{c}_2^T \\ \mathbf{b}_2 \mathbf{c}_1^T & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (4.92)$$

$$\mathbf{c}^T = (\mathbf{c}_1^T \quad \mathbf{0}^T), \quad d = 0, \quad (4.93)$$

wobei die beiden Nullvektoren die Dimensionen  $n_2$  haben. Die Gln. (4.92) und (4.93) zeigen, wie sich  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$  aus den Teilsystemmodellen berechnen lassen, wenn nach Voraussetzung  $d_1 = d_2 = 0$  gilt.

Wenn beide Teilsysteme sprungfähig sind, wird die Berechnung etwas aufwändiger, denn  $u_1$  hängt über  $y_2$  direkt von  $y_1$  ab und  $y_1$  direkt wieder von  $u_1$ . Diese Abhängigkeiten sind durch die algebraischen Ausgangsgleichungen (4.79), (4.80) und (4.87) beschrieben, weshalb man auch von einer *algebraischen Schleife* spricht. Die beiden Teilsysteme können genau dann zu einem Gesamtsystemmodell verknüpft werden, wenn die Bedingung

$$d_1 d_2 \neq -1 \quad (4.94)$$

erfüllt ist, wovon im Folgenden ausgegangen wird.

Für  $y_2$  erhält man aus den genannten Gleichungen

$$\begin{aligned}y_2(t) &= \mathbf{c}_2^T \mathbf{x}_2(t) + d_2 y_1(t) \\ &= \mathbf{c}_2^T \mathbf{x}_2(t) + d_2 \mathbf{c}_1^T \mathbf{x}_1(t) + d_2 d_1 u(t) - d_2 d_1 y_2(t) \\ y_2(t) &= \frac{1}{1 + d_1 d_2} (\mathbf{c}_2^T \mathbf{x}_2(t) + d_2 \mathbf{c}_1^T \mathbf{x}_1(t) + d_1 d_2 u(t))\end{aligned}$$

und analog dazu für  $y_1$

$$y_1(t) = \frac{1}{1+d_1d_2} (\mathbf{c}_1^T \mathbf{x}_1(t) - d_1 \mathbf{c}_2^T \mathbf{x}_2(t) + d_1 u(t)).$$

Die Zustandsgleichungen der Teilsysteme führen auf

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1(t) &= \left( \mathbf{A}_1 - \frac{d_2}{1+d_1d_2} \mathbf{b}_1 \mathbf{c}_1^T \right) \mathbf{x}_1(t) - \frac{1}{1+d_1d_2} \mathbf{b}_1 \mathbf{c}_2^T \mathbf{x}_2(t) + \frac{1}{1+d_1d_2} \mathbf{b}_1 u(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) &= \left( \mathbf{A}_2 - \frac{d_1}{1+d_1d_2} \mathbf{b}_2 \mathbf{c}_2^T \right) \mathbf{x}_2(t) + \frac{1}{1+d_1d_2} \mathbf{b}_2 \mathbf{c}_1^T \mathbf{x}_1(t) + \frac{d_1}{1+d_1d_2} \mathbf{b}_2 u(t) \\ y(t) &= \frac{1}{1+d_1d_2} \mathbf{c}_1^T \mathbf{x}_1(t) - \frac{d_1}{1+d_1d_2} \mathbf{c}_2^T \mathbf{x}_2(t) + \frac{d_1}{1+d_1d_2} u(t)\end{aligned}$$

und zum Modell des Gesamtsystems  $\Sigma = (\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T, d)$  mit

$$\boxed{\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 - \frac{d_2}{1+d_1d_2} \mathbf{b}_1 \mathbf{c}_1^T & -\frac{1}{1+d_1d_2} \mathbf{b}_1 \mathbf{c}_2^T \\ \frac{1}{1+d_1d_2} \mathbf{b}_2 \mathbf{c}_1^T & \mathbf{A}_2 - \frac{d_1}{1+d_1d_2} \mathbf{b}_2 \mathbf{c}_2^T \end{pmatrix}} \quad (4.95)$$

$$\boxed{\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+d_1d_2} \mathbf{b}_1 \\ \frac{d_1}{1+d_1d_2} \mathbf{b}_2 \end{pmatrix}} \quad (4.96)$$

$$\boxed{\mathbf{c}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+d_1d_2} \mathbf{c}_1^T & \frac{d_1}{1+d_1d_2} \mathbf{c}_2^T \end{pmatrix}, \quad d = \frac{d_1}{1+d_1d_2}.} \quad (4.97)$$

Die Gleichungen zeigen, dass das Gesamtsystem sprungfähig ist, solange das Teilsystem im Vorwärtzweig sprungfähig ist ( $d_1 \neq 0$ ). Der Faktor  $\frac{1}{1+d_1d_2}$ , der durch die algebraische Schleife in die Gleichungen hineinkommt, entfällt, wenn eines der beiden Teilsysteme nicht sprungfähig ist. Für  $d_1 = d_2 = 0$  geht schließlich das Gleichungssystem in die einfachere Form (4.81), (4.92) und (4.93) über.

**Diskussion.** Bei allen drei Zusammenschaltungen erscheinen die Systemmatrizen  $\mathbf{A}_1$  und  $\mathbf{A}_2$  der Teilsysteme als Hauptdiagonalblöcke in der Systemmatrix  $\mathbf{A}$  des verkoppelten Systems. Bei der Reihenschaltung und der Parallelschaltung ist  $\mathbf{A}$  eine Blockdreiecksmatrix bzw. eine Blockdiagonalmatrix. Deshalb setzt sich die Menge der Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  für diese beiden Zusammenschaltungen aus den beiden Eigenwertmengen von  $\mathbf{A}_1$  und  $\mathbf{A}_2$  zusammen, was für die Eigenschaften des Systems eine entscheidende Rolle spielt (vgl. Gl. (5.62) auf S. 150). Bei der Rückkopplungsschaltung sind die beiden Teilsysteme in beiden Richtungen verkoppelt, was sich auch in der Zusammensetzung der Matrix  $\mathbf{A}$  ausdrückt. Hier stimmen die Eigenwerte der Verkopplung nicht mit den Eigenwerten der Teilsysteme überein.

Bei den angegebenen Modellen wird der Zustandsvektor der Zusammenschaltung aus den beiden Zustandsvektoren der Teilsysteme gebildet, so dass ein Modell mit der dynamischen Ordnung  $n = n_1 + n_2$  entsteht. Wenn die Teilsysteme spezielle Eigenschaften haben, kann man möglicherweise ein Modell der Zusammenschaltung finden, das eine kleinere dynamische Ordnung hat. Beispielsweise kann

die Parallelschaltung zweier identischer Teilsysteme durch ein Modell  $n_1$ -ter Ordnung dargestellt werden. Unter welchen Bedingungen eine derartige Vereinfachung möglich ist, wird im Zusammenhang mit minimalen Realisierungen dynamischer Systeme im Kap. II-3 behandelt.

#### 4.4.4 Gültigkeitsbereich der Modelle und Normierung

**Gültigkeitsbereich des Zustandsraummodells.** Jedes Modell beruht auf Modellannahmen, die für den Gültigkeitsbereich des Modells maßgebend sind. Die Modellannahmen beschreiben einerseits, welche Teile der technischen Anlage durch das Modell dargestellt werden sollen. Diese Annahmen ergeben sich aus der Regelungsaufgabe. Andererseits beinhalten die Modellannahmen Informationen darüber, unter welchen Bedingungen das Modell gültig sein soll. Diese Bedingungen schränken die Signalwerte auf Intervalle ein, wie es beispielsweise durch

$$\begin{aligned} |u(t)| &\leq \bar{u} \\ \underline{x}_1 &\leq x_1(t) \leq \bar{x}_1 \end{aligned}$$

für vorgegebene Schranken  $\bar{u}$ ,  $\underline{x}_1$  und  $\bar{x}_1$  geschieht.

Streng genommen gehört deshalb zu jedem Zustandsraummodell eine Menge von Bedingungen, mit denen überprüft werden kann, dass bei Analyse-, Entwurfs- oder Simulationsaufgaben der Gültigkeitsbereich des Modells nicht verlassen wird. Diese Bedingungen können in der Form

$$\mathbf{h}(u(t), \mathbf{x}(t), y(t)) \leq \bar{\mathbf{h}}, \quad t \geq 0 \quad (4.98)$$

zusammengefasst werden, wobei das Ungleichheitszeichen für alle Elemente der Vektorfunktion  $\mathbf{h}$  gilt. Ein typisches Beispiel ist das Behältersystem in Abb. 4.21, dessen Differentialgleichung nur solange gilt, wie die Behälter weder leer sind noch überlaufen. Zu- und Abfluss können ihr Vorzeichen nicht wechseln. Ein anderes Beispiel sind Stellgrößenbeschränkungen. Häufig werden die Stellglieder als lineare Übertragungsglieder aufgefasst. Die Modellgleichungen gelten nicht für beliebige Signalwerte, sondern nur, solange obere Schranken für die Stellgrößen nicht überschritten werden.

Bedingungen der Form (4.98) entstehen auch dann, wenn das im Großen nicht-lineare Verhalten des Systems durch ein lineares Modell angenähert wird. In diesem Falle werden entweder die Signalwerte von vornherein so eingeschränkt, dass alle Systemelemente durch lineare Beziehungen beschrieben werden können, oder das Modell wird in der Nähe eines Arbeitspunktes  $\bar{\mathbf{x}}$  linearisiert (vgl. Abschn. 4.5.1), wobei sich Gl. (4.98) dann auf die Abweichung  $\delta\mathbf{x}$  vom Arbeitspunkt  $\bar{\mathbf{x}}$  bezieht und den Gültigkeitsbereich des linearisierten Modells beschreibt.

Bei der Modellbildung hat man stets einen Kompromiss zwischen einem möglichst großen Gültigkeitsbereich und einer möglichst hohen Genauigkeit des Modells einerseits und der Handhabbarkeit des Modells andererseits zu schließen. So ist

es nicht falsch, sondern zweckmäßig, dass für die Lösung von Regelungsaufgaben häufig lineare Modelle niedriger dynamischer Ordnung eingesetzt werden. Ob man dabei die Gültigkeitsbedingungen des verwendeten Modells in der Form (4.98) aufschreibt oder nicht – man muss sich stets über die Tatsache im Klaren sein, dass das Modell die Realität nur in einem beschränkten Bereich des Zustandsraumes bzw. für beschränkte Eingangsgrößen wiedergibt, um damit auch die Grenzen für die Gültigkeit der erhaltenen Analyse- und Entwurfsergebnisse abzustecken. Inwieweit diese Ergebnisse über den Gültigkeitsbereich des Modells hinaus eingesetzt werden können, wird in der Praxis häufig heuristisch (mit dem „Gefühl des Ingenieurs“) entschieden. Im Abschn. 8.6 wird mit der Robustheitsanalyse ein Weg gezeigt, wie man dies in einer methodisch fundierten Weise tun kann.

**Normierung der Signale und Parameter.** Die im Zustandsraummodell auftretenden Parameter und Signale sind i. Allg. physikalische Größen, die nicht allein durch ihren Zahlenwert, sondern zusätzlich dazu durch ihre physikalische Einheit beschrieben werden:

$$\text{Physikalische Größe} = \text{Zahlenwert} \cdot \text{Einheit}.$$

Dabei symbolisiert der Punkt · eine Multiplikation! Die bei der Bildung des Modells aufgeschriebenen physikalischen Grundgesetze sind deshalb *Größengleichungen*, in die jedes Signal und jeder Parameter mit seinem Betrag und seiner Einheit eingeht. Beispielsweise wird in der Gleichung

$$F = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

die Kraft  $F$  in Newton (N), der Weg  $x$  in Metern (m), die Masse  $m$  in Kilogramm (kg) und die Zeit  $t$  in Sekunden (s) gemessen. Um aus den Größengleichungen Zahlenwertgleichungen abzuleiten, in denen die physikalischen Einheiten nicht mehr vorkommen, muss jede Größe auf eine festgelegte physikalische Einheit normiert werden. Dabei möchte man nicht alle Größen in den Grundeinheiten darstellen, sondern man wird solche Einheiten auswählen, die für das betrachtete System aussagekräftig sind bzw. in denen die von den Messeinrichtungen gelieferten Größen dargestellt sind. Beispielsweise wird die Zeit bei einem sich schnell verändernden System in Millisekunden oder Sekunden, bei einem sich langsam bewegenden System in Minuten oder Stunden gemessen. Aufgrund der Beziehungen zwischen den gewählten Einheiten können nach der Normierung neue, dimensionslose Faktoren in den Gleichungen auftreten, wie im folgenden Beispiel gezeigt wird.

Von einer Größengleichung kommt man zu einer *zugeschnittenen Größengleichung*, indem man alle Parameter und Signale entsprechend der gewählten Einheiten erweitert, d. h. sie durch die gewählten Einheiten dividiert und mit der in Grundeinheiten umgerechneten Einheit multipliziert. Will man die o. a. Beziehung verwenden, wenn man die Kraft in Newton, die Masse in Tonnen, den Weg in Metern und die Zeit in Sekunden misst, so erhält man

$$\frac{F \text{ kg m}}{\text{N s}^2} = \frac{m}{\text{t}} 10^3 \text{ kg} \frac{\frac{d^2 x}{\text{m}} \text{ m}}{\frac{d t^2}{\text{s}^2} \text{ s}^2}.$$

Daraus entsteht durch Multiplikation beider Seiten mit  $\frac{s^2}{\text{kg m}}$  die zugeschnittene Größengleichung

$$\frac{F}{N} = 10^3 \frac{m}{t} \frac{d^2 \frac{x}{m}}{d \frac{t^2}{s^2}}.$$

Führt man nun die auf die gewählten Maßeinheiten normierten Größen ein

$$\tilde{F}(t) = \frac{F(t)}{N}, \quad \tilde{m} = \frac{m}{t}, \quad \tilde{x}(t) = \frac{x(t)}{m}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{s},$$

so erhält man die Beziehung

$$\tilde{F}(t) = 10^3 \tilde{m} \frac{d^2 \tilde{x}(\tilde{t})}{d \tilde{t}^2},$$

die eine Zahlengleichung darstellt, in der keine Maßeinheiten mehr vorkommen, bei der jedoch  $\tilde{F}$  die in Newton gemessene Kraft  $F$ ,  $\tilde{m}$  die in Tonnen gemessene Masse  $m$ ,  $\tilde{x}$  die in Metern gemessene Entfernung  $x$  und  $\tilde{t}$  die in Sekunden gemessene Zeit  $t$  bezeichnen.

Zur Vereinfachung der Darstellung wird in allen später verwendeten Modellen die Tilde über den auf die gewählten Maßeinheiten bezogenen Größen weggelassen, so dass in diesem Beispiel mit der Gleichung

$$F = 10^3 m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

gerechnet wird. Man muss diesen Übergang von den physikalischen Größen zu den auf die gewählten Maßeinheiten bezogenen Größen jedoch im Gedächtnis behalten, um die mit dem Modell erhaltenen Ergebnisse richtig interpretieren zu können. Offensichtlich ist bei dem hier verwendeten Beispiel der Faktor  $10^3$  in die Gleichung hineingekommen, damit die gewählten Einheiten zueinander passen. Derartige Faktoren treten häufig auf, wenn die in der Gleichung vorkommenden Größen nicht in den physikalischen Grundeinheiten eingesetzt werden sollen. Man sollte deshalb die Überführung der Größengleichungen in Zahlengleichungen Schritt für Schritt ausführen!

**Normierung der Zeit.** Besondere Beachtung erfordert die Wahl der Zeitachse, auf der alle Signale betrachtet werden. Die gewählte Zeiteinheit soll der „Änderungsgeschwindigkeit“, mit der sich das System bewegt, angemessen sein.

Welche Veränderungen im Modell die Transformation

$$t = k \tilde{t}$$

der Zeit mit sich bringt, kann man durch Anwendung dieser Transformation auf das Zustandsraummodell

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + bu(t)$$

erkennen. Das Modell gilt für die alte Zeitachse mit der Zeitvariablen  $t$ . Es soll so umgeformt werden, dass es das Systemverhalten mit der Zeitvariablen  $\bar{t}$  beschreibt. Setzt man die Transformation in das Modell ein, so erhält man unter Verwendung von  $k d\bar{t} = dt$  die Beziehung

$$\frac{dx(k\bar{t})}{k d\bar{t}} = Ax(k\bar{t}) + bu(k\bar{t}).$$

Als Signale, die über die neue Zeitachse definiert sind, werden nun

$$\begin{aligned}\bar{x}(\bar{t}) &= x(k\bar{t}) \\ \bar{u}(\bar{t}) &= u(k\bar{t})\end{aligned}$$

eingeführt. Damit erhält man das neue Modell

$$\frac{d\bar{x}(\bar{t})}{d\bar{t}} = kAx(\bar{t}) + kb\bar{u}(\bar{t}).$$

Die Umformung zeigt, dass sich mit der Veränderung der Zeitachse auch die in der Matrix  $A$  und im Vektor  $b$  stehenden Modellparameter ändern. Insbesondere werden alle Eigenwerte von  $A$ , die bei der Systemanalyse eine große Rolle spielen, um den Faktor  $k$  verändert, um zu den Eigenwerten der neuen Systemmatrix  $\bar{A} = kA$  zu kommen. Die Lage der Eigenwerte von  $A$  in der komplexen Ebene muss also immer in Bezug zur gewählten Maßeinheit für die Zeit beurteilt werden.

In diesem Zusammenhang sei auch darauf hingewiesen, dass die Eigenwerte  $\lambda_i$  die Maßeinheit der Frequenz (z. B.  $\frac{1}{s}$  oder  $\frac{1}{\text{min}}$ ) und ihre später als Zeitkonstanten eingeführten Kehrwerte  $T_i = \frac{1}{\lambda_i}$  die Maßeinheit der Zeit (z. B. Sekunde oder Minute) haben. Dies wird häufig vergessen, weil man i. Allg. nur mit Zahlengleichungen rechnet.

#### Beispiel 4.11 Normierung der Zeit für ein System zweiter Ordnung

Für Systeme zweiter Ordnung wird die Differentialgleichung häufig in der Form

$$T^2 \ddot{y}(t) + 2dT\dot{y}(t) + y(t) = k_s u(t) \quad (4.99)$$

angesetzt, wobei  $T$  eine Zeitkonstante,  $d$  einen Dämpfungsfaktor und  $k_s$  die statische Verstärkung bezeichnen (vgl. Gl. (5.160) auf S. 195). Will man das Verhalten in Abhängigkeit vom Dämpfungsfaktor untersuchen, so kann man eine neue, auf die Zeitkonstante  $T$  normierte Zeit  $\bar{t}$  einführen

$$\bar{t} = \frac{t}{T},$$

wodurch die Zeitkonstante  $T$  aus der Differentialgleichung verschwindet. Es gelten nämlich mit den oben eingeführten Bezeichnungen

$$\left. \begin{aligned}\bar{y}(\bar{t}) &= y(t) \\ \bar{u}(\bar{t}) &= u(t)\end{aligned} \right\} \quad \text{für } \bar{t} = \frac{t}{T}$$

die Beziehungen

$$\begin{aligned}\dot{\bar{y}}(\bar{t}) &= \frac{d\bar{y}(\bar{t})}{d\bar{t}} = \frac{dy(t)}{dt} \frac{dt}{d\bar{t}} = \dot{y}(t) \cdot T \\ \ddot{\bar{y}}(\bar{t}) &= \frac{d^2\bar{y}(\bar{t})}{d\bar{t}^2} = \frac{d^2y(t)}{dt^2} \frac{d^2t}{d\bar{t}^2} = \ddot{y}(t) \cdot T^2.\end{aligned}$$

Aus Gl. (4.99) erhält man durch Einsetzen der auf die neue Zeitachse bezogenen Größen die Differentialgleichung

$$\ddot{\bar{y}}(\bar{t}) + 2d\dot{\bar{y}}(\bar{t}) + \bar{y}(\bar{t}) = k_s \bar{u}(\bar{t}), \quad (4.100)$$

in der  $T$  nicht mehr vorkommt. Das Systemverhalten kann mit diesem Modell in Abhängigkeit von  $d$  (oder  $k_s$ ) untersucht werden, wobei die erhaltenen Ergebnisse auf Systeme mit unterschiedlicher Zeitkonstante  $T$  dadurch übertragen werden können, dass die Zeitachse entsprechend  $T$  gestreckt oder gestaucht wird.  $\square$

**Aufgabe 4.7\*** Zustandsraummodell eines RC-Gliedes

Für das in Abb. 4.20 gezeigte RC-Glied ist die Spannung  $u$  die Eingangsgröße und die Spannung  $y$  die Ausgangsgröße. Das RC-Glied ist an der Ausgangsseite nicht belastet. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  sind die beiden Kondensatorspannungen bekannt.

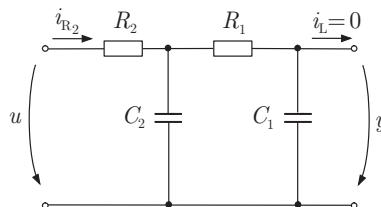
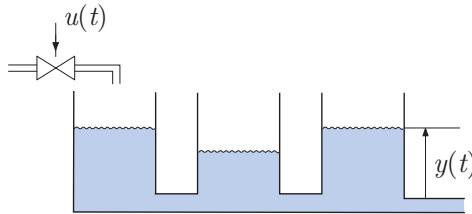


Abb. 4.20: RC-Glied

1. Stellen Sie die Zustandsgleichung auf.
2. Welche Größen treten in Ihrem Modell als Zustandsgrößen auf? Wie heißt die Ausgabegleichung?
3. Zeichnen Sie den Signalflussgraphen des Systems und bestimmen Sie, mit welchen physikalischen Größen die Kanten gewichtet sind.
4. Können Sie das Modell auch so aufstellen, dass  $y$  und  $\dot{y}$  als Zustandsvariablen fungieren (wenn ja, geben Sie das Modell an.)?
5. Welche Maßeinheiten haben die in Ihren Gleichungen auftretenden Signale und Parameter?
6. Welche Parameterwerte treten im Zustandsraummodell aus Aufgabenteil 2 auf, wenn  $R_1 = 100 \Omega$ ,  $R_2 = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $C_1 = 1 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 400 \text{ nF}$  gilt? Wählen Sie geeignete Maßeinheiten für die im Modell auftretenden Signale und für die Zeit.  $\square$

**Aufgabe 4.8\*** Zustandsraummodell eines 3-Tank-Systems

Betrachten Sie das in Abb. 4.21 skizzierte System, das aus drei miteinander verkoppelten Behältern besteht. Der durch das Ventil beeinflussbare Zufluss dient als Eingangsgröße, der Flüssigkeitsstand im rechten Behälter als Ausgangsgröße.



**Abb. 4.21:** 3-Tank-System

1. Überlegen Sie sich, wie viele Zustandsvariablen Sie (vermutlich) brauchen, um das System beschreiben zu können. Welche physikalischen Größen sind geeignete Zustandsgrößen?
2. Leiten Sie aus den Massenbilanzen der drei Behälter das Zustandsraummodell des Systems ab, wobei Sie zur Vereinfachung von linearen Zusammenhängen zwischen den physikalischen Größen ausgehen.
3. Unter welchen Einschränkungen gilt das von Ihnen aufgestellte Modell? Schreiben Sie diese Einschränkungen in der Form (4.98) auf. □

## 4.5 Erweiterungen

### 4.5.1 Linearisierung nichtlinearer Systeme

Die physikalischen Gleichungen, aus denen das Zustandsraummodell abgeleitet wird, sind i. Allg. nichtlinear. Wenn man beispielsweise berechnen will, wie schnell die Füllhöhe  $h$  eines zylindrischen Behälters abnimmt, wenn die Flüssigkeit aus einem Ventil am Behälterboden herausläuft, so erhält man nach dem Gesetz von TORICELLI die nichtlineare Differentialgleichung

$$\dot{h}(t) = -\frac{S_v}{A} \sqrt{2gh(t)} \quad \text{für } h \geq 0, \quad (4.101)$$

in der  $A$  den Behälterquerschnitt,  $S_v$  eine Ventilkonstante und  $g$  die Erdbeschleunigung beschreibt. Auch die Differentialgleichungen für ein Pendel oder ein fahrendes Auto mit quadratisch steigendem Luftwiderstand sind nichtlinear. Dass derartige Nichtlinearitäten bei den bisher behandelten Beispielen keine Rolle gespielt haben,

liegt daran, dass bisher von vornherein ein linearer Ansatz für alle auftretenden Differentialgleichungen und algebraischen Gleichungen gewählt wurde.

Für viele reale Systeme entsteht also an Stelle der linearen Differentialgleichung (4.3) bzw. des linearen Zustandsraummodells (4.45) eine nichtlineare Differentialgleichung bzw. ein nichtlineares Zustandsraummodell, das in der Form

$$\text{Nichtlineares System : } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t)), & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y(t) = g(\mathbf{x}(t), u(t)) \end{cases} \quad (4.102)$$

geschrieben wird. Dabei stellt  $\mathbf{f}$  eine Vektorfunktion dar. Ausführlich geschrieben heißt die Zustandsgleichung des Modells (4.102)

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \end{pmatrix},$$

wobei aus Gründen der Übersichtlichkeit die Zeitabhängigkeit aller Signale nicht angegeben wurde.

In der Regelungstechnik verwendet man trotz dieses nichtlinearen Charakters der realen Welt sehr häufig lineare Modelle. Das gilt insbesondere bei Regelungen, die die Aufgabe haben, ein System trotz der Einwirkung äußerer Störungen in einem vorgegebenen Arbeitspunkt zu halten. Der Grund für die Verwendung linearer Modelle ist dann sehr einfach einzusehen: Wenn die Regelung funktioniert, bleibt das System in der Umgebung des Arbeitspunktes und es ist ausreichend, wenn das Modell die Systembewegung um diesen Arbeitspunkt beschreibt. Für kleine Abweichungen kann man nichtlineare Modelle linearisieren.

Ausgangspunkt für die Linearisierung ist also die Festlegung eines Arbeitspunktes. Der Arbeitspunkt wird durch die Größen  $\bar{x}$ ,  $\bar{u}$  und  $\bar{y}$  beschrieben, die die Bedingungen

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) \quad (4.103)$$

$$\bar{y} = g(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) \quad (4.104)$$

erfüllen. Die erste Bedingung besagt, dass der Zustand  $\bar{\mathbf{x}}$  einen stationären Zustand des Systems darstellt, der sich bei der Eingangsgröße  $u(t) = \bar{u}$  einstellt. Die zweite Bedingung gibt an, dass in diesem stationären Zustand die Ausgangsgröße den Wert  $y(t) = \bar{y}$  hat.

An Stelle der Originalgrößen  $\mathbf{x}(t)$ ,  $u(t)$  und  $y(t)$  sollen im linearisierten Modell die Abweichungen dieser Größen von den vorgegebenen Arbeitspunktewerten  $\bar{x}$ ,  $\bar{u}$  und  $\bar{y}$  stehen:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}} \\ \delta u(t) &= u(t) - \bar{u} \\ \delta y(t) &= y(t) - \bar{y}. \end{aligned} \quad (4.105)$$

Aus (4.102) und (4.105) erhält man

$$\frac{d \delta \mathbf{x}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{x}}(t)$$

und

$$\frac{d \delta \mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}} + \delta \mathbf{x}(t), \bar{u} + \delta u(t)).$$

Wird die Vektorfunktion  $\mathbf{f}$  um den Arbeitspunkt  $(\bar{u}, \bar{x})$  in eine Taylorreihe entwickelt, so entsteht

$$\begin{aligned} \frac{d \delta \mathbf{x}(t)}{dt} &= \\ \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) + \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}, u=\bar{u}} \delta \mathbf{x}(t) + \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \right)_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}, u=\bar{u}} \delta u(t) + \mathbf{r}(\delta \mathbf{x}, \delta u), \end{aligned}$$

wobei  $\mathbf{r}(\delta \mathbf{x}, \delta u)$  das Restglied der Taylorreihe darstellt und der erste Summand auf der rechten Seite aufgrund der Bedingung (4.103) gleich null ist. Voraussetzung für diese Vorgehensweise ist, dass die Funktion  $\mathbf{f}$  (und für die Linearisierung der Ausgabegleichung die Funktion  $g$ ) im Arbeitspunkt differenzierbar ist. Diese Voraussetzung ist sehr häufig erfüllt, jedoch nicht z. B. für das System  $\dot{x} = \sqrt{|x|} + u$  im Arbeitspunkt  $\bar{x} = 0, \bar{u} = 0$ .

Bewegt sich das System in der näheren Umgebung des gegebenen Arbeitspunktes, so sind  $\delta \mathbf{x}(t)$  und  $\delta u(t)$  betragsmäßig klein und das Restglied kann gegenüber den Gliedern erster Ordnung vernachlässigt werden. Die beiden Differentialquotienten beschreiben Ableitungen eines Vektors nach einem Vektor bzw. einem Skalar und stellen demzufolge eine Matrix bzw. einen Vektor dar, die mit  $\mathbf{A}$  bzw.  $\mathbf{b}$  bezeichnet werden:

$$\left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}, u=\bar{u}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}, u=\bar{u}} = \mathbf{A} \quad (4.106)$$

$$\left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \right)_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}, u=\bar{u}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u} \end{pmatrix}_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}, u=\bar{u}} = \mathbf{b}. \quad (4.107)$$

Die Matrix (4.106) heißt *Jacobimatrix* oder *Funktionalmatrix*.

Damit erhält man die lineare Beziehung

$$\frac{d \delta \mathbf{x}(t)}{dt} \approx \mathbf{A} \delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} \delta u(t), \quad \delta \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(0) - \bar{\mathbf{x}}.$$

Da in der Regelungstechnik sehr häufig mit Abweichungen vom Arbeitspunkt an Stelle der absoluten Werte der Signale gerechnet wird, lässt man das Delta vor den Signalen weg und ersetzt das Rundungszeichen durch ein Gleichheitszeichen:

$$\frac{d \mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} u(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(0) - \bar{\mathbf{x}}. \quad (4.108)$$

Bei der Interpretation der Ergebnisse, die mit diesem Modell erhalten werden, muss man sich diese vereinfachte Schreibweise ins Gedächtnis zurückrufen.

In gleicher Weise kann die nichtlineare Ausgabegleichung des Modells (4.102) linearisiert werden, wobei

$$\delta y(t) \approx \mathbf{c}^T \delta \mathbf{x}(t) + d \delta u(t)$$

bzw.

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + du(t) \quad (4.109)$$

mit

$$\left| \left( \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}, u = \bar{u}} = \mathbf{c}^T \right. \quad (4.110)$$

$$\left| \left( \frac{\partial g}{\partial u} \right)_{\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}, u = \bar{u}} = d \right. \quad (4.111)$$

entsteht. Die Gl. (4.108), (4.109) mit den Matrizen und Vektoren aus (4.106), (4.107), (4.110) und (4.111) stellen das linearisierte Zustandsraummodell dar

$$\text{Linearisiertes Modell : } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} u(t), & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(0) - \bar{\mathbf{x}} \\ y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + du(t), \end{cases}$$

das die Bewegung des nichtlinearen Systems (4.102) um den Arbeitspunkt  $(\bar{u}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{y})$  beschreibt, wobei entsprechend den Erläuterungen mit  $u(t)$  und  $y(t)$  die Abweichungen des Eingangs und Ausganges von den Arbeitspunktewerten  $\bar{u}$  bzw.  $\bar{y}$  bezeichnet werden.

Die vorgestellte Linearisierung entspricht übrigens der in der Elektrotechnik üblichen Vorgehensweise, mit der das Kleinsignalverhalten einer Schaltung mit Hilfe von linearen Modellen untersucht wird.

**Beispiel 4.12** Linearisierung eines statischen Übertragungsgliedes

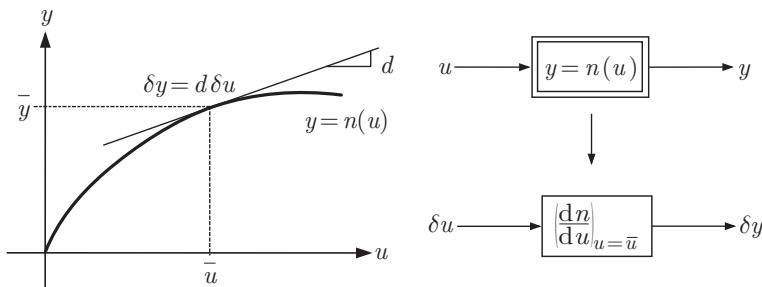
Strukturbilder dynamischer Systeme werden häufig so aufgebaut, dass die einzelnen Blöcke entweder lineare dynamische Glieder oder nichtlineare statische Glieder darstellen. Wenn eine solche Zerlegung durchgeführt werden kann, vereinfacht sich die Linearisierung, denn es müssen nur statische Übertragungsglieder linearisiert und anschließend mit den linearen dynamischen Gliedern zum Näherungsmodell zusammengefügt werden. Betrachtet wird deshalb als Beispiel die nichtlineare Kennlinie

$$y(t) = n(u(t))$$

eines nichtlinearen statischen Systems. Die an den Arbeitspunkt gestellte Bedingung heißt für das Beispiel

$$\bar{y} = n(\bar{u}).$$

Sie fordert, dass der Arbeitspunkt  $(\bar{u}, \bar{y})$  tatsächlich auf der nichtlinearen Kennlinie liegt.



**Abb. 4.22:** Linearisierung einer statischen Nichtlinearität

Die Kennlinie kann als Ausgabegleichung des Modells (4.102) interpretiert werden. Da  $y$  nicht von einem Systemzustand abhängt, ist der Vektor  $c^T$  im linearisierten Modell gleich null. Für  $d$  erhält man aus Gl. (4.111) die Beziehung

$$d = \left( \frac{dn}{du} \right)_{u=\bar{u}},$$

so dass das linearisierte Modell die Form

$$\delta y(t) \approx d \delta u(t)$$

bzw. in abgekürzter Schreibweise

$$y(t) = du(t)$$

hat. Grafisch bedeutet die Linearisierung, dass an Stelle der nichtlinearen Kennlinie mit der Tangente an die Kennlinie im Arbeitspunkt gearbeitet wird (Abb. 4.22).

Im Blockschaltbild kann die Nichtlinearität durch einen statischen linearen Block ersetzt werden. □

**Beispiel 4.13 Linearisierung des Modells eines Fahrzeugs**

Ein Fahrzeug mit der Masse  $m$  bewegt sich auf einer geradlinigen, ebenen Straße. Das Modell soll den Zusammenhang zwischen der Winkelstellung  $u(t)$  des Gaspedals, die der vom Motor erbrachten Beschleunigungskraft  $F_M(t)$  des Fahrzeugs näherungsweise proportional ist, und der Geschwindigkeit  $v(t)$  beschreiben. Es wird angenommen, dass für die durch den Luftwiderstand verursachte Kraft  $F_B$  die Beziehung

$$F_B(t) = c_w v^2(t)$$

gilt, wobei  $c_w$  den Luftwiderstandsbeiwert darstellt.

Die das Fahrzeug beschreibende nichtlineare Differentialgleichung erhält man aus dem Kräftegleichgewicht

$$F_M(t) = F_T(t) + F_B(t),$$

demzufolge die durch den Motor erzeugte Kraft  $F_M$  gleich der Summe von Trägheitskraft

$$F_T(t) = m\dot{v}(t)$$

und Bremskraft  $F_B$  des Luftwiderstandes ist. Aufgrund der angenommenen Proportionalität von  $F_M(t)$  und  $u(t)$  gilt

$$F_M(t) = k u(t),$$

wobei  $k$  einen Proportionalitätsfaktor bezeichnet. Da  $v(t) = y(t)$  gilt, erhält man aus dem Kräftegleichgewicht die Beziehung

$$k u(t) = m \dot{y}(t) + c_w y^2(t).$$

Führt man die Zustandsgröße

$$x_1(t) = y(t)$$

ein, so folgt aus der Differentialgleichung das Zustandsraummodell

$$\text{Fahrzeug : } \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\frac{c_w}{m} x_1^2(t) + \frac{k}{m} u(t), & x_1(0) = v_0 \\ y(t) = x_1(t), \end{cases}$$

wobei  $v_0$  die Anfangsgeschwindigkeit bezeichnet. Es hat die Form (4.102) mit

$$\begin{aligned} f(x_1, u) &= -\frac{c_w}{m} x_1^2 + \frac{k}{m} u \\ g(x_1, u) &= x_1. \end{aligned}$$

Für die Linearisierung ist ein Arbeitspunkt  $(\bar{u}, \bar{x}, \bar{y})$  festzulegen, der die Bedingungen (4.103), (4.104) erfüllt. Aus Gl. (4.103) erhält man

$$\frac{c_w}{m} \bar{x}_1^2 = \frac{k}{m} \bar{u}.$$

Der Arbeitspunkt wird also durch eine Winkelstellung  $\bar{u}$  des Gaspedals und die Geschwindigkeit  $\bar{x}_1$  der dazugehörigen gleichförmigen Bewegung bestimmt, beispielsweise durch die Winkelstellung, bei der das Fahrzeug nach Beendigung der Beschleunigungsphase mit der gleichbleibenden Geschwindigkeit von 50 km/h fährt. Diese Geschwindigkeit ist dann auch die zum Arbeitspunkt gehörende Ausgangsgröße, denn aus der Bedingung (4.104) folgt für dieses Beispiel die Beziehung

$$\bar{y} = \bar{x}_1.$$

Die Linearisierung führt auf das lineare Modell erster Ordnung

$$\begin{aligned}\delta \dot{x}_1(t) &\approx a \delta x_1(t) + b \delta u(t) \\ \delta y(t) &\approx c \delta x_1(t) + d \delta u(t)\end{aligned}$$

bzw.

$$\text{Linearisiertes Fahrzeug : } \begin{cases} \dot{x}_1(t) = ax_1(t) + bu(t), & x_1(0) = v_0 - \bar{x} \\ y(t) = cx_1(t) + du(t) \end{cases}$$

mit

$$\begin{aligned}a &= \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)_{x_1=\bar{x}_1, u=\bar{u}} = -2 \frac{c_w}{m} \bar{x}_1 \\ b &= \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right)_{x_1=\bar{x}_1, u=\bar{u}} = \frac{k}{m} \\ c &= \left( \frac{\partial g}{\partial x_1} \right)_{x_1=\bar{x}_1, u=\bar{u}} = 1 \\ d &= \left( \frac{\partial g}{\partial u} \right)_{x_1=\bar{x}_1, u=\bar{u}} = 0,\end{aligned}$$

wenn die Beziehungen (4.106), (4.107), (4.110) und (4.111) für das Beispiel mit der dynamischen Ordnung  $n = 1$  angewendet werden. Man erkennt, dass nur der Modellparameter  $a$  und der Anfangszustand vom Arbeitspunkt abhängen. Das erhaltene Modell beschreibt, wie die Geschwindigkeit  $y(t)$  vom Arbeitspunkt  $\bar{x}_1 = \bar{y}$  abweicht, wenn die Winkelstellung  $u(t)$  des Gaspedals vom Arbeitspunktwert  $\bar{u}$  abweicht.  $\square$

**Linearisierung statischer Systeme ohne Verschiebung des Arbeitspunktes.** Die bisher beschriebene Linearisierungsmethode hat für Systeme mit häufig verändertem Arbeitspunkt den Nachteil, dass mit dem Arbeitspunkt derjenige Punkt verschoben wird, um den linearisiert wird. Für statische Systeme geht man bei der Linearisierung deshalb so vor, dass man die nichtlineare Funktion

$$y(t) = n(u(t))$$

als ein lineares System

$$y(t) = k(u(t)) u(t)$$

mit dem Verstärkungsfaktor

$$k(u(t)) = \frac{y(t)}{u(t)}$$

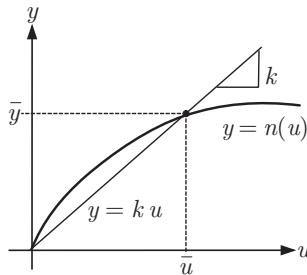
auffasst, der von der Eingangsgröße abhängig ist. Vernachlässigt man dann noch die Abhängigkeit zwischen  $k$  und  $u$  und arbeitet mit dem festen Wert

$$k = \frac{n(\bar{u})}{\bar{u}},$$

so erhält man die linearisierte Beschreibung

$$y(t) = ku(t). \quad (4.112)$$

Auch diese Beschreibung hängt natürlich vom gewählten Arbeitspunkt  $(\bar{u}, \bar{y})$  ab, aber  $y$  und  $u$  in Gl. (4.112) sind die absoluten Größen und nicht wie in den bisher verwendeten Modellen die Abweichungen vom Arbeitspunkt.



**Abb. 4.23:** Linearisierung der TORICELLI-Gleichung

**Beispiel 4.14** Linearisierung des nichtlinearen Rührkesselreaktormodells

Für den durch die TORICELLI-Gleichung (4.101) gegebenen nichtlinearen Zusammenhang zwischen dem Ausfluss  $q = y$  aus dem Behälter und dem Füllstand  $h = u$

$$y = S_v \sqrt{2gu}$$

ist die Linearisierung in Abb. 4.23 dargestellt. Die nichtlineare Beziehung wird durch die lineare Gleichung (4.112) ersetzt, wobei der Verstärkungsfaktor

$$k = \frac{S_v}{A} \sqrt{\frac{2g}{\bar{u}}}$$

vom gewählten Arbeitspunkt  $(\bar{u}, \bar{y})$  abhängt. Eingesetzt in Gl. (4.101) erhält man als linearisiertes dynamisches Modell des Rührkesselreaktors die Beziehung

$$\dot{h}(t) = -\frac{k}{A} h(t). \quad \square$$

**Aufgabe 4.9\*** Linearisierung der Pendelgleichungen

Betrachten Sie ein Pendel mit der Pendellänge  $l$  und der Masse  $m$ . Das Pendel wird von einer Kraft  $f(t)$  ausgelenkt. Der den Pendelausschlag beschreibende Winkel  $\varphi(t)$  soll in Abhängigkeit von der Kraft  $f(t)$  berechnet werden ( $|\varphi| < 90^\circ$ ).

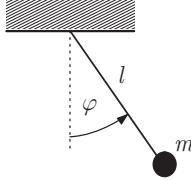


Abb. 4.24: Pendel

1. Stellen Sie das nichtlineare Zustandsraummodell des Pendels auf, wobei Sie annehmen, dass das Pendel durch den Luftwiderstand nicht gedämpft wird. Welche Signale stellen den Zustand  $\mathbf{x}$  bzw. die Eingangsgröße  $u$  dar?
2. Linearisieren Sie das Modell um die sich bei  $f(t) = \bar{f}$  einstellende Gleichgewichtslage.
3. Geben Sie das linearisierte Modell für  $m = 1\text{ kg}$ ,  $\bar{f} = 2\text{ N}$  und  $l = 1\text{ m}$  an.  $\square$

**Aufgabe 4.10\*\* Linearisierung nichtlinearer Systeme in kanonischer Normalform**

Viele nichtlineare Systeme (4.102) kann man durch eine entsprechende Wahl der Zustandsvariablen in die Normalform

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \\ a(\mathbf{x}(t)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(\mathbf{x}(t)) u(t) \end{pmatrix}$$

$$y(t) = (1 \ 0 \ 0 \dots 0) \mathbf{x}(t)$$

bringen, wobei  $a(\mathbf{x}(t))$  und  $b(\mathbf{x}(t))$  zwei nichtlineare Funktionen des Zustands  $\mathbf{x}$  sind. Wie sieht das lineare Zustandsraummodell aus, das man durch Linearisierung dieses Systems erhält?  $\square$

### 4.5.2 Totzeitsysteme

Bei Totzeitsystemen hängt der Wert des Ausgangssignales  $y$  zum Zeitpunkt  $t$  nur von dem um eine feste Zeitdifferenz  $T_t$  zurückliegenden Wert der Eingangsgröße  $u$  ab. Es gilt also die Beziehung

$$y(t) = f(u(t - T_t))$$

mit einer gegebenen Zeitdifferenz  $T_t$ , die *Totzeit* genannt wird. Das reine Totzeitglied verschiebt die Eingangsgröße, ohne sie zu verformen, so dass

$$y(t) = u(t - T_t) \tag{4.113}$$

gilt.

Totzeiten treten typischerweise dann auf, wenn Signale mit endlicher Ausbreitungsgeschwindigkeit übertragen werden. Förderbänder oder Rohrleitungen sind Beispiele dafür, wenn man die am Anfang bzw. am Ende gemessenen Mengen oder Konzentrationen des transportierten Stoffes als Eingangs- bzw. Ausgangssignal betrachtet. Haben diese Übertragungskanäle die Länge  $l$  und werden die Stoffe mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegt, so entsteht zwischen dem Eingang und dem Ausgang eine Totzeit  $T_t = \frac{l}{v}$ .

Die Erweiterung der bisher betrachteten nicht totzeitbehafteten Systeme durch Totzeitglieder bereitet in der Zustandsraumbeschreibung Schwierigkeiten, da Totzeitglieder nicht durch ein Modell der Form (4.45) beschrieben werden können. Demgegenüber lässt sich die im Abschn. 6.5 eingeführte Systembeschreibung mittels Übertragungsfunktionen problemlos auf Totzeitsysteme erweitern, weshalb Totzeitsysteme im Folgenden vor allem im Frequenzbereich untersucht werden. Für die zeitdiskrete Systemdarstellung gibt es für Totzeitsysteme ein Zustandsraummodell, wenn die Totzeit  $T_t$  ein ganzzahliges Vielfaches der Abtastzeit  $T$  ist (Kap. II-11).

### 4.5.3 Zeitvariable Systeme

Eine andere Erweiterung der bisher behandelten Systemklasse betrifft Systeme, deren Parameter sich mit der Zeit ändern. Derartige Parameteränderung können einerseits durch die Verwendung unterschiedlicher Rohstoffe, andererseits durch die Alterung der Anlage begründet sein. Wird der im Beispiel 4.3 behandelte Rührkeselreaktor für Flüssigkeiten mit unterschiedlicher spezifischer Wärme eingesetzt, so verändern sich die dynamischen Eigenschaften in Abhängigkeit vom Stoffeinsatz.

Um das zeitvariable Verhalten beschreiben zu können, muss die Zeitabhängigkeit der Parameter in das Modell eingeführt werden. Für das nichtlineare Modell (4.102) äußert sich diese Erweiterung darin, dass die Zeit explizit als Argument der Funktionen  $f$  und  $g$  auftritt:

$$\text{Nichtlineares zeitvariables System : } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t), t), & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y(t) = g(\mathbf{x}(t), u(t), t). \end{cases}$$

Im linearen Zustandsraummodell sind die Matrix  $\mathbf{A}$ , die Vektoren  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$  sowie die Konstante  $d$  zeitabhängig:

$$\text{Zeitvariables System : } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)u(t), & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y(t) = \mathbf{c}^T(t)\mathbf{x}(t) + d(t)u(t). \end{cases}$$

Wenn man derartige Modelle verwendet, so setzt man i. Allg. voraus, dass die zeitliche Abhängigkeit der Parameter bekannt und insbesondere nicht von der Steuerung  $u(t)$  abhängig ist. Alle in diesem Buch behandelten Systeme sind zeitinvariant, so dass  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}^T$  und  $d$  nicht von der Zeit abhängen.

## 4.6 MATLAB-Funktionen für die Beschreibung dynamischer Systeme

Die meisten der in diesem und in den folgenden Kapiteln behandelten Modellierungs-, Analyse- und Entwurfsaufgaben erfordern in der Anwendung einen erheblichen rechnerischen Aufwand. In diesem und in weiteren Abschnitten werden die wichtigsten Funktionen des Programmpekts MATLAB angegeben, um zu zeigen, wie einfach es mit Hilfe der heute verfügbaren rechentechnischen Hilfsmittel ist, diese numerischen Rechenoperationen auszuführen. Trotz dieser Hilfsmittel bleiben die wichtigsten Ingenieraufgaben bestehen, nämlich zu erkennen, welche Rechenschritte auszuführen sind und wie das Ergebnis zu *interpretieren* ist.

Eine kurze Einführung in die bei MATLAB verwendeten Datenstrukturen wird im Anhang 2 gegeben.

Zustandsraummodelle der Form

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), & x(0) = x_0 \\ y(t) = c^T x(t) + du(t) \end{cases}$$

werden durch Angabe der Matrix  $A$ , der Vektoren  $b$  und  $c$ , des Skalars  $d$  sowie der Anfangsbedingung  $x_0$  notiert, wobei man zweckmäßigerweise für die Variablen in MATLAB dieselben Namen A, b, c, d und x0 verwendet. Ein System zweiter Ordnung wird beispielsweise durch die Anweisungen

```
>> A = [-0.8 2; -2 -0.8];
>> b = [1; 1];
>> c = [1 1];
>> d = 0.3;
>> x0 = [1; 1];
```

notiert. Die in  $A$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  stehenden Systemparameter werden durch die Funktion ss einer Variablen System zugewiesen, so dass sie später unter Verwendung eines gemeinsamen Namens aufgerufen werden können:

```
>> System = ss(A, b, c, d);
```

(4.114)

An Stelle von System kann man aussagekräftige Namen wie Regelstrecke oder Teilsystem1 verwenden. Will man die Systemparameter für ein System auslesen, so verwendet man die Funktion ssdata:

```
>> [A, b, c, d] = ssdata(System);
```

Da die Funktion ss ein Objekt erzeugt, deren Komponenten einzeln aufgerufen werden können, erhält man die Matrizen auch auf folgende Weise. Für das in (4.114) gebildete Objekt mit dem Namen System erhält man die Systemmatrix über den Aufruf

```
>> System.A
```

so dass man beispielsweise die Eigenwerte der Systemmatrix mit

```
» eig(System.A)
```

berechnen kann. Die anderen drei Matrizen heißen `System.B`, `System.C` bzw. `System.D`, wobei die Kennung A, B, C bzw. D groß zu schreiben und unabhängig von der in (4.114) verwendeten Bezeichnung ist. Vor dem Punkt steht der Name des Objektes.

Das Modell kann durch den Funktionsaufruf

```
» printsys(A, b, c, d)
```

auf dem Bildschirm ausgegeben werden.

Das Zustandsraummodell einer Reihen-, Parallel- oder Rückführschaltung zweier Teilsysteme, die als `System1` und `System2` bezeichnet sind, kann mit den Funktionen

```
» Reihenschaltung = series(System1, System2);
» Parallelschaltung = parallel(System1, System2);
» Rueckfuehrschatzung = feedback(System1, System2);
```

entsprechend der Gln. (4.82) – (4.83), (4.84) – (4.85) bzw. (4.95) – (4.97) berechnet werden. Die Zustandsraummodelle der entsprechenden Gesamtsystems sind dann den links angegebenen Variablen Reihenschaltung usw. zugewiesen. Bei der Rückführschaltung wird von einer negativen Rückkopplung ausgegangen; andernfalls muss als drittes Argument +1 eingegeben werden.

## Literaturhinweise

Gegenstand dieses und der weiteren Kapitel sind lineare zeitinvariante Systeme mit einer Eingangs- und einer Ausgangsgröße. Die Erweiterung des Zustandsraummodells auf Mehrgrößensysteme wird im Band 2 ausführlich behandelt. Im Kap. II-11 wird auf zeitdiskrete Systeme eingegangen, bei denen die Werte der Eingangs- und Ausgangsgrößen nur zu vorgegebenen Zeitpunkten  $t = kT$ , ( $k = 0, 1, \dots$ ), die um die Abtastzeit  $T$  voneinander entfernt liegen, von Interesse sind.

Das Zustandsraummodell wurde von KALMAN in [51] eingeführt. Es ist heute die Standardform zur Beschreibung dynamischer Systeme. Nicht alle Regelungsprobleme lassen sich unter den diesen Modellklassen zu Grunde liegenden Annahmen behandeln. Auf die Erweiterung zu zeitvariablen Systemen wurde im Abschn. 4.5.3 hingewiesen. Ausführlich sind derartige Systeme in [62, 68] beschrieben.

Nichtlineare Systeme und insbesondere die in der Aufgabe 4.10 genannte Normalform sind in [47] behandelt.

Zwei hier nicht angesprochene Klassen dynamischer Systeme betreffen Systeme mit verteilten Parametern und Systeme mit stochastischen Eingangsgrößen. Die erste Systemklasse ist dadurch gekennzeichnet, dass sich die dynamischen Vorgänge in einer örtlich verteilten Weise abspielen. Beispielsweise sind die durch ein elektrisches Feld hervorgerufenen Kräfte nicht nur von der Zeit, sondern auch vom betrachteten Ort abhängig. Wenn man örtlich verteilte Wirkungen nicht näherungsweise durch eine konzentrierte Wirkung ersetzen kann, muss

man Modelle in Form partieller Differentialgleichungen verwenden. Die dann notwendige Erweiterung der Theorie dynamischer Systeme wird für Regelungstechnische Problemstellungen z. B. in [36] erläutert.

Die Behandlung dynamischer Systeme mit stochastischen Einflussgrößen führt auf eine statistische Betrachtungsweise, bei der das im Mittel zu erwartende Verhalten untersucht wird. Dieses hier nicht behandelte Thema kann beispielsweise in [93] nachgelesen werden.

# 5

## Verhalten linearer Systeme

Die Lösung der Zustandsgleichung beschreibt das zeitliche Verhalten eines Systems. Im ersten Teil dieses Kapitels wird die Bewegungsgleichung für unterschiedliche Formen des Zustandsraummodells angegeben und diskutiert. Daraus werden anschließend die Übergangsfunktion und die Gewichtsfunktion als wichtige Kennfunktionen für das Übertragungsverhalten abgeleitet. Dann werden die Übertragungsglieder anhand des qualitativen Verlaufes ihrer Übergangsfunktionen klassifiziert. Das Kapitel schließt mit einem Abschnitt über Modellvereinfachung und Kennwertermittlung.

### 5.1 Vorhersage des Systemverhaltens

Das Zustandsraummodell der Form (4.45)

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), & x(0) = x_0 \\ y(t) = c^T x(t) + du(t). \end{cases}$$

beschreibt, wie sich das dynamische System  $\Sigma$  im Zustandsraum bewegt und welche Ausgangsgröße es dabei erzeugt. Es kann deshalb verwendet werden, um das Systemverhalten vorherzusagen. Statt ein Experiment mit dem System durchzuführen und dabei die Ausgangsgröße zu messen, kann man die Zustandsgleichung des Modells  $\Sigma$  lösen und den dabei erhaltenen Zustand in die Ausgabegleichung des einsetzen, um den Verlauf der Ausgangsgröße zu bestimmen.

Das Zustandsraummodell zeigt, dass man für die Berechnung der Ausgangsgröße  $y$  zum Zeitpunkt  $t$  zwei Dinge wissen muss, nämlich den Anfangszustand  $x_0$  und den Verlauf der Eingangsgröße für das Zeitintervall  $0 \dots t$ . Die Zustandsgleichung liefert dafür den Verlauf des Zustands für das Zeitintervall  $0 \dots t$  und mit Hilfe der Ausgabegleichung kann daraus der Verlauf der Ausgangsgröße für dasselbe Zeitintervall ermittelt werden. Die Vorhersageaufgabe lässt sich deshalb folgendermaßen zusammenfassen:

**Vorhersageaufgabe**

- |          |                                                                                                                                    |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Gegeben: | Zustandsraummodell des Systems $\Sigma$<br>Anfangszustand $x_0$<br>Verlauf der Eingangsgröße $u$ für das Zeitintervall $0 \dots t$ |
| Gesucht: | Verlauf der Ausgangsgröße $y$ für das Zeitintervall $0 \dots t$                                                                    |

Die folgenden Abschnitte zeigen, dass die Lösung der Zustandsgleichung explizit in Abhängigkeit vom Anfangszustand und vom Verlauf der Eingangsgröße angegeben werden kann. Diese Lösung ist die Grundlage für eine tiefgründige Analyse des Systemverhaltens, die wesentlich mehr ergibt als nur den Wert des Zustands oder der Ausgangsgröße zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t$ . Es wird sich zeigen, dass das Verhalten jedes linearen Systems in die freie Bewegung und die erzwungene Bewegung zerlegt werden kann, wobei die freie Bewegung nur vom Anfangszustand  $x_0$  und die erzwungene Bewegung nur von der Eingangsgröße  $u$  abhängt. Beide Bewegungen können in Modi zerlegt werden, deren zeitlicher Verlauf durch die Eigenwerte der Systemmatrix  $A$  bestimmt wird. Eine weitergehende Analyse wird zeigen, dass die erzwungene Bewegung in das Übergangsverhalten und das stationäre Verhalten zerlegt werden kann, was sowohl für die im nächsten Kapitel eingeführte Frequenzbereichsbetrachtung als auch für die Bewertung des Verhaltens von Regelkreisen von grundlegender Bedeutung ist.

## 5.2 Lösung der Zustandsgleichung

### 5.2.1 Lösung einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung

Es wird jetzt untersucht, wie für einen gegebenen Anfangszustand  $x_0$  und eine gegebene Eingangsgröße  $u(t)$  die Zustandsgleichung gelöst werden kann. Als Grundlage dafür wird zunächst die aus der Mathematik bekannte Lösung einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (5.1)$$

wiederholt, die der Zustandsgleichung eines Systems erster Ordnung entspricht.

Bekanntlich setzt sich die allgemeine Lösung einer linearen Differentialgleichung aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und einer partikulären

Lösung der inhomogenen Gleichung zusammen. Deshalb wird zunächst die homogene Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = ax(t), \quad x(0) = x_0 \quad (5.2)$$

betrachtet. Mit dem Lösungsansatz

$$x(t) = k e^{\lambda t}$$

erhält man

$$\dot{x}(t) = k \lambda e^{\lambda t}$$

und nach dem Einsetzen in Gl. (5.2)

$$\begin{aligned} k \lambda e^{\lambda t} &= ak e^{\lambda t} \\ k \lambda &= ak. \end{aligned}$$

Folglich gilt  $\lambda = a$  und

$$x(t) = k e^{at} \quad (5.3)$$

ist die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung (5.2).

Die partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (5.1) erhält man mit der Methode der Variation der Konstanten, bei der die Konstante  $k$  in Gl. (5.3) durch eine Zeitfunktion  $k(t)$  ersetzt wird. Der Lösungsansatz heißt dann

$$x(t) = k(t) e^{at}.$$

Wird dieser Ansatz nach  $t$  abgeleitet und in (5.1) eingesetzt, so erhält man

$$a e^{at} k(t) + e^{at} \dot{k}(t) = a e^{at} k(t) + bu(t)$$

und daraus

$$\dot{k}(t) = e^{-at} bu(t).$$

Die Integration über das Intervall  $0 \dots t$  ergibt

$$\int_0^t \dot{k}(\tau) d\tau = k(t) - k(0) = \int_0^t e^{-a\tau} bu(\tau) d\tau,$$

so dass als allgemeine Lösung der Differentialgleichung die Beziehung

$$x(t) = k(0) e^{at} + \int_0^t e^{a(t-\tau)} bu(\tau) d\tau \quad (5.4)$$

entsteht, wobei  $k(0)$  eine zunächst noch unbekannte Konstante darstellt. Aus der Anfangsbedingung folgt für diese Konstante der Wert

$$k(0) = x_0.$$

Damit erhält man die Lösung der Differentialgleichung erster Ordnung:

$$x(t) = e^{at} x_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)} b u(\tau) d\tau. \quad (5.5)$$

In der Literatur wird die e-Funktion auch mit  $\phi(t)$  bezeichnet

$$e^{at} = \phi(t)$$

und die Lösung der Differentialgleichung in der Form

$$x(t) = \phi(t)x_0 + \int_0^t \phi(t-\tau) bu(\tau) d\tau$$

geschrieben. Die Beziehung (5.5) heißt *Bewegungsgleichung* des durch die Zustandsgleichung (5.1) beschriebenen Systems.

**Diskussion der Lösung.** Die Lösung (5.5) besteht aus zwei Summanden, von denen der erste Summand die homogene Lösung und der zweite Summand die partikuläre Lösung der Differentialgleichung darstellt. Technisch interpretiert beschreibt die homogene Lösung

$$x_{\text{frei}}(t) = e^{at} x_0$$

die *Eigenbewegung* oder *freie Bewegung* des Systems, also diejenige Bewegung im Zustandsraum, die das System ohne Erregung von außen aufgrund der Anfangsauslenkung  $x_0$  ausführt. Die partikuläre Lösung

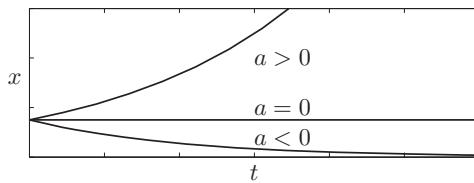
$$x_{\text{erzw}}(t) = \int_0^t e^{a(t-\tau)} bu(\tau) d\tau$$

beschreibt die durch die äußere Erregung  $u(t)$  *erzwungene Bewegung* des Systems. Da das System linear ist, überlagern sich beide Bewegungen additiv:

$$x(t) = x_{\text{frei}}(t) + x_{\text{erzw}}(t).$$

Die *Eigenbewegung* hat in Abhängigkeit vom Vorzeichen des Parameters  $a$  drei typische Formen (Abb. 5.1):

- Für  $a < 0$  klingt die Eigenbewegung ab und das System geht asymptotisch in den Ruhezustand  $x = 0$  über.
- Für  $a = 0$  verharrt das System im Anfangszustand  $x_0$ .
- Für  $a > 0$  klingt die Eigenbewegung auf, d. h., die Zustandsgröße wächst exponentiell über alle Grenzen und das System entfernt sich immer weiter von der Ruhelage  $x = 0$ .



**Abb. 5.1:** Eigenbewegung eines Systems erster Ordnung für  $x_0 = 1$

Diese drei charakteristischen Bewegungsformen werden im Zusammenhang mit der Stabilitätsanalyse genauer untersucht. Dabei wird ein System, das von einer Anfangsauslenkung  $x_0$  zum Ruhezustand  $x = 0$  zurückkehrt, als asymptotisch stabil bezeichnet. Für das hier betrachtete System erster Ordnung liegt asymptotische Stabilität offenbar genau dann vor, wenn  $a < 0$  gilt.

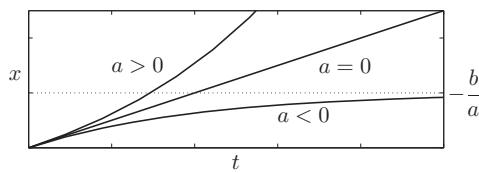
Die *erzwungene Bewegung* hängt von der gegebenen Eingangsgröße ab. Als Beispiel wird das System für ein sprungförmiges Eingangssignal betrachtet:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}. \quad (5.6)$$

Für den Anfangszustand  $x_0 = 0$  ergibt Gl. (5.5) mit der Substitution  $\tau' = t - \tau$

$$x(t) = \int_0^t e^{a\tau'} b \, d\tau' = \begin{cases} \frac{b}{a}(e^{at} - 1) & \text{für } a \neq 0 \\ bt & \text{für } a = 0. \end{cases}$$

Wieder können drei charakteristische Formen der Bewegung unterschieden werden (Abb. 5.2):

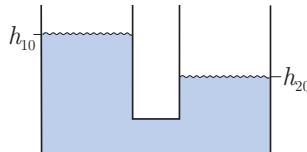


**Abb. 5.2:** Erzwungene Bewegung eines Systems erster Ordnung für sprungförmige Eingangsgröße (5.6)

- Für  $a < 0$  nähert sich das System asymptotisch dem Endwert  $-\frac{b}{a}$ .
- Für  $a = 0$  verläuft der Zustand auf einer Geraden (Rampenfunktion).
- Für  $a > 0$  wächst der Zustand exponentiell über alle Grenzen.

**Aufgabe 5.1\*** Eigenbewegungen zweier gekoppelter Wasserbehälter

Betrachtet werden die beiden gekoppelten Wasserbehälter in Abb. 5.3, die ein ungestörtes System darstellen, denn es gibt keine Eingangsgröße.

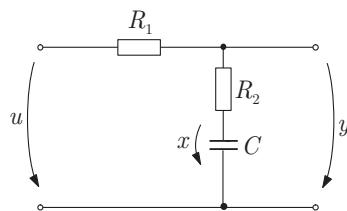


**Abb. 5.3:** Behältersystem

1. Stellen Sie die Zustandsgleichung des Systems auf, wobei Sie von linearen Zusammenhängen zwischen Wasserdrücken und Durchflüssen ausgehen. Die Trägheitskräfte der Wassersäulen sollen vernachlässigt werden.
2. Berechnen Sie die Eigenbewegung des Systems, wenn die Wasserstände zum Zeitpunkt 0 die Werte  $h_1(0) = h_{10}$  und  $h_2(0) = h_{20}$  haben, und stellen Sie diese qualitativ grafisch dar. □

**Aufgabe 5.2\*** Bewegungsgleichung für ein RC-Glied erster Ordnung

Abbildung 5.4 stellt ein System erster Ordnung mit den Spannungen  $u(t)$  und  $y(t)$  als Eingangsgröße bzw. Ausgangsgröße dar.



**Abb. 5.4:** RC-Glied

1. Stellen Sie die skalare Zustandsgleichung des RC-Gliedes auf, wobei die Kondensatorspannung  $u_C(t) = x(t)$  als Zustandsvariable fungiert.
2. Berechnen Sie die Eigenbewegung  $y_{\text{frei}}(t)$  des RC-Gliedes für den Fall, dass für die Kondensatorspannung  $u_C(0) = \frac{1}{2} \text{ V}$  gilt.
3. Berechnen Sie die erzwungene Bewegung  $y_{\text{erzw}}(t)$  für sprungförmige Erregung  $u(t) = 1$  und den Anfangszustand  $u_C(0) = 0$ .
4. Stellen Sie beide Bewegungen in einem gemeinsamen Diagramm grafisch dar. Wie kann aus den beiden Kurven die Trajektorie  $y(t)$  des Systems für den Fall konstruiert werden, dass die Sprungerregung bei der Anfangsbedingung  $u_C(0) = \frac{1}{2} \text{ V}$  wirkt? □

### 5.2.2 Lösung eines Differentialgleichungssystems erster Ordnung

Die (vektorielle) Zustandsgleichung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (5.7)$$

kann in ähnlicher Weise gelöst werden wie die skalare Gleichung (5.1). Betrachtet wird zunächst die homogene Gleichung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \quad (5.8)$$

Analog zum skalaren Fall wird mit dem Ansatz

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{k} \quad (5.9)$$

gearbeitet, wobei aufgrund der dort erhaltenen Lösung  $a = \lambda$  hier das Produkt  $\mathbf{A}t$  als Exponent eingesetzt wurde.  $\mathbf{k}$  ist ein  $n$ -dimensionaler Vektor. Die  $n$ -dimensionale quadratische Matrix  $e^{\mathbf{A}t}$  wird als *Matrixexponentialfunktion* bezeichnet. Sie ist durch folgende Reihe definiert:

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^i t^i}{i!} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2}{2!}t^2 + \frac{\mathbf{A}^3}{3!}t^3 + \dots \quad (5.10)$$

Diese Reihe ist analog der Reihenentwicklung der e-Funktion aufgebaut:

$$e^{at} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^i t^i}{i!} = 1 + at + \frac{a^2}{2!}t^2 + \frac{a^3}{3!}t^3 + \dots$$

Es kann bewiesen werden, dass die Reihe (5.10) für alle quadratischen Matrizen  $\mathbf{A}$  konvergiert. Deshalb kann die Differenziation mit der Summenbildung vertauscht werden, so dass man

$$\frac{d}{dt} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 t + \frac{\mathbf{A}^3}{2!} t^2 + \dots = \mathbf{A} \left( \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2}{2!}t^2 + \frac{\mathbf{A}^3}{3!}t^3 + \dots \right)$$

$$\frac{d}{dt} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A} e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{A}$$

erhält. Die Differenziation der Matrixexponentialfunktion führt also auf ein ähnliches Ergebnis, wie es von der e-Funktion bekannt ist:  $\frac{d}{dt} e^{at} = ae^{at}$ .

Setzt man den Lösungsansatz (5.9) in die homogene Gleichung ein, so sieht man, dass er diese Gleichung erfüllt und folglich die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist.

Für die Lösung der inhomogenen Zustandsgleichung (5.7) wird wieder entsprechend der Methode der Variation der Konstanten der Vektor  $\mathbf{k}$  als zeitabhängig angenommen und mit dem Ansatz

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{k}(t)$$

gearbeitet. Nach der Differenziation und dem Einsetzen in die Differentialgleichung erhält man die Beziehung

$$\mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} \mathbf{k}(t) + e^{\mathbf{A}t} \dot{\mathbf{k}}(t) = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} \mathbf{k}(t) + \mathbf{b}u(t).$$

Aus der Reihenentwicklung von  $e^{\mathbf{A}t}$  weiß man, dass die Matrixexponentialfunktion für beliebige Matrizen  $\mathbf{A}$  und für alle  $t$  regulär ist und folglich invertiert werden kann. Dabei gilt

$$(e^{\mathbf{A}t})^{-1} = e^{-\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}(-t)}.$$

Folglich ist

$$\dot{\mathbf{k}}(t) = e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{b}u(t),$$

woraus sich durch Integration die Beziehung

$$\int_0^t \dot{\mathbf{k}}(\tau) d\tau = \mathbf{k}(t) - \mathbf{k}(0) = \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{b}u(\tau) d\tau$$

ergibt. Aus dem Ansatz und dieser Gleichung entsteht unter Beachtung der Anfangsbedingung die Lösung

Bewegungsgleichung:  $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{b}u(\tau) d\tau.$

(5.11)

Nach Einführung der Abkürzung

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} \quad (5.12)$$

kann man die Lösung in der Form

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau) \mathbf{b}u(\tau) d\tau$$

schreiben.

Gleichung (5.11) heißt *Bewegungsgleichung* des Systems. Die darin vorkommende Matrix (5.12) wird *Übergangsmatrix*, *Transitionsmatrix* oder *Fundamentalmatrix* genannt. Die Existenz und Eindeutigkeit der durch Gl. (5.11) beschriebenen Lösung der Zustandsgleichung folgt aus der bekannten Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der zugehörigen linearen gewöhnlichen Differentialgleichung.

Die Bewegungsgleichung weist auf die Bedeutung des bereits eingeführten Begriffs des Zustands hin: Der Einfluss der Bewegung des Systems im Zeitraum  $t < 0$

auf die Bewegung im Zeitraum  $t > 0$  wird vollständig durch den Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  wiedergegeben, denn es ist zur Berechnung von  $\mathbf{x}(t)$  nur der Verlauf von  $u(\tau)$  für  $0 \leq \tau \leq t$  erforderlich.

**Diskussion der Lösung.** Wie im skalaren Fall setzt sich die Bewegung  $\mathbf{x}(t)$  aus zwei Komponenten zusammen

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{\text{frei}}(t) + \mathbf{x}_{\text{erzw}}(t),$$

die der Eigenbewegung

$$\mathbf{x}_{\text{frei}}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0$$

bzw. der erzwungenen Bewegung

$$\mathbf{x}_{\text{erzw}}(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{b} u(\tau) d\tau$$

des Systems entsprechen.

Die Eigenbewegung entfällt, wenn  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  gilt. Das kann anschaulich so interpretiert werden, dass das System zum Zeitpunkt  $t = 0$  keine Energie gespeichert hat und deshalb aus eigener Kraft keine Bewegung ausführt. Beachtet man, dass  $\mathbf{x}(t)$  nicht den absoluten Wert der Zustandsgrößen, sondern vielfach die Abweichung  $\delta\mathbf{x}(t)$  vom Arbeitspunkt beschreibt, so heißt  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ , dass das System keine Energie zusätzlich zu der beim Arbeitspunkt auftretenden gespeichert hat und keine freie Bewegung um den Arbeitspunkt ausführt.

Die für die skalare Differentialgleichung getroffene Fallunterscheidung bezüglich des Vorzeichens von  $a$  muss hier auf den Realteil der Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  bezogen werden:

- Gilt für alle Eigenwerte  $\lambda_i$  von  $\mathbf{A}$

$$\operatorname{Re}\{\lambda_i\} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{5.13}$$

so klingt die Eigenbewegung ab, d. h., das System nähert sich asymptotisch seiner Ruhelage  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

- Gilt für wenigstens einen Eigenwert

$$\operatorname{Re}\{\lambda_i\} > 0,$$

so wächst mindestens eine Zustandsvariable  $x_i(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  über alle Grenzen.

Diese Fallunterscheidung wird bei der Stabilitätsanalyse im Kap. 8 ausführlich untersucht. Ein System soll jedoch bereits jetzt als stabiles System bezeichnet werden, wenn die Bedingung (5.13) erfüllt ist. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von stabilen bzw. instabilen Eigenwerten, je nachdem, ob der Eigenwert die Bedingung (5.13) erfüllt oder nicht. Da die von einem stabilen System erzeugten Signale für alle Zeiten endlich sind, nennt man derartige Signale auch *stabile Signale*.

### 5.2.3 Verhalten linearer Systeme

Mit der Lösung der Zustandsgleichung kann die Ausgangsgröße  $y(t)$  des Systems

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + du(t) \end{cases} \quad (5.14)$$

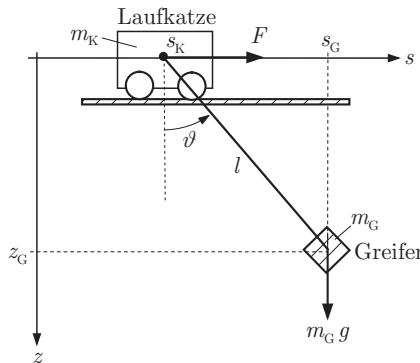
berechnet werden:

Bewegungsgleichung für den Ausgang:

$$y(t) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{b}u(\tau) d\tau + d u(t). \quad (5.15)$$

Wie in der Bewegungsgleichung (5.11) beschreibt der erste Summand die Eigenbewegung und der zweite Summand die erzwungene Bewegung des Systems. Beide Summanden werden deshalb auch durch  $y_{\text{frei}}(t)$  und  $y_{\text{erzw}}(t)$  symbolisiert:

$$y(t) = y_{\text{frei}}(t) + y_{\text{erzw}}(t). \quad (5.16)$$



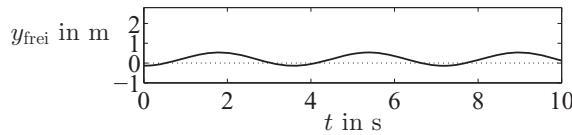
**Abb. 5.5:** Verladebrücke

#### Beispiel 5.1 Verhalten einer Verladebrücke

Die in Abb. 5.5 gezeigte Verladebrücke wird mit  $s_k(t)$ ,  $\dot{s}_k(t)$ ,  $\vartheta(t)$  und  $\dot{\vartheta}(t)$  als Zustandsvariablen sowie der Kraft  $F(t)$  als Eingangsgröße  $u(t)$  und der horizontalen Position  $s_G(t)$  der Last als Ausgangsgröße  $y(t)$  durch

$$\text{Verladebrücke : } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14,72 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3,066 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0,001 \\ 0 \\ -0,000125 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = (1 \ 0 \ 8 \ 0) \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

beschrieben.

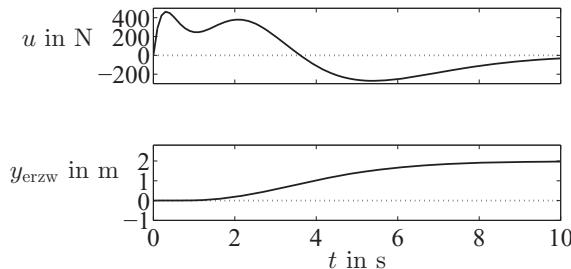


**Abb. 5.6:** Eigenbewegung der Verladebrücke

Entsprechend Gl. (5.16) setzt sich die Bewegung der Verladebrücke aus der freien Bewegung und der erzwungenen Bewegung zusammen. Die freie Bewegung wird durch den Anfangszustand bei verschwindender Eingangsgröße ( $u(t) = 0$ ) erzeugt. Sie ist für

$$\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0 \\ -0,1047 \\ 0 \end{pmatrix}$$

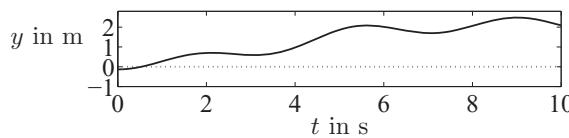
in Abb. 5.6 dargestellt. Diese Bewegung wird durch eine Anfangsposition der Laufkatze bei  $s_k = 0,7$  m und einen Winkel des Lasthakens von  $-6^\circ$  hervorgerufen. Die Kurve zeigt die pendelnde Bewegung des Lasthakens, die nicht abklingt, weil bei der Modellbildung die Schwingung des Lasthakens als reibungsfrei angenommen wurde.



**Abb. 5.7:** Erzwungene Bewegung der Verladebrücke

Die erzwungene Bewegung entsteht durch die Wirkung der Eingangsgröße  $u(t)$ , die für dieses Beispiel in Abb. 5.7 (oben) zu sehen ist. Die Laufkatze wird zunächst beschleunigt ( $F > 0$ ) und später wieder gebremst ( $F < 0$ ). Der untere Teil der Abbildung zeigt, dass der Lasthaken durch diese Kraft von der Nullage in die Position  $y = 2$  m bewegt wird.

Die Bewegung der Verladebrücke unter den Wirkungen der Anfangsauslenkung und der Eingangsgröße erhält man schließlich als Summe beider Bewegungen. Das heißt, die in Abb. 5.8 gezeigte Kurve entsteht durch Addition der  $y(t)$ -Kurven in den beiden vorherigen Bildern. Der Lasthaken wird zu seiner neuen Position gesteuert, pendelt aber aufgrund der Eigenbewegung um die Endlage.  $\square$



**Abb. 5.8:** Summe von Eigenbewegung und erzwungenen Bewegung der Verladebrücke

**Eingangs-Ausgangs-Verhalten.** Unter dem Eingangs-Ausgangs-Verhalten (E/A-Verhalten) eines Systems versteht man die Reaktion des Systemausganges auf eine gegebene Eingangsgröße. Dabei wird vorausgesetzt, dass sich das System zur Zeit  $t = 0$  im Ruhezustand  $\boldsymbol{x}(0) = \mathbf{0}$  befindet, weil ansonsten die der erzwungenen Bewegung überlagerte Eigenbewegung des Systems verhindert, dass die Wirkung der Eingangsgröße auf die Ausgangsgröße eindeutig bestimmt werden kann. Unter dieser Annahme ergibt sich für das E/A-Verhalten des durch das Zustandsraummodell (5.14) beschriebenen Systems die Beziehung

$$\boxed{\text{E/A-Verhalten: } y(t) = \int_0^t \mathbf{c}^T e \mathbf{A}(t-\tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau + d u(t).} \quad (5.17)$$

Man könnte beim E/A-Verhalten an Stelle von  $y(t)$  also stets  $y_{\text{erzw}}(t)$  schreiben, was jedoch ungebräuchlich ist. Die E/A-Beschreibung gibt an, wie das System ein gegebenes Eingangssignal in ein Ausgangssignal überführt. Sie kennzeichnet also das *dynamische Übertragungsverhalten* des Systems.

Anhand von Gl. (5.17) kann noch einmal auf die bereits auf S. 85 beschriebene Eigenschaft eingegangen werden, dass ein System sprungfähig ist, wenn der Parameter  $d$  in der Ausgabegleichung nicht verschwindet. Für  $t = 0$  gilt für das E/A-Verhalten

$$y(0) = d u(0),$$

d. h., die Ausgangsgröße nimmt bei  $u(0) \neq 0$  genau dann einen von null verschiedenen Wert an, wenn  $d \neq 0$  gilt. Das System folgt der „springenden“ Eingangsgröße ohne Verzögerung auf die mit dem Faktor  $d$  multiplizierte „Sprunghöhe“.

**Vergleich der Modellformen.** Die in diesem Abschnitt angegebenen Modellformen (5.14) und (5.17) stellen zwei Beschreibungsformen dar, die im Folgenden immer wieder verwendet werden. Während die innere Beschreibung (5.14) des Systems zunächst die Wirkung des Einganges  $u$  auf den Systemzustand  $\boldsymbol{x}$  abbildet und daraus dann den Ausgang  $y$  berechnet, stellt die E/A-Beschreibung (5.17) einen direkten Zusammenhang zwischen dem Eingang  $u$  und dem Ausgang  $y$  her. Dabei darf man jedoch nicht vergessen, dass die E/A-Beschreibung nur für Systeme gilt, die zur Zeit  $t = 0$  im Ruhezustand  $\boldsymbol{x}(0) = \mathbf{0}$  sind. Die E/A-Beschreibung kann also nicht verwendet werden, um die Eigenbewegung des ungestörten Systems von einem gegebenen Anfangszustand aus zu untersuchen.

**Linearität des Systems.** Mit Hilfe der E/A-Beziehung (5.17) kann die bereits in Abschn. 4.2.3 behandelte Linearitätseigenschaft (4.33) des Systems für das E/A-Verhalten sehr einfach nachgewiesen werden. Setzt sich die Eingangsgröße des Systems, das sich zur Zeit  $t = 0$  im Ruhezustand  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$  befindet, aus einer Linearkombination

$$u(t) = ku_1(t) + lu_2(t)$$

der Eingangssignale  $u_1$  und  $u_2$  zusammen, so entsteht eine Ausgangsgröße  $y(t)$ , die sich aus derselben Linearkombination von  $y_1$  und  $y_2$  zusammensetzt:

$$u(t) = ku_1(t) + lu_2(t) \mapsto y(t) = ky_1(t) + ly_2(t). \quad (5.18)$$

Die Gültigkeit der Beziehung (5.18) folgt aus der E/A-Beziehung (5.17).

Ist das System zum Zeitpunkt  $t = 0$  im Zustand  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$ , so gilt die Beziehung (5.18) nur dann, wenn für die Anfangszustände die Bedingung (4.34) erfüllt ist, was man abgekürzt in folgender Form schreiben kann:

$$\left. \begin{array}{l} u(t) = ku_1(t) + lu_2(t) \\ \mathbf{x}_0 = k\mathbf{x}_{01} + l\mathbf{x}_{02} \end{array} \right\} \mapsto y(t) = ky_1(t) + ly_2(t). \quad (5.19)$$

Wendet man aber  $u_1$  und  $u_2$  nacheinander auf das System mit demselben Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  an, so gilt Gl. (5.18) nicht!

### Aufgabe 5.3\* Bewegungsgleichung eines Fahrzeugs

Ein Fahrzeug mit der Masse  $m$  bewegt sich auf einer geradlinigen, ebenen Straße. Bei den folgenden Betrachtungen ist die Beschleunigungskraft des Fahrzeugs, die näherungsweise proportional zur Winkelstellung des Gaspedals ist, die Eingangsgröße  $u(t)$  und die Geschwindigkeit des Fahrzeugs die Ausgangsgröße  $y(t)$ .

1. Stellen Sie das Zustandsraummodell des Fahrzeugs unter der Annahme auf, dass in der Umgebung des betrachteten Arbeitspunktes die durch den Luftwiderstand erzeugte Bremskraft proportional zur Geschwindigkeit ist (vgl. linearisiertes Modell im Beispiel 4.13).
2. Leiten Sie aus dem Modell die Bewegungsgleichung des Fahrzeugs ab.
3. Welcher Geschwindigkeitsverlauf lässt sich aus der Bewegungsgleichung ableiten, wenn das Fahrzeug eine Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  besitzt, die um  $\delta v_0$  höher als der Arbeitspunkt  $\bar{v}_0$  ist, und das Gaspedal auf der durch den Arbeitspunkt  $\bar{v}_0$  vorgegebenen Stellung gehalten wird? Stellen Sie die Lösung grafisch dar.
4. Welche erzwungene Bewegung ergibt sich aus der Bewegungsgleichung, wenn das Fahrzeug aus dem Arbeitspunkt  $\bar{v}_0$  im Zeitraum  $0 \dots t_1$  mit konstanter Kraft beschleunigt und im Zeitraum  $t_1 \dots t_2$  weder beschleunigt noch gebremst wird ( $\delta u = 0$ )? Stellen Sie die Lösung grafisch dar.
5. Stellen Sie ein Zustandsraummodell auf, das das Systemverhalten für den Zeitraum  $t \geq t_1$  beschreibt. Welchen Wert hat der Anfangszustand?  
(Hinweis: Führen Sie eine neue Zeitachse  $t' = t - t_1$  ein und stellen Sie ein Modell für  $t' \geq 0$  auf.)  $\square$

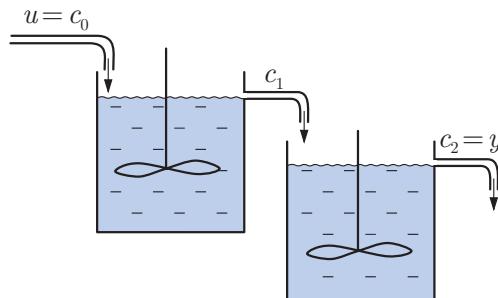
**Aufgabe 5.4\*** Fahrt mit der Eisenbahn

Ein Personenzug besteht aus einer Lokomotive (Masse 150 t) und 10 Wagen (Masse je 10 t). Der Rollwiderstand erzeugt eine von der Geschwindigkeit  $v(t)$  des Zuges abhängige Bremskraft  $F_r(t) = cv(t)$ , wobei für die Konstante der Wert  $c = 2 \frac{t}{s}$  angenommen wird. Nach Abfahrt des Zuges am Bahnhof 1 zur Zeit  $t = 0$  beschleunigt die Lokomotive den Zug mit der Kraft  $F_a = 75 \text{ kN}$  bis zum Zeitpunkt  $t_1 = 200 \text{ s}$ . Anschließend rollt der Zug ohne Beschleunigung durch die Lok, aber unter Wirkung des Rollwiderstandes, um vom Zeitpunkt  $t_2 = 300 \text{ s}$  an mit konstanter Bremskraft von  $F_b = 80 \text{ kN}$  bis zum Stillstand abgebremst zu werden.

1. Stellen Sie die Differentialgleichung des Zuges auf und überführen Sie diese in ein Zustandsraummodell (Eingangsgröße: Beschleunigungskraft, Ausgangsgröße: Geschwindigkeit).
2. Lösen Sie die Bewegungsgleichung für die beschriebene Eingangsgröße.
3. Zu welchem Zeitpunkt  $t_3$  kommt der Zug zum Stillstand?  $\square$

**Aufgabe 5.5\*** Verhalten zweier Rührkessel

Abbildung 5.9 zeigt zwei Rührkesselreaktoren, in deren Flüssigkeit der Stoff A gelöst ist. Es soll untersucht werden, wie sich die Konzentration in beiden Behältern verändert, wenn am Zulauf über eine bestimmte Zeit Flüssigkeit mit einer zu hohen Konzentration in den linken Behälter fließt.



**Abb. 5.9:** Rührkessel

Es wird davon ausgegangen, dass beide Behälter homogen durchmischt sind, der Volumenstrom  $F$  im Zulauf gleich dem konstanten Volumenstrom im Auslauf ist und zur Zeit  $t = 0$  in beiden Behältern die geforderte Konzentration  $c_A$  vorliegt. In den Behältern tritt keine chemische Reaktion auf.

1. Stellen Sie das Zustandsraummodell auf. Eingangsgröße ist die Zulaufkonzentration, Ausgangsgröße die Konzentration im zweiten Behälter.
2. Bestimmen Sie die Parameter des Zustandsraummodells, wenn folgende Daten bekannt sind:

$$\text{Volumen: } V_1 = 4 \text{ l}, V_2 = 3 \text{ l}$$

$$\text{Durchfluss: } F = 2 \frac{\text{l}}{\text{min}}$$

3. Welcher Anfangszustand stellt sich zur Zeit  $t = 0$  ein, wenn für  $t < 0$  die Zulaufkonzentration den konstanten Wert von  $1 \frac{\text{mol}}{\text{l}}$  besitzt? Verändern Sie das Modell so, dass es nur die Abweichungen von dieser Eingangsgröße bzw. von diesem Anfangszustand beschreibt.

4. Die Konzentration des Zulaufs hat den folgenden Verlauf:

$$u(t) = \begin{cases} 6 \frac{\text{mol}}{\text{l}} & 0 \leq t \leq 0,25 \text{ min} \\ 1 \frac{\text{mol}}{\text{l}} & t > 0,25 \text{ min.} \end{cases} \quad (5.20)$$

Berechnen Sie, wie sich aufgrund dieser Konzentrationsschwankung die Konzentrationen in beiden Behältern verändern. Stellen Sie den Verlauf grafisch dar.

(Hinweise: Überlegen Sie sich, welches der beiden aufgestellten Modelle für diese Rechnung das zweckmäßiger ist. Nutzen Sie zur Berechnung der Matrixexponentialfunktion die auf S. 134 angegebene Sylvesterformel.)  $\square$

## 5.2.4 Eigenschaften und Berechnungsmethoden für die Übergangsmatrix

**Eigenschaften.** Die in Gl. (5.10) definierte Übergangsmatrix

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t}$$

kommt in allen Bewegungsgleichungen vor und hat deshalb für das Verhalten linearer Systeme eine herausragende Bedeutung. Im Folgenden werden die Eigenschaften dieser Matrix sowie Methoden für die Berechnung zusammengestellt.

Die Übergangsmatrix wurde im Abschn. 5.2.2 zur Lösung der homogenen Differentialgleichung (5.8) eingeführt. Wird  $\Phi(t)$  differenziert und in die homogene Differentialgleichung eingesetzt, so wird offensichtlich, dass  $\Phi(t)$  die Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{\Phi}(t) = \mathbf{A}\Phi(t), \quad \Phi(0) = \mathbf{I} \quad (5.21)$$

ist.

Schreibt man die Lösung der homogenen Differentialgleichung unter Verwendung der Matrix  $\Phi(t)$  ausführlich

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(t) & \Phi_{12}(t) & \cdots & \Phi_{1n}(t) \\ \Phi_{21}(t) & \Phi_{22}(t) & \cdots & \Phi_{2n}(t) \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \Phi_{n1}(t) & \Phi_{n2}(t) & \cdots & \Phi_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{pmatrix},$$

so erkennt man, dass das Element  $\Phi_{ij}(t)$  der Übergangsmatrix beschreibt, wie die  $i$ -te Zustandsvariable von der Anfangsauslenkung der  $j$ -ten Zustandsvariablen abhängt.

Weitere Eigenschaften erhält man, wenn man von der Lösung

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t - t_0) \mathbf{x}(t_0)$$

der homogenen Differentialgleichung (5.8) ausgeht, die für beliebige Anfangszeit  $t_0$  analog der Gl. (5.11) abgeleitet werden kann. Da die Übergangsmatrix regulär ist, kann diese Gleichung von links mit der Inversen multipliziert werden, wodurch

$$\mathbf{x}(t_0) = \Phi^{-1}(t - t_0) \mathbf{x}(t)$$

entsteht. Andererseits gilt die Beziehung

$$\mathbf{x}(t_0) = \Phi(t_0 - t) \mathbf{x}(t).$$

Folglich ist

$$\Phi(t - t_0) = \Phi^{-1}(t_0 - t).$$

Da

$$e^{\mathbf{A}t_1} e^{\mathbf{A}t_2} = e^{\mathbf{A}(t_1 + t_2)} = e^{\mathbf{A}t_2} e^{\mathbf{A}t_1}$$

aus der Definition der Matrixexponentialfunktion abgeleitet werden kann, erhält man für die Übergangsfunktion außerdem die Eigenschaft

$$\Phi(t_2 - t_0) = \Phi(t_2 - t_1) \Phi(t_1 - t_0).$$

**Berechnung.** Die für die Definition verwendete Reihe (5.10) kann für die Berechnung von  $\Phi(t)$  für eine gegebene Matrix  $\mathbf{A}$  und einen gegebenen Zeitpunkt  $t$  verwendet werden. Bricht man die Reihe nach  $p$  Gliedern ab, so weist die berechnete Übergangsmatrix einen Fehler auf, der jedoch bei numerischer Berechnung mit hoher Gliedzahl  $p$  klein gehalten werden kann. Wesentlich ist bei dieser Herangehensweise, dass man für die Darstellung des zeitlichen Verlaufes von  $\Phi(t)$  über ein bestimmtes Zeitintervall die genannte Reihe für viele Zeitpunkte einzeln ausrechnen muss.

Eine zweite Berechnungsmöglichkeit bietet die Formel von SYLVESTER<sup>1</sup>, die angewendet werden kann, wenn alle Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  einfach sind:

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} \mathbf{F}_i \quad (5.22)$$

mit

$$\mathbf{F}_i = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I}}{\lambda_i - \lambda_j}.$$

Gleichung (5.22) ist eine analytische Darstellung von  $\Phi(t)$ , die  $n$  e-Funktionen enthält, deren Exponenten von den Eigenwerten der Matrix  $\mathbf{A}$  abhängen und die den zeitlichen Verlauf von  $\Phi(t)$  in geschlossener Form angeben. Eine ähnliche Darstellung erhält man über die Ähnlichkeitstransformation der Matrix  $\mathbf{A}$  mit der Matrix  $\mathbf{V}$  ihrer  $n$  Eigenvektoren. Wird diese Transformation auf alle Glieder der Reihe (5.10) angewendet, so erhält man die Beziehung

---

<sup>1</sup> JAMES JOSEPH SYLVESTER (1814 – 1897), englischer Mathematiker

$$\Phi(t) = e^{At} = V \operatorname{diag} e^{\lambda_i t} V^{-1}, \quad (5.23)$$

aus der wieder  $\Phi(t)$  in Abhängigkeit von den  $n$  e-Funktionen  $e^{\lambda_i t}$  erhalten wird.

Eine weitere Berechnungsmöglichkeit führt über die Laplacetransformation und wird später behandelt (Aufgabe 6.15).

**Aufgabe 5.6** Berechnung der Übergangsmatrix

Bestimmen Sie für die Systemmatrix

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{T_2} & -\frac{1}{T_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_3} & -\frac{1}{T_3} \end{pmatrix}$$

die Übergangsmatrix nach der Sylvesterformel (5.22).  $\square$

## 5.3 Normalformen des Zustandsraummodells

Bei der Aufstellung eines Zustandsraummodells (5.14)

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), & x(0) = x_0 \\ y(t) = c^T x(t) + du(t) \end{cases} \quad (5.24)$$

ist die Wahl der Zustandsvariablen nicht eindeutig. Deshalb ist die Frage interessant, inwieweit man durch eine Veränderung der Zustandsvariablen ein Modell finden kann, mit Hilfe dessen sich das Verhalten des Systems besonders einfach analysieren lässt. Im Folgenden werden auf diese Frage mehrere Antworten gegeben. Es wird zunächst allgemein gezeigt, welche Auswirkungen die Transformation des Zustandsraumes auf das Modell hat. Dann werden mehrere spezielle Transformationsmatrizen angegeben, für die man das Zustandsraummodell in bestimmten Normalformen erhält, und es wird gezeigt, welche speziellen Phänomene dynamischer Systeme man mit diesen Normalformen besonders gut erkennen kann.

### 5.3.1 Transformation der Zustandsgleichung

Aus dem Zustand  $x$  wird durch die Beziehung

$$\tilde{x}(t) = T^{-1}x(t) \quad (5.25)$$

ein neuer Zustand gebildet, der – genauso wie  $x(t)$  – alle Merkmale eines Systemzustands besitzt, also als Grundlage für die Aufstellung einer Zustandsgleichung dienen kann. Voraussetzung dafür ist, dass die  $(n, n)$ -Transformationsmatrix  $T$  regulär ist.

Die neue Zustandsgleichung, die sich auf  $\tilde{\mathbf{x}}$  an Stelle von  $\mathbf{x}$  bezieht, erhält man folgendermaßen. Zunächst wird die alte Zustandsgleichung (5.24) von links mit der Matrix  $\mathbf{T}^{-1}$  multipliziert:

$$\mathbf{T}^{-1}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b}u(t).$$

Aus Gl. (5.25) folgt

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{T}^{-1}\dot{\mathbf{x}}(t)$$

und

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{x}}(t),$$

so dass die Zustandsgleichung in

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b}u(t)$$

überführt werden kann. Unter Verwendung der Abkürzungen

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} \quad (5.26)$$

$$\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b} \quad (5.27)$$

erhält man die transformierte Zustandsgleichung

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{b}}u(t), \quad \tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_0. \quad (5.28)$$

In gleicher Weise kann aus der Ausgabegleichung des Modells (5.24) die transformierte Gleichung

$$y(t) = \tilde{\mathbf{c}}^T\tilde{\mathbf{x}}(t) + du(t) \quad (5.29)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{c}}^T = \mathbf{c}^T\mathbf{T} \quad (5.30)$$

gewonnen werden. Der Skalar  $d$  bleibt unverändert. Zusammengefasst ist das System  $\Sigma$  durch das transformierte Zustandsraummodell

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{b}}u(t), & \tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_0 \\ y(t) = \tilde{\mathbf{c}}^T\tilde{\mathbf{x}}(t) + du(t) \end{cases} \quad (5.31)$$

beschrieben. Es wird hier derselbe Systemname  $\Sigma$  wie in Gl. (5.24) verwendet, da das Modell dasselbe System  $\Sigma$  repräsentiert und sich bei der Transformation nur die Modellform geändert hat.

Die Gleichungssysteme (5.24) und (5.31) sind äquivalent in dem Sinne, dass sie für beliebige Anfangszustände  $\mathbf{x}_0$  und beliebige Eingangsgrößen  $u(t)$  dieselben Ausgangssignale  $y(t)$  liefern. Man sagt auch, dass die zwei Systeme  $\Sigma$  und  $\tilde{\Sigma}$  *zustandsäquivalent* sind (symbolisiert durch  $\Sigma \sim \tilde{\Sigma}$ ) und kann zeigen, dass diese Eigenschaft genau dann erfüllt ist, wenn es eine Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  gibt, so dass zwischen ihren Modellparametern die Gln. (5.27) und (5.30) gelten. Dabei ist natürlich zu beachten, dass in (5.24) der Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  und in (5.28) der transformierte Anfangszustand

$$\tilde{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{x}_0 \quad (5.32)$$

einzusetzen ist.

**Aufgabe 5.7\*** Transformation des Zustandsraumes eines RC-Gliedes

Für das in Abb. 4.20 auf S. 104 gezeigte RC-Glied  $\Sigma_{\text{RC}}$  kann man mit den Zustandsvariablen  $x_1(t) = u_{C_1}(t)$  und  $x_2(t) = u_{C_2}(t)$  das folgende Modell aufstellen

$$\Sigma_{\text{RC}} : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & \frac{1}{R_1 C_1} \\ \frac{1}{R_1 C_2} & -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C_2} \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{R_2 C_2} \end{pmatrix} u(t) \\ \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} u_{C_1}(0) \\ u_{C_2}(0) \end{pmatrix} \\ y(t) = (1 \ 0) \mathbf{x}(t). \end{cases}$$

1. Transformieren Sie dieses Modell so, dass  $y(t)$  und  $\dot{y}(t)$  den neuen Zustandsvektor  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$  bilden.
2. Warum hat die transformierte Systemmatrix  $\tilde{\mathbf{A}}$  die Form (4.54)?  $\square$

### 5.3.2 Kanonische Normalform

**Transformation der Systemmatrix  $\mathbf{A}$  auf Diagonalform.** Die im Folgenden verwendete Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  beruht auf der Ähnlichkeitstransformation der Systemmatrix  $\mathbf{A}$ . Die  $(n, n)$ -Matrix  $\mathbf{A}$  hat bekanntlich  $n$  Eigenwerte  $\lambda_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), die sich als Lösung der Gleichung

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (5.33)$$

ergeben. Gleichung (5.33) heißt *charakteristische Gleichung* und das auf der linken Seite stehende Polynom *charakteristisches Polynom* des Systems bzw. charakteristisches Polynom der Matrix  $\mathbf{A}$ . Mit jedem Eigenwert  $\lambda_i$  ist die Eigenwertgleichung

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \quad (5.34)$$

für einen Vektor  $\mathbf{v}_i$  erfüllt, der Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_i$  heißt. Werden diese Eigenvektoren in einer Matrix angeordnet, so entsteht die  $(n, n)$ -Matrix

$$\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_n). \quad (5.35)$$

Diese Matrix ist regulär, wenn die  $n$  Eigenvektoren linear unabhängig sind. Im Folgenden wird angenommen, dass diese Bedingung erfüllt ist. Dies ist insbesondere dann gesichert, wenn die Eigenwerte  $\lambda_i$  paarweise verschieden sind. Dann gilt

$$\mathbf{AV} = (\mathbf{Av}_1 \ \mathbf{Av}_2 \ \dots \ \mathbf{Av}_n) = (\lambda_1 \mathbf{v}_1 \ \lambda_2 \mathbf{v}_2 \ \dots \ \lambda_n \mathbf{v}_n) = \mathbf{V} \operatorname{diag} \lambda_i,$$

wobei  $\text{diag } \lambda_i$  eine Abkürzung für die Diagonalmatrix

$$\text{diag } \lambda_i = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ist, in der alle nicht bezeichneten Elemente gleich null sind. Also gilt

$$\mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V} = \text{diag } \lambda_i. \quad (5.36)$$

Diese Gleichung beschreibt eine Ähnlichkeitstransformation der Matrix  $\mathbf{A}$ . Die Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V}$  haben dieselben Eigenwerte, nämlich  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

**Kanonische Normalform der Zustandsgleichung.** Verwendet man in der Zustandstransformation (5.25) die Matrix  $\mathbf{V}$  als Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{x}(t), \quad (5.37)$$

so erhält man für die transformierte Systemmatrix  $\tilde{\mathbf{A}}$  in Gl. (5.26) die Diagonalmatrix (5.36). Die transformierten Systemgleichungen (5.28) und (5.29) heißen dann

Zustandsraummodell in kanonischer Normalform:

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \text{diag } \lambda_i \tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{b}} u(t), & \tilde{\mathbf{x}}(0) = \tilde{\mathbf{x}}_0 \\ y(t) = \tilde{\mathbf{c}}^T \tilde{\mathbf{x}}(t) + d u(t) \end{cases} \quad (5.38)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{b} \quad (5.39)$$

$$\tilde{\mathbf{c}}^T = \mathbf{c}^T \mathbf{V} \quad (5.40)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{x}_0. \quad (5.41)$$

Das Blockschaltbild des transformierten Modells ist in Abb. 5.10 angegeben. Es unterscheidet sich vom Strukturbild in Abb. 4.7 des nicht transformierten Modells auf den ersten Blick nur in den Bezeichnungen der Signale und Blöcke. Betrachtet man jedoch die homogene Zustandsgleichung

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \text{diag } \lambda_i \tilde{\mathbf{x}}(t), \quad \tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{x}_0 = \tilde{\mathbf{x}}_0,$$

so wird die Wirkung der vorgenommenen Zustandstransformation deutlich. Die Vektor-differenzialgleichung kann in  $n$  unabhängige skalare Differentialgleichungen zerlegt werden:

$$\dot{\tilde{x}}_1(t) = \lambda_1 \tilde{x}_1(t), \quad \tilde{x}_1(0) = \tilde{x}_{01}$$

$$\dot{\tilde{x}}_2(t) = \lambda_2 \tilde{x}_2(t), \quad \tilde{x}_2(0) = \tilde{x}_{02}$$

⋮

$$\dot{\tilde{x}}_n(t) = \lambda_n \tilde{x}_n(t), \quad \tilde{x}_n(0) = \tilde{x}_{0n}.$$

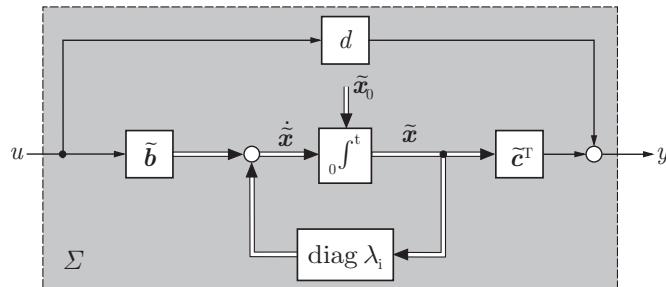


Abb. 5.10: Blockschaltbild des transformierten Modells

Die Zustandsvariablen werden deshalb als *kanonische Zustandsvariablen* bezeichnet. Kanonische Zustandsvariablen sind i. Allg. keine physikalisch interpretierbaren Größen, sondern reine Rechengrößen. Die folgenden Betrachtungen werden zeigen, dass sich unter Verwendung kanonischer Zustandsvariablen viele Analyseaufgaben vereinfachen lassen.

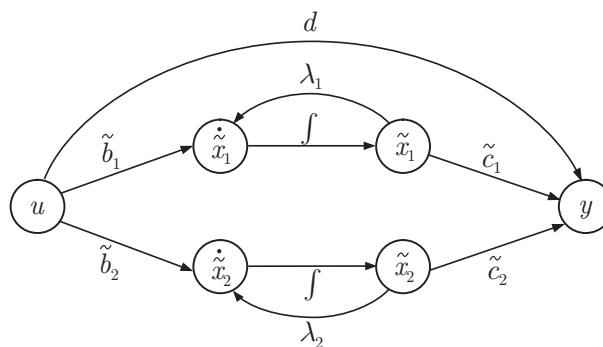


Abb. 5.11: Signalflussgraph eines Systems zweiter Ordnung mit kanonischen Zustandsvariablen

Wie die einzelnen Zustandsvariablen durch die Eingangsgröße angeregt werden und wie sie die Ausgangsgröße beeinflussen, wird durch die Vektoren  $\tilde{b}$  und  $\tilde{c}^T$  beschrieben. Das wird im Signalflussgraphen deutlich, der für ein System zweiter Ordnung in Abb. 5.11 gezeigt ist. Gegenüber Abb. 4.8 fehlen die Kopplungen zwischen den Zustandsvariablen.

Bei der Betrachtung der Zustandsgleichung in kanonischer Normalform sei daran erinnert, dass die Eigenwerte  $\lambda_i$  der Systemmatrix die Maßeinheit der Frequenz haben, also beispielsweise  $\frac{1}{s} = \text{Hz}$  oder  $\frac{1}{\text{min}}$  (je nach gewählter Maßeinheit für die Zeit).

**Beispiel 5.2** Zustandsraummodell eines Gleichstrommotors

Für den in Abb. 5.12 dargestellten Gleichstrommotor können folgende Gleichungen angegeben werden:

$$u_A(t) = R_A i_A(t) + L_A \frac{di_A(t)}{dt} + u_M(t) \quad (5.42)$$

$$u_M(t) = k_M \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (5.43)$$

$$M(t) = k_T i_A(t) \quad (5.44)$$

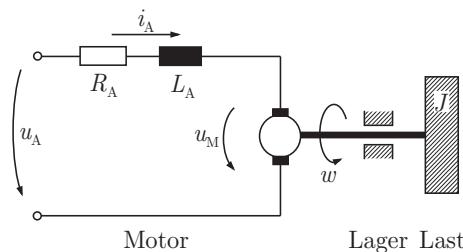
$$M(t) = J \frac{d^2\phi(t)}{dt^2} + k_L \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (5.45)$$

$$n(t) = \frac{\omega(t)}{2\pi} \quad (5.46)$$

$$\omega(t) = \frac{d\phi(t)}{dt}. \quad (5.47)$$

Dabei bezeichnet  $u_A(t)$  die Ankerspannung,  $i_A(t)$  den Ankerstrom,  $M(t)$  das durch den Motor erzeugte Drehmoment,  $u_M(t)$  die im Motor induzierte Spannung,  $\phi(t)$  den Drehwinkel,  $\omega(t)$  die Drehfrequenz (gemessen in  $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ) und  $n(t)$  die Drehzahl (gemessen in  $\frac{1}{\text{s}}$ ). Die erste Beziehung stellt die Maschengleichung mit  $R_A$  und  $L_A$  als Widerstand bzw. Induktivität des Ankerkreises dar. Die zweite Gleichung entsteht aus der Anwendung des Induktionsgesetzes und beschreibt die in der Motorwicklung induzierte Gegenspannung, wobei  $k_M$  einen Proportionalitätsfaktor darstellt, der vom Aufbau des Motors abhängig ist. Die nächsten beiden Gleichungen besagen, dass das vom Motor erzeugte Drehmoment proportional zum Ankerstrom ist und dass sich dieses Drehmoment in einer Erhöhung der Drehgeschwindigkeit niederschlägt und dabei die geschwindigkeitsproportionale Reibung überwindet, wobei die Koeffizienten  $k_T$  und  $k_L$  vom Aufbau des Motors und der Lagerung der Welle abhängig sind und  $J$  das Trägheitsmoment des Ankers und der Last beschreibt. Die letzten beiden Gleichungen dienen zur Berechnung der Winkelgeschwindigkeit und der Drehzahl.

Die Parameter  $k_M$ ,  $k_T$  und  $k_L$  wurden in den Gleichungen als Proportionalitätsfaktoren eingeführt. Eine genauere Analyse zeigt, dass stets  $k_T = k_M$  gilt. Die unten angegebenen Motorparameter betreffen einen für große Leistung ausgelegten Gleichstrommotor.



**Abb. 5.12:** Gleichstrommotor

Der Motor wird bezüglich der Eingangsgröße  $u(t) = u_A(t)$  und der Ausgangsgröße  $y(t) = n(t)$  betrachtet. Verwendet man den Ankerstrom  $i_A(t)$  und die Winkelgeschwindigkeit  $\omega(t)$  als Zustandsvariablen

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} i_A(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix},$$

so erhält man aus den Gln. (5.42) – (5.47) das Zustandsraummodell

$$\text{Motor : } \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{R_A}{L_A} & -\frac{k_M}{L_A} \\ \frac{k_T}{J} & -\frac{k_L}{J} \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} \frac{1}{L_A} \\ 0 \end{pmatrix} u(t), & \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} i_A(0) \\ \dot{\phi}(0) \end{pmatrix} \\ y(t) = (0 \quad \frac{1}{2\pi}) \boldsymbol{x}(t). \end{cases}$$

Für die Motorparameter

$$\begin{aligned} R_A &= 9 \Omega, & L_A &= 110 \text{ mH} \\ J &= 0,1 \frac{\text{Nm}^2}{\text{rad}}, & k_T &= 3 \frac{\text{Nm}}{\text{A}} \\ k_M &= 3 \frac{\text{Vs}}{\text{rad}}, & k_L &= 0,1 \frac{\text{Nm}}{\text{rad}} \end{aligned} \quad (5.48)$$

erhält man bei Messung aller Signale in den Standardmaßeinheiten die Modellgleichungen

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} -81,82 & -27,27 \\ 30 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} 9,09 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} i_A(0) \\ \dot{\phi}(0) \end{pmatrix} \quad (5.49)$$

$$y(t) = (0 \quad 0,159) \boldsymbol{x}(t). \quad (5.50)$$

Zur Transformation in die kanonische Normalform berechnet man zunächst die beiden Eigenwerte

$$\lambda_1 = -69,95 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -12,87$$

sowie die zugehörigen Eigenvektoren

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -0,917 \\ 0,399 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0,368 \\ -0,930 \end{pmatrix},$$

aus denen man die Transformationsmatrix und deren Inverse

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} -0,917 & 0,368 \\ 0,399 & -0,930 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}^{-1} = \begin{pmatrix} -1,317 & -0,521 \\ -0,565 & -1,299 \end{pmatrix}$$

erhält. Entsprechend Gl. (5.37) steht in der kanonischen Normalform des Zustandsraummodells der Zustandsvektor

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} -1,317 & -0,521 \\ -0,565 & -1,299 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t),$$

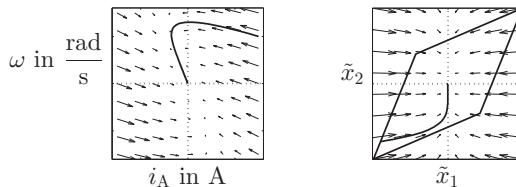
deren Elemente

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1(t) &= (-1,317 \quad -0,521) \boldsymbol{x}(t) \\ \tilde{x}_2(t) &= (-0,565 \quad -1,299) \boldsymbol{x}(t) \end{aligned}$$

Linearkombinationen des Ankerstromes  $i_A(t)$  und der Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\phi}(t) = \omega(t)$  sind. Diese Zustandsvariablen sind physikalisch nicht interpretierbar. Das Zustandsraummodell in kanonischer Normalform heißt

$$\text{Motor : } \begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \begin{pmatrix} -69,95 & 0 \\ 0 & -12,87 \end{pmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{pmatrix} -11,98 \\ -5,14 \end{pmatrix} u(t) \\ \tilde{x}(0) = \begin{pmatrix} -1,317 i_A(0) - 0,521 \dot{\phi}(0) \\ -0,565 i_A(0) - 1,299 \dot{\phi}(0) \end{pmatrix} \\ y(t) = (0,064 \quad -0,148) \tilde{x}(t). \end{cases} \quad (5.51)$$

In der Systemmatrix dieses Modells stehen die beiden Eigenwerte des Gleichstrommotors.



**Abb. 5.13:** Vektorfeld des Gleichstrommotors (links im  $i_A/\omega$ -Koordinatensystem; rechts im transformierten Zustandsraum  $\tilde{x}_1/\tilde{x}_2$ )

Da die kanonische Normalform neue Zustandsvariablen verwendet, ändert sich auch das Vektorfeld des Gleichstrommotors. Abbildung 5.13 zeigt links das mit der Zustandsgleichung (5.49) gezeichnete Vektorfeld und rechts das Vektorfeld für das Modell in kanonischer Normalform, wobei in beiden Fällen  $u = 0$  gesetzt wurde. Beide Abbildungen zeigen außerdem dieselbe Eigenbewegung, die durch  $i_A(0) = 2$  und  $\dot{\phi}(0) = 2,5$  ausgelöst wird. Im rechten Bild ist derjenige Bereich des transformierten Zustandsraumes umrandet, der dem im linken Bild gezeigten Bereich des  $i_A/\omega$ -Raumes entspricht.

Charakteristisch für das Vektorfeld des transformierten Zustandsraummodells ist die Tatsache, dass die Pfeile die Koordinatenachsen nicht kreuzen. Da der Gleichstrommotor zwei reelle Eigenwerte hat, zerfällt die Zustandsgleichung in zwei reelle, voneinander unabhängige Gleichungen für die Variablen  $\tilde{x}_i$ , ( $i = 1, 2$ ), für die beide  $\lambda_i \tilde{x}_i = 0$  für  $\tilde{x}_i = 0$  gilt, so dass keine Bewegung über die Koordinatenachsen auftreten kann. Eine derartige Bewegung ist für das Zustandsraummodell in allgemeiner Form möglich, wie der linke Teil der Abbildung illustriert.  $\square$

Die Umformung in die kanonische Normalform ist nicht eindeutig, denn mit  $v_i$  ist auch der  $a$ -fache Vektor  $av_i$  ein Eigenvektor von  $A$ . Alle Modelle führen jedoch auf dieselben Produkte  $\tilde{b}_i \tilde{c}_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) der Elemente von  $\tilde{b}$  und  $\tilde{c}$ .

**Behandlung konjugiert komplexer Eigenwerte.** Treten konjugiert komplexe Eigenwerte auf, so führt das Modell (5.38) auf die Schwierigkeit, dass mit komplexwertigen Parametern und Zustandsvariablen gerechnet werden muss, obwohl die Eingangs- und Ausgangsgrößen natürlich reelle Werte haben. Die komplexen Zahlen kommen in das Modell hinein, weil neben den Eigenwerten auch die Eigenvektoren komplexwertig sind.

Eine Abhilfe schafft die folgende Vorgehensweise. An Stelle der konjugiert komplexen Eigenvektoren  $v_i$  und  $v_{i+1}$  der konjugiert komplexen Eigenwerte  $\lambda_{i,i+1} =$

$\delta \pm j\omega$  verwendet man den Realteil und den Imaginärteil von  $v_i$  als  $i$ - und  $(i+1)$ -te Spalte in der Matrix  $V$ . Die neue Transformationsmatrix  $\hat{V}$  erfüllt dann natürlich die Gl. (5.36) nicht mehr, d. h., die Systemmatrix des transformierten Modells ist keine Diagonalmatrix mehr. Stattdessen ist  $\tilde{A}$  eine reelle Matrix, in deren  $i$ - und  $(i+1)$ -ter Zeile und Spalte der Block

$$\begin{pmatrix} \delta & \omega \\ -\omega & \delta \end{pmatrix}$$

steht. Hat beispielsweise  $A$  die beiden reellen Eigenwerte  $\lambda_1$  und  $\lambda_4$  und die konjugiert komplexen Eigenwerte  $\lambda_{2,3} = \delta \pm j\omega$ , so heißt die transformierte Matrix

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & \omega & 0 \\ 0 & -\omega & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}.$$

Das transformierte Modell

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A} \tilde{x}(t) + \hat{V}^{-1} b u(t), & \tilde{x}(0) = \hat{V}^{-1} x_0 \\ y(t) = c^T \hat{V} \tilde{x}(t) + d u(t) \end{cases} \quad (5.52)$$

kann dann zwar nicht mehr in vollkommen unabhängige Differentialgleichungen erster Ordnung zerlegt werden. Kopplungen treten jedoch nur zwischen jeweils zwei Zustandsvariablen  $\tilde{x}_i(t)$  und  $\tilde{x}_{i+1}(t)$  auf, die zu konjugiert komplexen Eigenwertpaaren gehören. Für numerische Rechnungen macht sich der damit verbundene Vorteil bezahlt, dass alle Parameter und Signale reell sind.

### Beispiel 5.3 Kanonische Normalform des Zustandsraummodells eines Schwingkreises

Das auf S. 72 angegebene Zustandsraummodell  $\Sigma_{RSK}$  eines Schwingkreises wird für

$$R = 10 \Omega, \quad L = 100 \text{ mH} \quad \text{und} \quad C = 9,975 \mu\text{F}$$

betrachtet, wofür man das Modell

$$\Sigma_{RSK} : \begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -0,01 \\ 100,25 & -0,1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0,01 \\ 0,1 \end{pmatrix} u(t), & x(0) = \begin{pmatrix} i_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} \\ y(t) = (0 \ 1) x(t) \end{cases}$$

erhält, wobei die Zeit in Millisekunden gemessen wird. Der Schwingkreis hat die Eigenwerte

$$\lambda_{1/2} = -0,05 \pm j$$

und die Eigenvektoren

$$v_{1/2} = \begin{pmatrix} -0,01 \\ 0 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0,0005 \\ 1 \end{pmatrix} j.$$

Transformiert man das Modell unter Verwendung der Matrix

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} -0,01 + j0,0005 & -0,01 - j0,0005 \\ j & -j \end{pmatrix}$$

in die kanonische Normalform, so erhält man

$$\Sigma_{\text{RSK}} : \begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \begin{pmatrix} -0,05 + j & 0 \\ 0 & -0,05 - j \end{pmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{pmatrix} -0,4988 - j0,05 \\ -0,4988 + j0,05 \end{pmatrix} u(t) \\ \tilde{x}(0) = \begin{pmatrix} -50,13 i_1(0) + (0,025 - j0,5) u_2(0) \\ -50,13 i_1(0) + (0,025 + j0,5) u_2(0) \end{pmatrix} \\ y(t) = (j \quad -j) \tilde{x}(t), \end{cases}$$

also ein Modell, in dem viele Parameter und sogar der Anfangszustand komplex sind. Ungeachtet dessen können alle beschriebenen Analysemethoden angewendet werden. Die Schwierigkeit besteht darin, dass mit komplexen Zahlen gerechnet werden muss, obwohl für eine beliebige reelle Eingangsgröße  $u$  und beliebige reelle Anfangsbedingungen  $i_1(0)$  und  $u_2(0)$  natürlich eine reelle Ausgangsgröße  $y$  entsteht.

Verwendet man den Realteil und den Imaginärteil der angegebenen Eigenvektoren als Spalten der Transformationsmatrix

$$\hat{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} -0,01 & 0,0005 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

so erhält man das Modell

$$\Sigma_{\text{RSK}} : \begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \begin{pmatrix} -0,05 & 1 \\ -1 & -0,05 \end{pmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{pmatrix} -0,9975 \\ -0,1 \end{pmatrix} u(t), \\ \tilde{x}(0) = \begin{pmatrix} -100,225 i_1(0) + 0,05 u_2(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} \\ y(t) = (0 \quad 1) \tilde{x}(t). \end{cases}$$

Dieses Modell hat nicht die kanonische Normalform, aber in ihm treten nur reelle Parameter auf.

**Diskussion.** Das Beispiel zeigt, wie die beschriebene Transformation bei einem konjugiert komplexen Eigenwertpaar aussieht. Da das betrachtete System nur die Ordnung zwei besitzt, bringt diese Transformation für die Analyse keine wesentlichen Vorteile. Wie für das ursprünglich gegebene Modell muss die Bewegungsgleichung für beide Zustandsvariablen gemeinsam gelöst und dabei die Matrixexponentialfunktion für die Matrix  $\tilde{\mathbf{A}}$  zweiter Ordnung bestimmt werden.

Für die Analyse ergeben sich Vorteile, sobald die Systemordnung größer als zwei ist. Man schreibt in die Transformationsmatrix  $\hat{\mathbf{V}}$  alle reellen Eigenvektoren, die zu reellen Eigenwerten gehören sowie den Realteil und den Imaginärteil von Eigenvektoren, die zu konjugiert komplex auftretenden Eigenwerten gehören. Mit dieser Matrix erhält man ein transformiertes Gleichungssystem, bei dem die Systemmatrix in der Hauptdiagonalen die reellen Eigenwerte sowie für die konjugiert komplexen Eigenwerte reelle (2, 2)-Blöcke enthält. Damit zerfällt die Zustandsgleichung in einzelne Gleichungen mit reellen Eigenwerten sowie in Gleichungspaares für die konjugiert komplexen Eigenwerte.  $\square$

### 5.3.3 Erweiterung der kanonischen Normalform für nichtdiagonalähnliche Systemmatrizen

Bisher wurde angenommen, dass die Eigenwerte der Matrix  $A$  paarweise voneinander verschieden sind. Unter dieser Voraussetzung ist  $A$  diagonalähnlich und kann folglich in die Diagonalmatrix  $\text{diag } \lambda_i$  transformiert werden. Treten Eigenwerte mehrfach auf, so kann  $A$  nur unter sehr einschränkenden Bedingungen auf Diagonalf orm gebracht werden. Dieser Fall soll nachfolgend untersucht werden.

Es wird zunächst angenommen, dass der Eigenwert  $\lambda_1$  die algebraische Vielfachheit  $l_1 > 1$  besitzt und alle anderen Eigenwerte paarweise verschieden sind. Das heißt,  $\lambda_1$  ist eine  $l_1$ -fache Lösung der charakteristischen Gl. (5.33). Es sind nun die beiden Fälle zu unterscheiden, bei denen es  $l_1$  bzw. weniger als  $l_1$  linear unabhängige Vektoren  $v_1^j$  gibt, die die Eigenwertgleichung

$$A\mathbf{v}_1^j = \lambda_1 \mathbf{v}_1^j \quad (5.53)$$

erfüllen.

Im ersten Fall gilt

$$\text{Rang}(A - \lambda_1 I) = n - l_1.$$

Da die Anzahl der linear unabhängigen Eigenvektoren mit der Vielfachheit des Eigenwertes übereinstimmt, ist die entsprechend Gl. (5.35) gebildete Matrix

$$\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1^1, \mathbf{v}_1^2, \dots, \mathbf{v}_1^{l_1}, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n-l_1})$$

regulär und die Transformation (5.36) führt wieder auf eine Diagonalmatrix  $\text{diag } \lambda_i$ , deren erste  $l_1$  Diagonalelemente gleich dem Eigenwert  $\lambda_1$  sind:

$$V^{-1}AV = \left( \begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & & \\ \ddots & & & \\ & \lambda_1 & & \\ \hline - & - & - & + \\ & | & & | \\ & \lambda_2 & & \lambda_3 \\ & | & & | \\ & & \ddots & \\ & | & & | \\ & & & \lambda_{n-l_1} \end{array} \right) \quad \left. \right\} l_1 \text{ Zeilen} \quad (5.54)$$

Die Matrix  $A$  ist also weiterhin diagonalähnlich, wenn zu Eigenwerten  $\lambda_i$  der Vielfachheit  $l_i$  auch  $l_i$  linear unabhängige Eigenvektoren existieren.

**Beispiel 5.4** Diagonalähnliche Matrix  $A$  mit mehrfachem Eigenwert

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

hat die charakteristische Gleichung

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = -(\lambda + 2)^2(\lambda + 1) = -\lambda^3 - 5\lambda^2 - 8\lambda - 4 = 0$$

mit den Lösungen

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -1,$$

wobei  $\lambda_1$  zweifach und  $\lambda_2$  einfach ist. Für den zweifachen Eigenwert erhält man entsprechend Gl. (5.53) aus

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{v}_1^j = -2\mathbf{v}_1^j$$

z. B. die beiden linear unabhängigen Eigenvektoren

$$\mathbf{v}_1^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_1^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zusammen mit dem Eigenvektor

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

für den Eigenwert  $\lambda_2$  ergibt sich die Matrix

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Transformation (5.54) führt auf

$$\mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V} = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & -2 & \\ & & -1 \end{pmatrix}. \square$$

Im zweiten Fall gibt es für einen  $l_1$ -fachen Eigenwert weniger als  $l_1$  linear unabhängige Eigenvektoren. Dann kann  $\mathbf{A}$  nicht auf Diagonalf orm gebracht werden. Der Einfachheit halber wird im Folgenden angenommen, dass zum  $l_1$ -fachen Eigenwert  $\lambda_1$  aus Gl. (5.53) nur ein einziger linear unabhängiger Eigenvektor  $\mathbf{v}_1^1$  gefunden werden kann. Dann müssen aus  $\mathbf{v}_1^1$  durch die Beziehungen

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) \mathbf{v}_1^2 = \mathbf{v}_1^1 \tag{5.55}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) \mathbf{v}_1^3 = \mathbf{v}_1^2$$

⋮

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) \mathbf{v}_1^{l_1} = \mathbf{v}_1^{l_1-1}$$

weitere Vektoren  $\mathbf{v}_1^2, \dots, \mathbf{v}_1^{l_1}$  gebildet werden, die verallgemeinerte Eigenvektoren oder Hauptvektoren von  $\mathbf{A}$  heißen. Bildet man mit diesen Vektoren sowie den zu  $\lambda_2, \dots, \lambda_{n-l_1}$  gehörenden Eigenvektoren  $\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n-l_1}$  die Matrix  $\mathbf{V}$ , so erhält man bei der Ähnlichkeitstransformation die neue Matrix

$$V^{-1}AV = \left( \begin{array}{cccc|c} \lambda_1 & 1 & \dots & 0 & \\ 0 & \lambda_1 & \dots & 0 & \\ \vdots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_1 & \\ \hline & & & \lambda_2 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_{n-l_1} \end{array} \right) \quad \left. \right\} l_1 \text{ Zeilen} \quad (5.56)$$

Die rechte Seite heißt *Jordannormalform* von  $A$ .

### Beispiel 5.5 Jordannormalform der Matrix $A$

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

hat dieselbe charakteristische Gleichung wie die Matrix  $A$  im Beispiel 5.4 und folglich den zweifachen Eigenwert  $\lambda_1 = -2$  und den einfachen Eigenwert  $\lambda_2 = -1$ . Die Eigenwertgleichung (5.53) liefert jedoch nur den Eigenvektor

$$\mathbf{v}_1^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

so dass der zweite Vektor aus Gl. (5.55) gebildet werden muss:

$$(A + 2I) \mathbf{v}_1^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Man erhält daraus den Vektor

$$\mathbf{v}_1^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

der zwar mit einem Eigenvektor aus Beispiel 5.4 übereinstimmt, für die hier verwendete Matrix  $A$  aber nur ein verallgemeinerter Eigenvektor ist. Der Eigenvektor zu  $\lambda_2$  ist

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Deshalb ergibt die Ähnlichkeitstransformation mit

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Jordannormalform der Matrix  $A$ :

$$V^{-1}AV = \begin{pmatrix} -2 & 1 & | & \\ 0 & -2 & | & \\ \hline \hline & & + & \hline & & | & -1 \end{pmatrix}. \square$$

Im Allgemeinen kann es zu einem  $l_i$ -fachen Eigenwert  $\lambda_i$   $r_i$  Eigenvektoren geben, wobei  $1 \leq r_i \leq l_i$  gilt. Dann müssen  $l_i - r_i$  Hauptvektoren gebildet werden. Zum Eigenwert  $\lambda_i$  gehört in der Jordannormalform dann ein Jordanblock  $J_i$ , der eine Blockdiagonalmatrix  $J_i = \text{diag } J_{ik}$  mit den Diagonalblöcken  $J_{ik}$  darstellt.  $J_{ik}$  ist eine Teilmatrix der Dimension  $r_{ik}$ , die dieselbe Struktur wie der obere linke Block in Gl. (5.56) hat. Da derartige Matrizen für Regelungstechnische Anwendungen äußerst selten sind, soll hier lediglich ein Beispiel die allgemeine Jordannormalform veranschaulichen:

$$J = \left( \begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & 1 & 0 & | \\ 0 & \lambda_1 & 1 & | \\ 0 & 0 & \lambda_1 & | \\ \hline \hline & & & + & & + \\ & & & | & \lambda_2 & 0 \\ & & & | & 0 & \lambda_2 \\ & & & + & & + & - & - \\ & & & | & \lambda_3 & & | \\ & & & | & \underbrace{J_{31}}_{\lambda_3} & & \\ & & & | & - & + & - & - \\ & & & | & & | & \lambda_3 & 1 \\ & & & | & & | & 0 & \underbrace{\lambda_3}_{J_{32}} \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} l_1 = 3, \quad r_1 = 1 \\ \hline \hline \\ l_2 = 2, \quad r_2 = 2 \\ \hline \hline \\ l_3 = 3, \quad r_3 = 2 \end{array} \quad (5.57)$$

### 5.3.4 Bewegungsgleichung in kanonischer Darstellung

Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass die Systemmatrix  $A$  diagonalähnlich ist und entsprechend Gl. (5.36) auf Diagonalform gebracht wurde. Die Bewegungsgleichung kann aus der kanonischen Zustandsgleichung (5.38) in genau derselben Weise abgeleitet werden, wie Gl. (5.11) aus der Zustandsgleichung (5.24) hergeleitet wurde. Es müssen also nur die „Schlangen“ auf die transformierten Größen gesetzt werden. Dabei entsteht die Beziehung

$$\tilde{x}(t) = e^{\text{diag } \lambda_i t} \tilde{x}_0 + \int_0^t e^{\text{diag } \lambda_i(t-\tau)} \tilde{b} u(\tau) d\tau. \quad (5.58)$$

Gleichung (5.58) wird als *Bewegungsgleichung in kanonischer Darstellung* bezeichnet. Diese Gleichung setzt sich wie Gl. (5.11) aus zwei Summanden zusammen,

von denen der erste die Eigenbewegung  $\tilde{x}_{\text{frei}}(t)$  des Systems und der zweite die erzwungene Bewegung  $\tilde{x}_{\text{erzw}}(t)$  beschreibt.

**Freie Bewegung.** Obwohl sich die Gl. (5.58) äußerlich nicht wesentlich von (5.11) unterscheidet, lässt sie sich aufgrund der Unabhängigkeit der kanonischen Zustandsvariablen wesentlich vereinfachen. Für  $e^{\text{diag } \lambda_i t}$  gilt, wie man aus der Definition (5.10) der Matrixexponentielfunktion leicht ermitteln kann, die folgende Beziehung<sup>2</sup>:

$$e^{\text{diag } \lambda_i t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = \text{diag } e^{\lambda_i t}. \quad (5.59)$$

Für die freie Bewegung des Systems erhält man damit die Beziehung

$$\tilde{x}_i = e^{\lambda_i t} \tilde{x}_i(0),$$

d. h., die Eigenbewegungen der kanonischen Zustandsvariablen hängen nur von der Anfangsbedingung der jeweiligen Zustandsvariablen ab und können unabhängig voneinander berechnet werden:

$$\tilde{x}_{\text{frei}}(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \tilde{x}_1(0) \\ e^{\lambda_2 t} \tilde{x}_2(0) \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \tilde{x}_n(0) \end{pmatrix}. \quad (5.60)$$

Werden die kanonischen Zustandsvariablen in den ursprünglichen Zustand zurücktransformiert, so ergibt sich für die freie Bewegung die Beziehung

$$x_{\text{frei}}(t) = \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} \tilde{x}_1(0) + \dots + \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t} \tilde{x}_n(0) = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i e^{\lambda_i t} \tilde{x}_i(0). \quad (5.61)$$

Das heißt, die freie Bewegung setzt sich aus Funktionen der Form  $\mathbf{v}_i e^{\lambda_i t} \tilde{x}_i(0)$  zusammen, bei denen die e-Funktion den zeitlichen Verlauf der Bewegung und der Skalar  $\tilde{x}_i(0)$  die Amplitude des  $i$ -ten Summanden bestimmt. Zu beachten ist, dass es sich bei  $\tilde{x}_i(0)$  um die  $i$ -te Komponente des transformierten Anfangszustands handelt. Die Funktionen  $e^{\lambda_i t}$  werden *Modi* oder *Eigenvorgänge* des Systems genannt. Wie stark diese Funktionen in die einzelnen Komponenten des originalen Zustandsvektors  $x$  eingehen, wird durch die Vektoren  $\mathbf{v}_i$  bestimmt.

Für die freie Bewegung des Systemausgangs gilt

---

<sup>2</sup> Diese sehr einfache Darstellung der Übergangsmatrix als Diagonalmatrix mit e-Funktionen gilt nur, wenn  $A$  eine Diagonalmatrix  $\text{diag } \lambda_i$  ist!

Eigenbewegung in kanonischer Darstellung:

$$y_{\text{frei}}(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} \tilde{x}_1(0) + \dots + \mathbf{c}^T \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t} \tilde{x}_n(0) = \sum_{i=1}^n \mathbf{c}^T \mathbf{v}_i e^{\lambda_i t} \tilde{x}_i(0). \quad (5.62)$$

Die kanonische Normalform zeigt, dass sich die freie Bewegung  $\mathbf{x}_{\text{frei}}(t)$ ,  $y_{\text{frei}}(t)$  linearer Systeme aus  $n$  e-Funktionen zusammensetzt.

Aus Gl. (5.61) bzw. (5.62) wird offensichtlich, dass alle Eigenvorgänge und deshalb auch die Eigenbewegungen  $\mathbf{x}_{\text{frei}}(t)$  und  $y_{\text{frei}}(t)$  genau dann für  $t \rightarrow \infty$  abklingen, wenn die Stabilitätsbedingung (5.13)

$$\operatorname{Re}\{\lambda_i\} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

erfüllt ist.

**Erzwungene Bewegung.** Die erzwungenen Bewegungen der kanonischen Zustandsvariablen  $\tilde{x}_i$  können ebenfalls unabhängig voneinander berechnet werden, denn der zweite Summand in Gl. (5.58) kann in unabhängige Anteile zerlegt werden. Ist das System zur Zeit  $t = 0$  in der Ruhelage, so gilt für die  $i$ -te Zustandsvariable

$$\tilde{x}_i(t) = \int_0^t e^{\lambda_i(t-\tau)} \tilde{b}_i u(\tau) d\tau,$$

wobei  $\tilde{b}_i$  die  $i$ -te Komponente des Vektors  $\tilde{\mathbf{b}}$  ist. Die erzwungene Bewegung berechnet sich also aus

$$\tilde{\mathbf{x}}_{\text{erzw}}(t) = \begin{pmatrix} \int_0^t e^{\lambda_1(t-\tau)} \tilde{b}_1 u(\tau) d\tau \\ \vdots \\ \int_0^t e^{\lambda_n(t-\tau)} \tilde{b}_n u(\tau) d\tau \end{pmatrix}. \quad (5.63)$$

**Erweiterung für nicht diagonalähnliche Systemmatrizen.** Wenn die Matrix  $\mathbf{A}$  nicht diagonalähnlich ist, kann die Übergangsmatrix  $\tilde{\Phi}$  nicht in die einfache Form (5.59) gebracht werden, sondern in ihr stehen Terme der Form  $t^k e^{\lambda_i t}$ , die dann auch sowohl in der freien Bewegung  $\tilde{\mathbf{x}}_{\text{frei}}$  als auch in der erzwungenen Bewegung  $\tilde{\mathbf{x}}_{\text{erzw}}$  auftauchen. Da eine allgemeine Darstellung dieses Sachverhaltes auf sehr unübersichtliche Formeln führt, hier aber nur das prinzipielle Verständnis einer derartigen Erweiterung der Bewegungsgleichung vermittelt werden soll, wird die Erweiterung am Beispiel der in Gl. (5.57) angegebenen Matrix veranschaulicht, wobei

nur die zum oberen linken Block gehörigen Zustandsvariablen betrachtet werden. Für diesen Modellteil gilt

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}}_1(t) \\ \dot{\tilde{x}}_2(t) \\ \dot{\tilde{x}}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \\ \tilde{x}_3(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(0) \\ \tilde{x}_2(0) \\ \tilde{x}_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_{10} \\ \tilde{x}_{20} \\ \tilde{x}_{30} \end{pmatrix}.$$

Für die zugehörige Eigenbewegung erhält man

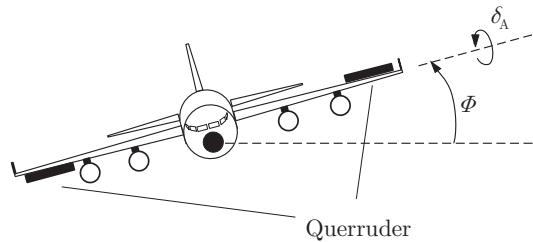
$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \\ \tilde{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_{10} e^{\lambda_1 t} + \tilde{x}_{20} t e^{\lambda_1 t} + \frac{\tilde{x}_{30}}{2} t^2 e^{\lambda_1 t} \\ \tilde{x}_{20} e^{\lambda_1 t} + \tilde{x}_{30} t e^{\lambda_1 t} \\ \tilde{x}_{30} e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix}.$$

Wie erwartet treten darin die Zeitfunktionen  $e^{\lambda_1 t}$ ,  $t e^{\lambda_1 t}$  und  $t^2 e^{\lambda_1 t}$  auf.

Diese Analyse zeigt auch, dass immer dann, wenn der Eigenvorgang  $t^l e^{\lambda t}$  durch den Anfangszustand angeregt wird, auch die Eigenvorgänge  $t^{l-i} e^{\lambda t}$ , ( $i = 1, 2, \dots, l$ ) mit kleineren Potenzen von  $t$  angeregt werden.

### Beispiel 5.6 Zustandsraummodell für die Rollbewegung eines Flugzeugs

Das Flugzeug als Regelstrecke ist ein Beispiel für ein System, das keine diagonalähnliche Systemmatrix besitzt. Der Grund liegt in der Tatsache, dass durch Stelleingriffe wie z. B. die Verstellung der Querruder Momente auf das Flugzeug wirken, aus denen der Rollwinkel als Regelgröße durch zweimalige Integration entsteht.



**Abb. 5.14:** Flugzeug als Regelstrecke

Diese Tatsache soll etwas genauer untersucht werden. Unter Rollen versteht man die Drehbewegung des Flugzeugs um seine Längsachse ( $x$ -Achse). Der Rollwinkel  $\Phi(t)$  ist der Winkel zwischen den Flügeln und dem Horizont. Beim Geradeausflug soll  $\Phi = 0$  gelten; um eine Kurve fliegen zu können, wird das Flugzeug um einen bestimmten Winkel  $\phi_{\text{Soll}}$  gerollt. Stellgröße ist der Winkel  $\delta_A(t)$  der Querruder.

Stellt man das Momentengleichgewicht in Bezug zur Längsachse des Flugzeugs auf, so erhält man in der Notation der Flugmechanik die Gleichung

$$L(t) = I_{xx} \dot{\Phi}(t),$$

in der  $I_{xx}$  das Trägheitsmoment bezüglich der  $x$ -Achse,  $P$  die Rollwinkelgeschwindigkeit und  $L$  das auf das Flugzeug wirkende Moment in der in Abb. 5.14 liegenden  $yz$ -Ebene

darstellt. Für kleine Rollgeschwindigkeiten können die durch den Luftwiderstand auf die Flügelflächen wirkenden Kräfte vernachlässigt werden. Für den Rollwinkel  $x = \Phi$  gilt also

$$P(t) = \dot{x}(t).$$

Das Drehmoment wird durch den Ausschlag  $u(t) = \delta_A(t)$  der Querruder erzeugt, wobei für kleine Ausschläge die Beziehung

$$L(t) = ku(t)$$

mit  $k$  als flugzeugspezifischem Proportionalitätsfaktor gilt. Fasst man diese Gleichungen zusammen, so erhält man das Zustandsraummodell

$$\text{Flugzeug : } \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{P}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ P(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k}{I_{xx}} \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = (1 \ 0) \begin{pmatrix} x(t) \\ P(t) \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (5.64)$$

In der Zustandsgleichung steht die Systemmatrix bereits in Jordannormalform. Das Modell hat offensichtlich die Form

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}}_1(t) \\ \dot{\tilde{x}}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{b}_2 \end{pmatrix} u(t), \quad \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(0) \\ \tilde{x}_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_{10} \\ \tilde{x}_{20} \end{pmatrix}$$

$$y(t) = (1 \ 0) \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{pmatrix}.$$

Untersucht man zunächst die Eigenbewegung, so erhält man die beiden Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1(t) &= \tilde{x}_2(t), & \tilde{x}_1(0) &= \tilde{x}_{10} \\ \dot{\tilde{x}}_2(t) &= 0, & \tilde{x}_2(0) &= \tilde{x}_{20} \end{aligned}$$

und daraus die Eigenbewegungen

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{\text{frei } 1}(t) &= e^{0t} \tilde{x}_{10} + t \tilde{x}_{20} = \tilde{x}_{10} + t \tilde{x}_{20} \\ \tilde{x}_{\text{frei } 2}(t) &= e^{0t} \tilde{x}_{20} = \tilde{x}_{20}, \end{aligned}$$

wobei man zweckmäßigerweise die zweite Gleichung zuerst löst. Im Unterschied zur Gl. (5.60) können die Eigenbewegungen der einzelnen Zustandsvariablen nicht mehr unabhängig voneinander berechnet werden. Die Bewegungen setzen sich nicht nur aus e-Funktionen, sondern aus Termen der Form  $t^k e^{\lambda_i t}$  zusammen, wobei in dem hier behandelten Beispiel  $k = 0, 1$  und  $\lambda_{1,2} = 0$  ist. Diese Terme treten auch in der Ausgangsgröße auf, die sich für dieses Beispiel aus

$$y_{\text{frei}}(t) = \tilde{x}_{10} + t \tilde{x}_{20}$$

ergibt.

Für die erzwungene Bewegung erhält man eine ähnliche Verkopplung der Bewegungsgleichungen der Zustandsvariablen:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1(t) &= \int_0^t e^{0(t-\tau)} \tilde{x}_2(\tau) d\tau = \tilde{b}_2 \int_0^t \int_0^{\tau_2} u(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \\ \tilde{x}_2(t) &= \int_0^t e^{0(t-\tau)} \tilde{b}_2 u(\tau) d\tau = \tilde{b}_2 \int_0^t u(\tau) d\tau.\end{aligned}$$

**Diskussion.** Dieses Beispiel zeigt, dass in technisch relevanten Anwendungen nichtdiagonalähnliche Systemmatrizen auftreten können. Es soll jedoch nicht unerwähnt bleiben, dass die Systemmatrix diagonalähnlich wird, sobald man bei der Rollbewegung den Luftwiderstand berücksichtigt, der eine von der Rollgeschwindigkeit  $P$  abhängige Kraft auf die Flügel ausübt. Das Element  $a_{22}$  der in Gl. (5.64) stehenden Systemmatrix ist dann von null verschieden und die Systemmatrix diagonalähnlich.  $\square$

**Einsatzgebiete der kanonischen Normalform.** Das Zustandsraummodell wird immer dann in kanonischer Normalform eingesetzt, wenn es auf die einzelnen Modi des Systems ankommt und damit eine Darstellung des Systemverhaltens als Summe von e-Funktionen möglich ist, beispielsweise bei der Berechnung (5.23) der Übergangsmatrix, bei der kanonischen Darstellung (5.121) der Gewichtsfunktion, der daraus folgenden Zerlegung (5.134) der erzwungenen Bewegung in stationäres Verhalten und Übergangsverhalten oder der kanonischen Darstellung (6.72) der Übertragungsfunktion.

**Aufgabe 5.8\*** *Bewegungsgleichung in kanonischer Darstellung*

Gegeben ist das folgende Zustandsraummodell:

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 \\ \frac{1}{T_2} & -\frac{1}{T_2} \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} \frac{1}{T_1} \\ 0 \end{pmatrix} u(t), & \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \\ y(t) = (1 \quad -1) \boldsymbol{x}(t). \end{cases}$$

1. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Systemmatrix.
2. Transformieren Sie die gegebenen Gleichungen in ein Modell mit kanonischen Zustandsvariablen und zeichnen Sie den dazugehörigen Signalflussgraphen.
3. Stellen Sie die Bewegungsgleichung des transformierten Zustandsraummodells auf.
4. Berechnen Sie aus der Bewegungsgleichung die Eigenbewegung des Systems. Wie heißen die Modi des Systems?  $\square$

### 5.3.5 Regelungsnormalform

Die Regelungsnormalform wurde bereits im Abschn. 4.4.1 eingeführt. Bei der Ableitung des Zustandsraummodells

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}_R(t) = A_R x_R(t) + b_R u(t), & x_R(0) = x_{R0} \\ y(t) = c_R^T x_R(t) + du(t) \end{cases} \quad (5.65)$$

aus der Differentialgleichung

$$\frac{d^n y}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = b_q \frac{d^q u}{dt^q} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u(t) \quad (5.66)$$

entstanden spezielle Formen (4.63) – (4.65) für  $A_R$ ,  $b_R$  und  $c_R$ :

$$A_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad (5.67)$$

$$b_R = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.68)$$

$$c_R^T = (b_0 - b_n a_0, b_1 - b_n a_1, \dots, b_{n-1} - b_n a_{n-1}) \quad (5.69)$$

$$d = b_n. \quad (5.70)$$

Für nicht sprungfähige Systeme hat  $c_R^T$  die einfachere Form

$$c_R^T = (b_0 \ b_1 \dots b_q \ 0 \dots 0) \quad (5.71)$$

und es gilt  $d = 0$ . Der Index „R“ dient zur Kennzeichnung der Regelungsnormalform.

Die Matrix  $A_R$  ist eine Begleitmatrix, deren letzte Zeile die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms mit einem Minuszeichen enthält:

$$\det(\lambda I - A_R) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0.$$

Ein weiteres Kennzeichen der Regelungsnormalform besteht darin, dass die Eingangsgröße nur die letzte Zustandsvariable  $x_{Rn}(t)$  direkt beeinflusst, wenngleich sich dieser Einfluss natürlich auf die anderen Zustandsvariablen fortpflanzt (vgl. Signalflussplan in Abb. 4.14 auf S. 82).

**Transformation eines Zustandsraummodells in die Regelungsnormalform.** Auf die Regelungsnormalform eines Systems  $\Sigma$

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), & x(0) = x_0 \\ y(t) = c^T x(t) + du(t) \end{cases} \quad (5.72)$$

kommt man durch die Transformation

$$x_R(t) = T_R^{-1}x(t). \quad (5.73)$$

Wie man die Transformationsmatrix  $T_R$  wählt, wird im Kap. II-6 erläutert und hier der Vollständigkeit halber ohne Beweis angegeben. Man bildet zunächst die Matrix

$$S_S = (b \ A b \ A^2 b \dots A^{n-1} b), \quad (5.74)$$

der im Zusammenhang mit der Steuerbarkeit von Systemen noch eine besondere Bedeutung zukommen wird. Die Regelungsnormalform existiert nur, wenn diese Matrix invertierbar, das System  $\Sigma$  also vollständig steuerbar ist (Kap. II-3). Bezeichnet man die letzte Zeile von  $S_S^{-1}$  mit  $s_R^T$

$$s_R^T = (0 \ 0 \dots 0 \ 1) S_S^{-1}, \quad (5.75)$$

dann ergibt sich für die Transformationsmatrix  $T_R$  folgende Beziehung:

$$T_R = \begin{pmatrix} s_R^T \\ s_R^T A \\ s_R^T A^2 \\ \vdots \\ s_R^T A^{n-1} \end{pmatrix}^{-1}. \quad (5.76)$$

Für die Regelungsnormalform gelten somit die Gln. (5.26), (5.27), (5.30) und (5.32):

$$\begin{aligned} A_R &= T_R^{-1} A T_R \\ b_R &= T_R^{-1} b \\ c_R^T &= c^T T_R \\ x_{R0} &= T_R^{-1} x_0. \end{aligned}$$

Aus den Gln. (5.73) und (5.76) sieht man, dass sich die Zustandsvariablen  $x_{Ri}(t)$  der Regelungsnormalform entsprechend der Beziehung

$$x_{Ri}(t) = s_R^T A^{i-1} x(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.77)$$

aus dem Zustand  $x(t)$  des zu transformierenden Modells ergeben. Die Modelle (5.65) und (5.72) sind äquivalent.

**Interpretation des relativen Grades.** In Gl. (4.5) wurde der relative Grad als Differenz  $r = n - q$  zwischen den Graden der höchsten Ableitung der Ausgangsgröße und der Eingangsgröße in der Differentialgleichung eingeführt. In der Regelungsnormalform ist er an der Anzahl der Nullen im Vektor  $\mathbf{c}_R^T$  zu erkennen, sofern  $r \geq 1$  gilt:

$$\mathbf{c}_R^T = (b_0 \quad b_1 \dots b_q \quad \underbrace{0 \dots 0}_{r-1 \text{ Nullen}}). \quad (5.78)$$

Im Folgenden wird gezeigt, dass der relative Grad angibt, welche Ableitungen der Ausgangsgröße durch die Eingangsgröße direkt beeinflusst werden. Diese Eigenschaft gilt für dynamische Systeme allgemein, aber sie ist an der Regelungsnormalform besonders gut zu erkennen.

Sprungfähige Systeme haben den relativen Grad  $r = 0$ . Bei ihnen hängt die Ausgangsgröße  $y(t)$  direkt von der Eingangsgröße  $u(t)$  ab. Für alle anderen Systeme erhält man für die ersten  $r$  Ableitungen aus dem Zustandsraummodell in Regelungsnormalform folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathbf{c}_R^T \mathbf{x}_R(t) \\ \dot{y}(t) &= \mathbf{c}_R^T \dot{\mathbf{x}}_R(t) = \mathbf{c}_R^T \mathbf{A}_R \mathbf{x}_R(t) + \mathbf{c}_R^T \mathbf{b}_R u(t) \quad \text{mit } \mathbf{c}_R^T \mathbf{b}_R = 0 \\ \ddot{y}(t) &= \mathbf{c}_R^T \mathbf{A}_R \dot{\mathbf{x}}_R(t) = \mathbf{c}_R^T \mathbf{A}_R^2 \mathbf{x}_R(t) + \mathbf{c}_R^T \mathbf{A}_R \mathbf{b}_R u(t) \quad \text{mit } \mathbf{c}_R^T \mathbf{A}_R \mathbf{b}_R = 0 \\ &\vdots \\ \frac{d^{r-1}y(t)}{dt^{r-1}} &= \mathbf{c}_R^T \mathbf{A}_R^{r-1} \mathbf{x}_R(t) + \mathbf{c}_R^T \mathbf{A}_R^{r-2} \mathbf{b}_R u(t) \quad \text{mit } \mathbf{c}_R^T \mathbf{A}_R^{r-2} \mathbf{b}_R = 0 \\ \frac{d^r y(t)}{dt^r} &= \mathbf{c}_R^T \mathbf{A}_R^r \mathbf{x}_R(t) + \mathbf{c}_R^T \mathbf{A}_R^{r-1} \mathbf{b}_R u(t) \quad \text{mit } \mathbf{c}_R^T \mathbf{A}_R^{r-1} \mathbf{b}_R \neq 0. \end{aligned}$$

Wegen der rechts angegebenen Beziehungen, die aufgrund der Struktur von  $\mathbf{A}_R$ ,  $\mathbf{b}_R$  und  $\mathbf{c}_R$  gelten, entfallen die Summanden mit  $u(t)$ . Daran sieht man:

Bei einem dynamischen System mit relativem Grad  $r$  ist die  $r$ -te Ableitung der Ausgangsgröße die niedrigste Ableitung, die von der Eingangsgröße  $u(t)$  direkt beeinflusst wird.

Diese Tatsache kommt im Signalflussgraphen in Abb. 4.15 auf S. 85 in der Kette von  $r$  Integratoren zum Ausdruck. Die Eingangsgröße hat nur durch diese Integratorkette hindurch einen Einfluss auf die Ausgangsgröße.

Diese für die Regelungsnormalform des Zustandsraummodells abgeleitete Tatsache gilt für jedes Zustandsraummodell, denn der relative Grad ist eine von den Zustandskoordinaten unabhängige Größe. Wenn das Produkt  $\mathbf{c}_R^T \mathbf{A}_R^i \mathbf{b}_R$  verschwindet, so verschwindet auch das entsprechende Produkt des nicht transformierten Modells

$$\mathbf{c}_R^T \mathbf{A}_R^i \mathbf{b}_R = \mathbf{c}_R^T \mathbf{T}_R^{-1} \cdot \mathbf{T}_R \mathbf{A}_R^i \mathbf{T}_R^{-1} \cdot \mathbf{T}_R \mathbf{b}_R = \mathbf{c}^T \mathbf{A}^i \mathbf{b}$$

und für  $i = r - 1$  gilt

$$\mathbf{c}_R^T \mathbf{A}^{r-1} \mathbf{b}_R = \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{r-1} \mathbf{b} = b_q. \quad (5.79)$$

Folglich kann man die Ausgangsgröße und ihre Ableitungen für ein System mit relativem Grad  $r$  bei beliebiger Wahl der Zustandsvariablen folgendermaßen darstellen:

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) \quad (5.80)$$

$$\dot{y}(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{x}(t)$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^{r-1}y(t)}{dt^{r-1}} = \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{r-1} \mathbf{x}(t) \quad (5.81)$$

$$\frac{d^r y(t)}{dt^r} = \mathbf{c}^T \mathbf{A}^r \mathbf{x}(t) + \underbrace{\mathbf{c}^T \mathbf{A}^{r-1} \mathbf{b}}_{=b_q \neq 0} u(t) \quad (5.82)$$

und es gilt

Relativer Grad $r$ für nicht sprungfähige Systeme:	$d = 0$ $\mathbf{c}^T \mathbf{b} = 0$ $\mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{b} = 0$ $\vdots$ $\mathbf{c}^T \mathbf{A}^{r-2} \mathbf{b} = 0$ $\mathbf{c}^T \mathbf{A}^{r-1} \mathbf{b} \neq 0.$
-------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

(5.83)

Die Beziehung (5.83) kann für Zustandsraummodelle in beliebiger Form verwendet werden, um den relativen Grad nicht sprungfähiger Systeme zu bestimmen. Sprungfähige Systeme haben den relativen Grad  $r = 0$ . Sie sind daran zu erkennen, dass in der Ausgabegleichung des Modells (5.72) die Eingangsgröße  $u$  den Ausgang  $y$  direkt beeinflusst:  $d \neq 0$ .

### Beispiel 5.7 Relativer Grad des Reihenschwingkreises

Das im Beispiel 4.5 auf S. 71 angegebene Zustandsraummodell eines Reihenschwingkreises zeigt, dass der Schwingkreis nicht sprungfähig ist ( $d = 0$ ). Wegen

$$\mathbf{c}^T \mathbf{b} = (0 \ 1) \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ \frac{R}{L} \end{pmatrix} = \frac{R}{L} \neq 0$$

hat er den relativen Grad  $r = 1$ . Dieser relative Grad kann auch aus der im Beispiel 4.1 auf S. 58 angegebenen Differentialgleichung (4.16) abgelesen werden.

Verwendet man anstelle der Spannung  $u_2(t)$  die Kondensatorspannung

$$u_C(t) = u_2(t) - u_R(t) = u_2(t) - R i_1(t)$$

als Ausgangsgröße, so bleibt die Zustandsgleichung (4.5) unverändert und die Ausgabegleichung heißt

$$u_C(t) = (-R \quad 1) \mathbf{x}(t).$$

Jetzt gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T \mathbf{b} &= (-R \quad 1) \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ \frac{R}{L} \end{pmatrix} = 0 \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{b} &= (-R \quad 1) \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ \frac{R}{L} \end{pmatrix} = \frac{1}{CL} \neq 0 \end{aligned}$$

und der relative Grad ist folglich  $r = 2$ . Nimmt man die Spannung über der Induktivität als Ausgang, so gilt

$$u_L(t) = u_1(t) - u_2(t)$$

(vgl. Abb. 4.2 auf S. 59), was auf die Ausgabegleichung

$$u_L(t) = (0 \quad 1) \mathbf{x}(t) + u_1(t)$$

führt. Das System ist jetzt sprungfähig ( $d = 1$ ) und hat den relativen Grad  $r = 0$ .

Das Beispiel zeigt, dass der relative Grad nicht nur von den in der Zustandsgleichung erfassten physikalischen Wirkprinzipien, sondern auch von den verwendeten Sensoren und Aktoren abhängt.  $\square$

**Einsatzgebiete der Regelungsnormalform.** Das Zustandsraummodell in Regelungsnormalform wird bei Systemen mit maximalem relativen Grad  $r = n$  eingesetzt, weil dann die Ausgangsgröße und deren  $(n - 1)$  erste Ableitungen als Zustandsvariablen auftreten. Wenn es um einen direkten Zusammenhang zwischen den Eigenwerten des Systems und den Modellparametern geht, kann man die direkte Beziehung der Begleitmatrix (5.67) mit dem charakteristischen Polynom ausnutzen. Dieser Zusammenhang spielt beim Reglerentwurf eine wichtige Rolle, woraus sich auch der Name dieser Normalform ableitet. Als Beispiel sei auf den im Kap. II-6 behandelten Entwurf von Zustandsrückführungen zur Polzuweisung verwiesen. Die Regelungsnormalform zeigt außerdem den direkten Zusammenhang zwischen der Systembeschreibung durch Differentialgleichungen (4.3) und durch Zustandsraummodelle.

### 5.3.6 Beobachtungsnormalform

In Analogie zur Regelungsnormalform gibt es eine Beobachtungsnormalform des Zustandsraummodells

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_B(t) = \mathbf{A}_B \mathbf{x}_B(t) + \mathbf{b}_B u(t), & \mathbf{x}_B(0) = \mathbf{x}_{B0} \\ y(t) = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B(t) + d u(t) \end{cases}$$

mit

$$\boxed{\mathbf{A}_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_B = \begin{pmatrix} b_0 - b_n a_0 \\ b_1 - b_n a_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{pmatrix}} \quad (5.84)$$

$$\mathbf{c}_B^T = (0 \dots 0 \ 1), \quad d = b_n. \quad (5.85)$$

Auch hier vereinfacht sich das Modell für nicht sprungfähige Systeme mit  $q = n - r$ :

$$\mathbf{b}_B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_q \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d = 0. \quad (5.86)$$

Charakteristisch ist die Tatsache, dass in diesem Modell die Ausgangsgröße nur von der letzten Komponente des Zustandsvektors  $\mathbf{x}_B$  direkt abhängt. Diese Modellform eignet sich deshalb sehr gut für den Entwurf von Zustandsbeobachtern (vgl. Kap. II-8), weswegen sie auch Beobachternormalform genannt wird.

Die Beobachtungsnormalform kann durch die Zustandstransformation

$$\mathbf{x}_B(t) = \mathbf{T}_B^{-1} \mathbf{x}(t)$$

aus einem in beliebiger Form gegebenen Zustandsraummodell erzeugt werden. Die Transformationsmatrix  $\mathbf{T}_B$  erhält man, wenn man die Matrix

$$\mathbf{S}_B = \begin{pmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \end{pmatrix} \quad (5.87)$$

bildet, die bei der Untersuchung der Beobachtbarkeit eine wichtige Rolle spielt (Kap. II-3). Damit die Beobachtungsnormalform existiert, muss die Matrix  $\mathbf{S}_B$  invertierbar sein. Bezeichnet man die letzte Spalte von  $\mathbf{S}_B^{-1}$  mit  $\mathbf{s}_B$

$$\mathbf{s}_B = \mathbf{S}_B^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

so erhält man die Transformationsmatrix aus der Beziehung

$$\mathbf{T}_B = (\mathbf{s}_B \ \mathbf{A} \mathbf{s}_B \dots \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{s}_B). \quad (5.88)$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_B &= \mathbf{T}_B^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_B \\ \mathbf{b}_B &= \mathbf{T}_B^{-1} \mathbf{b} \\ \mathbf{c}_B^T &= \mathbf{c}^T \mathbf{T}_B \\ \mathbf{x}_{B0} &= \mathbf{T}_B^{-1} \mathbf{x}_0.\end{aligned}$$

**Vergleich von Regelungsnormalform und Beobachtungsnormalform.** Beide Normalformen können direkt aus der Differentialgleichung (5.66) abgelesen werden. Sie haben die bemerkenswerte Eigenschaft, dass sie mit der minimal notwendigen Anzahl von Parametern auskommen. In  $\mathbf{A}_R$  bzw.  $\mathbf{A}_B$  stehen  $n$  Parameter, in  $\mathbf{c}_R$  bzw.  $\mathbf{b}_B$  weitere  $q + 1$  Parameter. Bei sprungfähigen Systemen ( $q = n$ ) ist der Durchgriff  $d$  ein zusätzlicher Parameter. Damit stimmt die Anzahl der Parameter bei beiden Normalformen mit der Anzahl  $n + q + 1$  der Koeffizienten der Differentialgleichung (5.66) überein.

Im Gegensatz dazu hat das Zustandsraummodell in allgemeiner Form  $n^2$  Parameter in der Matrix  $\mathbf{A}$ , je  $n$  weitere Parameter in den Vektoren  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$  sowie den Parameter  $d$ . Die Parameteranzahl  $n^2 + 2n + 1$  ist somit größer als  $n + q + 1$ , obwohl auch dieses Modell ein durch eine Differentialgleichung mit  $n + q + 1$  Koeffizienten beschreibbares System darstellt. Die Modellelemente  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}^T$  und  $d$  enthalten also redundante Informationen. Diese Redundanz sieht man beispielsweise im Modell (4.5) auf S. 71, für das die Beziehungen

$$a_{12} = -b_1 \quad \text{und} \quad a_{22} = -b_2$$

unabhängig von den Werten  $R$  und  $L$  gelten. Die Redundanz drückt sich also darin aus, dass die Elemente von  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{b}$  nicht unabhängig voneinander sind.

Die Regelungsnormalform und die Beobachtungsnormalform stehen in einem einfachen Zusammenhang. Für die Systemmatrizen gilt

$$\mathbf{A}_R = \mathbf{A}_B^T$$

und die Vektoren sind gerade vertauscht:

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_R &= \mathbf{c}_B \\ \mathbf{c}_R &= \mathbf{b}_B.\end{aligned}$$

Diese Eigenschaft bezeichnet man als *Dualität*. Sie wird bei den Untersuchungen zur Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit im Kap. II-3 näher untersucht.

**Einsatzgebiete der Beobachtungsnormalform.** Zustandsraummodelle in Beobachtungsnormalform haben einen ähnlichen direkten Bezug zu Differentialgleichungen und zu den Eigenwerten des Systems wie die Regelungsnormalform. Die jetzt

als transponierte Begleitmatrix auftretende Systemmatrix wird für den Beobachterentwurf eingesetzt (Kap. II-8), woraus auch der Name dieser Normalform entstand.

### 5.3.7 E/A-Normalform

Die Regelungsnormalform hat eine wichtige Eigenschaft dynamischer Systeme gezeigt: Für Systeme mit relativem Grad  $r = n$  kann man die Ausgangsgröße und ihre ersten  $n - 1$  Ableitungen als Zustandsvariablen verwenden, so dass das System aus einer Integratorkette besteht. Wenn der relative Grad kleiner ist, liegen zwischen Eingang und Ausgang weiterhin  $r$  Integratoren (Abb. 4.15 auf S. 85), auch wenn die Ausgangsgröße und ihre Ableitungen in der Regelungsnormalform nicht mehr als Zustandsvariablen auftreten. Die in diesem Abschnitt eingeführte Eingangs-Ausgangsnormalform (E/A-Normalform) zeigt die Möglichkeit, für Systeme mit beliebigem relativen Grad  $r \geq 1$  die Ausgangsgröße und deren erste  $r - 1$  Ableitungen als Zustandsgrößen zu verwenden. Außerdem kann anhand dieser Normalform mit der internen Dynamik ein weiteres wichtiges Phänomen dynamischer Systeme erklärt werden.

Das Modell in E/A-Normalform

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_E(t) = \boldsymbol{A}_E \boldsymbol{x}_E(t) + \boldsymbol{b}_E u(t), & \boldsymbol{x}_E(0) = \boldsymbol{x}_{E0} \\ y(t) = \boldsymbol{c}_E^T \boldsymbol{x}_E(t), \end{cases} \quad (5.89)$$

das hier für Systeme  $\Sigma$  mit relativem Grad  $r \geq 1$  behandelt wird, besteht aus zwei Teilsystemen. Der Zustandsvektor  $\boldsymbol{x}_E(t)$  wird in den  $r$ -dimensionalen Teilvektor  $\boldsymbol{x}_I(t)$  und den  $(n - r)$ -dimensionalen Teilvektor  $\boldsymbol{x}_N(t)$  aufgespaltet

$$\boldsymbol{x}_E(t) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_I(t) \\ \boldsymbol{x}_N(t) \end{pmatrix}$$

und das Modell dementsprechend zerlegt:

$$\Sigma : \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_I(t) \\ \dot{\boldsymbol{x}}_N(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{II} & \boldsymbol{A}_{IN} \\ \boldsymbol{A}_{NI} & \boldsymbol{A}_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_I(t) \\ \boldsymbol{x}_N(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_I \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} u(t) \\ \boldsymbol{x}_{E0} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_I(0) \\ \boldsymbol{x}_N(0) \end{pmatrix} \\ y(t) = (\boldsymbol{c}_I^T \ \mathbf{0}^T) \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_I(t) \\ \boldsymbol{x}_N(t) \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (5.90)$$

Das Teilsystem mit dem Zustand  $\boldsymbol{x}_I(t)$  beschreibt die *E/A-Dynamik*, das andere Teilsystem mit dem Zustand  $\boldsymbol{x}_N(t)$  die *interne Dynamik*. Die Indizes „I“ und „N“ weisen auf die Interpretation der Vektoren als Integratorzustände bzw. Zustände der später eingeführten Nulldynamik hin. Es wird sich zeigen, dass  $u(t)$  keinen direkten Einfluss auf  $\boldsymbol{x}_N(t)$  hat und  $\boldsymbol{x}_N(t)$  keinen direkten Einfluss auf  $y(t)$ , weswegen an den entsprechenden Stellen im Modell (5.90) Nullvektoren stehen.

Die Modellelemente in (5.90) haben folgende Form:

$$\mathbf{A}_{II} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ e_1 & e_2 & e_3 & \cdots & e_r \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{IN} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ e_{r+1} & e_{r+2} & \cdots & e_n \end{pmatrix} \quad (5.91)$$

$$\mathbf{A}_{NI} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{b_q} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{NN} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\frac{b_0}{b_q} & -\frac{b_1}{b_q} & -\frac{b_2}{b_q} & \cdots & -\frac{b_{q-1}}{b_q} \end{pmatrix} \quad (5.92)$$

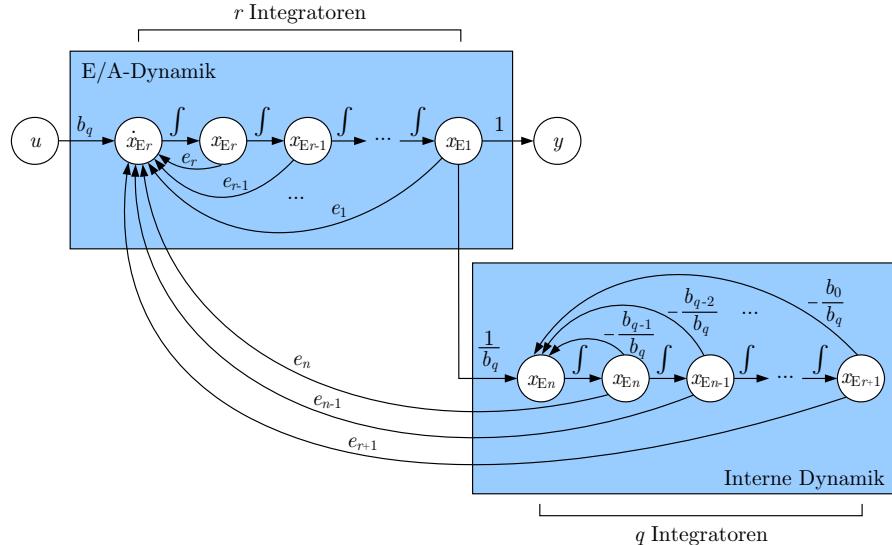
$$\mathbf{b}_I = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_I^T = (1 \ 0 \ \dots \ 0). \quad (5.93)$$

Dabei bezeichnen  $b_0, b_1, \dots, b_q$  wieder die Koeffizienten der Differentialgleichung (5.66). Die Elemente  $e_i$  erhält man aus der später erläuterten Transformation entsprechend Gl. (5.106). Es gilt wie immer  $q = n - r$ , wobei hier alle drei Parameter verwendet werden, um die Schreibweise zu verkürzen. Für  $r = n$  stimmt die E/A-Normalform bis auf die Vertauschung der Elemente  $b_0$  und 1 in den Vektoren  $\mathbf{c}_R$  und  $\mathbf{b}_R$  mit der Regelungsnormalform (4.54) – (4.57) überein.

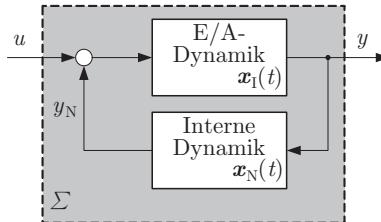
Die Matrizen  $\mathbf{A}_{II}$  und  $\mathbf{A}_{NN}$  haben Begleitmatrixform. In der Matrix  $\mathbf{A}_{IN}$  ist nur die untere Zeile besetzt, in der Matrix  $\mathbf{A}_{NI}$  nur das untere linke Element von null verschieden. Die sich daraus ergebende Struktur ist im Signalflussgraphen in Abb. 5.15 dargestellt. Die Modellzerlegung ist klar erkennbar. Das Teilsystem mit der Systemmatrix  $\mathbf{A}_{II}$  besteht aus einer Integratorkette mit  $r$  Integratoren, dessen „letztes“ Signal der Ausgang  $y(t)$  ist. Im Unterschied zur Regelungsnormalform wird der Systemausgang  $y(t)$  nicht nur für Systeme mit maximalem Relativgrad  $r = n$ , sondern auch bei beliebigem relativen Grad  $r$ , ( $0 < r \leq n$ ) aus einer Integratorkette gebildet. Der Teilvektor  $\mathbf{x}_I(t)$ , der die Elemente  $x_{E1}, x_{E2}, \dots, x_{Er}$  des neu eingeführten Zustands  $\mathbf{x}_E(t)$  umfasst, besteht aus dem Ausgang und dessen  $r - 1$  ersten Ableitungen:

$$\mathbf{x}_I(t) = \begin{pmatrix} x_{E1}(t) \\ x_{E2}(t) \\ \vdots \\ x_{Er}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \vdots \\ \frac{d^{r-1}y(t)}{dt^{r-1}} \end{pmatrix}. \quad (5.94)$$

Der restliche Teil des Systems besteht ebenfalls aus einer rückgekoppelten Integratorkette, die  $q = n - r$  Integratoren enthält.



**Abb. 5.15:** Signalflussgraph des Zustandsraummodells in der E/A-Normalform



**Abb. 5.16:** Strukturbild des Zustandsraummodells in der E/A-Normalform

Aufgrund der Struktur der Modellelemente (5.91) – (5.93) kann man die beiden Teilsysteme der E/A-Normalform so umschreiben, dass sie entsprechend Abb. 5.16 gekoppelt sind:

$$\text{E/A-Dynamik : } \begin{cases} \dot{x}_I(t) = A_{II}x_I(t) + b_I(u(t) + y_N(t)), & x_I(0) = x_{I0} \\ y(t) = c_I^T x_I(t) \end{cases} \quad (5.95)$$

und

$$\text{Interne Dynamik : } \begin{cases} \dot{x}_N(t) = A_{NN}x_N(t) + b_Ny(t), & x_N(0) = x_{N0} \\ y_N(t) = c_N^T x_N(t) \end{cases} \quad (5.96)$$

mit

$$\mathbf{b}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{b_q} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_N^T = \frac{1}{b_q}(e_{r+1} \ e_{r+2} \ \dots \ e_n). \quad (5.97)$$

Die E/A-Dynamik beschreibt die direkte Verbindung zwischen dem Eingang  $u(t)$  und dem Ausgang  $y(t)$ , die interne Dynamik das Verhalten des „Restsystems“. Das Signal  $y_N(t)$  kann man als einen *versteckten Eingang* interpretieren, denn es bildet zusammen mit dem Systemeingang  $u(t)$  das Eingangssignal der E/A-Dynamik. Die in Abb. 5.16 gezeigte Summationsstelle hat eine große Bedeutung für das Systemverhalten, insbesondere dann, wenn das Summensignal verschwindet (siehe z. B. Gl. (5.152)).

Die letzte Zeile der Zustandsgleichung der E/A-Dynamik (5.95) beschreibt die  $r$ -te Ableitung der Ausgangsgröße:

$$\frac{d^r y(t)}{dt^r} = (e_1 \ e_2 \ \dots \ e_r) \mathbf{x}_I(t) + b_q(u(t) + y_N(t)). \quad (5.98)$$

**Transformation eines Zustandsraummodells in die E/A-Normalform.** Für nicht sprungfähige Systeme

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + bu(t), & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (5.99)$$

erhält man die E/A-Normalform durch die Zustandstransformation

$$\mathbf{x}_E(t) = \mathbf{T}_E^{-1} \mathbf{x}(t)$$

mit der Transformationsmatrix

$$\mathbf{T}_E^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T A \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T A^{r-1} \\ \cdots \cdots \\ \mathbf{s}_R^T \\ \mathbf{s}_R^T A \\ \vdots \\ \mathbf{s}_R^T A^{q-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_o \\ \mathbf{T}_u \end{pmatrix}, \quad (5.100)$$

in die der Vektor  $\mathbf{s}_R^T$  aus Gl. (5.75) eingeht. Die angegebene  $(n, n)$ -Transformationsmatrix besteht aus zwei Teilen. Die obere  $(r, n)$ -Teilmatrix  $\mathbf{T}_o$  enthält die Zeilen  $\mathbf{c}^T A^i$  für  $i = 0, 1, \dots, r-1$ , die untere  $(q, n)$ -Teilmatrix  $\mathbf{T}_u$  die Zeilen  $\mathbf{s}_R^T A^i$  für  $i = 0, 1, \dots, q-1$ .

Mit dieser Transformationsmatrix erhält man die E/A-Normalform (5.89) mit den Modellelementen

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_E &= \mathbf{T}_E^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_E \\ \mathbf{b}_E &= \mathbf{T}_E^{-1} \mathbf{b} \\ \mathbf{c}_E^T &= \mathbf{c}^T \mathbf{T}_E \\ \mathbf{x}_{E0} &= \mathbf{T}_E^{-1} \mathbf{x}_0, \end{aligned}$$

die die in den Gln. (5.91) – (5.93) angegebene Struktur haben. Zerlegt man die Transformationsmatrix  $\mathbf{T}_E$  entsprechend

$$\mathbf{T}_E = (\mathbf{T}_I \ \mathbf{T}_N) \quad (5.101)$$

in eine  $(n, r)$ -Teilmatrix  $\mathbf{T}_I$  und eine  $(n, q)$ -Teilmatrix  $\mathbf{T}_N$ , so kann man die in den Gln. (5.91) – (5.93) angegebenen Teilmatrizen getrennt voneinander berechnen, wobei insbesondere

$$\mathbf{A}_{NN} = \mathbf{T}_u \mathbf{A} \mathbf{T}_N$$

gilt.

Aus der Transformationsmatrix (5.100) und der Beziehung (5.77) geht hervor, dass die im Teilvektor  $\mathbf{x}_N(t)$  stehenden Zustandsvariablen der E/A-Normalform mit den  $q$  ersten Zustandsvariablen der Regelungsnormalform übereinstimmen:

$$\mathbf{x}_N(t) = \begin{pmatrix} x_{R1}(t) \\ x_{R2}(t) \\ \vdots \\ x_{Rq}(t) \end{pmatrix}. \quad (5.102)$$

**Interne Dynamik und Nulldynamik.** Die E/A-Normalform zeigt mit der internen Dynamik ein wichtiges Phänomen dynamischer Systeme, das im Abschn. 5.5.4 ausführlich behandelt wird und beim Vorsteuerungsentwurf eine wichtige Rolle spielt. Betrachtet man das System für verschwindenden Ausgang ( $y(t) = 0$  für  $t \geq 0$ ), so gilt für den Teilvektor  $\mathbf{x}_N(t)$  der E/A-Normalform die Gleichung

$$\text{Nulldynamik: } \dot{\mathbf{x}}_N(t) = \mathbf{A}_{NN} \mathbf{x}_N(t), \quad \mathbf{x}_N(0) = \mathbf{x}_{N0}. \quad (5.103)$$

Die dadurch beschriebene Bewegung

$$\mathbf{x}_N(t) = e^{\mathbf{A}_{NN} t} \mathbf{x}_{N0} \quad (5.104)$$

wird als *Nulldynamik* des Systems bezeichnet. Sie zeigt, dass es für Systeme mit relativem Grad  $r < n$  eine interne Bewegung geben kann, selbst wenn am Ausgang „nichts passiert“. Im Zustandsraum des nicht transformierten Modells führt die Nulldynamik auf die Bewegung

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}_N \mathbf{x}_N(t) = \mathbf{T}_N e^{\mathbf{A}_{NN} t} \mathbf{x}_{N0}. \quad (5.105)$$

Aus der Kopplung der beiden Teilsysteme der E/A-Normalform geht hervor, dass man für das Auftreten der Nulldynamik nicht nur das Verschwinden der Ausgangsgröße, sondern auch das Verschwinden der  $r - 1$  ersten Ableitungen der Ausgangsgröße fordern muss, so dass  $\dot{\mathbf{x}}_I(t) = \mathbf{0}$  für alle  $t \geq 0$  gilt. Diese Situation tritt ein, wenn das System mit einem durch seine Nullstellen bestimmten Eingangssignal angeregt wird, wie im Abschn. 5.5.4 dargestellt wird.

**Erläuterungen.** Es soll noch gezeigt werden, dass mit der Transformationsmatrix  $\mathbf{T}_E$  aus Gl. (5.100) tatsächlich die in den Gleichungen (5.91) – (5.93) angegebenen Modellelemente entstehen. Die „1“-Elemente in den Matrizen  $\mathbf{A}_{II}$  und  $\mathbf{A}_{NN}$  ergeben sich aus der Bedeutung (5.94) und (5.102) der neu eingeführten Zustandsvariablen. Die letzten Zeilen der Matrizen und des Vektors  $\mathbf{b}_I$  erhält man aus einer Darstellung von  $\dot{x}_{Er}(t)$  und  $\dot{x}_{En}(t)$ . Für die erste Größe führt Gl. (5.82) auf die Beziehung

$$\begin{aligned}\dot{x}_{Er}(t) &= \frac{d^r y(t)}{dt^r} \\ &= \mathbf{c}^T \mathbf{A}^r \mathbf{x}(t) + b_q u(t) \\ &= \mathbf{c}^T \mathbf{A}^r \mathbf{T}_E \mathbf{x}_E(t) + b_q u(t),\end{aligned}$$

so dass die Matrizen  $\mathbf{A}_{II}$  und  $\mathbf{A}_{IN}$  mit den Elementen  $e_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) aus der Beziehung

$$(e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n) = \mathbf{c}^T \mathbf{A}^r \mathbf{T}_E \quad (5.106)$$

entstehen. Für  $\dot{x}_{En}(t)$  erhält man aus der Ausgangsgleichung des Modells (5.65) der Regelungnormalform mit  $\mathbf{c}_R$  aus (5.71) und  $d = 0$  die Beziehung

$$\begin{aligned}\dot{x}_{En}(t) &= \dot{x}_{Rq}(t) \\ &= x_{Rq+1}(t) \\ &= \frac{1}{b_q} (y(t) - b_0 x_{R1}(t) - \dots - b_{q-1} x_{Rq}(t)) \\ &= \frac{1}{b_q} (x_{E1}(t) - b_0 x_{Er+1}(t) - \dots - b_{q-1} x_{En}(t))\end{aligned}$$

und damit die in Gl. (5.92) angegebenen Matrixelemente.

### Beispiel 5.8 Nulldynamik eines Reihenschwingkreises

Der im Beispiel 4.5 auf S. 71 angegebene Reihenschwingkreis hat den relativen Grad  $r = 1$  (vgl. Beispiel 5.7). Deshalb hat die Transformationsmatrix  $\mathbf{T}_E$  folgenden Aufbau:

$$\mathbf{T}_E^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{s}_R^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -RLC & CL \end{pmatrix}.$$

Mit dem Zustand

$$\begin{pmatrix} x_{E1}(t) \\ x_{E2}(t) \end{pmatrix} = T_E^{-1} \begin{pmatrix} i_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \quad (5.107)$$

erhält man für das Zustandsraummodell (4.44) auf S. 72 die E/A-Normalform

$$\Sigma_{RSK} : \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_{E1}(t) \\ \dot{x}_{E2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{RC} - \frac{R}{L} & -\frac{1}{RLC^2} \\ \frac{L}{R} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{E1}(t) \\ x_{E2}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{R}{L} \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = (1 \ 0) \begin{pmatrix} x_{E1}(t) \\ x_{E2}(t) \end{pmatrix}, \end{cases}$$

in der die erste Zustandsvariable  $x_{E1}(t) = x_1(t)$  mit der Ausgangsspannung  $u_2(t)$  übereinstimmt und die zweite Zustandsvariable  $x_{E2}(t) = x_N(t)$  eine Linearkombination

$$x_{E2}(t) = -RLC i_1(t) + CL u_2(t) \quad (5.108)$$

der Zustandsvariablen des Originalmodells ist.

Die Nulldynamik dieses Systems ist durch die zweite Zeile der Zustandsgleichung für den Fall beschrieben, dass  $x_{E1}(t)$  für alle  $t \geq 0$  verschwindet:

$$\dot{x}_{E2}(t) = -\frac{1}{RC} x_{E2}(t).$$

Um diese Gleichung für den Reihenschwingkreis interpretieren zu können, wird sie in den Zustandsraum des Originalmodells zurücktransformiert

$$\begin{pmatrix} i_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{R} & -\frac{1}{RLC} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{T_E} \begin{pmatrix} x_{E1}(t) \\ x_{E2}(t) \end{pmatrix},$$

was unter den hier betrachteten Bedingungen auf die Beziehung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & -\frac{1}{RLC} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{x}_{E2}(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{RLC} \frac{1}{RC} x_{E2}(t) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und unter Anwendung von Gl. (5.108) auf

$$\frac{di_1(t)}{dt} = -\frac{1}{RC} i_1(t), \quad i_1(0) = i_{10} = -\frac{1}{RLC} x_{E20} \quad (5.109)$$

und

$$i_1(t) = i_{10} e^{-\frac{t}{RC}}$$

führt.

Dieses auf formalem Wege mit Hilfe der E/A-Normalform erhaltene Ergebnis kann man auch durch physikalische Überlegungen gewinnen. Die Nulldynamik beschreibt die Bewegung des Systems bei verschwindender Ausgangsgröße

$$u_2(t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Dafür muss der Strom durch den Widerstand  $R$  eine der Kondensatorspannung  $u_C(t)$  entgegengesetzte, gleich große Spannung erzeugen (Abb. 4.2 auf S. 59):

$$R i_1(t) = -u_C(t) = -u_{C0} - \frac{1}{C} \int_0^t i_1(\tau) d\tau.$$

Aus dieser Gleichung erhält man durch Differenziation die Beziehung (5.109). Für den Anfangszustand  $(i_{10}, u_{C0})^T$  muss wegen  $u_2(0) = 0$  die Beziehung  $u_{C0} = -R i_{10}$  gelten. Der Schwingkreis kann also eine stabile innere Bewegung ausführen, bei der die Ausgangsspannung gleich null ist.  $\square$

**Einsatzgebiete der E/A-Normalform.** Die E/A-Normalform von Zustandsraummodellen lässt sehr gut die Phänomene erkennen, durch die Nullstellen eines Systems entstehen bzw. durch die beim Reglerentwurf zielgerichtet Nullstellen in ein System eingebracht werden können. Im Abschn. 6.7.6 werden mit der E/A-Normalform die Eigenschaften nichtminimalphasiger Systeme untersucht. Für den Vorsteuerungsentwurf im Abschn. 7.5.2 wird die E/A-Normalform genutzt, um die Systeminverse zu bilden.

### 5.3.8 Invariante Systemeigenschaften

Normalformen des Zustandsraummodells sind nützlich für die Systemanalyse, weil sich viele Eigenschaften bei der Transformation (5.25) des Zustandsraumes, durch die diese Normalformen entstehen, nicht verändern. Man sagt, dass diese Eigenschaften *koordinateninvariant* sind.

Für die Eigenwerte der Systemmatrix sieht man diese Invarianzeigenschaft aus der Beziehung (5.26), durch die die Systemmatrix  $\tilde{\mathbf{A}}$  des Modells für den transformierten Zustandsraum aus der Systemmatrix  $\mathbf{A}$  des alten Zustandsraummodells hervorgeht. Da es sich hierbei um eine Ähnlichkeitstransformation handelt, bleiben die Eigenwerte bei beliebiger Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  unverändert.

Die nachfolgende Liste enthält die wichtigsten Eigenschaften, die durch eine Zustandsraumtransformation nicht verändert werden. In ihr stehen der Vollständigkeit halber auch einige erst später eingeführte Eigenschaften:

- Eigenwerte der Systemmatrix, Nullstellen (5.142) des Systems,
- dynamische Ordnung  $n$ , relativer Grad  $r$ ,
- Gleichgewichtszustand  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$  des ungestörten Systems, wenn  $\det \mathbf{A} \neq 0$  gilt,
- Übergangsfunktion (5.113), Gewichtsfunktion (5.119),
- statische Verstärkung (5.116),
- Stabilität der internen Dynamik,
- E/A-Stabilität und Zustandsstabilität,
- Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit (Kap. II-3), Stabilisierbarkeit.

Die hier aufgeführten Eigenschaften sind also keine speziellen Eigenschaften eines Zustandsraummodells, sondern Charakteristika des durch dieses Modell beschriebenen Systems, die nicht durch die Wahl der Zustandsgrößen begründet sind.

## 5.4 Kennfunktionen des dynamischen Übertragungsverhaltens im Zeitbereich

Das dynamische Übertragungsverhalten eines Systems beschreibt die Abhängigkeit des Ausgangssignals vom Eingangssignal, wenn das System zur Zeit  $t = 0$  im Ruhezustand  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$  ist. Die Abhängigkeit von  $y(t)$  von  $u(t)$  ist durch das Zustandsraummodell (4.45) für  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$  sowie durch die Gl. (5.17) beschrieben:

$$y(t) = \int_0^t \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{b} u(\tau) d\tau + d u(t).$$

Beide Beschreibungen sind äquivalent. Außer diesen beiden Darstellungen sind in der Regelungstechnik eine Reihe von Kennfunktionen zur Beschreibung des dynamischen Übertragungsverhaltens verbreitet. Diese Kennfunktionen lassen sich grafisch sehr anschaulich darstellen und geben einen optischen Eindruck von der Verhaltensweise des betrachteten Systems. Zwei dieser Kennfunktionen werden jetzt behandelt.

### 5.4.1 Übergangsfunktion

Die Übergangsfunktion beschreibt, wie das System auf eine sprungförmige Eingangsgröße reagiert. Die Eingangsgröße wird durch die Sprunghöhe  $u_0$  und die *Sprungfunktion*

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases} \quad (5.110)$$

dargestellt, d. h., es gilt

$$u(t) = u_0 \sigma(t). \quad (5.111)$$

$\sigma(t)$  wird auch als HEAVISIDE-Funktion<sup>3</sup> bezeichnet. Aus Gl. (5.17) erhält man für  $y(t)$  mit der Substitution  $t - \tau = \tau'$  die Beziehung

$$y(t) = \left( \int_0^t \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}\tau'} \mathbf{b} d\tau' + d\sigma(t) \right) u_0. \quad (5.112)$$

Diese Ausgangsgröße wird als *Sprungantwort* bezeichnet. Ist  $u_0 = 1$ , so spricht man von der Übergangsfunktion, die mit  $h(t)$  bezeichnet wird. Aus Gl. (5.112) erhält man

Übergangsfunktion:  $h(t) = \int_0^t \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{b} d\tau + d.$

(5.113)

<sup>3</sup> OLIVER HEAVISIDE (1850 – 1925), britischer Physiker, leistete Beiträge zur Netzwerktheorie

$\sigma(t)$  wurde in dieser Gleichung aufgrund der Vereinbarung weggelassen, so dass alle Signale, also auch  $h(t)$ , für  $t < 0$  verschwinden und diese Gleichung deshalb nur für  $t > 0$  gilt.

Gilt  $\det \mathbf{A} \neq 0$ , so lässt sich das Integral geschlossen lösen und man erhält

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{-1} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b} \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} + d\sigma(t) \\ &= \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{-1} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b} - \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} + d\sigma(t) \end{aligned} \quad (5.114)$$

und nach Weglassen von  $\sigma(t)$  aufgrund der genannten Vereinbarung

$$h(t) = d - \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} + \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{-1} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b}. \quad (5.115)$$

Für  $\det \mathbf{A} = 0$  besitzt die Matrix  $\mathbf{A}$  einen oder mehrere verschwindende Eigenwerte ( $\lambda_i = 0$ ). Dann treten Terme mit  $t$ ,  $t^2$ ,  $t^3$  usw. in der Übergangsfunktion auf. Beispiele sind die auf S. 199 angegebenen Übergangsfunktionen (5.165) und (5.167) von Integriergliedern.

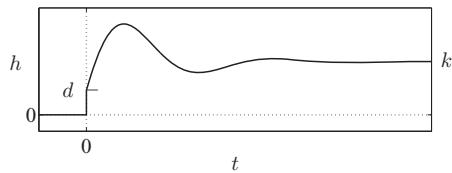


Abb. 5.17: Übergangsfunktion eines Systems zweiter Ordnung

Eine typische Übergangsfunktion ist in Abb. 5.17 gezeigt. Für stabile Systeme nähert sich die Übergangsfunktion für  $t \rightarrow \infty$  einem Endwert  $h(\infty)^4$ , der die statische Verstärkung des Systems beschreibt und mit  $k_s$  bezeichnet wird. Aus Gl. (5.113) erhält man

$$k_s = -\mathbf{c}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} + d. \quad (5.116)$$

Dies sind gerade die linken beiden Summanden in Gl. (5.115).

Abbildung 5.17 zeigt, dass sich die Ausgangsgröße des Systems aus zwei Anteilen zusammensetzt: Zu einem durch  $d$  bestimmten Grade folgt  $y(t)$  der sprungförmigen Eingangsgröße sofort. Dann nähert sich die Ausgangsgröße dem statischen Endwert  $k_s$  verzögert. Systeme, für die  $d \neq 0$  gilt, werden deshalb als *sprungfähige Systeme* bezeichnet.

<sup>4</sup>  $h(\infty)$  ist eine abgekürzte Schreibweise für  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$

### 5.4.2 Gewichtsfunktion

**Diracimpuls.** Die Kennzeichnung der dynamischen Übertragungseigenschaften durch die Gewichtsfunktion geht von der Vorstellung aus, dass das System durch einen sehr kurzen Impuls erregt wird. Der Rechteckimpuls

$$r_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{für } 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist in Abb. 5.18 (links) zu sehen. Er schließt eine Fläche der Größe 1 ein. Es wird mit dem Impuls gearbeitet, der aus  $r_\varepsilon$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  entsteht. Dieser Impuls wird *Einheitsimpuls*, *Dirac-Impuls* oder *Stoßfunktion* genannt und mit  $\delta(t)$  bezeichnet:

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r_\varepsilon. \quad (5.117)$$

Er ist unendlich hoch und unendlich kurz.

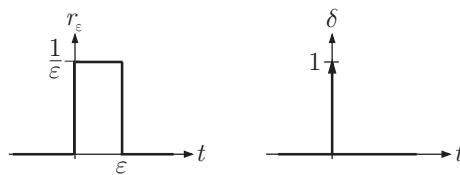


Abb. 5.18: Definition und Darstellung des Diracimpulses

Die Funktion  $\delta(t)$  ist keine Funktion im klassischen Sinne, sondern eine verallgemeinerte Funktion oder *Distribution*. Sie wird durch folgende Gleichungen definiert:

$$\delta(t) = 0 \quad \text{für } t \neq 0 \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) d\tau = 1.$$

Für sie gilt<sup>5</sup>

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \sigma(t) \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} \sigma(t) = \delta(t). \quad (5.118)$$

Grafisch wird sie durch einen Pfeil der Länge 1 symbolisiert (Abb. 5.18 (rechts)).

Obwohl sich der Einheitsimpuls in Anwendungen nicht realisieren lässt, hat er mehr als eine mathematische Bedeutung. Das System verhält sich nämlich sehr ähnlich, wenn an Stelle von  $\delta(t)$  mit dem Impuls  $r_\varepsilon(t)$  gearbeitet und die Impulsdauer

<sup>5</sup> Obwohl der Einheitssprung  $\sigma(t)$  als gewöhnliche Funktion betrachtet an der Stelle  $t = 0$  keine Ableitung besitzt, existiert diese Ableitung, wenn man  $\sigma(t)$  als Distribution behandelt.

$\epsilon$  klein gegenüber den maßgebenden Zeitkonstanten des Systems gewählt wird (vgl. Aufgabe 5.10).

**Gewichtsfunktion.** Für die Antwort des Systems auf die impulsförmige Erregung  $u(t) = \delta(t)$  erhält man aus Gl. (5.17) die Beziehung

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{b} \delta(\tau) d\tau + d\delta(t) \\ &= \int_{-0}^{+0} \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{b} \delta(\tau) d\tau + d\delta(t), \end{aligned}$$

wobei das Integrationsintervall auf  $-0 \dots +0$ , also ein winziges die Null umschließendes Intervall, eingeschränkt wurde, da für alle anderen Werte von  $\tau$  die Stoßfunktion gleich null ist. In diesem Intervall ist  $e^{\mathbf{A}(t-\tau)} = e^{\mathbf{A}t}$  eine konstante Größe und kann vor das Integralzeichen gezogen werden. Damit erhält man

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b} \int_{-0}^{+0} \delta(\tau) d\tau + d\delta(t) \\ &= \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b} + d\delta(t). \end{aligned}$$

Diese Funktion wird als Gewichtsfunktion oder Impulsantwort bezeichnet und durch  $g(t)$  symbolisiert:

Gewichtsfunktion:  $g(t) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b} + d\delta(t)$ .

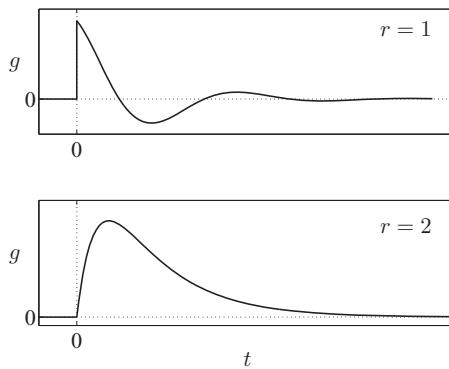
(5.119)

Da für viele reale Systeme der Skalar  $d$  gleich null ist, enthalten Gewichtsfunktionen physikalischer Systeme in der Regel keinen Impulsanteil, d. h., der zweite Summand in Gl. (5.119) entfällt. Für zwei stabile, nicht sprungfähige Systeme zweiter Ordnung sind die Gewichtsfunktionen in Abb. 5.19 dargestellt. Für die Gewichtsfunktion gilt, wie für alle Signale,  $g(t) = 0$  für  $t < 0$ .

Der Anfangswert  $g(0) = \mathbf{c}^T \mathbf{b}$  der Gewichtsfunktion nicht sprungfähiger Systeme ist nur für Systeme mit dem relativen Grad  $r = 1$  von null verschieden (Abb. 5.19 (oben)), denn aus Gl. (5.83) folgt

$$g(0) = \mathbf{c}^T \mathbf{b} \begin{cases} \neq 0 & \text{für } r = 1 \\ = 0 & \text{für } r > 1. \end{cases}$$

**Gewichtsfunktion in kanonischer Darstellung.** Wie aus dem Abschn. 5.3.4 bekannt ist, setzen sich alle Elemente der Matrixexponentialfunktion  $e^{\mathbf{A}t}$  aus Termen der Form  $e^{\lambda_i t}$  zusammen, wenn  $\mathbf{A}$  diagonalähnlich ist. Diese Tatsache kann man für die Gewichtsfunktion durch folgende Transformation verdeutlichen, in der  $\mathbf{V}$  wieder die Matrix der Eigenvektoren von  $\mathbf{A}$  ist:



**Abb. 5.19:** Gewichtsfunktion von zwei Systemen zweiter Ordnung

$$\begin{aligned}
 g(t) &= \mathbf{c}^T e^{At} \mathbf{b} + d \delta(t) \\
 &= \mathbf{c}^T \mathbf{V} \mathbf{V}^{-1} e^{At} \mathbf{V} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{b} + d \delta(t) \\
 &= \tilde{\mathbf{c}}^T \mathbf{V}^{-1} e^{At} \mathbf{V} \tilde{\mathbf{b}} + d \delta(t) \\
 &= \tilde{\mathbf{c}}^T \operatorname{diag} e^{\lambda_i t} \tilde{\mathbf{b}} + d \delta(t) \\
 g(t) &= \sum_{i=1}^n \tilde{c}_i \tilde{b}_i e^{\lambda_i t} + d \delta(t).
 \end{aligned} \tag{5.120}$$

Die Vektoren  $\tilde{\mathbf{c}}$  und  $\tilde{\mathbf{b}}$  sind die in den Gln. (5.39) und (5.40) definierten Vektoren des Zustandsraummodells in kanonischer Normalform und  $\tilde{c}_i$  und  $\tilde{b}_i$  die Elemente dieser Vektoren. Gleichung (5.120) kann durch

Gewichtsfunktion in kanonischer Darstellung:

$$g(t) = \sum_{i=1}^n g_i e^{\lambda_i t} + d \delta(t) \tag{5.121}$$

abgekürzt geschrieben werden, wobei

$$g_i = \tilde{c}_i \tilde{b}_i \tag{5.122}$$

gilt.

Diese Darstellung zeigt, dass in die Gewichtsfunktion dieselben Funktionen  $e^{\lambda_i t}$  eingehen, die die Eigenbewegung des Systems bestimmen (vgl. Gl. (5.61)). Die Gewichtsfunktion ist von einem oder mehreren dieser Terme unabhängig, wenn

$$g_i = \tilde{c}_i \tilde{b}_i = 0 \tag{5.123}$$

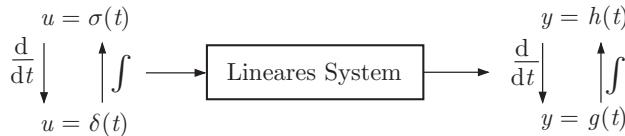
gilt. Es wird sich später herausstellen, dass diese Bedingung bedeutet, dass der Eigenwert  $\lambda_i$  entweder nicht steuerbar oder nicht beobachtbar ist, d. h., dass der Eigen-

vorgang  $e^{\lambda_i t}$  nicht durch die Eingangsgröße angeregt wird oder nicht die Ausgangsgröße beeinflusst (Kap. II-3). Diese Tatsache wird aus dem Signalflussgraphen des Systems in kanonischer Normalform offensichtlich. Gilt  $\tilde{b}_1 = 0$  oder  $\tilde{c}_1 = 0$ , so gibt es in Abb. 5.11 auf S. 139 entweder keine Kante vom Knoten  $u$  zum Knoten  $\tilde{x}_1$  oder keine Kante vom Knoten  $\tilde{x}$  zum Knoten  $y$ . Der Term  $e^{\lambda_1 t}$  geht deshalb nicht in die Gewichtsfunktion ein. Wenn die Bedingung (5.123) für mindestens ein  $i$  erfüllt ist, besteht die Gewichtsfunktion (5.121) also aus weniger als  $n$  Summanden.

**Erweiterung auf nicht diagonalähnliche Matrizen.** Die Darstellung (5.120) kann auf Systeme erweitert werden, deren Systemmatrix nicht diagonalähnlich ist. Wie im Abschn. 5.3.4 erläutert wurde, treten in der Eigenbewegung  $x_{\text{frei}}(t)$  bzw.  $y_{\text{frei}}(t)$  neben den e-Funktionen dann Terme der Form  $t^k e^{\lambda_i t}$  auf. Gleiches trifft auch auf die Gewichtsfunktion zu, so dass deren allgemeine Form

$$g(t) = \sum_{i=1}^{\bar{n}} \sum_{k=0}^{l_i - r_i} g_{ik} t^k e^{\lambda_i t} + d \delta(t) \quad (5.124)$$

lautet, wobei  $l_i$  die Vielfachheit des Eigenwertes  $\lambda_i$  und  $r_i$  die Anzahl der linear unabhängigen Eigenvektoren zu  $\lambda_i$  bezeichnen.  $\bar{n}$  gibt die Anzahl der verschiedenen Eigenwerte (unabhängig von deren Vielfachheit) an.



**Abb. 5.20:** Zusammenhang zwischen Gewichtsfunktion und Übergangsfunktion

### 5.4.3 Zusammenhang zwischen Gewichtsfunktion und Übergangsfunktion

Ein Vergleich von Gl. (5.113) und Gl. (5.119) zeigt, dass sich die Übergangsfunktion und die Gewichtsfunktion entsprechend

$$h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau \quad \text{bzw.} \quad g(t) = \frac{dh(t)}{dt} \quad (5.125)$$

ineinander umrechnen lassen (Abb. 5.20). Es gelten für den Ausgang also dieselben Beziehungen wie für den Eingang:

$$\sigma(t) = \int_0^t \delta(\tau) d\tau .$$

Aus Gl. (5.125) folgt für die statische Verstärkung des Systems die Beziehung

$$k_s = \int_0^{\infty} g(\tau) d\tau. \quad (5.126)$$

Um zu erkennen, dass die in Gl. (5.125) angegebene Beziehung tatsächlich zwischen der Übergangsfunktion (5.113) und der Gewichtsfunktion (5.119) gilt, muss man beachten, dass beide Funktionen für  $t < 0$  verschwinden und in der vollständigen Signaldarstellung (4.1) der Summand  $+d$  in Gl. (5.113) genauer  $+d\sigma(t)$  heißt. Im Übrigen ergibt sich Gl. (5.125) auch direkt aus der Beziehung (4.62) auf S. 84.

**Aufgabe 5.9\*** Bestimmung der statischen Verstärkung

Bestimmen Sie die statische Verstärkung  $k_s$  eines Systems aus dem Zustandsraummodell in Regelungsnormalform und in E/A-Normalform.  $\square$

**Aufgabe 5.10\*** Näherungsweise Berechnung der Gewichtsfunktion

Die in Abb. 5.9 auf S. 132 gezeigten Behälter können unter den in Aufgabe 5.5 angegebenen Voraussetzungen durch folgendes Zustandsraummodell beschrieben werden:

$$\text{Behälter : } \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 & 0 \\ 0,67 & -0,67 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ \begin{pmatrix} c_1(0) \\ c_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ y(t) = (0 \ 1) \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

1. Berechnen Sie die Gewichtsfunktion des Behältersystems.
2. Experimentell wollen Sie eine Näherung  $\tilde{g}$  der Gewichtsfunktion dadurch bestimmen, dass Sie die Systemantwort auf die Eingangsgröße

$$u(t) = \begin{cases} 5 \frac{\text{mol}}{\text{l}} & 0 \leq t \leq 0,25 \text{ min} \\ 0 \frac{\text{mol}}{\text{l}} & t > 0,25 \text{ min} \end{cases}$$

- messen. Ist die Impulsdauer klein genug, um eine gute Näherung erwarten zu können?
3. Berechnen Sie die Näherung (gegebenenfalls unter Verwendung der Lösung aus Aufgabe 5.5) und vergleichen Sie sie mit der exakten Lösung.  $\square$

**Aufgabe 5.11** Impulsförmige Erregung und Anfangszustand

Um die Gewichtsfunktion zu bestimmen, wird ein System durch einen Diracimpuls erregt, wobei es sich zur Zeit  $t = 0$  im Ruhezustand befindet. Zeigen Sie, dass die Erregung durch den Diracimpuls dadurch nachgebildet werden kann, dass man das autonome System ( $u(t) = 0$ ) für den Anfangszustand  $x_0 = b$  betrachtet.  $\square$

## 5.5 E/A-Verhalten linearer Systeme

### 5.5.1 Darstellung des E/A-Verhaltens mit Hilfe der Gewichtsfunktion

Unter Verwendung der Gewichtsfunktion (5.119) kann man die Beziehung (5.17)

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau) u(\tau) d\tau$$

für das E/A-Verhalten in einer anderen Form darstellen. Die rechte Seite stellt ein *Faltungsintegral* dar, das durch den Operator  $*$  abgekürzt wird:

$$g * u = \int_0^t g(t-\tau) u(\tau) d\tau. \quad (5.127)$$

Dabei gilt

$$g * u = \int_0^t g(t-\tau) u(\tau) d\tau = \int_0^t g(\tau) u(t-\tau) d\tau. \quad (5.128)$$

Es sei darauf hingewiesen, dass das Faltungsintegral nur berechnet werden kann, wenn die Verläufe von  $g$  und  $u$  für das Intervall  $0 \dots t$  bekannt sind. Um an diese Tatsache zu erinnern, wird die Faltung als  $g * u$  und nicht als  $g(t) * u(t)$  geschrieben, weil die zweite Schreibweise die falsche Interpretation nahe legt, dass nur die zur Zeit  $t$  vorkommenden Werte  $g(t)$  und  $u(t)$  in die Faltung eingehen. Mit dieser Schreibweise verkürzt sich Gl. (5.17) auf

E/A-Verhalten:  $y = g * u.$

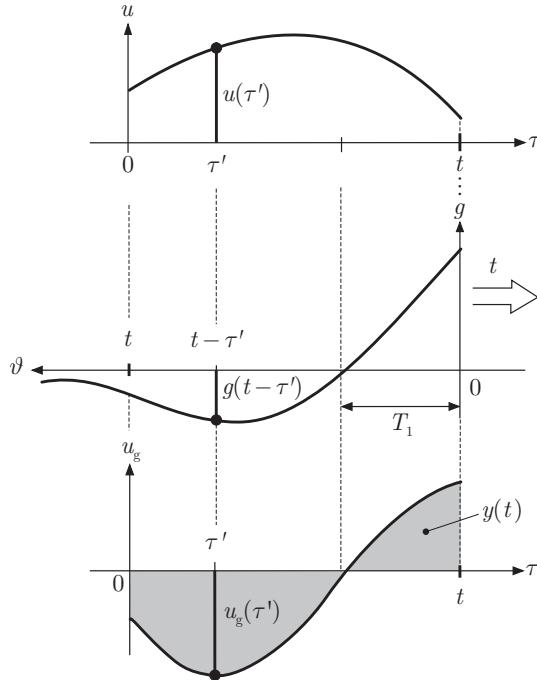
(5.129)

Diese Gleichung zeigt, dass die Gewichtsfunktion das dynamische Übertragungsverhalten vollständig beschreibt. Ist  $g(t)$  bekannt, so kann die Systemtrajektorie für beliebige Eingangsgrößen berechnet werden, vorausgesetzt, dass das System aus dem Ruhezustand erregt wird.

**Erläuterung.** Die in Gl. (5.128) angegebene Faltungsdefinition ist übrigens identisch mit der in vielen Literaturstellen angegebenen Beziehung

$$g * u = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) u(t-\tau) d\tau.$$

Aufgrund der Kausalität gilt  $g(t) = 0$  für  $t < 0$ , so dass das Integrationsintervall  $-\infty \dots 0$  keinen Beitrag zum Wert des Integrals bringt und die untere Integrationsgrenze auf 0 gesetzt werden kann. Die obere Integrationsgrenze kann von  $+\infty$  auf  $t$  verschoben werden, weil nach der hier verwendeten Vereinbarung das Eingangssignal  $u(t)$  für  $t < 0$  verschwindet.



**Abb. 5.21:** Berechnung der Ausgangsgröße  $y(t)$  mit Hilfe des Faltungsintegrals

**Interpretation der Faltung.** Die Darstellung des E/A-Verhaltens durch die Faltung (5.129) hat eine sehr anschauliche Interpretation, aus der auch die Bedeutung der Gewichtsfunktion für das Systemverhalten deutlich wird. Für diese Interpretation wird Gl. (5.127) in der Form

$$y(t) = \int_0^t u_g(\tau) d\tau$$

als Integral der gewichteten Eingangsgröße

$$u_g(\tau) = g(t - \tau) u(\tau)$$

geschrieben. Die Ausgangsgröße zu einem festen Zeitpunkt  $t$  ergibt sich also aus der Integration von  $u_g(\tau)$  nach  $\tau$  über das Zeitintervall  $0 \leq \tau \leq t$ .  $u_g(\tau')$  erhält man für einen festen Zeitpunkt  $\tau'$  aus der Multiplikation der Werte  $u(\tau')$  und  $g(t - \tau')$ , die in Abb. 5.21 untereinander stehen. Um Verwechslungen der Variablen vorzubeugen, wurde das Argument  $t - \tau$  der Gewichtsfunktion in der Abbildung durch  $\vartheta$  ersetzt.  $g(\vartheta)$  ist für steigendes  $\vartheta$  nach links abgetragen, wobei nur das Intervall  $0 \leq \vartheta \leq t$  von Interesse ist. Der Wert  $y(t)$  der Ausgangsgröße entspricht der grauen Fläche zwischen der Kurve von  $u_g$  und der Zeitachse.

Die Abbildung zeigt, dass die Ausgangsgröße  $y$  zu einem gegebenen Zeitpunkt  $t$  das Integral der gewichteten Eingangsgröße  $u_g$  ist, wobei die Wichtung durch  $g$  bestimmt wird. Durch diese Tatsache ist auch der Begriff „Gewichtsfunktion“ begründet.  $g(t - \tau)$  ist das Gewicht, mit dem der Wert  $u(\tau)$  in den Wert  $y(t)$  der Ausgangsgröße eingeht. Da die Gewichtsfunktion typischerweise für kleine Zeiten  $\vartheta$  groß und für große Zeiten klein ist, heißt das, dass die Ausgangsgröße stark vom aktuellen und den nur kurze Zeit zurückliegenden Werten der Eingangsgröße und weniger von den sehr weit zurückliegenden Werten beeinflusst wird.

Da  $g(t) = 0$  für  $t < 0$  gilt, ist die aktuelle Ausgangsgröße  $y(t)$  nicht von zukünftigen Werten der Eingangsgröße abhängig (Kausalität). Gleichbedeutend damit ist, dass der Wert  $u(\tau)$  der Eingangsgröße zur Zeit  $\tau$  die Ausgangsgröße nur für Zeitpunkte  $t \geq \tau$  beeinflussen kann (vgl. Abschn. 4.2.4).

Für fortschreitende Zeit  $t$  muss in Abb. 5.21 das nach links zeigende Koordinatensystem der Funktion  $g$  nach rechts verschoben werden. Damit verschiebt sich die Wichtung, die die Werte der Eingangsgröße bei der Berechnung von  $y(t)$  erfahren. Für die abgebildete Gewichtsfunktion verschiebt sich insbesondere das Intervall  $[0, T_1]$ , in dem die Gewichtsfunktion die Eingangsgröße  $u(t)$  positiv bewertet. In die Ausgangsgröße  $y(t)$  gehen deshalb stets die Werte der Eingangsgröße des unmittelbar vor der Zeit  $t$  liegenden Intervalls mit positivem Gewicht ein, während alle länger als  $T_1$  zurückliegenden Werte den Systemausgang mit negativem Gewicht beeinflussen.

Diese Überlegungen zeigen sehr deutlich, dass bei dynamischen Systemen die Ausgangsgröße durch *alle* zurückliegenden Werte der Eingangsgröße beeinflusst wird. Nur bei statischen Systemen ist  $y(t)$  allein von der zur selben Zeit wirkenden Eingangsgröße  $u(t)$  abhängig. Dynamische Systeme transformieren also die Funktion  $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  in die Funktion  $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ . Wenn sich das System zu Beginn nicht in der Ruhelage  $x(0) = \mathbf{0}$  befindet, hängt diese Transformation von  $x(0)$  ab.

Verwendet man als Eingangsgröße den Diracimpuls  $\delta(t)$ , so gilt

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau) \delta(\tau) d\tau = \int_0^t g(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = g(t),$$

d. h., der Systemausgang ist (erwartungsgemäß) gleich der Gewichtsfunktion. Für das Rechnen mit  $\delta(t)$  ist die verallgemeinerte Darstellung dieser Gleichung

$$y(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t_0 - \tau) \delta(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) \delta(t_0 - \tau) d\tau = g(t_0)$$

interessant. Durch die Faltung mit  $\delta(t - t_0)$  wird aus der Funktion  $g(t)$  der Funktionswert  $g(t_0)$  „ausgeblendet“.

**Aufgabe 5.12 Gewichtsfunktion und Übergangsfunktion eines RC-Gliedes**

Das in Abb. 5.4 auf S. 124 dargestellte RC-Glied hat das folgende Zustandsraummodell:

$$\Sigma_{\text{RC}} : \begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{1}{C(R_1+R_2)} x(t) + \frac{1}{C(R_1+R_2)} u(t), & x(0) = 0 \\ y(t) = \frac{R_1}{R_1+R_2} x(t) + \frac{R_2}{R_1+R_2} u(t) \end{cases}$$

1. Ermitteln Sie die Gewichtsfunktion und die Übergangsfunktion des RC-Gliedes  $\Sigma_{\text{RC}}$ .
2. Stellen Sie den Verlauf beider Funktionen für  $R_1 = R_2 = 10 \text{ k}\Omega$  und  $C = 1 \mu\text{F}$  für das Zeitintervall  $0 \leq t \leq 100 \text{ ms}$  grafisch dar.
3. Berechnen Sie für die Eingangsgröße

$$u(t) = u_0 \frac{t}{T}$$

mit  $u_0 = 5 \text{ V}$  und  $T = 0,1 \text{ s}$  mit Hilfe des Faltungsintegrals (5.129) die Ausgangsgröße  $y(t)$  zu den Zeitpunkten  $t_1 = 50 \text{ ms}$  und  $t_2 = 100 \text{ ms}$ . Zeichnen Sie die in Abb. 5.21 angegebenen Kurven für  $t = t_1$  und  $t = t_2$  und interpretieren Sie das Faltungsintegral.  $\square$

## 5.5.2 Übergangsverhalten und stationäres Verhalten

Dieser Abschnitt greift noch einmal die Frage auf, aus welchen Anteilen die Bewegung  $y(t)$  besteht. Gleichung (5.15) zeigte, dass sich  $y(t)$  aus der Eigenbewegung  $y_{\text{frei}}(t)$  und der erzwungenen Bewegung  $y_{\text{erzw}}(t)$  zusammensetzt. Unter Verwendung der kanonischen Zustandsvariablen entstand für die Eigenbewegung die Darstellung (5.62) auf S. 150, die zeigt, dass  $y_{\text{frei}}(t)$  aus  $n$  e-Funktionen  $e^{\lambda_i t}$  besteht. Jetzt soll eine ähnliche Darstellung für die erzwungene Bewegung abgeleitet werden, wobei davon ausgegangen wird, dass  $x_0 = 0$  gilt, so dass  $y(t) = y_{\text{erzw}}(t)$  ist.

Die folgenden Untersuchungen werden für Eingangsgrößen

$$u(t) = \sum_{j=1}^m u_j e^{\mu_j t} \quad (5.130)$$

durchgeführt, die sich als Summe von e-Funktionen darstellen lassen. Die Faktoren  $u_j$  und die im Exponenten auftretenden Parameter  $\mu_j$  sind reell oder treten als konjugiert-komplexe Paare auf. Damit ist  $u(t)$  in jedem Falle eine reellwertige Funktion. Die Darstellung (5.130) schließt beispielsweise die sprungförmige Signale

$$u(t) = u_1 e^{0t} = u_1 \sigma(t)$$

und die kosinusförmige Eingangsgröße

$$u(t) = e^{j\omega t} + e^{-j\omega t} = 2 \cos \omega t \quad (5.131)$$

ein. Im Kap. 6 wird gezeigt, dass alle praktisch interessanten Eingangssignale in der Form (5.130) dargestellt werden können, wobei möglicherweise unendlich viele Summanden auftreten.

Zur Vereinfachung der folgenden Rechnungen wird angenommen, dass  $\lambda_i \neq \mu_j$  für alle  $i, j$  gilt und dass das System nicht sprungfähig ist ( $d = 0$ ).

Das E/A-Verhalten  $y = g * u$  wird für die Einganggröße (5.130) mit Hilfe der Gewichtsfunktion in kanonischer Darstellung (5.121) untersucht. Es gilt

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m g_i u_j e^{\lambda_i(t-\tau)} e^{\mu_j \tau} d\tau \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m g_i u_j e^{\lambda_i t} \int_0^t e^{(\mu_j - \lambda_i)\tau} d\tau \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{g_i u_j}{\lambda_i - \mu_j} e^{\lambda_i t} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{g_i u_j}{\mu_j - \lambda_i} e^{\mu_j t}, \end{aligned}$$

also

$$y(t) = \sum_{i=1}^n g_i \underbrace{\left( \sum_{j=1}^m \frac{u_j}{\lambda_i - \mu_j} \right)}_{y_{ii}} e^{\lambda_i t} + \sum_{j=1}^m u_j \underbrace{\left( \sum_{i=1}^n \frac{g_i}{\mu_j - \lambda_i} \right)}_{y_{sj}} e^{\mu_j t}. \quad (5.132)$$

Kürzt man die in den Klammern stehenden Terme mit  $y_{ii}$  und  $y_{sj}$  ab, so erhält man

$$y(t) = \sum_{i=1}^n y_{ii} g_i e^{\lambda_i t} + \sum_{j=1}^m y_{sj} u_j e^{\mu_j t}. \quad (5.133)$$

Gleichung (5.133) zeigt, dass sich die erzwungene Bewegung entsprechend

Zerlegung der erzwungenen Bewegung:

$$y_{erzw}(t) = y_{ii}(t) + y_s(t)$$

(5.134)

aus zwei Anteilen zusammensetzt, nämlich aus

$$y_{ii}(t) = \sum_{i=1}^n y_{ii} g_i e^{\lambda_i t} \quad (5.135)$$

und

$$y_s(t) = \sum_{j=1}^m y_{sj} u_j e^{\mu_j t}. \quad (5.136)$$

Der erste Anteil beschreibt das *Übergangsverhalten* (das transiente Verhalten, den Einschwingvorgang), der zweite das *stationäre Verhalten* (den eingeschwungenen

Zustand). Wie später erläutert wird, klingt das Übergangsverhalten – wie auch die Eigenbewegung – stabiler Systeme für  $t \rightarrow \infty$  ab, so dass der Ausgang stabiler Systeme für große Zeiten nur durch das stationäre Verhalten beeinflusst wird:

$$y(t) \rightarrow y_s(t) \quad \text{für } t \rightarrow \infty. \quad (5.137)$$

**Übergangsverhalten.** Das Übergangsverhalten entsteht, weil die Eigenvorgänge des Systems durch die Eingangsgröße  $u(t)$  angeregt werden. Es besteht aus gewichteten Termen  $e^{\lambda_i t}$ .

Aus Gl. (5.135) ist ersichtlich, dass der  $i$ -te Term  $e^{\lambda_i t}$  im Übergangsverhalten nicht vorkommt, wenn  $g_i = 0$  gilt. Diese Bedingung stimmt mit Gl. (5.123) auf S. 173 überein. Sie trifft für Modi zu, die entweder nicht durch die Eingangsgröße angeregt werden ( $\tilde{b}_i = 0$ ) oder keinen Einfluss auf die Ausgangsgröße haben ( $\tilde{c}_i = 0$ ). Diese Modi werden später als nicht steuerbar bzw. nicht beobachtbar bezeichnet (vgl. Kap. II-3). Die Steuerbarkeit und die Beobachtbarkeit der Modi sind Systemeigenschaften, die unabhängig von der verwendeten Eingangsgröße sind.

Der  $i$ -te Eigenvorgang  $e^{\lambda_i t}$  kommt auch dann nicht im Übergangsverhalten vor, wenn

$$y_{ii} = \sum_{j=1}^m \frac{u_j}{\lambda_i - \mu_j} = 0 \quad (5.138)$$

gilt. Ob diese Bedingung erfüllt ist, hängt vom Eingangssignal ab und zwar sowohl von sämtlichen im Eingangssignal vorkommenden Parametern  $\mu_j$ , ( $j = 1, \dots, m$ ) als auch von allen dazugehörigen Amplituden  $u_j$ , ( $j = 1, \dots, m$ ). Man kann spezielle Eingangssignale auswählen, für die  $y_{ii} = 0$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) gilt und für die folglich das Übergangsverhalten verschwindet ( $y_{ii}(t) = 0$ ), aber im allgemeinen Fall muss man davon ausgehen, dass ein Eingangssignal alle steuerbaren und beobachtbaren Modi anregt.

**Stationäres Verhalten.** Das stationäre Verhalten setzt sich aus den e-Funktionen  $e^{\mu_j t}$  zusammen, die durch die Eingangsgröße vorgegeben sind. Das System verändert die Wichtungen, mit denen diese e-Funktionen in der Summe (5.136) auftreten, so dass an Stelle von  $u_j$  in dieser Summe die Wichtung  $y_{sj} \cdot u_j$  steht. Der Verstärkungsfaktor  $y_{sj}$  für den  $j$ -ten Term  $u_j e^{\mu_j t}$  der Eingangsgröße hängt von der Frequenz  $\mu_j$  sowie den durch  $g_i$  und  $\lambda_i$  beschriebenen Systemeigenschaften, aber nicht von der Eingangsamplitude  $u_j$  ab.

Von besonderem Interesse ist der Fall, dass ein Term  $e^{\mu_j t}$  zwar in  $u(t)$ , nicht jedoch in  $y(t)$  auftritt. Aus Gl. (5.132) ist ersichtlich, dass dies genau dann der Fall ist, wenn  $y_{sj} = 0$  gilt, wenn also für  $\mu_j$  die Bedingung

Nullstelle $\mu_j$ für nicht sprungfähige Systeme:	$\sum_{i=1}^n \frac{g_i}{\mu_j - \lambda_i} = 0$	(5.139)
-------------------------------------------------------	--------------------------------------------------	---------

erfüllt ist. Ob Gl. (5.139) für einen gegebenen reellen oder komplexen Wert  $\mu_j$  gilt, hängt ausschließlich von den durch  $g_i$  und  $\lambda_i$  beschriebenen Systemeigenschaften,

aber nicht von der Amplitude  $u_j$  der Eingangsgröße ab. Der Wert  $\mu_j$  aus Gl. (5.139) beschreibt eine Funktion  $e^{\mu_j t}$ , die das System nicht überträgt. Er wird deshalb als *Nullstelle* bezeichnet. Seine Bedeutung für das Systemverhalten wird im Abschn. 5.5.3 ausführlich dargestellt.

**Beispiel 5.9 Übergangsverhalten und stationäres Verhalten eines Systems erster Ordnung**

Als einfaches Beispiel wird das System erster Ordnung

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t), \quad x(0) = 0 \quad (5.140)$$

mit der Gewichtsfunktion  $g(t) = be^{at}$  behandelt. Für die sinusförmige Erregung

$$u(t) = \sin \omega t = \frac{1}{2j} e^{j\omega t} + \frac{-1}{2j} e^{-j\omega t} \quad (5.141)$$

erhält man aus Gl. (5.132) mit

$$\begin{aligned} n &= 1 & g_1 &= b & \lambda_1 &= a \\ m &= 2 & u_1 &= \frac{1}{2j} & \mu_1 &= j\omega \\ && u_2 &= \frac{-1}{2j} & \mu_2 &= -j\omega \end{aligned}$$

die Ausgangsgröße

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{b\omega}{\omega^2 + a^2} e^{at} + \frac{b}{2} \frac{-\omega + ja}{\omega^2 + a^2} e^{j\omega t} + \frac{b}{2} \frac{-\omega - ja}{\omega^2 + a^2} e^{-j\omega t} \\ &= \frac{b\omega}{\omega^2 + a^2} e^{at} - \frac{b}{\omega^2 + a^2} (\omega \cos \omega t + a \sin \omega t). \end{aligned}$$

Der erste Term entspricht dem Übergangsverhalten, der zweite dem stationären Verhalten. Abbildung 5.22 verdeutlicht diesen Sachverhalt für  $a = -1$ ,  $b = 1$  und  $\omega = 10$ .

Beginnt das System seine Bewegung bei einer Anfangsauslenkung  $x_0 \neq 0$ , so wird die bisher betrachtete erzwungene Bewegung von der Eigenbewegung

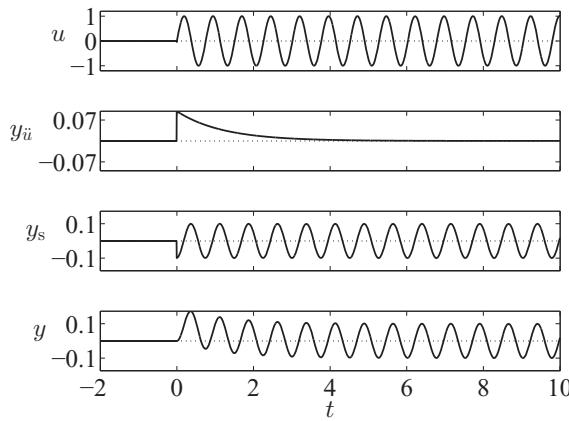
$$y_{\text{frei}}(t) = x_0 e^{at}$$

überlagert. Offenbar kompensiert die freie Bewegung das Übergangsverhalten, wenn für den Anfangszustand die Beziehung

$$x_0 = -\frac{b\omega}{\omega^2 + a^2}$$

gilt. Für genau diese eine Anfangsbedingung folgt das System sofort seinem stationären Verhalten ( $y(t) = y_s(t)$ ).  $\square$

**Erweiterungen.** Die bisherigen Betrachtungen lassen sich auf verallgemeinerte Systemklassen und Eingangsgrößen erweitern. Wenn das System eine nicht diagonalähnliche Systemmatrix  $A$  besitzt, so treten in der Gewichtsfunktion  $g(t)$  außer den e-Funktionen auch Terme der Form  $t^k e^{\lambda_i t}$  auf (vgl. Gl. (5.124)). Demzufolge erscheinen derartige Terme auch in der Ausgangsgröße  $y(t)$ .



**Abb. 5.22:** Übergangsverhalten und stationäres Verhalten eines Systems erster Ordnung

Ähnlich verhält es sich mit der Erweiterung der Eingangsgrößen auf Signale der Form

$$u(t) = \sum_{j=1}^{\bar{m}} \sum_{k=0}^{m_j} u_{jk} t^k e^{\mu_j t},$$

für die im Ausgangssignal Terme der Form  $t^k e^{\mu_j t}$  auftreten.

Ist das System sprungfähig, so gilt Gl. (5.132), wenn die zweite Klammer durch den Ausdruck

$$\left( \sum_{i=1}^n \frac{g_i}{\mu_j - \lambda_i} + d \right)$$

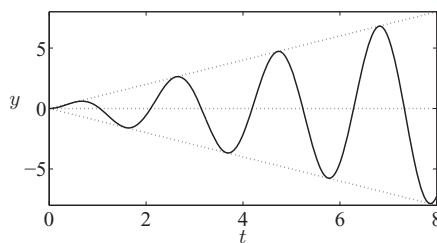
ersetzt wird.  $\mu_j$  ist dann eine Nullstelle des Systems, wenn an Stelle von Gl. (5.139) die Beziehung

$$y_{sj} = \sum_{i=1}^n \frac{g_i}{\mu_j - \lambda_i} + d = 0 \quad (5.142)$$

gilt.

Alle diese Erweiterungen lassen sich einfach nachvollziehen, wenn man den oben angegebenen Rechenweg noch einmal unter den erweiterten Voraussetzungen durchgeht.

**Resonanz.** Terme mit Potenzen von  $t$  erscheinen im Ausgangssignal auch dann, wenn die soeben behandelten Erweiterungen nicht zutreffen, jedoch  $\lambda_i = \mu_j$  für ein oder mehrere Paare  $(i, j)$  gilt. In diesem Fall ist die Eingangsgröße in Resonanz mit Eigenvorgängen des Systems. Dieser Fall ist aus vielen Anwendungen bekannt. Erregt man ein schwingungsfähiges System wie beispielsweise einen Schwingkreis oder einen Feder-Masse-Schwinger mit einem Signal, in dem die Eigenfrequenz des



**Abb. 5.23:** Verhalten eines Oszillators bei Resonanz

Systems vorkommt, so erhält man am Ausgang ein aufklingendes Signal. Abbildung 5.23 zeigt die Ausgangsgröße eines Systems 2. Ordnung mit den Eigenwerten  $\lambda_{1/2} = \pm j\omega$ , das durch die Eingangsgröße  $u(t) = \sin \omega t$  angeregt wird. In der Systemantwort  $y(t)$  kommen Summanden der Form  $t \sin \omega t$  und  $t \cos \omega t$  vor, die das in der Abbildung gezeigte aufklingende Ausgangssignal erzeugen.

**Diskussion.** Die in diesem Abschnitt eingeführte Zerlegung der erzwungenen Bewegung in Übergangsverhalten und stationäres Verhalten ist für die Regelungstechnik sehr wichtig. Beim Reglerentwurf wird sich zeigen, dass der Sollwert nur dann ohne bleibende Regelabweichung erreicht wird, wenn das stationäre Verhalten  $y_s(t)$  des Regelkreises genau mit dem Führungssignal  $w(t)$  übereinstimmt ( $y_s(t) = w(t)$ ). Für die Bewertung des dynamischen Verhaltens des Regelkreises ist das Übergangsverhalten  $y_{\ddot{u}}(t)$  maßgebend, denn dieses beschreibt, wie lange es dauert, bis die Regelgröße den Sollwert annimmt.

In anderen Wissenschaften spielt das Übergangsverhalten eine untergeordnete Rolle. Beispielsweise beruhen die in der Wechselstromlehre verwendeten Zeigerdiagramme auf der Annahme, dass das Übergangsverhalten abgeklungen ist und sich das Systemverhalten in dem durch einen rotierenden Zeiger dargestellten sinusförmigen stationären Verhalten  $y_s(t)$  äußert.

**Aufgabe 5.13** *Zerlegung der Übergangsfunktion und der Gewichtsfunktion*

Berechnen Sie die Übergangsfunktion und die Gewichtsfunktion eines Systems erster Ordnung und zerlegen Sie beide Funktionen in das Übergangsverhalten und das stationäre Verhalten.  $\square$

**Aufgabe 5.14\*** *Übergangsverhalten und stationäres Verhalten eines Regelkreises*

Betrachten Sie einen einfachen Regelkreis  $\bar{\Sigma}$ , der aus der Regelstrecke  $\Sigma_S$  erster Ordnung

$$\Sigma_S : \begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) + bu(t), & x(0) = 0 \\ y(t) = cx(t) \end{cases}$$

und einer proportionalen Rückführung

$$\Sigma_R : \quad u(t) = k(w(t) - y(t))$$

besteht.

1. Stellen Sie das Zustandsraummodell des Regelkreises  $\bar{\Sigma}$  auf.
2. Ermitteln Sie die Gewichtsfunktion zwischen der Eingangsgröße  $w(t)$  und der Ausgangsgröße  $y(t)$ .
3. Berechnen Sie die Regelgröße  $y(t)$  für eine sprungförmige Führungsgröße  $w(t) = \bar{w}\sigma(t)$  und stellen Sie das Übergangsverhalten, das stationäre Verhalten sowie die Summe beider Bewegungen grafisch dar.
4. Interpretieren Sie das Ergebnis bezüglich der Zielstellung der Regelung  $y(t) \stackrel{!}{=} w(t)$ . Wie hängt die Erfüllung dieses Ziels vom Reglerparameter  $k$  bzw. von den Streckenparametern ab?
5. Verallgemeinern Sie Ihr Ergebnis, indem Sie jetzt die Führungsgröße  $w(t) = \bar{w}e^{\mu t}$  betrachten. Unter welcher Bedingung an die Parameter der Regelstrecke stimmt das stationäre Verhalten des Regelkreises mit der Führungsgröße  $w(t)$  überein?  $\square$

### 5.5.3 Bedeutung der Nullstellen für das Übertragungsverhalten

Die in der Gl. (5.139) eingeführten Nullstellen kennzeichnen Eingangssignale, die durch ein System nicht übertragen werden. Wenn das System die Nullstellen  $\mu_j$ , ( $j = 1, 2, \dots, q$ ) besitzt, so verschwindet das stationäre Verhalten  $y_s(t)$  für Eingangsgrößen der Form

$$u(t) = \sum_{j=1}^q u_j e^{\mu_j t} \quad (5.143)$$

mit beliebigen Amplituden  $u_j$ .

|| Eine Nullstelle  $\mu_j$  beschreibt den Exponenten der Zeitfunktion  $e^{\mu_j t}$ , die das System nicht überträgt („nullt“).

Das heißt jedoch nicht, dass der Ausgang für alle Zeiten  $t$  gleich null ist, denn die Eingangsgröße regt auch die Modi des Systems an und erzeugt das Übergangsverhalten  $y_{ui}$  entsprechend Gl. (5.138). Dies wird durch das folgende Beispiel illustriert.

#### Beispiel 5.10 Nullstellen eines Feder-Masse-Dämpfer-Systems

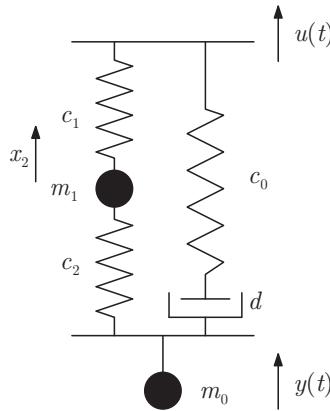
Das in Abb. 5.24 gezeigte mechanische System wird für die Federkonstanten  $c_0 = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ ,  $c_1 = 0,75 \frac{\text{N}}{\text{m}}$  und  $c_2 = 0,4 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ , den Dämpfungskoeffizienten  $d = 3 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$  und die Massen  $m_0 = 1 \text{ kg}$  und  $m_1 = 1 \text{ kg}$  unter Vernachlässigung der Erdbeschleunigung betrachtet. Es ist durch das Zustandsraummodell

$$\Sigma_{\text{FMD}} : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{c_1+c_2}{m_1} & 0 & 0 & \frac{c_2}{m_1} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{c_0}{d} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{c_2}{m_0} & -\frac{c_0}{m_0} & 0 & -\frac{c_2}{m_0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} \frac{c_1}{m_1} \\ 0 \\ \frac{c_0}{d} \\ \frac{c_0}{m_0} \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1) \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (5.144)$$

beschrieben und hat die Nullstellen

$$s_{01,2} = 0,0344 \pm j1,206 \frac{1}{\text{s}}$$

$$s_{03} = -0,0687 \frac{1}{\text{s}}.$$



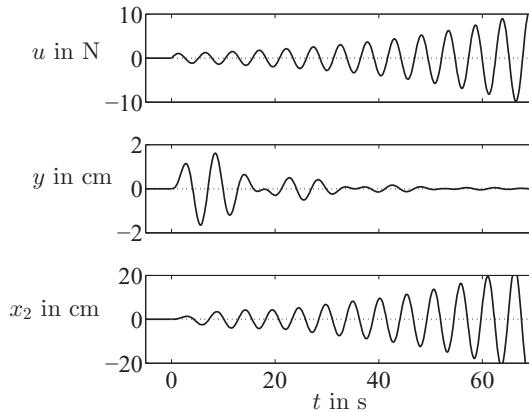
**Abb. 5.24:** Feder-Masse-Dämpfer-System  $\Sigma_{\text{FMD}}$

Aus dem konjugiert komplexen Nullstellenpaar wird die Eingangsgröße

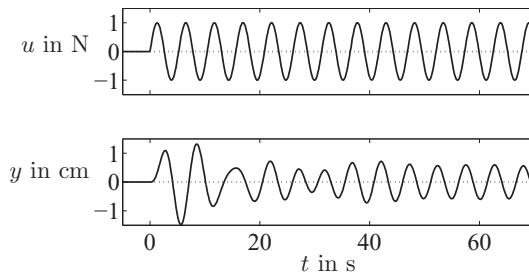
$$u(t) = \frac{1}{2j} e^{(0,0344 + j1,206)t} - \frac{1}{2j} e^{(0,0344 - j1,206)t} = e^{0,0344 t} \sin 1,206 t$$

abgeleitet, mit der man für das aus dem Ruhezustand erregte System die in Abb. 5.25 (Mitte) gezeigte Ausgangsgröße  $y(t)$  erhält. Offensichtlich gilt  $y(t) \rightarrow 0$ , obwohl das Eingangssignal das System immer stärker anregt. Das System überträgt diese aufklingende Sinusschwingung nicht, da deren Frequenz mit den Nullstellen  $s_{01,2}$  übereinstimmt.

Physikalisch ist dieses Verhalten dadurch begründet, dass die Masse  $m_1$  in eine aufklingende Schwingung versetzt wird, die entgegen der Eingangsgröße wirkt, so dass die Summe der Kräfte auf die Masse  $m_0$  verschwindet und der Dämpfer die Masse  $m_0$  zur Ruhe kommen lässt (unterer Teil von Abb. 5.25). Es ist wichtig zu erkennen, dass die Frequenz dieser inneren Bewegung des Systems nicht wie bei einer Eigenbewegung durch einen Pol, sondern durch eine Nullstelle des Systems festgelegt wird. Das lineare Modell gilt natürlich nur solange, wie die Federkräfte linear von den Federlängen abhängen.



**Abb. 5.25:** Eingangsgröße, Ausgangsgröße und Position der Masse  $m_1$  bei Erregung durch  $u(t) = e^{0,0344t} \sin 1,206 t$



**Abb. 5.26:** Verhalten des Feder-Masse-Dämpfer-Systems bei sinusförmiger Erregung  $u(t) = \sin 1,206 t$

Verändert man die Erregung nur geringfügig, so besitzt das System ein nicht verschwindendes Verhalten, wie es Abb. 5.26 für die Eingangsgröße  $u(t) = \sin 1,206 t$  zeigt.

**Diskussion.** Das Beispiel zeigt, dass Nullstellen typischerweise dann auftreten, wenn sich zwei oder mehr parallele Ursache-Wirkungsketten überlagern. Bei dem mechanischen System führen diese Wirkungswege von der Eingangsgröße über die beiden linken Federn und die Masse  $m_1$  einerseits und über die rechte Feder und den Dämpfer andererseits. Die Nullstellen sind die Frequenzen, für die die Überlagerung beider Wirkungsketten verschwindet.  $\square$

**Berechnung der Nullstellen aus dem Zustandsraummodell.** Nullstellen sind neben den Eigenwerten der Systemmatrix wichtige Kenngrößen eines Systems. Es wird sich im Kap. 6 zeigen, dass die Nullstellen in der Frequenzbereichsbeschreibung besonders leicht zu erkennen sind. Die hier durchgeführten Betrachtungen zeigen jedoch, dass die Nullstellen nichts Spezifisches von Frequenzbereichsbetrachtungen sind, sondern Systemeigenschaften, die das zeitliche Verhalten beeinflussen und folglich auch aus Modellen im Zeitbereich ermittelt werden können.

Die Definitionsgleichung (5.142) für Nullstellen bezieht sich auf die kanonische Normalform des Zustandsraummodells und soll im Folgenden in eine einfache Berechnungsvorschrift umgeformt werden. Für die angegebene Summe gilt unter Verwendung der für die kanonische Normalform eingeführten Größen:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{b}_i \tilde{c}_i}{\mu - \lambda_i} + d &= \tilde{c}^T \begin{pmatrix} \mu - \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu - \lambda_n \end{pmatrix}^{-1} \tilde{b} + d \\
 &= \tilde{c}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V} \begin{pmatrix} \mu - \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu - \lambda_n \end{pmatrix}^{-1} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V} \tilde{b} + d \\
 &= \mathbf{c}^T (\mu \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d \\
 &= \det(\mathbf{c}^T (\mu \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d) \\
 &= \frac{1}{\det(\mu \mathbf{I} - \mathbf{A})} \det \begin{pmatrix} \mu \mathbf{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{b} \\ \mathbf{c}^T & d \end{pmatrix} \\
 &= 0. \tag{5.146}
 \end{aligned}$$

Folglich ist  $\mu$  genau dann eine Nullstelle des Systems, wenn die Gleichung

$$\text{Nullstelle } \mu: \quad \det \begin{pmatrix} \mu \mathbf{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{b} \\ \mathbf{c}^T & d \end{pmatrix} = 0 \tag{5.147}$$

erfüllt ist. Voraussetzung dafür ist wie bei allen vorherigen Berechnungen, dass die Nullstellen nicht mit Eigenwerten  $\lambda_i$  der Systemmatrix übereinstimmen. Wenn man die Determinante in Gl. (5.147) ausrechnet, so erhält man ein Polynom in  $\mu$ , dessen Nullstellen die gesuchten Systemnullstellen sind. Aus Gl. (5.147) wird offensichtlich, dass die Nullstellen  $\mu$  – im Unterschied zu den Systemeigenwerten – nicht nur von der Systemmatrix  $\mathbf{A}$ , sondern auch von den beiden Vektoren  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}^T$  abhängen, also von der Angriffsstellen der Aktoren und Sensoren.

Für die Regelungsnormalform führt Gl. (5.147) auf das Polynom

$$b_q \mu^q + b_{q-1} \mu^{q-1} + \dots + b_0 = 0, \tag{5.148}$$

in dem die Koeffizienten  $b_i$  aus der rechten Seite der Differentialgleichung stehen. Ein System mit relativem Grad  $r$  hat  $q = n - r$  Nullstellen.

### 5.5.4 Nulldynamik

Die Nullstellen  $\mu_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, q$ ) eines Systems wurden als wichtige Kenngrößen des E/A-Verhaltens eingeführt. Für die Eingangsgröße (5.143) verschwindet das stationäre Verhalten  $y_s(t)$  trotz bleibender Anregung. In diesem Abschnitt wird untersucht, welche Zustandsbewegung  $x(t)$  ein System ausführen muss, um die Wirkung

der Eingangsgröße auf den Ausgang zu blockieren. Im Beispiel 5.10 war für ein Feder-Masse-Dämpfer-System zu sehen, dass sich dafür die Masse  $m_1$  bei einer aufklingenden sinusförmigen Erregung mit derselben Frequenz wie die Eingangsgröße bewegen muss. Dieser Abschnitt wird die Notwendigkeit einer solchen Zustandsbewegung allgemein zeigen:

|| Damit ein System eine Eingangsgröße  $e^{\mu t}$  auslöschen kann, muss eine Bewegung des Zustands  $\mathbf{x}(t)$  mit dem Modus  $e^{\mu t}$  stattfinden.

Die folgenden Untersuchungen gehen von der allgemeineren Frage aus, für welche Eingangsgrößen  $u(t)$  und welche Anfangszustände  $\mathbf{x}_0$  der Ausgang für alle Zeiten verschwindet:

$$y(t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (5.149)$$

Dass man am Ausgang „nichts sieht“, heißt nicht, dass sich das System intern nicht bewegt.

Der innere dynamische Vorgang, der am Ausgang nicht sichtbar ist, ist die Nulldynamik, die man mit der E/A-Normalform (5.90) – (5.93) des Zustandsraummodells sehr einfach darstellen kann. Sie wird dort durch den zweiten Teilvektor  $\mathbf{x}_N(t)$  des Zustands beschrieben, für den unter der Bedingung (5.149) die Gln. (5.103) und (5.104) gelten. Es muss jetzt untersucht werden, für welche Eingangsgröße  $u(t)$  die Ausgangsgröße  $y(t)$  die Bedingung (5.149) erfüllt.

Damit die Ausgangsgröße für alle Zeiten verschwindet, müssen zwei Bedingungen erfüllt sein. Erstens muss der Ausgang zum Zeitpunkt  $t = 0$  zusammen mit seinen  $r - 1$  ersten Ableitungen verschwinden. Diese Forderung wird in der E/A-Normalform durch die Beziehung

$$\mathbf{x}_I(0) = \mathbf{0} \quad (5.150)$$

ausgedrückt, für die die  $r$  Integratoren der E/A-Dynamik im oberen Teil von Abb. 5.15 auf S. 163 verschwindende Anfangswerte haben. Für ein Zustandsraummodell in beliebiger Form muss der Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  folglich die Bedingung

$$\mathbf{T}_o \mathbf{x}_0 = \mathbf{0} \quad (5.151)$$

mit der Matrix  $\mathbf{T}_o$  aus Gl. (5.100) erfüllen.

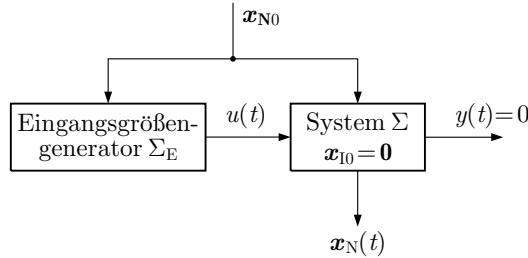
Zweitens muss die Eingangsgröße  $u(t)$  den versteckten Eingang  $y_N(t)$  kompensieren

$$u(t) + y_N(t) = 0, \quad (5.152)$$

so dass die E/A-Dynamik (5.95) nicht angeregt wird (vgl. Abb. 5.16 auf S. 163). Aus dieser Bedingung erhält man unter Verwendung von Gl. (5.104) die Eingangsgröße

$$u(t) = -\mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N(t) = -\mathbf{c}_N^T e^{\mathbf{A}_{NN} t} \mathbf{x}_{N0}, \quad (5.153)$$

die vom Anfangszustand  $\mathbf{x}_{N0}$  der internen Dynamik abhängt.

**Abb. 5.27:** Nulldynamik eines Systems

Das Ergebnis dieser Untersuchungen lässt sich anhand von Abb. 5.27 zusammenfassen. Der abgebildete Eingangsgrößengenerator  $\Sigma_E$  erzeugt die Eingangsgröße  $u(t)$  entsprechend Gl. (5.153). Sein Zustandsraummodell lautet folglich

Eingangsgrößengenerator:

$$\Sigma_E : \begin{cases} \dot{x}_N(t) = A_{NN}x_N(t), & x_N(0) = x_{N0} \\ u(t) = -c_N^T x_N(t). \end{cases} \quad (5.154)$$

Den Anfangszustand  $x_0$  des gesteuerten Systems  $\Sigma$  im Originalzustandsraum erhält man aus der Bedingung (5.150):

$$x_0 = T_E \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ x_{N0} \end{pmatrix} = T_N x_{N0} \quad (5.155)$$

mit  $T_N$  aus Gl. (5.101). Für diesen Anfangszustand und die Eingangsgröße (5.154) verschwindet der Systemausgang  $y(t)$  für alle Zeiten  $t$  und das System durchläuft die durch Gl. (5.104) beschriebene Zustandstrajektorie

$$x(t) = T_{Ne} A_{NN}^t x_{N0}. \quad (5.156)$$

Sowohl die Eingangsgröße (5.153) als auch die Nulldynamik (5.156) werden durch die Matrix  $A_{II}$  bestimmt, die die charakteristische Gleichung

$$b_q \lambda^q + b_{q-1} \lambda^{q-1} + \dots + b_0 = 0$$

hat. Ein Vergleich mit Gl. (5.148) zeigt, dass die Eigenwerte der Matrix  $A_{NN}$  mit den Nullstellen  $\mu_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, q$ ) des betrachteten Systems übereinstimmen. Sowohl die Eingangsgröße (5.153) als auch die Nulldynamik (5.156) sind demzufolge Summen von e-Funktionen  $e^{\mu_i t}$ , deren Exponenten durch die Nullstellen des Systems  $\Sigma$  festgelegt sind (und nicht durch die Eigenwerte der Matrix  $A$ !).

Die Ergebnisse lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

- Damit ein System die Wirkung einer Eingangsgröße  $u(t)$  auf den Ausgang  $y(t)$  auslöschen kann, muss es eine Zustandsbewegung ausführen, deren Modi durch die Nullstellen  $\mu_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, q$ ) bestimmt sind.
- Damit eine Eingangsgröße  $u(t)$  in der Lage ist, den Ausgang  $y(t)$  für alle Zeiten  $t \geq 0$  bei null zu halten, muss sie die Form (5.143) haben. Die Amplituden  $u_j$  der einzelnen Summanden hängen vom Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  des Systems ab, der so gewählt sein muss, dass außer dem Ausgang  $y(t)$  auch dessen  $r - 1$  erste Ableitungen verschwinden und der deshalb in der Form (5.155) darstellbar ist.

Für  $r = n$  und folglich  $q = 0$  gibt es keine Nulldynamik. Die Bedingung (5.149) kann dann nur für  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  und  $u(t) = 0$  erfüllt werden. Für Systeme mit kleinerem relativen Grad  $r$  kann das System eine Bewegung in einem  $(n - r)$ -dimensionalen Teilraum des Zustandsraumes ausführen, ohne dass sich der Ausgang verändert. Die Bewegung kann bei Anfangszuständen der Form (5.155) beginnen, die in diesem Teilraum liegen.

### Beispiel 5.11 Nulldynamik eines Feder-Masse-Dämpfer-Systems

Um die Nulldynamik des im Beispiel 5.10 beschriebenen mechanischen Systems zu untersuchen, wird das Zustandsraummodell (5.144) für die angegebenen Parameter in die E/A-Normalform transformiert:

$$\Sigma_{\text{FMD}} : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{\text{E}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1,100 & -0,333 & 0,010 & 0,178 & 0,067 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -0,100 & -1,450 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}_{\text{E}}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) \mathbf{x}_{\text{E}}(t). \end{cases}$$

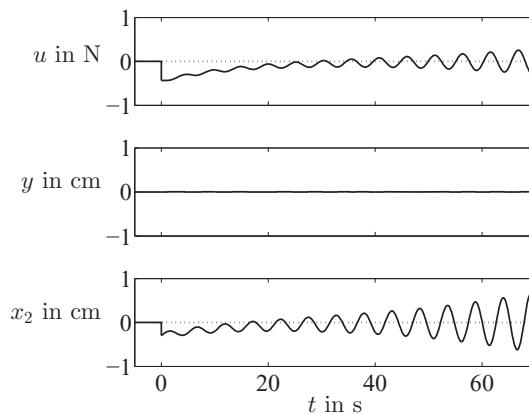
Der Eingangsgrößengenerator (5.154) ist durch

$$\Sigma_{\text{E}} : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{\text{N}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0,100 & -1,450 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}_{\text{N}}(t), \quad \mathbf{x}_{\text{N}}(0) = \mathbf{x}_{\text{N}0} \\ u(t) = -(0,010 \ 0,178 \ 0,067) \mathbf{x}_{\text{N}}(t) \end{cases}$$

beschrieben. Da die Eigenwerte der angegebenen Systemmatrix mit den Nullstellen des Feder-Masse-Dämpfer-Systems übereinstimmen, erzeugt der Eingangsgrößengenerator eine von seinem Anfangszustand  $\mathbf{x}_{\text{N}0}$  abhängige Linearkombination der im Beispiel 5.10 verwendeten aufklingenden Sinusschwingung und der durch die Nullstelle  $s_{03}$  bestimmten abklingenden Funktion  $e^{-0,0687t}$ .

Als Beispiel ist in Abb. 5.28 die für

$$\mathbf{x}_{\text{N}0} = \begin{pmatrix} -449,8 \\ 31,41 \\ -1,95 \end{pmatrix}$$



**Abb. 5.28:** Verhalten des Feder-Masse-Dämpfer-Systems für das vom Eingangsgrößengenerator erzeugte Signal  $u(t)$

entstehende Eingangsgröße sowie das Systemverhalten gezeigt. Das System wird jetzt nicht aus der Ruhelage, sondern vom Anfangszustand

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{T}_N \boldsymbol{x}_{N0} = \begin{pmatrix} 0,189 \\ -0,599 \\ -1,112 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aus erregt. Die Ausgangsgröße  $y(t)$  verschwindet erwartungsgemäß. Um die Nulldynamik zu zeigen, ist im unteren Teil der Abbildung wieder die Position  $x_2(t)$  der Masse  $m_1$  dargestellt, deren Verhalten sich wie die Eingangsgröße aus der aufklingenden Sinusschwingung und der abklingenden e-Funktion zusammensetzt.  $\square$

**Aufgabe 5.15 Nulldynamik eines Reihenschwingkreises**

Lösen Sie für den in Abb. 4.2 auf S. 59 gezeigten Reihenschwingkreis mit dem auf S. 71 angegebenen Zustandsraummodell (4.44) die folgenden Aufgaben:

1. Transformieren Sie das Modell in die E/A-Normalform.
2. Ordnen Sie Teile des erhaltenen Modells den Blöcken in Abb. 5.16 auf S. 163 zu.
3. Die im Beispiel 5.8 abgeleitete Beziehung (5.109) gilt nur, wenn der Schwingkreis eine entsprechende Eingangsgröße  $u(t)$  erhält. Ermitteln Sie diese Eingangsgröße und skizzieren Sie ihren Verlauf sowie den Verlauf des Stromes  $i_1(t)$  und der Kondensatortorspannung  $u_C(t)$ .  $\square$

**Aufgabe 5.16\*\*** Systemverhalten bei polynomialer Eingangsgröße

Die Zerlegung (5.134) der erzwungenen Bewegung in Übergangsverhalten und stationäres Verhalten wurde für Eingangsgrößen (5.130) abgeleitet, die aus einer Summe von Exponentialfunktionen bestehen. Zeigen Sie, dass es eine ähnliche Zerlegung für polynomiale Eingangsgrößen

$$u(t) = \sum_{j=0}^m u_j t^j$$

gibt. Kann man für derartige Eingangsgrößen in Analogie zu den Gln. (5.138) und (5.139) zeigen, dass unter bestimmten Bedingungen bestimmte Eigenvorgänge nicht im Übergangsverhalten bzw. bestimmte Potenzen  $t^j$  nicht im stationären Verhalten vorkommen? □

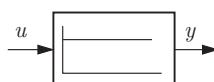
## 5.6 Eigenschaften wichtiger Übertragungsglieder im Zeitbereich

Anhand des qualitativen Verlaufs der Übergangsfunktion bzw. der Gewichtsfunktion können einfache Übertragungsglieder in Proportional-, Integrier-, Differenzier- und Totzeitglieder unterteilt werden. Auf diese Gruppen wird jetzt einzeln eingegangen.

### 5.6.1 Proportionalglieder

Unter Proportionalgliedern (abgekürzt: *P-Glieder*) werden dynamische Übertragungsglieder verstanden, die für konstante Eingangsgröße  $u(t) = \bar{u}$  im stationären Zustand eine dem Wert der Eingangsgröße proportionale Ausgangsgröße aufweisen (Abb. 5.30)

$$y_s(t) \sim \bar{u}.$$



**Abb. 5.29:** Symbol des P-Gliedes

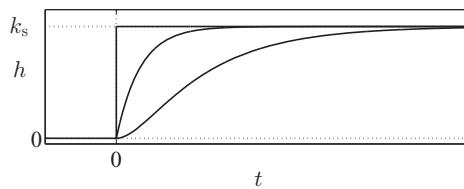
Das verzögerungsfreie *P-Glied* ist ein statisches Übertragungsglied, dessen Ausgangssignal den  $k_s$ -fachen Wert des Einganges zum selben Zeitpunkt hat:

$$y(t) = k_s u(t).$$

Die Übergangsfunktion

$$h(t) = k_s$$

dieses Gliedes folgt der Eingangsgröße ohne Verzögerung und nimmt sofort den durch die statische Verstärkung bestimmten Wert an (Abb. 5.30). Dieses Verhalten ist auch im Symbol des P-Gliedes wiedergegeben (Abb. 5.29).



**Abb. 5.30:** Übergangsfunktion von P-, PT<sub>1</sub>- und PT<sub>2</sub>-Glied

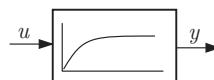
**PT<sub>1</sub>-Glied.** Reagiert das Übertragungsglied im statischen Zustand proportional zur Eingangsgröße und besitzt es ein ausgeprägtes Übergangsverhalten, so spricht man von einem PT<sub>n</sub>-Glied, wobei n die Systemordnung angibt. Ein PT<sub>1</sub>-Glied ist also ein proportional wirkendes Verzögerungsglied erster Ordnung. Es folgt der Differentialgleichung

$$\text{PT}_1\text{-Glied: } T \dot{y}(t) + y(t) = k_s u(t), \quad y(0) = y_0, \quad (5.157)$$

in der T als Zeitkonstante bezeichnet wird. T hat dieselbe Maßeinheit wie die Zeit, also i. Allg. Sekunde oder Minute. Der Begriff „PT<sub>1</sub>-Glied“ wird typischerweise nur für stabile Systeme erster Ordnung mit positiver Zeitkonstante gebraucht. k<sub>s</sub> stellt die statische Verstärkung des PT<sub>1</sub>-Gliedes dar (wie man leicht nachrechnen kann!). Aus Gl. (5.157) erhält man nach Einführung der Zustandsvariablen  $x(t) = \frac{1}{k_s} y(t)$  das Zustandsraummodell

$$\text{PT}_1\text{-Glied : } \begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{1}{T} x(t) + \frac{1}{T} u(t), & x(0) = \frac{1}{k_s} y_0 \\ y(t) = k_s x(t). \end{cases} \quad (5.158)$$

Das PT<sub>1</sub>-Glied kann als Reihenschaltung eines Systems erster Ordnung mit u als Eingangsgröße und der Zustandsvariablen x als Ausgangsgröße (erste Gleichung) sowie eines verzögerungsfreien P-Gliedes mit x als Eingangsgröße und y als Ausgangsgröße (zweite Gleichung) gedeutet werden.



**Abb. 5.31:** Symbol des PT<sub>1</sub>-Gliedes

Die Übergangsfunktion des PT<sub>1</sub>-Gliedes lautet

$$h(t) = k_s (1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

(Abb. 5.30). Sie kann in das stationäre Verhalten

$$y_s(t) = k_s \sigma(t)$$

und das Übergangsverhalten

$$y_{\ddot{u}}(t) = -k_s e^{-\frac{t}{T}}$$

zerlegt werden. In Blockschaltbildern stellt man PT<sub>1</sub>-Glieder durch das in Abb. 5.31 gezeigte Symbol dar, das den prinzipiellen Verlauf der Übergangsfunktion zeigt.

Die Gewichtsfunktion des PT<sub>1</sub>-Gliedes heißt

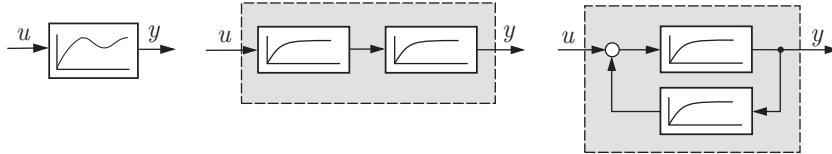
$$g(t) = \frac{k_s}{T} e^{-\frac{t}{T}}, \quad (5.159)$$

was man entweder aus Gl. (5.119) oder durch Differenziation der Übergangsfunktion berechnen kann.

**PT<sub>2</sub>-Glied.** Ein PT<sub>2</sub>-Glied hat die Differentialgleichung

$$\text{PT}_2\text{-Glied: } T^2 \ddot{y}(t) + 2dT\dot{y}(t) + y(t) = k_s u(t), \quad (5.160)$$

in der  $T$  eine Zeitkonstante und  $d$  einen Dämpfungsfaktor bezeichnet. In Abhängigkeit von  $d$  und  $T$  kann das PT<sub>2</sub>-Glied sehr unterschiedliche Übergangsfunktionen erzeugen. Darauf wird im Abschn. 6.7 ausführlich eingegangen.



**Abb. 5.32:** Symbol des schwingungsfähigen PT<sub>2</sub>-Gliedes (links) und Blockschaltbilder der aus zwei PT<sub>1</sub>-Gliedern zusammengesetzten PT<sub>2</sub>-Glieder (Mitte und rechts)

Hier sollen PT<sub>2</sub>-Glieder (5.160) mit  $d > 1$  noch etwas genauer betrachtet werden. Wie im Abschn. 6.7 erläutert wird, erreicht die Übergangsfunktion dieser PT<sub>2</sub>-Glieder den statischen Endwert aperiodisch, wie es in Abb. 5.30 gezeigt ist. Diese PT<sub>2</sub>-Glieder können deshalb als Reihenschaltung zweier PT<sub>1</sub>-Glieder mit den Zeitkonstanten  $T_1$  und  $T_2$  dargestellt werden (Abb. 5.32 (Mitte)), wobei zweckmäßigerweise das erste PT<sub>1</sub>-Glied die statische Verstärkung eins hat. Das Zustandsraummodell dieser PT<sub>2</sub>-Glieder erhält man durch Verknüpfung zweier Modelle der Form (5.158):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -\frac{1}{T_1}x_1(t) + \frac{1}{T_1}u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{1}{T_2}x_2(t) + \frac{1}{T_2}x_1(t) \\ y(t) &= k_s x_2(t).\end{aligned}$$

Mit dem Zustandsvektor

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

ergibt sich daraus das Modell

$$\text{PT}_2\text{-Glied : } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 \\ \frac{1}{T_2} & -\frac{1}{T_2} \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} \frac{1}{T_1} \\ 0 \end{pmatrix} u(t), & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y(t) = (0 \quad k_s) \mathbf{x}(t). \end{cases} \quad (5.161)$$

Für die Übergangsfunktion erhält man aus der Bewegungsgleichung die Beziehung

$$h(t) = k_s \left( 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right), \quad (5.162)$$

wobei aufgrund der Voraussetzung  $d > 1$  die Bedingung  $T_1 \neq T_2$  erfüllt ist. In der grafischen Darstellung verläuft die Übergangsfunktion zunächst entlang der Zeitachse, denn es gilt  $h(0) = 0$ . Die Übergangsfunktion nähert sich dem statischen Endwert  $k_s$  ohne Überschwingen (unterste Kurve in Abb. 5.30). Im Vergleich zum  $\text{PT}_1$ -Glied ist das stationäre Verhalten

$$y_s(t) = k_s \sigma(t)$$

unverändert geblieben. Das veränderte Übergangsverhalten

$$y_{\ddot{u}}(t) = k_s \left( -\frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$$

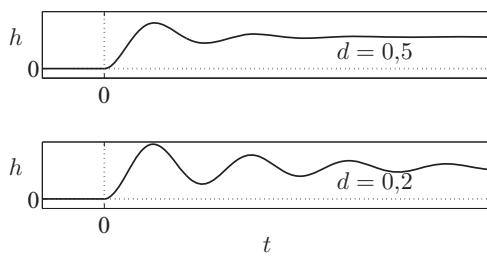
bewirkt eine größere Verzögerung, mit der das  $\text{PT}_2$ -Glied das stationäre Verhalten  $y_s = k_s \sigma(t)$  annimmt.

Für die Gewichtsfunktion erhält man die Beziehung

$$g(t) = \frac{k_s}{T_1 - T_2} \left( e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}} \right). \quad (5.163)$$

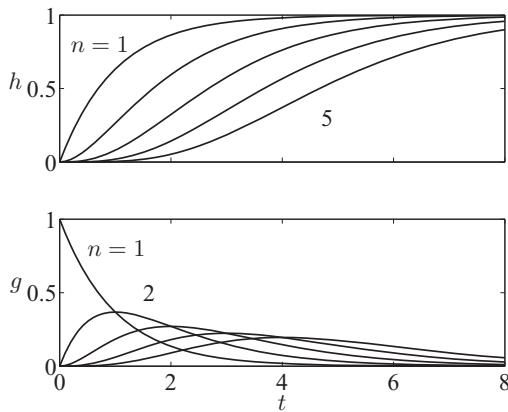
Liegt die Dämpfung im Intervall  $0 < d < 1$ , so erreicht die Übergangsfunktion des  $\text{PT}_2$ -Gliedes den statischen Endwert mit Überschwingen, wobei das Überschwingen umso größer und die Zeitdauer der abklingenden Schwingung umso länger ist, je kleiner  $d$  ist. Abbildung 5.33 zeigt zwei Beispiele. Das schwungsfähige Verhalten wird auch im Blockschaltbild gekennzeichnet (linkes Symbol in Abb. 5.32). Schwungsfähige  $\text{PT}_2$ -Glieder können nicht aus einer Reihenschaltung, sondern nur aus einer Rückführschaltung von  $\text{PT}_1$ -Gliedern entstehen (Abb. 5.32 (rechts)).

**PT<sub>n</sub>-Glieder.** Durch Reihenschaltung von  $\text{PT}_1$ -Gliedern kann man  $\text{PT}_n$ -Glieder beliebiger Ordnung erzeugen, wobei  $n$  die Anzahl der Glieder und gleichzeitig die dynamische Ordnung bezeichnet. Abbildung 5.34 zeigt die Übergangsfunktion und die Gewichtsfunktion der Reihenschaltung von bis zu fünf  $\text{PT}_1$ -Gliedern, von denen



**Abb. 5.33:** Übergangsfunktionen von  $\text{PT}_2$ -Gliedern mit kleiner Dämpfung

jedes durch das Zustandsraummodell (5.158) mit  $k_s = 1$  beschrieben ist. Je mehr Glieder in Reihe geschaltet sind, desto langsamer nähert sich die Übergangsfunktion ihrem statischen Endwert und umso flacher und breiter ist der Verlauf der Gewichtsfunktion.



**Abb. 5.34:** Übergangsfunktionen und Gewichtsfunktionen von  $\text{PT}_n$ -Gliedern ( $n = 1, 2, \dots, 5$ )

### Aufgabe 5.17 Verzögerungsglieder zweiter Ordnung

Nicht schwingungsfähige  $\text{PT}_2$ -Glieder können als Reihenschaltung zweier  $\text{PT}_1$ -Glieder mit den Zeitkonstanten  $T_1$  und  $T_2$  und den statischen Verstärkungsfaktoren  $k_{s1}$  und  $k_{s2}$  aufgebaut werden.

- Stellen Sie die Differentialgleichung dieser Reihenschaltung auf und zeigen Sie, dass diese Gleichung die Form (5.160) hat. Wie berechnen sich  $T$  und  $d$  in Gl. (5.160) aus  $T_1$  und  $T_2$  sowie  $k_{s1}$  und  $k_{s2}$ ? Welchen Wertebereich haben diese Größen?

2. Berechnen Sie aus dem Zustandsraummodell (5.161) die Übergangsfunktion und stellen Sie diese grafisch dar. Wie unterscheidet sich diese Funktion qualitativ von der Übergangsfunktion eines  $PT_1$ -Gliedes? Was passiert für  $T_2 \rightarrow 0$ ?

Schwingungsfähige  $PT_2$ -Glieder können durch zwei  $PT_1$ -Glieder realisiert werden, die in einer Rückführschaltung liegen. Wie berechnen sich die Koeffizienten der Differentialgleichung (5.160) aus den Parametern der  $PT_1$ -Glieder? Welche Wertebereiche haben sie? Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit der zuvor betrachteten Reihenschaltung.  $\square$

**Aufgabe 5.18\*** Wirkstoffkonzentrationsverlauf im Blut

Ein mit einer Tablette eingenommener wasserlöslicher Wirkstoff wird zunächst im Darm verdünnt, vom Blut aufgenommen, später von der Niere wieder aus dem Blut entfernt und schließlich mit dem Urin ausgeschieden. Zur Vereinfachung der Betrachtungen wird angenommen, dass der Wirkstoff chemisch nicht verändert wird, so dass lediglich ein Stofftransport zu betrachten ist. Da der Stoffübergang von einem Organ zu einem anderen maßgeblich durch Diffusion erfolgt, ist die pro Zeiteinheit von einem Organ in ein anderes übergehende Stoffmenge proportional zum Konzentrationsunterschied dieses Stoffes in beiden Organen. Man kann deshalb den Stofftransport näherungsweise durch  $PT_1$ -Glieder beschreiben, wobei der beschriebene Weg des Wirkstoffs einer Reihenschaltung dreier  $PT_1$ -Glieder entspricht, deren Ausgangsgrößen die Stoffkonzentrationen  $c_D$ ,  $c_B$  und  $c_N$  des Stoffes im Darm, im Blut und in dem von der Niere gesammelten Urin darstellen (Abb. 5.35). Diese Modellvorstellung wird in der Biologie als Kompartimentmodell bezeichnet. Jedes  $PT_1$ -Glied entspricht einem *Kompartiment* (einem vorgegebenen Volumen), in dem der Stoffkonzentrationsverlauf durch eine Differentialgleichung erster Ordnung beschrieben wird.

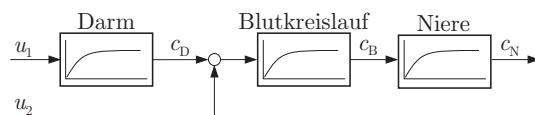


Abb. 5.35: Kompartimentmodell zur Berechnung des Wirkstoffverlaufes

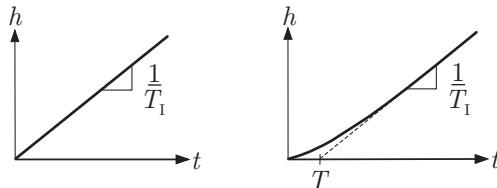
- Betrachten Sie die Einnahme  $u_1$  einer Tablette als Diracimpuls und skizzieren Sie qualitativ den Verlauf der Konzentrationen  $c_D$ ,  $c_B$  und  $c_N$ .
- Wenn ein Medikament intravenös (in die Vene) gespritzt wird, entfällt der Weg durch den Darm. Der Wirkstoff kann dann als ein Diracimpuls am Eingang  $u_2$  in Abb. 5.35 interpretiert werden. Wie verhält sich jetzt die Konzentration im Blut?
- Berechnen Sie mit einer ähnlichen Modellvorstellung den Verlauf des Blutalkoholspiegels für eine Person, die in kurzer Zeit 1 Liter Bier (4,5 % Alkoholgehalt) und zwei Weinbrand (2 cl mit 40 Vol%) getrunken hat. Nehmen Sie dabei vereinfachend an, dass sich der Alkohol in der Hälfte der Körperflüssigkeit (5 l Blut + 23 l extrazelluläre Flüssigkeit + 17 l Zellflüssigkeit) verteilt und der Alkohol mit einer Zeitkonstante von 25 Minuten vom Blut aufgenommen und mit einer Zeitkonstante von 35 Minuten von der Leber abgebaut wird.  $\square$

### 5.6.2 Integrierglieder

Integrierglieder (abgekürzt: *I-Glieder*) sind Übertragungsglieder, deren Ausgang proportional zum Integral der Eingangsgröße ist und folglich bei konstanter Eingangsgröße  $u(t) = \bar{u}$  für große Zeiten in eine Rampenfunktion übergeht (Abb. 5.36):

$$y_s(t) \sim \int_0^t \bar{u} dt = \bar{u}t.$$

Der Ausgang nähert sich nur dann einem konstanten Wert an, wenn die Eingangsgröße gleich null ist.



**Abb. 5.36:** Übergangsfunktion eines I-Gliedes (links) und eines  $IT_1$ -Gliedes (rechts)

Das verzögerungsfreie *I-Glied* wird durch die Differentialgleichung

$$\text{I-Glied: } T_I \dot{y}(t) = u(t), \quad y(0) = y_0$$

beschrieben. Daraus erhält man

$$y(t) = \frac{1}{T_I} \int_0^t u(\tau) d\tau + y_0,$$

und das Zustandsraummodell

$$\text{I-Glied : } \begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{1}{T_I} u(t), & x(0) = y_0 \\ y(t) = x(t) \end{cases} \quad (5.164)$$

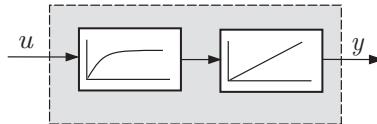
mit  $T_I$  als Integrationszeitkonstante. Die grafische Darstellung der Übergangsfunktion

$$h(t) = \frac{1}{T_I} t \quad (5.165)$$

ist eine Gerade (Rampenfunktion) mit dem Anstieg  $\frac{1}{T_I}$  (Abb. 5.36 (links)).

Ein I-Glied mit Verzögerung erster Ordnung heißt *IT<sub>1</sub>-Glied*. Es wird durch die Differentialgleichung

$$\text{IT}_1\text{-Glied: } T_I T \ddot{y}(t) + T_I \dot{y}(t) = u(t), \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0 \quad (5.166)$$



**Abb. 5.37:** IT<sub>1</sub>-Glied bestehend aus einem PT<sub>1</sub>-Glied und einem I-Glied

bzw. durch das Zustandsraummodell

$$\text{IT}_1\text{-Glied} : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\frac{1}{T}x_1(t) + \frac{1}{T}u(t), & x_1(0) = 0 \\ \dot{x}_2(t) = \frac{1}{T_I}x_1(t), & x_2(0) = 0 \\ y(t) = x_2(t) \end{cases}$$

beschrieben. Es kann als Reihenschaltung eines PT<sub>1</sub>-Gliedes und eines reinen I-Gliedes interpretiert werden (Abb. 5.37). Seine Übergangsfunktion

$$h(t) = \frac{1}{T_I}t - \frac{T}{T_I} \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \quad (5.167)$$

erreicht erst mit einer durch die Zeitkonstante  $T$  festgelegten Verzögerung die durch  $T_I$  bestimmte Rampenfunktion (Abb. 5.36 (rechts)). Ähnlich wie das PT<sub>1</sub>-Glied kann auch das IT<sub>1</sub>-Glied als Reihenschaltung eines Verzögerungsgliedes und eines verzögerungsfreien I-Gliedes interpretiert werden. Das Verzögerungsglied hat den Eingang  $u$  und den Ausgang  $x_1$ , das I-Glied den Eingang  $x_1$  und den Ausgang  $y$ .

#### Aufgabe 5.19 Übergangsfunktion eines IT<sub>1</sub>-Gliedes

Berechnen Sie die Übergangsfunktion eines IT<sub>1</sub>-Gliedes aus dem Zustandsraummodell in folgenden Schritten:

1. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Systemmatrix  $\mathbf{A}$ .
2. Transformieren Sie das Zustandsraummodell in kanonische Normalform.
3. Bestimmen Sie über die Bewegungsgleichung die Übergangsfunktion des IT<sub>1</sub>-Gliedes.  
□

### 5.6.3 Differenzierglieder

Differenzierglieder (abgekürzt: *D-Glieder*) sind Übertragungsglieder, deren Ausgang im Wesentlichen durch Veränderungen der Eingangsgröße bestimmt wird und bei konstanter Eingangsgröße dem Wert null annimmt. Für das stationäre Verhalten gilt

$$y_s(t) \sim \frac{du(t)}{dt}.$$

Das verzögerungsfreie *D-Glied* wird durch die Gleichung

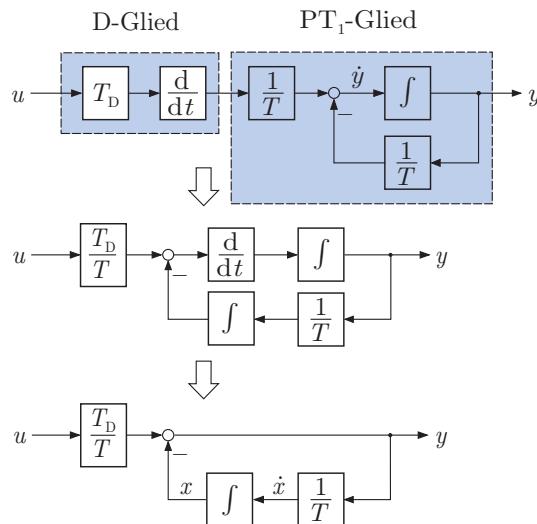
**Abb. 5.38:** Symbol des D-Gliedes

$$\text{D-Glied: } y(t) = T_D \frac{du(t)}{dt}$$

beschrieben. Es verletzt die Kausalitätsbedingung (4.39) und kann deshalb nicht durch ein Zustandsraummodell dargestellt werden. Dies ist nicht problematisch, da physikalisch reale Systeme kein unverzögertes D-Verhalten haben. Als Übergangsfunktion erhält man den Diracimpuls

$$h(t) = T_D \delta(t)$$

(Abb. 5.40 (links)), der vereinfacht im Blockschatzbildsymbol des D-Gliedes dargestellt ist (Abb. 5.38).

**Abb. 5.39:** Umformung des Blockschaltbildes bei der Aufstellung des Zustandsraummodells des DT<sub>1</sub>-Gliedes

Das verzögerungsbehaftete D-Glied wird DT<sub>n</sub>-Glied genannt, wobei n die Anzahl der Verzögerungselemente angibt. Beim DT<sub>1</sub>-Glied (*Vorhalteglied*) wird der differenzierende Charakter durch ein Verzögerungsglied erster Ordnung „gedämpft“, wobei zweckmäßigerweise die statische Verstärkung dieses Verzögerungsgliedes gleich eins gewählt wird. Die Differentialgleichung des DT<sub>1</sub>-Gliedes ist

$$\text{DT}_1\text{-Glied: } T \dot{y}(t) + y(t) = T_D \dot{u}(t), \quad y(0) = 0. \quad (5.168)$$

Durch Einführung des Zustands

$$x(t) = \frac{T_D}{T} u(t) - y(t) \quad (5.169)$$

erhält man

$$\dot{x}(t) = \frac{T_D}{T} \dot{u}(t) - \dot{y}(t) = \frac{1}{T} y(t)$$

und

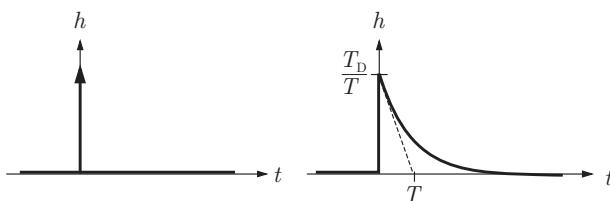
$$y(t) = \frac{T_D}{T} u(t) - x(t)$$

sowie durch Einsetzen der zweiten in die erste Beziehung das Zustandsraummodell

$$\text{DT}_1\text{-Glied : } \begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{1}{T}x(t) + \frac{T_D}{T^2}u(t), & x(0) = 0 \\ y(t) = -x(t) + \frac{T_D}{T}u(t). \end{cases} \quad (5.170)$$

Bemerkenswerterweise hat dieses System einen direkten Durchgriff von  $u$  auf  $y$ . Bei der Festlegung des Anfangszustands wurde berücksichtigt, dass entsprechend Gl. (5.168) die Beziehung  $y(0) = 0$  gilt und außerdem definitionsgemäß  $u(-0) = 0$  ist. Für  $u(t) = \sigma(t)$  ist  $u(+0) = 1$  und folglich  $y(+0) = \frac{T_D}{T}$ .

Der soeben beschrittene Weg von der Differentialgleichung (5.168) zum Zustandsraummodell (5.170) kann am einfachsten anhand eines Blockschaltbildes nachvollzogen werden (Abb. 5.39). Der obere Teil der Abbildung zeigt eine Darstellung der Differentialgleichung (5.168). Das Problem besteht in der Elimination des Blockes  $\frac{d}{dt}$ , was durch Hinüberziehen über die Mischstelle gelingt. Aus dem unteren Bild ist ersichtlich, dass der Zustand zweckmäßigerweise entsprechend Gl. (5.169) gewählt wird. Diese Vorgehensweise zur Elimination von D-Gliedern kann man immer dann anwenden, wenn reine D-Glieder in ein System eingeführt werden, beispielsweise bei Verwendung von D-Reglern (vgl. Abschn. 7.6).



**Abb. 5.40:** Übergangsfunktion von D-Gliedern

Wie der rechte Teil von Abb. 5.40 zeigt, steigt die Übergangsfunktion des  $\text{DT}_1$ -Gliedes zunächst sprungförmig auf den Wert  $\frac{T_D}{T}$  an und verschwindet dann exponentiell.

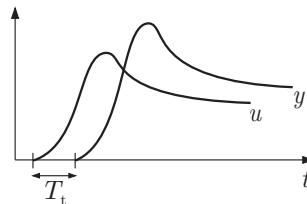


Abb. 5.41: Verhalten eines Totzeitgliedes

#### 5.6.4 Totzeitglieder

Totzeitglieder (4.113)

$$T_t\text{-Glied: } y(t) = u(t - T_t) \quad (5.171)$$

verschieben das Eingangssignal auf der Zeitachse um  $T_t$  nach rechts. Das wird für die Übergangsfunktion und die Gewichtsfunktion aus den Gleichungen

$$h(t) = \sigma(t - T_t) \quad (5.172)$$

$$g(t) = \delta(t - T_t) \quad (5.173)$$

ersichtlich. Gelegentlich führt man auch einen Verstärkungsfaktor  $k$  ein, so dass das Totzeitglied auch die Amplitude des Signals verändern kann (Abb. 5.41). Das Symbol des Totzeitgliedes zeigt die um  $T_t$  verschobene Sprungfunktion (Abb. 5.42).

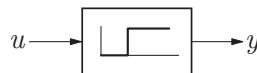


Abb. 5.42: Symbol des Totzeitgliedes

Totzeitglieder treten i. Allg. mit anderen Übertragungsgliedern kombiniert auf. Beispielsweise wird die Reihenschaltung eines  $PT_1$ -Gliedes mit einem Totzeitglied als  $PT_1T_t$ -Glied bezeichnet und durch

$$PT_1T_t\text{-Glied: } \begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{1}{T}x(t) + \frac{1}{T}u(t), & x(0) = x_0 \\ y(t) = k_s x(t - T_t) \end{cases} \quad (5.174)$$

beschrieben.

**Aufgabe 5.20** Verhalten von  $RC$ -Gliedern

Stellen Sie für die in Abb. 5.43 gezeigten  $RC$ -Glieder die Differentialgleichung auf und bestimmen Sie den Typ der dynamischen Übertragungseigenschaften dieser Glieder. Stellen Sie die Übergangsfunktionen qualitativ grafisch dar und überlegen Sie sich, wie sich die Übergangsfunktionen in Abhängigkeit von den Parametern  $R$  und  $C$  verändern.  $\square$

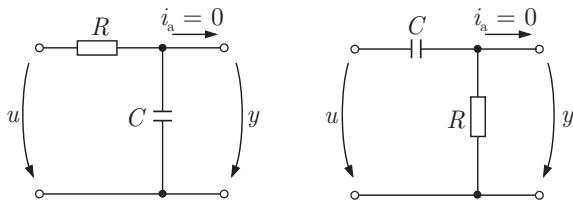


Abb. 5.43: RC-Glieder

**Aufgabe 5.21** Verhalten einer Badewanne

Betrachten Sie den Zulauf von Wasser in Ihre Badewanne als Eingangsgröße und den Wassерstand als Ausgangsgröße.

1. Welchem Typ von Übertragungsgliedern ist Ihre Badewanne zuzuordnen?
2. Unter welchen Voraussetzungen ist Ihre Badewanne ein *lineares* System?  $\square$

**Aufgabe 5.22** Übergangsfunktion eines  $PT_1 T_t$ -Gliedes

Wie sieht die Übergangsfunktion des  $PT_1 T_t$ -Gliedes (5.174) aus?  $\square$

**Aufgabe 5.23** Dynamisches Verhalten einer Stufenreaktion

In einem homogenen durchmischten Rührkessel läuft die Stufenreaktion



ab, bei der der Stoff  $A$  zunächst in den Stoff  $B$  und später in den Stoff  $C$  umgewandelt wird. Dafür können die Zustandsgleichungen

$$\text{Rührkessel : } \begin{cases} \dot{x}_A(t) = -x_A(t) \\ \dot{x}_B(t) = x_A(t) - 2x_B(t) \\ \dot{x}_C(t) = 2x_B(t) \end{cases}$$

aufgestellt werden, in denen die Zustandsvariablen  $x_A$ ,  $x_B$  und  $x_C$  die Konzentrationen der drei Stoffe bezeichnen.

1. Aus welchen elementaren Übertragungsgliedern besteht dieses Modell? Zeichnen Sie ein Blockschaltbild. Welchen zeitlichen Verlauf der Reaktion erwarten Sie aufgrund der im Blockschaltbild ersichtlichen Eigenschaften der Stufenreaktion?
2. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  liegen die Stoffe mit den Konzentrationen  $x_A(0) = 1$ ,  $x_B(0) = x_C(0) = 0$  vor. Wie verläuft die Reaktion? Zeichnen Sie die Konzentrationsverläufe in ein gemeinsames Diagramm. Welche Stoffkonzentrationen ergeben sich für  $t \rightarrow \infty$ ?
3. Wie können die angegebenen Modellgleichungen zu einem Zustandsraummodell der Form (4.45) zusammengefasst werden, wenn die Konzentration des Stoffes  $C$  gemessen wird?  $\square$

**Aufgabe 5.24\*** Klassifikation alltäglicher Vorgänge nach ihrem dynamischen Verhalten

Die systemtheoretische Betrachtungsweise, einen gegebenen Prozess als Abbildung seiner Eingangsgröße in seine Ausgangsgröße aufzufassen, lässt sich auf sehr unterschiedliche Gegebenheiten anwenden. Man muss nur genau definieren, was als Eingangsgröße und was als Ausgangsgröße bezeichnet wird.

Klassifizieren Sie die im Folgenden angegebenen Systeme entsprechend ihres qualitativen Verhaltens als Proportional-, Integrier- oder Differenzierglieder und schätzen Sie anhand der auftretenden Speicherelemente ab, ob Verzögerungen erster, zweiter oder höherer Ordnung auftreten. Welche Systeme sind schwingungsfähig? □

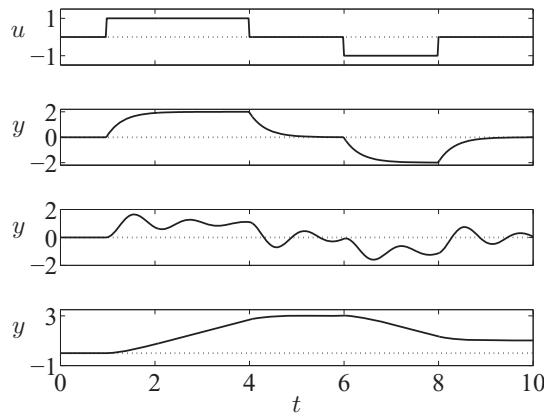
Sachverhalt	Eingangsgröße $u(t)$	Ausgangsgröße $y(t)$
Stellventil	Spannung am Stellmotor	Ventilöffnung
Kochtopf auf einem Elektroherd	Schalterstellung	Temperatur des Topfinhaltes
Hörsaal (o. Klimaanlage)	Außentemperatur	Innentemperatur
Mensa	Durchschnittlicher Essenspreis	Anzahl der Essenteilnehmer
Hausarztpraxis	Praxisgebühr	Anzahl der Patienten
Fahrendes Auto	Straßenoberfläche	Stoßstangenabstand von Straßenoberfläche
Zeitung	Börsenstand (Aktienindex)	Länge des Börsenkommaintars

**Aufgabe 5.25\*** Bestimmung der Systemtypen aus dem E/A-Verhalten

Abbildung 5.44 zeigt im oberen Teil den Verlauf einer Eingangsgröße  $u(t)$  und darunter drei Systemantworten  $y(t)$ . Welchen Typ haben die drei Übertragungsglieder, die diese Ausgangsgrößen (beginnend in der Ruhelage  $x_0 = 0$ ) erzeugen? □

## 5.7 Modellvereinfachung und Kennwertermittlung

Aufgrund der in jedem Regelkreis vorhandenen Rückführung der tatsächlich auftretenden Regelgröße auf die Stellgröße besitzt jeder Regelkreis eine gewisse Robustheit gegenüber Modellfehlern. Das heißt, dass sich das Verhalten des Regelkreises bei konstanten Reglerparametern nur „langsam“ ändert, wenn sich die Regelstreckenparameter von den im Modell stehenden Werten entfernen. Unsicherheiten des Regelstreckenmodells führen deshalb i. Allg. nicht zu einem vollkommen anderen Verhalten des Regelkreises, als es mit Hilfe des Modells vorhergesagt wurde. Näherungsmodelle der Regelstrecke sind für den Reglerentwurf ausreichend.



**Abb. 5.44:** Verlauf der Eingangs- und Ausgangsgrößen einfacher Übertragungsglieder

Auf die Robustheitseigenschaften von Regelkreisen wird im Kap. 8 noch ausführlicher eingegangen. Hier soll diese Eigenschaft als Begründung dafür verwendet werden, dass es häufig ausreicht, an Stelle eines möglichst exakten Modells lediglich eine Näherungsbeschreibung der Regelstrecke aufzustellen.

Zu derartigen einfachen Modellen kommt man auf zwei Wegen. Wenn ein Modell sehr hoher Ordnung bekannt ist, nutzt man Verfahren der Modellvereinfachung, um aus diesem Modell ein Näherungsmodell niedrigerer Ordnung abzuleiten. Darauf wird im Abschn. 5.7.1 eingegangen. Andererseits kann man einfache Modelle dadurch gewinnen, dass man Übergangsfunktionen der Regelstrecke aufzeichnet und aus diesen die Kennwerte einfacher Übertragungsglieder ermittelt. In den Abschnitten 5.7.2 – 5.7.4 wird dieses Vorgehen genauer erläutert.

### 5.7.1 Modellvereinfachung

Ziel der Modellvereinfachung (Ordnungsreduktion, Modellaggregation) ist es, zu einem gegebenen Modell hoher Ordnung

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), & x(0) = x_0 \\ y(t) = c^T x(t) \end{cases} \quad (5.175)$$

ein Modell

$$\hat{\Sigma} : \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{b}u(t), & \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \\ \hat{y}(t) = \hat{c}^T \hat{x}(t) \end{cases} \quad (5.176)$$

mit wesentlich niedrigerer dynamischer Ordnung zu finden, dessen E/A-Verhalten das des vollständigen Modells (5.175) möglichst gut wiedergibt. Das heißt, dass für eine beliebige Eingangsgröße  $u(t)$  die Forderung

$$\hat{y}(t) \stackrel{!}{\approx} y(t)$$

erfüllt sein soll. Da das Modell (5.176) anstelle der Ausgangsgröße  $y(t)$  den Ausgang  $\hat{y}(t)$  besitzt, stellt es nicht das System  $\Sigma$  dar, sondern ein anderes System  $\hat{\Sigma}$ . Für das statische Verhalten fordert man häufig Gleichheit:

$$\hat{c}^T \hat{A}^{-1} \hat{b} = c^T A^{-1} b.$$

Diese Eigenschaft wird auch als *stationäre Genauigkeit* eines Modells bezeichnet.

Da sich die dynamischen Eigenschaften beider Modelle in den jeweiligen Modi äußern, ist es naheliegend, die Modi des gegebenen Systems in Bezug auf ihre Wirkung auf das E/A-Verhalten zu untersuchen und das Näherungsmodell so auszuwählen, dass es die wichtigsten Modi enthält. Verfahren, die wie das im Folgenden vorgestellte auf dieser Vorgehensweise beruhen, werden als *modale Verfahren* bezeichnet.

Für die Auswahl der in das Näherungsmodell zu übernehmenden Eigenvorgänge wird das Modell (5.175) durch

$$\tilde{x}(t) = V^{-1}x(t)$$

in die kanonische Normalform (5.38) transformiert:

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \text{diag } \lambda_i \tilde{x}(t) + \tilde{b}u(t), & \tilde{x}(0) = V^{-1}x_0 \\ y(t) = \tilde{c}^T \tilde{x}(t). \end{cases}$$

Da im Näherungsmodell nur die dominanten Modi berücksichtigt werden sollen, muss man bewerten, wie stark jeder einzelne Eigenvorgang die Ausgangsgröße beeinflusst. Dafür sind in der Literatur vielfältige *Dominanzmaße* vorgeschlagen worden. Als Beispiel sei das durch

$$d_i = \left| \frac{\tilde{b}_i \tilde{c}_i}{\lambda_i} \right| \quad (5.177)$$

definierte Dominanzmaß angeführt, das den Beitrag des  $i$ -ten Eigenvorganges zum statischen Endwert der Übergangsfunktion bewertet. Dabei bezeichnen  $\tilde{b}_i$  und  $\tilde{c}_i$  die  $i$ -ten Elemente der Vektoren  $\tilde{b}$  bzw.  $\tilde{c}$ .

Um das Näherungsmodell zu finden, wählt man die dominierenden Modi aus, wobei man sich anhand des Vergleiches der Dominanzmaße für eine zweckmäßige Modellordnung entscheiden muss. Haben beispielsweise drei Modi ein sehr großes und alle anderen Modi ein wesentlich kleineres Dominanzmaß, so verwendet man ein Näherungsmodell dritter Ordnung. Diese Vorgehensweise gilt bei stabilen Systemen. Besitzt das System instabile Modi ( $\text{Re}\{\lambda_i\} \geq 0$ ), so müssen diese unabhängig vom Wert ihres Dominanzmaßes in das Näherungsmodell übernommen werden.

Im Folgenden wird angenommen, dass die  $\hat{n}$  ersten Modi dominant sind und im Näherungsmodell auftreten sollen. Diese Voraussetzung kann man durch Umordnung der kanonischen Zustandsvariablen erfüllen. Zerlegt man den Zustandsvektor

dementsprechend in den zu den dominierenden Modi gehörenden Teilvektor und einen verbleibenden Teilvektor

$$\tilde{x}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_d(t) \\ \tilde{x}_r(t) \end{pmatrix},$$

so zerfällt auch die kanonische Normalform des gegebenen Modells in die beiden Modellteile

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\tilde{x}}_d(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{\hat{n}} \end{pmatrix} \tilde{x}_d(t) + \tilde{b}_d u(t) \\ \dot{\tilde{x}}_r(t) = \begin{pmatrix} \lambda_{\hat{n}+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{\hat{n}+2} & \dots & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \tilde{x}_r(t) + \tilde{b}_r u(t) \\ y(t) = \tilde{c}_d^T \tilde{x}_d(t) + \tilde{c}_r^T \tilde{x}_r(t), \end{cases} \quad (5.178)$$

wobei die Vektoren  $\tilde{b}$  und  $\tilde{c}$  folgendermaßen zerlegt wurden:

$$\tilde{b} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_d \\ \tilde{b}_r \end{pmatrix}, \quad \tilde{c}^T = (\tilde{c}_d^T \quad \tilde{c}_r^T).$$

Diese Gleichungen geben das System  $\Sigma$  immer noch exakt wieder.

Eine Näherung kommt nun dadurch zustande, dass im Modell nur noch die im Vektor  $\tilde{x}_d$  stehenden Zustandsvariablen berücksichtigt und die zu den nicht dominierenden Modi gehörenden Zustandsvariablen vernachlässigt werden:

$$\hat{x}(t) = \tilde{x}_d(t). \quad (5.179)$$

Gleichbedeutend damit ist, dass die erste Gleichung des Modells (5.178) als Zustandsgleichung des Näherungsmodells verwendet wird. Für den Ausgang gilt dann die Näherung

$$\hat{y}(t) = \tilde{c}_d^T \tilde{x}_d(t). \quad (5.180)$$

Damit erhält man als Näherungsmodell mit der dynamischen Ordnung  $\hat{n}$ :

$$\hat{\Sigma} : \begin{cases} \dot{\tilde{x}}_d(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{\hat{n}} \end{pmatrix} \tilde{x}_d(t) + \tilde{b}_d u(t) \\ \hat{y}(t) = \tilde{c}_d^T \tilde{x}_d(t). \end{cases} \quad (5.181)$$

Dieses Näherungsmodell enthält offensichtlich die dominierenden Eigenvorgänge des Modells (5.175). Es ist jedoch nicht stationär genau, da mit dem Wegfall der nicht dominierenden Modi auch deren Beitrag zum statischen Verhalten entfällt. Das Näherungsmodell hat an Stelle von  $k_s$  die statische Verstärkung

$$\hat{k}_s = \sum_{i=1}^{\hat{n}} \frac{\tilde{b}_i \tilde{c}_i}{|\lambda_i|}.$$

Eine Korrektur der Statik erreicht man dadurch, dass man den Anteil der im Näherungsmodell verbliebenen Eigenvorgänge am statischen Verhalten proportional zu ihrem bisherigen Anteil erhöht bzw. verkleinert. Dies kann durch Veränderung der Ausgabegleichung erfolgen, so dass man schließlich für das gesuchte Näherungsmodell (5.176) die folgenden Beziehungen erhält:

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{\hat{n}} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{b}} = \tilde{\mathbf{b}}_d, \quad \hat{\mathbf{c}} = \frac{k_s}{\hat{k}_s} \tilde{\mathbf{c}}_d^T. \quad (5.182)$$

### Beispiel 5.12 Modellvereinfachung für einen Gleichstrommotor

Die modale Ordnungsreduktion soll am Beispiel eines Gleichstrommotors veranschaulicht werden, für den in der Aufgabe 6.32 ein Modell zweiter Ordnung angegeben ist. Die Reduktion eines Modells zweiter auf ein Näherungsmodell erster Ordnung ist zwar keine typische Anwendung der Modellvereinfachung, denn diese Methoden sind nur für Modelle sehr hoher Ordnung ( $n = 20 \dots 100$ ) sinnvoll. Die einfachen Modelle erlauben es jedoch, die beschriebene Vorgehensweise im Detail an einem Zahlenbeispiel zu veranschaulichen.

Das Modell beschreibt das Übertragungsverhalten des Motors mit der Ankerspannung als Eingangsgröße und der Motordrehzahl als Ausgangsgröße. In der kanonischen Normalform heißen die Modellgleichungen (5.51):

$$\Sigma_M : \begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \begin{pmatrix} -69,95 & 0 \\ 0 & -12,87 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(t) + \begin{pmatrix} -11,98 \\ -5,14 \end{pmatrix} u(t) \\ \tilde{\mathbf{x}}(0) = \begin{pmatrix} -1,317 i_A(0) - 0,521 \dot{\phi}(0) \\ -0,565 i_A(0) - 1,299 \dot{\phi}(0) \end{pmatrix} \\ y(t) = (0,064 \quad -0,148) \tilde{\mathbf{x}}(t). \end{cases}$$

Die statische Verstärkung beträgt

$$k_s = 0,0482.$$

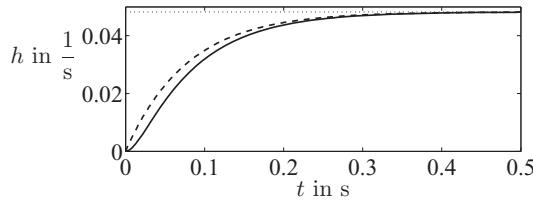
Als Dominanzmaße erhält man aus Gl. (5.177)

$$d_1 = \left| \frac{\tilde{b}_1 \tilde{c}_1}{\lambda_1} \right| = \frac{11,98 \cdot 0,064}{69,95} = 0,011$$

$$d_2 = \frac{5,14 \cdot 0,148}{12,87} = 0,059.$$

Der zweite Eigenwert ist offensichtlich dominant und muss in das Näherungsmodell übernommen werden. Entsprechend Gln. (5.182) erhält man als Näherungsmodell erster Ordnung

$$\hat{\Sigma}_M : \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = -12,87 \hat{x}(t) - 5,14 u(t), & \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \\ \hat{y}(t) = 0,816 \hat{x}(t). \end{cases} \quad (5.183)$$



**Abb. 5.45:** Vergleich der Übergangsfunktionen des vollständigen — und des vereinfachten - - - Modells des Gleichstrommotors

Abbildung 5.45 zeigt die Übergangsfunktionen, die mit dem gegebenen Modell zweiter Ordnung und mit dem Näherungsmodell erster Ordnung erhalten werden. Es ist offensichtlich, dass sich beide Übergangsfunktionen wenig unterscheiden und dass diese Unterschiede auf den vernachlässigten Eigenwert mit  $\lambda_1 = -69,95$  zurückzuführen ist. Für den Gleichstrommotor ist dies der Eigenwert, der im Wesentlichen durch den Ankerkreis bestimmt wird und der gegenüber dem durch die Trägheit der rotierenden Teile bestimmten Eigenwert um etwa einen Faktor fünf schneller ist.

**Diskussion.** Das Beispiel zeigt, dass die Modellvereinfachung nicht nur die Dimension des Modells verkleinert, sondern auch dazu beiträgt, dass man die Systemverhalten maßgebend beeinflussenden Prozesse erkennen kann. In dem Beispiel wurde der durch den Erregerkreis bestimmte Eigenwert weggelassen. Das dynamische Verhalten des Gleichstrommotors ist also im Wesentlichen durch seine mechanischen Eigenschaften bestimmt. □

### 5.7.2 Approximation dynamischer Systeme durch PT<sub>1</sub>-Glieder

**PT<sub>1</sub>-Approximation mit Summenzeitkonstante.** Für eine Näherungsbeschreibung, die u. U. sehr grob ist, werden PT<sub>1</sub>-Glieder auch dann eingesetzt, wenn das betrachtete dynamische System eine viel größere Ordnung, aber eine näherungsweise aperiodisch einschwingende Übergangsfunktion besitzt. Auch für diese Systeme gibt die Zeitkonstante  $T$  der PT<sub>1</sub>-Approximation einen Eindruck von der Geschwindigkeit, mit der das System auf Änderungen am Eingang reagiert. Beispielsweise wird

im Abschn. 11.1.4 bei der Untersuchung des Störverhaltens eines Regelkreises mit einer  $PT_1$ -Näherung für die Störung gearbeitet, um die Verzögerungen, mit denen die Störungen in den Regelkreis eintreten, mit den im Regelkreis selbst auftretenden Verzögerungen vergleichen zu können.

Eine in der regelungstechnischen Praxis geläufige Näherung eines  $PT_n$ -Gliedes durch ein  $PT_1$ -Glied beruht auf der Verwendung der *Summenzeitkonstante*, die sich aus den Zeitkonstanten  $T_1, T_2, \dots, T_n$  des  $PT_n$ -Gliedes entsprechend

$$\text{Summenzeitkonstante von } PT_n\text{-Gliedern: } T_{\Sigma} = T_1 + T_2 + \dots + T_n \quad (5.184)$$

berechnet. Die Summenzeitkonstante ist ein Ausdruck für die gesamte durch das  $PT_n$ -Glied auf die Eingangsgröße ausgeübte Verzögerung. Ihre Definition wird auf S. 273 für allgemeinere Systemklassen erweitert.

### Beispiel 5.13 Approximation eines $PT_3$ -Gliedes

Ein  $PT_3$ -Glied wird in Erweiterung des Modells (5.161) durch die Gleichungen

$$\Sigma_{PT_3} : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{T_2} & -\frac{1}{T_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_3} & -\frac{1}{T_3} \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} \frac{1}{T_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y(t) = (0 \ 0 \ k_s) \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

beschrieben. Es hat die Summenzeitkonstante

$$T_{\Sigma} = T_1 + T_2 + T_3.$$

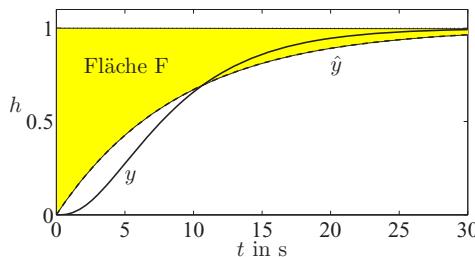
Als Näherungsmodell erhält man damit

$$\hat{\Sigma}_{PT_3} : \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = -\frac{1}{T_{\Sigma}} \hat{x}(t) + \frac{1}{T_{\Sigma}} u(t) \\ \hat{y}(t) = k_s \hat{x}(t). \end{cases}$$

Abbildung 5.46 zeigt für ein System mit  $k_s=1$ ,  $T_1=1$ ,  $T_2=3$  und  $T_3=5$ , dass die Approximation zu einem relativ guten Ergebnis führt. Insbesondere führt diese Näherung stets zu einem Modell, dessen statische Verstärkung korrekt ist.  $\square$

Die Summenzeitkonstante hat übrigens die bemerkenswerte Eigenschaft, dass sie proportional ist zu der durch die Übergangsfunktion und den statischen Endwert begrenzten Fläche  $F$  (vgl. Abb. 5.46). Für diese Fläche gilt

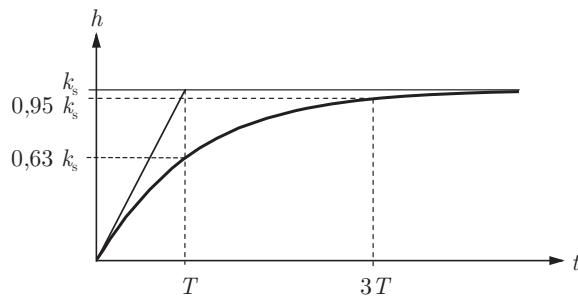
$$F = k_s T_{\Sigma} = \int_0^{\infty} (k_s - \hat{y}(t)) dt.$$



**Abb. 5.46:** Näherung eines  $PT_3$ -Gliedes durch ein  $PT_1$ -Glied mit derselben Summenzeitkonstante

**Kennwertermittlung.** Bisher wurde stets davon ausgegangen, dass das Modell durch theoretische Modellbildung (vgl. Abschn. 3.1) erhalten wurde, wobei die im System wirkenden physikalischen Vorgänge durch die entsprechenden Gesetze beschrieben und dass die dabei erhaltenen Gleichungen in ein Zustandsraummodell umgeformt wurden. Diese Vorgehensweise ist jedoch nur dann erfolgreich, wenn die sich in dem System abspielenden Prozesse im Einzelnen bekannt sind und wenn alle für die Beschreibung dieser Vorgänge verwendeten Parameter genau bestimmt werden können.

Häufig kommt man in die Situation, ein einfaches (wenn auch nur näherungsweise richtiges) Modell für ein System angeben zu müssen, ohne dass der relativ langwierige Weg der theoretischen Modellbildung beschritten werden kann. Statt dessen muss das Modell aus gemessenen Eingangs- und Ausgangsgrößen aufgestellt werden. Diese Aufgabenstellung wird in der umfangreichen Literatur über Prozessidentifikation behandelt. Hier soll lediglich gezeigt werden, wie man von einer gemessenen Übergangsfunktion für einfache Übertragungsglieder zum Zustandsraummodell kommt.



**Abb. 5.47:** Übergangsfunktion eines  $PT_1$ -Gliedes

Die Übergangsfunktion eines  $PT_1$ -Gliedes hat den in Abb. 5.47 angegebenen Verlauf. Gesucht sind die Parameter  $T$  und  $k_s$  des Modells (5.158)

$$\Sigma_{PT_1} : \begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{1}{T}x(t) + \frac{1}{T}u(t), & x(0) = 0 \\ y(t) = k_s x(t). \end{cases}$$

Aus dem Modell erhält man für die Übergangsfunktion die Beziehung

$$h(t) = k_s \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right). \quad (5.185)$$

Hat man  $h(t)$  gemessen, so können die beiden gesuchten Parameter  $k_s$  und  $T$  aus der grafischen Darstellung von  $h$  abgelesen werden. Die statische Verstärkung  $k_s$  ist gleich dem Endwert der Übergangsfunktion. Um die Zeitkonstante  $T$  zu ermitteln, wird die Ableitung der Übergangsfunktion gebildet:

$$\dot{h}(t) = k_s \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}.$$

Wird zur Zeit  $t = 0$  an die Übergangsfunktion die Tangente gelegt, so hat diese Tangente die Beschreibung

$$h_{\text{Tang}} = \dot{h}(0) t = k_s \frac{t}{T}.$$

Die Tangente erreicht den Wert  $k_s$  also gerade zur Zeit  $t = T$ . Folglich erhält man  $T$  aus der grafischen Darstellung von  $h$ , indem man die Tangente an die Übergangsfunktion zur Zeit  $t = 0$  legt und aus dem Schnittpunkt dieser Tangente mit der Parallelen zur Zeitachse mit dem Abstand  $k_s$  die Zeitkonstante  $T$  abliest (Abb. 5.47).

Ein anderer Weg zur Bestimmung von  $T$  ist durch die Tatsache begründet, dass zur Zeit  $t = T$  die Übergangsfunktion den Wert

$$h(T) = k_s (1 - e^{-1}) \approx 0,63 k_s \quad (5.186)$$

bzw. zur Zeit  $t = 3T$  den Wert

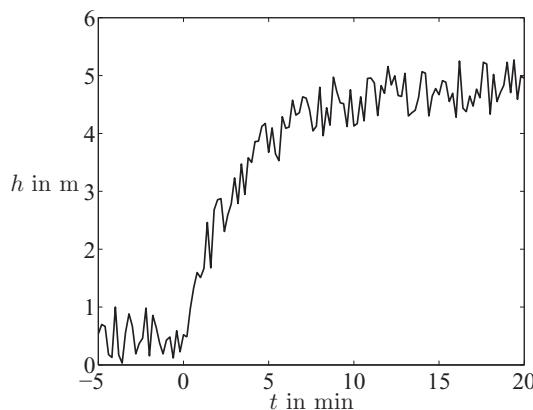
$$h(3T) = k_s (1 - e^{-3}) \approx 0,95 k_s$$

annimmt. Das heißt, man bestimmt die Zeitkonstante  $T$  als den Zeitpunkt, bei dem der Wert der gemessenen Übergangsfunktion 63% des Endwertes beträgt („63%-Regel“), oder als ein Drittel der Zeit, die vergeht, bis die Übergangsfunktion 95% des Endwertes erreicht hat („95%-Regel“).

#### Aufgabe 5.26 Kennwertermittlung für ein $PT_1$ -Glied

Die in Abb. 5.48 gezeigte Übergangsfunktion wurde experimentell an einem Prozess ermittelt.

1. Wie sieht das Experiment aus, mit dem diese Übergangsfunktion gemessen wurde?
2. Bestimmen Sie mit den drei angegebenen Methoden die Parameter einer  $PT_1$ -Approximation des Systems und vergleichen Sie die Ergebnisse untereinander. □



**Abb. 5.48:** Experimentell bestimmte Übergangsfunktion

**Aufgabe 5.27\*\* Kennwertermittlung für ein I-Glied**

Überlegen Sie, wie ähnlich dem für das  $PT_1$ -Glied angegebenen Weg die Parameter eines  $IT_1$ -Gliedes experimentell bestimmt werden können. □

**Aufgabe 5.28\*\* Summenzeitkonstante zusammengesetzter Übertragungsglieder**

Wie kann die Summenzeitkonstante einer Reihen-Parallel-Schaltung von Übertragungsgliedern aus den Summenzeitkonstanten der einzelnen Übertragungsglieder berechnet werden? (Hinweis: Stellen Sie diesen Zusammenhang zunächst für je zwei Übertragungsglieder auf und verallgemeinern Sie dann für beliebig viele Glieder.) □

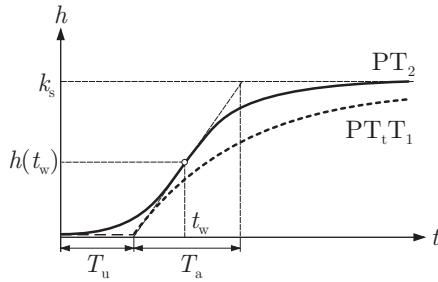
**Aufgabe 5.29 Approximation eines Totzeitgliedes**

Zeichnen Sie die Übergangsfunktion des Totzeitgliedes (4.113) und der Approximation erster Ordnung, die durch Gl. (5.185) gegeben ist, und vergleichen Sie beide Kurven. Wie groß ist der Approximationsfehler für  $t = T$  bzw.  $t = 3T$ ? □

### 5.7.3 Kennwertermittlung für $PT_2$ -Glieder

Viele Regelstrecken haben das in Abb. 5.49 gezeigte Verhalten. Ihre Übergangsfunktion beginnt in Richtung der Zeitachse, steigt dann stärker an und erreicht den statischen Endwert ohne nennenswertes Überschwingen. Derartige Systeme lassen sich gut durch  $PT_2$ -Glieder (5.161) approximieren.

Die Übergangsfunktionen von  $PT_2$ -Gliedern haben im Anfangsteil eine positive, später eine negative Krümmung. Man kann deshalb, wie in Abb. 5.49 gezeigt ist,



**Abb. 5.49:** Verzugszeit  $T_u$  und Anstiegszeit  $T_a$  der Übergangsfunktion von  $PT_2$ -Gliedern

eine Wendetangente bestimmen, die die Übergangsfunktion zum Zeitpunkt  $t_w$  berührt. Durch diese Wendetangente werden die *Verzugszeit*  $T_u$  und die *Anstiegszeit*  $T_a$  festgelegt. Das System kann mit guter Genauigkeit als  $PT_2$ -Glied betrachtet werden, wenn die aus der gemessenen Übergangsfunktion erhaltenen Werte für  $T_u$  und  $T_a$  die Bedingung

$$\frac{T_a}{T_u} > 10$$

erfüllen.

Aus der Übergangsfunktion (5.162)

$$h(t) = k_s \left( 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right) \quad (T_1 \neq T_2)$$

erhält man die Zeit  $t_w$ , indem man die zweite Ableitung von  $h(t)$  gleich null setzt:

$$\ddot{h}(t_w) = k_s \left( -\frac{1}{T_1(T_1 - T_2)} e^{-\frac{t_w}{T_1}} + \frac{1}{T_2(T_1 - T_2)} e^{-\frac{t_w}{T_2}} \right) = 0. \quad (5.187)$$

Daraus folgt die Gleichung

$$t_w = \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2} \ln \frac{T_1}{T_2} \quad (5.188)$$

sowie die für die weitere Rechnung wichtige Beziehung

$$\frac{1}{T_1} e^{-\frac{t_w}{T_1}} = \frac{1}{T_2} e^{-\frac{t_w}{T_2}}. \quad (5.189)$$

Für die Anstiegszeit  $T_a$  und die Verzugszeit  $T_u$  kann man aus der in Abb. 5.49 eingetragenen Wendetangente die Gleichungen

$$T_a = \frac{k_s}{\dot{h}(t_w)} \quad \text{und} \quad T_u = t_w - \frac{h(t_w)}{\dot{h}(t_w)}$$

ablesen. Für den zweiten Term der letzten Gleichung erhält man

$$\begin{aligned}\frac{h(t_w)}{\dot{h}(t_w)} &= \frac{k_s \left( 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t_w}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t_w}{T_2}} \right)}{k_s \left( \frac{1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t_w}{T_1}} - \frac{1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t_w}{T_2}} \right)} \\ &= T_a + T_1 + T_2,\end{aligned}$$

wenn man die Beziehungen (5.189) und (5.188) nacheinander einsetzt. Damit erhält man die Relation

$$T_u + T_a - t_w = T_1 + T_2. \quad (5.190)$$

Da man  $T_u$ ,  $T_a$  und  $t_w$  aus der gemessenen Übergangsfunktion mit Hilfe der Wendetangente ermitteln kann, können die gesuchten Zeitkonstanten  $T_1$  und  $T_2$  aus den Gln. (5.188) und (5.190) berechnet werden.  $k_s$  erhält man wie beim  $PT_1$ -Glied aus dem statischen Endwert der Übergangsfunktion.

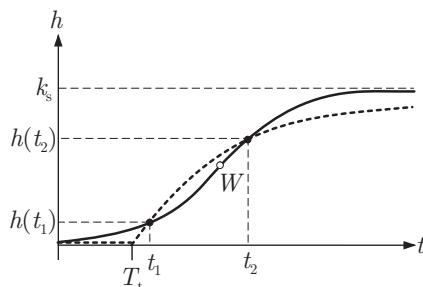
#### 5.7.4 Kennwertermittlung für $PT_1 T_t$ -Glieder

Besitzt das betrachtete System eine Übergangsfunktion, für die das Verhältnis von  $T_u$  zu  $T_a$  groß ist, so ist es zweckmäßig, die Verzugszeit als Totzeit des Systems aufzufassen und den Übergangsvorgang durch ein Verzögerungsglied erster Ordnung zu beschreiben. Das System wird also als  $PT_1 T_t$ -Glied aufgefasst.

Das Modell (5.174) hat die drei Parameter  $k_s$ ,  $T_t$  und  $T$ . Der statische Verstärkungsfaktor kann wie bisher aus dem statischen Endwert der Übergangsfunktion bestimmt werden. Für die Festlegung der beiden verbleibenden Parameter gibt es zwei Möglichkeiten. Wählt man

$$T_t = T_u \quad \text{und} \quad T = T_a,$$

so liegt die durch das Modell erzeugte Übergangsfunktion vollständig unterhalb der Wendetangente und ist damit stets kleiner als die gemessene Funktion. Dieser Verlauf ist in Abb. 5.49 durch die gestrichelte Kurve veranschaulicht.



**Abb. 5.50:** Approximation einer Übergangsfunktion durch die Übergangsfunktion eines  $PT_1 T_t$ -Gliedes

Andererseits kann man die Übergangsfunktion des Modells näher an die gemessene Kurve heranrücken, indem man  $T_t$  und  $T$  mit Hilfe zweier Werte der gemessenen Übergangsfunktion bestimmt. Die in Abb. 5.50 gekennzeichneten Punkte sind so gewählt, dass sie vor bzw. nach dem Wendepunkt  $W$  liegen. Sie sind durch die Zeiten  $t_1$  und  $t_2$  sowie durch die Werte  $h(t_1)$  und  $h(t_2)$  der Übergangsfunktion bestimmt.

Aus der Übergangsfunktion

$$h(t) = \begin{cases} k_s (1 - e^{-\frac{t-T_t}{T}}) & \text{für } 0 \leq t < T_t \\ 0 & \text{für } t \geq T_t \end{cases}$$

des  $PT_1T_t$ -Gliedes (5.174) erhält man für die beiden genannten Punkte die Beziehungen

$$\begin{aligned} h(t_1) &= k_s \left(1 - e^{-\frac{t_1-T_t}{T}}\right) \\ h(t_2) &= k_s \left(1 - e^{-\frac{t_2-T_t}{T}}\right) \end{aligned}$$

und daraus

$$\begin{aligned} T_t &= T \ln \left(1 - \frac{h(t_1)}{k_s}\right) + t_1 \\ T_t &= T \ln \left(1 - \frac{h(t_2)}{k_s}\right) + t_2. \end{aligned} \quad (5.191)$$

Subtrahiert man die zweite von der ersten Gleichung, so entsteht die Beziehung

$$T = \frac{t_2 - t_1}{\ln \frac{k_s - h(t_1)}{k_s - h(t_2)}} \quad (5.192)$$

für die Bestimmung der Zeitkonstanten  $T$  aus den Messwerten. Die Totzeit kann anschließend aus Gl. (5.191) berechnet werden.

Die behandelten Verfahren der Kennwertermittlung zeigen, dass diese Vorgehensweise auf Systeme mit „einfachem“ dynamischen Verhalten beschränkt ist. Sie zielt auf eine grobe Approximation, die für viele Regelungsaufgaben ausreichend ist.

## 5.8 MATLAB-Funktionen für die Analyse des Zeitverhaltens

Im Folgenden werden die Analysefunktionen behandelt, mit denen die in diesem Kapitel behandelten Rechenoperationen ausgeführt werden können.

Die Eigenwerte der Matrix  $A$  kann man sich mit der Funktion

» `eig(A)`

ausgeben lassen. Der Wert der Matrixexponentialfunktion  $e^{At}$  wird durch den Aufruf

---

```
>> ehochAt=expm(A*t);
```

der Matrix `ehochAt` zugewiesen.

Für die Berechnung der Kennfunktionen im Zeitbereich stehen mehrere Funktionen zur Verfügung. Die Übergangsfunktion des Systems erhält man als grafische Darstellung auf dem Bildschirm durch den Aufruf

```
>> step(System);
```

Auf diese Weise entstand z. B. Abb. 5.46 auf S. 212, wobei auf die dort genutzten Möglichkeiten, zwei Kurven gleichzeitig in ein Koordinatensystem zu zeichnen, die Achsenbezeichnung zu ändern und zusätzlichen Text einzutragen, hier nicht eingegangen wird. Um die Gewichtsfunktion zu erhalten, schreibt man

```
>> impulse(System);
```

wobei wiederum die grafische Darstellung auf dem Bildschirm erscheint. Die Eigenbewegung erhält man für einen vorgegebenen Anfangszustand  $x_0$  mit der Anweisung

```
>> initial(System, x0);
```

Will man die Ausgangsgröße des Systems für eine beliebig vorgegebene Eingangsgröße berechnen, so müssen zunächst zwei Zeilenvektoren  $u$  und  $t$  gleicher Länge mit den Werten der Eingangsgröße bzw. mit den dazugehörigen Zeitpunkten belegt werden. Die Lösung der Bewegungsgleichung erhält man dann mit dem Funktionsaufruf

```
>> lsim(System, u, t, x0);
```

grafisch auf dem Bildschirm dargestellt.

Die statische Verstärkung  $k_s$  kann man sich entsprechend Gl. (5.116) für stabile Systeme mit der Funktion

```
>> dcgain(System)
```

berechnen lassen. Für instabile Systeme wird dieselbe Formel angewendet, das Ergebnis kann jedoch nicht als statische Verstärkung interpretiert werden.

Für die Darstellung eines Vektorfeldes zweiter Ordnung in der in Abb. 5.13 verwendeten Form dient die Funktion

```
>> quiver(X, Y, U, V)
```

wobei die Vektoren  $X$  und  $Y$  die  $x$ - bzw.  $y$ -Koordinaten der als Pfeile dargestellten Geschwindigkeitsvektoren  $\dot{x}$  und die Vektoren  $U$  und  $V$  die Länge der Vektoren enthalten.

Alle Funktionen sind auch bei Mehrgrößensystemen anwendbar. Das kann man beispielsweise nutzen, um sich an Stelle der Ausgangsgröße  $y$  den Verlauf aller Zustandsvariablen  $x_i$  ausgeben zu lassen. Man arbeitet dann an Stelle des Vektors  $c^T$  mit einer Einheitsmatrix entsprechender Dimension, also mit der Ausgabegleichung

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Ix}(t).$$

**Modelltransformationen.** Für die im Abschn. 5.3 angegebenen Transformationen des Zustandsraummodells stehen in MATLAB die Funktionen `ss2ss` und `canon` zur Verfügung (die Bezeichnung `ss2ss` kann man sich an der freien Übersetzung von `state space to (two) state space` merken). Hat man eine Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  gewählt, mit der man die Zustandstransformation (5.25) ausführen möchte, so weist man diese der Variablen  $\mathbf{T}$  zu und ruft die Funktion `ss2ss` auf:

```
> transfSystem = ss2ss(System, inv(T));
```

Das transformierte System (5.26) – (5.30) ist durch  $\mathbf{A}_t$ ,  $\mathbf{b}_t$ ,  $\mathbf{c}_t$  und  $\mathbf{d}_t$  beschrieben, das man durch

```
> [At, bt, ct, dt] = ssdata(transfSystem);
```

auslesen kann. Da die Funktion `ss2ss` für eine andere Notation der Transformationsmatrix geschrieben ist, muss man an Stelle von  $\mathbf{T}$  die inverse Matrix `inv(T)` als Argument einsetzen.

Die kanonische Normalform und die inverse Transformationsmatrix  $\mathbf{V}^{-1}$  erhält man aus

```
> [SystemKNF, Vinv] = canon(System, 'modal');
```

wobei das gegebene Zustandsraummodell mit dem Zustand  $\mathbf{x}$  durch

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}(t)$$

in die kanonische Normalform (5.52) überführt wird. Die ausgegebene Matrix  $\mathbf{V}^{-1}$  ist  $\mathbf{V}^{-1}$ . Verwendet man die Funktion `canon` mit der Typangabe '`companion`'

```
> [SystemBNF, Tinv] = canon(System, 'companion');
```

so erhält man die Beobachtungsnormalform (5.84), (5.85) des Systems, allerdings mit den um den Faktor  $b_0$  veränderten Vektoren  $\frac{1}{b_0}\mathbf{b}_B$  und  $b_0\mathbf{c}_B^T$ .

#### Beispiel 5.14 Analyse des Zeitverhaltens einer Raumtemperaturregelung

Der Regelkreis einer Raumtemperaturregelung hat dieselbe Struktur wie in Abb. 2.2 auf S. 20, nur dass jetzt die Ventilstellung am Heizkörper als Stellgröße wirkt. Für die Regelstrecke wurde das Modell

$$\text{Raum : } \begin{cases} \dot{x}(t) = -0,2x(t) + 0,2u(t), & x(0) = x_0 \\ y(t) = 5x(t) \end{cases}$$

aufgestellt, das in MATLAB durch

```

» A = [-0.2];
» b = [0.2];
» c = [5];
» d = 0;
» Raum = ss(A, b, c, d);
» printsys(A, b, c, d)
a =
      x1
x1  -0.20000

b =
      u1
x1  0.20000

c =
      x1
y1  5.00000

d =
      u1
y1  0

```

definiert wird. Als Maßeinheiten werden festgelegt

Millimeter	für den Ventilhub $u$
Grad Celsius	für die Raumtemperatur $y$
Minuten	für die Zeit.

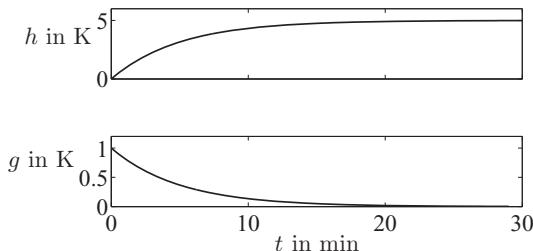
Die Übergangsfunktion wird durch den Befehl

```
» step(Raum);
```

berechnet, wodurch man den oberen Teil der Abb. 5.51 erhält. Die Abbildung besagt, dass sich bei einer Vergrößerung der Ventilöffnung um einen Millimeter die Raumtemperatur nach 30 Minuten um  $5^{\circ}\text{C}$  ändert. Die Gewichtsfunktion erhält man mit der Funktion

```
» impulse(Raum);
```

wodurch der untere Teil der Abb. 5.51 entsteht.



**Abb. 5.51:** Übergangsfunktion und Gewichtsfunktion eines Raumes

Die statische Verstärkung des Raumes, die auch als Endwert der Übergangsfunktion abgelesen werden kann, erhält man mit dem Funktionsaufruf

```
>> dgcgain(Raum)
ans=
5
```

Für die Raumtemperaturregelung soll der Regler

$$u(t) = 0,3 (w(t) - y(t)) \quad (5.193)$$

eingesetzt werden, bei dem die Stellgröße  $u(t)$  proportional zur Regelabweichung gebildet wird. Dieser Regler ist ein statisches Übertragungsglied, der durch

```
>> Regler = ss(0.3);
```

beschrieben werden kann. In dieser Verwendung der Funktion `ss` fehlen die Elemente  $A$ ,  $b$  und  $c^T$  (vgl. Beschreibung von `ss` auf S. 115).

Zur Berechnung des Regelkreises muss man zunächst die Reihenschaltung von Regler und Regelstrecke zusammenfassen (vgl. Abb. 2.2 auf S. 20), was durch den Funktionsaufruf

```
>> offeneKette = series(Raum, Regler);
```

geschieht. Anschließend wird der Regelkreis mit einer Einheitsrückführung geschlossen,

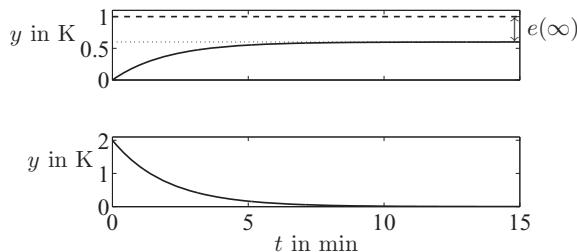
```
>> Regelkreis = feedback(offeneKette, 1);
```

bei der das Übertragungsglied im Rückwärtzweig durch die angegebene 1 dargestellt wird. Der Regelkreis hat die Eingangsgröße  $w$  und die Ausgangsgröße  $y$  (vgl. Abb. 2.2). Das Modell des Regelkreises kann man sich durch Aufruf des Modellnamens

```
>> Regelkreis
```

oder in besser kommentierter Form durch Nutzung der Funktion `printsys` ausgeben lassen:

```
>> [Akreis, bkreis, ckreis, dkreis] = ssdata(Regelkreis);
>> printsys(Akreis, bkreis, ckreis, dkreis);
```



**Abb. 5.52:** Übergangsfunktion und Eigenbewegung des Raumtemperaturregelkreises

Die Übergangsfunktion des Regelkreises, die die Veränderung der Raumtemperatur bei sprungförmiger Erhöhung des Temperatursollwertes auf den Wert 1 beschreibt, erhält man durch

```
>> step(Regelkreis);
```

wodurch der obere Teil von Abb. 5.52 entsteht. Offensichtlich erreicht die Temperatur den Sollwert nie, sondern erhöht sich nur um etwa 0,6 Grad. Den Endwert kann man durch

```
>> dcgain(Regelkreis)
```

```
ans =
```

```
0.6000
```

berechnen. Die Tatsache, dass der Temperaturregelkreis mit der hier verwendeten proportionalen Rückführung (5.193) auf eine bleibende Regelabweichung  $e(\infty)$  führt, wird im Abschn. 7.3.3 genauer untersucht werden.

Weicht die Raumtemperatur zur Zeit  $t = 0$  um 2 Grad vom Sollwert 0 ab, so kann das Verhalten des Regelkreises dadurch berechnet werden, dass man mit der Funktion `initial` die Eigenbewegung für den Anfangszustand  $x_0 = \frac{2}{1,5}$  erzeugt (wobei  $x_0$  so gewählt ist, dass  $y(0) = 2$  gilt, vgl. Modelldaten des Regelkreises):

```
>> initial(Regelkreis, 2/1.5);
```

Dabei entsteht der untere Teil von Abb. 5.52, der deutlich macht, dass die Raumtemperatur nach etwa 10 Minuten den Sollwert erreicht hat.

Die für dieses Beispiel durchgeführte Analyse ist im Programm 5.1 zusammengefasst, das als Vorbild für ähnliche Aufgaben dienen kann.  $\square$

### Aufgabe 5.30 Analyse des Übergangsverhaltens gekoppelter Behälter



Berechnen Sie die Übergangsfunktion, die Gewichtsfunktion sowie die Eigenbewegung des in Aufgabe 5.10 auf S. 175 angegebenen Behältersystems, wobei Sie bei der Betrachtung der Eigenbewegung den Anfangszustand

$$\begin{pmatrix} c_1(0) \\ c_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu Grunde legen. Verändern Sie die Parameter des ersten bzw. des zweiten Behälters, wobei Sie die beiden mit 0,67 bzw. mit 0,5 angegebenen Parameter auf Werte zwischen 0,2 und 10 setzen. Wie verändert sich das Zeitverhalten? Diskutieren Sie die Veränderungen unter Beachtung der Eigenwerte, die die jeweils verwendete Systemmatrix hat.  $\square$

### Aufgabe 5.31 Übergangsverhalten von PT<sub>2</sub>-Gliedern



Die Aufgabe soll ein Gefühl darüber vermitteln, wie stark das Übergangsverhalten von den Systemparametern abhängt.

1. Stellen Sie die Übergangsfunktionen von PT<sub>2</sub>-Gliedern, die aus der Reihenschaltung von zwei PT<sub>1</sub>-Gliedern bestehen, in einem Diagramm dar und vergleichen Sie diese. Das erste PT<sub>1</sub>-Glied hat die Zeitkonstante  $T_1 = 1$  s. Wählen Sie für die Zeitkonstante  $T_2$  des zweiten PT<sub>1</sub>-Gliedes Werte aus dem Bereich 0,01 s bis 100 s aus. Beide PT<sub>1</sub>-Glieder haben die statische Verstärkung  $k_s = 1$ .
2. Für welchen Bereich der Zeitkonstante  $T_2$  kann das PT<sub>2</sub>-Glied durch ein PT<sub>1</sub>-Glied mit der Zeitkonstante  $T_1$  und für welchen Bereich durch ein PT<sub>1</sub>-Glied mit der Zeitkonstante  $T_2$  approximiert werden?  $\square$

**Programm 5.1 Systemanalyse im Zeitbereich**  
*(Beispiel 5.14: Analyse einer Raumtemperaturregelung)*

```

Modell der Regelstrecke
» A = [-0.2];
» b = [0.2];
» c = [5];
» d = 0;
» Raum = ss(A, b, c, d);
» printsys(A, b, c, d)
    a =
        x1
    x1   -0.20000

    b =
        u1
    x1   0.20000

    c =
        x1
    y1   5.00000

    d =
        u1
    y1   0

Analyse der Regelstrecke
» step(Raum); ...erzeugt den oberen Teil von Abb. 5.51
» impulse(Raum); ...erzeugt den unteren Teil von Abb. 5.51
» dcgain(Raum)
ans=
    5                      statische Verstärkung

Bestimmung des Regelkreismodells
Regler (5.193)
» Regler = ss(0.3);
» offeneKette = series(Raum, Regler);
» Regelkreis = feedback(offeneKette, 1);

Analyse des Regelkreises
» step(Regelkreis); ...erzeugt den oberen Teil von Abb. 5.52
» initial(Regelkreis, 2/1.5); ...erzeugt den unteren Teil von Abb. 5.52

```

## Literaturhinweise

Wichtige klassisches Werke zur Theorie linearer Systeme mit den in diesem Kapitel behandelten Eigenschaften und Phänomenen sind [50, 109].

Die Zustandsäquivalenz wurde in [15, 109] eingeführt.

Die E/A-Normalform wurde für nichtlineare Systeme eingeführt [20] und ist ausführlich in [47] erklärt. Sie ist jedoch auch für lineare Systeme von Bedeutung, weil man mit ihr das Phänomen der Nulldynamik sehr gut erklären kann [101, 110].

Als Übersicht über das Thema „Systemnullstellen“ wird [42] empfohlen.

Die Modellvereinfachung ist ein ausführlich untersuchtes Gebiet, das bisher keinen Eingang in die Grundlagenbücher der Regelungstechnik gefunden hat und vor allem in Monografien über „große Systeme“ ausführlicher dargestellt wird, z. B. in [4, 49, 75]. Das im Abschn. 5.7.1 beschriebene Verfahren wurde in [65] vorgeschlagen.

Die Identifikation dynamischer Systeme ist ausführlich in den Lehrbüchern [48, 105] dargestellt. Die im Abschn. 5.7.2 behandelte Kennwertermittlung mit deterministischen Testsignalen beruht auf Verfahren, die Ende der fünfziger Jahre mit dem Ziel entwickelt wurden, einfache Modelle ohne großen Rechenaufwand und auf grafisch möglichst anschaulichem Wege bilden zu können. Das im Abschn. 5.7.4 behandelte Verfahren wurde von STREJC 1959 in [99] vorgeschlagen. SCHWARZE erweiterte das im Abschn. 5.7.2 angegebene Vorgehen, die Modellparameter aus Zeitprozentkennwerten der Übergangsfunktion zu bestimmen, auf Systeme höherer als erster Ordnung. Ausführlich ist die Kennwertermittlung in [91], Kap. 5 abgehandelt.

Für das Programmsystem MATLAB stehen Einführungen und Handbücher in jedem Rechenzentrum für die Nutzer zur Verfügung. Für die Lösung der hier beschriebenen Aufgaben reicht die im Anhang 2 gegebene Kurzbeschreibung aus.

Die Grundlagen der Matrizenrechnung sind beispielsweise in [11, 102] im Hinblick auf deren Anwendung in der Regelungstechnik zusammengefasst.

Für eine ausführliche Modellbildung der in Beispiel 5.1 behandelten Verladebrücke wird auf [31] verwiesen.

# 6

## Beschreibung und Analyse linearer Systeme im Frequenzbereich

Die Beschreibung und die Analyse linearer Systeme im Frequenzbereich beruhen auf der Zerlegung aller betrachteten Signale in sinusförmige Elementarsignale mit Hilfe der Fourier- bzw. LaplaceTransformation. Beide Transformationen werden hier ausführlich behandelt, wobei es vor allem auf ihre ingenieurtechnische Interpretation ankommt. Als Modelle dynamischer Systeme werden der Frequenzgang und die Übertragungsfunktion eingeführt. Abschließend werden die Eigenschaften wichtiger Übertragungsglieder im Frequenzbereich untersucht.

### 6.1 Zielstellung

Die Betrachtungen im Frequenzbereich beruhen auf der Verwendung sinusförmiger Eingangsgrößen  $u(t)$ . Dass man trotz der Beschränkung auf diese spezielle Art von Signalen das Verhalten eines dynamischen Systems  $\Sigma$  in seiner Vielfalt beschreiben und analysieren kann, ist auf den ersten Blick verwunderlich, denn die Menge aller denkbaren Funktionen  $u(t)$  ist unendlich groß. Zwei Tatsachen sorgen jedoch dafür, dass man aus den sich bei sinusförmigen Eingangsgrößen offenbarenden Verhaltensformen des Systems  $\Sigma$  auf alle interessanten Systemeigenschaften schließen kann.

Erstens ist aus der Fourieranalyse bekannt, dass sich jedes periodische Signal durch eine Summe sinusförmiger Signale darstellen lässt. Diese Aussage kann auf nichtperiodische Signale erweitert werden, wenn man die Fouriertransformation heranzieht. Noch weniger Einschränkungen bezüglich der betrachteten Klasse von Zeitfunktionen muss man bei der Verwendung der Laplacetransformation machen, durch die (fast) jede Funktion in auf- und abklingende Sinusschwingungen zerlegt wird. Die Betrachtung sinusförmiger Eingangsgrößen ist deshalb keine Einschränkung der Allgemeinheit.

Zweitens erlaubt es das Superpositionsprinzip, dass man die Übertragung der Sinuskomponenten von  $u(t)$  durch das lineare System getrennt voneinander untersuchen und aus den dabei erhaltenen Ergebnissen die Systemantwort  $y(t)$  zusammen setzen kann. Die folgenden Betrachtungen sind damit jedoch streng an die Linearität der betrachteten Systeme gebunden.

Diese beiden Tatsachen ermöglichen folgendes Vorgehen:

---

#### **Algorithmus 6.1 Systemanalyse im Frequenzbereich**

---

**Gegeben:** Dynamisches System  $\Sigma$   
Verlauf der Eingangsgröße  $u$

1. Zerlegen Sie die Eingangsgröße  $u(t)$  in sinusförmige Anteile.
2. Berechnen Sie die Systemantworten für jeden einzelnen sinusförmigen Anteil von  $u(t)$  getrennt voneinander.
3. Bestimmen Sie die Ausgangsgröße  $y(t)$  durch Überlagerung aller berechneten Systemantworten.

**Ergebnis:** Verlauf der Ausgangsgröße  $y$

---

Dieser Weg ist für bestimmte Fragestellungen anschaulicher und einfacher als eine Analyse im Zeitbereich. Anschaulicher ist er, weil man sich bei der Systemanalyse unabhängig vom konkreten Verlauf der Eingangsgröße stets auf die Übertragung sinusförmiger Signale durch das System  $\Sigma$  beziehen kann. Einfacher ist er, weil sinusförmige Eingangssignale durch lineare Systeme nur bezüglich ihrer Amplitude und ihrer Phase verändert werden. Aus einem sinusförmigen Signal der Frequenz  $\omega$  am Eingang wird im stationären Verhalten ein sinusförmiges Signal derselben Frequenz am Systemausgang. Damit ist die Übertragungseigenschaft des linearen Systems für ein sinusförmiges Signal mit der Frequenz  $\omega$  durch zwei skalare Größen gegeben, nämlich durch die Verstärkung und die Phasenverschiebung (Verschiebung auf der Zeitachse). In der mathematischen Darstellung des Systems  $\Sigma$  hat dies zur Folge, dass keine Differenzialgleichungen mehr auftreten, sondern nur noch algebraische Gleichungen. In der Frequenzbereichsbetrachtung können lineare dynamische Systeme also mit Mitteln beschrieben werden, die im Zeitbereich nur für statische Systeme anwendbar sind.

Diese Vorgehensweise ist vor allem in der Elektrotechnik von der Wechselstromlehre bekannt und wird im Maschinenbau bei der Analyse von Resonanzerscheinungen eingesetzt.

In den folgenden Abschnitten wird zunächst auf die erwähnte Zerlegung von Funktionen in sinusförmige Anteile eingegangen. Dann wird mit dem Frequenzgang eine Systembeschreibung eingeführt, die die Übertragungseigenschaften linearer Systeme für sinusförmige Signale repräsentiert. Um auch instabile Systeme auf diese Weise beschreiben zu können, muss man von sinusförmigen auf exponentiell aufklingende oder abklingende Sinusfunktionen übergehen. Dafür wird als mathematisches Hilfsmittel die Laplacetransformation eingeführt und der Frequenzgang auf die Übertragungsfunktion erweitert.

Der Begriff „Frequenzbereich“ wird im Folgenden für die Menge alle Funktionen mit der komplexen Frequenz  $s = \delta + j\omega$  verwendet, die die aufklingenden und abklingenden Sinusfunktionen enthält. In der Literatur werden dafür auch die Bezeichnungen „ $s$ -Bereich“ oder „Bildbereich der Laplacetransformation“ verwendet. Die Betrachtungen sind dadurch gekennzeichnet, dass jetzt nicht mehr wie im Zeitbereich die Zeitvariable  $t$ , sondern die Frequenzvariable  $s$  die unabhängige Variable aller betrachteten Funktionen ist. Häufig reicht es, sich auf die rein imaginären Frequenzen  $s = j\omega$  zu beschränken, so dass an vielen Diagrammen dieses Kapitels die Frequenz  $\omega$  an der Abszisse steht.

In den Abschnitten zur Fouriertransformation und Laplacetransformation wird erwartet, dass der Leser diese Funktionaltransformationen bereits kennt. Es wird deshalb keine mathematisch vollständige Einführung gegeben, sondern vor allem auf die ingenieurtechnische Interpretation dieser Transformationen eingegangen.

## 6.2 Fouriertransformation

### 6.2.1 Zerlegung periodischer Signale

**Fouriertheorem.** In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass sich sehr viele nicht sinusförmige Signale in eine Summe sinusförmiger Signale zerlegen lassen. Es werden zunächst periodische Funktionen  $f(t)$  betrachtet, für die die Beziehung

$$f(t) = f(t + lT_0), \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (6.1)$$

gilt und die folglich die Periode  $T_0$ , die Frequenz

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \quad (6.2)$$

und die Kreisfrequenz

$$\omega_0 = 2\pi f_0 \quad (6.3)$$

haben.

Nach dem Fouriertheorem<sup>1</sup> können solche Funktionen in eine Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen zerlegt werden, deren Kreisfrequenzen  $\omega$  ganzzahlige Vielfache von  $\omega_0$  sind:

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(k\omega_0 t). \quad (6.4)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung heißt *Fourierreihe* von  $f(t)$ .  $A_k$  und  $B_k$  sind reelle Koeffizienten, die Fourierkoeffizienten. Sie können folgendermaßen aus  $f(t)$  berechnet werden:

$$A_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \cos(k\omega_0 t) dt, \quad k = 0, 1, \dots \quad (6.5)$$

$$B_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \sin(k\omega_0 t) dt, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.6)$$

In einer zu Gl. (6.4) alternativen Darstellung kann man  $f(t)$  in reine Sinusschwingungen zerlegen, wobei jedoch Phasenverschiebungen auftreten:

$$f(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin(k\omega_0 t + \phi_k). \quad (6.7)$$

Dabei gilt im Vergleich zur ersten Darstellung

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{A_0}{2} \\ C_k &= \sqrt{A_k^2 + B_k^2}, \quad k = 1, 2, \dots \\ \phi_k &= \arctan \frac{A_k}{B_k}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

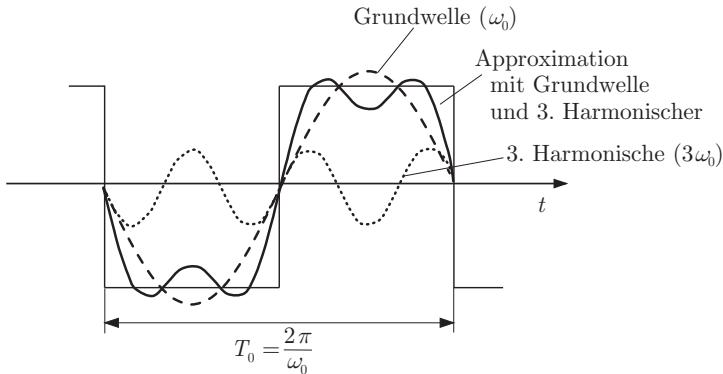
In den Gln. (6.4) und (6.7) stellt der Summand  $\frac{A_0}{2}$  ein zeitunabhängiges Absolutglied dar. Die Summanden für  $k = 1$  heißen Grundwellen (erste Harmonische). Alle anderen Summanden sind Funktionen mit höherer Frequenz als  $\omega_0$ . Sie werden als Oberwellen (höhere Harmonische) bezeichnet.

Abbildung 6.1 zeigt ein Beispiel für die Fourierzerlegung. Für die Rechteckfunktion sind die Näherungen gezeichnet, die man aus der ersten bzw. aus den ersten drei Summanden von (6.4) erhält, wobei beachtet werden muss, dass die zweite Harmonische in diesem Beispiel verschwindet und deshalb im zweiten Fall die Summe von Grundwelle und dritter Harmonischer maßgebend ist.

Die Voraussetzungen dafür, dass die Zerlegung (6.4) möglich ist, sind die *dirichletschen Bedingungen*, die für Regelungstechnische Betrachtungen häufig erfüllt sind, wenn es sich bei den betrachteten Funktionen um periodische handelt. Für die Funktion  $f(t)$  wird gefordert, dass sich der Definitionsbereich in endlich viele Intervalle

---

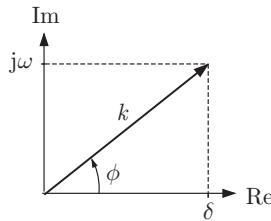
<sup>1</sup> JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER (1768 – 1830), französischer Mathematiker



**Abb. 6.1:** Zerlegung einer Rechteckschwingung in Sinusschwingungen

zerlegen lässt, in denen  $f(t)$  stetig und monoton ist, wobei an jeder Unstetigkeitsstelle  $\bar{t}$  die Werte  $f(\bar{t} + 0)$  und  $f(\bar{t} - 0)$  definiert sind. Weiterhin muss gelten

$$\int_{T_0}^{-T_0} |f(t)| dt < \infty. \quad (6.8)$$



**Abb. 6.2:** Interpretation der Eulerformel in der komplexen Ebene

**Exponentialdarstellung der Fourierreihe.** Durch die Einführung komplexer Amplituden  $F_k$  kann die Fourierzerlegung (6.4) in die Exponentialform gebracht werden, auf die später zurückgegriffen wird. Die Euler'sche Formel lautet

$$\delta + j\omega = k e^{j\phi} = k (\cos \phi + j \sin \phi) \quad (6.9)$$

mit

$$k = \sqrt{\delta^2 + \omega^2} \quad \text{und} \quad \phi = \arctan \frac{\omega}{\delta}$$

(Abb. 6.2), wobei  $k = |\delta + j\omega|$  als Betrag und  $\phi = \arg(\delta + j\omega)$  als Argument der komplexen Zahl  $\delta + j\omega$  bezeichnet wird. Wendet man diese Formel an, so erhält man

$$\cos(k\omega_0 t) = \frac{1}{2} (e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t}), \quad k = 0, 1, \dots \quad (6.10)$$

$$\sin(k\omega_0 t) = \frac{1}{j2} (e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t}), \quad k = 0, 1, \dots \quad (6.11)$$

Deshalb folgt aus Gl. (6.4)

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{A_k}{2} (e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t}) + \frac{B_k}{j2} (e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t}) \right) \\ &= \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} (A_k - jB_k) e^{jk\omega_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} (A_k + jB_k) e^{-jk\omega_0 t}. \end{aligned}$$

Führt man die komplexen Fourierkoeffizienten

$$F_k = \frac{1}{2} (A_k - jB_k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.12)$$

$$F_{-k} = \frac{1}{2} (A_k + jB_k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.13)$$

$$F_0 = \frac{A_0}{2} \quad (6.14)$$

ein, so lässt sich die zweite Zeile zu einer Summe zusammenfassen und man erhält die komplexe Darstellung der Fourierreihe:

$$\text{Fourierreihe: } f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_0 t}. \quad (6.15)$$

Die Koeffizienten  $F_k$  sind i. Allg. komplex. Gleichung (6.12) zeigt, dass  $F_k$  und  $F_{-k}$  (für denselben Index  $k$ ) konjugiert komplex sind, d. h., es gilt

$$|F_k| = |F_{-k}| \quad (6.16)$$

$$\arg F_k = -\arg F_{-k}. \quad (6.17)$$

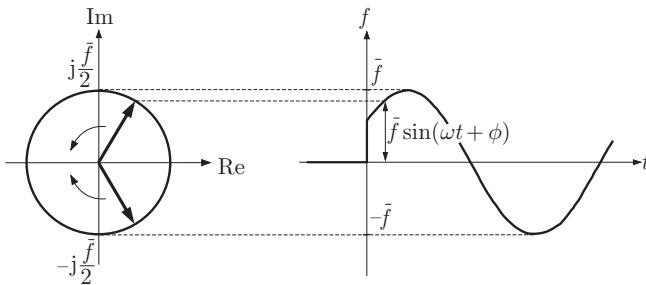
Deshalb entstehen in der Summe (6.15) für jeden Zeitpunkt  $t$  reelle Funktionswerte  $f(t)$ .

Um diese für die folgenden Betrachtungen sehr wichtige Tatsache zu veranschaulichen, wird die Funktion

$$f(t) = \bar{f} \sin(\omega_0 t + \phi) = \left( -j \frac{\bar{f}}{2} e^{j\phi} \right) e^{j\omega_0 t} + \left( j \frac{\bar{f}}{2} e^{-j\phi} \right) e^{-j\omega_0 t}$$

betrachtet. Es treten nur Summanden für  $k = \pm 1$  auf, wobei die in den Klammern stehenden Ausdrücke die Koeffizienten  $F_1$  bzw.  $F_{-1}$  darstellen. Beide Summanden sind komplex, ihre Summe ist jedoch reell. Die komplexe Darstellung einer periodischen Funktion enthält also komplexwertige e-Funktionen und komplexe Koeffizienten, die Funktion hat aber reelle Werte.

Die komplexe Darstellung sinusförmiger Signale ist in der Elektrotechnik als Zeigerdiagramm geläufig. Dabei wird der Summand  $-j\frac{\bar{f}}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 t}$  als rotierender Zeiger aufgefasst, wobei man die Bewegung des Summanden in der komplexen Ebene verfolgt (Abb. 6.3). Die Sinusfunktion  $\bar{f} \sin(\omega_0 t + \phi)$  entsteht als Summe zweier sich mit entgegengesetzter Drehrichtung bewegender Zeiger. Die Spitzen beider Zeiger weisen auf zwei konjugiert komplexe Zahlen, deren Summe den reellen Signalwert ergibt. Die Zeiger haben die Länge  $\frac{\bar{f}}{2}$ . Sie beginnen ihre Bewegung zur Zeit  $t = 0$  im Winkel  $\phi$  bzw.  $-\phi$  und drehen sich mit der Kreisfrequenz  $\omega$ . Die Summe ist eine Sinusfunktion mit der Amplitude  $\bar{f}$ .



**Abb. 6.3:** Erzeugung der Funktion  $f(t) = \bar{f} \sin(\omega_0 t + \phi)$  durch zwei rotierende Zeiger

Eine Bestimmungsgleichung für die komplexen Amplituden  $F_k$  erhält man aus Gl. (6.12) in Verbindung mit Gln. (6.5), (6.6) und (6.9):

$$F_k = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6.18)$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass die Gl. (6.18) auch für negative Indizes  $k$  gilt und dass das Integrationsintervall durch Wahl von  $t_0$  beliebig verschoben werden kann, ohne dass sich etwas am Wert von  $F_k$  ändert. In Bezug zu den Koeffizienten  $C_k$  in Gl. (6.7) gilt

$$F_0 = C_0 \quad (6.19)$$

$$|F_k| = \frac{1}{2}|C_k|, \quad k \neq 0 \quad (6.20)$$

$$\arg F_k = \phi_k, \quad k \neq 0. \quad (6.21)$$

Im Folgenden wird sowohl die reelle als auch die komplexe Darstellung der Fourierreihe gebraucht und zwar die reelle immer dann, wenn es auf die Interpretation der Ergebnisse ankommt. Auf die komplexe Darstellung wird zurückgegriffen, um die Rechnungen zu vereinfachen. So sind Integrale und Summen komplexwertiger Signale besser zu berechnen als aus der Darstellung mit Sinus- und Cosinusfunktionen.

Die komplexe Darstellung ist jedoch nicht ohne Weiteres interpretierbar, denn die negativen Frequenzen haben keine physikalische Bedeutung.

**Bedeutung des Fouriertheorems.** Das Fouriertheorem zeigt, dass periodische Funktionen – unter praktisch wenig einschränkenden Bedingungen – in eine Summe von Sinusfunktionen zerlegt werden können. Die Sinusfunktionen haben dieselbe Frequenz  $\omega_0$  oder ein Vielfaches der Frequenz des zu zerlegenden Signals. Wichtig sind ihre Amplitude  $|F_k|$  und ihre Phasenverschiebung  $\arg F_k$ .

Bisher wurde die Funktion  $f(t)$  stets als eine Funktion der Zeit  $t$  aufgefasst. Aufgrund der angegebenen Darstellung als Summe von Sinusschwingungen kann man sie nun aber auch als Funktion der Frequenz  $\omega$  interpretieren, wobei nur die diskreten Frequenzen  $k\omega_0$  von Bedeutung sind.  $|F_k|$  und  $\arg F_k$  sind dann Funktionen, die die Menge der ganzen Zahlen  $k$  in die Menge der reellen Zahlen abbilden.  $k$  beschreibt die betrachtete Frequenz,  $|F_k|$  die Amplitude der zugehörigen e-Funktion und  $\arg F_k$  die Phasenverschiebung. Man nennt deshalb den Verlauf von  $|F_k|$  für  $k = -\infty \dots \infty$  das *Amplitudenspektrum* und den Verlauf von  $\arg F_k$  das *Phasenspektrum*. Beide gemeinsam bilden die Frequenzbereichsdarstellung der periodischen Funktion  $f(t)$ .

Beide Spektren sind diskret, denn die komplexen Amplituden  $F_k$  sind nur für ganzzahlige Indizes  $k$  definiert. Abbildung 6.4 zeigt dies am Beispiel von Rechteckimpulsen, für die die Koeffizienten  $F_k$  reell sind und  $\arg F_k = 0$  für alle  $k$  gilt.

Das Fouriertheorem zeigt, dass die auf S. 179 beschriebene Art von Eingangsgrößen (5.130) sehr allgemein ist. Viele periodische Funktionen können in dieser Weise dargestellt werden. Die Gl. (5.133) zeigt, dass sich die Ausgangsgröße des Systems in ähnlicher Weise aus einer Summe von e-Funktionen zusammensetzt. Diese Tatsache ist ein wichtiger Grund, um für lineare Systeme anstelle des Zustandsraummodells den Frequenzgang als alternative Modellform einzuführen, wie es im Abschn. 6.3 getan wird. Vorher muss die bisher behandelte Zerlegung noch auf nichtperiodische Signale erweitert werden.

**Bemerkungen zur Maßeinheit der Frequenz.** Für periodische Funktionen mit der Periodendauer  $T_0$  wurden in den Gln. (6.2) und (6.3) die Frequenz  $f_0$  und die Kreisfrequenz  $\omega_0$  definiert. Die Frequenz  $f_0$  hat die Maßeinheit  $\frac{1}{s}$ , für die man die Bezeichnung Hz (Hertz) eingeführt hat<sup>2</sup>. Eine Sinusfunktion hat die Frequenz  $f_0 = 1 \text{ Hz}$ , wenn sich – bildlich gesprochen – die Zeiger in Abb. 6.3 einmal in der Sekunde auf dem Einheitskreis drehen.

Die Kreisfrequenz  $\omega_0$  nach Gl. (6.3) beschreibt den Winkel im Bogenmaß, den die Zeiger pro Zeiteinheit überstreichen. Die Maßeinheit der Kreisfrequenz ist deshalb  $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$  (Radian pro Sekunde). Für die Frequenz  $f_0 = 1 \text{ Hz}$  erhält man die Kreisfrequenz

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

---

<sup>2</sup> HEINRICH RUDOLF HERTZ (1847 – 1894), deutscher Physiker, beschäftigte sich mit der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen

denn die Zeiger überstreichen pro Sekunde einen Winkel von  $360^\circ$ , der im Bogenmaß  $2\pi$  rad entspricht. Aus der angegebenen Umrechnung sieht man, dass der in Gl. (6.3) vorkommende Faktor  $2\pi$  die Maßeinheit rad haben muss.

Die folgenden Betrachtungen beziehen sich ausschließlich auf die Kreisfrequenz. Dabei wird  $\omega$  nicht immer korrekt als „Kreisfrequenz“, sondern dem allgemeinen Sprachgebrauch entsprechend auch kürzer als „Frequenz“ bezeichnet.

### 6.2.2 Zerlegung nichtperiodischer Signale

Was mit der Fourierzerlegung beim Übergang von periodischen zu nichtperiodischen Funktionen passiert, kann dadurch veranschaulicht werden, dass man die Zerlegung einer Folge von Rechteckimpulsen betrachtet und die Periodendauer  $T_0$  vergrößert. In Abb. 6.4 ist das mit Gl. (6.18) berechnete Amplitudenspektrum

$$F_k = \frac{T_1}{T_0} \frac{\sin(k\pi \frac{T_1}{T_0})}{k\pi \frac{T_1}{T_0}}$$

für unterschiedliche Tastverhältnisse  $\frac{T_0}{T_1}$  dargestellt. Es wird offensichtlich, dass bei der Vergrößerung von  $T_0$  die Hüllkurve qualitativ ihre Form behält. Der auf der  $\omega$ -Achse gemessene Abstand  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$  zwischen den Spektrallinien verkleinert sich und die Amplituden  $|F_k|$  werden kleiner. Diese Beobachtung gilt allgemein: Beim Übergang vom periodischen zum nichtperiodischen Signal wird aus dem diskreten ein kontinuierliches Spektrum. Das heißt, zur Darstellung nichtperiodischer Funktionen reichen Sinusfunktionen, deren Kreisfrequenzen  $\omega$  ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz  $\omega_0$  darstellen, nicht mehr aus. Es sind unendlich viele Sinusfunktionen mit allen reellen Frequenzen  $\omega$  notwendig.

Da die Beträge der komplexen Amplituden  $F_k$  für  $T_0 \rightarrow \infty$  immer kleiner werden, geht man dazu über, mit der auf die Frequenz  $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi}$  bezogenen Amplitude  $F(jk\omega_0)$  zu rechnen:

$$F(jk\omega_0) = \frac{F_k}{\frac{\omega_0}{2\pi}} = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt.$$

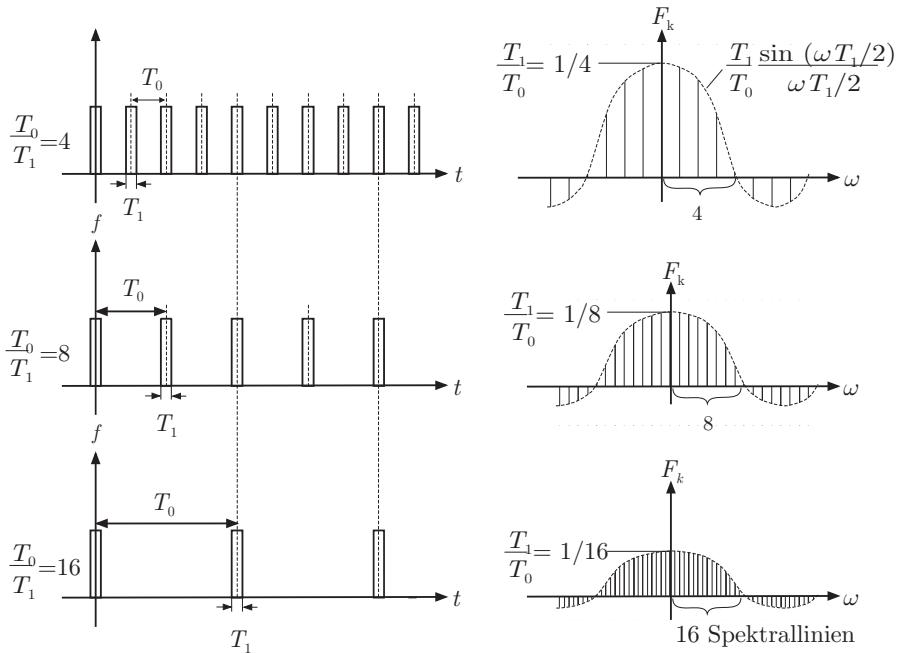
Für  $T_0 \rightarrow \infty$  gilt

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \rightarrow d\omega \quad \text{und} \quad k\omega_0 \rightarrow \omega,$$

d. h., der Abstand  $\omega_0$  der Spektrallinien auf der  $\omega$ -Achse geht in den differenziellen Abstand  $d\omega$  über und an Stelle der diskreten Kreisfrequenzen  $\omega = k\omega_0$  muss mit der kontinuierlichen Variablen  $\omega$  gerechnet werden. Aus  $F(jk\omega_0)$  entsteht

Fouriertransformation: 
$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt.$$

(6.22)



**Abb. 6.4:** Spektrum von Pulsfolgen verschiedener Tastverhältnisse  $\frac{T_0}{T_1}$

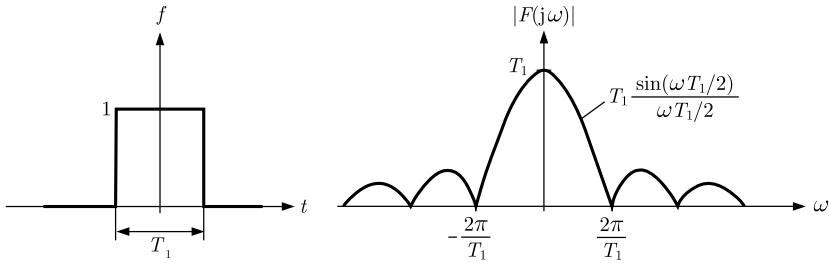
Auf der rechten Seite dieser Gleichung steht das Fourierintegral.  $F(j\omega)$  heißt Fouriertransformierte von  $f(t)$ .

Das Fourierintegral existiert unter den für das Fouriertheorem angegebenen Voraussetzungen, wobei Gl. (6.8) durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (6.23)$$

zu ersetzen ist ( $T_0 \rightarrow \infty$ ). Diese Bedingung besagt, dass die Funktion  $f(t)$  absolut integrierbar sein muss. Funktionen, die dieser Bedingung genügen, werden im Folgenden als stabile Funktionen bezeichnet. Der Grund für diese Wortwahl wird im Kap. 8 offensichtlich werden, wenn dort gezeigt wird, dass die Gewichtsfunktion stabiler Systeme wie auch die bei vielen stabilen Systemen auftretenden Signale die Bedingung (6.23) erfüllen.

Die Fouriertransformierte  $F(j\omega)$  ist eine komplexwertige Funktion der reellen Frequenz  $\omega$ .  $|F(j\omega)|$  heißt *Amplitudendichte* und  $\arg F(j\omega)$  *Spektraldichte*. Die grafischen Darstellungen von  $|F(j\omega)|$  und  $\arg F(j\omega)$  für  $\omega = 0 \dots \infty$  heißen *Amplitudendichtespektrum* bzw. *Phasenspektrum*. Für Amplitudendichtespektrum wird häufig – nicht ganz korrekt – auch Amplitudenspektrum gesagt. Als Beispiel zeigt Abb. 6.5 das Amplitudendichtespektrum des Rechteckimpulses, der aus der in Abb. 6.4 betrachteten Pulsfolge für  $T_0 \rightarrow \infty$  hervorgeht.



**Abb. 6.5:** Zeitverlauf (links) und Amplitudendichthespektrum (rechts) für einen Impuls

In Analogie zu den Eigenschaften (6.16) und (6.17) der Fourierkoeffizienten gilt für die Fouriertransformierte

$$|F(j\omega)| = |F(-j\omega)| \quad (6.24)$$

$$\arg F(j\omega) = -\arg F(-j\omega). \quad (6.25)$$

### Beispiel 6.1 Fouriertransformation eines Impulses

Die in Abb. 6.4 für unterschiedliche Tastverhältnisse dargestellten Pulssfolgen führen für  $T_0 \rightarrow \infty$  auf einen Einzelimpuls

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } -\frac{T_1}{2} \leq t \leq \frac{T_1}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(Abb. 6.5 (links)). Für die Fouriertransformierte  $F(j\omega)$  erhält man aus Gl. (6.22) die folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} e^{-j\omega t} dt \\ &= -\frac{1}{j\omega} \left( e^{-\frac{j\omega T_1}{2}} - e^{\frac{j\omega T_1}{2}} \right) \\ &= -\frac{1}{\omega} \left( \sin\left(-\frac{\omega T_1}{2}\right) + \sin\left(\frac{\omega T_1}{2}\right) \right) \\ &= T_1 \frac{\sin\left(\frac{\omega T_1}{2}\right)}{\frac{\omega T_1}{2}} = \text{si}\left(\frac{\omega T_1}{2}\right), \end{aligned}$$

wobei  $\text{si}(x)$  die si-Funktion (Kardinalsinus, *sinus cardinalis*) bezeichnet. Für die Impulsfunktion ist die Fouriertransformierte also für alle Frequenzen  $\omega$  reellwertig. Das Amplitudendichthespektrum ist in Abb. 6.5 (rechts) zu sehen.  $\square$

**Fourierrücktransformation.** Aus dem Fouriertheorem (6.15) erhält man die Beziehung

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{F_k}{\omega_0} e^{jk\omega_0 t} \frac{\omega_0}{2\pi}$$

und nach dem Grenzübergang  $T_0 \rightarrow \infty$  das Fourierumkehrintegral:

Fourierücktransformation:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{j\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} dj\omega. \quad (6.26)$$

Die Funktionen  $f(t)$  und  $F(j\omega)$  werden durch die Gln (6.22) und (6.26) einander eindeutig zugeordnet. Die Überführung vom Zeitbereich in den Frequenzbereich und umgekehrt erfolgt durch die Fouriertransformation bzw. die Fourierücktransformation, die mit  $\mathcal{F}$  bzw.  $\mathcal{F}^{-1}$  abgekürzt werden:

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \mathcal{F}\{f(t)\} \\ f(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\}. \end{aligned}$$

**Bedeutung der Fouriertransformation.** Die Fouriertransformation zeigt, dass nichtperiodische Signale als Summe sinusförmiger Signale dargestellt werden können, wobei möglicherweise alle Frequenzen  $\omega = -\infty \dots \infty$  vorkommen. Amplitudenspektrum und Phasenspektrum sind kontinuierlich.

Gleichung (6.26) stellt eine Zerlegung der Funktion  $f(t)$  in Elementarsignale

$$F(j\omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

dar. Bei der Anwendung muss man sich stets vor Augen halten, dass es sich bei  $F(j\omega)$  um die *Amplitudendichte*, also um eine auf einen differenziell kleinen Frequenzbereich bezogene Amplitude der Sinusfunktionen handelt. Im Gegensatz dazu beschreiben die Koeffizienten  $F_k$  oder  $C_k$  der Fourierzerlegungen (6.15) bzw. (6.7) die *absolute Amplitude* einer einzelnen Sinusschwingung.

Dieser Unterschied hat beispielsweise zur Folge, dass zwar die Fourierzerlegung einer reinen Sinusfunktion  $\sin \omega_0 t$  möglich ist, nicht jedoch die Fouriertransformation. Aus mathematischer Sicht ist dies offensichtlich, denn für eine Sinusfunktion ist die Bedingung (6.23) nicht erfüllt. Für das Verständnis des Sachverhaltes, dass eine Sinusschwingung nicht durch die Fouriertransformation in eine Summe von Sinusschwingungen zerlegt werden kann, ist wichtig zu beachten, dass die Zerlegung natürlich auf eine einzige Sinusschwingung führt und deshalb die auf den verwendeten Frequenzbereich bezogene Amplitudendichte für die Frequenz  $\omega_0$  der zu zerlegenden Sinusfunktion unendlich groß ist, also einen Diracimpuls  $\delta(\omega - \omega_0)$  darstellt.

Aufgrund dieser Eigenschaften der Signalzerlegung in Sinusschwingungen wird der folgende Abschnitt zwei Dinge zeigen. Einerseits wird offensichtlich werden, dass das Systemverhalten dadurch beschrieben werden kann, dass sinusförmige Eingangs- und Ausgangssignale miteinander verglichen und daraus die Verstärkung und die Phasenverschiebung des Systems ermittelt werden. Beide Größen sind frequenzabhängig und bilden den Frequenzgang  $G(j\omega)$ . Für lineare Systeme ist der Frequenzgang eine vollständige Beschreibung des E/A-Verhaltens, also eine alternative Modellform zur Differentialgleichung oder zum Zustandsraummodell.

Andererseits wird offensichtlich werden, dass die dem Fouriertheorem bzw. der Fouriertransformation zu Grunde liegenden Voraussetzungen für die weitere Analyse dynamischer Systeme und für den Reglerentwurf zu einschränkend sind. Das bereits genannte Beispiel, dass sinusförmige Eingangssignale nicht der Fouriertransformation unterworfen werden können, macht diesen Sachverhalt deutlich. Deshalb wird die im Folgenden erläuterte Vorgehensweise anschließend unter Verwendung der LaplaceTransformation verallgemeinert, wodurch eine Zerlegung beliebiger Signale in aufklingende und abklingende Sinusfunktionen stattfindet.

## 6.3 Frequenzgang

### 6.3.1 Lineare Systeme mit sinusförmigen Eingangssignalen

Es wird jetzt ein stabiles lineares System  $\Sigma$  unter dem Einfluss des sinusförmigen Eingangssignals

$$u(t) = \bar{u} \sin(\omega t + \phi_u) \quad (6.27)$$

$$\begin{aligned} &= \left( -j \frac{\bar{u}}{2} e^{j\phi_u} \right) e^{j\omega t} + \left( j \frac{\bar{u}}{2} e^{-j\phi_u} \right) e^{-j\omega t} \\ &= U e^{j\omega t} + U^* e^{-j\omega t} \end{aligned} \quad (6.28)$$

untersucht, wobei  $\bar{u}$  die (reelle) Amplitude und  $U, U^*$  die konjugiert komplexen Amplituden der Exponentialdarstellung sind, die den Klammern in der zweiten Zeile entsprechen. Betrachtet man den Systemausgang für eine große Zeit  $t$ , so wird er nur noch von der stationären Bewegung  $y_s$  des Systems beeinflusst, da das Übergangsverhalten  $y_{ti}$  abgeklungen ist. Entsprechend Gl. (5.136) lässt sich  $y_s$  in der Form

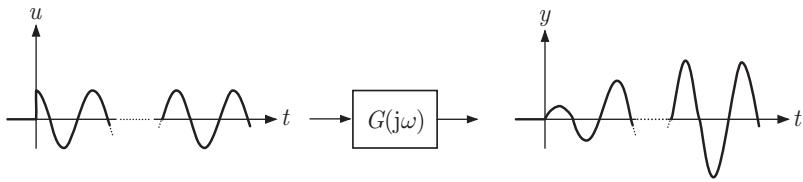
$$y_s(t) = Y e^{j\omega t} + Y^* e^{-j\omega t} = \bar{y} \sin(\omega t + \phi_y) \quad (6.29)$$

darstellen, wobei die Amplituden  $Y$  und  $Y^*$  konjugiert komplex sind.

Im Folgenden sollen die Amplituden  $Y$  und  $Y^*$  aus der E/A-Beschreibung

$$\Sigma : \quad y = g * u$$

des Systems  $\Sigma$  bestimmt werden. Als Vorüberlegung dazu wird zunächst die Übertragung einer einzelnen e-Funktion



**Abb. 6.6:** Definition des Frequenzgangs

$$u(t) = e^{j\omega t}$$

betrachtet. Aus dem Faltungsintegral erhält man

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t g(\tau) u(t - \tau) d\tau \\ &= \int_0^t g(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau \\ &= \int_0^\infty g(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau + \int_\infty^t g(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau \\ y(t) &= \underbrace{\int_0^\infty g(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau}_{y_s(t)} e^{j\omega t} + \underbrace{\int_\infty^t g(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau}_{y_{\ddot{u}}(t)} e^{j\omega t}. \end{aligned}$$

Beachtet man, dass der zweite Term für  $t \rightarrow \infty$  aufgrund des immer kleiner werdenden Integrationsintervalls verschwindet, so ist offensichtlich, dass der erste Summand das stationäre Verhalten und der zweite Summand das Übergangsverhalten des stabilen Systems beschreibt. Für die folgenden Betrachtungen ist also nur der erste Summand maßgebend:

$$y_s(t) = \left( \int_0^\infty g(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right) e^{j\omega t}.$$

In diesem Summand tritt die Fouriertransformierte

Frequenzgang:  $G(j\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\}$

(6.30)

der Gewichtsfunktion  $g(t)$  auf (vgl. Gl. (6.22)). Folglich gilt

$$y_s(t) = G(j\omega) e^{j\omega t}. \quad (6.31)$$

$G(j\omega)$  heißt der Frequenzgang des Systems.

Das uneigentliche Integral  $\int_0^\infty g(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$  existiert, wenn die Gewichtsfunktion die Bedingung (6.23) erfüllt. Diese Voraussetzung ist bei stabilen Systemen stets erfüllt (vgl. Satz 8.2 auf S. 416).

Nach diesen Vorüberlegungen kann die Übertragung eines sinusförmigen Eingangssignals (6.28) schnell abgehandelt werden. Da sich das Eingangssignal aus zwei Summanden zusammensetzt und sich die Ausgangsgröße des linearen Systems aus der Summe der von beiden Summanden erzeugten Ausgangssignale berechnen lässt, erhält man

$$y_s(t) = U G(j\omega) e^{j\omega t} + U^* G(-j\omega) e^{-j\omega t}.$$

Aus einem Vergleich dieser Beziehung mit Gl. (6.29) erhält man die gesuchten Amplituden:

$$\begin{aligned} Y &= U G(j\omega) \\ Y^* &= U^* G(-j\omega). \end{aligned} \quad (6.32)$$

Wie man unter Beachtung der Eigenschaften (6.24) und (6.25) für  $G(j\omega)$  sieht, sind die beiden Amplituden  $Y$  und  $Y^*$  tatsächlich konjugiert komplex. Außerdem sieht man, dass diese Amplituden auch bei frequenzunabhängigen Amplituden  $U$  und  $U^*$  von der Frequenz  $\omega$  abhängig sind und man deshalb genauer  $Y(j\omega)$  und  $Y^*(j\omega)$  schreiben muss. Dass diese Abhängigkeit besteht, ist der Grund für dieses ausführliche Kapitel. Gleichung (6.32) zeigt nämlich, dass die Amplitude  $Y$  der Ausgangsgröße eines Systems nicht nur von der Amplitude  $U$  der Eingangsgröße, sondern auch davon abhängt, wie gut das System die betrachtete Frequenz  $\omega$  überträgt.

Für das stationäre Verhalten  $y_s$  erhält man mit der Zerlegung des komplexen Frequenzganges in der Form

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\phi(j\omega)}, \quad (6.33)$$

wobei  $|G(j\omega)|$  die Amplitude und  $\phi(j\omega)$  das Argument des Frequenzganges bezeichnet, die Beziehung

$$y_s(t) = |G(j\omega)| \bar{u} \sin(\omega t + \phi_u + \phi(j\omega)). \quad (6.34)$$

Dabei sind  $\bar{u}$  und  $\phi_u$  Parameter der Eingangsgröße (6.27) und  $G(j\omega)$  und  $\phi(j\omega)$  Parameter des Systems, die von der Frequenz  $\omega$  der Eingangsgröße abhängig sind.

**Interpretation des Frequenzgangs.** Entsprechend Gl. (6.34) beschreibt der Frequenzgang, wie ein dynamisches System eine sinusförmige Eingangsgröße überträgt, wobei nur das stationäre Verhalten berücksichtigt wird.  $|G(j\omega)|$  ist ein Maß für die Amplitudenveränderung. Es kann als frequenzabhängiger Verstärkungsfaktor aufgefasst werden, denn man erhält es aus dem Verhältnis der Amplituden der sinusförmigen Ausgangsgröße und der sinusförmigen Eingangsgröße mit der Frequenz  $\omega$

$$|G(j\omega)| = \frac{\bar{y}}{\bar{u}} = \frac{|Y|}{|U|} \quad (6.35)$$

(vgl. Gln. (6.28), (6.29) und (6.34)). Das Argument von  $G(j\omega)$  stellt die Phasenverschiebung dar

$$\arg G(j\omega) = \phi(j\omega) = \phi_y - \phi_u = \arg Y - \arg U,$$

mit der sinusförmige Signale übertragen werden. In älteren Literaturstellen wird an Stelle von  $\arg G$  oder  $\phi$  auch das Symbol  $\angle G$  gebraucht. Amplituden- und Phasenbeziehung ergeben

Frequenzgang:  $G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)},$

(6.36)

wobei die Frequenzabhängigkeit aller drei Größen explizit angegeben ist.

Die Phasenverschiebung ist i. Allg. negativ, so dass  $\phi_y \leq \phi_u$  gilt und  $\arg G(j\omega)$  also typischerweise negativ ist. Zu den Ausnahmen gehören phasenanhebende Korrekturglieder, bei denen die Phasenverschiebung für bestimmte Frequenzen  $\omega$  positiv ist. Das negative Vorzeichen der Phasenverschiebung eines Systems ist Ausdruck der Verzögerung, mit der dieses System das Eingangssignal überträgt. Das Ausgangssignal als Wirkung folgt dem Eingangssignal als Ursache der Systembewegung mit einiger „Verspätung“. Die Sinusfunktion (6.29) eilt der Funktion (6.28) nach. Die grafische Darstellung der Ausgangsgröße ist gegenüber der der Eingangsgröße entlang der Zeitachse nach rechts verschoben.

Betrachtet man Eingangssignale mit unterschiedlicher Kreisfrequenz  $\omega$ , so nehmen  $|G|$  und  $\phi$  i. Allg. verschiedene Werte an. Beide Größen können deshalb als Funktion der Kreisfrequenz  $\omega$  aufgefasst werden. Man spricht dann vom *Amplitudengang*  $|G(j\omega)|$  und vom *Phasengang*  $\phi(j\omega)$ . Beide Funktionen zusammen stellen den *Frequenzgang* des Systems dar. Da die Frequenz  $\omega$  stets als Produkt mit  $j$  auftritt, hat es sich eingebürgert, sie als unabhängige Variable  $j\omega$  zu schreiben. Man hätte natürlich auch  $G(\omega)$  schreiben können. Mit der hier verwendeten Bezeichnungsweise ist später auch die LaplaceTransformation einfacher darzustellen.

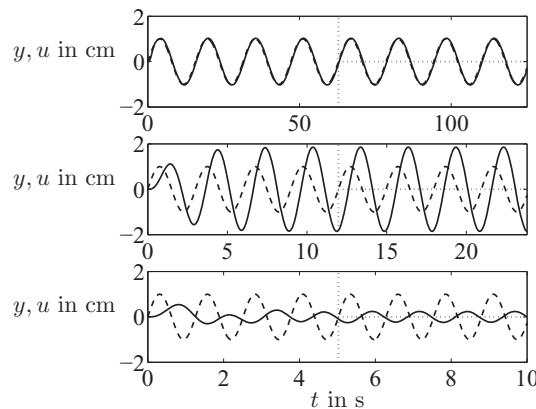
Der Frequenzgang über den gesamten Frequenzbereich  $\omega = 0 \dots \infty$  betrachtet ist eine eindeutige Beschreibung des E/A-Verhaltens des Systems. Das heißt, dass an Stelle der Differentialgleichung (6.37) (mit verschwindenden Anfangsbedingungen!) oder der Gewichtsfunktion auch der Frequenzgang zur Berechnung der Ausgangsgröße herangezogen werden kann.

**Experimentelle Bestimmung des Frequenzgangs.** Aus den bisherigen Betrachtungen kann man auch erkennen, wie der Frequenzgang für ein gegebenes unbekanntes System experimentell bestimmt werden kann. Man legt für eine bestimmte Kreisfrequenz  $\omega$  die sinusförmige Eingangsgröße (6.28) an das System an und wartet, bis das Übergangsverhalten abgeklungen ist, bis sich also die Amplitude der Ausgangsgröße von Periode zu Periode nicht mehr ändert. Dann zeichnet man das Eingangs- und das Ausgangssignal in dasselbe Diagramm.  $\bar{y}$  liest man als Maximalwert von  $y(t)$  ab (Abb. 6.6) und berechnet daraus den Betrag des Frequenzganges entsprechend Gl. (6.35). Zur Bestimmung von  $\phi_y$  vergleicht man die Zeitpunkte gleichartiger Nulldurchgänge der Eingangs- und Ausgangsgrößen. Hat  $u$  einen Nulldurchgang bei  $T$  und  $y$  seinen nächsten Nulldurchgang bei  $T'$ , so gilt  $\phi_y = \omega(T - T')$  (Vorsicht bei positiver Phasenverschiebung bzw. bei  $\phi_y > 360^\circ$ !).

**Beispiel 6.2** Frequenzgang eines Feder-Masse-Schwingers

Zur Illustration des Begriffes des Frequenzganges wird der im Beispiel 4.2 auf S. 60 beschriebene Feder-Masse-Schwinger  $\Sigma_{\text{FMS}}$  für die Parameter  $m = 0,2 \text{ kg}$ ,  $c = 1 \text{ N/m}$  und  $d = 0,8 \text{ Ns/m}$  bei sinusförmiger Erregung  $u(t) = \sin(\omega t) \text{ cm}$  betrachtet. Die Eingangs- und Ausgangsgröße werden im folgenden in Zentimetern und die Frequenz in Hertz gemessen.

Abbildung 6.7 zeigt das Ergebnis von drei Experimenten, bei denen der Schwinger aus der Ruhelage durch die Eingangsgröße mit den Frequenzen  $\omega = 0,4$ ,  $\omega = 2,1$  bzw.  $\omega = 5$  erregt wurde. Aufgrund der gewählten Zeitachsen erscheint die gestrichelt dargestellte Eingangsgröße für alle drei Fälle in derselben Weise. Das Übergangsverhalten ist nach vier Perioden abgeklungen, so dass die Werte des Frequenzganges an dem gepunktet eingetragenen Koordinatensystem abgelesen werden können.



**Abb. 6.7:** Verhalten eines Feder-Masse-Schwingers bei sinusförmiger Erregung unterschiedlicher Frequenz

Die Abbildung zeigt, dass für kleine Frequenzen die Bewegung der Masse der Bewegung des oberen Federendes ohne Verzögerung folgt, so dass  $y(t) \approx u(t)$  gilt (vgl. Abb. 4.3 auf S. 61). Damit erhält man

$$|G(j0,4)| = 1 \quad \text{und} \quad \arg(G(j0,4)) = 0.$$

Beim zweiten Experiment ist die Amplitude der Ausgangsgröße größer als die der Eingangsgröße, d. h., die Masse bewegt sich mit größerer Amplitude als das obere Federende. Außerdem folgt die Masse der Eingangsgröße nur mit einer zeitlichen Verzögerung, die man beispielsweise aus einem Vergleich der Nulldurchgänge beider Größen ablesen kann. Diese Zeitverzögerung von ca. 0,6 Sekunden entspricht bei der verwendeten Frequenz einer Phasenverschiebung von etwa  $-90^\circ$ , wie man aus einem Vergleich der Verzögerungszeit mit der Periodendauer erkennen kann. Es gilt also

$$|G(j2,1)| \approx 1,9 \quad \text{und} \quad \arg(G(j2,1)) \approx -90^\circ.$$

Bei sehr hohen Frequenzen bewegt sich die Masse nur mit kleiner Amplitude und eilt der Eingangsgröße noch weiter nach. Aus dem Diagramm kann man die Werte

$$|G(j5)| \approx 0,2 \quad \text{und} \quad \arg(G(j5)) = -180^\circ.$$

ablesen.

Das Beispiel zeigt für den Feder-Masse-Schwinger, dass sich Amplitude und Phasenverschiebung in Abhängigkeit von der Frequenz  $\omega$  ändern, wobei die Amplitude der Ausgangsgröße größer oder kleiner als die Amplitude der Eingangsgröße ist, während die Phasenverschiebung bei Frequenzerhöhung zunimmt.  $\square$

### 6.3.2 Berechnung des Frequenzgangs

Es wird nun untersucht, wie der Frequenzgang aus der Differentialgleichung (4.3)

$$\Sigma : \quad a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = b_q \frac{d^q u}{dt^q} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u(t) \quad (6.37)$$

bestimmt werden kann. Auf die sinusförmige Eingangsgröße (6.28) antwortet das System mit einer Ausgangsgröße, deren stationärer Anteil die Form (6.29) hat. Um zu  $G(j\omega)$  zu kommen, muss mit Hilfe der Differentialgleichung die komplexe Amplitude  $Y$  der stationären Lösung  $y_s$  für eine vorgegebene komplexe Amplitude  $U$  der Eingangsgröße bestimmt werden. Der Rechenweg vereinfacht sich, wenn man dabei zunächst nur die ersten Terme der Eingangsgröße (6.28) und der Ausgangsgröße (6.29) betrachtet.

Für die Differenziation der e-Funktionen gilt

$$\frac{d^i e^{j\omega t}}{dt^i} = (j\omega)^i e^{j\omega t}$$

und folglich

$$\frac{d^i}{dt^i} U e^{j\omega t} = U (j\omega)^i e^{j\omega t} \quad \text{und} \quad \frac{d^i}{dt^i} Y e^{j\omega t} = Y (j\omega)^i e^{j\omega t}.$$

Dies in die Differentialgleichung (6.37) eingesetzt, die auch für  $y = y_s$  gilt, ergibt die Beziehung

$$\begin{aligned} & Y (a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0) e^{j\omega t} \\ &= U (b_q (j\omega)^q + b_{q-1} (j\omega)^{q-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0) e^{j\omega t}, \end{aligned}$$

die für alle Zeitpunkte  $t$  genau dann erfüllt ist, wenn die Gleichung

$$Y = \frac{b_q (j\omega)^q + b_{q-1} (j\omega)^{q-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0} U \quad (6.38)$$

gilt. Entsprechend Gl. (6.36) folgt daraus für den Frequenzgang  $G(j\omega)$  des Systems  $\Sigma$  die Beziehung

$$G(j\omega) = \frac{b_q (j\omega)^q + b_{q-1} (j\omega)^{q-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0}.$$

(6.39)

Diese Gleichung macht deutlich, dass  $G$  – wie erwartet – tatsächlich von der Kreisfrequenz  $\omega$  abhängt. Diese Abhängigkeit wird auf der rechten Seite der Gleichung durch eine gebrochene rationale Funktion der unabhängigen Variablen  $j\omega$  dargestellt.

**Aufgabe 6.1\*\*   Experimentelle Bestimmung der Differentialgleichungskoeffizienten**

Bei den Experimenten entsprechend Abb. 6.6 sollen sinusförmige Eingangssignale unterschiedlicher Frequenz verwendet werden. Wie können die Koeffizienten  $a_i$  und  $b_j$  der Differentialgleichung (6.37) auf diese Weise experimentell bestimmt werden?  $\square$

### 6.3.3 Eigenschaften und grafische Darstellung

Die Beziehung (6.39) zeigt, dass der Frequenzgang  $G(j\omega)$  eine gebrochen rationale Funktion ist, wobei für technisch interessante Systeme der Zählergrad  $q$  den Nennergrad  $n$  nicht übersteigt:  $q \leq n$ . Für  $\omega = 0$  ist  $G(j\omega)$  reell und gleich der statischen Verstärkung  $k_s$  des Systems  $\Sigma$ :

$$G(0) = \frac{b_0}{a_0} = k_s. \quad (6.40)$$

Für  $\omega \rightarrow \infty$  ist  $G(j\omega)$  ebenfalls reellwertig:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = \begin{cases} 0 & \text{für } q < n \\ \frac{b_n}{a_n} = d & \text{für } q = n. \end{cases} \quad (6.41)$$

Das heißt, dass nicht sprungfähige Systeme Signale sehr hoher Frequenzen nicht übertragen können. Für sprungfähige Systeme nähert sich  $|G(j\omega)|$  dem direkten Durchgriff der Eingangsgröße auf die Ausgangsgröße. Der Wert  $\frac{b_n}{a_n}$  ist gleich dem Parameter  $d$  im Zustandsraummodell (4.45), wie aus Gl. (4.65) ersichtlich wird, wenn man berücksichtigt, dass diese Gleichung für eine Differentialgleichung mit  $a_n = 1$  abgeleitet wurde.

Weitere wichtige Eigenschaften des Frequenzganges werden durch die Beziehungen

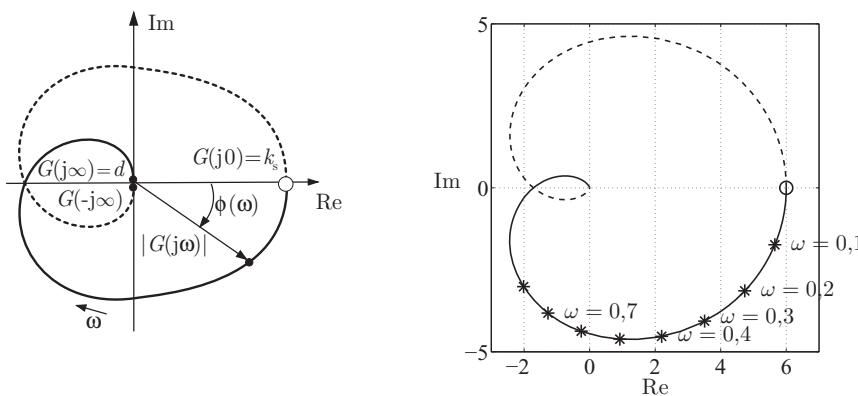
$$|G(-j\omega)| = |G(j\omega)| \quad (6.42)$$

$$\arg G(-j\omega) = -\arg G(j\omega) \quad (6.43)$$

beschrieben, die entsprechend Gln. (6.24), (6.25) jede Fouriertransformierte besitzt.

**Ortskurve.** Die Ortskurve ist die grafische Darstellung von  $G(j\omega)$  in der komplexen Ebene für  $\omega = -\infty \dots \infty$ , wobei man sich aufgrund der Beziehungen (6.42) und (6.43) meist auf das Intervall  $\omega = 0 \dots \infty$  beschränkt. Fasst man den Frequenzgang als Zeiger mit der Länge  $|G(j\omega)|$  und dem Winkel  $\phi(j\omega)$  auf, so beschreibt die

Zeigerspitze die Ortskurve des Systems, wenn  $\omega$  von null an vergrößert wird. Abbildung 6.8 zeigt ein Beispiel. Aufgrund der Eigenschaften (6.42) und (6.43) geht die Ortskurve für den Frequenzbereich  $\omega = -\infty \dots 0$  (in der Abbildung gestrichelt dargestellt) aus der für  $\omega = 0 \dots \infty$  gezeichneten Ortskurve durch Spiegelung an der reellen Achse hervor. In diesen und allen nachfolgenden Abbildungen von Ortskurven wird der Punkt  $G(j0) = k_s$  durch einen kleinen Kreis dargestellt, der für positive Frequenzen  $\omega = 0 \dots \infty$  geltende Teil durch eine durchgezogene Linie und der für negative Frequenzen geltende Teil durch eine gestrichelte Linie, die in einigen Abbildungen der Einfachheit halber weggelassen ist.



**Abb. 6.8:** Ortskurve eines nicht sprungfähigen Systems: prinzipieller Verlauf (links) und Verlauf für ein System dritter Ordnung (rechts)

Entsprechend Gl. (6.40) beginnt die Ortskurve bei der statischen Verstärkung  $k_s$ . Für hohe Frequenzen nähert sich die Ortskurve für nicht sprungfähige Systeme dem Ursprung der komplexen Ebene bzw. für sprungfähige Systeme dem Punkt  $d$  auf der reellen Achse, der durch den Durchgriff bestimmt wird (vgl. Gl. (6.41)).

Um eine Vorstellung zu vermitteln, wie „schnell“ die Ortskurve durchlaufen wird, sind im rechten Teil von Abb. 6.8 für ein Beispiel ausgewählte Punkte mit der dazugehörigen Frequenz versehen. Offensichtlich wird der Hauptteil der Ortskurve nur durch ein kleines Frequenzintervall bestimmt. Die Werte von  $\omega$  zwischen 0 und  $\infty$  sind also keinesfalls gleichmäßig über die Ortskurve verteilt.

**Frequenzkennliniendiagramm.** Das Frequenzkennliniendiagramm (*BODE-Diagramm*<sup>3</sup>) umfasst getrennte Darstellungen des Betrages und der Phase des Frequenzganges in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz  $\omega$ . Die beiden Kennlinien werden als *Amplitudengang* (Amplitudenkennlinie) bzw. *Phasengang* (Phasenkennlinie) bezeichnet.

<sup>3</sup> HENDRIK WADE BODE (1905 – 1982) amerikanischer Elektrotechniker, führte wichtige, heute in der Regelungstechnik genutzte Analyseverfahren für elektrische Netzwerke ein.

Da sich der für praktische Aufgaben interessante Frequenzbereich über mehrere Zehnerpotenzen erstreckt und sich der Betrag des Frequenzganges um mehrere Größenordnungen verändert, wird für beide Größen mit logarithmischen Maßstäben gearbeitet. Die Amplitudenkennlinie stellt also den (meist dekadischen) Logarithmus des Amplitudenganges in Abhängigkeit vom Logarithmus der Kreisfrequenz dar ( $\lg |G|$ - $\lg \omega$ -Diagramm). Auf der Abszissenachse wird die Kreisfrequenz  $\omega$  mit einer logarithmischen Skala oder  $\lg \omega$  mit einer linearen Skala aufgetragen. Die Ordinatenachse wird i. Allg. linear geteilt und der Amplitudengang in Dezibel (dB) aufgetragen, wobei sich der in Dezibel angegebene Betrag  $|G|_{\text{dB}}$  aus dem dimensionslosen Betrag  $|G|$  des Frequenzganges entsprechend

$$|G|_{\text{dB}} = 20 \lg |G| \quad (6.44)$$

berechnet (Abb. 6.9 oben)<sup>4</sup>. Für den technisch interessanten Wertebereich für  $|G|$  erhält man folgende Entsprechungen:

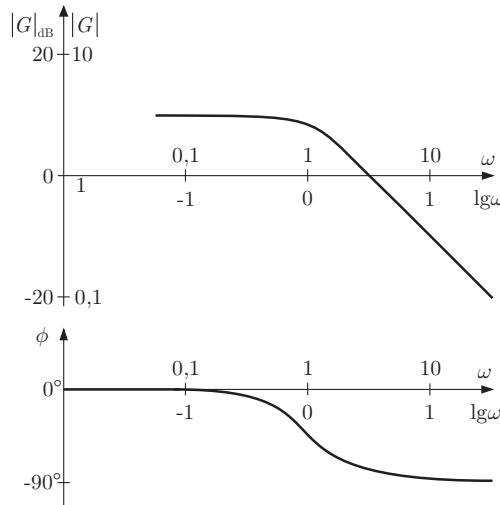
$ G $	$ G _{\text{dB}}$
100	40
10	20
1	0
0,1	-20
0,01	-40

Um die Zuordnung ausgewählter Werte von  $|G|$  zu  $|G|_{\text{dB}}$  zu verdeutlichen, wurden in Abb. 6.9 zwei Ordinatenachsen gezeichnet, von denen man in der Regel jedoch nur eine verwendet.

Die Phasenkennlinie ist die Darstellung der Phase  $\phi$  als Funktion des Logarithmus der Kreisfrequenz ( $\phi$ - $\lg \omega$ -Diagramm; Abb. 6.9 unten).

Die grafische Konstruktion der Ortskurve anhand eines gegebenen Bodediagramms ist leicht möglich. Man wählt sich ausgezeichnete Punkte auf der Frequenzachse und liest am Bodediagramm Amplitude und Phase ab. Trägt man diese als Zeiger in die komplexe Ebene ein, so kann man den Verlauf der Ortskurve gut approximieren. Auf dem umgekehrten Weg ist die Konstruktion des Bodediagramms anhand der Ortskurve nicht ganz so einfach, weil die Frequenz  $\omega$  als Parameter an der Ortskurve nicht explizit angegeben ist.

<sup>4</sup> Der Beziehung (6.44) liegt die Definition des logarithmischen Maßes Bel zu Grunde, wonach für ein dimensionsloses Spannungsverhältnis  $k$  gilt:  $|k|_{\text{Bel}} = \lg |k|$  (wobei  $\lg = \log_{10}$  den dekadischen Logarithmus bezeichnet). Will man nun im Bodediagramm mit  $|G|^2$  (an Stelle von  $|G|$ ) ein Maß für die Energie logarithmisch auftragen und geht zur Einheit Dezibel = 1/10 Bel über, so erhält man  $|G|_{\text{dB}} = 10 \lg |G|^2 = 20 \lg |G|$ . Diese Einheit ist nach dem amerikanischen Erfinder ALEXANDER GRAHAM BELL (1847 – 1922) benannt.



**Abb. 6.9:** Bodediagramm: Amplitudengang (oben) und Phasengang (unten) in logarithmischer Darstellung

## 6.4 Laplacetransformation

### 6.4.1 Definition

Die Laplacetransformation dient in ähnlicher Weise wie die Fouriertransformation der Zerlegung einer gegebenen Funktion  $f(t)$  in Elementarsignale. Die folgenden Betrachtungen zur Laplacetransformation stellen unmittelbare Parallelen zum Abschn. 6.2 dar.

Für die Behandlung dynamischer Systeme hat die Fouriertransformation die Beschränkung, dass die zu transformierenden Funktionen die dirichletschen Bedingungen zu erfüllen haben und folglich Gl. (6.23)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

gelten muss. Das bedeutet, dass die Funktion  $f(t)$  für große Zeit  $t$  gegen null gehen muss und demzufolge Signale, die bei instabilen Systemen auftreten, nicht transformiert werden können. Auch für die in der Regelungstechnik häufig als Eingangsgröße verwendete Sprungfunktion  $\sigma(t)$  existiert keine Fouriertransformierte.

Aus diesem Grund wird an Stelle des Signals  $f(t)$  das modifizierte Signal

$$\tilde{f}(t) = f(t) e^{-\delta t}, \quad \delta \geq 0$$

betrachtet. Für dieses Signal ist die dirichletsche Bedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(t)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| e^{-\delta t} dt < \infty$$

erfüllt, wenn  $\delta$  hinreichend groß gewählt ist und  $|f(t)|$  nicht stärker als exponentiell wächst. Auf  $\tilde{f}(t)$  kann folglich die Fouriertransformation (6.22) angewendet werden, womit man

$$\begin{aligned}\tilde{F}(\mathrm{j}\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t) e^{-\mathrm{j}\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-(\delta+\mathrm{j}\omega)t} dt \\ &= F(\delta + \mathrm{j}\omega)\end{aligned}$$

erhält. Die Fouriertransformierte  $\tilde{F}(\mathrm{j}\omega)$  der modifizierten Funktion  $\tilde{f}(t)$  entsteht also aus der Fouriertransformierten  $F(\mathrm{j}\omega)$  der Funktion  $f(t)$ , indem  $\mathrm{j}\omega$  durch  $\delta + \mathrm{j}\omega$  ersetzt wird. Nach Einführung der komplexen Frequenz  $s = \delta + \mathrm{j}\omega$  heißt der letzte Teil der Gleichung

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt. \quad (6.45)$$

Dieses Integral heißt *zweiseitiges Laplaceintegral*. Es beschreibt die zweiseitige Laplacetransformation, aus der für eine gegebene Funktion  $f(t)$  die Laplacetransformierte  $F(s)$  berechnet wird.  $f(t)$  heißt auch Originalfunktion und  $F(s)$  Bildfunktion.

Formal wird der Übergang von der Fouriertransformation zur Laplacetransformation vollzogen, indem man die Frequenz  $\mathrm{j}\omega$  durch die komplexe Frequenz  $s$  ersetzt. Deshalb kann man aus der Laplacetransformierten die Fouriertransformierte dadurch gewinnen, dass man  $s$  durch  $\mathrm{j}\omega$  ersetzt. Dies gilt jedoch, streng genommen, nur für stabile Funktionen, die die dirichletschen Bedingungen erfüllen und für die folglich sowohl die Fouriertransformierte als auch die Laplacetransformierte existiert.

Da für alle Signale vorausgesetzt wird, dass sie für  $t < 0$  verschwinden, vereinfacht sich das zweiseitige Laplaceintegral zu

$$\text{Laplacetransformation: } F(s) = \int_{-0}^{\infty} f(t) e^{-st} dt. \quad (6.46)$$

Dieses Integral wird *einseitiges Laplaceintegral* genannt und die dargestellte Transformation einseitige Laplacetransformation. Die untere Integrationsgrenze  $-0$  bedeutet, dass ein bei  $t = 0$  in  $f(t)$  möglicherweise auftretender Diracimpuls in die Integration einbezogen wird.

Die Laplacetransformation wird durch das Symbol  $\mathcal{L}$  oder das „Hantelsymbol“  $\bullet\circ$  dargestellt. Man schreibt dann für den Zusammenhang von Zeitfunktion  $f(t)$  und Laplacetransformierter  $F(s)$

$$\begin{aligned}F(s) &= \mathcal{L}\{f(t)\} \\ \text{oder } F(s) &\bullet\circ f(t).\end{aligned}$$

Ähnlich wie bei der Fouriertransformation spricht man bei  $f(t)$  von der Originalfunktion bzw. von der Darstellung der Funktion  $f$  im *Zeitbereich* oder Originalbereich und bei  $F(s)$  von der Bildfunktion bzw. von der Darstellung der Funktion  $f$  im *Frequenzbereich*,  $s$ -Bereich oder Bildbereich. Im Folgenden wird für die Zeitfunktion stets ein kleiner und für die Bildfunktion ein großer Buchstabe verwendet.

Die Laplacetransformierte  $F(s)$  ist eine äquivalente Beschreibung der Zeitfunktion  $f(t)$  (sofern  $F(s)$  existiert), d. h., der Funktion  $f(t)$  im Zeitbereich ist eindeutig eine Funktion  $F(s)$  im Frequenzbereich zugeordnet und umgekehrt. Wichtige Funktionen und ihre Laplacetransformierten sind in Korrespondenztabellen angegeben, so dass es nicht notwendig ist, das Laplaceintegral in jedem Falle selbst auszurechnen (Anhang 6).

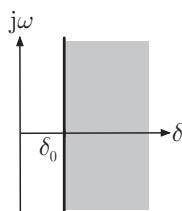


Abb. 6.10: KonvergenzhalfEbene

**Konvergenz des Laplaceintegrals.** Das Laplaceintegral konvergiert nur dann, wenn der Realteil der komplexen Frequenz  $s$  hinreichend groß gewählt ist, so dass die Funktion  $\tilde{f}(t) = f(t) e^{-\delta t}$  absolut integrierbar ist (vgl. Gl. (6.23)). Der kleinste Wert von  $\delta = \operatorname{Re}\{s\}$ , für den das Laplaceintegral konvergiert, wird *minimale Konvergenzabszisse* genannt und mit  $\delta_0$  bezeichnet. Für dieses  $\delta_0$  erfüllt die Funktion  $f(t)$  für eine genügend groß gewählte reelle Zahl  $a$  die Bedingung

$$|f(t)| < a e^{\delta_0 t}, \quad t \geq 0. \quad (6.47)$$

Das Laplaceintegral konvergiert dann für alle  $s$ , deren Realteil nicht kleiner als  $\delta_0$  ist. Diese Werte von  $s$  stellen die in Abb. 6.10 grau gezeichnete KonvergenzhalfEbene dar. Es kann gezeigt werden, dass die Laplacetransformierte  $F(s)$  in der KonvergenzhalfEbene eine analytische Funktion in  $s$  ist. Für die in der Regelungstechnik interessanten Funktionen  $f(t)$  kann man stets davon ausgehen, dass es eine KonvergenzhalfEbene gibt.

### Beispiel 6.3 Laplacetransformation einiger Funktionen

Für die Sprungfunktion  $u(t) = \sigma(t)$  führt das Laplaceintegral auf

$$\mathcal{L}\{\sigma(t)\} = \int_{-0}^{\infty} \sigma(t) e^{-st} dt = -\frac{e^{-st}}{s} \Big|_0^{\infty} = -\frac{e^{-\delta t}}{s} (\cos \omega t - j \sin \omega t) \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

mit  $s = \delta + j\omega$ . Da das Integral auf Sinusschwingungen führt, existiert die Laplacetransformierte nur für  $\operatorname{Re}\{s\} = \delta > 0$ . Demgegenüber existiert die Fouriertransformierte nicht.

Für den Diracimpuls erhält man

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{-0}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \int_{-0}^{+0} \delta(t) dt = 1. \quad (6.48)$$

Die Laplacetransformierte ist für beliebige  $s$  definiert.

Für die Exponentialfunktion

$$f(t) = \begin{cases} e^{at} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

konvergiert das Laplaceintegral für  $\delta \geq \delta_0 = a$  und ergibt

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{-0}^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_{-0}^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = \frac{1}{s-a}. \quad (6.49)$$

Die Laplacetransformierte existiert für  $\operatorname{Re}\{s\} > a$ .  $\square$

Die Laplacetransformierte  $F(s)$  ist in der Konvergenzhalbebene eine reguläre Funktion, die in eine Potenzreihe entwickelt werden kann. Sie kann deshalb über die Konvergenzebene hinaus in den verbleibenden Teil der komplexen Ebene analytisch fortgesetzt werden. Beispielsweise konvergiert das Laplaceintegral der Funktion  $e^{at}$  nur für  $\operatorname{Re}\{s\} > a$ . Die Laplacetransformierte  $\frac{1}{s-a}$  kann aber mit Ausnahme von  $s = a$  auch für  $\operatorname{Re}\{s\} \leq a$  für alle Rechnungen verwendet werden. Für den praktischen Gebrauch spielt es keine Rolle, dass das Integral (6.49) dort nicht existiert, denn der Definitionsbereich der Funktion  $\frac{1}{s-a}$  umfasst auch diesen Bereich außerhalb der Konvergenzhalbebene.

Im Folgenden wird deshalb davon ausgegangen, dass die Laplacetransformierte in einer Halbebene konvergiert und in die andere Halbebene – bis auf singuläre Punkte – fortgesetzt werden kann. Indem man die Laplacetransformierte zusammen mit ihrer Fortsetzung über die Konvergenzhalbebene hinaus verwendet, wird es möglich, stets mit einer über die ganze komplexe Ebene mit Ausnahme weniger singulärer Punkte definierten Funktion  $F(s)$  zu arbeiten. Dabei kann insbesondere auch für instabile Systeme mit dem Frequenzgang  $G(j\omega)$  gerechnet werden, obwohl für diese Systeme die Fouriertransformierte  $\mathcal{F}\{g(t)\} = G(j\omega)$  der Gewichtsfunktion gar nicht existiert. Das Bodediagramm und die Ortskurve haben also auch für instabile Systeme eine mathematische Bedeutung.

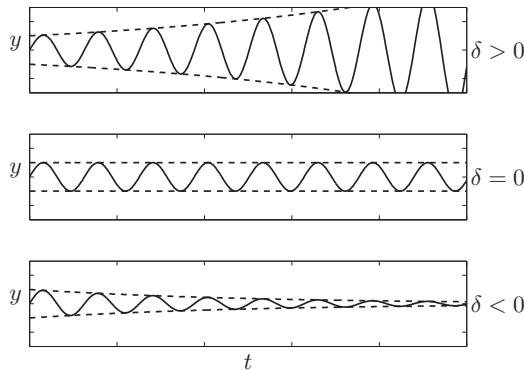
**Laplacerücktransformation.** Die Laplacerücktransformation kann aus der Fourierrücktransformation (6.26) abgeleitet werden, wenn diese auf die modifizierte Funktion  $\tilde{F}(j\omega)$  angewendet wird:

$$\tilde{f}(t) = f(t) e^{-\delta t} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \tilde{F}(j\omega) e^{j\omega t} dj\omega.$$

Nach der Multiplikation mit  $e^{\delta t}$  und der Substitution  $s = \delta + j\omega$  erhält man das Laplaceumkehrintegral

$$\text{Laplacerücktransformation: } f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty} F(s) e^{st} ds. \quad (6.50)$$

Auch dieses Integral konvergiert für  $\delta \geq \delta_0$ . Die inverse Laplacetransformation wird durch  $\mathcal{L}^{-1}$  symbolisiert.



**Abb. 6.11:** Funktionen  $y(t) = e^{\delta t} \sin \omega t$  mit unterschiedlicher Dämpfung  $\delta$

**Interpretation der Laplacetransformation.** In Analogie zur Fouriertransformation kann die Laplacetransformation als Zerlegung einer gegebenen Zeitfunktion  $f(t)$  in eine unendlich große Zahl von Exponentialsignalen

$$F(s) \frac{ds}{2\pi j} e^{st}$$

für  $s = \delta + j\omega$  mit festem  $\delta$  und  $\omega = -\infty \dots \infty$  aufgefasst werden (vgl. Gl. (6.50)). Die komplexe Amplitudendichte („Amplitude“) dieses Signals ist durch den ersten Teil und das Zeitverhalten durch die Exponentialfunktion  $e^{st}$  bestimmt. Der wesentliche Unterschied zur Fouriertransformation besteht darin, dass Elementarsignale mit  $\operatorname{Re}\{s\} = \delta > 0$  bzw.  $\operatorname{Re}\{s\} = \delta < 0$  verwendet werden können, die für  $t \rightarrow \infty$  eine ansteigende bzw. eine abfallende Amplitude besitzen (Abb. 6.11). Während für die bei der Fouriertransformation verwendeten Elementarsignale die Beziehung

$$|e^{j\omega t}| = 1 \quad \text{für alle } t$$

galt, gilt hier

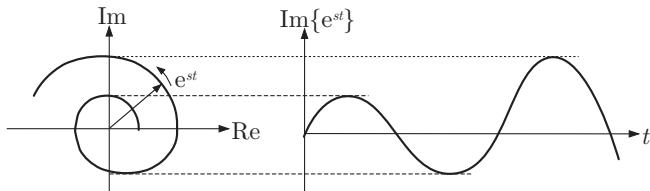
$$\lim_{t \rightarrow \infty} |e^{(\delta+j\omega)t}| = \infty \quad \text{für } \delta > 0$$

bzw.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |e^{(\delta+j\omega)t}| = 0 \quad \text{für } \delta < 0.$$

Der Faktor  $e^{\delta t}$ , der die Amplitude der Sinusfunktion verändert, beschreibt die Einhüllende, die in der Abbildung gestrichelt dargestellt ist.

$e^{st}$  kann als umlaufender Zeiger mit sich ständig verändernder Länge dargestellt werden (Abb. 6.12).



**Abb. 6.12:** Darstellung der Funktion  $e^{st}$  durch einen rotierenden Zeiger (hier:  $\operatorname{Re}\{s\} > 0$ )

Vergleicht man die durch das Fouriertheorem, die Fouriertransformation und die Laplacetransformation beschriebenen Zerlegungen einer Funktion  $f(t)$  untereinander, so werden folgende Merkmale und Anwendungsbereiche offensichtlich:

Zerlegungsvorschrift	Elementarsignale	Anwendungsbereich
Fouriertheorem (6.15)	$F_k e^{jk\omega_0 t}$	periodische Funktionen $f(t)$ der Form (6.1)
Fouriertransformation (6.26)	$F(j\omega) \frac{d\omega}{2\pi} e^{j\omega t}$	Funktionen $f(t)$ , die die Bedingung (6.23) erfüllen
Laplacetransformation (6.50)	$F(s) \frac{ds}{2\pi j} e^{st}$	Funktionen $f(t)$ , die die Bedingung (6.47) erfüllen

In dieser Tabelle wurde nicht auf die Berechnungsvorschriften verwiesen, mit Hilfe derer die Koeffizienten  $F_k$ , die Fouriertransformierte  $F(j\omega)$  bzw. die Laplacetransformierte  $F(s)$  berechnet werden kann, sondern auf die jeweiligen Rücktransformationen, denn aus diesen wird offensichtlich, wie die gegebene Funktion  $f(t)$  in eine Summe von Elementarsignalen zerlegt wird. Ein wesentlicher Unterschied zwischen der Fourierzerlegung und den beiden Transformationen besteht in der Tatsache, dass die Koeffizienten  $F_k$  der Fourierzerlegung die Amplitude der Sinusschwingung mit der Frequenz  $k\omega_0$  beschreiben, während  $F(j\omega)$  und  $F(s)$  die Amplitudendichte darstellen, also die Amplitude bezogen auf das Frequenzintervall  $d\omega$  bzw.  $ds$ .

Je „komplizierter“ die Elementarsignale werden, desto „komplizierter“ darf auch die zu zerlegende Funktion  $f(t)$  sein. Deshalb hat die Laplacetransformation das breiteste Anwendungsbereich.

Es entsteht die Frage, warum der Übergang von der (real existierenden) Zeitfunktion zu den schwer vorstellbaren auf- oder abklingenden Sinusfunktionen mit komplexer Amplitude einen Vorteil bei der Analyse dynamischer Systeme bringen kann. Der wichtige Grund wurde schon mehrfach genannt: Es lässt sich sehr einfach darstellen, wie ein dynamisches System Exponentialsignale  $e^{st}$  überträgt. Ein weiterer Grund ist die Tatsache, dass analytisch schwierig beschreibbare Zeitfunktionen  $f(t)$  im Bildbereich zu einfach darstellbaren Funktionen  $F(s)$  führen können. Beispielsweise ist die nur stückweise stetige Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 2 & 0 \leq t < t_1 \\ 1 & t_1 \leq t < t_2 \\ 0 & t_2 \leq t \end{cases}$$

im Laplacebereich durch die stetige Funktion

$$F(s) = \frac{1}{s} (2 - e^{-st_1} - e^{-st_2})$$

beschrieben. Folglich lässt sich die Laplacetransformierte  $F(s)$  einfacher analysieren als ihr äquivalente Darstellung  $f(t)$  im Zeitbereich.

### Aufgabe 6.2 Laplacetransformation des Diracimpulses

Der Diracimpuls  $\delta(t)$  ist keine Funktion im eigentlichen Sinne, sondern eine Distribution (Pseudofunktion). Zur Herleitung der Laplacetransformierten (6.48) wurden die Definitionsgleichung (5.118) verwendet. Überprüfen Sie das Ergebnis, indem Sie die Laplacetransformation auf die alternative Definition (5.117) anwenden.  $\square$

#### 6.4.2 Wichtige Eigenschaften

In diesem Abschnitt werden Eigenschaften der Laplacetransformation zusammengestellt, die für Regelungstechnische Anwendungen gebraucht werden. Hier wie in allen weiteren Kapiteln wird mit der Konvention gearbeitet, dass die mit demselben Buchstaben und demselben Index bezeichneten Funktionen durch die Laplacetransformation ineinander überführt werden können, wobei der Großbuchstabe die Funktion im Frequenzbereich beschreibt, also z. B.

$$F_1(s) \bullet\circ f_1(t), \quad F \bullet\circ f$$

gilt. Außerdem sei noch einmal an die Voraussetzung erinnert, dass alle Zeitfunktionen für  $t < 0$  verschwinden:

$$f(t) = 0 \quad \text{für } t < 0. \quad (6.51)$$

**Überlagerungssatz.** Die Laplacetransformation ist eine lineare Integraltransformation. Die Linearkombination zweier Zeitfunktionen führt im Bildbereich auf dieselbe Linearkombination der Transformierten:

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \circ\bullet a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s). \quad (6.52)$$

Dabei sind  $a_1$  und  $a_2$  beliebige reelle oder komplexe Konstanten.

**Ähnlichkeitssatz.** Wird die Zeitachse um den reellen Faktor  $a$  gestreckt ( $a > 1$ ) oder gestaucht ( $a < 1$ ), so verändern sich Frequenz und komplexe Amplitude der Laplacetransformierten:

$$f(at) \circ\bullet \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right). \quad (6.53)$$

Dieser Satz kann aus dem Laplaceintegral durch Substitution  $\tau = at$  abgeleitet werden.

**Verschiebungssatz.** Wird die Zeitachse um  $T$  nach rechts verschoben, so gilt für die neue Zeitvariable  $t' = t - T$  und für die Laplacetransformierte

$$f(t') = f(t - T) \circ\bullet e^{-sT} F(s) \quad (6.54)$$

(Beispiel: Totzeitglied). Der Verschiebungssatz gilt auch für  $T < 0$ , wenn  $f(t)$  die Bedingung  $f(t) = 0$  für  $t < T$  erfüllt.

**Dämpfungssatz.** Wird die Funktion  $f(t)$  durch einen Faktor  $e^{at}$  gedämpft ( $a$  reell und negativ) oder „entdämpft“ ( $a$  reell und positiv), so gilt

$$e^{at} f(t) \circ\bullet \int_0^\infty e^{at} f(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(s-a)t} dt, \quad (6.55)$$

also

$$e^{at} f(t) \circ\bullet F(s - a). \quad (6.56)$$

Diese Beziehung gilt auch für komplexe Werte von  $a$ .

**Differenziationssatz.** Wird die erste Ableitung von  $f(t)$  der Laplacetransformation unterzogen, so erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} &= \int_{-0}^\infty e^{-st} \frac{df(t)}{dt} dt \\ &= e^{-st} f(t)\Big|_{-0}^\infty + s \int_{-0}^\infty f(t) e^{-st} dt \\ &= -f(-0) + sF(s) \end{aligned}$$

(partielle Integration  $\int u \, dv = uv - \int v \, du$ ). Also gilt

$$\frac{df(t)}{dt} \circ\bullet sF(s) - f(-0) \quad (6.57)$$

und für höhere Ableitungen

$$\frac{d^k f(t)}{dt^k} \circ\bullet s^k F(s) - s^{k-1} f(-0) - s^{k-2} \dot{f}(-0) - \dots - f^{(k-1)}(-0).$$

Sind alle Anfangsbedingungen  $f(-0), \dot{f}(-0), \dots$  gleich null, so entspricht der Differenziation im Zeitbereich eine Multiplikation der Laplacetransformierten mit  $s$ .

Um Fehler bei der Differenziation der Signale an der Stelle  $t = 0$  zu vermeiden, muss man die vollständige Signaldarstellung (4.1) verwenden, also beispielsweise anstelle von  $f(t) = 1$  mit  $f(t) = \sigma(t)$  arbeiten, was auf  $\frac{df(t)}{dt} = \delta(t)$  führt.

**Integrationssatz.** Für das Integral der Funktion  $f(t)$  erhält man die Laplacetransformierte

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\} &= \int_{-0}^{\infty} \int_0^t f(\tau) d\tau e^{-st} dt \\ &= -\frac{1}{s} \int_0^t f(\tau) d\tau e^{-st} \Big|_{t=-0}^{t=\infty} + \frac{1}{s} \int_{-0}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{s} \int_{-0}^{\infty} f(t) e^{-st} dt. \end{aligned}$$

Also gilt der Integrationssatz

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \circ\bullet \frac{1}{s} F(s) \quad (6.58)$$

für  $s \neq 0$ . Der Integration im Zeitbereich entspricht eine Division der Laplacetransformierten durch  $s$  im Bildbereich.

**Differenziation der Bildfunktion.** Der folgende Satz zeigt, dass sich eine Differenziation der Bildfunktion  $F(s)$  im Zeitbereich durch eine Multiplikation mit der Zeit  $t$  äußert:

$$t^k f(t) \circ\bullet (-1)^k \frac{d^k F(s)}{ds^k}. \quad (6.59)$$

**Faltungssatz.** Die Faltung zweier Zeitfunktionen ist in Gl. (5.127) definiert:

$$f_1 * f_2 = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau.$$

Der Faltungssatz besagt, dass die Faltung der Originalfunktionen einer Multiplikation der Bildfunktionen entspricht:

$$f_1 * f_2 \circledcirc F_1(s) F_2(s). \quad (6.60)$$

**Grenzwertsätze.** Der *Satz vom Anfangswert* betrifft die Berechnung des Grenzwertes  $f(+0)$  aus der Laplacetransformierten  $F(s)$ . Unter der Voraussetzung, dass die Funktion  $f(t)$  und deren Ableitung  $\dot{f}(t)$  Laplacetransformierte besitzen, gilt

$$f(+0) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s). \quad (6.61)$$

Der *Satz vom Endwert* gilt unter denselben Voraussetzungen sowie der Bedingung, dass  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  existiert, und besagt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s). \quad (6.62)$$

Um sich die kompliziert erscheinenden Voraussetzungen beider Sätze nicht merken zu müssen, ersetzt man sie durch die näherungsweise äquivalenten Bedingungen, dass die auf beiden Seiten der Gleichungen stehenden Grenzwerte existieren müssen, damit die Sätze anwendbar sind. Der Endwertsatz ist also z. B. für  $f(t) = \sin \omega t$  nicht anwendbar.

### Aufgabe 6.3 Anwendungen der Eigenschaften der Laplacetransformation

1. Überzeugen Sie sich von der Richtigkeit der Grenzwertsätze, indem Sie diese auf  $f_1(t) = a \sin(\omega t)$  und  $f_2(t) = b e^{\lambda t}$  anwenden.
2. Nehmen Sie an, Ihnen sei nur die Laplacetransformierte der Sprungfunktion bekannt (Zeile 2 in der Korrespondenztabelle im Anhang 6). Wie können Sie unter Ausnutzung der Eigenschaften der Laplacetransformation aus dieser bekannten Korrespondenz die im Anhang 6 in den Zeilen 1, 3 – 7, 9 und 10 angegebenen Korrespondenzen ableiten, ohne das Laplaceintegral selbst zu verwenden?  $\square$

## 6.5 Übertragungsfunktion

### 6.5.1 Definition

Im Abschn. 6.3 wurde gezeigt, dass der Frequenzgang die Übertragungseigenschaft eines dynamischen Systems für sinusförmige Eingangsgrößen beschreibt. Im Folgenden wird diese Vorgehensweise auf Exponentialsignale erweitert und in Analogie zum Frequenzgang die Übertragungsfunktion eingeführt.

Die Übertragungsfunktion wird definiert als Quotient der Laplacetransformierten der Ausgangsgröße und der Eingangsgröße des Systems:

$$\text{Übertragungsfunktion: } G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}. \quad (6.63)$$

Da die Übertragungsfunktion zur Beschreibung des E/A-Verhaltens verwendet werden soll, wird bei ihrer Definition (6.63) davon ausgegangen, dass das System keine Anfangsauslenkung besitzt, d. h., dass für die Differenzialgleichung (6.37) alle Anfangsbedingungen gleich null sind bzw. im Zustandsraummodell (4.45) der Anfangszustand verschwindet:  $x_0 = \mathbf{0}$ .

Der Wert der Übertragungsfunktion an der Stelle  $s$  ist eine komplexe Größe

$$G(s) = \operatorname{Re}\{G(s)\} + j \operatorname{Im}\{G(s)\}, \quad (6.64)$$

die in Betrag und Phase zerlegt werden kann

$$G(s) = |G(s)| e^{j\phi(s)}, \quad (6.65)$$

wobei

$$|G(s)| = \sqrt{(\operatorname{Re}\{G(s)\})^2 + (\operatorname{Im}\{G(s)\})^2}$$

$$\phi(s) = \arg G(s) = \arctan \frac{\operatorname{Im}\{G(s)\}}{\operatorname{Re}\{G(s)\}}$$

gilt. Die Darstellung (6.65) bezeichnet man übrigens als *Exponentialform* der Übertragungsfunktion. Zerlegt man die Laplacetransformierten der Eingangsgröße und der Ausgangsgröße ebenfalls in Betrag und Phase

$$U(s) = |U(s)| e^{j\phi_u(s)}, \quad Y(s) = |Y(s)| e^{j\phi_y(s)},$$

so erhält man die Beziehung

$$G(s) = \frac{|Y(s)|}{|U(s)|} e^{j(\phi_y(s) - \phi_u(s))}.$$

Offensichtlich stellt die Übertragungsfunktion (6.63) eine Erweiterung des Frequenzgangs dar, wobei jetzt auch exponentiell auf- oder abklingende Funktionen betrachtet werden können. Der Frequenzgang  $G(j\omega)$  geht entsprechend Gl. (6.36) durch den Grenzübergang  $s \rightarrow j\omega$  aus der Übertragungsfunktion hervor:

$$G(j\omega) = \lim_{s \rightarrow j\omega} G(s).$$

**Interpretation der Übertragungsfunktion.** In direkter Analogie zu Gl. (6.34) kann man bei Verwendung der Eingangsgröße

$$u(t) = \bar{u} e^{\delta t} \sin(\omega t + \phi_u) \quad (6.66)$$

die Beziehung

$y_s(t) = |G(\delta + j\omega)| \bar{u} e^{\delta t} \sin(\omega t + \phi_u + \phi(\delta + j\omega))$

(6.67)

ableiten, die besagt, dass der Betrag  $|G(\delta + j\omega)|$  der Übertragungsfunktion die Verstärkung und das Argument  $\arg G(\delta + j\omega) = \phi(\delta + j\omega)$  die Phasenverschiebung beschreibt, mit der eine entsprechend  $e^{\delta t}$  auf- oder abklingende Sinusfunktion mit der Frequenz  $\omega$  durch das dynamische System  $\Sigma$  verändert wird. Dabei wird nur das stationäre Verhalten des Systems betrachtet. Schreibt man die Signale (6.66) und (6.67) in der Exponentialdarstellung

$$u(t) = \bar{u} e^{\delta t} \sin(\omega t + \phi_u) = \bar{u} e^{j\phi_u} \frac{1}{j2} \left( e^{(\delta+j\omega)t} - e^{(\delta-j\omega)t} \right)$$

$$y_s(t) = \bar{y} e^{\delta t} \sin(\omega t + \phi_y) = \bar{y} e^{j\phi_y} \frac{1}{j2} \left( e^{(\delta+j\omega)t} - e^{(\delta-j\omega)t} \right),$$

so erhält man den Wert der Übertragungsfunktion für die Frequenz  $s = \delta + j\omega$  als Quotient der Amplituden von Ausgangssignal und Eingangssignal:

$$G(\delta + j\omega) = \frac{y_s(t)}{u(t)} = \frac{\bar{y} e^{j\phi_y}}{\bar{u} e^{j\phi_u}}. \quad (6.68)$$

Diese Beziehung ist interessant, denn sie gibt den Wert der Übertragungsfunktion als Quotient der Parameter zweier *Zeitfunktionen* an. Damit diese Beziehung gilt, müssen die beiden Signale Exponentialfunktionen sein.

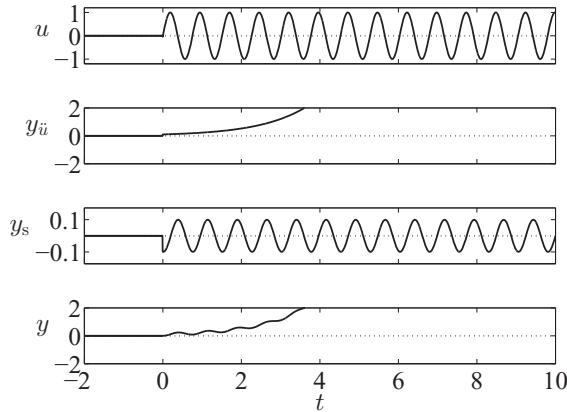
Gleichung (6.68) zeigt, dass man die Übertragungsfunktion  $G(s)$  ähnlich wie der Frequenzgang  $G(j\omega)$  experimentell ermitteln kann (vgl. S. 240). An Stelle der sinusförmigen Erregung muss jetzt mit exponentiell aufklingenden bzw. abklingenden Sinusfunktionen gearbeitet werden. Dies ist praktisch allerdings nur für solche Frequenzen  $s = \delta + j\omega$  möglich, die wesentlich langsamer abklingen als die Eigenvorgänge des Systems.

**Übertragungsfunktion instabiler Systeme.** Die Beziehung (6.67) zeigt, dass die Frequenzbereichsbetrachtungen auch für instabile Systeme eine Bedeutung haben, was vielleicht nicht auf den ersten Blick einzusehen ist. Erregt man ein instabiles System sinusförmig, so wächst die Ausgangsgröße exponentiell und man kann darin keinen Sinusanteil erkennen, dessen Amplitude sich nur um den Faktor  $|G(j\omega)|$  von der Amplitude der Eingangsgröße unterscheidet. Gleichung (6.67) weist jedoch darauf hin, dass für die Bestimmung von  $|G(j\omega)|$  nicht der „gesamte“ Ausgang  $y$ , sondern nur das stationäre Verhalten  $y_s$  betrachtet werden muss. Dieses ist auch bei instabilen Systemen eine Sinusfunktion (wenn man davon ausgeht, dass das System nicht in Resonanz erregt wurde, vgl. S. 184).

#### Beispiel 6.4 Frequenzgang eines instabilen Systems

Die Bedeutung des Frequenzganges für instabile Systeme verdeutlicht Abb. 6.13 für das im Beispiel 5.9 betrachtete System erster Ordnung, für das jetzt  $a = 1$  gesetzt wird und das folglich instabil ist. Für die im oberen Teil der Abbildung gezeigte Eingangsgröße (5.141) erhält man die im untersten Teil dargestellte Ausgangsgröße  $y(t)$ , die sich aus einer exponentiell wachsenden Komponente  $y_{ti}(t)$  und einer sinusförmigen Komponente  $y_s(t)$  zusammensetzt. Für die Bestimmung von  $|G(j\omega)|$  ist nur das stationäre Verhalten maßgebend, das

gegenüber dem stabilen System aus Beispiel 5.9 unverändert geblieben ist (vgl. Abb. 5.22 auf S. 183). Obwohl die Ausgangsgröße  $y$  unendlich groß wird, hat der Frequenzgang einen endlichen Betrag  $|G(j\omega)|$ . Die Übertragungsfunktion  $G(s)$  hat also für instabile Systeme dieselbe Bedeutung wie für stabile Systeme, man kann sie nur nicht mehr mit den hier betrachteten Experimenten bestimmen.  $\square$



**Abb. 6.13:** Übergangsverhalten und stationäres Verhalten eines instabilen Systems erster Ordnung

**Filterwirkung dynamischer Systeme.** Man bezeichnet lineare dynamische Systeme auch als Filter, weil sie jede an ihren Eingang angelegte Sinusschwingung mehr oder weniger gut übertragen, wobei am Ausgang stets eine Sinusschwingung derselben Frequenz entsteht. Das Eingangssignal erfährt beim Durchlaufen des Systems nur eine Phasenverschiebung und eine Amplitudenänderung. Ob der Verstärkungsfaktor  $|G(\delta + j\omega)|$  größer oder kleiner als eins ist, hängt vom System und von der betrachteten Frequenz  $s = \delta + j\omega$  ab.

Wenn das betrachtete System eine Regelstrecke ist, die man näherungsweise als einen Tiefpass beschreiben kann, so filtert es schnelle Stellgrößenänderungen aus. Die Regelstrecke ist dann zu träge, um auf diese schnellen Stellgrößenänderungen zu reagieren. Dies erweist sich oft als eine entscheidende Schranke in Bezug auf die Zeit, in der die Regelgröße einer vorgegebenen Sollwertänderung folgen kann. Andererseits wirkt die Regelstrecke auch als Filter in Bezug zu ihren Störgrößen. Hochfrequente Störungen haben deshalb u. U. keinen nennenswerten Einfluss auf das Verhalten der Regelstrecke und die Regelung muss nicht auf diese Störungen reagieren.

Andererseits kann man auch den Regler aufgrund seiner Filtereigenschaften bemessen. Wenn beispielsweise die Messung der Regelgröße stark gestört ist, so kann man einen Tiefpass als Regler einsetzen, der die hochfrequenten Messstörungen unterdrückt.

In Bezug auf diese Filterwirkungen haben die Betrachtungen im Regelkreis einen engen Zusammenhang zu Untersuchungen der Nachrichtentechnik, bei der diese Eigenschaften dynamischer Systeme im Mittelpunkt des Interesses stehen.

**Berechnung des Übertragungsverhaltens mit Hilfe der Übertragungsfunktion.** Durch Umstellung der Definitionsgleichung (6.63) der Übertragungsfunktion erhält man

$$\Sigma : \quad Y(s) = G(s) U(s) \quad (6.69)$$

als E/A-Beschreibung des Systems  $\Sigma$ . Entsprechend der für die Definitionsgleichung gemachten Voraussetzung berücksichtigt diese Gleichung nur die erzwungene Bewegung des Systems, d. h., es gilt

$$y_{erzw}(t) \circ\bullet G(s) U(s). \quad (6.70)$$

Diese Beziehung ist die Grundlage dafür, dass das Systemverhalten im Frequenzbereich berechnet werden kann. Für eine gegebene Funktion  $u(t)$  bestimmt man durch Laplacetransformation die Bildfunktion  $U(s)$ , daraus  $Y(s)$  und durch Rücktransformation schließlich  $y_{erzw}(t)$ . Wie später noch ausführlich beschrieben wird, ist dieser Rechenweg u. U. einfacher als die Lösung der Zustandsgleichung oder die Faltung der Eingangsgröße mit der Gewichtsfunktion.

**Diskussion.** Vergleicht man die Gl. (6.67) und (6.70) miteinander, so erscheinen beide Gleichungen auf den ersten Blick im Widerspruch zueinander zu stehen. In der ersten Gleichung steht, dass  $G(\delta + j\omega)$  das stationäre Verhalten  $y_s$  bei der Eingangsgröße (6.66) zu berechnen gestattet. In der zweiten Gleichung wird behauptet, dass mit Hilfe von  $G(\delta + j\omega)$  die Summe von stationärem Verhalten und Übergangsverhalten bestimmt werden kann. Wird diese Gleichung für die Eingangsgröße (6.66) angewendet, so scheint sie der ersten Gleichung zu widersprechen.

Dieser scheinbare Widerspruch löst sich auf, wenn man sich die im zweiten Rechenweg enthaltene Rücktransformation genauer ansieht. Aufgrund von Gl. (6.50) gilt

$$y_{erzw}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty} G(s) U(s) e^{st} ds.$$

Zur Berechnung der erzwungenen Bewegung muss folglich das Produkt  $G(s)U(s)$  für alle  $s = \delta - j\infty \dots \delta + j\infty$  bekannt sein. Das heißt, der gesamte Verlauf der Übertragungsfunktion geht in die Berechnung von  $y_{erzw}$  ein. Demgegenüber wird das stationäre Verhalten  $y_s$ , das sich für die spezielle Eingangsgröße (6.66) ergibt, nur vom Wert der Übertragungsfunktion an der Stelle  $s = \delta + j\omega$  bestimmt, wobei  $\delta$  und  $\omega$  durch die verwendete Eingangsgröße vorgegeben sind. Gleichung (6.67) weist also in sehr anschaulicher Weise auf die Bedeutung der Zahl  $G(\delta + j\omega)$  für festgelegte Werte von  $\delta$  und  $\omega$  hin. Zur Berechnung der Ausgangsgröße ist aber bei allen anderen Eingangsgrößen als der durch (6.28) gegebenen der gesamte Verlauf der Funktion  $G(s)$  ( $s = \delta - j\infty \dots \delta + j\infty$ ) wichtig.

### 6.5.2 Berechnung

**Berechnung der Übertragungsfunktion aus der Gewichtsfunktion.** Aus der E/A-Beschreibung

$$\Sigma : \quad y = g * u$$

eines Systems erhält man unter Verwendung des Faltungssatzes der Laplacetransformation gemäß Gl. (6.60) die Beziehung

$$\Sigma : \quad Y(s) = G(s) U(s).$$

Aus einem Vergleich beider Gleichungen geht hervor, dass die Übertragungsfunktion die Laplacetransformierte der Gewichtsfunktion ist:

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}. \quad (6.71)$$

Verwendet man für die Gewichtsfunktion die kanonische Darstellung (5.121) auf S. 173

$$g(t) = \sum_{i=1}^n g_i e^{\lambda_i t} + d \delta(t),$$

so erhält man für die Übertragungsfunktion die Beziehung

$$\begin{aligned} G(s) &= \int_{-0}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^n g_i e^{\lambda_i t} + d \delta(t) \right) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^n g_i e^{(\lambda_i - s)t} dt + d \end{aligned}$$

und folglich

$$G(s) = \sum_{i=1}^n \frac{g_i}{s - \lambda_i} + d. \quad (6.72)$$

In dieser Form ist die Übertragungsfunktion durch ihre Partialbrüche  $\frac{g_i}{s - \lambda_i}$  dargestellt. Eine solche Darstellung ist genau dann möglich, wenn die Systemmatrix des Zustandsraummodells diagonalähnlich ist, denn genau dann gibt es die oben verwendete kanonische Darstellung der Gewichtsfunktion. Man spricht von  $G(s)$  in Gl. (6.72) deshalb von der *Übertragungsfunktion in kanonischer Darstellung*. Die Koeffizienten  $g_i$  lassen sich aus den Elementen der transformierten Vektoren  $\tilde{c}$  und  $\tilde{b}$  entsprechend  $g_i = \tilde{c}_i \tilde{b}_i$  berechnen. Betrachtet man den Signalflussgraphen in Abb. 5.11 auf S. 139 für ein mit kanonischen Zustandsvariablen beschriebenes System, so stellt jeder Partialbruch die Übertragungsfunktion eines Pfades vom Knoten  $u$  zum Knoten  $y$  dar.

**Berechnung der Übertragungsfunktion aus der Differentialgleichung.** Die Übertragungsfunktion kann mit Hilfe der Laplacetransformation aus der Differentialgleichung (6.37)

$$\Sigma : \quad a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = b_q \frac{d^q u}{dt^q} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u(t) \quad (6.73)$$

berechnet werden, wobei von verschwindenden Anfangsbedingungen ausgegangen wird. Dafür werden beide Seiten der Gleichung der Laplacetransformation unterzogen. Unter Verwendung des Überlagerungssatzes und des Differentiationssatzes entsteht dann

$$Y(s) (a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0) = U(s) (b_q s^q + \dots + b_1 s + b_0).$$

Aus dieser Gleichung lässt sich für die Übertragungsfunktion die Beziehung

$$G(s) = \frac{b_q s^q + b_{q-1} s^{q-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (6.74)$$

ablesen.

Entsprechend Gl. (6.74) bildet man mit den Koeffizienten  $b_i$  der rechten Seite der Differentialgleichung das Zählerpolynom und mit den Koeffizienten  $a_i$  der linken Seite das Nennerpolynom der Übertragungsfunktion. Man kann die Beziehung (6.74) jedoch auch andersherum lesen und für eine gegebene Übertragungsfunktion die dazugehörige Differentialgleichung ermitteln. Erinnert man sich außerdem an den im Abschn. 4.4.1 angegebenen Weg von der Differentialgleichung zum Zustandsraummodell, so kann man von der Übertragungsfunktion auch direkt zum Zustandsraummodell übergehen. Dabei ist die Verwendung der Regelungsnormalform bzw. der Beobachtungsnormalform zweckmäßig, weil diese Formen des Zustandsraummodells direkt mit den Koeffizienten  $a_i$  und  $b_i$  der Differentialgleichung hingeschrieben werden können.

Für alle Systeme, die durch eine gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten beschrieben werden können, entstehen Übertragungsfunktionen, die als Quotienten (6.74) darstellbar sind, wobei Zähler und Nenner rationale Funktionen in  $s$  sind. Derartige Übertragungsfunktionen werden als *gebrochen rational* bezeichnet. Dabei gilt für den Zählergrad  $q$  und den Nennergrad  $n$  die Beziehung  $q \leq n$ . Der relative Grad  $r = n - q$  ist gleich der Differenz der Polynomordnungen von Zähler und Nenner der Übertragungsfunktion.

Im Weiteren werden bis auf eine Ausnahme ausschließlich gebrochen rationale Übertragungsfunktionen betrachtet. Die Ausnahme bilden Totzeitsysteme (4.113), aus deren Gewichtsfunktion

$$g(t) = \delta(t - T_t)$$

man durch Laplacetransformation unter Verwendung des Verschiebungssatzes die

Übertragungsfunktion

$$G(s) = e^{-sT_t} \quad (6.75)$$

erhält. Diese Funktion ist transzendent.

**Berechnung der Übertragungsfunktion aus dem Zustandsraummodell.** Für den im Zustandsraummodell (4.45)

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), & \mathbf{x}(0) = \mathbf{0} \\ y(t) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}(t) + du(t) \end{cases}$$

auftretenden Zustandsvektor  $\mathbf{x}(t)$  entsteht durch elementeweise Laplacetransformation ein Vektor  $\mathbf{X}(s)$ <sup>5</sup> mit den Elementen  $X_i(s)$ :

$$\mathbf{X}(s) = \begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{pmatrix} \bullet\circ \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}.$$

Aus der Zustandsgleichung erhält man unter Verwendung des Differenziationssatzes und des Überlagerungssatzes die Gleichung

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{AX}(s) + \mathbf{b}U(s),$$

die nach  $\mathbf{X}$  umgeformt werden kann:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{b}U(s)$$

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}U(s).$$

Die inverse Matrix existiert für alle Frequenzen  $s$  bis auf die  $n$  Ausnahmen  $s = \lambda_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Aus der Ausgabegleichung folgt die Beziehung

$$Y(s) = \mathbf{c}^T\mathbf{X}(s) + dU(s)$$

und damit

$$Y(s) = (\mathbf{c}^T(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + d)U(s).$$

Daraus ergibt sich für die Übertragungsfunktion des Systems  $\Sigma$  die Beziehung

$$G(s) = \mathbf{c}^T(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + d. \quad (6.76)$$

**FADDEEV-Algorithmus.** Will man die Beziehung (6.76) anwenden, so muss man die Matrix  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$  invertieren. Dafür eignet sich der Faddeevalgorithmus, der für Systeme niedriger Ordnung auch ohne Rechner schnell durchgeführt werden kann.

---

<sup>5</sup> Hier muss von der üblichen Konvention abgewichen werden, wonach halbfett gesetzte Großbuchstaben Matrizen bezeichnen:  $\mathbf{X}$  ist keine Matrix, sondern ein Vektor! Der Großbuchstabe symbolisiert die Laplacetransformierte.

Dieser Algorithmus geht davon aus, dass die in

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}$$

vorkommende adjungierte Matrix in der Form

$$\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{R}_{n-1}s^{n-1} + \mathbf{R}_{n-2}s^{n-2} + \dots + \mathbf{R}_1s + \mathbf{R}_0$$

dargestellt werden kann. Für die Determinante gilt bekanntlich

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

mit  $a_n = 1$ . Mit dem Startwert

$$\mathbf{R}_{n-1} = \mathbf{I}$$

werden die Koeffizientenmatrizen  $\mathbf{R}_i$  der adjungierten Matrix und die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms folgendermaßen rekursiv berechnet:<sup>6</sup>

$$\begin{aligned} a_{n-k} &= -\frac{1}{k} \text{Sp}(\mathbf{A}\mathbf{R}_{n-k}) \quad (k = 1, 2, \dots, n) \\ \mathbf{R}_{n-k-1} &= \mathbf{A}\mathbf{R}_{n-k} + a_{n-k}\mathbf{I} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \end{aligned} \quad (6.77)$$

Als Probe kann man  $\mathbf{R}_{-1}$  aus der letzten Gleichung für  $k = n$  berechnen, wobei  $\mathbf{R}_{-1} = \mathbf{O}$  entstehen muss.

**Aufgabe 6.4\*** Berechnung der Übertragungsfunktion aus der Differenzialgleichung

Das RC-Glied  $\Sigma_{\text{RC}}$  in Abb. 6.14 wird durch die Differentialgleichung

$$i(t) = C \frac{dx(t)}{dt} \quad (6.78)$$

und die algebraischen Gleichungen

$$u(t) = (R_1 + R_2)i(t) + x(t) \quad (6.79)$$

$$y(t) = R_2i(t) + x(t) \quad (6.80)$$

beschrieben.

1. Bestimmen Sie die Differentialgleichung des RC-Gliedes und daraus die Übertragungsfunktion.
2. Transformieren Sie die angegebenen Gleichungen sofort in den Frequenzbereich und bestimmen Sie auf diesem Wege die Übertragungsfunktion. Welche Vereinfachung des Rechenweges ergibt sich dabei gegenüber dem ersten Rechenweg? □

---

<sup>6</sup> Sp bezeichnet die Spur der angegebenen Matrix, also die Summe aller Hauptdiagonalelemente

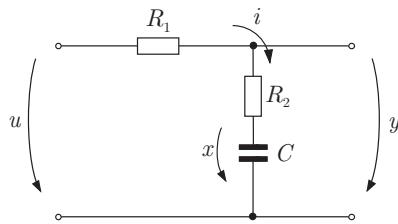


Abb. 6.14: RC-Glied

**Aufgabe 6.5** Übertragungsfunktion für ein Zustandsraummodell in Frobeniusform

Im Abschn. 4.4.1 wurde aus der Differentialgleichung (4.50) das Zustandsraummodell mit den Matrizen (4.54), (4.55) und (4.56) abgeleitet. Berechnen Sie für dieses Zustandsraummodell die Übertragungsfunktion nach Gl. (6.76) und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Übertragungsfunktion, die Sie unter Verwendung der Beziehung (6.74) aus der Differentialgleichung (4.50) erhalten.  $\square$

**Aufgabe 6.6\*** Übertragungseigenschaften von  $PT_2$ -Gliedern

Betrachten Sie das stationäre Verhalten  $y_s(t)$  des  $PT_2$ -Gliedes mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

für die Eingangsgröße

$$u(t) = e^{\mu t} \quad \text{mit} \quad \mu \neq -\frac{1}{T_1}, \mu \neq -\frac{1}{T_2}$$

und beantworten Sie die folgenden Fragen:

1. Wie heißt der analytische Ausdruck für  $y_s(t)$ ?
2. Wie sieht qualitativ der Verlauf von  $y_s(t)$  für  $\mu > 0$  und  $\mu < 0$  aus?  $\square$

**Aufgabe 6.7\*\*** Übertragungsfunktion von Deskriptorsystemen

Zeigen Sie in Analogie zu Gl. (6.76), dass ein durch die Gln. (4.73) beschriebenes System die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \mathbf{h}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{F})^{-1} \mathbf{g} + k \quad (6.81)$$

besitzt und das für das Differenzierglied (4.78) daraus die Übertragungsfunktion  $G(s) = s$  folgt.  $\square$

### 6.5.3 Eigenschaften und grafische Darstellung

Die Übertragungsfunktion ist eine komplexwertige Funktion der komplexwertigen Variablen  $s$ . Sie kann für jeden Wert für  $s$  entsprechend Gl. (6.64) in Realteil und Imaginärteil oder entsprechend Gl. (6.65) in Betrag und Phase zerlegt werden.

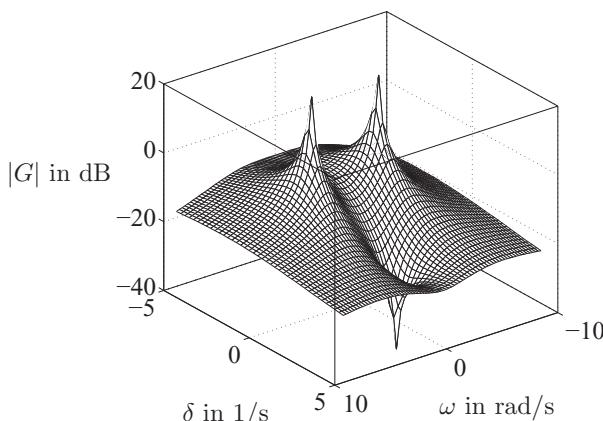
In Erweiterungen der für den Frequenzgang in den Gln. (6.40) und (6.41) angegebenen Eigenschaften gilt

$$G(0) = \frac{b_0}{a_0} = k_s \quad (6.82)$$

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} G(s) = \begin{cases} 0 & \text{für } q < n \\ \frac{b_n}{a_n} = d & \text{für } q = n. \end{cases} \quad (6.83)$$

Die zweite Beziehung folgt aus der Eigenschaft von  $G(s)$ , eine gebrochen rationale Funktion zu sein. Nur für sprungfähige Systeme, für die der Zählergrad der Übertragungsfunktion gleich dem Nennergrad ist, ist der Grenzwert von null verschieden, und zwar gleich dem Durchgriff  $d$ . Diese Tatsache erkennt man z. B. aus den Gln. (6.72) und (6.76).

Da der Frequenzgang aus der Übertragungsfunktion durch die Substitution  $s \rightarrow j\omega$  entsteht, gelten auch für  $G(s)$  die Eigenschaften (6.42) und (6.43).

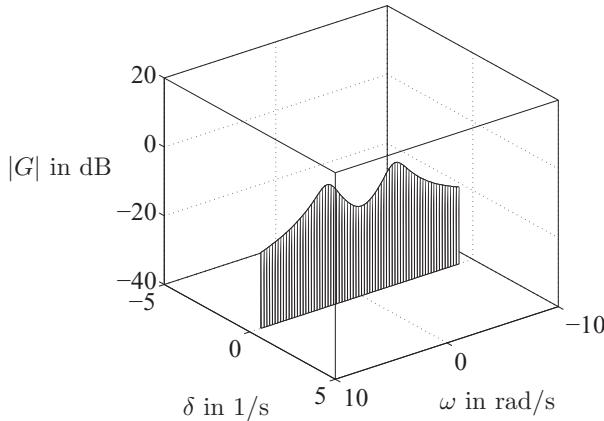


**Abb. 6.15:** Dreidimensionale Darstellung von  $|G(s)|$

Für die grafische Darstellung von  $|G(s)|$  und  $\arg G(s)$  braucht man ein dreidimensionales Koordinatensystem. Über der komplexen Ebene ( $\operatorname{Re}\{s\}$ - $\operatorname{Im}\{s\}$ -Ebene) wird  $|G(s)|$  bzw.  $\arg G(s)$  als „Höhe“ aufgetragen, wie es in Abb. 6.15 für die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s - 2}{(s + 1 - j3)(s + 1 + j3)}$$

gezeigt ist. Man erkennt deutlich, dass für  $s = 2$  der Wert  $|G(2)| = 0$  bzw.  $|G(2)|_{\text{dB}} \rightarrow -\infty$  und für  $s = -1 \pm j3$  der Grenzwert  $|G(-1 \pm j3)| \rightarrow \infty$  bzw.  $|G(-1 \pm j3)|_{\text{dB}} \rightarrow \infty$  angenommen wird. Die Spitzen sind in der durch die Einheit Dezibel bedingten logarithmischen Skala unendliche hoch bzw. tief.



**Abb. 6.16:** Dreidimensionale Darstellung des Amplitudenganges  $|G(j\omega)|$

Diese dreidimensionale Darstellung von  $|G(s)|$  ist schwer überschaubar und glücklicherweise auch gar nicht notwendig, denn es wird sich zeigen, dass viele Eigenschaften mit Hilfe der grafischen Darstellung des Frequenzganges  $G(j\omega)$  untersucht werden können. Dies ist insofern erstaunlich, als dass der Frequenzgang lediglich den Schnitt durch die dreidimensionale Darstellung von  $|G(s)|$  entlang der Imaginärachse darstellt (Abb. 6.16). Es wird später offensichtlich werden, dass  $G(j\omega)$  dennoch genügend Informationen für die Systemanalyse und den Reglerentwurf enthält.

**Diskussion.** Die Möglichkeit, an Stelle von  $G(s)$  nur  $G(j\omega)$  zu betrachten und folglich vom Verlauf des Frequenzganges auf die Übertragungsfunktion zu schließen, kann man sich auf unterschiedliche Weise klar machen.

- Mathematisch ist diese Tatsache durch die *Integralformel von Cauchy* begründet. Diese Formel gilt für eine im geschlossenen Gebiet  $\mathcal{G}$  reguläre Funktion  $G(s)$ . Liegt der Integrationsweg vollständig in  $\mathcal{G}$  und umschließt er den Punkt  $s_1$ , so gilt der Residuensatz

$$G(s_1) = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{G(s)}{s - s_1} ds. \quad (6.84)$$

Mit dieser Formel lassen sich die Funktionswerte  $G(s_1)$  aller in  $\mathcal{G}$  liegenden Punkte  $s_1$  aus den Werten berechnen, die die Funktion  $G(s)$  auf dem Rand von  $\mathcal{G}$  besitzt.

Ist die Übertragungsfunktion  $G(s)$  in der rechten komplexen Halbebene regulär, d. h., besitzt sie dort keine Pole, so kann  $G(s)$  entsprechend Gl. (6.84) aus dem Frequenzgang

$G(j\omega)$  und dem sprungfähigen Anteil  $\lim_{|s| \rightarrow \infty} G(s) = d$  berechnet werden, wenn man den Integrationsweg  $\mathcal{D}$  entsprechend Abb. 8.6 auf S. 429 mit hinreichend großem Radius  $R$  wählt. Ist das System nicht sprungfähig, so gilt  $\lim_{|s| \rightarrow \infty} G(s) = 0$  und folglich

$$G(s_1) = \frac{1}{2\pi j} \int_{s \in \mathcal{D}} \frac{G(j\omega)}{j\omega - s_1} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(j\omega)}{j\omega - s_1} d\omega \quad \text{für } \operatorname{Re}\{s_1\} > 0.$$

Diese Beziehungen zeigen, dass die Übertragungsfunktion  $G(s)$  aus dem Frequenzgang  $G(j\omega)$  berechnet werden kann, also der Frequenzgang sämtliche Informationen über ein gegebenes System enthält.

- Betrachtet man die Laplace-Rücktransformation (6.50), so wird offensichtlich, dass man  $G(s)$  nur für die Frequenzen  $s$  kennen muss, die auf einer Parallelen zur Imaginärachse mit dem Realteil  $\delta$  liegen. Diese Kenntnis reicht aus, um die zu  $G(s)$  gehörige Zeitfunktion  $g(t)$  (also die Gewichtsfunktion) zu berechnen. Die in  $G(s)$  enthaltenen Informationen stecken also vollständig in  $G(\delta + j\omega)$  für  $\omega = -\infty \dots +\infty$ .
- Schließlich kann man sich auch überlegen, dass gebrochen rationale Funktionen  $G(s)$  entsprechend Gl. (6.74) durch  $n + q + 2$  Punkte  $(s_i, G(s_i))$  eindeutig festgelegt sind. Man braucht also gar nicht unendlich viele Punkte, um den Verlauf von  $G(s)$  eindeutig zu fixieren. Deshalb ist es nicht verwunderlich, dass ohne Kenntnis von  $n$  und  $q$  der Verlauf von  $G(j\omega)$  ausreicht, um  $G(s)$  für alle  $s$  zu bestimmen.

#### 6.5.4 Pole und Nullstellen

Da Zähler und Nenner der Übertragungsfunktion (6.74)

$$G(s) = \frac{b_qs^q + b_{q-1}s^{q-1} + \dots + b_1s + b_0}{a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

Polynome in  $s$  sind, spricht man bei dieser Darstellung auch von der *Polynomform* der Übertragungsfunktion.  $G(s)$  kann in eine andere Form überführt werden, wenn man die Polynome als Produkte ihrer Linearfaktoren schreibt

$$\begin{aligned} b_qs^q + b_{q-1}s^{q-1} + \dots + b_1s + b_0 &= b_q \prod_{i=1}^q (s - s_{0i}) \\ a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 &= a_n \prod_{i=1}^n (s - s_i), \end{aligned}$$

wobei  $s_{0i}$  und  $s_i$  die Nullstellen des Zählerpolynoms bzw. des Nennerpolynoms von  $G(s)$  bezeichnen, also aus den Gleichungen

$$s_{0i} : \quad b_qs^q + b_{q-1}s^{q-1} + \dots + b_1s + b_0 = 0 \quad (6.85)$$

$$s_i : \quad a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 = 0 \quad (6.86)$$

berechnet werden.

Die Lösungen  $s_{0i}$ , ( $i = 1, 2, \dots, q$ ) der ersten Gleichung heißen die *Nullstellen* der Übertragungsfunktion und die Lösungen  $s_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) der zweiten Gleichung die *Pole* (Polstellen) der Übertragungsfunktion. Die für die Bestimmung der Pole verwendete Gleichung (6.86) wird als *charakteristische Gleichung* des Systems und das auf der linken Seite von (6.86) stehende Polynom als *charakteristisches Polynom* bezeichnet. Pole und Nullstellen haben die Maßeinheit einer Frequenz, also beispielsweise  $\frac{1}{s} = \text{Hz}$  oder  $\frac{1}{\text{min}}$ , je nach gewählter Maßeinheit für die Zeit.

Gleichung (6.86) ist identisch mit der auf S. 137 angegebenen charakteristischen Gleichung (5.33) der Matrix  $A$ . Folglich stimmen die Pole der Übertragungsfunktion – bis auf später behandelte Ausnahmen – mit den Eigenwerten der Matrix  $A$  des Zustandsraummodells (4.45) überein:

$$\lambda_i = s_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Für die Nullstellen gilt

$$G(s_{0i}) = c^T(s_{0i}I - A)^{-1}b + d = 0$$

(vgl. Gl. (6.76)). Diese Beziehung ist identisch zur Gl. (5.145), woraus folgt, dass die hier für die Übertragungsfunktion eingeführten Nullstellen  $s_{0i}$  mit den in Gl. (5.147) für das Zustandsraummodell definierten Nullstellen  $\mu_i$  übereinstimmen:

$$s_{0i} = \mu_i, \quad i = 1, 2, \dots, q.$$

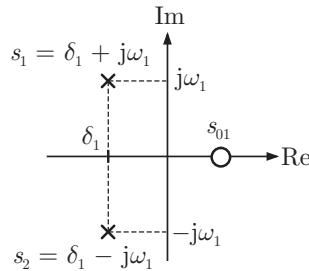
Pole und Nullstellen sind also keine spezifischen Kenngrößen der Übertragungsfunktion, sondern beschreiben Eigenschaften des betrachteten Systems.

**Pol-Nullstellen-Form der Übertragungsfunktion.** Unter Verwendung der Pole und Nullstellen kann die Übertragungsfunktion in der Form

$$G(s) = k \frac{\prod_{i=1}^q (s - s_{0i})}{\prod_{i=1}^n (s - s_i)} \quad (6.87)$$

dargestellt werden, wobei  $k = \frac{b_q}{a_n}$  gilt. Man sagt, dass  $G(s)$  in Gl. (6.87) in *Pol-Nullstellen-Form* geschrieben ist. Die Differenz  $r = n - q$  zwischen der die Anzahl der Pole und der Anzahl der Nullstellen einer Übertragungsfunktion bezeichnet man als *Polüberschuss* der Übertragungsfunktion. Sie stimmt mit dem relativen Grad des Systems überein (vgl. Gl. (4.5)).

Die Begriffe Pole und Nullstellen wurden gewählt, weil die Übertragungsfunktion für die komplexe Frequenzen  $s = s_{0i}$  gleich null ist und für  $s = s_i$  unendlich groß wird (vgl. Abb. 6.15). Da die Polynome, aus denen  $s_i$  und  $s_{0i}$  berechnet werden, reelle Koeffizienten haben, sind die Pole entweder reell oder treten als konjugiert komplexe Paare auf. Sie werden im *Pol-Nullstellen-Bild* (PN-Bild) grafisch dargestellt, wobei Pole durch ein Kreuz „x“ und Nullstellen durch einen Kreis „o“ gekennzeichnet werden (Abb. 6.17). Das PN-Bild in Abb. 6.17 gehört zu dem System, dessen Übertragungsfunktion in Abb. 6.15 gezeigt ist. Die Kreuze im PN-Bild



**Abb. 6.17:** Pol-Nullstellen-Bild einer Übertragungsfunktion

geben die Lage der beiden unendlich hohen Spitzen und der Kreis die Lage der unendlich tiefen Spitze der Übertragungsfunktion in der komplexen Ebene an.

**Kürzen der Übertragungsfunktion.** Fallen Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion  $G(s)$  zusammen, so kann der Quotient (6.87) gekürzt werden und erhält die einfachere Form

$$G(s) = k \frac{\prod_{i=1}^{q'} (s - s_{0i})}{\prod_{i=1}^{n'} (s - s_i)}, \quad (6.88)$$

in der weniger Linearfaktoren als in Gl. (6.87) auftreten. Die Menge der Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{A}$  des Zustandsraummodells ist dann nicht mehr gleich, sondern eine Obermenge der Menge der Pole der Übertragungsfunktion  $G(s)$ .

Derartige Systeme sind dadurch gekennzeichnet, dass nicht alle kanonischen Zustandsvariablen  $\tilde{x}_i(t)$  durch die Eingangsgröße  $u(t)$  angeregt werden oder die Ausgangsgröße  $y(t)$  beeinflussen. Sie erfüllen die Bedingung (5.123) auf S. 173 für diejenigen Indizes  $i$ , für die die Eigenwerte  $\lambda_i$  nicht in der kanonischen Darstellung (5.121) der Gewichtsfunktion bzw. nicht als Pole  $\lambda_i = s_i$  in der Partialbruchzerlegung (6.72) und in der Pol-Nullstellen-Form (6.88) der Übertragungsfunktion vorkommen. Im Signalflussgraphen gibt es also für eine oder mehrere kanonische Zustandsvariablen  $\tilde{x}_i$  entweder keine Kante vom Knoten  $u$  zum Knoten  $\frac{d\tilde{x}_i}{dt}$  oder von  $\tilde{x}_i$  nach  $y$ . Im Kap. II-3 wird gezeigt, dass diese Systems nicht vollständig steuerbar bzw. nicht vollständig beobachtbar sind.

Bei den folgenden Betrachtungen wird davon ausgegangen, dass die Übertragungsfunktion gegebenenfalls gekürzt wurde, so dass Zähler und Nenner teilerfremd (koprime) sind. Nichtsdestotrotz wird stets mit den alten Bezeichnungen  $n$  und  $q$  für den Nenner- bzw. Zählergrad gearbeitet.

**Interpretation der Pole.** Die Interpretation der Pole  $s_i$  ist aufgrund der genannten Beziehung zu den Eigenwerten der Matrix  $\mathbf{A}$  offensichtlich. Die Pole bestimmen die Exponenten der Modi  $e^{s_i t}$  und damit die Eigenbewegung und das Übergangsverhalten des Systems. Haben sämtliche Pole negativen Realteil, so klingt die Eigenbewegung ab; das System ist stabil (vgl. Kap. 8).

Die Pol-Nullstellen-Form (6.87) der Übertragungsfunktion  $G(s)$  macht deutlich, dass das System Signale mit der Frequenz  $s = s_i$  unendlich stark verstärkt, denn es gilt  $|G(s_i)| = \infty$ . Daraus entstehen die nach oben gerichteten Spitzen in Abb. 6.15.

**Interpretation der Nullstellen.** Aus den Zustandsraumbetrachtungen ist bekannt, dass Nullstellen  $s_{0i} = \mu_i$  Elementarfunktionen  $e^{\mu_i t}$  der Eingangsgröße  $u(t)$  beschreiben, die nicht im stationären Verhalten vorkommen (vgl. Gl. (5.139)). In der Frequenzbereichsdarstellung sind die Nullstellen diejenigen Frequenzen  $s = s_{0i}$ , für die  $|G(s_{0i})| = 0$  gilt. Entsprechend Gl. (6.67) verschwindet das stationäre Verhalten und die Ausgangsgröße  $Y(s)$  enthält keine Komponente, die die Frequenz  $s_{0i}$  besitzt.

Um zu sehen, dass  $Y(s)$  nicht identisch gleich null ist, betrachtet man das Produkt  $G(s)U(s)$  mit  $U(s) = \frac{1}{s - s_{0i}}$ . In diesem Produkt wird der Linearfaktor  $(s - s_{0i})$  gekürzt und kommt folglich in der Ausgangsgröße  $Y(s)$  nicht vor.  $Y(s)$  enthält in seiner Partialbruchzerlegung jedoch Brüche für alle Pole, die das Übergangsverhalten bestimmen.

**Physikalische Ursachen für Pole und Nullstellen.** Um zu erkennen, wie die Pole und Nullstellen eines Systems vom physikalischen Aufbau abhängig sind, wird Gl. (6.76) für nicht sprungfähige Systeme in der Form

$$G(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} = \frac{\mathbf{c}^T \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{b}}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}$$

geschrieben. Im Zähler bezeichnet  $\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$  die adjungierte Matrix. Wenn man – wie stets in diesem Buch – voraussetzt, dass man den angegebenen Bruch nicht kürzen kann, dann ist der Nenner  $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$  unabhängig von den Vektoren  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}^T$ , also unabhängig von den Angriffspunkten des Stellgliedes und des Messgliedes.

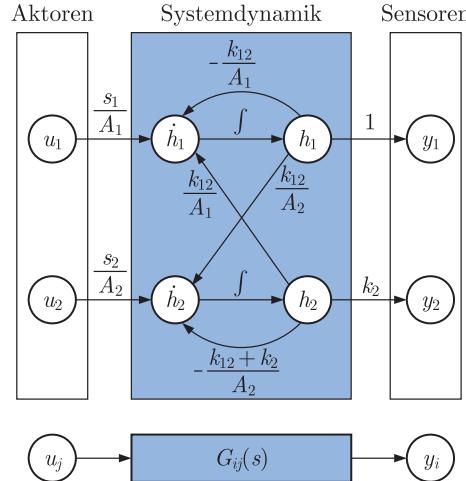
|| Die Pole eines Systems werden ausschließlich durch die physikalischen Wirkprinzipien bestimmt, die sich in der Zustandsgleichung und dort insbesondere in der Matrix  $\mathbf{A}$  niederschlagen. Sie sind unabhängig von den Angriffspunkten der Aktoren und Sensoren, also unabhängig von den Modellelementen  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}^T$ .

Anders verhält es sich mit den Nullstellen. Das Zählerpolynom der Übertragungsfunktion ist von den Vektoren  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}^T$  abhängig, die beschreiben, wie die Stellgröße  $u$  die Zustandsvariablen beeinflusst bzw. wie aus den Zustandsvariablen die Ausgangsgröße  $y$  gebildet wird. Betrachtet man ein System für unterschiedliche Eingangs- oder Ausgangsgrößen, so verändern sich diese beiden Vektoren, während die Matrix  $\mathbf{A}$  unverändert bleibt.

|| Die Nullstellen hängen von den Eingriffspunkten des Stellgliedes und des Messgliedes, also von den Vektoren  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}^T$  ab. Dies gilt sowohl für die Anzahl der Nullstellen als auch für deren Wert.

**Beispiel 6.5** Pole und Nullstellen eines Behältersystems

Abbildung 6.18 zeigt den Signalfußgraphen des im Beispiel 4.7 auf S. 78 betrachteten Behältersystems  $\Sigma_B$  mit dem Zustandsraummodell (4.49).



**Abb. 6.18:** Interpretation der Übertragungsfunktion des Behältersystems

Untersucht man das System für jeweils eine der beiden Eingangsgrößen  $u_j$  und eine der beiden Ausgangsgrößen  $y_i$ , so kann man mit Hilfe von Gl. (6.76) vier Übertragungsfunktionen  $G_{ij}(s) = \frac{Y_i(s)}{U_j(s)}$ ,  $i, j \in \{1, 2\}$  aufstellen, wobei  $\mathbf{b}$  die zur verwendeten Eingangsgröße  $u_i$  gehörende Spalte der Matrix  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{c}^T$  die zur Ausgangsgröße  $y_i$  gehörende Zeile der Matrix  $\mathbf{C}$  bezeichnet:

$$\begin{aligned} G_{11} &= (1 \ 0) (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \begin{pmatrix} \frac{s_1}{A_1} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\frac{s_1}{A_1}s + \frac{s_1(k_{12}+k_2)}{A_1 A_2}}{s^2 + a_1 s + a_0} \\ G_{12} &= (1 \ 0) (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{s_2}{A_2} \end{pmatrix} = \frac{\frac{-k_{12}s_2}{A_1 A_2}}{s^2 + a_1 s + a_0} \\ G_{21} &= (0 \ k_2) (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \begin{pmatrix} \frac{s_1}{A_1} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\frac{-k_{12}s_1 k_2}{A_1 A_2}}{s^2 + a_1 s + a_0} \\ G_{22} &= (0 \ k_2) (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{s_2}{A_2} \end{pmatrix} = \frac{\frac{k_2 s_2}{A_2} s + \frac{k_{12} k_2 s_2}{A_1 A_2}}{s^2 + a_1 s + a_0}. \end{aligned}$$

Im Nenner aller Übertragungsfunktionen steht das charakteristische Polynom der Matrix  $\mathbf{A}$ :

$$s^2 + a_1 s + a_0 = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^2 + \left( \frac{k_{12} + k_2}{A_2} + \frac{k_{12}}{A_1} \right) s + \frac{k_{12} k_2}{A_1 A_2}.$$

Erwartungsgemäß stimmen die Nennerpolynome aller vier Übertragungsfunktionen überein, weil sie durch die physikalischen Vorgänge innerhalb des Behältersystems vorgegeben sind, also durch den grau unterlegten Teil des Signalfußgraphen in Abb. 6.18.

Was sich in Abhängigkeit von der gewählten Eingangs- oder Ausgangsgröße ändert, ist der Zähler der Übertragungsfunktion. Dieser ist von den Angriffspunkten des Sensors und des Stellgliedes abhängig. Im Signalflusssgraphen sind die Angriffspunkte durch die Zustandsknoten beschrieben, zu denen Kanten von der Eingangsgröße  $u_j$  führen bzw. von denen Kanten zur Ausgangsgröße  $y_i$  ausgehen. Im Beispiel haben die zweite und die dritte Übertragungsfunktion keine Nullstelle, während die erste und die vierte Übertragungsfunktion eine (negative) Nullstelle besitzen.  $\square$

**Zeitkonstantenform der Übertragungsfunktion.** Eine weitere geläufige Form von  $G(s)$  erhält man durch Definition der *Zeitkonstanten*  $T_i$ :

$$T_i = \frac{1}{|s_i|}. \quad (6.89)$$

Für negative reelle Pole  $s_i$  ist  $T_i$  diejenige Zeit, in der der zugehörige Eigenwert  $e^{-\frac{t}{T_i}} = e^{s_i t}$  auf den  $\frac{1}{e}$ -ten Teil des Anfangswertes abgenommen hat (vgl. Gl. (5.186) auf S. 213), d. h., für  $t = T_i$  gilt

$$e^{-\frac{t}{T_i}} = \frac{1}{e} = 0,368.$$

Zeitkonstanten werden i. Allg. nur für stabile Systeme verwendet, für die  $s_i$  negativen Realteil hat. Um Analogien zwischen stabilen und instabilen Systemen zeigen zu können, wird gelegentlich für instabile Systeme auch mit negativen Zeitkonstanten ( $T_i = -\frac{1}{s_i}$  für  $s_i > 0$ ) gearbeitet (s. S. 299). Die Definition (6.89) ist auf Nullstellen  $s_{0i}$  übertragbar:

$$T_{0i} = \frac{1}{|s_{0i}|}.$$

Für reelle Pole gilt

$$(s - s_i) = \frac{1}{T_i} (T_i s + 1).$$

Für konjugiert komplexe Pole  $s_{i,i+1} = \delta_i \pm j\omega_i$  werden die beiden zugehörigen Linearfaktoren zu einem quadratischen Term zusammengefasst

$$(s - s_i)(s - s_{i+1}) = \frac{1}{T_i^2} (T_i^2 s^2 + 2d_i T_i s + 1),$$

wobei für  $T_i$  und  $d_i$  folgende Beziehungen gelten:

$$\begin{aligned} T_i &= \frac{1}{|s_i|} = \frac{1}{\sqrt{\delta_i^2 + \omega_i^2}} \\ d_i &= -\frac{\delta_i}{\sqrt{\delta_i^2 + \omega_i^2}}. \end{aligned}$$

Damit kann  $G(s)$  für negative reelle bzw. konjugiert komplexe Pole und Nullstellen mit negativen Realteilen auf die Form

$$G(s) = \frac{k}{s^l} \frac{(T_{01}s + 1) \dots (T_{0j}s^2 + 2d_{0j}T_{0j}s + 1)}{(T_ks + 1) \dots (T_ls^2 + 2d_lT_ls + 1)} \quad (6.90)$$

gebracht werden, die als *Zeitkonstantenform* oder *Produktform* der Übertragungsfunktion bezeichnet wird.  $l$  gibt die Anzahl der verschwindenden Pole ( $s_i = 0$ ) an.

Mit dieser Darstellung kann auch der im Abschn. 5.7.2 eingeführte Begriff der Summenzeitkonstante allgemein gefasst werden. Die Summenzeitkonstante als Ausdruck der durch das System ausgeübten Verzögerung ist nur sinnvoll anwendbar, wenn alle Pole und Nullstellen reell sind und sich die Übertragungsfunktion folglich in der Form

$$G(s) = k_s \frac{\prod_{i=1}^q (T_{0i}s + 1)}{\prod_{i=1}^n (T_is + 1)}$$

darstellen lässt. Man erhält dann in Erweiterung von Gl. (5.184)

$$\text{Summenzeitkonstante: } T_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n T_i - \sum_{j=1}^q T_{0j}. \quad (6.91)$$

Besitzt das System einen Totzeitanteil (6.141), so erhöht sich die Summenzeitkonstante um die Totzeit  $T_t$ .

**Aufgabe 6.8** Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion

Schreiben Sie die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + 4s + 5}$$

in Pol-Nullstellen-Form und in Zeitkonstantenform.  $\square$

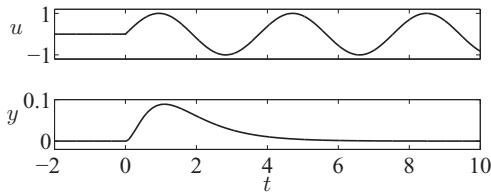
**Aufgabe 6.9\*** Beschreibung des Systemverhaltens durch Übertragungsfunktionen

Ein System wird aus der Ruhelage  $x_0 = \mathbf{0}$  durch die Eingangsgröße  $u(t) = \sin 2t$  erregt und erzeugt die in Abb. 6.19 (unten) angegebene Ausgangsgröße. Durch welche der folgenden Übertragungsfunktionen wird das System beschrieben?

$$G(s) = \frac{2s + 1}{(s + 1)(s + 2)^2}, \quad G(s) = \frac{4}{(s + 1)^2}, \quad G(s) = \frac{s^2 + 4}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}$$

$$G(s) = \frac{4s + 1}{s^2 + 2s + 1}, \quad G(s) = \frac{s^2 - 4}{(s + 3)^2} e^{-2s}, \quad G(s) = \frac{25}{7s + 1}$$

Begründen Sie Ihre Antwort und ermitteln Sie die Funktion  $y(t)$ .  $\square$



**Abb. 6.19:** Eingangsgröße und Ausgangsgröße des in Aufgabe 6.9 betrachteten Systems

**Aufgabe 6.10\*** Übertragungsfunktion der Verladebrücke

Für die in Abb. 5.5 auf S. 128 gezeigte Verladebrücke kann man durch Betrachtung der Kräftegleichgewichte mit dem Zustandsvektor

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} s_k(t) \\ \dot{s}_k(t) \\ \vartheta(t) \\ \dot{\vartheta}(t) \end{pmatrix}$$

folgendes linearisiertes Zustandsraummodell ableiten:

$$\text{Verladebrücke : } \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_G g}{m_K} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{(m_K+m_G)g}{m_K l} & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_K} \\ 0 \\ -\frac{1}{m_K l} \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = (1 \ 0 \ l \ 0) \boldsymbol{x}(t), \end{cases}$$

wobei  $m_G$  die Masse des Greifers,  $m_K$  die Masse der Laufkatze,  $l$  die Seillänge und  $g$  die Erdbeschleunigung bezeichnet. Die an der Laufkatze angreifende Kraft  $F$  ist die Eingangsgröße  $u$ , die seitliche Position des Greifers  $s$  die Ausgangsgröße  $y$ .

1. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion der Verladebrücke.
2. Welche Pole und Nullstellen hat die Verladebrücke?
3. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion, wenn anstelle der Position  $s$  des Greifers der Seilwinkel  $\vartheta$  als Ausgangsgröße gemessen wird.
4. Vergleichen Sie beide Übertragungsfunktionen. Erklären Sie anhand des Signalflussgraphen, wodurch der prinzipielle Unterschied zwischen beiden Übertragungsfunktionen begründet ist. □

**Aufgabe 6.11\*\* Nullstellen eines Parallelschwingkreises**

Betrachten Sie einen Parallelschwingkreis mit der Kapazität  $C$  und der Induktivität  $L$ , wobei die Spannung über dem Schwingkreis als Eingangsgröße und der Strom durch den Schwingkreis als Ausgangsgröße dient.

1. Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion des Systems und berechnen Sie die Pole und Nullstellen in Abhängigkeit von  $L$  und  $C$ .

2. Interpretieren Sie die Nullstellen.
3. Um den Schwingkreis als Sperrkreis einsetzen und die Wirkung von Nullstellen ausnutzen zu können, wird in Reihe zum Schwingkreis ein ohmscher Widerstand  $R$  eingefügt und die Spannung über dem Widerstand, die proportional zum Strom durch den Schwingkreis und folglich proportional zu der bisher betrachteten Ausgangsgröße ist, als neue Ausgangsgröße verwendet. Welche Nullstellen hat die neue Anordnung?
4. Interpretieren Sie das Ergebnis in Bezug auf die Realisierbarkeit von Nullstellen mit verschwindendem Realteil durch passive Schaltungen.  $\square$

### 6.5.5 Berechnung des Systemverhaltens

Mit Hilfe der Übertragungsfunktion kann das Verhalten des Systems im Frequenzbereich berechnet werden, womit ein zur Lösung der Differentialgleichung bzw. des Zustandsraummodells alternativer Weg beschritten wird (Abb. 6.20).

Im ersten Schritt erfolgt die Zerlegung des gegebenen Eingangssignals  $u(t)$  in Elementarsignale. Im zweiten Schritt wird berechnet, wie Amplitude und Phase dieser Elementarsignale durch das System mit einer bekannten Übertragungsfunktion verändert werden. Im dritten Schritt wird die Ausgangsgröße  $y(t)$  durch Zusammenfügen aller Elementarsignale gebildet. Dieser Rechenweg ist im folgenden Algorithmus zusammengefasst:

---

**Algorithmus 6.2** Berechnung des Systemverhaltens mit Hilfe der Übertragungsfunktion (Abb. 6.20)

---

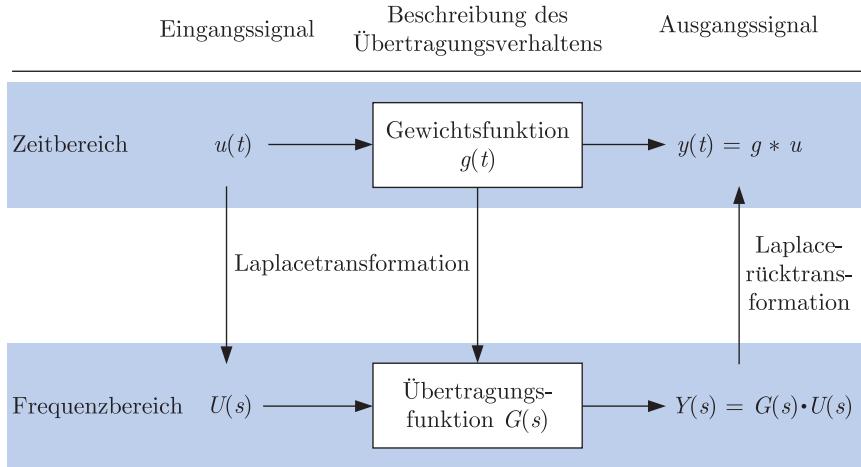
**Gegeben:** Übertragungsfunktion  $G(s)$  des Systems  $\Sigma$   
Eingangssignal  $u(t)$

1. Berechnen Sie die Laplacetransformierte  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$  des Eingangssignals  $u(t)$ .
2. Berechnen Sie die Laplacetransformierte  $Y(s) = G(s)U(s)$  des Ausgangssignals aus der Laplacetransformierten des Eingangssignals und der Übertragungsfunktion.
2. Berechnen Sie das Ausgangssignal  $y(t)$  durch Laplacerücktransformation  $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$ .

**Ergebnis:** Ausgangssignal  $y(t)$ .

---

Die Berechnung des Systemverhaltens nach dem o. a. Algorithmus ist sehr einfach, weil sich die Ausgangsgröße im Frequenzbereich aus einer Multiplikation der Eingangsgröße mit der Übertragungsfunktion ergibt. Die Laplacetransformation der Eingangsgröße kann unter Verwendung der Korrespondenztabelle erfolgen und macht in der Regel keine Schwierigkeiten. Problematischer ist es mit der Rücktransformation der Ausgangsgröße, da diese i. Allg. als gebrochen rationale Funktion



**Abb. 6.20:** Rechenschema für die Berechnung des Systemverhaltens mit Hilfe der Laplacetransformation

$$Y(s) = \frac{d_qs^q + d_{q-1}s^{q-1} + \dots + d_1s + d_0}{c_ps^p + c_{p-1}s^{p-1} + \dots + c_1s + c_0} \quad (6.92)$$

vorliegt, in der  $c_i$  und  $d_i$  bekannte Koeffizienten sowie  $p$  und  $q$  den Grad der Polynome bezeichnen. Derartige gebrochen rationale Funktionen sind in dieser Form in Korrespondenztafeln nicht zu finden. Im Folgenden wird auf die Rücktransformation derartiger Funktionen eingegangen, weil dies für die Anwendung des beschriebenen Rechenweges wichtig ist.

**Laplacerücktransformation rationaler Funktionen.** Als erstes wird die Laplace-transformierte  $Y(s)$  in die Form

$$Y(s) = k \frac{d_qs^q + d_{q-1}s^{q-1} + \dots + d_1s + d_0}{\prod_{i=1}^p (s - s_i)} \quad (6.93)$$

mit  $k = \frac{1}{c_p}$  überführt und anschließend in Partialbrüche zerlegt:

$$Y(s) = k_0 + \frac{k_1}{s - s_1} + \frac{k_2}{s - s_2} + \dots + \frac{k_p}{s - s_p}. \quad (6.94)$$

Dabei bezeichnen  $s_i$  die Nullstellen des Nennerpolynoms von  $Y(s)$ , also die Pole von  $Y(s)$ . Im Folgenden wird zunächst angenommen, dass diese Pole einfach sind.

Um die Partialbruchzerlegung (6.94) auszuführen, sind zwei Schritte notwendig. Erstens sind die Nullstellen  $s_i$  des Nennerpolynoms zu bestimmen. Zweitens sind die Koeffizienten  $k_i$  zu berechnen. Dabei geht man folgendermaßen vor:

- *Bestimmung von  $k_0$ .* Der Summand  $k_0$  verschwindet für gebrochen rationale Funktionen  $Y(s)$  mit  $q < p$  und lässt sich für  $q = p$  durch den Grenzübergang  $s \rightarrow \infty$  berechnen, denn aus Gl. (6.94) folgt

$$k_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} Y(s). \quad (6.95)$$

Für diesen Grenzübergang erhält man aus Gl. (6.92)

$$k_0 = \frac{d_q}{c_p}, \quad \text{für } p = q.$$

- Bestimmung von  $k_i$  für einen einfachen Pol  $s_i$ . Ist der Pol  $s_i$  eine reelle Nullstelle des Nennerpolynoms von  $Y(s)$ , so erhält man aus Gl. (6.94)

$$k_i = \lim_{s \rightarrow s_i} ((s - s_i) Y(s)) \quad (6.96)$$

(Residuensatz der Funktionentheorie). In Gl. (6.93) eingesetzt, folgt daraus

$$k_i = k \frac{d_q s_i^q + d_{q-1} s_i^{q-1} + \dots + d_1 s_i + d_0}{\prod_{j=1, j \neq i}^p (s_i - s_j)}.$$

- Sind zwei Pole  $s_i, s_{i+1}$  konjugiert komplex, so sind auch die entstehenden Koeffizienten  $k_i, k_{i+1}$  konjugiert komplex:

$$\begin{aligned} s_i &= \delta_i + j\omega_i, \quad s_{i+1} = \delta_i - j\omega_i \\ k_i &= \alpha_i + j\beta_i, \quad k_{i+1} = \alpha_i - j\beta_i. \end{aligned}$$

$k_i$  und  $k_{i+1}$  können entsprechend Gl. (6.96) bestimmt werden. Um in diesem Falle das Rechnen mit komplexen Zahlen zu umgehen, kann man auch die zu  $s_i$  und  $s_{i+1}$  gehörenden Partialbrüche zusammenfassen

$$\begin{aligned} \frac{k_i}{s - s_i} + \frac{k_{i+1}}{s - s_{i+1}} &= \frac{(\alpha_i + j\beta_i)(s - \delta_i + j\omega_i) + (\alpha_i - j\beta_i)(s - \delta_i - j\omega_i)}{(s - \delta_i - j\omega_i)(s - \delta_i + j\omega_i)} \\ &= \frac{2\alpha_i s - 2(\alpha_i \delta_i + \beta_i \omega_i)}{(s - \delta_i)^2 + \omega_i^2} \\ &= \frac{\bar{k}_{1i}s + \bar{k}_{0i}}{(s - \delta_i)^2 + \omega_i^2} \end{aligned}$$

und an Stelle der beiden Partialbrüche  $\frac{k_i}{s - s_i}$  und  $\frac{k_{i+1}}{s - s_{i+1}}$  mit komplexen Werten den reellwertigen Bruch

$$\frac{\bar{k}_{1i}s + \bar{k}_{0i}}{(s - \delta_i)^2 + \omega_i^2}$$

in die Zerlegung (6.94) einsetzen. Die reellen Koeffizienten  $\bar{k}_{1i}$  und  $\bar{k}_{0i}$  werden wieder mit Hilfe des Residuensatzes bestimmt:

$$\bar{k}_{1i}s_i + \bar{k}_{0i} = \lim_{s \rightarrow s_i} ((s - s_i)(s - s_{i+1}) Y(s)).$$

Beide Seiten dieser Gleichung sind komplex.  $\bar{k}_{1i}$  und  $\bar{k}_{0i}$  erhält man aus einem Vergleich beider Real- bzw. Imaginärteile.

Die Summanden von  $Y(s)$  in Gl. (6.94) können einzeln entsprechend der Korrespondenztabelle in den Zeitbereich transformiert werden. Für reelle  $s_i = \delta_i$  und  $k_i$  gilt

$$\frac{k_i}{s - \delta_i} \bullet\circ k_i e^{\delta_i t}.$$

Konjugiert komplexe Paare  $s_i, s_{i+1} = \delta_i \pm j\omega_i$  und  $k_i, k_{i+1} = \alpha_i \pm j\beta_i$  können direkt über die Beziehung

$$\frac{\alpha_i + j\beta_i}{s - \delta_i - j\omega_i} + \frac{\alpha_i - j\beta_i}{s - \delta_i + j\omega_i} \bullet\circ -2 \sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2} e^{\delta_i t} \sin\left(\omega_i t - \arctan \frac{\alpha_i}{\beta_i}\right)$$

in den Zeitbereich transformiert werden. Partialbrüche der Form  $\frac{\bar{k}_{1i}s + \bar{k}_{0i}}{(s - \delta_i)^2 + \omega_i^2}$  müssen in Summen der Gestalt

$$\frac{\bar{k}_{1i}s + \bar{k}_{0i}}{(s - \delta_i)^2 + \omega_i^2} = \frac{\bar{k}_{1i}(s - \delta_i)}{(s - \delta_i)^2 + \omega_i^2} + \frac{\tilde{k}_{0i}\omega_i}{(s - \delta_i)^2 + \omega_i^2}$$

zerlegt werden. Dann können die Korrespondenzen

$$\begin{aligned} \frac{\bar{k}_{1i}(s - \delta_i)}{(s - \delta_i)^2 + \omega_i^2} &\bullet\circ \bar{k}_{1i} e^{\delta_i t} \cos \omega_i t \\ \frac{\tilde{k}_{0i}\omega_i}{(s - \delta_i)^2 + \omega_i^2} &\bullet\circ \tilde{k}_{0i} e^{\delta_i t} \sin \omega_i t \end{aligned}$$

angewendet werden. Summanden mit reellen Polen führen also zu Teilvorgängen mit auf- oder abklingenden „reinen“ e-Funktionen, während für konjugiert komplexe Pole ab- oder aufklingende harmonische Schwingungen entstehen.

- *Erweiterung auf Mehrfachpole.* Besitzt das Nennerpolynom von  $Y(s)$  Nullstellen  $s_i$  mit der Vielfachheit  $l_i > 1$ , so hat die Partialbruchzerlegung (6.94) die Form

$$Y(s) = k_0 + \sum_{i=1}^{p'} \sum_{j=1}^{l_i} \frac{k_{ij}}{(s - s_i)^j}.$$

Die Summe auf der rechten Seite umfasst weiterhin  $p$  Partialbrüche, aber die Zähler sind in Abhängigkeit von der Vielfachheit  $l_i$  anders aufgebaut. Da Pole mehrfach auftreten, erfolgt die linke Summation nur bis  $p' < p$ . Die Zähler  $k_{ij}$  der Partialbrüche erhält man für einen festen Index  $i$  aus der Gleichung

$$k_{ij} = \frac{1}{(l_i - j)!} \lim_{s \rightarrow s_i} \frac{d^{l_i-j}}{ds^{l_i-j}} (Y(s)(s - s_i)^{l_i}), \quad j = 1, \dots, l_i. \quad (6.97)$$

Für die Rücktransformation der zu mehrfachen Polen gehörenden Partialbrüche erhält man aus dem Dämpfungssatz (6.56) und dem Satz über die Differenziation der Bildfunktion (6.59) die Beziehung

$$\sum_{j=1}^{l_i} \frac{k_{ij}}{(s - s_i)^j} \bullet\circ e^{s_i t} \sum_{j=1}^{l_i} k_{ij} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}.$$

**Interpretation.** Die Partialbruchzerlegung von  $Y(s) = G(s)U(s)$  führt auf Summanden, in deren Nennern Linearfaktoren mit den Polen der Übertragungsfunktion  $G(s)$  und der Eingangsgröße  $U(s)$  stehen. Die Rücktransformation ergibt deshalb Summanden mit Exponentialfunktionen, in deren Exponenten die Pole von  $G(s)$  und von  $U(s)$  stehen. Die Darstellung von  $y(t)$  hat deshalb die bereits in Gl. (5.132) auf S. 180 gezeigte Form. Die Summanden mit den Polen von  $G(s)$  stellen das Übergangsverhalten  $y_{ii}$  und die Summanden mit den Polen von  $U(s)$  das stationäre Verhalten  $y_s$  dar. Bei Mehrfachpolen treten Ausdrücke auf, in denen die Exponentialfunktionen mit  $t^k$  multipliziert werden.

### Beispiel 6.6 Verhalten eines $PT_1$ -Gliedes

Es ist die Ausgangsgröße des  $PT_1$ -Gliedes

$$\Sigma_{PT_1} : \begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{1}{T}x(t) + \frac{1}{T}u(t), & x(0) = 0 \\ y(t) = k_s x(t) \end{cases}$$

bei rampenförmiger Erregung  $u(t) = kt$  zu ermitteln. Entsprechend dem Algorithmus 6.2 wird in drei Schritten vorgegangen.

1. **Transformation der Zeitfunktionen in den Frequenzbereich:** Für die Eingangsgröße erhält man mit Hilfe der Korrespondenztabelle

$$u(t) \circ\bullet \frac{k}{s^2}.$$

Die Übertragungsfunktion des  $PT_1$ -Gliedes  $\Sigma_{PT_1}$  ermittelt man entsprechend Gl. (6.76):

$$G(s) = k_s \left( s + \frac{1}{T} \right)^{-1} \frac{1}{T} = \frac{k_s}{Ts + 1}.$$

2. **Berechnung der Laplacetransformierten  $Y(s)$ :** Es gilt

$$Y(s) = G(s) U(s) = \frac{k_s k}{s^2(Ts + 1)}.$$

3. **Rücktransformation in den Zeitbereich:** Die Pole von  $Y(s)$  sind  $s_1 = 0$  (zweifacher Pol,  $l_1 = 2$ ) und  $s_2 = -\frac{1}{T}$  (einfacher Pol). Die Partialbruchzerlegung führt folglich auf

$$Y(s) = k_0 + \frac{k_{11}}{s} + \frac{k_{12}}{s^2} + \frac{k_2}{(s + \frac{1}{T})}.$$

Mit Hilfe von Gl. (6.95) erhält man

$$k_0 = 0.$$

Der Koeffizient  $k_2$  für den einfachen Pol folgt aus Gl. (6.96)

$$k_2 = \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{T}} \left( s + \frac{1}{T} \right) \frac{k_s k}{s^2(Ts + 1)} = \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{T}} \frac{k_s k}{Ts^2} = k_s k T.$$

Für den Mehrfachpol wird Gl. (6.97) angewendet:

$$\begin{aligned} k_{11} &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left( \frac{k_s k}{s^2(Ts+1)} s^2 \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left( \frac{k_s k}{Ts+1} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-k_s k T}{(Ts+1)^2} \\ &= -k_s k T, \end{aligned}$$

$$k_{12} = \frac{1}{0!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k_s k}{s^2(Ts+1)} s^2 = k_s k.$$

Als Partialbruchzerlegung ergibt sich folglich

$$Y(s) = -\frac{k_s k T}{s} + \frac{k_s k}{s^2} + \frac{k_s k T}{s + \frac{1}{T}}.$$

Mit Hilfe der Korrespondenztabelle und dem Überlagerungssatz der Laplacetransformation erhält man für den Ausgang  $y(t)$  von  $\Sigma_{PT_1}$

$$\begin{aligned} y(t) &= -k_s k T + k_s k t + k_s k T e^{-\frac{t}{T}} \\ &= k_s k T (e^{-\frac{t}{T}} - 1) + k_s k t. \end{aligned}$$

Das System folgt der Rampenfunktion  $k_s k t$  mit der durch den ersten Summanden beschriebenen Verzögerung.

Bei der Zerlegung von  $y(t)$  in das stationäre Verhalten und das Übergangsverhalten muss man beachten, dass die Eingangsgröße

$$u(t) = kt = u_1 e^{0t} + u_2 t e^{0t} \quad \text{mit } u_1 = 0, u_2 = k$$

nicht als eine Summe der Form (5.130) dargestellt werden kann, sondern auch einen Term der Form  $t e^{\mu t}$  enthält. Deshalb gehört der Summand  $-k_s k T$  zum stationären Verhalten und es gilt

$$\begin{aligned} y_{\text{ü}}(t) &= k_s k T e^{-\frac{t}{T}} \\ y_s(t) &= k_s k t e^{0t} - k_s k T e^{0t}. \end{aligned}$$

Der im Übergangsverhalten auftretende Exponent ist gleich dem Pol des betrachteten Systems erster Ordnung. Er steht im Nenner des dritten Summanden der Partialbruchzerlegung. Das stationäre Verhalten hat zwei Summanden mit verschwindenden Exponenten der e-Funktion. Beide Summanden stammen aus der Eingangsgröße. Die Exponenten stehen in den Nennern der beiden ersten Summanden der Partialbruchzerlegung.  $\square$

**Aufgabe 6.12** Rücktransformation einer gebrochen rationalen Bildfunktion

Gegeben ist die Laplacetransformierte

$$Y(s) = \frac{2s+1}{(s+1+j1)(s+1-j1)(s+4)}.$$

Bestimmen Sie die dazugehörige Funktion  $y(t) \circledcirc Y(s)$ .  $\square$

**Aufgabe 6.13** Lösung einer Differentialgleichung mit Hilfe der Laplacetransformation

Gegeben ist die Differentialgleichung eines ungestörten Systems

$$\ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = 0, \quad \dot{y}(-0) = \dot{y}_0, \quad y(-0) = y_0.$$

Berechnen Sie unter Verwendung der Laplacetransformation die Eigenbewegung  $y(t)$  in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen  $\dot{y}_0$  und  $y_0$ , wobei Sie der Einfachheit halber das System für den Fall untersuchen, dass die Eigenwerte reell sind.  $\square$

**Aufgabe 6.14** Übergangsfunktion und Gewichtsfunktion eines PT<sub>2</sub>-Gliedes

Berechnen Sie die Übergangsfunktion und die Gewichtsfunktion des PT<sub>2</sub>-Gliedes

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)}$$

und skizzieren Sie die Verläufe beider Funktionen. Welche Rechenschritte ändern sich, wenn Sie anstelle des PT<sub>2</sub>-Gliedes das IT<sub>1</sub>-Glied

$$G(s) = \frac{1}{s(s+3)}$$

betrachten?  $\square$

**Aufgabe 6.15\*** Berechnung der Übergangsmatrix mit Hilfe der Laplacetransformation

1. Die Übergangsmatrix  $\Phi(t)$  erfüllt die Differentialgleichung (5.21). Beweisen Sie, dass daraus die Beziehung

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} \quad (6.98)$$

folgt und  $\Phi(t)$  durch Rücktransformation der rechten Seite dieser Gleichung berechnet werden kann.

2. Ermitteln Sie auf diesem Rechenweg die Übergangsmatrizen zu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \delta & \omega \\ -\omega & \delta \end{pmatrix}. \quad \square$$

**Aufgabe 6.16\*\*** Stationäres Verhalten und Übergangsverhalten

Beweisen Sie mit Hilfe einer Betrachtung im Frequenzbereich, dass sich die Ausgangsgröße eines Systems bei Verwendung der in Gl. (5.130) angegebenen Art von Eingangsgrößen in der Form (5.132) darstellen lässt. Stimmen die Nullstellen  $s_{0i}$  des Systems mit denjenigen Exponenten  $\mu_j$  überein, die durch das System nicht übertragen werden?  $\square$

### 6.5.6 Übertragungsfunktion gekoppelter Systeme

Die Übertragungsfunktion eignet sich sehr gut für die Berechnung von Systemen, die aus mehreren Teilsystemen zusammengesetzt sind. Die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems kann dann sehr einfach aus den Übertragungsfunktionen der Teilsysteme gebildet werden. Dabei spielen im Wesentlichen drei Formen der Zusammenschaltung eine Rolle, die hier für jeweils zwei Teilsysteme

$$\begin{aligned}\Sigma_1 : \quad Y_1(s) &= G_1(s) U_1(s) \\ \Sigma_2 : \quad Y_2(s) &= G_2(s) U_2(s)\end{aligned}$$

untersucht werden.

**Reihenschaltung.** Bei der in Abb. 6.21 gezeigten Reihenschaltung wirkt die Ausgangsgröße des ersten Übertragungsgliedes als Eingangsgröße des zweiten Übertragungsgliedes. Bekannt sind die beiden Übertragungsfunktionen  $G_1(s)$  und  $G_2(s)$ , gesucht ist die Übertragungsfunktion  $G(s)$  der Reihenschaltung.

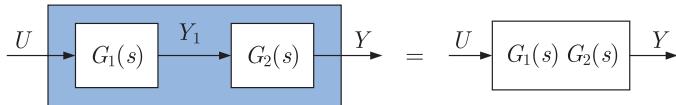


Abb. 6.21: Reihenschaltung zweier Übertragungsglieder

Für die Reihenschaltung gilt

$$\begin{aligned}Y(s) &= Y_2(s) \\ U_2(s) &= Y_1(s) \\ U_1(s) &= U(s).\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen entsteht

$$Y(s) = G_2(s) G_1(s) U(s),$$

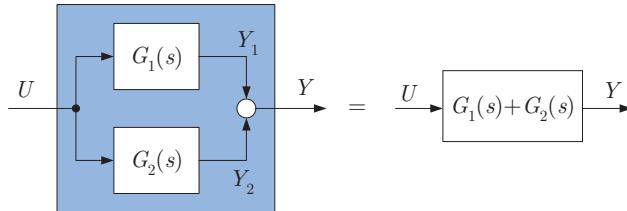
woraus sich für die Übertragungsfunktion  $G_R(s)$  der Reihenschaltung

Reihenschaltung:  $G_R(s) = G_2(s) G_1(s)$

ergibt. Wären an Stelle der Übertragungsfunktionen die Gewichtsfunktionen

$$g_1(t) \circledast g_2(t) \quad \text{und} \quad g_2(t) \circledast g_1(t)$$

bekannt gewesen, so würde sich die Gewichtsfunktion der Reihenschaltung entsprechend



**Abb. 6.22:** Parallelschaltung zweier Übertragungsglieder

$$g_R(t) = g_2 * g_1$$

aus den Gewichtsfunktionen der Teilsysteme zusammensetzen (vgl. Faltungssatz der Laplacetransformation).

**Parallelschaltung.** Bei der Parallelschaltung wirkt die Eingangsgröße auf beide Übertragungsglieder und die Ausgangsgrößen summieren sich (Abb. 6.22):

$$\begin{aligned} Y(s) &= Y_1(s) + Y_2(s) \\ U_1(s) &= U_2(s) = U(s). \end{aligned}$$

Daraus erhält man das Modell  $Y(s) = G_P(s) U(s)$  mit

Parallelschaltung:       $G_P(s) = G_1(s) + G_2(s)$

(6.99)

und als Analogon im Zeitbereich

$$g_P(t) = g_1(t) + g_2(t).$$

**Rückkopplungsschaltung.** Bei der in Abb. 6.23 gezeigten Rückkopplungsschaltung wird die Ausgangsgröße des Übertragungsgliedes mit der Übertragungsfunktion  $G_1(s)$  mit negativem Vorzeichen zur Eingangsgröße  $U(s)$  addiert:

$$\begin{aligned} Y(s) &= Y_1(s) \\ U_1(s) &= U(s) - Y_2(s). \end{aligned}$$

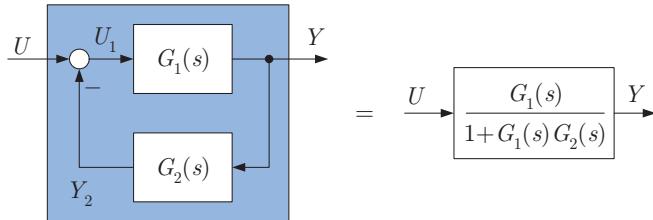
Folglich gilt

$$Y(s) = G_1(s) U(s) - G_1(s) G_2(s) Y(s). \quad (6.100)$$

Daraus erhält man

$$Y(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s) G_2(s)} U(s) = G(s) U(s)$$

mit



**Abb. 6.23:** Rückkopplungsschaltung zweier Übertragungsglieder

Rückkopplungsschaltung:  $G_F(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}.$

Im Zeitbereich erhält man an Stelle von Gl. (6.100)

$$y = g_1 * u - g_1 * g_2 * y \quad (6.101)$$

und

$$y + g_1 * g_2 * y = g_1 * u.$$

Diese Gleichung kann nicht weiter umgeformt werden, weil dafür die inverse Operation der Faltung  $*$  gebraucht würde. Deshalb erhält man für die Gewichtsfunktion  $g_F(t)$ , mit der die Rückkopplungsschaltung in der Form

$$y = g_F * u$$

dargestellt ist, aus Gl. (6.101) nur die implizite Darstellung

$$g_F = g_1 - g_1 * g_2 * g_F.$$

Diese Darstellung ist nicht sehr anschaulich. Für  $u(t) = \delta(t)$  erhält man in Gl. (6.101) jedoch, wie gefordert,  $y(t) = g_F(t)$ .

**Umformregeln für Blockschaltbilder.** Die angegebenen Beziehungen kann man auch als Umformregeln für Blockschaltbilder auffassen, wie es in den Abbildungen bereits angedeutet ist. Weitere Umformregeln sind in Abb. 6.24 angegeben. Sie betreffen das Vertauschen von Blöcken, die in Reihe angeordnet sind sowie das Hinterziehen von Blöcken über Mischstellen und Verzweigungspunkte.

**Aufgabe 6.17** Umformung eines Blockschaltbildes

In Abb. 6.25 ist das Blockschaltbild eines Regelkreises gezeigt, in dem  $G_D$ ,  $G_M$ ,  $G_S$ ,  $G_Y$  und  $G_R$  die Übertragungsfunktionen der Störreinwirkung auf den Streckenausgang, des Messgliedes, der Regelstrecke, des Stellgliedes bzw. des Reglers darstellen. Formen Sie das Bild so um, dass es nur noch zwei Blöcke mit  $d$  bzw.  $w$  als Eingangsgrößen und  $y$  als Ausgangsgröße enthält. Welche Übertragungsfunktionen  $G_d(s)$  und  $G_w(s)$  erhält man für das Stör- bzw. Führungsverhalten, wenn  $G_d$  und  $G_w$  durch  $G_d(s) = \frac{Y(s)}{D(s)}$  und  $G_w(s) = \frac{Y(s)}{W(s)}$  definiert sind? □

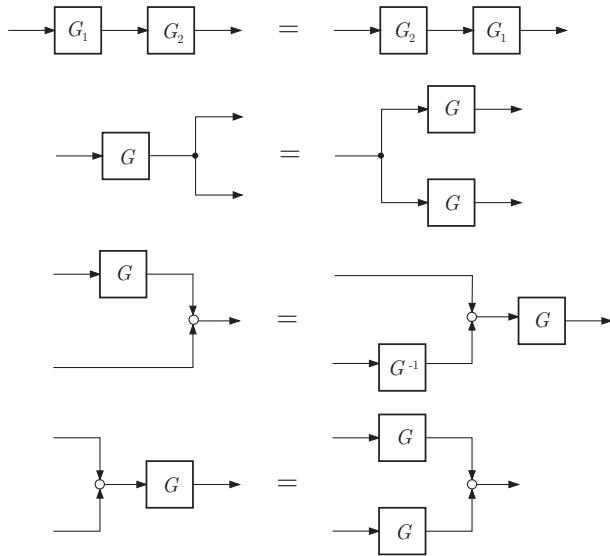


Abb. 6.24: Weitere Regeln für das Umformen von Blockschaltbildern

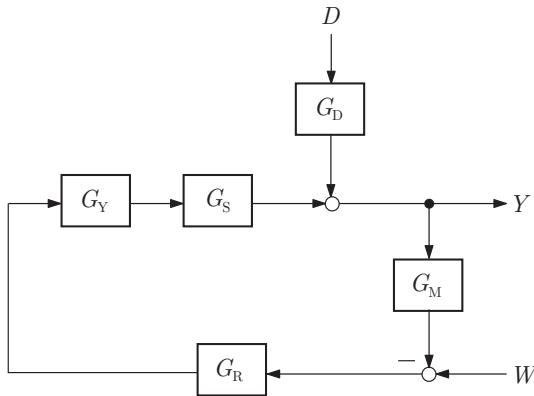


Abb. 6.25: Blockschaltbild eines Regelkreises

**Aufgabe 6.18** Analyse zweier Blockschaltbilder

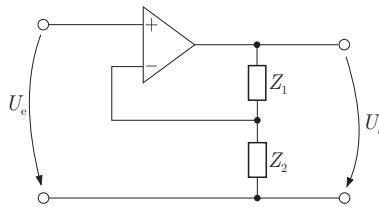
Bestimmen Sie die Übertragungsfunktionen der beiden in Abb. 12.7 auf S. 559 gezeigten Blockschaltbilder. Sind sie, wie in der Bildunterschrift behauptet wird, gleich?  $\square$

**Aufgabe 6.19\*** Frequenzgang einer Operationsverstärkerschaltung

Für die Operationsverstärkerschaltung in Abb. 6.26 soll der Frequenzgang  $G(j\omega) = \frac{U_a(j\omega)}{U_e(j\omega)}$  berechnet werden. Es wird angenommen, dass der Operationsverstärker als statisches Übertragungsglied mit unendlich großer Verstärkung beschrieben werden kann

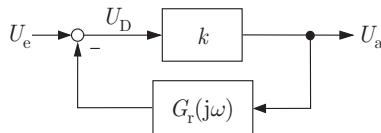
$$G_{\text{OV}}(j\omega) = \frac{U_a(j\omega)}{U_D(j\omega)} = k \rightarrow \infty$$

und einen unendlich großen Eingangswiderstand besitzt, so dass die Differenzspannung zwischen dem positiven und dem negativen Eingang des Operationsverstärkers verschwindet:  $U_D \rightarrow 0$ . Operationsverstärker werden häufig als nicht invertierende Verstärker betrieben und durch komplexe Impedanzen  $Z_1$  und  $Z_2$  beschaltet, die wahlweise durch ohmsche Widerstände, Kapazitäten oder Induktivitäten ersetzt werden können.



**Abb. 6.26:** Operationsverstärker mit Beschaltung

1. Warum kann die Schaltung aus Abb. 6.26 als Rückkopplungsanordnung entsprechend Abb. 6.27 interpretiert werden? Begründen Sie die Existenz der Rückkopplung.



**Abb. 6.27:** Interpretation der Operationsverstärkerschaltung

2. Stellen Sie  $G_r(j\omega)$  in Abhängigkeit von  $Z_1$  und  $Z_2$  dar. Welchen Charakter hat  $G_r(j\omega)$ ?
3. Berechnen Sie den Frequenzgang  $G(j\omega)$  der Schaltung unter der Annahme  $k \rightarrow \infty$ .
4. Wie verändert sich  $G_r(j\omega)$  und  $G(j\omega)$ , wenn für  $Z_1$  und  $Z_2$  ohmsche Widerstände  $R_1$  und  $R_2$  bzw. abwechselnd Kapazitäten  $C_1$  und  $C_2$  eingesetzt werden? □

## 6.6 Beziehungen zwischen den Modellen im Zeitbereich und im Frequenzbereich

Im Folgenden werden Beziehungen zwischen den Beschreibungsformen linearer Systeme im Zeitbereich (Zustandsraummodell, Übergangsfunktion, Gewichtsfunktion) und im Frequenzbereich (Übertragungsfunktion) hergestellt.

Aus Gl. (6.71) ist bereits bekannt, dass die Übertragungsfunktion die Laplace-transformierte der Gewichtsfunktion darstellt:

$$G(s) \bullet\circ g(t). \quad (6.102)$$

Da die Übergangsfunktion entsprechend Gl. (5.125) durch Integration aus der Gewichtsfunktion hervorgeht, erhält man unter Verwendung des Integrationssatzes (6.58) der Laplacetransformation die Beziehung

$$h(t) \circ\bullet \frac{1}{s} G(s).$$

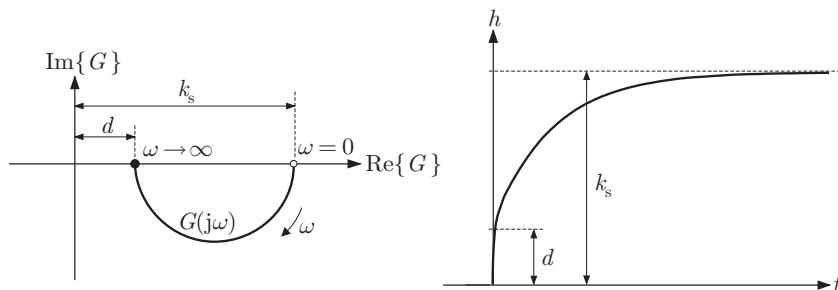
Die statische Verstärkung  $k_s = h(\infty)$  kann man nun mit dem Grenzwertsatz (6.62) ermitteln:

$$k_s = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( s \frac{1}{s} G(s) \right) = G(0).$$

In der grafischen Darstellung entspricht  $k_s$  dem Anfangswert des Frequenzganges bzw. dem Wert, dem sich die Übergangsfunktion stabiler Systeme für große Zeit asymptotisch nähert (Abb. 6.28). Für den Anfangswert  $h(+0)$  der Übergangsfunktion bzw. den Endwert des Frequenzganges gilt nach dem Grenzwertsatz (6.61)

$$h(+0) = \lim_{t \rightarrow +0} h(t) = \lim_{|s| \rightarrow \infty} s \frac{1}{s} G(s) = G(\infty) = \begin{cases} 0 & \text{für } q < n \\ \frac{b_n}{a_n} = d & \text{für } q = n. \end{cases}$$

Für sprungfähige Systeme gilt  $h(+0) \neq 0$ . Die Ortskurve derartiger Systeme endet für große Frequenzen also nicht im Ursprung der komplexen Ebene, sondern auf der reellen Achse im Punkt  $h(+0)$  (Abb. 6.28).



**Abb. 6.28:** Zusammenhang zwischen Frequenzgang  $G(j\omega)$  und Übergangsfunktion  $h(t)$

In Tabelle 6.1 sind wichtige Systemeigenschaften mit ihrem Bezug zu den Zeitbereichs- und Frequenzbereichsmodellen zusammengestellt. Die in der linken Spalte aufgeführten Kenngrößen beschreiben Eigenschaften eines linearen Systems  $\Sigma$ ; in der rechten Spalte steht, worin sich diese Eigenschaften in den entsprechenden Repräsentationsformen von  $\Sigma$  äußern.

**Tabelle 6.1.** Beziehungen zwischen den Modellen im Zeitbereich und im Frequenzbereich

Systemeigenschaft	Zeitbereich	Frequenzbereich
statische Verstärkung	$k_s = d - \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$	$= G(0)$
Anfangswert der Übergangsfunktion	$h(0) = d$	$= \lim_{s \rightarrow \infty} G(s)$
Eigenwerte und Pole		$\lambda_i = s_i$
Nullstellen $s_0$	$\det \begin{pmatrix} s_0 \mathbf{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{b} \\ \mathbf{c}^T & 0 \end{pmatrix} = 0$	$G(s_0) = 0$
relativer Grad $r$	$r = \min_i \{\mathbf{c}^T \mathbf{A}^i \mathbf{b} \neq 0\} + 1$	$= n - q$
Gewichtsfunktion, Übertragungsfunktion (für $d = 0$ )	$g(t) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b}$	$\circ-\bullet \quad G(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}$

**Relativer Grad dynamischer Systeme.** Auf den in Gl. (4.5) für die Differentialgleichung eingeführten relativen Grad  $r = n - q$ , der in der Übertragungsfunktion als Polüberschuss erkennbar ist, wurde bereits an mehreren Stellen hingewiesen. Seine Bedeutung für beide Modellformen wird hier zusammengefasst:

- Der relative Grad  $r$  ist definiert als die Differenz der Grade der höchsten Ableitungen der Ausgangsgröße und der Eingangsgröße in der Differentialgleichung (4.3). Er ist erkennbar als Polüberschuss in der Übertragungsfunktion (Differenz der Polynomordnungen von Zähler und Nenner) oder als Anzahl der Nullen im rechten Teil des Vektors  $\mathbf{c}_R$  der Regelungsnormalform (5.71) des Zustandsraummodells.
- Der relative Grad ist ein Maß für die Verzögerung, die zwischen der Eingangsgröße  $u(t)$  und der Ausgangsgröße  $y(t)$  des Systems liegt, die im Signalflussgraphen des Zustandsraummodells in Regelungsnormalform an der Anzahl der Integratoren erkennbar ist, die das Eingangssignal durchlaufen muss, bevor es einen Einfluss auf das Ausgangssignal hat. Nur für  $r = 0$  hat die Eingangsgröße einen direkten Einfluss auf die Ausgangsgröße (sprungfähige Systeme). Für den Frequenzgang beschreibt der relative Grad die Phasenverschiebung für hohe Frequenzen, wie Gl. (6.127) zeigen wird.

Diese Zusammenstellung weist darauf hin, dass der relative Grad eine wichtige systemdynamische Eigenschaft linearer Systeme beschreibt, die man sowohl am Zustandsraummodell als auch an der Übertragungsfunktion erkennen kann. Es handelt sich also nicht um eine spezielle Eigenschaft eines dieser Modelle.

**Aufgabe 6.20** Sprungfähige Systeme im Zeit- und Frequenzbereich

Berechnen Sie  $h(+0)$  über die Laplacetransformation des Zustandsraummodells (4.45).  $\square$

## 6.7 Eigenschaften wichtiger Übertragungsglieder im Frequenzbereich

Für die im Abschn. 5.6 eingeführten einfachen Übertragungsglieder werden im Folgenden die Übertragungsfunktion und der Frequenzgang angegeben. Dabei kann die früher eingeführte Klassifikation verfeinert werden.

### 6.7.1 Proportionalglieder

**Verzögerungsglied erster Ordnung (PT<sub>1</sub>-Glied).** Für das Verzögerungsglied erster Ordnung erhält man aus dem Zustandsraummodell die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{k_s}{Ts + 1} \quad (6.103)$$

und den Frequenzgang

$$G(j\omega) = \frac{k_s}{j\omega T + 1} = \frac{k_s}{j\frac{\omega}{\omega_e} + 1} \quad (6.104)$$

mit

$$\omega_e = \frac{1}{T}.$$

Der Amplitudengang  $|G(j\omega)|$  und der Phasengang  $\phi(j\omega) = \arg G(j\omega)$  sind durch

$$|G(j\omega)| = |k_s| \frac{1}{\sqrt{\omega^2 T^2 + 1}}$$

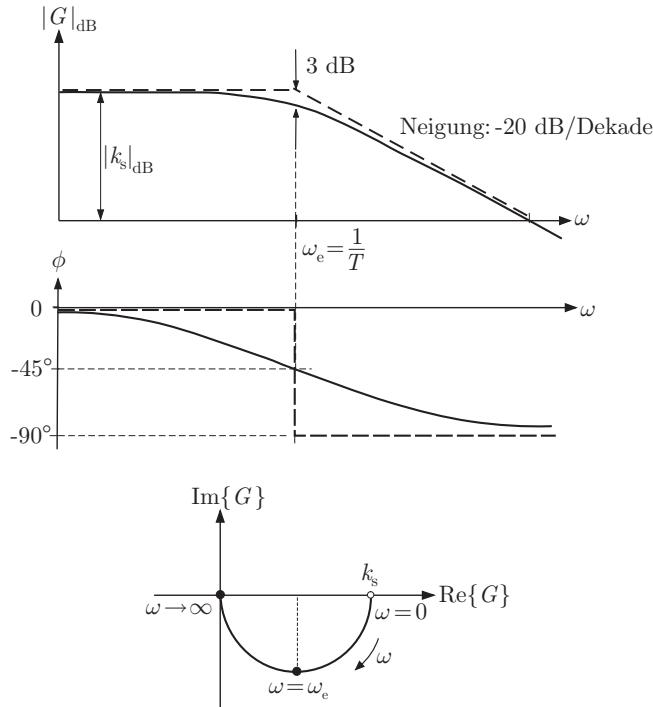
und

$$\phi(j\omega) = \arg G(j\omega) = -\arctan \omega T$$

gegeben. Abbildung 6.29 zeigt ihre grafische Darstellung im Bodediagramm sowie die Ortskurve  $G(j\omega)$ . Im Bodediagramm werden im Folgenden die Achsen stets mit  $|G|$  bzw.  $\phi$  beschriftet, wobei  $\phi$  das Argument von  $G$  bezeichnet.

Für den Amplitudengang gibt es eine einfache Approximation durch zwei Geraden. Umgerechnet in Dezibel erhält man für  $G(j\omega)$

$$\begin{aligned} |G(j\omega)|_{\text{dB}} &= 20 \lg \left( |k_s| \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_e}\right)^2 + 1}} \right) \\ &= 20 \lg |k_s| - 20 \lg \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_e}\right)^2 + 1}. \end{aligned}$$



**Abb. 6.29:** Bodediagramm und Ortskurve eines  $PT_1$ -Gliedes

Für den Phasengang gilt

$$\phi(j\omega) = \arg G(j\omega) = -\arctan \frac{\omega}{\omega_e}.$$

Aus diesen Beziehungen ergeben sich folgende Näherungen. Für  $\omega \ll \omega_e$  ist der Amplitudengang nahezu konstant

$$|G(j\omega)|_{dB} \approx 20 \lg |k_s| = |k_s|_{dB}$$

und die Phase gleich null

$$\phi(j\omega) \approx 0.$$

Für  $\omega \gg \omega_e$  fällt der Amplitudengang linear mit 20 dB/Dekade

$$|G(j\omega)|_{dB} \approx 20 \lg |k_s| - 20 \lg \frac{\omega}{\omega_e},$$

d. h., bei einer Erhöhung der Frequenz  $\omega$  auf das Zehnfache vermindert sich die Amplitude um 20 dB. Für die Phase gilt

$$\phi(j\omega) \approx -90^\circ.$$

Beide Approximationen sind in Abb. 6.29 mit gestrichelten Linien eingetragen. Während die Annäherung des Phasenganges durch eine Treppenkurve in der Umgebung der Frequenz  $\omega_e$  sehr grob ist, ist die Approximation des Amplitudenganges sehr gut. Die beiden Asymptoten schneiden sich bei der Frequenz  $\omega_e$ , die deshalb als *Knickfrequenz* bezeichnet wird. Der exakte Verlauf des Amplitudenganges hat bei  $\omega = \omega_e$  die größte Abweichung von der Geradenapproximation. Diese Abweichung beträgt jedoch nur 3 dB.

Bezogen auf das Zustandsraummodell (5.158) des PT<sub>1</sub>-Gliedes liegt die Knickfrequenz gerade beim Betrag des vor  $x$  stehenden Parameters  $-\frac{1}{T}$ , der bei diesem System erster Ordnung die Systemmatrix  $A$  ersetzt und damit auch den einzigen Eigenwert des PT<sub>1</sub>-Gliedes darstellt.

Die Ortskurve des PT<sub>1</sub>-Frequenzganges ist ein Halbkreis, der für  $\omega = 0$  beim reellen Wert  $k_s$  beginnt und für  $\omega \rightarrow \infty$  im Ursprung der komplexen Ebene endet.

Der Begriff PT<sub>1</sub>-Glied wird i. Allg. für ein *stabiles* System erster Ordnung gebraucht. In der Übertragungsfunktion (6.103) tritt deshalb eine positive Zeitkonstante  $T$  und folglich ein negativer Pol  $s_1 = -\frac{1}{T}$  auf. Dennoch gilt alles daraus abgeleitete auch für instabile Systeme erster Ordnung mit negativem  $T$ . Dabei bleibt der Amplitudengang unverändert, denn  $T$  geht nur quadratisch in  $|G(j\omega)|$  ein. Die Phase erhält ein positives Vorzeichen, wodurch die Ortskurve an der reellen Achse gespiegelt wird (Abb. 6.30).  $k_s$  im Zähler der Übertragungsfunktion hat nicht mehr die Bedeutung der statischen Verstärkung, denn es gilt  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$ .

**Grenzfrequenz und Anstiegszeit.** Eine weitere charakteristische Kenngröße für das Übertragungsverhalten ist die *Grenzfrequenz*  $\omega_{gr}$ . Es ist diejenige Kreisfrequenz, bei der die durch  $|Y(j\omega)|^2$  beschriebene Energie des Ausgangssignales nur noch halb so groß ist wie im statischen Fall. Wegen

$$|Y(j\omega)|^2 = |G(j\omega)|^2 |U(j\omega)|^2$$

gilt für die Grenzfrequenz die Beziehung

$$|G(j\omega_{gr})|^2 = \frac{1}{2}|G(0)|^2 \quad (6.105)$$

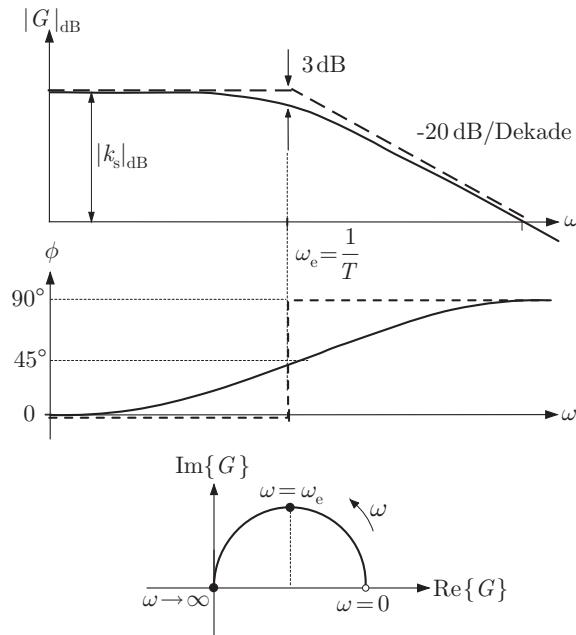
bzw.

$$|G(j\omega_{gr})|_{dB} \approx |G(0)|_{dB} - 3 \text{ dB}.$$

Diese Beziehung ist übrigens dasselbe wie die Aussage, dass die Amplitude bei der Grenzfrequenz auf das  $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ -fache des Anfangswertes  $|G(0)|$  abgefallen ist, eine Formulierung, die vor allem in der Nachrichtentechnik üblich ist. Das Intervall  $\omega = 0 \dots \omega_{gr}$  heißt Bandbreite des Systems. Da ein PT<sub>1</sub>-Glied niedrige Frequenzen gut überträgt und hohe schlecht, wird es auch als *Tiefpass* bezeichnet. Unter Nutzung der Grenzfrequenz kann der Frequenzgang (6.104) des PT<sub>1</sub>-Gliedes auch in der Form

$$G(j\omega) = \frac{k_s}{j\frac{\omega}{\omega_{gr}} + 1}. \quad (6.106)$$

geschrieben werden.



**Abb. 6.30:** Bodediagramm und Ortskurve eines instabilen Systems erster Ordnung

Für das  $PT_1$ -Glied erhält man die Bezeichnung

$$\omega_{\text{gr}} = \frac{1}{T} = w_e,$$

derzufolge die Grenzfrequenz mit der Knickfrequenz übereinstimmt. Dies kann *nicht* aus der Geradenapproximation des Amplitudenganges abgelesen werden, denn diese liegt bei der Knickfrequenz noch bei  $|G(0)|$ . Der tatsächliche Amplitudengang ist bei dieser Frequenz um 3 dB kleiner, was gerade die Bedingung (6.105) erfüllt.

Eine andere Charakterisierung der Zeitkonstante  $T$  ist aus Gl. (5.186) auf S. 213 bekannt.  $T$  beschreibt diejenige Zeit  $t_{63\%}$ , in der die Übergangsfunktion auf 63% des statischen Endwertes angestiegen ist ( $t_{63\%} = T$ ). Daraus folgt, dass das Produkt dieser Anstiegszeit und der Grenzfrequenz  $\omega_{\text{gr}}$  gerade eins ergibt:

$$\omega_{\text{gr}} t_{63\%} = 1$$

(Zeit-Bandbreiten-Produkt). Diese Beziehung gilt unabhängig von den Parametern  $T$  und  $k_s$  für alle  $PT_1$ -Glieder. Sie besagt, dass  $PT_1$ -Glieder mit langsam ansteigender Übergangsfunktion eine niedrige Grenzfrequenz und folglich eine geringe Bandbreite besitzen. Liegt andererseits der Pol in der linken komplexen Halbebene sehr weit links, so besitzt das System eine große Bandbreite.

**Verzögerungsglied zweiter Ordnung (PT<sub>2</sub>-Glied).** Das Verzögerungsglied zweiter Ordnung (5.160) hat die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{k_s}{T^2 s^2 + 2dT s + 1} \quad (6.107)$$

und den Frequenzgang

$$G(j\omega) = \frac{k_s}{-T^2 \omega^2 + j2dT\omega + 1}. \quad (6.108)$$

Wird an Stelle der Zeitkonstante  $T$  mit der *Eigenfrequenz*  $\omega_0 = \frac{1}{T}$  gearbeitet, so erhält man die Beziehung

$$G(s) = \frac{k_s}{\frac{1}{\omega_0^2} s^2 + \frac{2d}{\omega_0} s + 1}. \quad (6.109)$$

Das PT<sub>2</sub>-Glied weist in Abhängigkeit von der Dämpfung  $d$  unterschiedliches Verhalten auf. Das wird aus der Übergangsfunktion offensichtlich, die aus

$$h(t) \circ-\bullet \frac{1}{s} G(s)$$

berechnet werden kann. Um die Partialbruchzerlegung für  $\frac{1}{s} G(s)$  ausführen zu können, müssen die Pole von  $\frac{1}{s} G(s)$  bestimmt werden, die sich aus dem Pol  $s_3 = 0$  der Eingangsgröße  $\frac{1}{s}$  und den beiden Polen  $s_{1/2}$  des PT<sub>2</sub>-Gliedes zusammensetzen. Die charakteristische Gleichung des PT<sub>2</sub>-Gliedes lautet

$$\frac{1}{\omega_0^2} s^2 + \frac{2d}{\omega_0} s + 1 = 0,$$

woraus man die Pole

$$s_{1/2} = -\omega_0 d \pm \omega_0 \sqrt{d^2 - 1}$$

erhält. Entsprechend der Größe von  $d$  sind sieben Fälle zu unterscheiden (Abb. 6.31):

- Für  $d > 1$  ergeben sich zwei negative reelle Pole

$$s_1 = -\omega_0 d + \omega_0 \sqrt{d^2 - 1}, \quad s_2 = -\omega_0 d - \omega_0 \sqrt{d^2 - 1}.$$

Nach Einführung der Zeitkonstanten  $T_1 = -\frac{1}{s_1}$  und  $T_2 = -\frac{1}{s_2}$  erhält man die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{k_s}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, \quad (6.110)$$

die als Reihenschaltung zweier PT<sub>1</sub>-Glieder mit unterschiedlichen Zeitkonstanten gedeutet werden kann. Diese Reihenschaltung hat die Übergangsfunktion

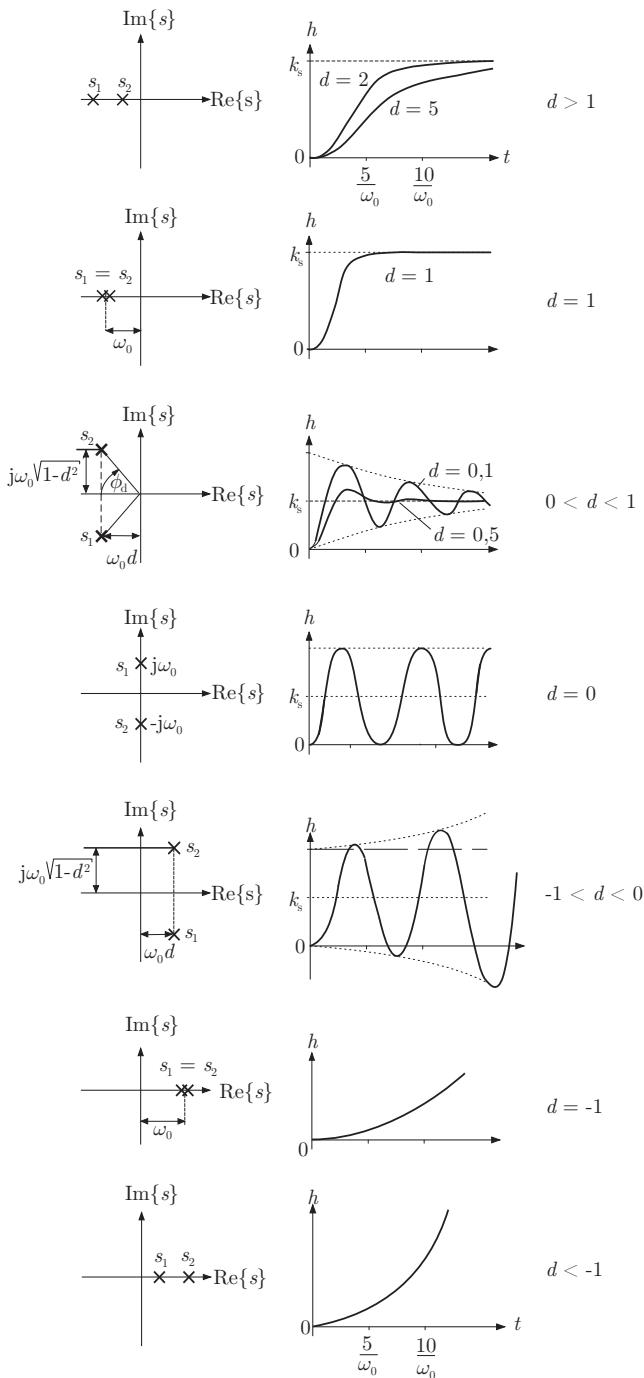
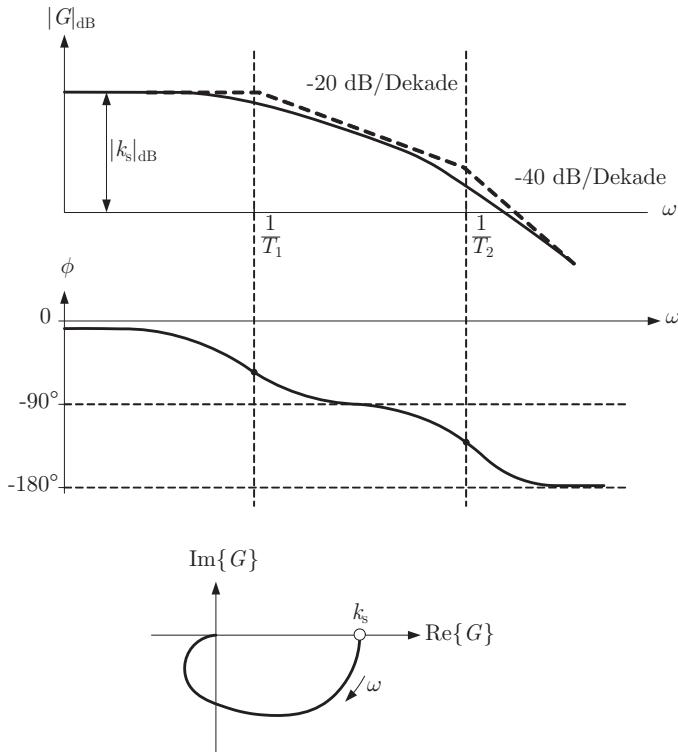


Abb. 6.31: Pole und Übergangsfunktion von  $PT_2$ -Gliedern

Abb. 6.32: Bodediagramm und Ortskurve des  $PT_2$ -Gliedes (6.110)

$$h(t) = k_s \left( 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right). \quad (6.111)$$

In Abb. 6.31 ist ersichtlich, dass die Übergangsfunktion in Richtung der Zeitachse beginnt ( $\dot{h}(0) = 0$ ). Je größer die Dämpfung  $d$  ist, umso langsamer erreicht  $h(t)$  den statischen Endwert 1.

Im Bodediagramm (Abb. 6.32) treten jetzt zwei Knickfrequenzen auf, wobei für steigende Frequenz der Amplitudengang nach der ersten Knickfrequenz um 20 dB/Dekade fällt und nach der zweiten Knickfrequenz um 40 dB/Dekade. Die Phasenverschiebung erhöht sich auf  $-180^\circ$ . Dazu gehört eine Ortskurve, die bei  $|k_s|_{dB}$  beginnt und von der negativen reellen Achse aus den Nullpunkt erreicht.

- Für  $d = 1$  tritt ein zweifacher Pol

$$s_{1,2} = -\omega_0$$

auf. Setzt man  $T = \frac{1}{\omega_0}$ , so erhält man für die Übertragungsfunktion (6.107) die Darstellung

$$G(s) = \frac{k_s}{(Ts+1)(Ts+1)},$$

die als Reihenschaltung zweier PT<sub>1</sub>-Glieder mit derselben Zeitkonstanten  $T$  interpretiert werden kann. Die Rücktransformation von  $\frac{1}{s}G(s)$  ergibt die Übergangsfunktion

$$h(t) = k_s (1 - e^{-\omega_0 t} (1 + \omega_0 t)). \quad (6.112)$$

Die grafische Darstellung in Abb. 6.31 zeigt, dass die Übergangsfunktion zunächst in Richtung der Zeitachse beginnt ( $h(0) = 0$ ) und dann aperiodisch den Endwert 1 erreicht.

- Für  $0 < d < 1$  erhält man ein konjugiert komplexes Polpaar

$$s_{1/2} = -\omega_0 d \pm j\omega_0 \sqrt{1 - d^2} \quad (6.113)$$

mit negativem Realteil  $-\omega_0 d$ . Die Übergangsfunktion

$$h(t) = k_s \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - d^2}} e^{-d\omega_0 t} \sin(\omega_0 \sqrt{1 - d^2} t + \arccos d) \right) \quad (6.114)$$

ist im Wesentlichen eine Sinusfunktion, für deren Kreisfrequenz die Beziehung  $\omega_0 \sqrt{1 - d^2} < \omega_0$  gilt. Die Schwingung klingt aufgrund der e-Funktion mit negativem Exponenten ab, so dass das System schließlich den statischen Endwert  $k_s$  erreicht.

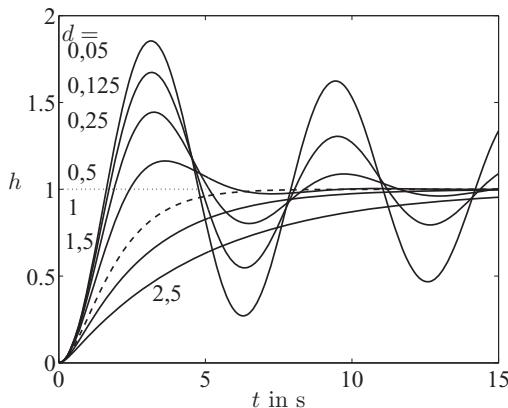
Die relative Dämpfung der Schwingungen, die die Abnahme der Amplitude von einer zur nächsten Periode beschreibt, ist vom Quotienten

$$\rho = \left| \frac{\text{Re}\{s_i\}}{\text{Im}\{s_i\}} \right| = \frac{d}{\sqrt{1 - d^2}} = \cot \phi_d \quad (6.115)$$

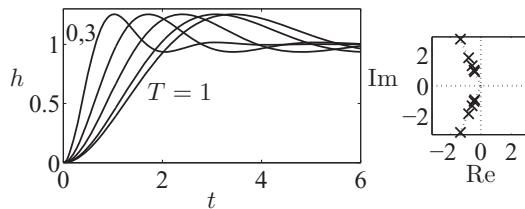
abhängig. Der Winkel  $\phi_d$  kann im PN-Bild abgelesen werden (Abb. 6.31).

Die Pole  $s_{1/2}$  für PT<sub>2</sub>-Glieder mit derselben Dämpfung  $d$ , aber unterschiedlicher Zeitkonstante  $T$  liegen auf Geraden mit dem Winkel  $\phi_d$  zur negativen reellen Achse.

Je größer die Dämpfung  $d$  ist, umso näher liegen die Eigenwerte an der reellen Achse und umso schneller klingt das Übergangsverhalten ab. Abbildung 6.33 zeigt die Übergangsfunktionen des PT<sub>2</sub>-Gliedes für unterschiedliche Dämpfungen. Für den Bereich  $0 < d < 0,5$  ist der Ausdruck  $\sqrt{1 - d^2}$  in Gl. (6.114) näherungsweise gleich eins, so dass das System mit einer Frequenz nahe  $\omega_0 = \frac{1}{T}$  schwingt. Für große Dämpfung (etwa  $d > 0,5$ ) führt das System keine eigentliche Schwingung mehr aus, sondern schwingt nur noch einmal über den statischen Endwert hinaus. Die anderen Anteile der Sinusfunktion in Gl. (6.114) treten aufgrund des Dämpfungsfaktors  $e^{-d\omega_0 t}$  nicht mehr in Erscheinung.



**Abb. 6.33:** Übergangsfunktionen von Schwingungsgliedern mit unterschiedlicher Dämpfung und derselben Zeitkonstante  $T = 1$  und statischen Verstärkung  $k_s = 1$

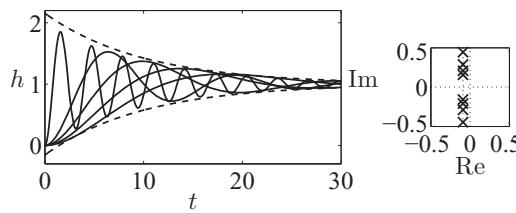


**Abb. 6.34:** Übergangsfunktion von  $PT_2$ -Gliedern mit derselben Dämpfung  $d = 0,4$  und unterschiedlichen Zeitkonstanten  $T = 0,3, 0,5, 0,7, 0,9$  und  $1$

Die Zeitkonstante  $T$  beeinflusst die Zeitskala, streckt oder staucht also die Zeitachse, hat aber keinen Einfluss auf den prinzipiellen Verlauf von  $y(t)$ , wie Abb. 6.34 anhand der Übergangsfunktion von  $PT_2$ -Gliedern mit derselben Dämpfung, aber unterschiedlichen Zeitkonstanten zeigt.

$PT_2$ -Glieder mit demselben Exponenten der e-Funktion  $e^{-d\omega_0 t}$  schwingen in derselben Zeit in ihren statischen Endwert ein. Es sind dies  $PT_2$ -Glieder, deren Pole auf einer Parallelen zur Imaginärachse mit dem Abstand  $-d\omega_0$  liegen (Abb. 6.35). Das exponentielle Einschwingen in den statischen Endwert kann man durch zwei Schranken beschreiben, die man aus Gl. (6.114) erhält:

$$k_s \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1-d^2}} e^{-d\omega_0 t} \right) \leq h(t) \leq k_s \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{1-d^2}} e^{-d\omega_0 t} \right)$$



**Abb. 6.35:** Übergangsfunktion von  $\text{PT}_2$ -Gliedern mit Polen  $\text{Re}\{s_i\} = -0,1$

Diese Schranke ist für das  $\text{PT}_2$ -Glied mit der größten verwendeten Dämpfung im unteren Teil von Abb. 6.35 durch die gestrichelten Linien eingetragen.

- Für  $d = 0$  ist das System ungedämpft und hat die Pole

$$s_{1/2} = \pm j\omega_0,$$

die Übertragungsfunktion

$$G(s) = k_s \frac{\omega_0^2}{s^2 + \omega_0^2}$$

und die Übergangsfunktion

$$h(t) = k_s (1 - \cos \omega_0 t).$$

Das System schwingt mit gleichbleibender Amplitude mit der Frequenz  $\omega_0$  um den Mittelwert  $k_s$ . Dies zeigt, dass  $\omega_0 = \frac{1}{T}$  die Frequenz des ungedämpften  $\text{PT}_2$ -Gliedes ist. Für sie wurde deshalb bereits die Bezeichnung „Eigenfrequenz“ des  $\text{PT}_2$ -Gliedes eingeführt.

- Für  $-1 < d < 0$  ist das System instabil mit den konjugiert komplexen Polen

$$s_{1/2} = |d|\omega_0 \pm j\omega_0 \sqrt{1 - d^2}.$$

Als Übergangsfunktion erhält man die bereits für  $0 < d < 1$  berechnete Funktion (6.114), nur dass der Exponent der e-Funktion jetzt positiv ist und die Sinusschwingung folglich aufklingt.

- Für  $d = -1$  erhält man den positiven Doppelpol

$$s_{1/2} = \omega_0.$$

Die Übergangsfunktion ist ähnlich wie in Gl. (6.112) zusammengesetzt,

$$h(t) = k_s (1 - e^{\omega_0 t} (1 - \omega_0 t)),$$

nur dass die e-Funktion jetzt aufklingt.

- Für  $d < -1$  besitzt das System die instabilen reellen Pole

$$s_{1/2} = |d|\omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{d^2 - 1}.$$

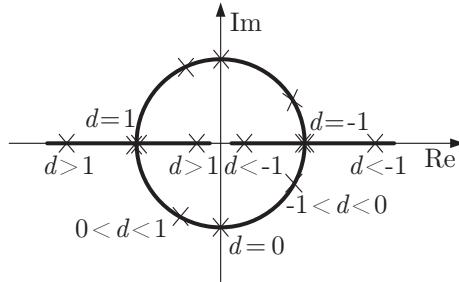
Für die Übergangsfunktion erhält man wieder Gl. (6.111), jetzt allerdings mit negativen Zeitkonstanten  $T_1$  und  $T_2$ . Die Übergangsfunktion klingt auf, wobei für das Verhalten bei großen Zeiten  $t$  die betragsmäßig kleinere Zeitkonstante und folglich der größere Pol  $|d|\omega_0 + \omega_0 \sqrt{d^2 - 1}$  maßgebend ist.

**Tabelle 6.2.** Verhalten von  $\text{PT}_2$ -Gliedern

Dämpfung	Systemeigenschaft	Pole
$d > 1$	überkritisch gedämpft	negative reelle Pole
$d = 1$	kritisch gedämpft	negativer reeller Doppelpol
$\frac{1}{\sqrt{2}} < d < 1$	gedämpft ohne Resonanzüberhöhung	konjugiert komplexe Pole mit negativen Realteilen
$0 < d \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$	gedämpft mit Resonanzüberhöhung	konjugiert komplexe Pole mit negativen Realteilen
$d = 0$	ungedämpft	konjugiert komplexe Pole mit verschwindenden Realteilen
$-1 < d < 0$	instabil	konjugiert komplexe Pole mit positiven Realteilen
$d = -1$	instabil	positiver reeller Doppelpol
$d < -1$	instabil	positive reelle Pole

Die Betrachtungen sind in Tabelle 6.2 zusammengefasst. Die Tabelle zeigt, dass das qualitative Verhalten sich nur in Abhängigkeit von der Dämpfung  $d$  verändert.

Abbildung 6.36 zeigt, wie sich die Pole bei einer Veränderung der Dämpfung  $d$  und unveränderter Zeitkonstante  $T$  in der komplexen Ebene verschieben. Bei  $d = 1$  und  $d = -1$  hat das PT<sub>2</sub>-Glied einen zweifachen Pol bei  $+1$  bzw.  $-1$ . Für betragmäßig kleinere Dämpfung liegen die Pole auf dem Einheitskreis, für betragmäßig größere Dämpfung auf der reellen Achse, wobei für  $|d| \rightarrow \infty$  ein Pol zum Ursprung der komplexen Ebene wandert und der Betrag des anderen unendlich groß wird.



**Abb. 6.36:** Lage der beiden Pole von PT<sub>2</sub>-Gliedern mit  $T = 1$  in Abhängigkeit vom Dämpfungsfaktor  $d$

Für das Intervall  $-1 < d < 1$  sind die Pole konjugiert komplex und können in der Form

$$s_{1/2} = -\delta_e \pm j\omega_e \quad (6.116)$$

mit

$$\delta_e = \omega_0 d \quad \text{und} \quad \omega_e = \omega_0 \sqrt{1 - d^2}$$

geschrieben werden. Bei einer Veränderung von  $d$  bewegen sich diese Pole auf einem Kreis, denn es gilt

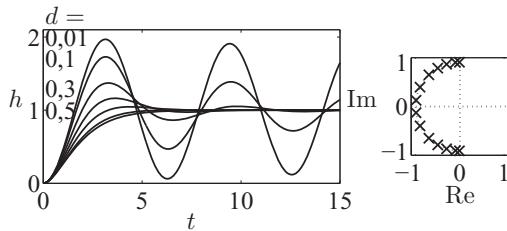
$$\delta_e^2 + \omega_e^2 = \omega_0^2 d^2 + \omega_0^2 (1 - d^2) = \omega_0^2,$$

wobei der Radius des Kreises durch die Eigenfrequenz  $\omega_0$  des PT<sub>2</sub>-Gliedes bestimmt wird.

Abbildung 6.37 zeigt die Übergangsfunktionen von PT<sub>2</sub>-Gliedern mit derselben Eigenfrequenz  $\omega_0 = 1$ , aber unterschiedlicher Dämpfung. Diese Systeme schwingen mit derselben Frequenz, erreichen den statischen Endwert  $k_s = 1$  aber unterschiedlich schnell. Je größer die Dämpfung ist, desto weniger schwingt der Ausgang des PT<sub>2</sub>-Gliedes um seinen statischen Endwert.

Der logarithmische Amplitudengang des PT<sub>2</sub>-Gliedes kann für große bzw. kleine Frequenzen ähnlich wie beim PT<sub>1</sub>-Glied durch Geraden approximiert werden. Es gilt

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \lg |k_s| - 20 \lg \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2d \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2},$$



**Abb. 6.37:** Übergangsfunktionen von  $\text{PT}_2$ -Gliedern mit unterschiedlicher Dämpfung  $d$  und derselben Eigenfrequenz  $\omega_0 = 1$

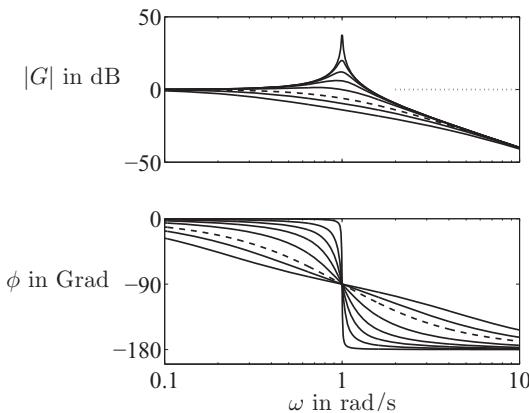
woraus für  $\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1$

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} \approx 20 \lg |k_s|$$

und für  $\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} \approx 20 \lg |k_s| - 20 \lg \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 = 20 \lg |k_s| - 40 \lg \frac{\omega}{\omega_0}$$

folgt. Die zweite Asymptote stellt im Bodediagramm eine Gerade mit der Steigung  $-40 \text{ dB/Dekade}$  dar. Der Schnittpunkt beider Asymptoten liegt bei der Kreisfrequenz  $\omega = \omega_0 = \frac{1}{T}$ .



**Abb. 6.38:** Bodediagramm von  $\text{PT}_2$ -Gliedern mit  $k_s = 1$ ,  $T = 1$  und  $0 < d < 1$

Die Approximationsgenauigkeit in der Umgebung von  $\omega_0$  ist allerdings von der Dämpfung abhängig (Abb. 6.38). Für große Dämpfung, z. B.  $d = 2,5$ , geht der Amplitudengang „glatt“ von einer Geraden in die andere über. Je kleiner die Dämpfung ist, umso größer wird der Amplitudengang in der Nähe von  $\omega_0 = 1$ . Als Orientierung dient die gestrichelte Kurve, die für die Dämpfung  $d = 1$  gilt.

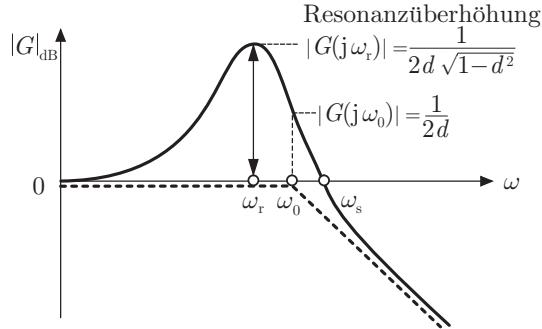


Abb. 6.39: Resonanzüberhöhung beim PT<sub>2</sub>-Glied für  $0 < d < \frac{1}{\sqrt{2}}$

Aus der Analyse der Übergangsfunktion wurde offenkundig, dass für  $0 < d < 1$  das PT<sub>2</sub>-Glied eine gedämpfte Schwingung ausführt, die umso langsamer abklingt, je kleiner  $d$  ist. Dies macht sich im Amplitudengang durch eine Spalte (Resonanzüberhöhung) bemerkbar, die umso höher ist, je kleiner  $d$  ist (Abb. 6.39).

Eine genaue Betrachtung der Amplitudengänge für  $|k_s| = 1$  zeigt, dass das Maximum von  $|G(j\omega)|$  für  $d < \frac{1}{\sqrt{2}}$  bei der als Resonanzfrequenz bezeichneten Kreisfrequenz

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2d^2}$$

auftritt und die Größe

$$|G(j\omega_r)| = \frac{1}{2d\sqrt{1 - d^2}} \quad \left( 0 < d < \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad (6.117)$$

hat. Den prinzipiellen Verlauf der zugehörigen Ortskurve zeigt Abb. 6.40. Im linken Abbildungsteil ist die Ortskurve für ein stark gedämpftes PT<sub>2</sub>-Glied dargestellt ( $d > \frac{1}{\sqrt{2}}$ ), für das  $|G(j\omega)|_{\max} = |G(0)|$  gilt, während der rechte Abbildungsteil die Ortskurve für ein schwingendes System zeigt. Die Resonanzüberhöhung  $|G|_{\max}$  wird bei  $\omega = \omega_r$  erreicht. Abbildung 6.41 zeigt die Ortskurven für ein System mit  $k_s = 1$ ,  $T = 1$  und unterschiedlicher Dämpfung  $d$ .

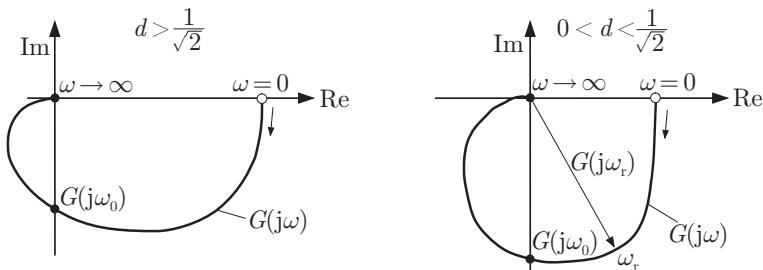
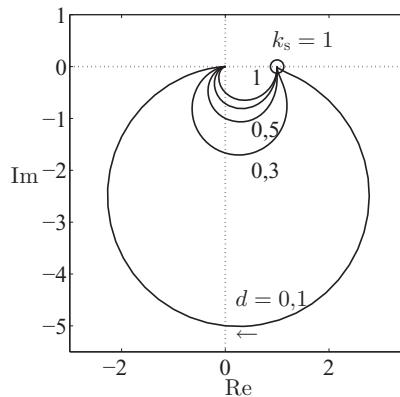


Abb. 6.40: Prinzipieller Verlauf der Ortskurve von PT<sub>2</sub>-Gliedern



**Abb. 6.41:** Ortskurven von  $\text{PT}_2$ -Gliedern mit  $k_s = 1$ ,  $T = 1$  und  $d = 0,1, 0,3, 0,5, 0,7$  und  $1$

$\omega_0$  ist die Frequenz, bei der die Phase gleich  $-90^\circ$  ist und die Ortskurve folglich vom vierten in den dritten Quadranten der komplexen Ebene übergeht. Für diese Frequenz gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned}|G(j\omega_0)| &= \frac{1}{2d}, \\ |G(j\omega_0)|_{\text{dB}} &= -20 \log 2d,\end{aligned}$$

die man sich für eine näherungsweise Konstruktion des Bodediagramms besser merken kann als die oben angegebene für  $G(j\omega_r)$ . Da für  $|d| < \frac{1}{\sqrt{2}}$  die Beziehung  $\omega_r < \omega_0$  gilt, liegt das Betragsmaximum der Ortskurve stets im vierten Quadranten.

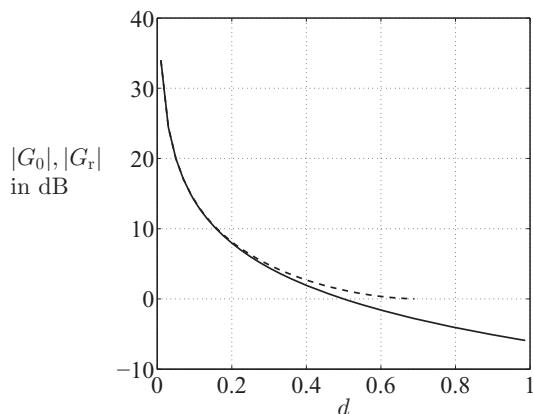
Um sich ein Bild von der Größe der Resonanzüberhöhung machen zu können, sind in Abb. 6.42 die Amplituden  $|G(j\omega_0)|$  und  $|G(j\omega_r)|$  in Abhängigkeit von der Dämpfung  $d$  aufgetragen. Beide Größen sind für  $d < 0,6$  fast gleich groß, die Frequenzen  $\omega_r$  und  $\omega_0$  also näherungsweise gleich. Einen erheblichen Betrag erreicht die Resonanzüberhöhung nur dann, wenn die Dämpfung  $d$  kleiner als 0,2 ist.

Für  $d > 0,5$  ist  $|G(j\omega_0)|_{\text{dB}}$  kleiner als null und für  $d > \frac{1}{\sqrt{2}}$  tritt keine Resonanzüberhöhung auf. Dafür gilt

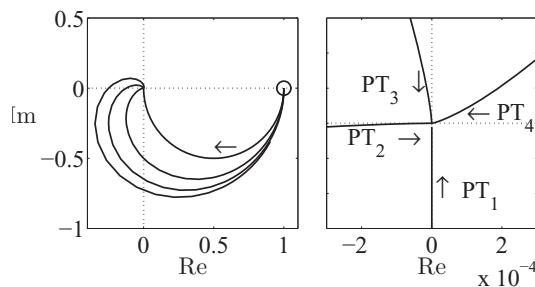
$$|G(j\omega)|_{\text{max}} = |G(0)| = |k_s|.$$

**PT<sub>n</sub>-Glieder.** Für  $\text{PT}_n$ -Glieder, die aus einer Reihenschaltung von  $n$   $\text{PT}_1$ -Gliedern bestehen, ändert sich der Verlauf des Bodediagramms und der Ortskurve in Abhängigkeit von der Anzahl  $n$  folgendermaßen:

- Der Amplitudengang beginnt für kleine Frequenzen bei  $|k_s|_{\text{dB}}$  und fällt mit steigender Frequenz nach jeder Knickfrequenz um 20 dB/Dekade, 40 dB/Dekade,



**Abb. 6.42:** Abhängigkeit von  $|G(j\omega_r)|$  — und  $|G(j\omega_0)|$  — von der Dämpfung  $d$  (bei  $|k_s| = 1$ )



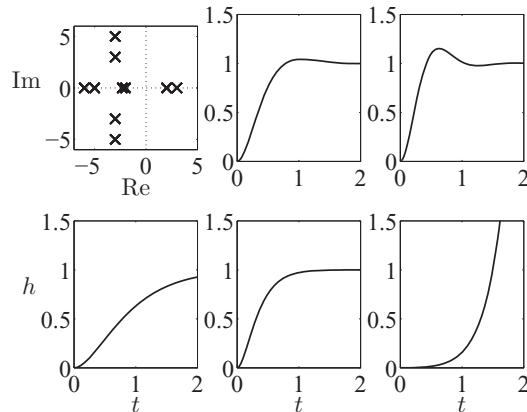
**Abb. 6.43:** Ortskurve von  $PT_n$ -Gliedern (Gesamtbild links und Ausschnitt um den Nullpunkt rechts)

60 dB/Dekade usw. ab.

- Die Phase fällt von  $0^\circ$  auf  $-n \cdot 90^\circ$ .
- Die Ortskurve beginnt bei der statischen Verstärkung  $k_s$  und mündet bei einer Phasenverschiebung von  $-n \cdot 90^\circ$ , d. h. von der negativen Imaginärachse, von der negativen reellen Achse, von der positiven Imaginärachse usw. kommend in den Ursprung der komplexen Ebene (Abb. 6.43).

**Aufgabe 6.21\*** Verhalten von  $PT_2$ -Gliedern

Abbildung 6.44 zeigt das PN-Bild sowie fünf Übergangsfunktionen von  $PT_2$ -Gliedern. Welche Polpaare gehören zu welcher Übergangsfunktion?  $\square$

Abb. 6.44: PN-Bild und Übergangsfunktionen von  $PT_2$ -Gliedern

## 6.7.2 Integrierglieder

Das reine I-Glied nach Gl. (5.164) hat die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{T_I s} \quad (6.118)$$

Die Ortskurve des Frequenzganges  $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega T_I}$  liegt auf der negativen Imaginärachse. Der Amplitudengang ist eine Gerade

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = -20 \lg T_I - 20 \lg \omega$$

mit Neigung  $-20 \text{ dB/Dekade}$ , die die Frequenzachse bei  $\omega = \frac{1}{T_I}$  schneidet. Die Phase liegt konstant bei  $-90^\circ$ .

Für das  $IT_1$ -Glied erhält man aus der Differentialgleichung (5.166) die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{T_I s (T s + 1)}. \quad (6.119)$$

Ortskurve und Frequenzkennliniendiagramm sind in Abb. 6.45 dargestellt, wobei wiederum vorausgesetzt wird, dass  $T$  und  $T_I$  positiv sind. Für kleine Frequenzen  $\omega$  verläuft die Ortskurve näherungsweise auf einer Parallelen zur Imaginärachse durch den Punkt  $-\frac{T}{T_I}$ , was man sich anhand der Zerlegung

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{1}{j\omega T_I (j\omega T + 1)} \\ &= \frac{-j(-j\omega T + 1)}{\omega T_I (\omega^2 T^2 + 1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-\omega T - j}{\omega T_I(\omega^2 T^2 + 1)} \\
 &= -\frac{T}{T_I} \frac{1}{\omega^2 T^2 + 1} - j \frac{1}{\omega T_I(\omega^2 T^2 + 1)}
 \end{aligned}$$

und den Grenzübergang

$$\begin{aligned}
 \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re}\{G(j\omega)\} &= -\frac{T}{T_I} \\
 \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Im}\{G(j\omega)\} &= -\infty
 \end{aligned}$$

überlegen kann.

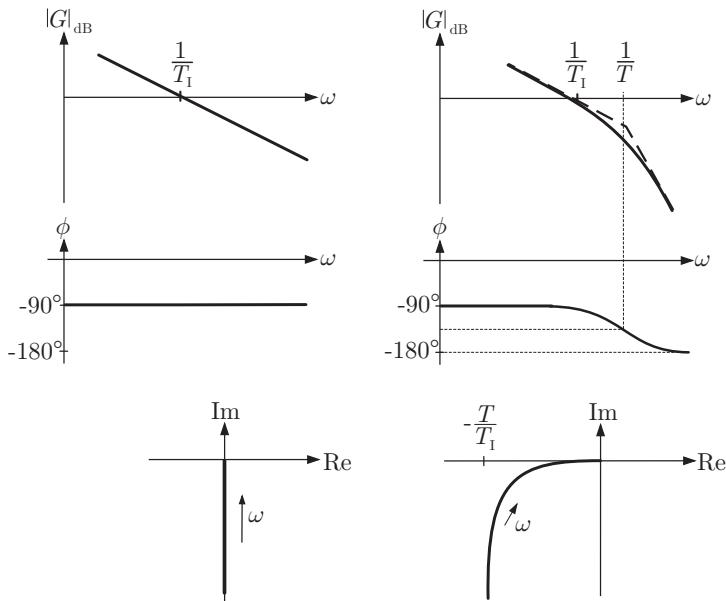


Abb. 6.45: Ortskurve und Bodediagramm eines I- und eines  $IT_1$ -Gliedes

### 6.7.3 Differenzierglieder

Das D-Glied hat die Übertragungsfunktion

$$G(s) = sT_D. \quad (6.120)$$

Die Ortskurve ihres Frequenzganges liegt auf der positiven imaginären Achse der komplexen Zahlenebene. Der Amplitudengang

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \lg T_D \omega = 20 \lg T_D + 20 \lg \omega$$

stellt im Bodediagramm eine Gerade mit der Neigung +20 dB/Dekade und dem Schnittpunkt mit der Abszisse bei  $\omega = \frac{1}{T_D}$  dar. Das D-Glied hat eine konstante Phase von  $+90^\circ$ .

Für das DT<sub>1</sub>-Glied erhält man aus der Differentialgleichung (5.168) die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{T_D s}{Ts + 1}. \quad (6.121)$$

Der Frequenzgang dieses Systems ist in Abb. 6.46 dargestellt. Das System überträgt Signale hoher Frequenzen besser als Signale mit niedriger Frequenz. Es ist deshalb ein Hochpass. Mit einer ähnlichen Definition wie beim PT<sub>1</sub>-Glied erhält man

$$\omega_{\text{gr}} = \frac{1}{T}$$

als Grenzfrequenz und  $\omega_{\text{gr}} \dots \infty$  als Bandbreite.

### 6.7.4 Übertragungsglieder mit Nullstellen

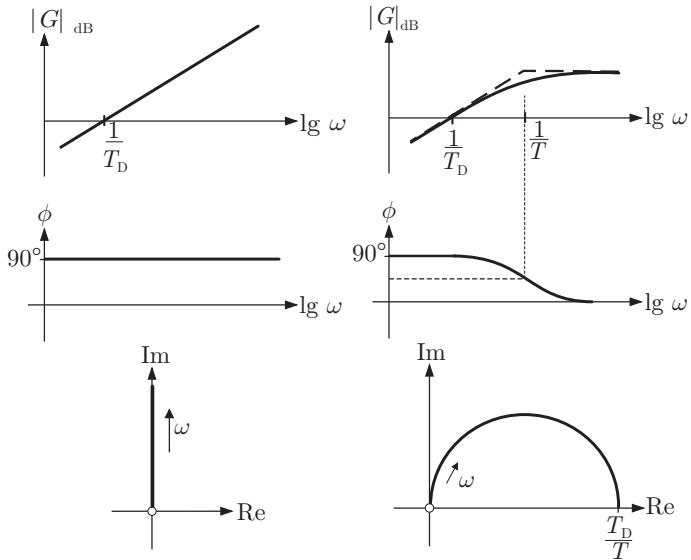
Bei den bisher behandelten Übertragungsgliedern traten keine Nullstellen auf. Es soll deshalb im Folgenden erläutert werden, wie sich das Übertragungsverhalten durch Nullstellen ändert.

Da nur die Pole der Übertragungsfunktion (bzw. die Eigenwerte der Systemmatrix  $\mathbf{A}$ ) im Exponenten der e-Funktionen in der freien Bewegung und im Übergangsverhalten auftreten, können Nullstellen die Geschwindigkeit der Bewegung eines Systems nicht beeinflussen. Sie haben insbesondere auch keinen Einfluss auf die Stabilität des Systems, denn die Frage, ob alle e-Funktionen abklingen, also stabile Funktionen darstellen oder nicht, wird nur durch die Pole bestimmt.

Die Nullstellen haben jedoch einen entscheidenden Einfluss auf die Amplitude, mit der die Eigenvorgänge in die Ausgangsgröße eingehen. In der kanonischen Darstellung der Gewichtsfunktion beeinflussen sie die Koeffizienten  $g_i$  (vgl. Gl. (5.121) auf S. 173).

Dieser Sachverhalt soll an zwei einfachen Übertragungsgliedern verdeutlicht werden. Als erstes wird das PT<sub>2</sub>-Glied ohne Nullstelle

$$G(s) = \frac{3}{(s+1)(s+3)} = \frac{\frac{3}{2}}{s+1} + \frac{\frac{-3}{2}}{s+3}$$



**Abb. 6.46:** Ortskurve und Bodediagramm eines D- und eines  $DT_1$ -Gliedes

mit einem System zweiter Ordnung verglichen, das eine Nullstelle bei  $s_0$  und dieselbe statische Verstärkung hat:

$$\begin{aligned} G(s, s_0) &= \frac{-3}{s_0} \frac{s - s_0}{(s + 1)(s + 3)} \\ &= \frac{3}{(s + 1)(s + 3)} - s \frac{1}{s_0} \frac{3}{(s + 1)(s + 3)} \\ &= \frac{3(1+s_0)}{2s_0} + \frac{-3(3+s_0)}{s+3} \end{aligned}$$

Die zweite Darstellung von  $G(s, s_0)$  zeigt, dass sich das Übertragungsglied mit Nullstelle aus dem ohne Nullstelle und einem parallel geschalteten Übertragungsglied zusammensetzt, dessen Ausgangsgröße die Ableitung der Ausgangsgröße des ersten Übertragungsgliedes darstellt. Die Nullstelle beschleunigt deshalb das Übergangsverhalten. Da  $s_0$  in den Nenner des zweiten Summanden eingeht, ist die Veränderung des Verhaltens umso größer, je kleiner die Nullstelle ist.

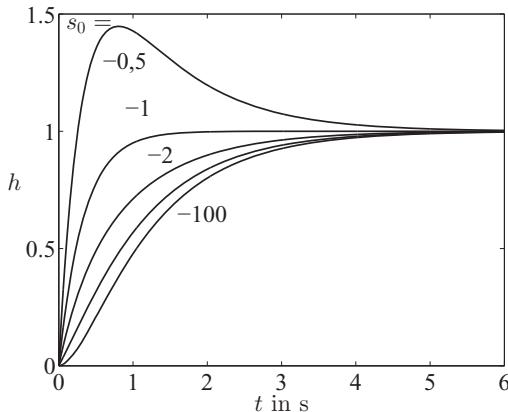
Aus der dritten Zeile können zwei Spezialfälle abgelesen werden. Für  $s_0 = -3$  und  $s_0 = -1$  kürzt sich der Linearfaktor einer Nullstelle gegen den eines Pols, so dass das System zum  $PT_1$ -Glied degeneriert, z. B.

$$G(s, -3) = \frac{1}{s + 1}.$$

Für große Werte für  $s_0$  geht die zweite Übertragungsfunktion in die erste über

$$\lim_{s_0 \rightarrow \infty} G(s, s_0) = G(s).$$

Das Verhalten des zweiten Übertragungsgliedes ist dann überhaupt nicht von der Nullstelle abhängig.



**Abb. 6.47:** Übergangsfunktion des Systems  $G(s, s_0) = -\frac{3}{s_0} \frac{s-s_0}{(s+1)(s+3)}$  für unterschiedliche Werte von  $s_0$

Um diesen Sachverhalt zu verdeutlichen, ist in Abb. 6.47 die Übergangsfunktion des Systems für unterschiedliche Werte der Nullstelle aufgetragen. Für sehr große Werte der Nullstelle erhält man das Verhalten des Übertragungsgliedes ohne Nullstelle. Liegt die Nullstelle im PN-Bild in der Nähe der Imaginärachse, so verändert sie das Übergangsverhalten sehr stark. Für  $s_0 = -0,5$  beispielsweise ist ein sehr großes Überschwingen zu erkennen.

Eine ähnliche Abhängigkeit des Übergangsverhaltens von der Nullstelle erhält man für schwingungsfähige Systeme.

### 6.7.5 Übertragungsglieder mit gebrochen rationaler Übertragungsfunktion

Alle hier betrachteten Systeme haben eine gebrochen rationale Übertragungsfunktion, deren Frequenzgang in PN-Form oder Zeitkonstantenform

$$G(j\omega) = k \frac{\prod_{i=1}^q (j\omega - s_{0i})}{\prod_{i=1}^n (j\omega - s_i)} = k_s \frac{\prod_{i=1}^q (1 + \frac{j\omega}{\omega_{0i}})}{\prod_{i=1}^n (1 + \frac{j\omega}{\omega_i})} \quad (6.122)$$

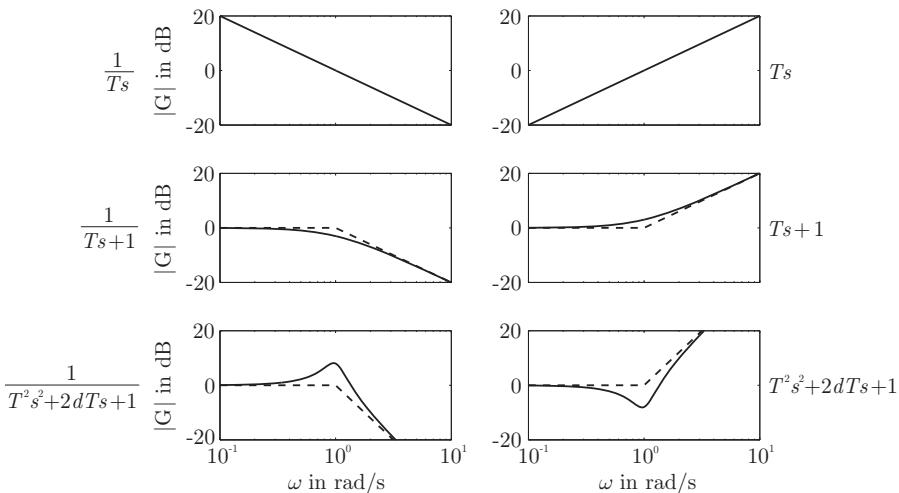
dargestellt werden kann, wenn  $s_{0i}$  und  $s_i$  reell und negativ sind, also

$$\omega_{0i} = -s_{0i} > 0 \quad \text{und} \quad \omega_i = -s_i > 0 \quad (6.123)$$

gilt, was zunächst vorausgesetzt wird. Für die Konstruktion des Amplitudenganges kann die oben eingeführte Geradenapproximation angewendet werden.

Die Knickfrequenzen sind durch die Pole und Nullstellen des Frequenzgangs  $G(j\omega)$  festgelegt. Die Neigung der Amplitudenkurve ändert sich an jeder Knickfrequenz  $\omega_i$  des Nenners um  $-20 \text{ dB/Dekade}$  und an jeder Knickfrequenz  $\omega_{0i}$  des Zählers um  $+20 \text{ dB/Dekade}$ .

Mit dieser Regel kann eine gute Approximation des Bodediagramms konstruiert werden, wenn die Knickfrequenzen genügend weit auseinander liegen. Der Phasengang ändert sich mit jeder Knickfrequenz des Nenners um  $-90^\circ$  und an jeder Knickfrequenz des Zählers um  $+90^\circ$ .



**Abb. 6.48:** Amplitudengang wichtiger elementarer Übertragungsglieder mit  $T = 1$

Für konjugiert komplexe Pole oder Nullstellen fasst man im Nenner bzw. im Zähler zwei Linearfaktoren zu Termen der Form  $T^2 s^2 + 2dT s + 1$  zusammen. Die Geradenapproximation ändert die Richtung bei der Frequenz  $\omega = \frac{1}{T}$  um  $-40 \text{ dB/Dekade}$  bzw.  $+40 \text{ dB/Dekade}$ , je nachdem, ob der Term im Nenner oder im Zähler steht. Der Amplitudengang entfernt sich für diese Terme von der Geradenapproximation in Abhängigkeit von  $d$  mehr oder weniger stark, wie aus den Abbildungen 6.38 und 6.42 abgelesen werden kann. Gleichzeitig verändert sich die Phase um  $\pm 180^\circ$ .

Liegen Pole bzw. Nullstellen bei null, so stellt der Amplitudengang eine Gerade mit der Neigung von  $\pm 20 \text{ dB/Dekade}$  dar.

Abbildung 6.48 zeigt die Amplitudengänge der sechs elementaren Übertragungsfunktionen, die als Bestandteile gebrochen rationaler Übertragungsfunktionen auftreten können. Für Übertragungsfunktionen  $G(s)$  beliebiger Ordnung kann man den

Amplitudengang dadurch konstruieren, dass man  $G(j\omega)$  in ein Produkt aus diesen elementaren Gliedern zerlegt und die Amplitudengänge dieser Glieder addiert. Ein zusätzlicher Verstärkungsfaktor verschiebt den erhaltenen Amplitudengang als Ganzes nach oben oder unten.

Gleichung (6.122) zeigt den allgemeinsten Ansatz einer Übertragungsfunktion  $n$ -ter Ordnung, wenn man für  $\omega_i$  und  $\omega_{0i}$  auch negative bzw. komplexe Werte zulässt. Der Amplitudengang hat dann dieselbe Form wie für die Parameter nach Gl. (6.123), aber der Phasengang hat einen anderen Verlauf (vgl. Abb. 6.29 mit Abb. 6.30 für stabiles bzw. instabiles PT<sub>1</sub>-Glied).

### Beispiel 6.7 Bodediagramme schwingungsfähiger Systeme

Die folgenden Beispiele zeigen, wie Amplitudengang und Phasengang für gebrochen rationale Übertragungsfunktionen konstruiert werden können.

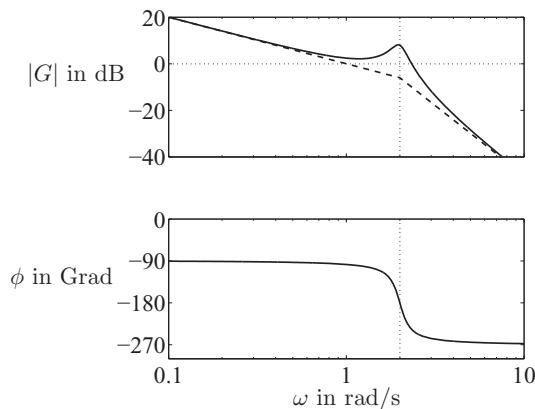
1. Die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{0,25s^2 + 0,1s + 1}, \quad (6.124)$$

beschreibt die Reihenschaltung eines I-Gliedes und eines PT<sub>2</sub>-Gliedes. Sie setzt sich aus den Anteilen

$$\frac{1}{s} \quad \text{und} \quad \frac{1}{0,25s^2 + 0,1s + 1}$$

zusammen. Für das PT<sub>2</sub>-Glied gilt  $T = 0,5$  und  $d = 0,1$ . Der Amplitudengang beginnt mit einer Geraden, die -20 dB/Dekade abfällt und die die 0 dB-Achse bei  $\omega = 1$  schneidet (Abb. 6.49). Der durch das PT<sub>2</sub>-Glied bewirkte Knick in der Geradenapproximation des Amplitudenganges liegt bei  $\omega = \frac{1}{T} = 2$ . Danach fällt der Amplitudengang mit -60 dB/Dekade ab (gestrichelte Linie in Abb. 6.49).



**Abb. 6.49:** Bodediagramm zur Übertragungsfunktion (6.124)

Der wahre Amplitudengang unterscheidet sich von der Geradenapproximation nur in der Umgebung der Knickfrequenz. Dort liegt eine durch den Dämpfungsfaktor  $d = 0,1$  bestimmte Resonanzüberhöhung von etwa 15 dB (Abb. 6.42).

Der Phasengang beginnt bei  $-90^\circ$  und fällt in der Nähe der Knickfrequenz um  $-180^\circ$  auf  $-270^\circ$ .

2. Betrachtet wird jetzt die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1,6}{s^2} \frac{0,7s^2 + 1}{0,1s^2 + 1}, \quad (6.125)$$

die in die Anteile

$$\frac{1,6}{s^2} = \frac{1}{0,79s} \frac{1}{0,79s}, \quad 0,7s^2 + 1, \quad \frac{1}{0,1s^2 + 1}$$

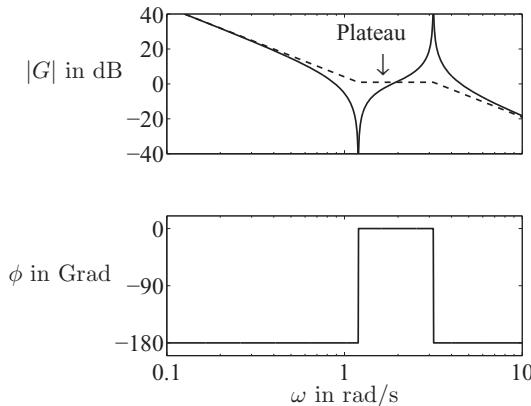
zerlegt werden kann. Der Amplitudengang hat für sehr hohe und sehr niedrige Frequenzen eine Neigung von -40 dB/Dekade. Die für niedrige Frequenzen geltende Geradenapproximation schneidet die 0 dB-Achse bei  $\omega = \frac{1}{0,79} = 1,26$ . Die beiden anderen Anteile beschreiben ungedämpfte Schwingungsglieder, wobei der Term

$$0,7s^2 + 1 = T^2 s^2 + 2dTs + 1 \quad \text{mit } T = 0,84, \quad d = 0$$

bei der Knickfrequenz  $\omega_1 = \frac{1}{0,84} = 1,19$  eine Anhebung des Amplitudenganges um 40 dB/Dekade bewirkt, während der Faktor

$$\frac{1}{0,1s^2 + 1} = \frac{1}{T^2 s^2 + 2dTs + 1} \quad \text{mit } T = 0,32, \quad d = 0$$

eine Absenkung des Amplitudenganges um 40 dB/Dekade ab der Knickfrequenz  $\omega_2 = \frac{1}{0,32} = 3,1$  bewirkt. Die Geradenapproximation hat deshalb das in Abb. 6.50 gezeigte Plateau.



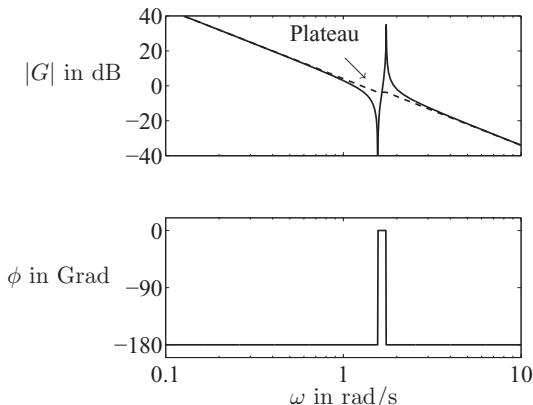
**Abb. 6.50:** Bodediagramm zur Übertragungsfunktion (6.125)

In der Nähe der Knickfrequenzen hat der wahre Amplitudengang eine unendlich große Resonanzabsenkung bzw. Resonanzüberhöhung. Der Phasengang wechselt für die ungedämpften Anteile seinen Wert abrupt von  $-180^\circ$  auf null und zurück zu  $-180^\circ$ .

3. Wenn die zu den schwingungsfähigen Anteilen der Übertragungsfunktion (6.125) gehörenden Frequenzen näher zusammenrücken, so wird das Plateau schmäler. Abbildung 6.51 zeigt das Bodediagramm für die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1,6 \cdot 0,41s^2 + 1}{s^2 \cdot 0,33s^2 + 1} \quad (6.126)$$

das ein konjugiert komplexes Polpaar bei  $\pm j1,75$  sowie Nullstellen bei  $\pm j1,57$  hat.  $\square$



**Abb. 6.51:** Bodediagramm zur Übertragungsfunktion (6.126)

In Bezug auf das Zustandsraummodell sollte man sich merken, dass die Knickfrequenzen des Nenners für reelle Pole gerade mit den Beträgen der zugehörigen Eigenwerte  $\lambda_i$  der Systemmatrix  $A$  übereinstimmen.

Für sehr hohe Frequenzen wird die durch das System bewirkte Phasenverschiebung durch den Polüberschuss bzw. den relativen Grad  $r$  bestimmt, denn es gilt

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \phi(\omega) = (q - n) 90^\circ = -r 90^\circ, \quad (6.127)$$

sofern alle Pole und Nullstellen negative Realteile haben. Sie ist der Grund dafür, dass der Polüberschuss und der relative Grad als ein Maß für die Verzögerung betrachtet werden kann, die das Eingangssignal beim Durchlaufen des Systems erfährt. Dementsprechend wirken Systeme mit großem Polüberschuss sehr stark verzögernd, während Systeme, die zwar eine sehr hohe dynamische Ordnung haben können, aber nur einen kleinen Polüberschuss besitzen, wenig verzögernd wirken. Diese Aussagen gelten, wie in der Formel angegeben, für sehr hohe Frequenzen. Sie stützen die bereits aus der Regelungsnormalform mit Hilfe von Abb. 4.15 auf S. 85 abgeleitete Vermutung, dass ein System umso träger auf eine Änderung der Eingangsgröße reagiert, je größer sein relativer Grad ist.

Für eine Reihe weiterer Übertragungsglieder sind die Übergangsfunktion, die Übertragungsfunktion und die grafische Darstellung des Frequenzganges als Ortskurve und als Bodediagramm in Abb. 6.52 zusammengestellt. Gleichzeitig ist das geläufige Blockschaltbild angegeben, in dem der Charakter des Elementes durch eine stilisierte Übergangsfunktion angegeben ist.

**Aufgabe 6.22** Amplitudengang für gebrochen rationale Übertragungsfunktionen

Gegeben sind zwei Systeme mit den Übertragungsfunktionen

$$G(s) = \frac{10}{s(5s+1)(20s+1)} \quad \text{und} \quad G(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+10)}.$$

Konstruieren Sie die Geradenapproximationen der Bodediagramme beider Systeme. □

**Aufgabe 6.23\*** Bestimmung der Übertragungsfunktion aus dem Amplitudengang

In der Praxis ist häufig die Aufgabe zu lösen, aus einem gegebenen Amplitudengang die Übertragungsfunktion (wenigstens näherungsweise) abzulesen. Diese Aufgabe soll hier an zwei Beispielen gelöst werden.

1. Für den in Abb. 6.53 gezeigten Amplitudengang liegt bereits eine Geradenapproximation vor. Es sei bekannt, dass das betrachtete System stabil ist und nur Nullstellen mit negativem Realteil besitzt. Wie heißt die Übertragungsfunktion dieses Systems?
2. Abbildung 6.54 zeigt den Amplitudengang des in Aufgabe 10.9 auf S. 504 genauer beschriebenen hydraulischen Ruderstellsystems. Welche Übertragungsfunktion hat dieses System? □

**Aufgabe 6.24\*** Bodediagramm eines Feder-Masse-Schwingers

Zeichnen Sie das Bodediagramm des Feder-Masse-Schwingers aus Beispiel 4.2 auf S. 60 mit den im Beispiel 6.2 auf S. 241 gegebenen Parametern. Bestimmen Sie diejenigen Punkte des Amplitudengangs, die zu den im Beispiel 6.2 auf S. 241 verwendeten Frequenzen gehören. □

**Aufgabe 6.25\*** Bodediagramm der Verladebrücke

Die im Beispiel 5.1 auf S. 128 beschriebene Verladebrücke hat bezüglich der auf die Laufkatze wirkende Kraft  $F$  als Eingangsgröße und die Position  $s$  des Greifers als Ausgangsgröße die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{0,00123}{s^4 + 3,066s^2}. \quad (6.128)$$

Zeichnen Sie das Bodediagramm. □

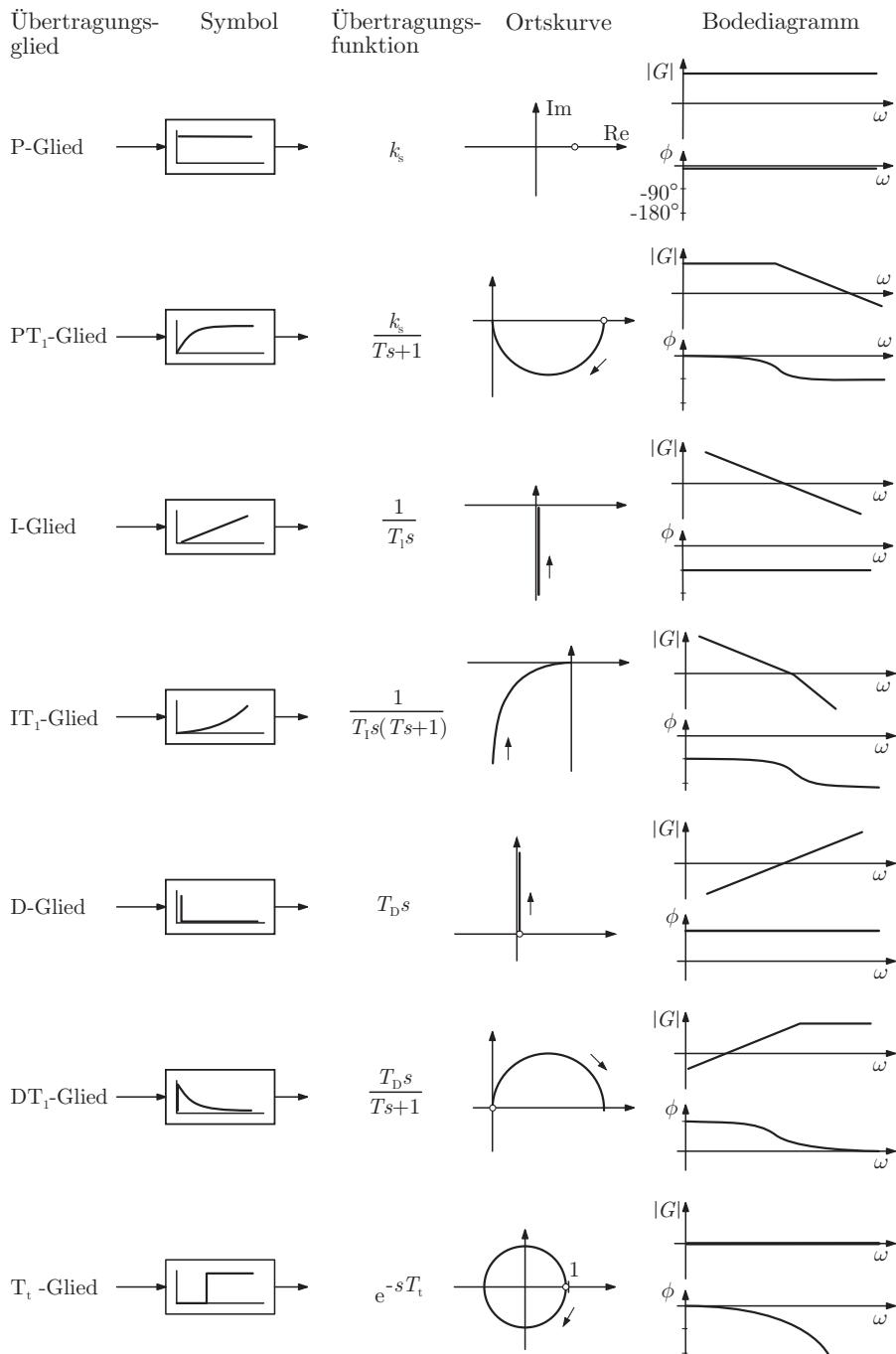
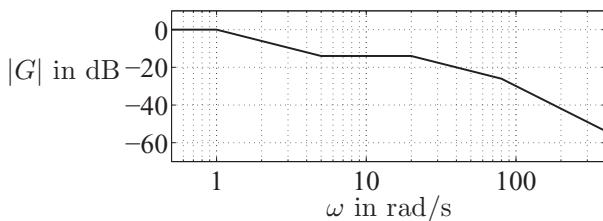
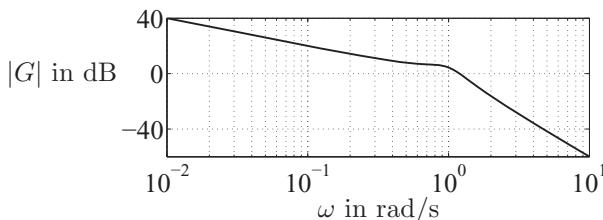


Abb. 6.52: Wichtige Übertragungsglieder



**Abb. 6.53:** Geradenapproximation eines Amplitudengangs



**Abb. 6.54:** Amplitudengang eines hydraulischen Ruderstellsystems

**Aufgabe 6.26\*** Elektrische Schaltungen mit positiv reeller Übertragungsfunktion

Betrachtet man elektrische RLC-Schaltungen als Zweipol mit der Spannung als Eingangsgröße und dem in den Zweipol hinein fließenden Strom als Ausgangsgröße, so erhält man eine Übertragungsfunktion  $G(s)$  mit der Eigenschaft  $\operatorname{Re}\{G(j\omega)\} \geq 0$ , ( $\omega \geq 0$ ). Man spricht von einer *positiv reellen* Übertragungsfunktion.

Um diese Eigenschaft für ein Beispiel zu untersuchen, betrachten Sie das RC-Glied aus Aufgabe 4.7 auf S. 104 bezüglich der Eingangsspannung  $u(t)$  und des Stromes  $i_{R_2}(t)$  als Ausgang. Stellen Sie die Übertragungsfunktion dieser Schaltung auf und zeigen Sie, dass diese Übertragungsfunktion positiv reell ist. □

**Aufgabe 6.27\*\* Dynamik der Rollbewegung eines Flugzeugs**

Für die Rollbewegung eines Flugzeugs wurde in Beispiel 5.6 auf S. 151 ein Modell angegeben.

1. Zeichnen Sie den qualitativen Verlauf des Amplitudengangs, des Phasenganges und der Ortskurve.
2. Wie verändert sich das Modell, wenn das auf die Rollbewegung wirkende geschwindigkeitsproportionale Dämpfungsmaßmoment berücksichtigt wird, das aufgrund des Luftwiderstandes auf die Flügel wirkt?
3. Wie verändern sich dadurch das Frequenzkennliniendiagramm und die Ortskurve in Abhängigkeit vom Proportionalitätsfaktor des Dämpfungsmaßmoments? □

**Aufgabe 6.28\*\* Konstruktion des Amplitudenganges aus dem Zustandsraummodell**

Gegeben ist das Zustandsraummodell

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -8 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t). \end{cases}$$

1. Aus welchen Übertragungsgliedern setzt sich dieses System zusammen?
2. Wie können die Knickfrequenzen abgelesen werden?
3. Zeichnen Sie die Geradenapproximation des Amplitudenganges dieses Systems, ohne vorher den Frequenzgang explizit auszurechnen. Welche spezielle Eigenschaft des Modells können Sie ausnutzen?  $\square$

### 6.7.6 Allpassglieder und nichtminimalphasige Systeme

Bei den bisher behandelten Übertragungsgliedern gab es einen eindeutigen Zusammenhang zwischen dem Amplitudengang und dem Phasengang, wobei zu einem Abfall des Amplitudenganges von  $z \cdot 20 \text{ dB/Dekade}$ , ( $z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) eine Phasenverschiebung von  $z \cdot 90^\circ$  gehörte. Die angegebene Phasenverschiebung ist die minimale, die zu dem betrachteten Abfall des Amplitudenganges gehört. Alle Systeme mit demselben Amplitudengang haben diese Phasenverschiebung oder eine größere.

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit Übertragungsgliedern, die eine größere Phasenverschiebung aufweisen und deshalb als nichtminimalphasige Systeme bezeichnet werden. Bei ihnen kann man nicht mehr aus dem Verlauf des Amplitudenganges eindeutig auf den Phasengang schließen. Abgesehen von diesem Zusammenhang zwischen Amplitude und Phase ist die Einteilung der Systeme in minimalphasige und nichtminimalphasige für Regelungsaufgaben sehr wichtig, weil sich zeigen wird, dass sich nichtminimalphasige Regelstrecken aufgrund ihrer größeren Phasenverschiebung wesentlich schwerer regeln lassen als minimalphasige Strecken.

**Allpassglieder.** Übertragungsglieder, die alle Frequenzen in gleicher Weise verstärken

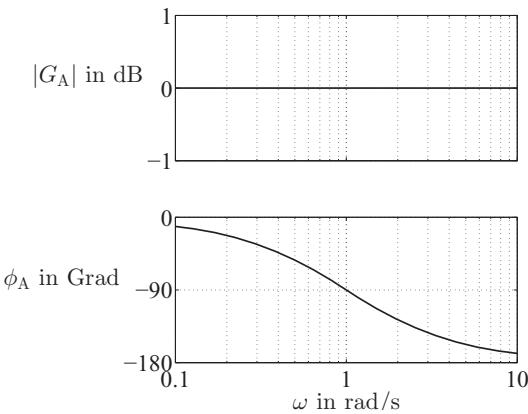
$$|G(j\omega)| = 1 \quad \text{für alle } \omega \tag{6.129}$$

werden Allpasssysteme genannt. Diese Systeme verändern nur die Phaselage sinusförmiger Signale, nicht aber deren Amplitude. Sie lassen sinusförmige Signale beliebiger Frequenz  $\omega$  ungehindert passieren, woraus sich der Name dieser Glieder ableitet.

Allpasssysteme mit gebrochen rationaler Übertragungsfunktion sind dadurch gekennzeichnet, dass es zu jeder Nullstelle  $s_{0i} = \delta_i + j\omega_i$  einen Pol  $s_i = -\delta_i + j\omega_i$  mit entgegengesetztem Realteil gibt und folglich die Pole und Nullstellen im PN-Bild symmetrisch zur Imaginärachse liegen. Ihre Übertragungsfunktion  $G_A(s)$  kann deshalb in der Form

$$G_A(s) = \frac{s - s_{01}}{s - s_1} \frac{s - s_{02}}{s - s_2} \dots \frac{s - s_{0n}}{s - s_n} \quad (6.130)$$

geschrieben werden, wobei die Pole und Nullstellen jedes Bruches die erwähnte Eigenschaft besitzen. Es werden im Folgenden stabile Allpasssysteme betrachtet ( $\delta_i > 0$ ).



**Abb. 6.55:** Bodediagramm des Allpassgliedes (6.131) mit  $T = 1\text{ s}$

Für das einfachste Allpassglied

$$G_A(s) = \frac{-Ts + 1}{Ts + 1}, \quad T > 0 \quad (6.131)$$

erkennt man aus

$$|G_A(j\omega)| = \sqrt{\frac{\omega^2 T^2 + 1}{\omega^2 T^2 + 1}} = 1,$$

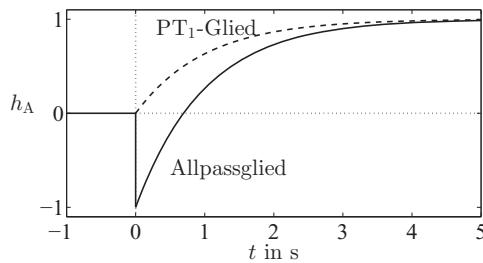
dass die Bedingung (6.129) eingehalten wird und das Glied lediglich die Phasendrehung

$$\arg G_A(j\omega) = \arctan \frac{2\omega T}{\omega^2 T^2 - 1} \approx \begin{cases} -\arctan 2\omega T & \text{für } \omega T \ll 1 \\ \arctan \frac{2}{\omega T} & \text{für } \omega T \gg 1 \end{cases}$$

bewirkt, die für hohe Frequenzen den Wert  $-180^\circ$  erreicht (Abb. 6.55). Das Allpassglied wirkt verzögernd, wie aus seiner in Abb. 6.56 angegebenen Übergangsfunktion zu sehen ist. Typisch ist, dass sich das Allpassglied für eine sprungförmige Erregung zunächst in die „falsche“ Richtung bewegt.

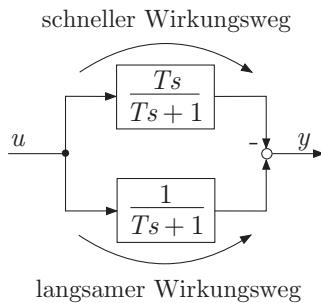
Dieses Verhalten des Allpassgliedes geht aus der Übertragungsfunktion

$$G_A(s) = \frac{-Ts + 1}{Ts + 1} = \frac{1}{Ts + 1} - \frac{Ts}{Ts + 1} \quad (6.132)$$



**Abb. 6.56:** Übergangsfunktion des Allpassgliedes  $G_A(s) = \frac{-Ts+1}{Ts+1}$  im Vergleich zu der des PT<sub>1</sub>-Gliedes  $\frac{1}{Ts+1}$  mit  $T = 1\text{s}$

hervor, die als eine Parallelschaltung eines PT<sub>1</sub>-Gliedes und eines DT<sub>1</sub>-Gliedes mit der gemeinsamen Zeitkonstante  $T$  interpretiert werden kann (Abb. 6.57). Die Übergangsfunktion dieser Parallelschaltung wird für kleine Zeiten durch das DT<sub>1</sub>-Glied dominiert, das sprunghfähig ist und deshalb schnell und mit negativem Vorzeichen reagiert. Da die Ausgangsgröße dieses Gliedes für größere Zeiten verschwindet, wird die Übergangsfunktion der Parallelschaltung später nur durch das PT<sub>1</sub>-Glied bestimmt (Abb. 6.56).



**Abb. 6.57:** Wirkung eines Allpassgliedes

Allpassverhalten tritt also in Systemen auf, bei denen die Eingangsgröße  $u$  zwei Wirkungsketten anregt, von denen die eine schnell den Ausgang  $y$  beeinflusst, während die andere langsam und mit entgegengesetztem Vorzeichen wirkt. Bei derartigen Systemen ist häufig die langsame Wirkungskette diejenige, die der Funktion des Systems entspricht, während die schnelle, entgegengesetzte Wirkung unbeabsichtigter Weise auftritt und die Lösung von Regelungsaufgaben erschwert. Deshalb ist die im Folgenden angegebene Einteilung von Systemen in minimalphasige und nichtminimalphasige Systeme für den Reglerentwurf sehr wichtig.

**Minimalphasige Systeme.** Für Systeme mit gebrochen rationaler Übertragungsfunktion kann der Frequenzgang in der Produktform

$$G(j\omega) = \frac{k}{(j\omega)^l} \frac{\prod_{i=1}^q (j\omega T_{0i} + 1)}{\prod_{i=1}^{n-l} (j\omega T_i + 1)} \quad (6.133)$$

dargestellt werden, wobei durch den ersten Term ein  $l$ -facher Pol bei null beschrieben wird.

**Definition 6.1 (Minimalphasige Systeme)**

*Minimalphasige Systeme (Minimalphasensysteme) sind Systeme der Form (6.133) mit positivem Faktor  $k$ , die außer  $l$  Polen bei null keine Pole und Nullstellen mit nichtnegativem Realteil haben. Sie sind daran zu erkennen, dass alle Parameter  $k$ ,  $T_i$  und  $T_{0i}$  positiv sind.*

Das Attribut „minimalphasig“ ist durch die Eigenschaft dieser Systeme begründet, dass man aus dem Amplitudengang den dazugehörige Phasengang konstruieren kann.

Für die Geradenapproximation stabiler minimalphasiger Systeme gilt: Der Steigung des Amplitudenganges von  $z \cdot 20 \text{ dB/Dekade}$  wird eine Phase von  $z \cdot 90^\circ$  zugeordnet, wobei  $z$  eine beliebige ganze Zahl ist.

Ein D-Glied ( $z = +1$ ) hat also eine Phasenverschiebung von  $+90^\circ$ , ein I-Glied  $-90^\circ$  ( $z = -1$ ), ein PT<sub>1</sub>-Glied für Frequenzen unterhalb der Knickfrequenz  $0^\circ$  ( $z = 0$ ) und oberhalb der Knickfrequenz  $-90^\circ$  ( $z = -1$ ) usw. Die angegebenen Werte beschreiben die minimale Phasenverschiebung, die ein System mit dem betrachteten Amplitudengang haben kann.

**Nichtminimalphasige Systeme.** Allpassglieder sind Beispiele für Systeme, die für denselben Amplitudengang unterschiedliche Phasengänge haben können. Man kann sich leicht überlegen, dass sich jede Übertragungsfunktion in einen minimalphasigen Anteil  $\hat{G}(s)$  und einen Allpassanteil  $G_A(s)$  zerlegen lässt:

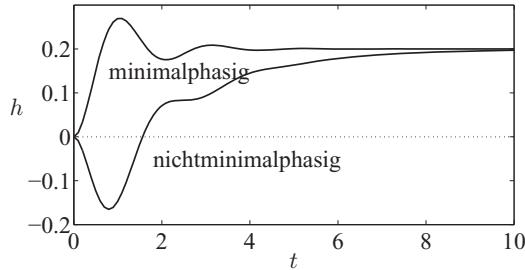
$$G(s) = \hat{G}(s) G_A(s). \quad (6.134)$$

Tritt ein Allpassanteil auf, so liegt ein nichtminimalphasiges System vor, wobei der Allpassanteil eine zusätzliche Phasenverschiebung hervorruft. Lässt sich kein Allpassanteil abspalten, so ist das System minimalphasig. Im Folgenden werden asymptotisch stabile Systeme betrachtet, bei denen die Nichtminimalphasigkeit durch Nullstellen mit positivem Realteil erzeugt wird.

Stabile Systeme sind genau dann nichtminimalphasig, wenn ihre interne Dynamik (5.96) instabil ist, also mindestens eine Nullstelle mit positivem Realteil existiert.

Die zusätzliche Verzögerung, mit der nichtminimalphasige Systeme auf eine Eingangsgröße reagieren, sieht man bei Systemen mit einer ungeraden Anzahl positiver Nullstellen besonders gut. Die Übergangsfunktion derartiger Systeme startet zunächst „in die falsche Richtung“, d. h. mit dem entgegengesetzten Vorzeichen der statischen Verstärkung, wie Abb. 6.58 für ein System mit und ohne Allpassanteil erster Ordnung zeigt. Etwas pauschal formuliert kann man sich merken:

- || Bei nichtminimalphasigen Systemen mit einer ungeraden Anzahl positiver Nullstellen erreicht eine Veränderung der Eingangsgröße zunächst das Gegenteil der beabsichtigten Wirkung.



**Abb. 6.58:** Übergangsfunktion eines minimalphasigen Systems und der Reihenschaltung dieses Systems mit einem Allpassglied  $G_A(s) = \frac{-Ts+1}{Ts+1}$

Die folgenden Beispiele illustrieren, dass nichtminimalphasiges Verhalten aus den physikalischen Wirkprinzipien eines Systems im Zusammenhang mit den Eingriffsstellen der Aktoren und Sensoren entsteht. Außerdem wird im Abschn. 7.4.3 gezeigt, dass Regelkreise immer dann nichtminimalphasig sind, wenn in ihnen durch den Regler eine instabile Regelstrecke stabilisiert wird (siehe auch Aufg. II-6.4).

#### Beispiel 6.8 Nichtminimalphasenverhalten von Wasserkraftwerken

Abbildung 6.59 zeigt die drei wichtigsten Elemente eines Wasserkraftwerkes. Aus einem Stausee wird das Wasser über eine Rohrleitung zur Turbine befördert, über die es einen Generator antreibt. Diese Anordnung wird hier in Bezug auf eine Leistungsregelung betrachtet, bei der die Ventilstellung  $u(t)$  des Einlassventils die Stellgröße und die von der Turbine bzw. dem Generator abgegebene Leistung  $y(t) = p_{kin}(t)$  die Regelgröße darstellt.

Öffnet man das Ventil etwas weiter, so erwartet man, dass mehr Wasser die Turbine antreibt und sich folglich die Leistung erhöht. Bei einer linearen Betrachtung beträgt die durch eine 10%-ige Vergrößerung der Ventilöffnung bewirkte Leistungserhöhung ebenfalls 10%, so dass die Übertragungsfunktion des Wasserkraftwerkes die statische Verstärkung  $G(0) = 1$  hat.

Wie die folgenden Betrachtungen zeigen, wird diese Langzeitwirkung kurzfristig von einem anderen, entgegengesetzt wirkenden Vorgang überlagert. Die von der Turbine abge-

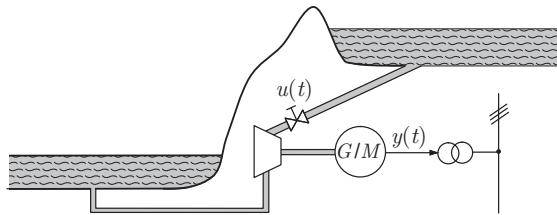


Abb. 6.59: Wasserkraftwerk

gebene Leistung hängt im Wesentlichen von der pro Zeiteinheit vom Wasser auf die Turbinenschaufeln abgegebenen kinetischen Energie ab, die sich entsprechend

$$p_{\text{kin}}(t) = \frac{d}{dt} \frac{m(t)}{2} v^2(t)$$

aus der auf die Schaufeln strömenden Wassermasse  $m(t)$  und der Wassergeschwindigkeit  $v(t)$  berechnet. Der Ausdruck  $\frac{m(t)}{2} v^2(t)$  beschreibt die Energie und die zeitliche Ableitung dieses Ausdrucks die aktuelle Leistung. Die stationären Werte zur Zeit  $t < 0$  werden mit einem Querstrich versehen

$$\bar{p}_{\text{kin}} = \frac{\dot{\bar{m}}}{2} \bar{v}^2,$$

wobei mit  $\dot{\bar{m}}$  die pro Zeiteinheit die Turbine antreibende Wassermasse und mit  $\bar{v}$  die konstante Fließgeschwindigkeit bezeichnet wird.

Um die dynamischen Verhältnisse zu untersuchen, wird angenommen, dass zur Zeit  $t = 0$  die Ventilöffnung sprungförmig um 10% vergrößert wird (z. B. von 91% auf 100% des Ventilquerschnitts). Wenn man den Strömungswiderstand der Rohrleitung vernachlässigt, wird durch diese Maßnahme der Massenstrom für  $t \rightarrow \infty$  um 10% erhöht, so dass erwartungsgemäß die Leistung um 10% steigt:

$$p_{\text{kin}}(\infty) = \frac{1,1 \dot{\bar{m}}}{2} \bar{v}^2 = 1,1 \bar{p}_{\text{kin}}.$$

Zur Zeit  $t = 0$  kann sich jedoch der durch die Rohrleitung fließende Massenstrom  $\dot{m}v$  nicht sprungförmig ändern, so dass  $\dot{m}(-0)v(-0) = \dot{m}(+0)v(+0)$  gilt. Folglich nimmt aufgrund des gestiegenen Ventilquerschnitts die durch das Ventil strömende Masse von  $\dot{m}$  auf  $\dot{m}(+0) = 1,1\dot{m}$  zu, aber die Fließgeschwindigkeit des Wassers von  $v(-0) = \bar{v}$  auf

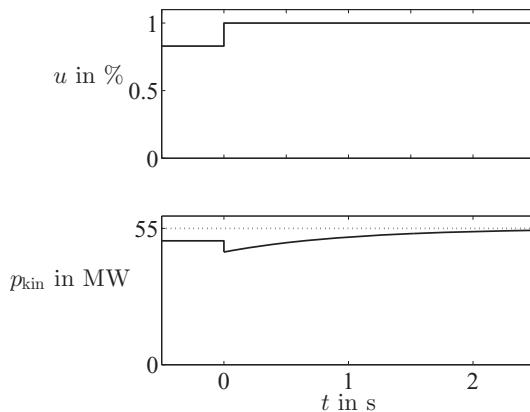
$$v(+0) = \frac{\dot{m}(-0)}{\dot{m}(+0)} \bar{v} = \frac{\dot{\bar{m}}}{1,1 \dot{\bar{m}}} \bar{v} = 0,91 \bar{v}$$

ab. Damit verkleinert sich die Turbinenleistung auf

$$p_{\text{kin}}(+0) = \frac{\dot{\bar{m}}}{2} v(+0)^2 = 0,83 \bar{p}_{\text{kin}}.$$

Die Leistung verändert sich also zunächst in der „verkehrten“ Richtung.

Langfristig vergrößert sich die Turbinenleistung auf den o. g. Endwert  $p_{\text{kin}}(\infty)$ , weil die Wassersäule im Rohr auf die alte Geschwindigkeit  $\bar{v}$  beschleunigt wird. Wie lange dies dauert, kann man dadurch abschätzen, dass man eine Ausbreitungsgeschwindigkeit der Druckwelle im Rohr von  $300 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  (Schallgeschwindigkeit) annimmt und damit bei einer Rohrlänge von 900 m auf eine Zeit von 3 s kommt. Approximiert man diesen Zusammenhang durch ein  $\text{PT}_1$ -Glied, so hat dieses eine Zeitkonstante von 1 s.



**Abb. 6.60:** Verhalten des Wasserkraftwerkes bei Leistungserhöhung von 50 MW auf 55 MW

Zusammengefasst erhält man für die Übertragungsfunktion des Kraftwerkes die Beziehung

$$G(s) = \frac{P_{\text{kin}}(s)}{U(s)} = \frac{-0,83s + 1}{s + 1},$$

wobei die Signale  $p_{\text{kin}}(t)$  und  $u(t)$  die prozentualen Änderungen der erzeugten Leistung bzw. der Ventilstellung beschreiben. Eine Aufspaltung dieser Übertragungsfunktion entsprechend Gl. (6.134)

$$G(s) = \frac{-0,83s + 1}{s + 1} = \underbrace{\frac{0,83s + 1}{s + 1}}_{\hat{G}(s)} \underbrace{\frac{-0,83s + 1}{0,83s + 1}}_{G_A(s)}$$

zeigt, dass das Kraftwerk einen Allpassanteil besitzt:

$$G_A(s) = \frac{-0,83s + 1}{0,83s + 1}.$$

Das mit diesem Modell berechnete Verhalten für eine Öffnung des Ventilquerschnittes um 10% ist in Abb. 6.60 zu sehen. Dieses Verhalten ist als *Druckstoßverhalten* dem Praktiker bekannt. Es ist der Grund dafür, dass man Wasserturbinen i. Allg. nicht nur durch Verstellung des Einlassventils vor der Turbine regelt, sondern auch die Strahlführung verändert und damit dem Nichtminimalphasenverhalten entgegenwirkt.  $\square$

#### Beispiel 6.9 Nichtminimalphasenverhalten eines Dampferzeugers

Nichtminimalphasiges Verhalten tritt bei Dampferzeugern auf, wenn man die Frischwasserzufuhr als Eingangsgröße und den Druck des produzierten Dampfes als Ausgangsgröße betrachtet. Etwas vereinfacht dargestellt verkleinert eine Erhöhung der Wasserzufuhr das Volumen des Dampfes und führt deshalb zunächst zu einer Druckerhöhung. Langfristig

wirkt jedoch eine andere Wirkungskette. Die Erhöhung der Frischwasserzufuhr (bei konstanter Brennstoffzufuhr) führt zum Absinken der Dampftemperatur und deshalb zum Absinken des Druckes. Das Verhalten ähnelt dem in Abb. 6.58 dargestellten. Man muss die für das nichtminimalphasige System angegebene Kurve nur an der Zeitachse spiegeln, denn die statische Verstärkung ist negativ, weil eine Erhöhung der Wasserzufuhr letztlich zu einer Verkleinerung des Druckes führt.  $\square$

**Regelungsverhalten nichtminimalphasiger Systeme.** Nichtminimalphasige Systeme werfen wesentlich größere Probleme für die Lösung von Regelungsaufgaben auf als minimalphasige Systeme, weil sie zumindest für kurze Zeit auf Stelleingriffe in der „falschen Richtung“ reagieren. Diese Tatsache wird durch die folgenden Untersuchungen unterstrichen, die sich mit dem Problem befassen, die Regelgröße in einem Sollwert  $\bar{w}_0$  zu halten. Diese Untersuchungen erweitern die im Abschn. 5.5.4 beschriebene Analyse auf Sollwerte  $\bar{w}_0 \neq 0$ .

Es wird ein asymptotisch stabiles System betrachtet, dessen Regelgröße zur Zeit  $t = 0$  auf dem Sollwert  $\bar{w}_0$  liegt

$$y(0) = \bar{w}_0 \quad (6.135)$$

und das für alle zukünftigen Zeitpunkte im Sollwert bleiben soll:

$$y(t) = \bar{w}_0, \quad t > 0. \quad (6.136)$$

Im statischen Endzustand muss die Stellgröße dafür den Wert  $\bar{u} = \frac{\bar{w}_0}{k_s}$  annehmen, wobei sich der Arbeitspunkt  $\bar{x} = -A^{-1}b\bar{u} = -A^{-1}b\frac{\bar{w}_0}{k_s}$  einstellt. Wenn der Anfangszustand diesen Wert hat ( $x_0 = \bar{x}$ ), dann hält die Eingangsgröße  $u(t) = \bar{u}$  das System im Arbeitspunkt. Alle anderen Anfangszustände  $x_0$ , für die die Forderung (6.135) erfüllt ist, liegen im Zustandsraum auf der durch die Beziehung

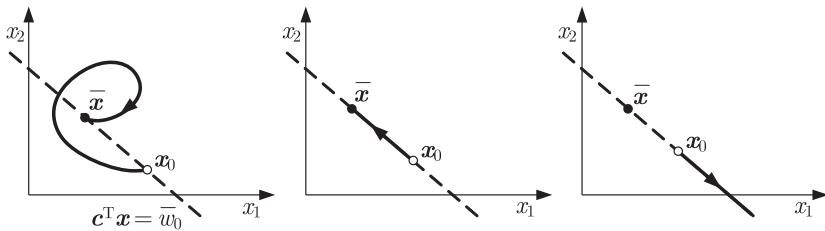
$$y = c^T x = \bar{w}_0 \quad (6.137)$$

beschriebenen Fläche, die in Abb. 6.61 für ein System zweiter Ordnung durch die gestrichelte Linie dargestellt ist. Um die Forderung (6.136) zu erfüllen, braucht man eine Stellgröße  $u(t)$ , die das System auf der gestrichelten Linie von  $x_0$  in den Arbeitspunkt  $\bar{x}$  führt.

Verwendet man für dieses Umsteuern die konstante Stellgröße  $u(t) = \bar{u}$ , so nähert sich das stabile System asymptotisch dem Arbeitspunkt  $\bar{x}$ . Es wird jedoch, seiner Eigendynamik folgend, die Fläche  $c^T x = \bar{w}_0$  verlassen und damit die Forderung (6.136) verletzen, wie es im linken Teil von Abb. 6.61 gezeigt ist.

Man kann das System nur dann im Sollwert halten, wenn man eine Stellgröße verwendet, die auf die interne Dynamik des Systems Rücksicht nimmt. Anhand der E/A-Normalform (5.95), (5.96) des Zustandsraummodells erkennt man, dass das System unter der Forderung (6.136) eine interne Bewegung ausführt, die durch Gl. (5.96)

$$\dot{x}_N(t) = A_{NN}x_N(t) + b_N\bar{w}_0, \quad x_N(0) = x_{N0} \quad (6.138)$$



**Abb. 6.61:** Umsteuerung von Systemen mit stabiler und instabiler interner Dynamik

beschrieben ist und die den versteckten Eingang  $y_N(t) = c_N^T x_N(t)$  für die E/A-Dynamik erzeugt. Man kann die Forderung (6.136) nur dann erfüllen, wenn zum Zeitpunkt  $t = 0$  die ersten  $r - 1$  Ableitungen von  $y(t)$  verschwinden und folglich

$$\boldsymbol{x}_{I0} = \begin{pmatrix} \bar{w}_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt. Unter dieser Voraussetzung kompensiert die Eingangsgröße

$$u(t) = -\frac{e_1}{b_q} \bar{w}_0 - \boldsymbol{c}_N^T \boldsymbol{x}_N(t) \quad (6.139)$$

den versteckten Eingang  $y_N(t)$ , so dass sich für die letzte Zeile (5.98) der E/A-Dynamik die Beziehung

$$\frac{d^r y(t)}{dt^r} = 0$$

ergibt und die Forderung (6.136) eingehalten wird.

Wenn das System minimalphasig ist und folglich der Zustand  $\boldsymbol{x}_N(t)$  der internen Dynamik (6.138) asymptotisch abklingt, wird das System für die Stellgröße (6.139) vom Anfangszustand  $x_0$  auf der Fläche (6.137) in den Arbeitspunkt  $\bar{x}$  gesteuert, wie dies im mittleren Teil der Abbildung zu sehen ist. Bei Systemen höherer Ordnung muss dieser Vorgang nicht wie in der Abbildung aperiodisch ablaufen, sondern er kann auch ein Schwingen um den Arbeitspunkt in der durch Gl. (6.137) beschriebenen Fläche einschließen. Während dieser Zustandsänderung ist die Forderung (6.136) erfüllt.

Bei nichtminimalphasigen Systemen führt die mit Gl. (6.139) berechnete Stellgröße ebenfalls dazu, dass die Forderung (6.136) erfüllt wird. Da das System jedoch mindestens eine Nullstelle  $s_0$  mit positivem Realteil besitzt, enthält  $\boldsymbol{x}_N(t)$  und deshalb auch  $u(t)$  mindestens eine aufklingende e-Funktion  $e^{s_0 t}$ , so dass sich der Zustand  $\boldsymbol{x}(t)$  immer weiter von der gewünschten Gleichgewichtslage  $\bar{x}$  entfernt (rechter Teil von Abb. 6.61). Etwas allgemeiner formuliert kann dieses Ergebnis folgendermaßen zusammengefasst werden:

Bei nichtminimalphasigen Systemen führt die Bedingung, dass die Regelgröße im Arbeitspunkt und folglich der Zustand auf der Fläche  $c^T x = \bar{w}_0$  verbleiben soll, auf eine instabile Stellgröße, die das System vom gewünschten Arbeitspunkt  $\bar{x}$  wegführt.

### Beispiel 6.10 Reaktor mit minimalphasigem und nichtminimalphasigem Verhalten

Ein anschauliches Beispiel soll eine physikalische Begründung für das Entstehen instabiler Stellsignale bei nichtminimalphasigen Systemen geben. Es soll zeigen, warum die Güteforderung (6.136) und die physikalischen Wirkprinzipien eines nichtminimalphasigen Systems zwangsläufig dazu führen, dass sich der Zustand  $x(t)$  vom Arbeitspunkt  $\bar{x}$  entfernt. Das Beispiel betrifft den in Abb. 6.62 gezeigten Apparat, der kontinuierlich mit konstantem Volumenstrom durchflossen wird. Es soll die Konzentration eines Stoffes im rechten Behälter auf einem konstanten Sollwert  $\bar{w}_0$  gehalten werden.

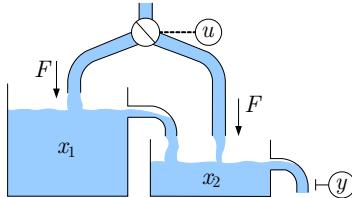


Abb. 6.62: Nichtminimalphasiges Behältersystem

Das im Folgenden angegebene Modell erhält man in Analogie zu Gl. (A.41). Die Zustandsvariablen beschreiben die Konzentrationen des betrachteten Stoffes in den beiden Behältern.  $V_1$  und  $V_2$  bezeichnen die Volumina der Behälter und  $F$  den Fluss durch den linken Behälter.

Im ersten Fall wird angenommen, dass die Stellgröße die Stoffkonzentration in beiden Zulaufen gleichartig beeinflusst. Im zweiten Fall verändert die Stellgröße die Stoffverteilung im Zulauf in der Weise, dass eine Erhöhung der Konzentration im Zulauf des linken Behälters ( $u(t) > 0$ ) eine gleich große Verkleinerung der Konzentration im Zulauf des rechten Behälters zur Folge hat. Beide Modelle unterscheiden sich nur im Vorzeichen des unteren Elementes des Eingangsvektors  $b$ , das im ersten Fall positiv und im zweiten Fall negativ ist:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{F}{V_1} & 0 \\ \frac{F}{V_2} & -\frac{2F}{V_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{F}{V_1} \\ \pm \frac{F}{V_2} \end{pmatrix} u(t), \quad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{10} \\ c_{20} \end{pmatrix}$$

$$y(t) = (0 \quad 1) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Dieser Vorzeichenwechsel hat einen wesentlichen Einfluss auf die E/A-Normalform des Modells, die für den ersten Fall

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_{E1}(t) \\ \dot{x}_{E2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{F}{V_1} & \frac{2F^3(V_2-V_1)}{V_1^2 V_2^2} \\ \frac{V_2}{F} & -\frac{2F}{V_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{E1}(t) \\ x_{E2}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{F}{V_2} \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = (1 \ 0) \begin{pmatrix} x_{E1}(t) \\ x_{E2}(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

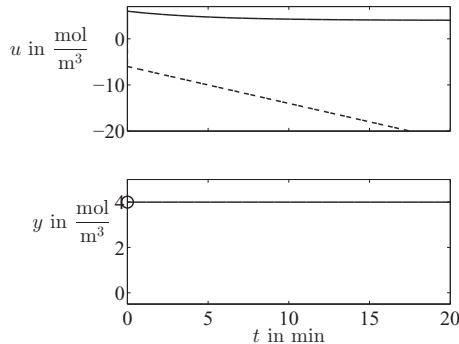
heißt und für den zweiten Fall

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_{E1}(t) \\ \dot{x}_{E2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2F}{V_1} & -\frac{2F^3}{V_1^2 V_2^2} \\ \frac{V_2}{F} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{E1}(t) \\ x_{E2}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{F}{V_2} \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = (1 \ 0) \begin{pmatrix} x_{E1}(t) \\ x_{E2}(t) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Anfangszustände  $\mathbf{x}_0 = (c_{10} \ \bar{w}_0)^T$ , für die die Konzentration des rechten Behälters zum Zeitpunkt  $t = 0$  den Sollwert  $\bar{w}_0$  hat, führen auf

$$\mathbf{x}_{E0} = \begin{pmatrix} \bar{w}_0 \\ x_{N0} \end{pmatrix},$$

wobei  $x_{N0}$  über die Transformationsmatrix für die E/A-Normalform mit dem Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  in Verbindung steht.



**Abb. 6.63:** Steuerung des minimalphasigen Systems  $\Sigma_1$  (—) und des nichtminimalphasigen Systems  $\Sigma_2$  (- - -)

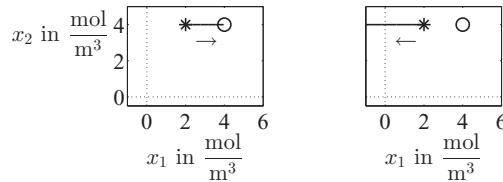
Das System  $\Sigma_1$  hat die stabile interne Dynamik

$$\dot{x}_N(t) = -\frac{2F}{V_1}x_N(t) + \frac{V_2}{F}\bar{w}_0.$$

Die Stellgröße erreicht für  $t \rightarrow \infty$  den stationären Wert  $\bar{u}$ , der das Behältersystem im Arbeitspunkt  $\bar{w}_0$  hält. Für die Parameter

Parameter	Bedeutung	Wert
$V_1$	Volumen des linken Behälters	$1 \text{ m}^3$
$V_2$	Volumen des rechten Behälters	$0,7 \text{ m}^3$
$F$	Zufluss in beide Behälter	$0,1 \frac{\text{m}^3}{\text{min}}$
$\bar{w}_0$	Arbeitspunkt	$4 \frac{\text{mol}}{\text{m}^3}$

und den Anfangszustand  $x_0 = (2 \frac{\text{mol}}{\text{m}^3} \quad 4 \frac{\text{mol}}{\text{m}^3})^T$ , in dem der linke Behälter eine zu kleine Konzentration hat, verläuft die Stellgröße entsprechend der durchgezogenen Linie in Abb. 6.63. Die positive Stellamplitude erhöht die Konzentration im Zulauf zu beiden Behältern, was die Konzentration im rechten Behälter auf dem Sollwert  $\bar{w}_0 = 4$  hält und gleichzeitig die Konzentration im linken Behälter erhöht, bis auch diese Konzentration den Arbeitspunktwert erreicht hat. Die Ausgangsgröße ist konstant:  $y(t) = \bar{w}_0 = 4 \frac{\text{mol}}{\text{m}^3}$ .



**Abb. 6.64:** Trajektorien des minimalphasigen Behältersystems  $\Sigma_1$  (links) und des nichtminimalphasigen Systems  $\Sigma_2$  (rechts) im Zustandsraum

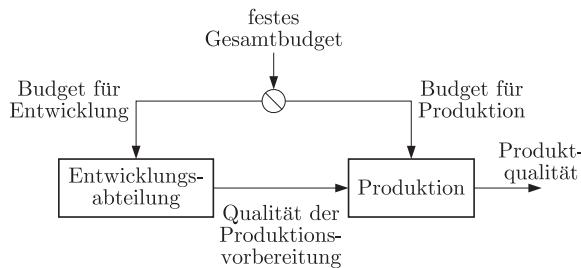
Beim System  $\Sigma_2$  ist die interne Dynamik ein Integrator

$$\dot{x}_N(t) = \frac{V_2}{F} \bar{w}_0$$

und die Stellgröße wächst folglich über alle Grenzen (gestrichelte Linie in Abb. 6.63). Hier ist die Wirkung des nichtminimalphasigen Verhaltens klar erkennbar. Die Forderung, die Konzentration des rechten Behälters auf dem Sollwert zu halten, lässt der Steuerung keine andere Wahl, als die Konzentration im Zulauf zum rechten Behälter gegenüber dem Arbeitspunktwert  $\bar{u} = 1$  anzuheben, um einer Konzentrationsabsenkung durch den Zulauf aus dem linken Behälter entgegenzuwirken. Das Anheben der Konzentration im Zulauf des rechten Behälters bedeutet aber gleichzeitig ein Absenken der Konzentration im linken Behälter (negative Stellamplitude  $u(t)$ ), was die dortige Konzentration weiter vermindert. Dieser Prozess ist instabil und führt den Zustand des Systems weiter vom Arbeitspunkt weg.

Abbildung 6.64 zeigt das Verhalten beider Systeme in Analogie zu Abb. 6.61 im Zustandsraum. Da die zweite Zustandsvariable die Regelgröße darstellt, verlaufen die Trajektorien auf waagerechten Linien. Der Anfangszustand ist durch einen Stern, der Arbeitspunkt durch einen Kreis markiert.

**Diskussion.** Das Beispiel zeigt eine typische Situation, in der nichtminimalphasiges Verhalten und folglich eine instabile interne Dynamik auftritt. Durch die Stellgröße wird ein fester Eingangsstrom von Flüssigkeit, Material, Energie oder Geld auf zwei gekoppelte Teilsysteme aufgeteilt. Im stationären Zustand führt der Eingangsstrom auf den gewünschten Sollwert. Wird das System gestört, so kann man nur durch eine Umverteilung des Eingangsstromes reagieren. Wenn dies so erfolgen muss, dass man die Störung nicht an der

**Abb. 6.65:** Budgetverteilung in einem Unternehmen

Regelgröße sehen kann, entstehen die in diesem Beispiel gezeigten instabilen Vorgänge. Der Grund ist wie in Abb. 6.57 die Überlagerung einer kurzfristigen und einer langfristigen Wirkung des Einganges mit unterschiedlichem Vorzeichen.

Für die Budgetverteilung in einem Unternehmen zeigt Abb. 6.65 ein einfaches Modell mit derselben Struktur wie das Behältersystem aus Abb. 6.62, anhand dessen man sich die dort ablaufenden, häufig beklagten Vorgänge überlegen kann, die zum Schrumpfen und später zum Schließen von Entwicklungsabteilungen führen. □

**Praktisches Vorgehen bei nichtminimalphasigem Verhalten.** Die Wirkung nichtminimalphasiger Systeme im Regelkreis wurde hier ausführlich erläutert um zu zeigen, dass man in der Praxis derartiges Verhalten unbedingt vermeiden sollte:

- Vermeiden Sie nichtminimalphasiges Verhalten durch eine geeignete Wahl von Sensoren und Aktoren.
- Beseitigen Sie nichtminimalphasiges Verhalten durch Rückführungen, die an angekoppelten Teilsystemen wirken.

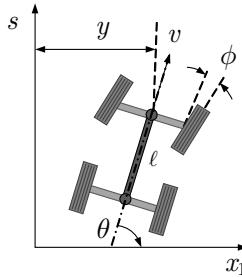
Der zweite Ratschlag greift auf Mehrgrößenregelkreise vor, die im zweiten Band behandelt werden. Dort wird gezeigt, dass eine Regelung mit der Stellgröße  $u_2$  und der Regelgröße  $y_2$  die Nullstellen des Regelkreises bezüglich eines anderen Signalpaars  $u_1, y_1$  verändern kann.

**Aufgabe 6.29** RC-Glied mit nichtminimalphasigem Verhalten

Geben Sie ein einfaches RC-Glied an, das nichtminimalphasiges Verhalten hat. □

**Aufgabe 6.30** Nichtminimalphasiges Verhalten von Flugzeugen

Betrachten Sie das Verhalten des Flugzeugs bei einer Veränderung des Höhenruders. Eingangsgröße ist der Winkel des Höhenruders, Ausgangsgröße die Höhe des Schwerpunktes des Flugzeugs über dem Boden. Geben Sie eine physikalische Erklärung, warum das Übertragungsverhalten des Flugzeugs bezüglich dieser Signale nichtminimalphasig ist. □



**Abb. 6.66:** Fahrzeugmodell

**Aufgabe 6.31\*** Rückwärtseinparken von Fahrzeugen

Die Schwierigkeiten, die viele Fahrer beim Rückwärtseinparken ihres Fahrzeugs haben, kann auf Nichtminimalphasenverhalten zurückgeführt werden. Betrachten Sie dazu das in Abb. 6.66 dargestellte Fahrzeug mit dem seitlichen Abstand  $y(t)$  als Ausgangsgröße und der Drehgeschwindigkeit  $\dot{\phi}(t)$  des Vorderrades als Eingangsgröße. Linearisiert man ein nicht-lineares Modell dieses Fahrzeugs um den Arbeitspunkt  $\bar{\theta} = 90^\circ$ ,  $\bar{u} = 0$  und  $\bar{\phi} = 0^\circ$ , so erhält man

$$\Sigma : \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \dot{\phi}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -v & 0 \\ 0 & 0 & \frac{v}{l} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \theta(t) \\ \phi(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = (1 \quad -l \quad 0) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \theta(t) \\ \phi(t) \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (6.140)$$

wobei  $v$  die Vorwärtsgeschwindigkeit und  $l$  den Achsabstand bezeichnen. Transformieren Sie das Modell in E/A-Normalform und zeigen Sie, dass Nichtminimalphasigkeit nur beim Rückwärtsfahren auftritt.  $\square$

**Aufgabe 6.32\*** Übertragungsfunktion eines Gleichstrommotors

Für den in Abb. 5.12 dargestellten Gleichstrommotor wurden auf S. 140 die Gleichungen (5.42) – (5.47) angegeben.

1. Zeichnen Sie ein Blockschaltbild für den Motor mit Eingangsgröße  $u(t) = u_A(t)$  und Ausgangsgröße  $y(t) = n(t)$ , in dem jede der angegebenen Gleichungen durch einen Block repräsentiert wird.  
(Hinweis: Überlegen Sie sich zuerst, welche Wirkungskette von der angelegten Spannung zur Drehzahl führt. Diese Wirkungskette muss sich im Blockschaltbild wiederfinden lassen.)
2. Interpretieren Sie die interne Rückführung, die aus dem Blockschaltbild offensichtlich wird. Repräsentiert sie einen Regler?
3. Schreiben Sie die Übertragungsfunktionen in die Blöcke und fassen Sie das Blockschaltbild schrittweise zusammen, um die Übertragungsfunktion des Motors zu ermitteln. Welchen Charakter hat der Motor?

4. Wie verändern sich Blockschaltbild und Charakter des Übertragungsverhaltens des Motors, wenn an Stelle der Drehzahl der Drehwinkel  $\phi(t)$  als Ausgangsgröße betrachtet wird?
5. Welche Pole und Nullstellen und welche statische Verstärkung besitzt der Motor für die auf S. 141 angegebenen Parameter? Hat der Motor ein minimalphasiges Verhalten? Skizzieren Sie das Bodediagramm.  $\square$

**Aufgabe 6.33** *Pole und Nullstellen einfacher Systeme*

Berechnen Sie von folgenden Systemen die Pol-Nullstellen-Form der Übertragungsfunktion und untersuchen Sie, unter welchen Bedingungen Pole bzw. Nullstellen positiven Realteil haben können.

- Parallelschaltung zweiter  $PT_1$ -Glieder
- Sprungfähiges System erster Ordnung
- Gleichstrommotor aus Aufgabe 6.32.

Wie sieht die Übergangsfunktion des sprungfähigen Systems erster Ordnung aus, dessen Nullstelle positiv ist?  $\square$

### 6.7.7 Totzeitglieder

Ein wichtiges Allpassglied ist das Totzeitglied (5.171). Es hat die Übertragungsfunktion

$$G(s) = e^{-sT_t}, \quad (6.141)$$

wie man anhand des Verschiebungssatzes (6.54) der Laplacetransformation erkennen kann. Für dieses System gilt außer Gl. (6.129) die Phasenbeziehung

$$\arg G(j\omega) = -\omega T_t = -\frac{\omega}{\omega_0} \quad (6.142)$$

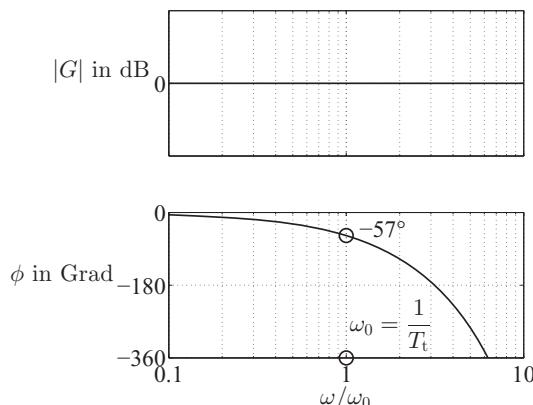
mit  $\omega_0 = \frac{1}{T_t}$ . Im Frequenzkennliniendiagramm liegt der Amplitudengang auf der 0 dB-Achse, während die Phase stetig abnimmt (Abb. 6.67). Die Ortskurve verläuft auf dem Einheitskreis, der für steigende Frequenz  $\omega$  beliebig oft umrundet wird.

In einer Reihenschaltung mit anderen Übertragungsgliedern führt ein Totzeitglied zu einer Ortskurve, die den Ursprung der komplexen Ebene häufig umrunden, wie Abb. 6.68 (oben links) für die Reihenschaltung eines  $PT_1$ - und eines Totzeitgliedes

$$G(s) = \frac{1}{s+1} e^{-10s}$$

zeigt. Die zugehörige Übergangsfunktion ist darunter zu sehen.

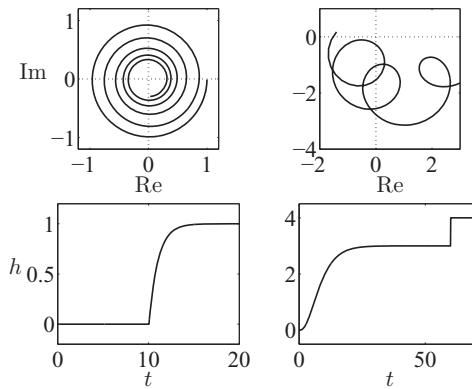
Dass Totzeitglieder zu überraschenden Ortskurven führen können, wird durch die Parallelschaltung



**Abb. 6.67:** Bodediagramm des Totzeitgliedes

$$G(s) = e^{-60s} + \frac{1}{(s + \frac{1}{2})(s + \frac{1}{3})(s + \frac{1}{4})} \quad (6.143)$$

eines Totzeitgliedes mit einem PT<sub>3</sub>-Glied illustriert. Aufgrund der Phasenverschiebung des Totzeitgliedes verläuft die Ortskurve in den in Abb. 6.68 (oben rechts) auschnittsweise gezeigten Schlaufen und geht für hohe Frequenzen in den Einheitskreis über, was in der Abbildung aus Gründen der Übersichtlichkeit weggelassen ist. Der Übergangsfunktion des PT<sub>3</sub>-Gliedes ist nach Ablauf der Totzeit ein sprungförmiger Anteil überlagert (Abb. 6.68 (unten rechts)).



**Abb. 6.68:** Ortskurven und Übergangsfunktionen zweier totzeitbehafteter Systeme

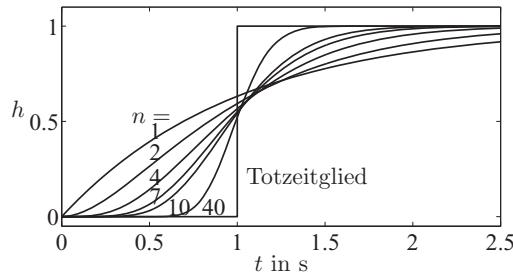
**Gebrochen rationale Approximationen von Totzeitgliedern.** Während sich alle totzeitfreien Systeme durch gebrochen rationale Übertragungsfunktionen beschreiben lassen, sprengen Totzeitglieder diese Systemklasse. Da dies für einige Analyse- und Entwurfsverfahren unzweckmäßig ist, behilft man sich häufig damit, das Totzeitglied durch ein Glied mit gebrochen rationaler Übertragungsfunktion zu approximieren. Die erste Möglichkeit der Approximation resultiert aus der Definitionsgleichung der e-Funktion

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 - \frac{x}{n}} \right)^n,$$

wobei man für  $x$  den Ausdruck  $-sT_t$  einsetzt. Es gilt

$$e^{-sT_t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\frac{T_t}{n}s + 1} \right)^n \approx \frac{1}{\left( \frac{T_t}{n}s + 1 \right)^n}. \quad (6.144)$$

Diese Übertragungsfunktion beschreibt eine Reihenschaltung von  $n$  PT<sub>1</sub>-Gliedern mit der Zeitkonstante  $\frac{T_t}{n}$ . Je größer  $n$  gewählt wird, desto besser ist die Approximation, desto größer ist allerdings auch die dynamische Ordnung des Näherungsmodells. Diese Tatsache wird aus den in Abb. 6.69 gezeigten Übergangsfunktionen des Totzeitgliedes und der PT <sub>$n$</sub> -Näherungen deutlich.



**Abb. 6.69:** Übergangsfunktion von PT <sub>$n$</sub> -Näherungen des Totzeitgliedes mit  $T_t = 1$  s

Die zweite Möglichkeit der Approximation von Totzeitgliedern verwendet die Padéentwicklung der e-Funktion in gebrochen rationale Funktionen mit Zählergrad  $q$  und Nennergrad  $n$ . Daraus entstehen z. B.

$$\text{für } q = 0 \text{ und } n = 1: \quad e^{-sT_t} \approx \frac{1}{T_t s + 1} \quad (\text{PT}_1\text{-Glied})$$

$$\text{für } q = 1 \text{ und } n = 1: \quad e^{-sT_t} \approx \frac{\frac{T_t}{2}s + 1}{\frac{T_t}{2}s + 1} \quad (\text{Allpassglied})$$

$$\text{für } q = 0 \text{ und } n = 2: \quad e^{-T_t s} \approx \frac{1}{T_t s^2 + \frac{T_t^2}{2}s + 1} \quad (\text{PT}_2\text{-Glied}).$$

Approximationen durch gebrochen rationale Funktionen höheren Grades können Tabellenbüchern entnommen werden. Auch bei diesem Weg der Approximation erhält

man Näherungen mit akzeptabler Genauigkeit nur für hinreichend große Systemordnung  $n$ .

**Aufgabe 6.34\*** Klassifikation von Systemen anhand des Frequenzkennliniendiagramms

In Abb. 6.70 sind die Frequenzkennliniendiagramme der vier Systeme

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{100(s+1)(s+3)}{4s(s+10)(s+5)} & G(s) &= \frac{0,25s}{0,5s+1} e^{-5s} \\ G(s) &= \frac{1000}{(s+0,1)(s+1)(s+2)(s+10)} & G(s) &= \frac{s(s+2)}{s^2+4s+8} \end{aligned}$$

dargestellt. Ordnen Sie die Übertragungsfunktionen den Diagrammen zu und zeichnen Sie die zugehörigen Ortskurven.  $\square$

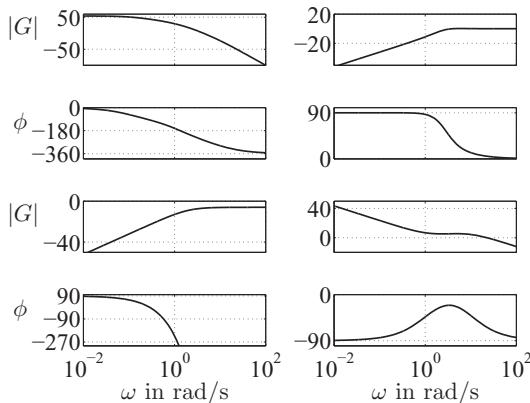
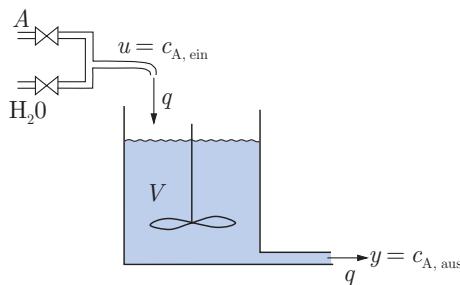


Abb. 6.70: Frequenzkennliniendiagramme von vier Systemen

**Aufgabe 6.35** Stoffkonzentration in einem Behälter

Ein kontinuierlich durchflossener Reaktor (Kontireaktor) mit dem Volumen  $V$  wird von einer Flüssigkeit mit konstanten Durchfluss  $q$  durchströmt. Die Konzentration des Stoffes A am Zulauf ist die Eingangsgröße. Sie wird durch eine entsprechende Dosierung des Stoffes A und der Wasserzufuhr über die beiden in der Abbildung gezeigten Ventile erreicht. Der Behälter wird als homogen durchmischt betrachtet. Ausgangsgröße ist die am Auslauf gemessene Stoffkonzentration.

1. Welchen Charakter hat diese System? Geben Sie als Begründung Ihrer Antwort die Übertragungsfunktion an. Welche Pole und Nullstellen können Sie aus der Übertragungsfunktion ablesen? Wie sehen Übergangsfunktion, Bodediagramm und Ortskurve aus?



**Abb. 6.71:** Kontinuierlich durchflossener Reaktor

2. Was verändert sich, wenn der Behälter durch zwei nacheinander durchflossene Behälter mit Volumen  $\frac{V}{2}$  ersetzt wird?
3. Welchen Charakter hat das Übertragungsverhalten, wenn eine große Zahl  $n$  kleinerer Behälter mit Volumen  $\frac{V}{n}$  verwendet wird? (Hinweis: Beachten Sie die Beziehung (6.144).) □

## 6.8 MATLAB-Funktionen für die Systemanalyse im Frequenzbereich

Die gebrochen rationale Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)}$$

wird in MATLAB durch Vektoren  $z$  und  $n$  dargestellt, in denen die Polynomkoeffizienten der Polynome  $Z(s)$  bzw.  $N(s)$  in Richtung fallender Exponenten enthalten sind. Für das System

$$G(s) = \frac{6}{(T^2 s^2 + 2dTs + 1)(T_3 s + 1)} = \frac{6}{2s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

(mit  $T = 1$ ,  $d = 0,5$  und  $T_3 = 2$ ) notiert man Zähler- und Nennerpolynom also wie folgt

```
>> z = [6];
>> n = [2 3 3 1];
```

und fasst es zu einem System mit dem Namen `System` durch

```
>> System = tf(z, n);
```

zusammen. Andererseits können Zähler- und Nennerpolynom durch die Anweisung

```
>> [z, n] = tfdata(System, 'v');
```

wieder ausgelesen werden. Das durch die Polynome  $z$  und  $n$  festgelegte System kann man sich mit der Funktion

```
>> printsyst(z, n)
```

als gebrochen rationalen Ausdruck auf dem Bildschirm ausgeben lassen.

Die Funktion `tfdata` kann auch angewendet werden, wenn das System zuvor mit der Funktion `ss` im Zustandsraum definiert wurde. Dann bewirkt der Aufruf von `tfdata` gleichzeitig die Umrechnung des Zustandsraummodells in die Übertragungsfunktion entsprechend Gl. (6.76). Andererseits bewirkt die Funktion `ssdata` auch die Überführung eines durch die Übertragungsfunktion  $z$  und  $n$  definierten Systems in ein Zustandsraummodell, was durch die Interpretation der gegebenen Polynomkoeffizienten als Koeffizienten einer Differentialgleichung und die Festlegung des Zustandsraummodells in Regelungsnormalform entsprechend der Gln. (4.54) – (4.65) geschieht (vgl. auch die Erläuterungen auf S. 261):

```
>> [A, b, c, d] = ssdata(System);
```

Die Pole und Nullstellen des Systems erhält man mit der Funktion

```
>> pzmap(System);
```

grafisch in der komplexen Ebene dargestellt (PN-Bild).

Wird mit Übertragungsfunktionen gerechnet, bei denen sich Pole gegen Nullstellen kürzen, so kann dies zu numerischen Schwierigkeiten führen, wenn die Werte beider Parameter nicht exakt übereinstimmen. Mit der Funktion

```
>> minSystem = minreal(System);
```

werden die entsprechenden Linearfaktoren gekürzt. Diese Funktion kann unabhängig davon angewendet werden, ob `System` durch ein Zustandsraummodell oder eine Übertragungsfunktion definiert wurde.

Um Totzeitsysteme in gleicher Weise wie totzeitfreie Systeme behandeln zu können, arbeitet man mit der Padéapproximation, die man durch den Aufruf

```
>> [z, n] = pade(Tt, n);
```

mit der Totzeit  $Tt$  und der gewünschten dynamischen Ordnung  $n$  erhält. Ein totzeitbehaftetes System kann unter Verwendung einer solchen Approximation in ein totzeitfreies System überführt werden, wenn man die Funktion folgendermaßen aufruft:

```
>> SystemApprox = pade(System, n);
```

Auch die folgenden Funktionen können gleichermaßen für die durch ein Zustandsraummodell oder eine Übertragungsfunktion bestimmten Systeme aufgerufen werden, weil gegebenenfalls eine Umrechnung in den Frequenzbereich erfolgt. Das Bodediagramm erhält man als grafische Darstellung auf dem Bildschirm mit der Funktion

```
» bode (System) ;
```

und die Ortskurve mit dem Aufruf

```
» nyquist (System) ;
```

Abb. 6.8 auf S. 244 entstand beispielsweise durch Anwendung der letzten Funktion auf das oben angegebene Modell (allerdings ohne die zusätzlich in der Abbildung eingetragenen Frequenzwerte).

Das *sisotool* ist ein grafisches Interface für die angegebenen Funktionen, mit dem man beispielsweise ein PN-Bild eingeben und verändern und die daraus resultierenden Veränderungen des Bodediagramms verfolgen kann. Es wird durch

```
» sisotool;
```

aufgerufen und eignet sich hervorragend, um Einblicke in die Systemeigenschaften im Frequenzbereich zu erhalten und Erfahrungen mit deren Empfindlichkeit bei Parameteränderungen zu sammeln. Durch den Aufruf

```
» sisotool (System) ;
```

werden die Eigenschaften von *System* angezeigt.

Die im Abschn. 5.8 erläuterten Funktionen, mit denen das zeitliche Verhalten eines Systems berechnet werden kann, können auch auf Systeme angewendet werden, die durch eine Übertragungsfunktion definiert sind:

```
» step (System) ;
» impulse (System) ;
» lsim (System, u, t, x0) ;
» dcgain (System)
```

**Übertragungsfunktion zusammengeschalteter Übertragungsglieder.** Die im Abschn. 6.5.6 angegebenen Beziehungen für die Reihen-, Parallel- und Rückkopplungsschaltung von Übertragungsgliedern erlauben es, die Übertragungsfunktion der zweier gekoppelter Übertragungsglieder aus den Übertragungsfunktionen der beiden Elemente zu berechnen. Dafür sind dieselben Funktionen *series*, *parallel* und *feedback* anwendbar, die für die Zusammenschaltung von Teilsystemen in Zustandsraumdarstellung bereits behandelt wurden. Auch hier erfolgt bei Systemen, die nicht im selben Betrachtungsbereich definiert wurden, eine Umformung des Zustandsraummodells in die Übertragungsfunktion oder umgekehrt:

```
>> Reihenschaltung = series(System1, System2);
>> Parallelschaltung = parallel(System1, System2);
>> Rueckfuehrschaltung = feedback(System1, System2);
```

### Beispiel 6.11 Analyse einer Raumtemperaturregelung im Frequenzbereich

Die Raumtemperaturregelung aus Beispiel 5.14 soll jetzt im Frequenzbereich analysiert werden. Dafür kann man entweder das Zustandsraummodell, das im Programm 5.1 auf S. 223 mit dem Namen Raum belegt wurde, in den Frequenzbereich transformieren

```
>> Raum=tf(Raum)
Transfer function
```

$$\frac{1}{s + 0.2}$$

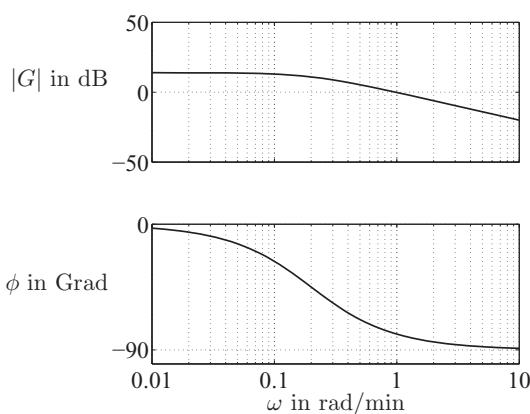
oder man gibt die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{s + 0.2}$$

durch die Anweisungen

```
>> z = [1];
>> n = [1 0.2];
>> Raum = tf(z, n);
```

ein.



**Abb. 6.72:** Bodediagramm des Raumes

Die Übergangsfunktion oder die Gewichtsfunktion können jetzt genauso mit den Funktionen `step` bzw. `impulse` berechnet werden, wie es im Beispiel 5.14 unter Verwendung des Zustandsraummodells mit dem Namen Raum getan wurde:

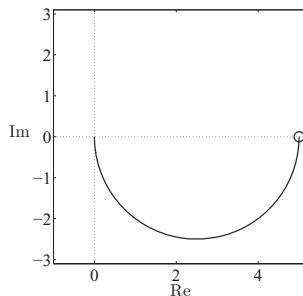
```
>> step(Raum);
>> impulse(Raum);
```

Die in Abb. 6.72 dargestellte Frequenzkennlinie erhält man mit dem Funktionsaufruf

```
>> bode(Raum);
```

sowie die Ortskurve durch

```
>> nyquist(Raum);
```



**Abb. 6.73:** Ortskurve des Raumes

Für den Regler

```
>> Regler = tf(0.3);
```

kann man wie bei der Zeitbereichsbetrachtung mit den Funktionsaufrufen

```
>> offeneKette = series(Raum, Regler);
>> Regelkreis = feedback(offeneKette, 1)
```

Transfer function

$$\frac{0.3}{s + 0.5}$$

den Regelkreis berechnen. Bei der letzten Anweisung wurde das Semikolon weggelassen, so dass der MATLAB-Interpreter die Übertragungsfunktion des Regelkreises ausgegeben hat. Die Eins gibt die Übertragungsfunktion der Einheitsrückführung an, durch die der Regelkreis geschlossen wird, dessen Vorwärtszweig aus dem Regler und der Regelstrecke besteht. Mit

```
>> bode(Regelkreis);
>> nyquist(Regelkreis);
```

kann man sich das Bodediagramm bzw. die Ortskurve des Regelkreises anzeigen lassen oder durch

**Programm 6.1 Systemanalyse im Frequenzbereich**  
*(Beispiel 6.11: Analyse einer Raumtemperaturregelung)*

<pre> » z = [1]; » n = [1 0.2]; » Raum = tf(z, n);  » step(Raum);           ...erzeugt den oberen Teil von Abb. 5.51 auf S. 220 » impulse(Raum);       ...erzeugt den unteren Teil von Abb. 5.51 » dcgain(Raum)  ans=       5 </pre>	<p><b>Modell der Regelstrecke</b></p> <p><b>Analyse der Regelstrecke</b></p> <p><b>Bestimmung des Regelkreismodells</b></p> <p><b>Analyse des Regelkreises</b></p>
	<small>statische Verstärkung</small>
	<small>Regler (5.193)</small>

» step(Regelkreis);

die Führungsübergangsfunktion berechnen. Will man auch die Eigenbewegung des Regelkreises für eine anfängliche Temperaturabweichung von 2 Grad ermitteln, so muss man das Regelkreismodell zunächst in den Zustandsraum transformieren:

» Regelkreis = ss(Regelkreis);

In diesem Modell, das man sich wie bereits besprochen mit der Funktion `print sys` ausgeben lassen kann, steht in der Ausgabegleichung der Faktor 0,6, so dass der Anfangszustand  $x_0 = \frac{2}{0,6}$  die gewünschte Temperaturabweichung von 2 Grad erzeugt. Die Eigenbewegung erhält man dann mit dem Funktionsaufruf

» initial(Regelkreis, 2/0.6);

Die für dieses Beispiel verwendeten Funktionsaufrufe sind im Programm 6.1 zusammengefasst. □

**Aufgabe 6.36 Analyse eines Gleichstrommotors**



Die Übertragungsfunktion des in Aufgabe 6.32 auf S. 330 angegebenen Gleichstrommotors heißt

$$G(s) = \frac{0,0482}{0,011s^2 + 0,920s + 1}.$$

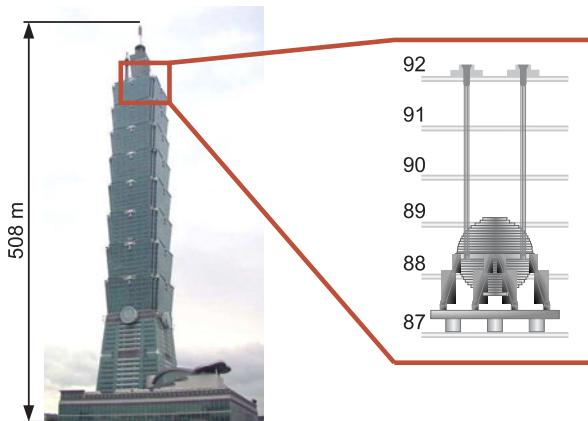
Analysieren Sie mit Hilfe der Programme 5.1 und 6.1 das Verhalten dieses Systems im Zeitbereich und im Frequenzbereich. Vergleichen Sie diese Ergebnisse mit denen, die Sie unter Verwendung des vereinfachten Modells (5.183) erhalten. □

**Aufgabe 6.37** Padéapproximation von Totzeitgliedern

Berechnen Sie mit der Funktion `pade` für ein Totzeitglied die Padéapproximationen unterschiedlicher dynamischer Ordnung. Wie verändern sich mit steigender dynamischer Ordnung das PN-Bild der erhaltenen Übertragungsfunktionen und die Approximationsgenauigkeit der Übergangsfunktion? □

**Aufgabe 6.38\*** Schwingungstilgung am Hochhaus „Taipeh 101“

Hochhäuser neigen zu Schwingungen, die durch Wind oder Erdbeben ausgelöst werden. Schwingungsdämpfer, die durch Wasserbehälter oder Pendel an der Spitze des Hochhauses realisiert werden, sollen die Schwingungen dämpfen. Für das Hochhaus „Taipeh 101“ ist das Prinzip in Abb. 6.74 dargestellt. Als Schwingungsdämpfer wird ein 600 t schweres Pendel eingesetzt, das in den Etagen 87 bis 92 aufgehängt ist und dessen Bewegung durch Dämpfer an der Unterseite gebremst wird. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass Schwingungsdämpfer systemdynamisch interpretiert dazu führen, dass in das Hochhaus Nullstellen bei der Frequenz kritischer Erregungen eingebaut werden.



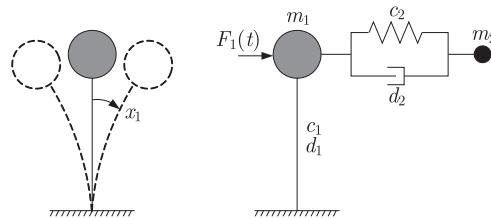
**Abb. 6.74:** Schwingungstilgung am Hochhaus

Bei der hier verwendeten einfachen Modellbildung wird das Haus als ein schwingender Stab betrachtet und der Dämpfer als eine daran elastisch angekoppelte, gedämpfte Masse (Abb. 6.75). Im Zustandsraummodell

$$\text{Tilger : } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{c_1+c_2}{m_1} & -\frac{d_1+d_2}{m_1} & \frac{c_2}{m_1} & \frac{d_2}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{c_2}{m_2} & \frac{d_2}{m_2} & -\frac{c_2}{m_2} & -\frac{d_2}{m_2} \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = (1 \ 0 \ 0 \ 0) \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (6.145)$$

sind die Zustandsvariablen die Position und Geschwindigkeit der Masse  $m_1$  (Haus) sowie die Position und die Geschwindigkeit der Masse  $m_2$  (Pendel). Als Erregung wirkt eine an

der Spitze des Hauses angreifende Kraft  $F_1(t)$ . Es wird mit folgenden Parametern gearbeitet, die für einen Versuchsaufbau im Institut des Autors zutreffen und für Hochhäuser angepasst werden können:



**Abb. 6.75:** Modellierungsansatz

Parameter	Bedeutung	Wert
$m_1$	Gewicht des Hauses	1 kg
$m_2$	Gewicht des Pendels	0,11 kg
$c_1$	Rückstellkonstante des Hauses (Federkonstante)	100 $\frac{N}{m}$
$c_2$	Rückstellkonstante des Pendels (Federkonstante)	10 $\frac{N}{m}$
$d_1$	Dämpfungskonstante des Hauses	0 $\frac{Ns}{m}$
$d_2$	Dämpfungskonstante des Pendels	0,02 $\frac{Ns}{m}$

1. Berechnen Sie die Nullstellen des Hochhauses mit Schwingungsdämpfer in Abhängigkeit von den Modellparametern.
2. Analysieren Sie das Verhalten des Hauses für eine Anregung mit der Frequenz der Nullstellen. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Verhalten des Hauses ohne Schwingungsdämpfer ( $m_2 = 0, c_2 = 0, d_2 = 0$ ).
3. Vergleichen Sie die Amplitudengänge des Hauses mit und ohne Dämpfer. □

## Literaturhinweise

Für eine ausführliche Erläuterung der Laplacetransformation für Ingenieure wird auf [25, 32] verwiesen. Der FADDEEV-Algorithmus ist in [37] erläutert. Analytische Beziehungen für die Laplacetransformierte der Übergangsmatrix erhält man für Systemmatrizen in Begleitmatrixform auch auf dem in [2] angegebenen Weg.

Wie von BODE in [17] gezeigt wurde, können Amplitudengang und Phasengang minimalphasiger Systeme ineinander umgerechnet werden. Dieser Zusammenhang ist als *Gain/phase theorem* in die Literatur eingegangen [7]. Dementsprechend erhält man die Phase als gewichteten Mittelwert der Steigung des Amplitudenganges im Bodediagramm.

Für den Begriff der Minimalphasigkeit linearer Systeme gibt es in der Literatur mehrere Definitionen, die sich insbesondere in der Behandlung von Polen und Nullstellen auf der Imaginärachse unterscheiden (für eine Übersicht siehe [111]). Die hier verwendete Definition, bei der die Minimalphasigkeit mit der Stabilität der internen Dynamik übereinstimmt, ist für die Regelungstechnische Behandlung zweckmäßig, weil nach dieser Definition nichtminimalphasige Systeme wesentlich schwieriger zu regeln sind als minimalphasige Systeme. Sie stimmt mit der in [20] angegebenen Verallgemeinerung des Nichtminimalphasenverhaltens für nichtlineare Systeme überein.

Die auf S. 321 angegebene Regel zum Verhalten nichtminimalphasiger Systeme wurde in [103] dadurch bewiesen, dass das Vorzeichen der  $r$ -ten Ableitung der Ausgangsgröße mit dem Grenzwertsatz (6.61) der LaplaceTransformation in Abhängigkeit von den Vorzeichen der Nullstellen dargestellt wurde.

Zum Wolkenkratzer „Taipeh 101“ gibt es zahlreiche Internetseiten. Bei *Wikipedia* ist auch das Dämpferpendel abgebildet. Die in Aufgabe 6.38 verwendeten Parameter stammen vom Demonstrationsversuch am Lehrstuhl des Autors. Die dabei verwendeten Grundlagen der Baudynamik sind beispielsweise in [87] dargestellt, in denen ähnliche Parameterverhältnisse angesetzt werden.

# 7

## Der Regelkreis

Dieses Kapitel behandelt grundlegende Eigenschaften von Regelkreisen, wobei die erreichbare Regelgüte, notwendige Entwurfskompromisse sowie die Wahl der Reglerstruktur im Vordergrund stehen.

### 7.1 Reglerentwurfsaufgabe

Dieses Kapitel untersucht Standardregelkreise mit der in Abb. 7.1 gezeigten Struktur. Gegeben ist eine Regelstrecke  $\Sigma_S$ , die mit einem zu entwerfenden Regler  $\Sigma_R$  zum Regelkreis  $\bar{\Sigma}$  geschlossen wird. Die dabei zu erfüllenden Güteforderungen beziehen sich auf das Verhalten des Regelkreises  $\bar{\Sigma}$ , der mit der Führungsgröße  $w(t)$  und der Störgröße  $d(t)$  zwei Eingangsgrößen sowie eine Ausgangsgröße  $y(t)$  besitzt. Die Aufgabe des Reglerentwurfs kann folgendermaßen zusammengefasst werden:

#### Reglerentwurfsaufgabe

- |          |                                                                                                    |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Gegeben: | Modell der Regelstrecke $\Sigma_S$<br>Forderungen an das Verhalten des Regelkreises $\bar{\Sigma}$ |
| Gesucht: | Reglergesetz $\Sigma_R$ , für das der Regelkreis die gegebenen<br>Güteforderungen erfüllt          |

Die Güte der Regelung wird i. Allg. anhand der folgenden vier Gruppen von Güteforderungen beurteilt. Es sei betont, dass sich diese Güteforderungen nicht auf den

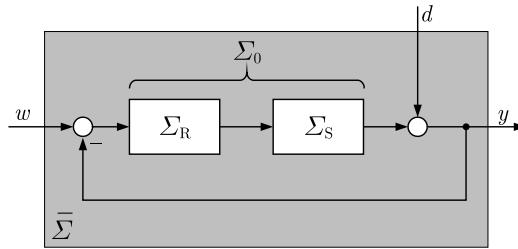


Abb. 7.1: Regelkreis

Regler, sondern auf das Verhalten des Regelkreises beziehen. Der Entwurf des Reglers dient der Gestaltung des Verhaltens des Regelkreises, weswegen man eigentlich besser vom *Regelkreisentwurf* sprechen sollte.

### (I) Stabilitätsforderung.

Der geschlossene Regelkreis muss asymptotisch stabil sein.

Die Eigenschaft der Stabilität dynamischer Systeme wird im Kap. 8 behandelt. Ist der Regelkreis stabil, so reagiert er auf endliche Erregungen durch Führungs- oder Störsignale mit einem endlichen Ausgangssignal. Insbesondere klingen seine freie Bewegung und sein Übergangsverhalten ab:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{\text{frei}}(t) = 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_{\ddot{u}}(t) = 0. \quad (7.1)$$

Das Regelkreisverhalten ist deshalb für große Zeiten durch das stationäre Verhalten bestimmt

$$y(t) \approx y_s(t) \quad \text{für große } t.$$

Wird der Regelkreis nicht durch die Führungsgröße und die Störgröße erregt ( $w(t) = 0, d(t) = 0$ ), so kehrt er in seine Ruhelage  $x = 0$  zurück.

### (II) Forderung nach Störkompensation und Sollwertfolge.

Für vorgegebene Klassen von Führungs- und Störsignalen soll die Regelgröße der Führungsgröße asymptotisch folgen:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (w(t) - y(t)) = 0. \quad (7.2)$$

Da in der Zerlegung  $y = y_{\text{frei}} + y_{\ddot{u}} + y_s$  des Regelkreisverhaltens bei Erfüllung der Stabilitätsforderung (I) die ersten beiden Summanden entsprechend Gl. (7.1) abklingen, ist die Forderung (7.2) gleichbedeutend mit

$$y_s(t) \stackrel{!}{=} w(t). \quad (7.3)$$

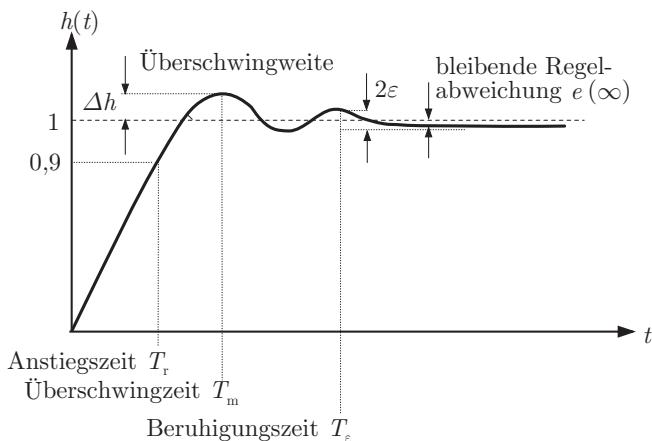
Der Regelkreis soll ein vorgegebenes stationäres Verhalten besitzen.

Für die Erfüllung dieser Forderungen muss spezifiziert werden, welche Art von Führungssignalen  $w(t)$  und Störsignalen  $d(t)$  typischerweise auftreten, weil die Forderung (7.3) durch *einen* Regler nicht für *beliebige* Signale gleichzeitig erfüllt werden kann. Im Allgemeinen wird die Forderung für sprungförmige Führungs- und Störsignale aufgestellt, da sprungförmige Signale eine gute Näherung für sich zeitlich ändernde Signale darstellen, die für lange Zeit auf bestimmten Werten verbleiben. Aber auch rampenförmige oder sinusförmige Führungs- oder Störsignale sind gebräuchlich.

Sind die Stabilitätsforderung (I) und die Forderung (7.2) erfüllt, so hat der Regelkreis für große Zeit  $t$  keine *bleibende Regelabweichung*  $e(\infty)$ :

$$e(\infty) = 0.$$

Man sagt auch, der Regelkreis ist stationär genau. Wie im Abschn. 7.3 gezeigt wird, hängt es im Wesentlichen von der Struktur des Reglertyps und nur unwesentlich von den Reglerparametern ab, ob eine bleibende Regelabweichung auftritt oder nicht.



**Abb. 7.2:** Führungsübergangsfunktion des Regelkreises mit Kennzeichnung wichtiger Kennwerte

### (III) Dynamikforderungen.

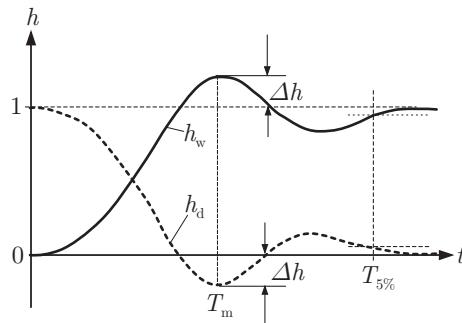
Der dynamische Zusammenhang zwischen der Führungsgröße  $w(t)$  bzw. der Störgröße  $d(t)$  und der Regelgröße  $y(t)$  soll vorgegebene Güteforderungen erfüllen.

Sind die Forderungen (I) und (II) erfüllt und wird der Regelkreis aus der Ruhelage  $x = 0$  erregt, so wird die Regelabweichung ausschließlich durch das Übergangsverhalten des Regelkreises bestimmt:

$$e(t) = w(t) - y(t) = y_{\ddot{u}}(t).$$

Die Dynamikforderungen wenden sich an das Übergangsverhalten und damit an die Art und Weise, wie sich  $y(t)$  an  $w(t)$  annähert.

Dynamikforderungen werden häufig in Bezug zur Stör- oder Führungsübergangsfunktion formuliert. Dabei werden Vorgaben für die Zeit bis zum Erreichen von 90% des statischen Endwertes (Anstiegszeit), den Betrag und die Zeit des ersten Überschwingens der Übergangsfunktion (Überschwingweite und Überschwingzeit) bzw. die Zeit bis zum Einschwingen in einen Schlauch der Breite  $\pm \varepsilon$  (Einschwingzeit, Beruhigungszeit) gemacht.



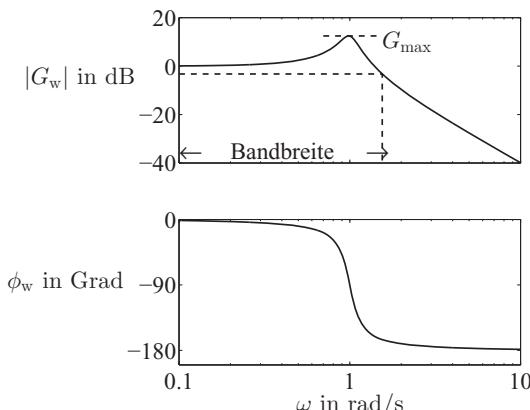
**Abb. 7.3:** Übergangsfunktionen bei sprungförmiger Störung bzw. Führung

Alternativ dazu können die Gütforderungen auch für die Störübertragungsfunktion  $G_d(s)$  oder die Führungsübertragungsfunktion  $G_w(s)$  formuliert werden. Diese Übertragungsfunktionen beschreiben das E/A-Verhalten des Regelkreises bezüglich der Störgröße  $D(s)$  bzw. der Führungsgröße  $W(s)$  als Eingang und der Regelgröße  $Y(s)$  als Ausgang. Als Gütforderungen werden z. B. die Resonanzfrequenz  $\omega_r$ , die Amplitudenüberhöhung  $G_{\max} = |G_w(\omega_r)|$  und die Bandbreite vorgegeben. Für sprungförmige Führungssignale tritt Sollwertfolge ein, wenn  $|G_w(0)|_{\text{dB}} = 0$  ist.

#### (IV) Robustheitsforderungen.

Die Forderungen (I) – (III) sollen trotz Unsicherheiten im Regelstreckenmodell erfüllt werden.

Der an einem Modell der Regelstrecke entworfene Regler soll die Forderungen nach Stabilität des geschlossenen Kreises, nach Störkompensation und Sollwertfolge sowie die Dynamikforderungen auch dann an der realen Regelstrecke erfüllen, wenn



**Abb. 7.4:** Bodediagramm des Führungs frequenzganges mit Kennzeichnung wichtiger Kennwerte

das verwendete Modell die Regelstrecke nicht exakt wiedergibt. Abweichungen zwischen dem Modellverhalten und dem aktuellen Verhalten der Regelstrecke entstehen aus einem der folgenden Gründe:

- Die Regelstrecke ist unvollständig bekannt, so dass kein genügend genaues Modell aufgestellt werden kann.
- Das Regelstreckenmodell entstand durch Modellvereinfachungen eines genauen, aber sehr komplexen Modells.
- Es wird ein lineares Modell mit konstanten Parametern verwendet, obwohl die Regelstrecke wichtige nichtlineare Elemente enthält bzw. zeitlich veränderliche Parameter besitzt.

Diese Gründe werden als *Modellunbestimmtheiten* oder Modellunsicherheiten bezeichnet.

Wie im Abschn. 1.2 bereits erläutert wurde, sind Regelkreise i. Allg. sehr robust gegenüber Veränderungen im Regelstreckenverhalten, weil der Regler die Stellgröße  $u(t)$  in Abhängigkeit von der aktuellen Regelgröße  $y(t)$  berechnet. Das Rückführprinzip sorgt dafür, dass der für ein Regelstreckenmodell entworfene Regler auch dann funktioniert, wenn das Regelstreckenverhalten erheblich von dem des Modells abweicht. Bei der Robustheitsforderung (IV) werden deshalb *wesentliche* Modellunbestimmtheiten betrachtet.

Die Robustheitsforderung muss stets bezüglich einer vom Regelkreis zu erfüllenden Eigenschaft und bezüglich einer gegebenen Klasse von Modellunbestimmtheiten gestellt werden. In Abhängigkeit von der gewählten Beschreibung der Modellunbestimmtheiten wird zwischen einer qualitativen und einer quantitativen Robustheitsanalyse unterschieden. Aus einer qualitativen Analyse erhält man eine Aussage dar-

über, ob von dem entworfenen Regler eine wesentliche Robustheit erwartet werden kann. Beispielsweise ist der im Abschn. 8.5.5 eingeführte Phasenrand ein Maß für die Robustheit des Regelkreises bezüglich der Forderung nach Stabilität. Ein Regelkreis mit einem Phasenrand von  $60^\circ$  ist „robuster“ als ein Regelkreis mit einem Phasenrand von  $30^\circ$ . Die qualitative Analyse sagt aber nichts darüber aus, wie groß die vom Regler tolerierten Modellunbestimmtheiten tatsächlich sind.

Bei der quantitativen Robustheitsanalyse wird überprüft, ob die gegebenen Güteforderungen an den Regelkreis für alle Regelstrecken erfüllt sind, die durch das gegebene Modell innerhalb einer quantitativ beschränkten Modellunsicherheit beschrieben werden. Beispielsweise wird im Abschn. 8.6.3 von Modellunbestimmtheiten  $\delta G(j\omega)$  des Regelstreckenmodells ausgegangen, die durch die obere Schranke  $\bar{G}_A(j\omega) \geq |\delta G(j\omega)|$  begrenzt werden, und untersucht, ob der entworfene Regler mit allen Regelstrecken zu einem stabilen Regelkreis führt, die vom Nominalmodell  $\hat{G}(j\omega)$  um höchstens  $\bar{G}_A(j\omega)$  abweichen.

Die Bewertung der Robustheit eines entworfenen Reglers gehört zu jedem Reglerentwurf dazu, sei es in Form einer qualitativen Betrachtung oder durch eine (genauere) quantitative Analyse. Häufig wird der zuvor nur unter Beachtung der Entwurfsforderungen (I) – (III) bestimmte Regler nachträglich bezüglich seiner Robustheit beurteilt. Es gibt jedoch auch Entwurfsverfahren, deren Grundidee wesentlich auf Robustheitsbetrachtungen des Regelkreises beruht. Als ein Beispiel wird im Abschn. 12.2 die IMC-Regelung beschrieben, bei der das Regelstreckenmodell direkter Bestandteil des Reglertesgesetzes ist und bei dem deshalb mit einem möglichst einfachen Streckenmodell gearbeitet wird. Dieses Prinzip ist deshalb besonders wirksam, wenn ein sehr einfaches Modell der Regelstrecke mit möglicherweise erheblichen Modellunbestimmtheiten verwendet und die Rückführverstärkung so gewählt wird, dass der Regelkreis die Modellunbestimmtheiten toleriert. Bei den meisten anderen hier behandelten Entwurfsverfahren wird die Robustheit jedoch nur qualitativ bewertet.

**Festwertregelung und Folgeregelung.** In Abhängigkeit davon, welche Güteforderungen die Regelungsaufgabe am stärksten beeinflussen, wird zwischen einer Festwertregelung und einer Folgeregelung unterschieden.

- Bei der *Festwertregelung* (Störgrößenregelung) wird der Regler für konstante Führungsgröße vor allem im Hinblick auf die Störkompensation (Störunterdrückung) bemessen. Die Regelgröße soll auf einem gegebenen Sollwert  $w(t) = \text{konst.}$  verbleiben, obwohl die Regelstrecke von außen gestört ist. Bei dieser Aufgabe kommt es vor allem darauf an, dass der Regler auf den typischerweise auftretenden Verlauf der Störgröße angemessen reagiert.
- Bei der *Folgeregelung* (Nachlaufregelung) spielt die Nachführung der Regelgröße an eine vorgegebene Solltrajektorie  $w(t)$  die maßgebende Rolle. Die Aufgabe der Folgeregelung wird häufig durch eine Kombination von Vorsteuerung und Regelung gelöst (Abb. 1.7 auf S. 11), wobei die Vorsteuerung die Regelgröße

möglichst schnell an die Führungsgröße anpasst, während die Rückführung Störungen kompensiert. Bei der Folgeregelung gehört auch die Planung der Solltrajektorie zur Lösung der Regelungsaufgabe (vgl. Abschn. 7.5).

**Güteforderungen bei praktischen Regelungsaufgaben.** Die in diesem Buch aufgeführten Beispiele zeigen, dass die in der Praxis auftretenden Regelungsaufgaben i. Allg. *nicht* in der hier angegebenen Weise formuliert sind. Statt dessen beziehen sich diese Aufgaben auf praktische Vorgaben wie Qualitäts-, Energie- oder andere Produktionskennwerte. So wird gefordert, dass die in einem Produktionsprozess hergestellten Produkte eine hohe Qualität aufweisen, die Produktion energieoptimal und umweltverträglich ablaufen soll, dass sicherheitstechnische Fragen gelöst sein müssen oder dass Produktionsanlagen so ausgelegt sein sollen, dass man sie flexibel auf unterschiedliche Rohstoffe oder Produkte einstellen kann. Erst wenn man diese Forderungen in regelungstechnische Fragestellungen überführt hat, erhält man Regelungsaufgaben mit den o. g. Güteforderungen (I) – (IV). Aus diesem Grund wurde in Abb. 1.12 auf S. 16 auch von einem „Modell der Güteforderungen“ gesprochen, womit die in der Form (I) – (IV) gestellten Forderungen gemeint sind.

Ein wichtiges Merkmal regelungstechnischer Fragestellungen ist es, dass sie unabhängig von dem Anwendungsgebiet in der o. g. Form formuliert werden können. Dadurch ist es möglich, eine allgemeingültige Lösungsmethodik zu entwickeln und diese auf Regelungsaufgaben aus sehr unterschiedlichen Anwendungsfeldern anzuwenden.

## 7.2 Modell des Standardregelkreises

### 7.2.1 Beschreibung im Frequenzbereich

Im Folgenden wird der Standardregelkreis im Frequenzbereich betrachtet (Abb. 7.5). Dieser Regelkreis ist dadurch gekennzeichnet, dass der Regler die Regelabweichung  $E$  auf die Stellgröße  $U$  zurückführt und keine weiteren Komponenten enthält (vgl. Abb. 1.2 auf S. 4). Die Störung  $D$  greift am Ausgang der Regelstrecke an.

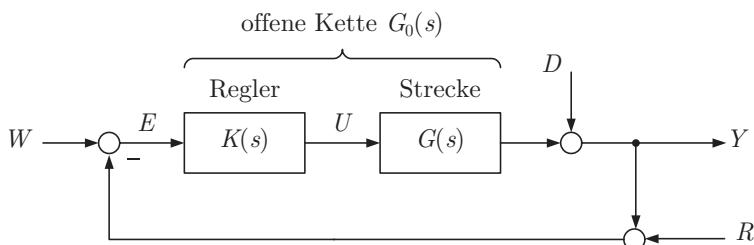


Abb. 7.5: Standardregelkreis

Für die Auswertung der Güteforderungen sind die

$$\text{Führungsübertragungsfunktion} \quad G_w(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} \quad (7.4)$$

$$\text{Störübertragungsfunktion} \quad G_d(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} \quad (7.5)$$

$$\text{Messfehlerübertragungsfunktion} \quad G_r(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$$

maßgebend. Bei den angegebenen Definitionen für  $G_w$ ,  $G_d$  und  $G_r$  wie auch bei den später in ähnlicher Form angegebenen Übertragungsfunktionen wird stets davon ausgegangen, dass die nicht im Nenner der jeweiligen Definitionsgleichung vorkommenden Eingangsgrößen des Regelkreises gleich null sind. Für die Berechnung dieser Übertragungseigenschaften können aus Abb. 7.5 folgende Gleichungen abgelesen werden:

$$\bar{\Sigma} : \begin{cases} Y(s) = G(s)U(s) + D(s) \\ U(s) = K(s)E(s) \\ E(s) = W(s) - Y(s) - R(s). \end{cases}$$

Daraus erhält man für  $D(s) = R(s) = 0$

$$\text{Führungsübertragungsfunktion:} \quad G_w(s) = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)}, \quad (7.6)$$

für  $W(s) = R(s) = 0$

$$\text{Störübertragungsfunktion:} \quad G_d(s) = \frac{1}{1 + G(s)K(s)} \quad (7.7)$$

und für  $W(s) = D(s) = 0$

$$G_r(s) = -\frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)}. \quad (7.8)$$

Offensichtlich gilt

$$G_r(s) = -G_w(s),$$

d. h., die Führungsgröße und das Messrauschen werden bis auf das negative Vorzeichen in derselben Weise durch den Regelkreis übertragen. Es ist deshalb ausreichend, nur das Führungsverhalten zu betrachten, wie es im Folgenden häufig getan wird.

In den betrachteten Übertragungsfunktionen kommt das Produkt  $G(s)K(s)$  vor, das als Übertragungsfunktion der offenen Kette  $\Sigma_0$  mit

$$\text{Übertragungsfunktion der offenen Kette:} \quad G_0(s) = G(s)K(s) \quad (7.9)$$

abgekürzt wird. Zu beachten ist, dass bei der Berechnung von  $G_0(s)$  das negative Vorzeichen in der Rückkopplung vorausgesetzt wird, aber nicht im Produkt erscheint. Ist die offene Kette stabil, so wird die statische Verstärkung

$$G_0(0) = G(0)K(0) = k_0$$

als *Kreisverstärkung*  $k_0$  bezeichnet.

Der Regelkreis  $\bar{\Sigma}$  ist durch die Beziehung

$$\text{Regelkreis } \bar{\Sigma}: \quad Y(s) = G_w(s)W(s) + G_d(s)D(s) + G_r(s)R(s) \quad (7.10)$$

beschrieben. Die Wirkung der drei Eingangsgrößen überlagern sich nach dem Superpositionsprinzip.

Außer den drei angegebenen Übertragungsfunktionen spielen gelegentlich noch die Übertragungsfunktionen

$$G_{ew}(s) = \frac{E(s)}{W(s)}, \quad G_{ed}(s) = \frac{E(s)}{D(s)}, \quad G_{uw}(s) = \frac{U(s)}{W(s)}$$

eine Rolle, die die Eigenschaften des Kreises bezüglich der Regelabweichung bzw. der Stellgröße als Ausgang und der Führungs- bzw. Störgröße als Eingang beschreiben. Aus den o. a. Beziehungen erhält man

$$G_{ew}(s) = \frac{1}{1 + G_0(s)} = G_d(s) \quad (7.11)$$

$$G_{ed}(s) = \frac{-1}{1 + G_0(s)} = -G_d(s) \quad (7.12)$$

$$G_{uw}(s) = \frac{K(s)}{1 + G_0(s)}. \quad (7.13)$$

**Empfindlichkeitsfunktion.** Alle aufgestellten Übertragungsfunktionen besitzen den gemeinsamen Faktor

$$\text{Empfindlichkeitsfunktion:} \quad S(s) = \frac{1}{1 + G_0(s)}, \quad (7.14)$$

der Empfindlichkeitsfunktion genannt wird.  $S(s)$  stimmt offensichtlich mit der Störübertragungsfunktion  $G_d(s)$  überein. Die Empfindlichkeitsfunktion wird im Weiteren jedoch nicht nur für die Betrachtung des Störverhaltens eine wichtige Rolle spielen.

Es ist zweckmäßig, die

$$\text{komplementäre Empfindlichkeitsfunktion:} \quad T(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} \quad (7.15)$$

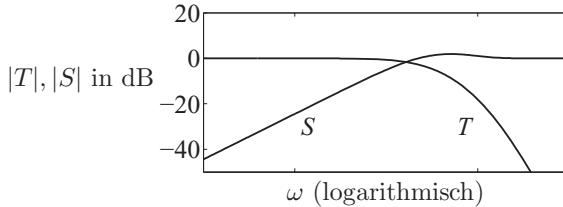
einzu führen. Sie stimmt mit der Führungsübertragungsfunktion  $G_w(s)$  überein. Es gilt

$$S(s) + T(s) = 1 \quad (7.16)$$

und, gleichbedeutend damit,

$$G_d(s) + G_w(s) = 1. \quad (7.17)$$

Abbildung 7.6 zeigt den typischen Verlauf des Amplitudenganges von  $S(j\omega)$  und  $T(j\omega)$ . Obwohl aus Gl. (7.16) *nicht* folgt, dass sich die Beträge von  $S$  und  $T$  zu eins ergänzen, ist  $|T(j\omega)| \approx 1$  in dem Frequenzbereich, in dem  $|S(j\omega)| \ll 1$  gilt, und umgekehrt.



**Abb. 7.6:** Beispiel für die Amplitudengänge von  $S(j\omega) = G_d(j\omega)$  und  $T(j\omega) = G_w(j\omega)$

Schreibt man Gl. (7.10) in

$$\bar{\Sigma} : \quad Y(s) = T(s)W(s) + S(s)D(s) - T(s)R(s) \quad (7.18)$$

um, so erkennt man, dass durch die Wahl des Reglers  $K(s)$  das Störverhalten bezüglich der beiden Signale  $D(s)$  und  $R(s)$  nicht unabhängig vom Führungsverhalten beeinflusst werden kann. Für jede Regelungsaufgabe muss deshalb ein Kompromiss zwischen dem Stör- und dem Führungsverhalten gesucht werden.

Auf die Stör- bzw. Führungsübergangsfunktionen  $h_d$  und  $h_w$  bezogen folgt aus der Beziehung (7.17), dass die Überschwingweiten und Einschwingzeiten gleich sind (Abb. 7.3), denn aus Gl. (7.17) erhält man

$$\frac{1}{s}G_w(s) + \frac{1}{s}G_d(s) = \frac{1}{s}$$

und nach Laplacerücktransformation

$$h_w(t) + h_d(t) = 1. \quad (7.19)$$

**Aufgabe 7.1\*** Frequenzgang eines Regelkreises

Gegeben ist die Regelstrecke

$$G(s) = \frac{k}{(s+1)(s+2)}$$

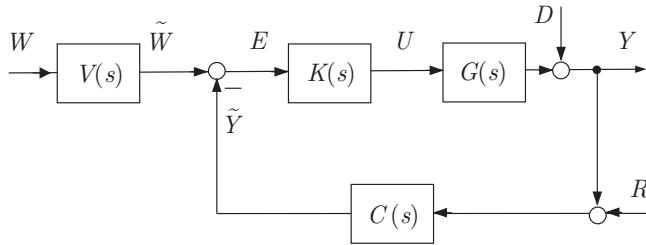
1. Zeichnen Sie die Ortskurve zu  $G(s)$  für unterschiedliche Parameterwerte  $k$ .
2. Der Regelkreis wird mit einem PI-Regler

$$K_{\text{PI}}(s) = k_{\text{P}} \left( 1 + \frac{1}{T_{\text{I}} s} \right)$$

geschlossen. Zeichnen Sie die Ortskurve der offenen Kette  $G_0(s) = K_{\text{PI}}(s) G(s)$  sowie des Führungsfrequenzganges  $G_w(j\omega)$  und des Störfrequenzganges  $G_d(j\omega)$ , wobei Sie für die Parameter  $k = 2$ ,  $k_{\text{P}} = 1$ ,  $T_{\text{I}} = 1$  einsetzen.  $\square$

**Aufgabe 7.2\*\* Vergleich von Regelkreisen mit unterschiedlichen Freiheitsgraden**

Der in Abb. 7.5 gezeigte Regelkreis wird auch als Regelkreis mit einem Freiheitsgrad bezeichnet, denn der Regler hat nur eine einzige Übertragungsfunktion  $K(s)$ , die frei gewählt werden kann. Für diesen Regelkreis gilt die Beschränkung (7.17). Der Regelkreis in Abb. 7.7 hat drei Freiheitsgrade, denn die drei Übertragungsfunktionen  $V(s)$ ,  $C(s)$  und  $K(s)$  können unabhängig voneinander gewählt werden. Bei einem Regelkreis mit zwei Freiheitsgraden ist z. B.  $K(s)$  oder  $C(s)$  gleich eins gesetzt.



**Abb. 7.7:** Erweiterter Standardregelkreis

1. Stellen Sie die Übertragungsfunktionen auf, die das Übertragungsverhalten des Regelkreises mit der Führungsgröße  $W(s)$ , der Störgröße  $D(s)$  und dem Messrauschen  $R(s)$  als Eingänge und der Regelgröße  $Y(s)$  und der Stellgröße  $U(s)$  als Ausgänge beschreiben.
2. Welche Entwurfsbeschränkungen der Form (7.17) haben Regelkreise mit einem, zwei bzw. drei Freiheitsgraden?
3. Zeigen Sie, dass der Regelkreis in Abb. 7.7 für  $C(s) = 1$  mit dem in Abb. 1.7 auf S. 11 gezeigten Regelkreis in dem Sinne äquivalent ist, dass man die Übertragungsfunktionen  $V(s)$  und  $K(s)$  so wählen kann, dass beide Regelkreise dasselbe Führungs- und Störverhalten haben.  $\square$

### 7.2.2 Beschreibung im Zeitbereich

Für eine gegebene Eingangsgröße kann die Ausgangsgröße  $Y(s)$  im Frequenzbereich berechnet und dann in den Zeitbereich transformiert werden. So erhält man beispielsweise die Störübergangsfunktion für  $W(s) = 0$ ,  $R(s) = 0$  und  $D(s) = \frac{1}{s}$  aus

$$h_d(t) \circ\bullet \frac{1}{s} G_d(s) \quad (7.20)$$

und die Führungsübergangsfunktion für  $R(s) = 0$ ,  $D(s) = 0$  und  $W(s) = \frac{1}{s}$  aus

$$h_w(t) \circ\bullet \frac{1}{s} G_w(s). \quad (7.21)$$

Man kann aber auch ein Regelkreismodell im Zeitbereich verwenden. Dieses erhält man entweder durch Laplace-Rücktransformation aus Gl. (7.10), wobei als Modell des geregelten Systems die Gleichung

$$y = g_w * w + g_d * d + g_r * r$$

mit

$$g_w(t) \circ\bullet G_w(s), \quad g_d(t) \circ\bullet G_d(s), \quad g_r(t) \circ\bullet G_r(s)$$

entsteht. Andererseits kann man aus dem Zustandsraummodell

$$\Sigma_S : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) + ed(t), & x(0) = x_0 \\ y(t) = c^T x(t) \end{cases} \quad (7.22)$$

der Regelstrecke und dem des Reglers ein Zustandsraummodell des Regelkreises aufstellen, wie im Folgenden gezeigt wird. Das Regelstreckenmodell ist gegenüber dem Modell (4.45) um einen Term erweitert, der den Einfluss der Störung  $d(t)$  beschreibt. Das in Abb. 7.5 eingetragene Messrauschen  $r$  bewirkt, dass an Stelle von  $y$  die Größe

$$y_m(t) = y(t) + r(t) \quad (7.23)$$

durch den Regler zurückgeführt wird. Zur Vereinfachung der Darstellung wird davon ausgegangen, dass das System bezüglich der Eingangsgröße  $u$  und der Störgröße  $d$  nicht sprungfähig ist. Diese Voraussetzung ist einschränkend, wenn eine direkt den Ausgang  $y$  beeinflussende Störung  $d$  betrachtet werden soll. Die folgenden Gleichungen können jedoch ohne weiteres unter Verwendung des im Folgenden gezeigten Rechenweges auf sprungfähige Regelstrecken erweitert werden.

Es wird zunächst der sehr einfache Regler

$$\Sigma_R : u(t) = k_P (w(t) - y_m(t)) \quad (7.24)$$

betrachtet, bei dem die Stellgröße proportional zur Regelabweichung  $w(t) - y_m(t)$  ist. Das Modell des geschlossenen Kreises  $\bar{\Sigma}$  erhält man durch Kombination der Gln. (7.22) – (7.24):

$$\bar{\Sigma} : \begin{cases} \dot{x}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{b} k_P \mathbf{c}^T) x(t) + \mathbf{e} d(t) + \mathbf{b} k_P w(t) - \mathbf{b} k_P r(t) \\ y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t). \end{cases} \quad (7.25)$$

In diesem Zustandsraummodell treten  $w$ ,  $d$  und  $r$  als Eingänge auf. Den Einfluss des Reglers auf die Dynamik der Strecke erkennt man an der Veränderung der Systemmatrix. An Stelle von  $\mathbf{A}$  steht im Modell jetzt die Matrix

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{b} k_P \mathbf{c}^T.$$

Die im Abschn. 7.2.1 eingeführten Übertragungsfunktionen  $G_w(s)$ ,  $G_d(s)$  und  $G_r(s)$  können entsprechend Gl. (6.76) aus dem Modell (7.25) abgelesen werden:

$$\begin{aligned} G_w(s) &= k_P \mathbf{c}^T (s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1} \mathbf{b} \\ G_d(s) &= \mathbf{c}^T (s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1} \mathbf{e} \\ G_r(s) &= -k_P \mathbf{c}^T (s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1} \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen gelten für den Regler (7.24), der die Übertragungsfunktion  $K(s) = k_P$  hat.

Auf ähnlichem Wege erhält man das Zustandsraummodell von Regelkreisen, bei denen Regler mit eigener Dynamik verwendet werden.

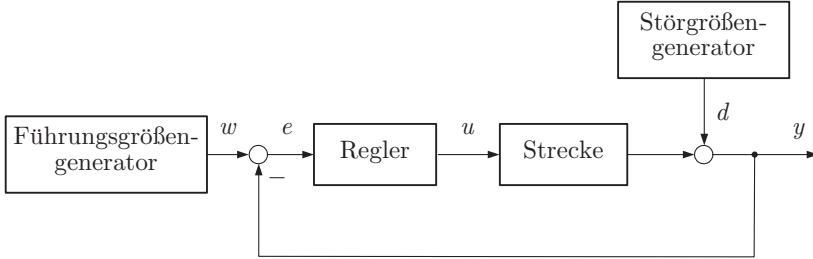
## 7.3 Stationäres Verhalten von Regelkreisen

### 7.3.1 Stör- und Führungssignale

Entsprechend der Güteforderung (II) muss durch eine geeignete Wahl des Reglers erreicht werden, dass der Regelkreis die auftretenden Störungen kompensiert und der Führungsgröße zumindest für hinreichend große Zeit  $t$  folgt. Entsprechend Gl. (7.3) ist dafür das stationäre Verhalten des Regelkreises maßgebend, wobei vorausgesetzt wird, dass der Regelkreis die Stabilitätsforderung (I) erfüllt.

Für eine genauere Untersuchung der Bedingungen, unter denen der Regelkreis die Güteforderung (II) erfüllt, muss zunächst festgelegt werden, welche Klassen von Störsignalen und Führungssignalen auf den Regelkreis einwirken, denn die Entwurfsforderung (7.3) kann nicht für beliebige Signale erfüllt werden. Im Gegenteil, es wird sich zeigen, dass das Modell der Stör- und Führungssignale im Regler erscheinen muss. Je größer die Klasse der auftretenden Signale ist, umso komplizierter wird also das Reglergesetz. Deshalb ist es zweckmäßig, beim Reglerentwurf nur die unbedingt notwendigen Signalklassen zu betrachten.

Für die Festlegung der Klasse der Stör- und Führungssignale stellt man sich vor, dass die Signale  $d(t)$  und  $w(t)$  von zwei autonomen Systemen erzeugt werden, die als Störgrößengenerator bzw. Führungsgrößengenerator bezeichnet werden (Abb. 7.8). Es wird dann untersucht, welche Eigenschaften der Regelkreis besitzen muss, damit für die so erzeugten Signale die Forderung nach Sollwertfolge erfüllt wird.



**Abb. 7.8:** Standardregelkreis mit Führungsgrößengenerator und Störgrößengenerator

**Störgrößengenerator.** Um die Klasse  $\mathcal{D}$  der betrachteten Störsignale zu beschreiben, nimmt man an, dass die Störung  $d(t)$  der Ausgang eines autonomen Systems

$$\text{Störgrößengenerator } \Sigma_d : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_d(t) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_d(t), & \mathbf{x}_d(0) = \mathbf{x}_{d0} \\ d(t) = \mathbf{c}_d^T \mathbf{x}_d(t) \end{cases}$$

mit beliebig wählbarem Anfangszustand  $\mathbf{x}_{d0}$  ist. Damit ist die Menge der zu betrachtenden Störungen auf

$$d(t) \in \mathcal{D} = \{ \mathbf{c}_d^T e^{\mathbf{A}_d t} \mathbf{x}_{d0} \mid \mathbf{x}_{d0} \in \mathbb{R}^{n_d} \}$$

festgelegt, wobei  $n_d$  die dynamische Ordnung des Störgrößengenerators bezeichnet. Im Frequenzbereich sind diese Störungen durch einen gebrochen rationalen Ausdruck

$$D(s) = \frac{Z_d(s)}{N_d(s)} \quad (7.26)$$

beschrieben.

Für den Reglerentwurf ist nur die Kenntnis des Paares  $(\mathbf{A}_d, \mathbf{c}_d^T)$  bzw. des Nennerpolynoms  $N_d(s)$  erforderlich, denn das Zählerpolynom  $Z_d(s)$  ändert sich in Abhängigkeit vom Anfangszustand  $\mathbf{x}_{d0}$ . Wichtigstes Kennzeichen der betrachteten Störsignale sind die Nullstellen  $s_{di}$ , ( $i = 1, 2, \dots, n_d$ ) des Nennerpolynoms  $N_d(s)$  bzw. die Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{A}_d$ , mit denen das Nennerpolynom in der Form

$$N_d(s) = \prod_{i=1}^{n_d} (s - s_{di})$$

geschrieben werden kann. Um Trivialfälle auszuschließen, wird angenommen, dass alle Nullstellen  $s_{di}$  einen nichtnegativen Realteil haben, denn andernfalls würde die Störung abklingen und Sollwertfolge für alle stabilen Regelkreise eintreten.

Bei allen Betrachtungen zur Störkompensation wird vom Standardregelkreis nach Abb. 7.8 ausgegangen, bei dem die Störung am Ausgang der Regelstrecke einwirkt. Die Störung muss gegebenenfalls auf diesen Eingriffsort transformiert werden. Dann tritt zwischen der Störgröße  $D(s)$  und dem Ausgang der Regelstrecke ein

Übertragungsglied auf, das in Abb. 1.3 auf S. 5 durch den Block „Störverhalten“ dargestellt ist. Wichtig ist, dass sich durch dieses Übertragungsglied der Charakter der Störung verändern kann. Bei einem Übertragungsglied mit I-Charakter wird aus einer impulsförmigen Störung eine am Streckenausgang angreifende sprungförmige Störung, die für die weiteren Untersuchungen maßgebend ist.

**Führungsgrößengenerator.** Zur Festlegung der Klasse  $\mathcal{W}$  der betrachteten Führungssignale wird ein Führungsgrößengenerator durch ein Zustandsraummodell

$$\text{Führungsgrößengenerator } \Sigma_w : \begin{cases} \dot{x}_w(t) = A_w x_w(t), & x_w(0) = x_{w0} \\ w(t) = c_w^T x_w(t) \end{cases}$$

bzw. einen gebrochen rationalen Ausdruck

$$W(s) = \frac{Z_w(s)}{N_w(s)} \quad (7.27)$$

definiert. Für den Reglerentwurf ist wiederum nur die Kenntnis des Nennerpolynoms  $N_w(s)$  erforderlich, so dass Gl. (7.27) die Klasse

$$w(t) \in \mathcal{W} = \left\{ c_w^T e^{A_w t} x_{w0} \mid x_{w0} \in \mathbb{R}^{n_w} \right\}$$

von Führungssignalen repräsentiert.

**Impulsförmige Stör- und Führungssignale.** Impulsförmige Signale

$$\begin{aligned} d(t) &= \bar{d}\delta(t) \\ w(t) &= \bar{w}\delta(t) \end{aligned}$$

verändern den aktuellen Zustand des Regelkreises, sie haben jedoch keine fortlaufende Wirkung auf den Regelkreis. So ist die Störung des im Beispiel 10.4 auf S. 498 behandelten Pendels durch eine Anfangsauslenkung des Pendels beschrieben, in die das Pendel durch eine kurzzeitige Krafteinwirkung ( $\delta$ -Impuls) von der Ruhelage aus gebracht werden kann.

Im Frequenzbereich sind die impulsförmigen Funktionen durch die Beziehungen

$$D(s) = \bar{d} \quad \text{und} \quad W(s) = \bar{w}$$

dargestellt, deren Nennerpolynome

$$N_d(s) = 1 \quad \text{bzw.} \quad N_w(s) = 1$$

Konstante sind. Man kann für impulsförmige Stör- bzw. Führungsgrößen kein Modell im Zustandsraum aufstellen, die Wirkung dieser Signale jedoch durch einen geeignet gewählten Anfangszustand der Regelstrecke erfassen (vgl. Abschn. 7.3.2).

**Sprungförmige Stör- und Führungssignale.** Für Anwendungen sind die sprungförmigen Signale

$$d(t) = \bar{d}\sigma(t) \quad (7.28)$$

$$w(t) = \bar{w}\sigma(t) \quad (7.29)$$

von besonderem Interesse. Sie repräsentieren eine Standardsituation, die in vielen Regelungsaufgaben wenigstens näherungsweise auftritt. Soll die Temperatur durch einen Regelkreis auf einen Sollwert angehoben oder der Greifer eines Roboters über einer Bohrung positioniert werden, so kann dies durch die Vorgabe eines entsprechenden Sollwertes  $\bar{w}$  beschrieben werden, was durch eine sprungförmige Führungsgröße (7.29) ausgedrückt werden kann. Das Zuschalten einer Last in einem Energieversorgungsnetz, deren Wirkung auf die Netzfrequenz durch eine Regelung ausgeglichen werden muss, ist ein Beispiel für das Auftreten einer sprungförmigen Störgröße. Die Signale (7.28) und (7.29) erfassen auch Situationen, in denen der Sollwert bzw. die Störung über lange Zeit konstant bleibt, aber gelegentlich verändert wird, wenn die Zeitabstände zwischen den Änderungen viel größer als die maßgebenden Zeitkonstanten des Regelkreises sind. Für die meisten der im Folgenden behandelten Regelungsaufgaben bezieht sich deshalb die Forderung (II) nach Störkompensation und Sollwertfolge auf sprungförmige Signale.

Der zu den Signalen (7.28) und (7.29) gehörende Störgrößengenerator (7.26) bzw. Führungsgrößengenerator (7.27) hat das Nennerpolynom

$$N_d(s) = s \quad \text{bzw.} \quad N_w(s) = s$$

und das Zustandraummodell

$$\Sigma_d : \begin{cases} \dot{x}_d(t) = 0, & x_d(0) = \bar{d} \\ d(t) = x_d(t) \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \Sigma_w : \begin{cases} \dot{x}_w(t) = 0, & x_w(0) = \bar{w} \\ w(t) = x_w(t). \end{cases}$$

### 7.3.2 Stationäres Verhalten bei impulsförmiger Erregung

Die sich bei impulsförmigen Signalen  $d = \bar{d}\delta(t)$  oder  $w = \bar{w}\delta(t)$  ergebenden Regelabweichungen

$$E(s) = G_{ed}(s)\bar{d} \quad \text{bzw.} \quad E(s) = G_{ew}(s)\bar{w}$$

verschwinden für große Zeit  $t$  immer dann, wenn der Regelkreis stabil ist. Deshalb müssen bei derartigen Signalen keine besonderen Vorkehrungen getroffen werden, um eine bleibende Regelabweichung zu verhindern.

Jeder stabile Regelkreis erfüllt die Forderung nach Störkompensation und Sollwertfolge für impulsförmige Stör- und Führungssignale.

Um den Regelkreis für impulsförmige externe Signale analysieren zu können, wird die Wirkung dieser Signale durch eine Verschiebung des Anfangszustands

beschrieben. Beispielsweise kann die durch den Term  $ed(t)$  im Regelstreckenmodell (7.22) dargestellte Einwirkung im Falle einer impulsförmigen Störung  $\bar{d}\delta(t)$  durch die Veränderung des Anfangszustands auf den neuen Wert  $x(0) = x_0 + e\bar{d}$  erfasst werden, denn das Modell

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t), \quad x(0) = x_0 + e\bar{d} \\ y(t) &= c^T x(t)\end{aligned}$$

hat dieselbe Zustands- und Ausgangstrajektorie wie das Modell (7.22) mit der angegebenen impulsförmigen Störung. Auch aus diesem Modell wird offensichtlich, dass es bei einem stabilen Regelkreis für die angegebene Störung keine bleibende Regelabweichung gibt.

### 7.3.3 Stationäres Verhalten bei sprungförmiger Erregung

Für die sprungförmige Führungsgröße  $w(t) = \bar{w}\sigma(t)$  erhält man im störungsfreien Fall ( $d(t) = 0$ ) aus dem Grenzwertsatz (6.62) der Laplacetransformation mit  $G_{ew}(s)$  aus Gl. (7.11) die Beziehung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\bar{w}}{s} G_{ew}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G_0(s)} \bar{w},$$

also

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G_0(s)} \bar{w} = \lim_{s \rightarrow 0} S(s) \bar{w}, \quad (7.30)$$

sofern

$$G_0(0) \neq -1 \quad (7.31)$$

ist. Der Grenzwertsatz ist anwendbar, weil der Regelkreis voraussetzungsgemäß stabil ist. Für Störungssprünge  $d = \bar{d}\sigma(t)$  folgt aus Gl. (7.12) für  $w(t) = 0$  die Beziehung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{-1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G_0(s)} \bar{d} = -\lim_{s \rightarrow 0} S(s) \bar{d},$$

wobei wiederum die Gültigkeit der Bedingung (7.31) vorausgesetzt wird. In beiden Fällen ist die bleibende Regelabweichung  $e(\infty)$  von der Übertragungsfunktion  $S(s)$  für  $s \rightarrow 0$  abhängig.

Dieser Zusammenhang soll nun für zwei Arten von Übertragungsfunktionen  $G_0(s)$  der offenen Kette  $\Sigma_0$  näher untersucht werden. Da der geschlossene Kreis stabil ist, ist die Bedingung (7.31) erfüllt. Entsprechend Gl. (6.74) ist die Übertragungsfunktion der offenen Kette gebrochen rational und kann in der Form

$$G_0(s) = \frac{k}{s^l} \frac{b_q s^q + b_{q-1} s^{q-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_{n-l} s^{n-l} + a_{n-l-1} s^{n-l-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (7.32)$$

geschrieben werden. Dabei gilt  $n \geq q$  und es wird angenommen, dass das Polynom vom Grad  $n - l$  im Nenner keine Nullstelle bei  $s = 0$  hat, also  $a_0 \neq 0$  gilt.

**Proportionales Verhalten der offenen Kette.** Für  $l = 0$  hat die offene Kette  $\Sigma_0$  proportionales Verhalten. Es gilt

$$G_0(0) = k_0 = k \frac{b_0}{a_0}$$

und für  $d(t) = \bar{d}\sigma(t)$  und  $w(t) = \bar{w}\sigma(t)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{1}{1 + k_0} (\bar{w} - \bar{d}).$$

Der Regelkreis hat eine bleibende Regelabweichung, deren Größe von der statischen Verstärkung  $k_0$  der offenen Kette, also der Kreisverstärkung, abhängt:

Bleibende Regelabweichung:  $e(\infty) = \frac{1}{1 + k_0} (\bar{w} - \bar{d}).$

(7.33)

Je größer die Kreisverstärkung ist, umso kleiner ist die bleibende Regelabweichung.

**Integrales Verhalten der offenen Kette.** Für  $l = 1$  (und allgemein für  $l > 0$ ) gilt

$$\lim_{s \rightarrow 0} G_0(s) = \infty$$

und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G_0(s)} = 0.$$

Der geschlossene Kreis hat keine bleibende Regelabweichung und erfüllt die Güteforderung (II) für sprungförmige Führungs- und Störsignale. Dabei wird durch das integrale Verhalten der offenen Kette die bleibende Regelabweichung auch für gleichzeitige Störungs- und Führungsgrößensprünge verhindert.

Diese Ergebnisse lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

**Satz 7.1 (Störkompensation und Sollwertfolge bei sprungförmigen Signalen)**

*Damit in einem stabilen Regelkreis  $\bar{\Sigma}$  die Regelgröße einem sprungförmigen Führungssignal ohne bleibende Regelabweichung nachgeführt wird und sprungförmige, auf den Ausgang der Regelstrecke wirkende Störungen ohne bleibende Regelabweichung kompensiert werden, muss die offene Kette  $\Sigma_0$  I-Verhalten besitzen.*

Das I-Verhalten erkennt man daran, dass man im Nenner der Übertragungsfunktion  $G_0(s)$  der offenen Kette den Faktor  $\frac{1}{s}$  ausklammern kann.

Der I-Anteil der offenen Kette kann nun einerseits durch eine integrierend wirkende Regelstrecke  $\Sigma_S$  hervorgerufen werden. Wie die in den nachfolgenden Aufgaben und Beispielen behandelten Anwendungen zeigen, tritt dies in der Praxis gelegentlich auf. Häufiger jedoch hat die Regelstrecke proportionales Verhalten, so dass

der I-Anteil der offenen Kette durch den Regler  $\Sigma_R$  eingeführt werden muss. Um die Sollwertfolge zu sichern, muss man einen I-Regler

$$K(s) = \frac{1}{T_I s} \quad (7.34)$$

bzw. die im Abschn. 7.6 behandelten Erweiterungen dieses Reglers einsetzen. Ist der entstehende Regelkreis stabil, so besitzt er gleichzeitig die Eigenschaft der Sollwertfolge und Störkompensation.

### 7.3.4 Stationäres Verhalten bei weiteren Signalklassen

Mit ähnlichen Betrachtungen wie bisher kommt man für rampenförmige Signale  $d(t) = \dot{d}t$  und  $w(t) = \bar{w}t$  zu dem Ergebnis, dass die offene Kette I<sup>2</sup>-Verhalten haben muss, damit keine bleibende Regelabweichung auftritt. Das heißt, dass die Übertragungsfunktion  $G_0(s)$  der offenen Kette nach Gl. (7.32) die Bedingung  $l = 2$  erfüllen muss.

**Tabelle 7.1.** Stationäres Verhalten von Regelkreisen: Angegeben ist der Wert  $e(\infty)$  der Regelabweichung für das Führungsverhalten

Führungsgröße $w(t)$	Offene Kette $G_0(s)$ nach Gl. (7.32)		
	P-Verhalten ( $l = 0$ )	I-Verhalten ( $l = 1$ )	I <sup>2</sup> -Verhalten ( $l = 2$ )
impulsförmig: $w(t) = \bar{w}\delta(t)$	0	0	0
sprungförmig: $w(t) = \bar{w}\sigma(t)$	$\frac{1}{1+k_0}\bar{w}$	0	0
rampenförmig: $w(t) = \bar{w}t$	$\infty$	$\frac{1}{k_0}\bar{w}$	0

Das stationäre Verhalten ist für die drei bisher untersuchten Signaltypen in Tabelle 7.1 zusammengefasst. Die Tabelle lässt das allgemeine Prinzip erkennen, dass die offene Kette das Modell der Signalgeneratoren enthalten muss, damit der Regelkreis die Forderung nach Sollwertfolge erfüllen kann. Man bezeichnet es als inneres Modell der externen Signale. Bei Stör- und Führungssignalen mit den Nennerpolynomen  $N_d(s) = N_w(s) = s$  muss im Nenner der Übertragungsfunktion  $G_0(s)$  der offenen Kette der Faktor  $s$  ausgeklammert werden können, bei den Nennerpolynomen  $N_d(s) = N_w(s) = s^2$  der Faktor  $s^2$ . Dies gilt ganz allgemein:

**Inneres-Modell-Prinzip:** Ein stabiler Regelkreis kann nur dann eine Störung vollständig unterdrücken bzw. dem Führungssignal ohne bleibende Regelabweichung folgen, wenn er ein inneres Modell der Störungssignale bzw. der Führungssignale besitzt, d. h., muss man im Nenner der Übertragungsfunktion  $G_0(s)$  der offenen Kette die Polynome  $N_d(s)$  und  $N_w(s)$  des Störgrößengenerators bzw. des Führungsgrößengenerators ausklammern können.

Im Abschn. II-4.4.5 wird das Innere-Modell-Prinzip ausführlicher erläutert.

**Robustheit des Regelkreises bezüglich Sollwertfolge.** Bezuglich der Forderungen nach Sollwertfolge und Störkompensation besitzen die Regelkreise in allen bisher betrachteten Fällen eine bemerkenswerte Robustheit. Da alle Ergebnisse unabhängig von konkreten Parameterwerten sind und nur die Stabilität des Regelkreises voraussetzen, hat der geschlossene Kreis keine bleibende Regelabweichung, solange die offene Kette bei sprungförmigen Signalen integrales Verhalten und bei rampenförmigen Signalen  $I^2$ -Verhalten besitzt und der Regelkreis stabil ist. Die Stabilität des Kreises und das I- bzw.  $I^2$ -Verhalten bleiben häufig auch dann erhalten, wenn sich die Parameter der Regelstrecke in großen Bereichen ändern. Der Regelkreis ist also robust bezüglich der Eigenschaften „Störkompensation“ und „Sollwertfolge“.

**Aufgabe 7.3\*** Notwendigkeit des I-Anteils in der offenen Kette

Wenn die Ausgangsgröße  $y$  einer Regelstrecke mit P-Verhalten ohne bleibende Regelabweichung auf den Sollwert  $\bar{w}$  gebracht werden soll, so muss der Regler nach Satz 7.1 einen I-Anteil besitzen.

1. Leiten Sie dieses Ergebnis her, indem Sie sich anhand des Blockschaltbildes des Regelkreises überlegen, auf welchen Endwert die Stellgröße gebracht werden muss, um die Regelgröße der Sollvorgabe anzupassen.
2. Zeigen Sie auf diesem Weg auch, dass bei einer proportionalen Regelung die in Gl. (7.33) angegebene bleibende Regelabweichung auftritt.
3. Wenn sich die statische Verstärkung der Regelstrecke während des Betriebes des Regelkreises verändert, so bleibt die Eigenschaft der Sollwertfolge erhalten, solange der Regelkreis auch nach der Parameterveränderung noch stabil ist. Mit welchem Experiment können Sie den aktuellen Wert der statischen Verstärkung ermitteln? □

**Aufgabe 7.4\*** Frequenzregelung eines Elektroenergieverteilungsnetzes

Betrachten Sie ein elektrisches Netz, in dem ein Generator mehrere Abnehmer mit elektrischer Energie speist (vgl. Abschn 2.3). Bezogen auf einen Arbeitspunkt, bei dem die erzeugte Leistung gleich der verbrauchten Leistung ist, erhält man bei Veränderung des Energieverbrauchs um  $p_L(t)$  und Veränderung der erzeugten Leistung um  $p_G(t)$  eine Änderung  $f(t)$  der Drehgeschwindigkeiten aller synchron laufenden Generatoren und Maschinen des Netzes um

$$f(t) = \frac{1}{T} \int_0^t (p_G(\tau) - p_L(\tau)) d\tau. \quad (7.35)$$

$f(t)$  beschreibt die Abweichung der Netzfrequenz vom Sollwert  $w(t) = 0$ .

Der Generator besitzt einen Leistungsregler mit der Führungsgröße  $p_{Gsoll}(t)$ , so dass

$$p_G = g_G * p_{Gsoll}$$

gilt, wobei  $g_G(t)$  die Gewichtsfunktion des Generators einschließlich des angeschlossenen Leistungsreglers bezeichnet. Durch eine Rückführung der Frequenzabweichung  $e(t) =$

$w(t) - f(t)$  auf den Sollwert des Leistungsreglers ( $u(t) = p_{G\text{sol}}(t)$ ) soll die durch sprungförmige Laständerungen  $p_L(t) = \bar{p}_L \sigma(t)$  entstehende Frequenzabweichung abgebaut werden.

1. Zeichnen Sie das Blockschaltbild des Regelkreises.
2. Da die Regelstrecke das I-Glied (7.35) enthält, ist zu vermuten, dass Sollwertfolge

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (w(t) - f(t)) = 0$$

für sprungförmige Führungs- und Störgrößen durch eine proportionale Rückführung

$$u(t) = k_P e(t)$$

gesichert werden kann. Ist diese Vermutung richtig? Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.  $\square$

**Aufgabe 7.5\*\* Bleibende Regelabweichung bei sprungförmigen Signalen**

Zu der Aussage, dass Sollwertfolge für sprungförmige Führungs- und Störsignale genau dann gesichert ist, wenn die offene Kette  $G_0(s)$  ein integrales Verhalten besitzt, kann man auch durch Betrachtung der Nullstellen des Regelkreises gelangen. Beim Störverhalten ist die Eingangsgröße die Störung  $d(t)$  und als Ausgangsgröße wählt man zweckmäßigerweise die Regelabweichung  $e(t)$ . Sollwertfolge bedeutet, dass für das stationäre Verhalten die Beziehung  $e_s(t) = 0$  gilt. Welche Konsequenzen hat dies für die Nullstellen des Regelkreises und was folgt daraus für die offene Kette?

Übertragen Sie diese Betrachtungen auf das Führungsverhalten des Regelkreises.  $\square$

**Aufgabe 7.6\* Füllstandsregelung einer Talsperre**

Bei der Regelung einer Talsperre soll durch Verstellung des Schiebers am Auslauf der Füllstand auf einem vorgegebenen Sollwert gehalten werden. Die Talsperre besitzt I-Verhalten, denn der Füllstand  $h$  erfüllt näherungsweise die Differentialgleichung

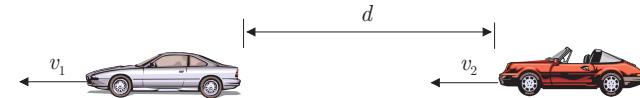
$$\dot{h}(t) = k(q_{zu}(t) - q_{ab}(t)), \quad (7.36)$$

wobei  $q_{zu}$  und  $q_{ab}$  die pro Zeiteinheit zu- bzw. abfließende Wassermenge bezeichnen und  $k$  ein von den geometrischen Abmaßen der Talsperre abhängiger Proportionalitätsfaktor ist.  $q_{ab}$  wird als Stellgröße verwendet, weil der Schieber durch eine unterlagerte Regelung so positioniert wird, dass eine vorgegebene Wassermenge die Talsperre pro Zeiteinheit verlässt. Die Zulaufmenge  $q_{zu}$  wird als über längere Zeit konstante Größe betrachtet.

Untersuchen Sie anhand des Blockschaltbildes des Regelkreises, ob aufgrund des I-Verhaltens der Regelstrecke Sollwertfolge und Störkompensation durch eine P-Regelung realisiert werden können.  $\square$

**Aufgabe 7.7\*** Struktur des Abstandsreglers bei Fahrzeugen

In modernen Kraftfahrzeugen werden Regler eingebaut, die selbständig den Abstand zum vorausfahrenden Fahrzeug auf einem vorgegebenen Wert halten (Abb. 7.9). Da diese Regler in Fahrzeugkonvois eingesetzt werden, spricht man bei ihnen auch von Konvoiregtern.



**Abb. 7.9:** Abstandsregelung für Fahrzeuge

Der Regelkreis ist folgendermaßen aufgebaut. Das betrachtete Fahrzeug mit der Geschwindigkeit  $v_2$  misst den Abstand zum vorausfahrenden Fahrzeug, das mit der Geschwindigkeit  $v_1$  fährt. Der Fahrzeugabstand  $d$ , der auf einem gegebenen Sollwert  $w$  gehalten werden soll, ergibt sich durch Integration der Differenzgeschwindigkeit  $v_1 - v_2$ . Stellgröße ist die Kraft  $f$ , mit der der Motor das Fahrzeug beschleunigt (oder bremst). Sie soll durch den Konvoiregler entsprechend dem aktuellen Fahrzeugabstand festgelegt werden.

Das Fahrzeug mit Eingangsgröße  $f$  und Ausgangsgröße  $v_2$  hat proportionales, zeitlich verzögertes Verhalten, weil es bei jeder Gaspedalstellung aufgrund des Luftwiderstandes eine bestimmte stationäre Geschwindigkeit erreicht. Im folgenden wird mit einem um den Arbeitspunkt linearisierten Modell gerechnet (vgl. Beispiel 4.13 auf S. 110).

Der Regler soll den Fahrzeugabstand  $d$  ohne bleibende Regelabweichung einem geschwindigkeitsabhängig vorgegebenen Sollwert  $w$  angleichen. Als Störgrößen beeinflussen die Geschwindigkeit  $v_1(t)$  des vorausfahrenden Fahrzeugs oder eine durch eine Hangabtriebskraft an Bergen zusätzlich wirkende Beschleunigung  $a_B(t)$  den Regelkreis. Außerdem muss der Regler das Fahrzeug ausgehend von einem Anfangsabstand  $d_0$  an den Sollabstand führen, wenn sich der Konvoi bildet. Schließlich soll es durch den Regler möglich sein, den Fahrzeugabstand auf einen beliebig vorgegebenen Wert zu führen.

Zeichnen Sie das Blockschaltbild des Regelkreises und kennzeichnen Sie den Charakter aller darin vorkommenden Blöcke. Bestimmen Sie die Reglerstruktur (P-Regler, I-Regler usw.) für die genannten Fälle, die folgendermaßen zusammengefasst werden können:

	$w(t)$	$d_0$	$v_1(t)$	$a_B(t)$
1	0	$d_0$	0	0
2	0	0	$\bar{v}_1 \sigma(t)$	0
3	0	0	0	$\bar{a}_B \sigma(t)$
4	$\sigma(t)$	0	0	0

Ermitteln Sie die Reglerstruktur zunächst unter Anwendung des Inneren-Modell-Prinzips und weisen Sie die Richtigkeit Ihrer Reglerwahl anschließend durch Berechnung des Abstandes  $d(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  nach.  $\square$

**Aufgabe 7.8\*** Analyse des Fliehkraftreglers von Dampfmaschinen

Der in Abb. 1.4 auf S. 8 gezeigte Fliehkraftregler soll die Drehzahl  $n$  der Dampfmaschine bei Laständerungen auf einem festen Sollwert halten. Kann er das bei sich sprungförmig ändernder Last?  $\square$

### 7.3.5 Sollwertfolge bei Verwendung eines Vorfilters

Für eine sprungförmige Führungsgröße (7.29) kann man die Sollwertfolge des Regelkreises auch dadurch erreichen, dass man ein Vorfilter  $V$  vor den Regelkreis schaltet (Abb. 7.10).  $V$  ist hier ein Verstärkungsfaktor, aber man spricht von einem Vorfilter, weil bei einer allgemeineren Betrachtung ein dynamischer Block mit einer Übertragungsfunktion  $V(s)$  eingesetzt werden kann, der die Führungsgröße filtert.

Bei der Festlegung des Verstärkungsfaktors  $V$  wird nach folgender Idee verfahren. Wenn die Regelstrecke kein I-Verhalten hat und man keinen integralen Anteil im Regler vorsehen will, so entsteht entsprechend Gl. (7.33) eine bleibende Regelabweichung  $e(\infty) \neq 0$ . Für eine proportional wirkende offene Kette mit  $k_0 = 9$  ist beispielsweise  $e(\infty) = 0,1$ , d. h. es gilt  $y(\infty) = 0,9$ . Die Regelgröße wird also nur auf den Wert 0,9 an Stelle auf den Wert 1 angehoben.

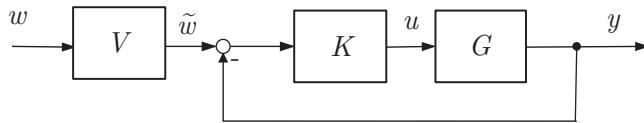


Abb. 7.10: Regelkreis mit Vorfilter

Diesen Fehler kann man ausgleichen, wenn man an Stelle der Führungsgröße  $w$  mit einer modifizierten Führungsgröße  $\tilde{w}$  arbeitet und diese auf den Wert  $\frac{10}{9}$  anhebt. Der Regelkreis hat dann gegenüber der modifizierten Vorgabe eine bleibende Regelabweichung von

$$e(\infty) = \frac{1}{1 + k_0} \tilde{w} = \frac{1}{10} \frac{10}{9} = \frac{1}{9},$$

die Regelgröße also den gewünschten Endwert

$$y(\infty) = \tilde{w} - e(\infty) = 1.$$

Eine bleibende Regelabweichung wird also vermieden, indem die Führungsgröße so verändert wird, dass der Regelkreis mit einer gegenüber der modifizierten Sollwertvorgabe bleibenden Regelabweichung keine Regelabweichung gegenüber der ursprünglichen Führungsgröße hat.

Allgemein wird die modifizierte Führungsgröße  $\tilde{w} = Vw$  durch die Wahl des Faktors  $V$  bestimmt. Um eine bleibende Regelabweichung zu vermeiden, muss die statische Verstärkung des Regelkreises zwischen der Führungsgröße  $w$  und der Regelgröße  $y$  gleich eins sein. Diese statische Verstärkung setzt sich aus dem Faktor  $V$  und der statischen Verstärkung zwischen  $\tilde{w}$  und  $y$  zusammen:

$$V \frac{k_0}{1 + k_0} \stackrel{!}{=} 1.$$

Für  $V$  erhält man damit die Bemessungsvorschrift

$$\boxed{\text{Vorfilter: } V = \frac{1 + k_0}{k_0},} \quad (7.37)$$

wobei  $k_0$  wie bisher die Kreisverstärkung des Regelkreises bezeichnet.

Diese Vorgehensweise hat den Vorteil, dass der Regler keine eigene Dynamik erhält, also Sollwertfolge mit einem proportional wirkenden Regler erreicht werden kann. Dies ist insbesondere dann wichtig, wenn bei der gerätetechnischen Realisierung keine Hilfsenergie zur Verfügung steht, die für die Realisierung eines integralen Anteils im Regler notwendig ist. Ein Beispiel für eine derartige Regelung ist die Temperaturregelung eines Zimmers mit einem Thermostatventil (Aufgabe 7.9).

Die Verwendung des Vorfilters hat jedoch zwei entscheidende Nachteile. Erstens kann mit dieser Maßnahme nur Sollwertfolge, nicht jedoch Störkompensation für sprungförmige Erregung erreicht werden. Zweitens muss die Verstärkung  $V$  genau der Kreisverstärkung  $k_0$  angepasst werden. Die Eigenschaft der Sollwertfolge wird also nur bei genauer Kenntnis von  $k_0$  erreicht. Sie ist nicht robust gegenüber Modellunbestimmtheiten!

#### **Aufgabe 7.9 Raumtemperaturregelung mit einem Thermostatventil**

Zeichnen Sie den Regelkreis einer Raumtemperaturregelung mit Thermostatventil. Klassifizieren Sie die dabei auftretenden Übertragungsglieder. Das Thermostatventil wirkt wie ein proportionaler Regler. Wie kann Sollwertfolge erreicht werden? □

## **7.4 Übergangsverhalten von Regelkreisen: Entwurfskompromisse und erreichbare Regelgüte**

### **7.4.1 Perfekte Regelung**

Die Forderungen nach Störkompensation und Sollwertfolge können mit Hilfe der in den Gln. (7.6) und (7.7) eingeführten Führungs- und Störübertragungsfunktionen als

$$G_w(s) \stackrel{!}{=} 1 \quad \text{und} \quad G_d(s) \stackrel{!}{=} 0$$

dargestellt werden. Wenn sie erfüllt sind, folgt die Regelgröße einer *beliebig* vorgegebenen Führungsgröße  $w$  über den gesamten betrachteten Zeitraum *exakt*:

$$y(t) = w(t) \quad \text{für alle } t.$$

Die Regelung ist perfekt.

Die Betrachtungen dieses Abschnitts werden zeigen, dass es für alle praktisch auftretenden Regelstrecken nicht möglich ist, durch einen geeignet gewählten Regler dem Regelkreis diese idealen Eigenschaften zu geben. Deshalb kann es nur das Ziel sein, die Regelgröße der Führungsgröße möglichst gut nachzuführen:

$$y(t) \approx w(t).$$

Um dies zu erreichen, muss zwischen den beiden im Abschn. 7.1 eingeführten Typen von Regelungsaufgaben unterschieden werden:

- **Festwertregelung:** Die Regelung soll die Regelgröße unter der Wirkung von Störungen in einem konstanten Sollwert halten. Die Regelgüte hängt hier maßgebend davon ab, ob der Regler auf den typischen Störgrößenverlauf angemessen reagieren kann.
- **Folgeregelung:** Die Regelgröße soll einer Solltrajektorie folgen. Die Regelgüte wird hier durch die Festlegung einer geeigneten Solltrajektorie und die Realisierung dieser Solltrajektorie bestimmt.

Auf diese beiden Situationen wird in den folgenden Abschnitten getrennt eingegangen.

#### 7.4.2 Beschränkungen für die erreichbare Regelgüte bei einer Festwertregelung

Da bei der Festwertregelung die Regelgröße auf einem festen Sollwert gehalten werden soll, spielt für die Bewertung der Regelgüte das Störverhalten des Regelkreises die maßgebende Rolle. Typische Beispiele für Festwertregelungen sind die Temperaturregelung eines Raumes, für die der Sollwert über lange Zeit konstant ist, oder die Spannungs- bzw. Leistungsregelung eines Elektroenergienetzes, bei denen die Sollwerte durch die sich tageszeitlich sehr langsam verändernde Netzbelaistung (Tagesgang) bestimmt werden.

Eine perfekte Regelung müsste beim Auftreten einer Störung die Regelgröße mit Hilfe einer sehr großen Stellamplitude in verschwindend kurzer Zeit auf den Sollwert zurück bringen. Mehrere Gründe machen dies unmöglich.

**Auswirkung von Stellgrößenbeschränkungen.** Bei vielen Anwendungen bestimmt die Stellgrößenbeschränkung die Qualität der Regelung maßgeblich. Diese Beschränkung ist in den hier verwendeten linearen Regelstreckenmodellen nicht berücksichtigt. Um die Wirkung der Stellgrößenbeschränkungen dennoch erkennen zu können, muss man sich den Verlauf der Stellgröße ansehen und diesen in die Bewertung der Regelgüte einfließen lassen.

##### Beispiel 7.1 Erreichbare Regelgüte bei Stellgrößenbeschränkung

Die Wirkung von Stellgrößenbeschränkungen lässt sich an einem Standardregelkreis demonstrieren, der aus der Regelstrecke erster Ordnung

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

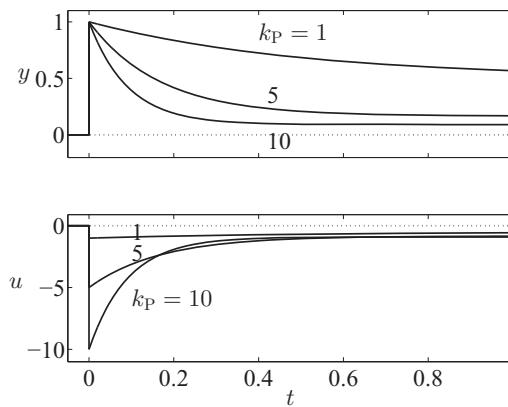
und dem Proportionalregler

$$K(s) = k_P$$

besteht. Für den geschlossenen Kreis erhält man die Störübertragungsfunktion

$$G_d(s) = \frac{1}{1 + k_P} \frac{\frac{T}{k_P} s + 1}{\frac{T}{k_P} s + 1} = \frac{\frac{T}{k_P} s + 1}{T s + 1 + k_P} \xrightarrow{k_P \rightarrow \infty} 0,$$

die zeigt, dass die Zeitkonstante  $\frac{T}{1+k_P}$  des Regelkreises durch die Verwendung einer genügend großen Reglerverstärkung  $k_P$  beliebig klein gemacht werden kann und die Störübertragungsfunktion dabei verschwindet. Dementsprechend nähert sich die Störübergangsfunktion ihrem Endwert beliebig schnell. Als Nebeneffekt wird auch die bleibende Regelabweichung beliebig klein gemacht. Der obere Teil von Abb. 7.11 verdeutlicht dies.



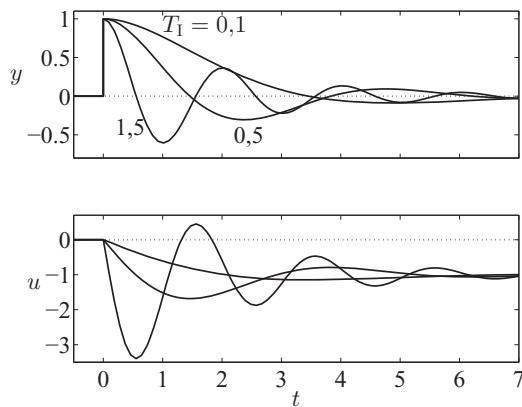
**Abb. 7.11:** Störübergangsfunktion eines Regelkreises mit Proportionalregler ( $k_P = 1, 5$  und  $10$ )

Die zugehörige Stellgröße erhält man aus der Übertragungsfunktion

$$G_{ud}(s) = \frac{-k_P}{1 + k_P} \frac{\frac{T}{k_P} s + 1}{\frac{T}{k_P} s + 1},$$

die die Wirkung der am Ausgang der Regelstrecke angreifenden Störung auf die Stellgröße beschreibt. Sie stellt ein DT<sub>1</sub>-Glied dar, dessen Pol durch Erhöhung von  $k_P$  beliebig klein gemacht werden kann. Damit wird gleichzeitig der Sprunganteil  $G_{ud}(\infty) = -k_P$  betragsmäßig vergrößert. Der untere Teil von Abb. 7.11 zeigt, dass mit Erhöhung der Reglerverstärkung  $k_P$  eine Vergrößerung der maximalen Stellamplitude einher geht.

Einen ähnlichen Zusammenhang zwischen der Stellamplitude und der Regelgüte erhält man bei einem I-Regler (7.34). Hier ist zwar stets gesichert, dass die Regelgröße der Sollwertänderung ohne bleibende Regelabweichung folgt. Je schneller dies geschehen soll, umso größer muss jedoch die Stellgröße sein (Abb. 7.12). Die maximale Stellamplitude wird nicht mehr zur Zeit  $t = 0$  angenommen, weil hier  $u(0) = 0$  gilt, sondern während des Übergangsvorganges. Aufgrund der Stellgrößenbeschränkung kann die Integrationszeitkonstante  $T_I$  des Reglers nicht beliebig klein gemacht werden, so dass die Wirkung der Störung nicht beliebig schnell abgebaut werden kann.



**Abb. 7.12:** Störübergangsfunktion eines Regelkreises mit I-Regler ( $T_1 = 0,1, 0,5$  und  $1,5$ )

Wie in diesem Beispiel kann man für viele Regelkreise zu einer gegebenen Stellgrößenbeschränkung  $u_{\max}$  eine maximale Reglerverstärkung ermitteln, für die die Stellgrößenbeschränkung  $|u(t)| < u_{\max}$  durch den linearen Regelkreis gerade noch nicht verletzt wird. Damit wird die Möglichkeit beschränkt, den Regelkreis beliebig schnell zu machen. Stellgrößenbeschränkungen bestimmen auf diese Weise maßgebend die erreichbare Regelgüte.  $\square$

Stellgrößenbeschränkungen werden typischerweise wirksam, wenn die Zeitkonstanten des Regelkreises kleiner sein sollen als die der Regelstrecke. Es gilt also:

Aufgrund von Stellgrößenbeschränkungen kann der Regelkreis nicht wesentlich schneller gemacht werden, als es die maßgebenden Zeitkonstanten des Stellgliedes, der Regelstreckendynamik und des Messgliedes zulassen.

**Auswirkungen von Modellunbestimmtheiten.** Eine weitere Grenze für die erreichbare Regelgüte wird durch die Modellgenauigkeit bestimmt. Je genauer das Modell ist, umso besser kann man den Regler an das Regelstreckenverhalten anpassen und umso besser können die Güteforderungen erfüllt werden. Besitzt das Modell jedoch große Unsicherheiten, so spielt die Robustheit der Regelung eine maßgebende Rolle. Die Reglerverstärkung darf bei großen Modellunbestimmtheiten nicht zu groß gewählt werden, um die Stabilität nicht zu gefährden (vgl. Abschn. 8.6.3).

Um die Stabilität des Regelkreises trotz Modellunbestimmtheiten zu gewährleisten, muss die Reglerverstärkung umso kleiner gewählt werden, je größer die Modellunbestimmtheiten sind. Modellunbestimmtheiten begrenzen auf diese Weise die erreichbare Regelgüte.

**Auswirkung von Messfehlern.** Systematische und zufällige Messfehler sind im Standardregelkreis durch die Größe  $R(s)$  dargestellt (Abb. 7.5 auf S. 351). Da  $G_r(s) = -G_w(s)$  gilt, werden Messfehler genauso gut bzw. genauso schlecht vom Regelkreis übertragen wie die Führungsgröße  $W(s)$ . Bei einer perfekten Regelung gilt unter Beachtung der Messfehler die Beziehung

$$y(t) = w(t) - r(t),$$

d. h., Messfehler machen sich vollständig in der Regelgröße bemerkbar.

|| Der Sollwert kann nur so genau eingehalten werden, wie die Regelgröße gemessen wird.

Diese Aussage gilt prinzipiell auch im erweiterten Regelkreis nach Abb. 7.7 auf S. 355. Dort ist zwar das Filter  $C(s)$  in den Kreis eingefügt, um das verrauschte Messsignal zu glätten. Dieses Filter macht den Regelkreis jedoch langsamer. Die obige Aussage gilt deshalb auch im zeitlichen Sinne:

|| Der Regelkreis kann nicht schneller sein, als die Regelgröße gemessen wird.

**Auswirkungen der Gerätetechnik.** Die in einem Regelkreis erreichbare Regelgüte hängt von mehreren gerätetechnischen Faktoren ab. Ein komplizierter Regler erfordert einen hohen gerätetechnischen Aufwand, den man nur so weit treiben will, wie es die gegebene Regelungsaufgabe erfordert.

Die Raumtemperaturregelung mit einem Thermostatventil ist ein typischer Kompromiss. Aufgrund des Konstruktionsprinzips der im Thermostatventil enthaltenen Rückführung der Raumtemperatur auf das Heizkörperventil entsteht eine fühlbare bleibende Regelabweichung (vgl. Aufgabe 7.9). Für Wohnräume wird man jedoch i. Allg. keinen größeren Aufwand für die Regelung betreiben, die bleibende Regelabweichung in Kauf nehmen und die Raumtemperatur durch eine Korrektur des Sollwertes trotz bleibender Regelabweichung auf den gewünschten Wert bringen.

Die erreichbare Regelgüte wird auch durch die begrenzte Bandbreite der Sensoren und Aktoren bestimmt. Wenn das Stellglied nur mit einer begrenzten Geschwindigkeit reagieren kann, können hochfrequente Störungen nicht ausgeglichen werden.

### 7.4.3 Nichtminimalphasenverhalten von Regelkreisen

Ein wichtige Beschränkung der erreichbaren Regelgüte entsteht durch nichtminimalphasiges Verhalten, insbesondere dann, wenn der Regelkreis selbst ein derartiges Verhalten besitzt. Die Untersuchungen dieses Abschnitts werden zeigen:

|| Regelkreise, in denen der Regler eine instabile Regelstrecke stabilisiert, haben nichtminimalphasiges Verhalten.

Die offene Kette

$$G_0(s) = \frac{Z_0(s)}{N_0(s)}$$

derartiger Regelkreise hat mindestens einen instabilen Pol. Daraus folgt, dass die Übertragungsfunktion  $G_{\text{ew}}(s)$  aus Gl. (7.11)

$$G_{\text{ew}}(s) = \frac{1}{1 + G_0(s)} = \frac{N_0(s)}{Z_0(s) + N_0(s)},$$

deren Nullstellen mit den Polen von  $G_0(s)$  übereinstimmen, mindestens einen Pol mit positivem Realteil besitzt und der Regelkreis folglich nichtminimalphasig ist.

#### 7.4.4 Gleichgewichtstheorem

Im Folgenden werden Regelungen betrachtet, bei denen die Anpassung der Regelgröße an eine Führungsgröße und die Kompensation von Störungen gleichermaßen wichtig sind. Das Gleichgewichtstheorem wird zeigen, dass man beide Aufgaben nicht gleichzeitig bestmöglich lösen kann. Die in diesem Theorem enthaltene Schranke für die erreichbare Regelgüte ist prinzipieller Natur, zumindest solange man bei linearen Regelungen mit konstanten Parametern bleibt. Es wird sich nämlich zeigen, dass diese Schranke die Qualität einer Regelung selbst dann beschränkt, wenn man bereit ist, einen beliebig hohen gerätetechnischen Aufwand zu treiben, und wenn man über ein exaktes Modell der Regelstrecke verfügt.

Der Ausgangspunkt ist eine neue Interpretation der in Gl. (7.14) eingeführten Empfindlichkeitsfunktion  $S(s)$ , zu der man bei einem Vergleich des Führungsverhaltens des Regelkreises mit dem Verhalten des ungeregelten Systems kommt. Ohne Regler gilt  $U(s) = 0$  und folglich  $Y(s) = 0$  und für die Regelabweichung erhält man

$$E_{\text{ohneRegler}}(s) = W(s).$$

Ist ein Regler angeschlossen, so folgt aus der Definition von  $G_{\text{ew}}(s)$  und Gl. (7.11) die Beziehung

$$E_{\text{mitRegler}}(s) = G_{\text{ew}}(s) W(s) = \frac{1}{1 + G_0(s)} W(s).$$

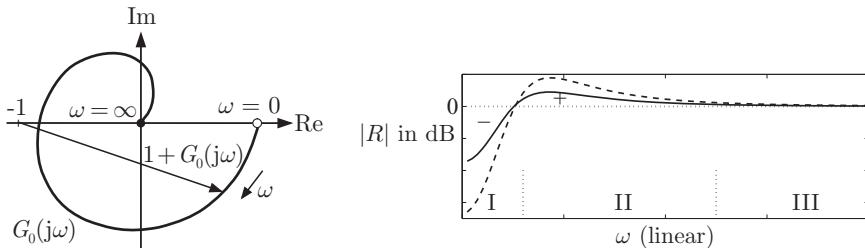
Damit erhält man

$$\frac{E_{\text{mitRegler}}(s)}{E_{\text{ohneRegler}}(s)} = \frac{1}{1 + G_0(s)} = S(s). \quad (7.38)$$

Diese Beziehung zeigt, dass die Empfindlichkeitsfunktion das Verhältnis der Regelabweichung im Regelkreis und der Regelabweichung, die sich ohne Regler einstellen würde, beschreibt. Aus diesem Grunde nennt man den Quotienten  $\frac{1}{1+G_0}$  auch *Regelfaktor* und bezeichnet ihn mit  $R$  (nicht zu verwechseln mit dem Messrauschen  $R!$ ):

$$R(s) = \frac{1}{1 + G_0(s)} = S(s). \quad (7.39)$$

Um ein gutes Führungsverhalten zu erreichen, muss der Betrag des Regelfaktors durch geeignete Wahl des Reglers möglichst klein gemacht werden. Wegen  $|R(j\omega)| = |S(j\omega)|$  wird damit gleichzeitig erreicht, dass sich eine am Ausgang der Regelstrecke angreifende Störung  $D(s)$  wenig auf die Regelgröße auswirkt.



**Abb. 7.13:** Typischer Verlauf der Ortskurve der offenen Kette (links) und des Betrages des Regelfaktors  $R(j\omega)$  (rechts)

Der typische Verlauf des Betrages des Regelfaktors in Abhängigkeit von der Frequenz ist in Abb. 7.13 (rechts) dargestellt. Diese Abbildung ergibt sich aus dem im linken Teil gezeigten Verlauf der Ortskurve  $G_0(j\omega)$  einer stabilen offenen Kette, die einen stabilen Regelkreis ergibt (vgl. Kap. 8). Die gestrichelte Kurve entsteht nach einer Vergrößerung der Reglerverstärkung. Drei charakteristische Frequenzbereiche können unterschieden werden:

- **Gegenkopplungsbereich I:** Der Betrag des Regelfaktors ist deutlich kleiner als eins. Die Regelgröße wird der Führungsgröße nachgeführt. Störungen werden mit einer entsprechend  $|R(j\omega)|$  geminderten Amplitude an den Ausgang des Regelkreises übertragen.  $|R(0)|$  ist die statische Regelabweichung, die bei einer sprungförmigen Störung am Ausgang der Regelstrecke auftritt, vgl. Gl. (7.7).
- **Mitkopplungsbereich II:** Der Betrag des Regelfaktors ist deutlich größer als eins. Das heißt, dass die Regelabweichung im Regelkreis größer ist als beim ungeregelten System. Die Störung wird um den Faktor  $|R(j\omega)|$  verstärkt an den Ausgang des Regelkreises übertragen.
- **Unempfindlichkeitsbereich III:** Der Betrag des Regelfaktors ist näherungsweise gleich eins. Die Regelgröße wird der Führungsgröße nicht nachgeführt, und die Störung wird ungemindert an den Ausgang des Regelkreises übertragen. Die Regelung ist wirkungslos.

Eine wichtige Beziehung zwischen diesen drei Bereichen wird durch das folgende von WESTCOTT 1952 bewiesene *Gleichgewichtstheorem* wiedergegeben. Diese in der englischsprachigen Literatur als *Bode integral* bezeichnete Beziehung gilt,

wenn die offene Kette  $G_0(s)$  stabil ist und einen Polüberschuss von mindestens zwei hat und wenn der Regelkreis stabil ist:

Gleichgewichtstheorem für stabile offene Kette:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lg |R(j\omega)| d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \lg \left| \frac{1}{1 + G_0(j\omega)} \right| d\omega = 0. \quad (7.40)$$

Dieses Gesetz besagt, dass die im rechten Teil von Abb. 7.13 mit + bzw. – gekennzeichneten Flächen, die von der  $|R(j\omega)|$ -Kurve und der durch 1 verlaufenden Parallelen zur  $\omega$ -Achse eingeschlossen werden, gleich groß sind. Für den Reglerentwurf bedeutet dies:

Jede Verbesserung des Regelkreisverhaltens im Gegenkopplungsbereich führt zu einer Verschlechterung im Mitkopplungsbereich und umgekehrt.

Abbildung 7.13 (rechts) zeigt den Verlauf des Regelfaktors für einen Regelkreis, bei dem man durch eine Veränderung der Reglerverstärkung die Regelgüte im niedrfrequenten Bereich verbessern kann (Übergang von der durchgezogenen zur gestrichelten Kurve). Aufgrund des Gleichgewichtstheorems verschlechtert sich dabei jedoch der Regelfaktor im höherfrequenten Bereich.

Ziel des Reglerentwurfs muss es deshalb sein, die Grenze zwischen dem Gegenkopplungsbereich und dem Mitkopplungsbereich so zu legen, dass die in den wichtigsten Führungs- und Störsignalen enthaltenen Frequenzen im Gegenkopplungsbereich liegen.

Für einen Polüberschuss der offenen Kette von eins ist das in Gl. (7.40) angegebene Integral endlich und möglicherweise negativ. Das heißt, für den Reglerentwurf bestehen die genannten Beschränkungen nicht, denn die im rechten Teil von Abb. 7.13 mit dem Minuszeichen versehene Fläche kann dann beliebig groß gemacht werden. Allerdings trifft die Voraussetzung an den Polüberschuss in der Praxis i. Allg. nicht zu. Da die meisten Regelstrecken wesentliche verzögernde Elemente enthalten, ist ihr Polüberschuss größer als eins. Dies wird offensichtlich, wenn man sich die Reihenschaltung aus Stellglied, der eigentlichen Regelstrecke und einem Messglied vorstellt. Jedes dieser Elemente hat i. Allg. einen Polüberschuss von eins, die Reihenschaltung deshalb häufig einen Polüberschuss von mindestens zwei oder drei. Folglich gilt das Gleichgewichtstheorem.

Ist die offene Kette instabil, so steht auf der rechten Seite von Gl. (7.40) an Stelle der Null ein von den instabilen Polen der offenen Kette abhängiger positiver Ausdruck. Das heißt, dass die mit dem Pluszeichen gekennzeichnete Fläche größer ist als die mit dem Minuszeichen markierte Fläche. Diese Beschränkungen für den Reglerentwurf werden umso schärfer, je größer der Realteil der instabilen Pole ist. Da mit Hilfe des Reglers die instabile Strecke stabilisiert werden muss, verringern sich die Möglichkeiten, scharfe Forderungen an das Führungsverhalten zu erfüllen. Dieser ingenieurtechnisch plausible Sachverhalt wird quantitativ durch das Gleichgewichtstheorem wiedergegeben.

**Beispiel 7.2 Auswirkungen des Gleichgewichtstheorems**

Um die Konsequenzen des Gleichgewichtstheorems für den Reglerentwurf zu illustrieren, wird ein Standardregelkreis betrachtet, bei dem die Regelstrecke durch ein PT<sub>1</sub>-Glied

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

beschrieben ist und ein I-Regler

$$K(s) = \frac{1}{T_I s}$$

eingesetzt wird. Im Folgenden wird das Verhalten des Regelkreises für die beiden Werte der Integrationszeitkonstanten

$$\begin{aligned} T_I &= 5 \text{ s} && \text{(durchgezogene Linie)} \\ T_I &= 1 \text{ s} && \text{(gestrichelte Linie)} \end{aligned}$$

miteinander verglichen.

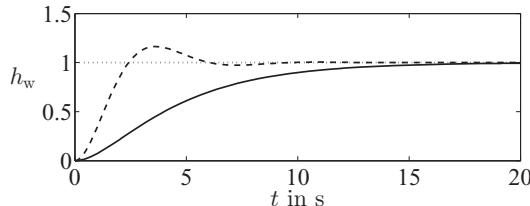


Abb. 7.14: Führungsübergangsfunktion des Regelkreises

Abbildung 7.14 zeigt, dass das Führungsverhalten bei der zweiten Reglereinstellung deutlich besser ist als bei der ersten, denn der Sollwert wird schon nach etwa 5 Sekunden erreicht, während der Übergangsvorgang bei der ersten Reglereinstellung etwa 15 Sekunden dauert. Der Regelfaktor ist in Abb. 7.15 zu sehen. Der Verbesserung des Regelfaktors im niedrfrequenten Bereich steht dem Gleichgewichtstheorem entsprechend eine Verschlechterung im höherfrequenten Bereich gegenüber. Der Regelfaktor ist in der Abbildung oben über einer linear geteilten Frequenzachse und unten in der aus dem Bodediagramm geläufigen Weise über einer logarithmisch geteilten Frequenzachse aufgetragen. Die grafische Veranschaulichung des Gleichgewichtstheorems mit der Flächengleichheit der unter bzw. über der 0 dB-Achse liegenden Flächen gilt für die lineare Frequenzteilung.

Erregt man den Regelkreis mit der Störung

$$d(t) = \sin 1,2 t$$

so verhält sich der Regelkreis mit der zweiten Reglereinstellung erwartungsgemäß schlechter, wie Abb. 7.16 zeigt. Der Ausgang schwingt mit einer größeren Amplitude. Dies kann bei der Frequenz  $\omega = 1,2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  aus Abb. 7.15 abgelesen werden, in der für die zweite Reglereinstellung der entsprechende Wert des Regelfaktors hervorgehoben ist.

Vergleicht man das Störverhalten für sprungförmige Störungen am Ausgang der Regelstrecke für die beiden Reglereinstellungen, so kommt man zum selben Ergebnis wie bei einem Vergleich des Führungsverhaltens: Die zweite Reglereinstellung ist besser als die

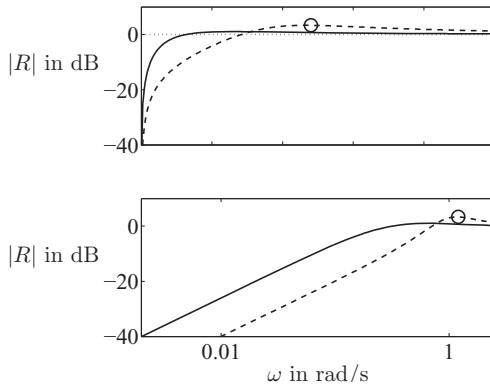
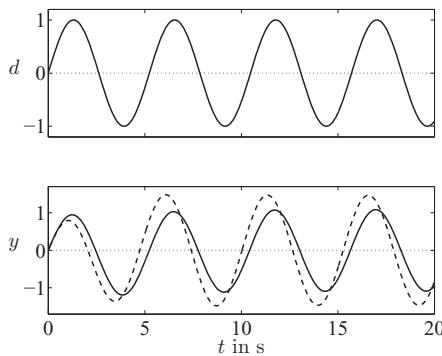


Abb. 7.15: Regelfaktor

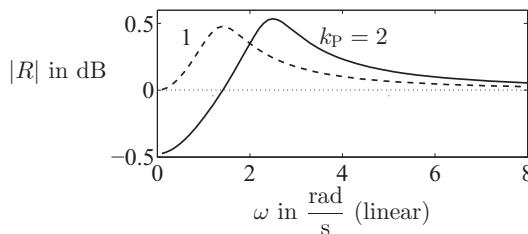
Abb. 7.16: Verhalten des Regelkreises bei sinusförmiger Störung für  $T_I = 5$  s  
( $-$ ) und  $T_I = 1$  s ( $---$ )

erste. Diese Tatsache ergibt sich aus Abb. 7.3. Sie steht nicht im Widerspruch zum Gleichgewichtstheorem, denn über diesen Vergleich sagt dieses Theorem gar nichts aus. Es vergleicht nicht das Führungs- und Störverhalten für dieselben Eingangssignale (und folglich für dieselben Frequenzbereiche), sondern für Signale mit unterschiedlicher Frequenz. Für die Bewertung des Störverhaltens in Abb. 7.16 wurde deshalb eine sinusförmige Störung verwendet.

**Instabile Regelstrecke.** Wenn der Regler die Regelstrecke stabilisieren muss, wird das Verhältnis von Störunterdrückung und Verstärkung der Störung noch ungünstiger. Als Beispiel wird die Strecke

$$G(s) = \frac{4}{(s-1)(s+2)}$$

betrachtet, die durch einen P-Regler mit der Verstärkung  $k_P > 0,5$  stabilisiert wird. Für  $k_P = 1$  und  $k_P = 2$  ist der Verlauf des Regelfaktors in Abb. 7.17 zu sehen. Für die kleinere Reglerverstärkung liegt die Kurve für alle Frequenzen über der gestrichelt eingetragenen 0 dB-Grenze, d. h., die Störung wird für alle Frequenzen verstärkt. Die Wirkung des Reglers beschränkt sich hier also auf die Stabilisierung.



**Abb. 7.17:** Betrag des Regelfaktors  $R(j\omega)$  bei instabiler Regelstrecke

Der P-Regler mit der größeren Reglerverstärkung stabilisiert die Strecke nicht nur, sondern dämpft auch den Einfluss niederfrequenter Störungen. Allerdings fällt für ihn die Verstärkung der Störung im höheren Frequenzbereich größer aus, denn für beide Regler ist die Fläche unter den gezeigten Kurven entsprechend dem Gleichgewichtstheorem gleich groß und positiv. □

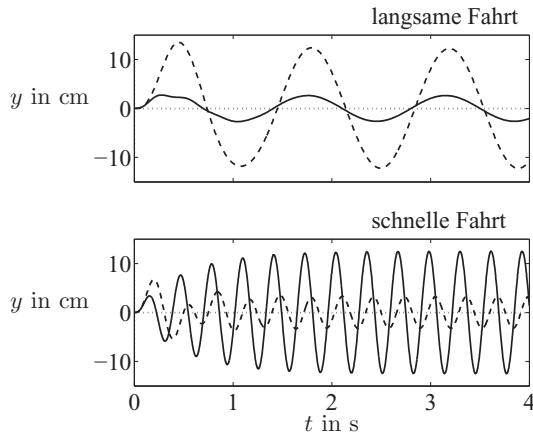
Das Gleichgewichtstheorem gilt für die Empfindlichkeitsfunktion  $S(s)$  und folglich für Störungen, die wie beim Standardregelkreis am Ausgang der Regelstrecke angreifen. Da jedoch einerseits das Störverhalten mit dem Führungsverhalten über die Beziehung (7.17) zusammenhängt und andererseits die Empfindlichkeitsfunktion als Faktor in allen für den Regelkreis eingeführten Übertragungsfunktionen vorkommt, gilt die durch das Gleichgewichtstheorem ausgedrückte Verknüpfung von einer Verbesserung des Regelkreisverhaltens im unteren Frequenzbereich und einer Verschlechterung im oberen Frequenzbereich auch für das Führungsverhalten und auch für andere Angriffsstellen der Störung. Das folgende Beispiel zeigt dies für eine am Eingang der Regelstrecke wirkende Störung.

### Beispiel 7.3 Wirkung einer aktiven Fahrzeugdämpfung

Bei einer aktiven Dämpfung wird durch eine Regelung der durch Bodenunebenheiten angelegten Bewegung des Fahrzeugaufbaus entgegen gewirkt. Als Stellglieder werden hydraulisch arbeitende Stoßdämpfer eingesetzt, wobei der Regler den Druck des Hydrauliköls auf die Federung über ein Ventil beeinflusst. Gemessen wird die Bewegung  $y$  des Fahrzeugaufbaus.

Im Folgenden wird angenommen, dass sich ein Fahrzeug auf einer sinusförmig gewellten Straße bewegt. Die gestrichelten Linien in Abb. 7.18 zeigen die Bewegung des Fahrzeugaufbaus bei langsamer Fahrt (oben) bzw. bei schneller Fahrt (unten). Da die Straßenoberfläche bei langsamer Fahrt eine Störung mit niedriger Frequenz erzeugt, folgt der Fahrzeugaufbau dem langsamem Auf und Ab der Straßenoberfläche mit großer Amplitude. Demgegenüber bewegt er sich bei schneller Fahrt nur mit kleiner Amplitude, denn die durch die schnelle Fahrt erzeugte Störung hat eine große Frequenz, die durch die Trägheit des Fahrzeugs „weggefilttert“ wird.

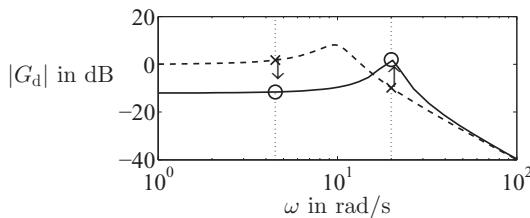
Um den Fahrkomfort bei langsamer Fahrt zu verbessern, wird eine proportionale Rückführung der Bewegung des Aufbaus auf das Hydraulikventil eingebaut. Damit kann die Bewegung wesentlich gedämpft werden, wie die durchgezogene Linie im oberen Teil der



**Abb. 7.18:** Verhalten des Fahrzeugs bei sinusförmiger Störung (--- ohne aktive Dämpfung, — mit aktiver Dämpfung)

Abbildung zeigt. Die Regelung erfüllt für langsame Fahrt (niederfrequente Störung) ihren Zweck.

Bei schneller Fahrt wird jedoch die hochfrequente Bewegung des Fahrzeugaufbaus durch die Regelung verstärkt. Das Fahrverhalten ist wesentlich schlechter als ohne aktive Federung.



**Abb. 7.19:** Verschiebung der Störübertragungsfunktion durch die Regelung

Der Grund für dieses Verhalten ist in Abb. 7.19 anhand der Störübertragungsfunktion zu erkennen. Der Amplitudengang des ungeregelten Fahrzeugs (gestrichelte Linie) wird durch die Regelung im unteren Frequenzbereich nach unten verschoben. Das Störverhalten für langsame Fahrt wird dabei von dem durch das Kreuz gekennzeichneten Punkt in den runden Punkt verschoben. Der Frequenzgang besitzt beim geregelten System wie auch bei der Regelstrecke eine Resonanzüberhöhung, die durch die Regelung nach rechts verschoben wird. Dabei verschlechtert sich das Verhalten bei hochfrequenter Störung (schneller Fahrt).

Dieses Beispiel zeigt die Bedeutung des Gleichgewichtstheorems in sehr anschaulicher Weise. Damit die Wirkung dieses Theorems in der Praxis keine Rolle spielt, muss mit einem Regler gearbeitet werden, der den „schlechten“ Teil des Störfrequenzganges in den Frequenzbereich schiebt, in dem keine Störung auftritt (also in den Bereich der unzulässigen Fahrzeuggeschwindigkeit). Bei den in Fahrzeugen eingesetzten aktiven Dämpfungen

versucht man außerdem, der Wirkung des Gleichgewichtstheorems durch die Verwendung nichtlinear wirkender Dämpfer zu umgehen, für die das Gleichgewichtstheorem nicht in dieser Form gilt.  $\square$

#### 7.4.5 Empfindlichkeit und Robustheit von Regelkreisen

Regelkreise sind aufgrund der über den Regler vorgenommenen Informationsrückkopplung robust gegenüber Veränderungen der Eigenschaften der Regelstrecke. Diese Tatsache wurde im Abschn. 1.2 als eine wichtige Motivation für die Verwendung von Regelungen angeführt, wobei darauf verwiesen wurde, dass eine Steuerung in der offenen Wirkungskette keine Möglichkeiten hat, auf Veränderungen in der Regelstrecke zu reagieren. Im Folgenden soll diese Robustheitsbetrachtung zunächst durch eine Empfindlichkeitsanalyse des Regelkreises und dann durch einen Vergleich der Robustheit von Regelkreis und Steuerkette vertieft werden. Es wird sich dabei herausstellen, dass die o. g. Robustheitsaussage zwar prinzipiell richtig ist, jedoch nur in bestimmten Frequenzbereichen gilt.

**Empfindlichkeit des Regelkreises bezüglich Modellunbestimmtheiten.** Empfindlichkeitsuntersuchungen werden in der Technik sehr häufig angewendet, wenn ein System einen unsicheren Parameter  $a$  besitzt und man sich dafür interessiert, in welche Richtung und wie stark sich ein Qualitätsparameter  $q(a)$  des Systems verändert, sobald sich der Parameter  $a$  von seinem Nominalwert  $\hat{a}$  entfernt. Entwickelt man den Zusammenhang zwischen  $a$  und  $q(a)$  in die Taylorreihe

$$q(a) = q(\hat{a}) + \frac{dq(a)}{da} (a - \hat{a}) + \dots$$

und vernachlässigt alle Glieder höherer als erster Ordnung, so erhält man

$$q(a) - q(\hat{a}) \approx \left. \frac{dq(a)}{da} \right|_{a=\hat{a}} (a - \hat{a}).$$

Der Differentialquotient  $\frac{dq(a)}{da}$  beschreibt also, wie stark sich eine Parameterabweichung  $a - \hat{a}$  auf den das Systemverhalten beschreibenden Qualitätsparameter  $q$  auswirkt. Dieser Quotient beschreibt die *Empfindlichkeit* des Systems.

Auf den Regelkreis bezogen stellt die Führungsübertragungsfunktion  $G_w(s)$  den Qualitätsparameter und die Übertragungsfunktion  $G(s)$  der Strecke den unsicheren Parameter dar (wobei natürlich mehrere unsichere Streckenparameter die Änderung von  $G(s)$  hervorrufen können). Aus

$$G_w(s) = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)}$$

erhält man für die Empfindlichkeit

$$\frac{dG_w(s)}{dG(s)} = \frac{K(s)}{(1 + G(s)K(s))^2}. \quad (7.41)$$

Dieser Ausdruck beschreibt für jede Frequenz  $s$  die Empfindlichkeit der Führungsübertragungsfunktion des Regelkreises bezüglich der Übertragungsfunktion der Regelstrecke.

Eine einfachere Darstellung dieser Empfindlichkeit erhält man, wenn man nicht die Übertragungsfunktionen selbst, sondern deren Logarithmus betrachtet, so wie es im Bodediagramm getan wird. Man untersucht also die Empfindlichkeit von  $\lg G_w(s)$  bezüglich der Änderung von  $\lg G(s)$ . Dafür gilt

$$\frac{d \lg G_w(s)}{d \lg G(s)} = \frac{\frac{dG_w(s)}{G_w(s)}}{\frac{dG(s)}{G(s)}} = \frac{dG_w(s)}{dG(s)} \frac{G(s)}{G_w(s)},$$

woraus man mit Gl. (7.41)

$$\frac{d \lg G_w(s)}{d \lg G(s)} = \frac{dG_w(s)}{dG(s)} \frac{G(s)}{G_w(s)} = \frac{1}{1 + G(s)K(s)} = S(s) \quad (7.42)$$

erhält. Diese Beziehung ist der Grund für die bereits eingeführte Bezeichnung „Empfindlichkeitsfunktion“ für  $S(s)$ .

Gleichung (7.42) beschreibt, wie sich eine Änderung der Regelstrecke auf die Führungsübertragungsfunktion  $G_w(s)$  auswirkt, wobei beide Übertragungsfunktionen im logarithmischen Maßstab gemessen werden. Je kleiner  $|S(s)|$  ist, desto weniger ändert sich die Führungsübertragungsfunktion bei Veränderungen der Streckeneigenschaften. Wie alle Empfindlichkeitsuntersuchungen gilt diese Aussage jedoch nur für kleine, streng genommen nur für infinitesimal kleine Änderungen  $dG(s)$ .

Wiederholt man dieselben Überlegungen für die Störübertragungsfunktion  $G_d(s)$ , so ergibt sich

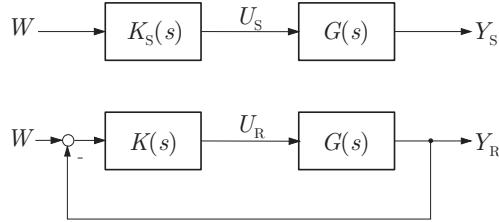
$$\frac{d \lg G_d(s)}{d \lg G(s)} = \frac{dG_d(s)}{dG(s)} \frac{G(s)}{G_d(s)} = -\frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} = -T(s). \quad (7.43)$$

Die komplementäre Empfindlichkeitsfunktion beschreibt, wie stark sich das Störverhalten des Regelkreises bei Modellunbestimmtheiten der Regelstrecke verändert.

**Vergleich der Robustheit von Regelkreis und Steuerstrecke.** Es wird nun ein System mit der Übertragungsfunktion  $G(s)$  betrachtet, das einerseits mit der Steuerung  $K_S(s)$  und andererseits mit dem Regler  $K(s)$  gesteuert wird (Abb. 7.20). Um im Weiteren die durch die Steuerung und die Regelung erzeugten Stell- und Regelgrößen voneinander unterscheiden zu können, werden diese mit dem Index „S“ bzw. „R“ versehen. Aus Abb. 7.20 kann man folgende Gleichungen ablesen:

$$U_S(s) = K_S(s)W(s) \quad (7.44)$$

$$U_R(s) = \frac{K(s)}{1 + G(s)K(s)}W(s) \quad (7.45)$$

**Abb. 7.20:** Steuerkette und Regelkreis

$$Y_S(s) = G(s)U_S(s) = G(s)K_S(s)W(s) \quad (7.46)$$

$$Y_R(s) = G(s)U_R(s) = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)}W(s). \quad (7.47)$$

Das gesteuerte System hat die Übertragungsfunktion  $\hat{G}(s)$ , die von der tatsächlichen Übertragungsfunktion  $G$  um  $\delta G$  abweicht, wobei  $\delta G$  im Gegensatz zu  $dG$  bei der Empfindlichkeitsuntersuchung nicht infinitesimal klein sein muss, sondern beliebig groß sein darf:

$$G(s) = \hat{G}(s) + \delta G(s).$$

Die Steuerung und der Regler werden für das Nominalsystem  $\hat{G}$  unter der Voraussetzung entworfen, dass beide Steuerungen dieselbe Eingangsgröße  $U$  erzeugen. Kennzeichnet man die sich für  $G = \hat{G}$  einstellenden Stell- und Regelgrößen mit einem Dach „^“, so gilt nach Voraussetzung

$$\hat{U}_S(s) = \hat{U}_R(s) \quad (7.48)$$

$$\hat{Y}_S(s) = \hat{Y}_R(s). \quad (7.49)$$

Aus den Gln. (7.44) und (7.45) kann man erkennen, dass diese Beziehungen genau dann gelten, wenn die Steuerung  $K_S$  mit dem Regler  $K$  entsprechend

$$K_S(s) = \frac{K(s)}{1 + \hat{G}(s)K(s)}$$

in Beziehung steht. Da die durch die Steuerung  $K_S$  erzeugte Stellgröße von  $G$  unabhängig ist, gilt

$$\hat{U}_S(s) = \hat{U}_R(s) = \frac{K(s)}{1 + \hat{G}(s)K(s)}W(s) = U_S(s). \quad (7.50)$$

Aus den Gln. (7.47) und (7.49) erhält man

$$\hat{Y}_S(s) = \frac{\hat{G}(s)K(s)}{1 + \hat{G}(s)K(s)}W(s). \quad (7.51)$$

Es wird nun untersucht, was sich in der Steuerkette und im Regelkreis ändert, wenn die Regelstrecke an Stelle von  $\hat{G}(s)$  die Übertragungsfunktion  $\hat{G} + \delta G$  besitzt.

Die Ausgangsgrößen der Steuerkette bzw. des Regelkreises kann man dann entsprechend

$$\begin{aligned} Y_S(s) &= \hat{Y}_S(s) + \delta Y_S(s) \\ Y_R(s) &= \hat{Y}_R(s) + \delta Y_R(s). \end{aligned}$$

zerlegen. Im Folgenden werden die Abweichungen  $\delta Y_S$  und  $\delta Y_R$  miteinander verglichen, wobei zur Vereinfachung der Darstellung die Abhängigkeit von der Frequenz  $s$  nicht mehr gekennzeichnet wird. Aus (7.47) folgt

$$\begin{aligned} \delta Y_R &= Y_R - \hat{Y}_R \\ &= \frac{GK}{1+GK}W - \frac{\hat{G}K}{1+\hat{G}K}W \\ &= \frac{1}{1+GK} \left( GK - (1+GK) \frac{\hat{G}K}{1+\hat{G}K} \right) W \\ &= \frac{1}{1+GK} \left( G \left( K - K \frac{\hat{G}K}{1+\hat{G}K} \right) - \frac{\hat{G}K}{1+\hat{G}K} \right) W \\ &= \frac{1}{1+GK} \left( G \frac{K}{1+\hat{G}K}W - \frac{\hat{G}K}{1+\hat{G}K}W \right). \end{aligned}$$

Der vor der Klammer stehende Bruch stellt die Empfindlichkeitsfunktion  $S(s)$  dar. Der erste Term in der Klammer ergibt

$$G \frac{K}{1+\hat{G}K}W = GU_S = Y_S,$$

wenn man nacheinander die Gln. (7.50) und (7.46) einsetzt. Der zweite Term ist entsprechend Gl. (7.51) gleich  $\hat{Y}_S$ . Folglich gilt

$$\delta Y_R(s) = S(s) \delta Y_S(s).$$

(7.52)

Diese Gleichung beschreibt, wie sich die Ausgangsgröße des Regelkreises im Vergleich zur Ausgangsgröße der Steuerkette ändert, wenn die Strecke nicht die nominelle Übertragungsfunktion  $\hat{G}(s)$ , für die beide Anordnungen dasselbe Verhalten haben, sondern die Übertragungsfunktion  $G(s)$  besitzt.

**Diskussion.** Aufgrund der Beziehungen (7.42) und (7.52) gelten für die Empfindlichkeit des Regelkreises und für den Vergleich von Steuerkette und Regelkreis dieselben Aussagen wie für den Regelfaktor (rechter Teil von Abb. 7.13). Bei Veränderung der Eigenschaften des zu steuernden Systems verändert sich das Verhalten des Regelkreises im Gegenkopplungsbereich weniger als das der Steuerkette. Der Regelkreis ist also robust gegenüber niederfrequenten Änderungen  $\delta G(j\omega)$  des Streckenverhaltens. Im Mitkopplungsbereich sind die Auswirkungen der Streckenveränderungen im Regelkreis jedoch größer als in der Steuerkette. Für hohe Frequenzen

wirken sich Änderungen der Streckeneigenschaften in beiden Anordnungen in gleicher Weise aus.

Eine Erhöhung der Kreisverstärkung  $k_0$  verbessert das Regelkreisverhalten im niederfrequenten Bereich. Genauso wie beim Führungs- und Störverhalten muss diese Verbesserung jedoch durch eine Verschlechterung im höherfrequenten Bereich erkauft werden (Abb. 7.13 (rechts)).

#### 7.4.6 Konsequenzen für den Reglerentwurf

Aus den vorhergehenden Betrachtungen können Richtlinien für die zweckmäßige Wahl des Reglers  $K(s)$  abgeleitet werden. Aus den Gl. (7.14) und (7.15) kann man erkennen, dass gilt

$$\left. \begin{array}{l} |S(j\omega)| \ll 1 \\ |T(j\omega)| \approx 1 \end{array} \right\} \quad \text{wenn} \quad |G_0(j\omega)| \gg 1$$

$$\left. \begin{array}{l} |S(j\omega)| \approx 1 \\ |T(j\omega)| \ll 1 \end{array} \right\} \quad \text{wenn} \quad |G_0(j\omega)| \ll 1.$$

Um einerseits ein gutes Führungsverhalten bei gleichzeitiger guter Störunterdrückung sowie kleiner Empfindlichkeit gegenüber Modellunbestimmtheiten zu erreichen und andererseits das Messrauschen hinreichend zu unterdrücken, müssen beide Regeln in den durch die Führungsgröße und das Messrauschen bestimmten Frequenzbereichen angewendet werden. Wenn die Führungsgröße und die Störgröße maßgebend im niederfrequenten und das Messrauschen im hochfrequenten Bereich liegen, kann man folgendermaßen vorgehen:

- Wählen Sie  $|G_0(j\omega)| \gg 1$  im unteren Frequenzbereich, um gutes Führungsverhalten und gute Störunterdrückung sowie geringe Empfindlichkeit des Führungsverhaltens bezüglich Änderungen der Regelstrecke zu erreichen.
- Wählen Sie  $|G_0(j\omega)| \ll 1$  im oberen Frequenzbereich, um das Messrauschen zu unterdrücken und geringe Empfindlichkeit des Störverhaltens bezüglich Änderungen der Regelstrecke zu erreichen.

Diese Richtlinien können durch eine geeignete Wahl von  $K(j\omega)$  befolgt werden. Dabei gilt, solange der Regelkreis stabil ist, dass eine Erhöhung der Kreisverstärkung  $k_0$  zu einer Verbesserung des Verhaltens im unteren Frequenzbereich führt, gleichzeitig jedoch eine Verschlechterung des Verhaltens im oberen Frequenzbereich eintritt (Abb. 7.13 (rechts)).

Problematisch wird der Reglerentwurf, wenn die Frequenzbereiche der Führung, der Störung und des Messrauschen nicht deutlich voneinander getrennt sind. Da Gl. (7.18) zeigt, dass im Regelkreis nach Abb. 7.5 das Messrauschen genauso wie die Führungsgröße übertragen wird und aufgrund von Gl. (7.17) keine gleichzeitige Unterdrückung der Störung  $d(t)$  und des Messrauschen  $r(t)$  möglich ist, kann

die Regelungsaufgabe dann nur mit Hilfe einer erweiterten Regelkreisstruktur gelöst werden. Abbildung 7.7 verdeutlicht, dass in den Regelkreis das zusätzliche Element  $C(s)$  zur Unterdrückung des Messrauschen und das Vorfilter  $V(s)$  zur Gestaltung des Führungsverhaltens eingefügt werden können. Im erweiterten Regelkreis gilt Gl. (7.16) weiterhin, wobei jedoch in der Empfindlichkeitsfunktion und der komplementären Empfindlichkeitsfunktion für  $G_0$  jetzt  $G_0(s) = G(s)K(s)C(s)$  einzusetzen ist. Die Übertragungseigenschaften des Regelkreises sind dann nicht mehr wie in Gl. (7.18) ausschließlich von  $S$  und  $T$  abhängig (Aufgabe 7.2).

Die angeführten grundlegenden Probleme beim Reglerentwurf haben zur Folge, dass die Lösung der Regelungsaufgabe i. Allg. nicht in einem Schritt, sondern iterativ erhalten wird. Man spricht deshalb nicht von der Berechnung des Reglers, sondern vom *Reglerentwurf* oder der *Reglersynthese*. Obwohl diese Begriffe nicht ganz einheitlich gebraucht werden, versteht man unter dem Entwurf vorrangig die Bestimmung geeigneter Reglerparameter bei vorgegebener Struktur des Reglergesetzes  $K(s)$  und verwendet den Begriff der Synthese, wenn Struktur und Parameter des Regelkreises festgelegt werden müssen.

Die in diesem Abschnitt beschriebenen Beschränkungen für die erreichbare Regelgüte werden beim iterativen Entwurfsvorgehen offensichtlich, indem man bei wiederholten Parameteränderungen des Reglers und den nachfolgenden Simulationsuntersuchungen des Regelkreises beispielsweise feststellt,

- dass man einen Kompromiss zwischen einem guten Führungsverhalten und einem guten Störverhalten machen muss,
- dass aufgrund der verfügbaren Stellamplitude und der Trägheit der Regelstrecke die Regelgröße nur einer sich mit begrenzter Geschwindigkeit verändernde Führungsgröße hinreichend genau folgen kann,
- dass man eine instabile Regelstrecke zwar stabilisieren, das Führungs- bzw. Störverhalten des Regelkreises jedoch nur begrenzt den gegebenen Güteforderungen anpassen kann,
- dass ein auf niederfrequente Führungsgrößenänderungen gut reagierender Regelkreis ein schlechtes Verhalten bei höherfrequenten Störungen hat,
- dass man für die nominellen Streckenparameter ein sehr gutes Regelkreisverhalten erzeugen kann, bei Parameteränderungen die Güte der Regelung jedoch drastisch abnimmt,
- dass sich das Regelkreisverhalten erheblich verschlechtert, wenn man bei der Simulation des Regelkreises die begrenzte Bandbreite des Stellgliedes und die durch das Messglied hervorgerufene Verzögerung der Messgröße berücksichtigt.

## 7.5 Entwurf von Vorsteuerungen

### 7.5.1 Aufgaben der Folgeregelung

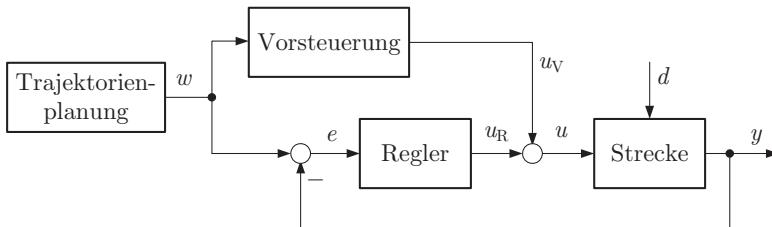
Dieser Abschnitt behandelt den Entwurf von Vorsteuerungen. Aus der anhand von Abb. 1.7 auf S. 11 erläuterten Arbeitsteilung in einem Regelkreis mit zwei Freiheitsgraden geht hervor, dass die Regelung vor allem zum Ausgleich von Störungen und Modellunbestimmtheiten dient, während die hier behandelte Vorsteuerung das Führungsverhalten gestalten soll.

In Abhängigkeit davon, wie die Führungsgröße vorgegeben wird, unterscheidet man zwischen zwei Typen von Regelungen, die zwei Arten von Vorsteuerungen erfordern:

- **Servoregelung:** Die Führungsgröße  $w(t)$  wird fortlaufend während der Arbeit der Regelung (online) von einer übergeordneten Ebene vorgegeben und ist nicht im Voraus bekannt.
- **Folgeregelung mit Trajektorienplanung:** Der Verlauf  $w_{[0, t_e]}$  der Führungsgröße wird unter Berücksichtigung der Regelkreiseigenschaften im Voraus (offline) geplant.

In beiden Fällen soll die Regelgröße  $y(t)$  der Führungsgröße  $w(t)$  so gut wie möglich folgen.

Ein Beispiel für den ersten Fall ist die Servolenkung von Kraftfahrzeugen, bei der die Führungsgröße (Lenkwinkel) vom Fahrer entsprechend der aktuellen Verkehrssituation mit Hilfe des Lenkrades vorgegeben wird. Der Regler kann nur auf den aktuellen Wert  $w(t)$  und gegebenenfalls vorherige Werte reagieren.



**Abb. 7.21:** Folgeregelung mit Trajektorienplanung und Vorsteuerung

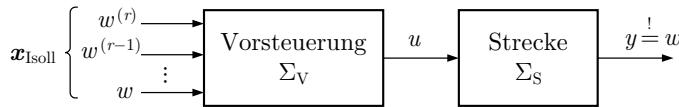
Im zweiten Fall wird der Verlauf  $w_{[0, t_e]}$  der Führungsgröße über einen Zeitabschnitt  $[0, t_e]$  als Ganzes festgelegt. Diese Tatsache wird durch die Verwendung des Begriffes *Solltrajektorie* für den Verlauf der Führungsgröße im betrachteten Zeitintervall hervorgehoben. Die Solltrajektorie entsteht als Ergebnis einer *Trajektorienplanung* in einem zum Regelkreis gehörenden Block (Abb. 7.21). Derartige Reglungsaufgaben treten auf, wenn man den Greifer eines Roboters auf einer durch die Bewegungsplanung festgelegten Bahn bewegen will (vgl. Abb. 2.7 auf S. 28) oder

wenn man einen verfahrenstechnischen Prozess vom aktuellen in einen neuen Arbeitspunkt überführen möchte (Beispiel 7.4).

Die folgenden Abschnitte beschäftigen sich mit Folgeregelungen nach Abb. 7.21 und zeigen, wie Vorsteuerungen entworfen und Solltrajektorien geplant werden. Ziel ist es, eine Stellgröße  $u_V(t)$  zu finden, für die die Regelgröße  $y(t)$  der Führungsgröße  $w(t)$  exakt folgt ( $y(t) = w(t)$  für alle  $t \geq 0$ ). Dabei wird die Analyse eines in der offenen Wirkungskette gesteuerten Systems auch zeigen, welche Anforderungen die Führungsgröße  $w(t)$  erfüllen muss und wie der Führungsgrößenverlauf  $w_{[0, t_e]}$  bei einer Umsteuerung des Arbeitspunktes zweckmäßig gewählt werden kann. Die in der Abbildung eingetragene Regelung ist dann dafür verantwortlich, dass Störungen und die Wirkung von Modellfehlern kompensiert werden.

### 7.5.2 Inversionsbasierter Vorsteuerungsentwurf

In diesem Abschnitt wird die in Abb. 7.21 enthaltene Vorsteuerung herausgegriffen und ein Verfahren zum Entwurf dieses Blockes entwickelt. In der dabei betrachteten Reihenschaltung der Vorsteuerung mit der Regelstrecke nach Abb. 7.22 wird die Stellgröße wieder mit  $u(t)$  bezeichnet, obwohl sie in Abb. 7.21  $u_V(t)$  heißt.



**Abb. 7.22:** Vorsteuerung: Steuerung in der offenen Wirkungskette

Das Steuerungsgesetz für die Vorsteuerung  $\Sigma_V$  erhält man durch eine Erweiterung der Überlegungen aus Abschn. 5.5.4. Dort wurde die Eingangsgröße  $u(t)$  eines Systems so gewählt, dass die Ausgangsgröße  $y(t)$  identisch null ist. Jetzt wird gefordert, dass die Ausgangsgröße der Strecke  $\Sigma_S$  gleich der Führungsgröße  $w(t)$  ist

$$y(t) = w(t), \quad t \geq 0. \quad (7.53)$$

Diese Forderung ist schärfere als die Güteforderung (II), bei der entsprechend Gl. (7.3) auf S. 346 nur das stationäre Verhalten  $y_s(t)$  mit der Führungsgröße übereinstimmen soll.

Betrachtet man dazu wieder die E/A-Normalform der Regelstrecke, so wird offensichtlich, dass die Forderung (7.53) nur erfüllbar ist, wenn zur Zeit  $t = 0$  außer  $y(0)$  und  $w(0)$  auch noch die  $r - 1$  erste Ableitungen von  $y(t)$  und  $w(t)$  gleich sind. Mit der Abkürzung

$$w^{(i)}(t) = \frac{d^i w(t)}{dt^i}$$

für die  $i$ -te Ableitung von  $w(t)$  und demselben Symbol für  $y(t)$  heißt diese Voraussetzung

$$y^{(i)}(0) \stackrel{!}{=} w^{(i)}(0), \quad i = 0, 1, \dots, r-1. \quad (7.54)$$

Wenn sie erfüllt ist, kann man die Eingangsgröße  $u(t)$  so wählen, dass die Gleichheit für die  $r$ -te Ableitung beider Funktionen für alle Zeiten gilt

$$y^{(r)}(t) = \dot{x}_{Er}(t) \stackrel{!}{=} w^{(r)}(t), \quad t \geq 0, \quad (7.55)$$

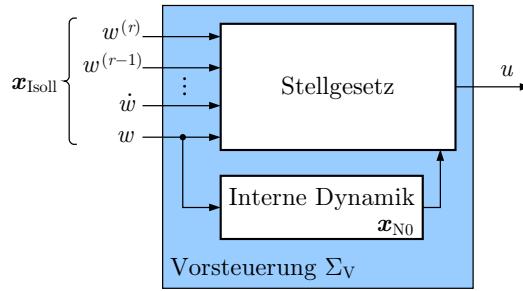
somit auch die  $r-1$  ersten Ableitungen von  $y(t)$  und  $w(t)$  für alle Zeitpunkte gleich sind

$$y^{(i)}(t) = w^{(i)}(t), \quad i = 0, 1, \dots, r-1$$

und folglich das Ziel (7.53) erreicht wird. Aus Gl. (5.98) auf S. 164 erhält man für die Stellgröße die Beziehung

$$u(t) = \frac{1}{b_q} y^{(r)}(t) - \frac{1}{b_q} (e_1 \ e_2 \ \dots \ e_r) \mathbf{x}_I(t) - \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N(t), \quad (7.56)$$

in die anstelle von  $y^{(r)}(t)$  und für die Elemente des Vektors  $\mathbf{x}_N(t)$  die Führungsgröße  $w(t)$  und deren Ableitungen einzustetzen sind.



**Abb. 7.23:** Struktur der Vorsteuerung (7.58)

Um das Zustandsraummodell der Vorsteuerung angeben zu können, wird der Vektor

$$\mathbf{x}_{ISoll}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_I(t) \\ w^{(r)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w(t) \\ w^{(1)}(t) \\ \vdots \\ w^{(r)}(t) \end{pmatrix}$$

eingeführt und Gl. (7.56) in die Beziehung

$$u(t) = -\mathbf{v}^T \mathbf{x}_{ISoll}(t) - \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N(t) \quad (7.57)$$

mit dem  $(r+1)$ -dimensionalen Zeilenvektor

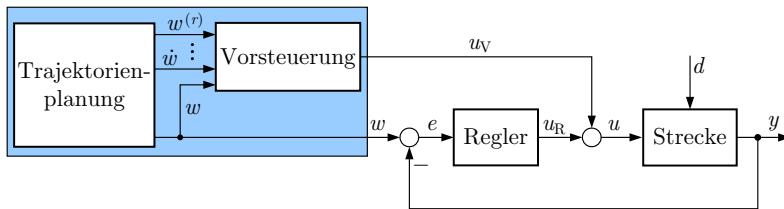
$$\mathbf{v}^T = \frac{1}{b_q} (e_1 \ e_2 \ \dots \ e_r \ - 1)$$

umgeformt. Bei der Anwendung dieses Stellgesetzes muss man den Zustand  $\mathbf{x}_N(t)$  der internen Dynamik berechnen. Deshalb ist die Vorsteuerung ein dynamisches System, das Gl. (5.96) für die interne Dynamik einschließt (Abb. 7.23):

Vorsteuerung:

$$\Sigma_V : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_N(t) = A_{NN}\mathbf{x}_N(t) + b_N w(t), & \mathbf{x}_N(0) = \mathbf{x}_{N0} \\ u(t) = -c_N^T \mathbf{x}_N(t) - v^T \mathbf{x}_{ISoll}(t). \end{cases} \quad (7.58)$$

Wenn keine Störungen auftreten und das Regelstreckenmodell fehlerfrei ist, folgt für diese Stellgröße die Regelgröße  $y(t)$  der Solltrajektorie  $w(t)$  exakt.



**Abb. 7.24:** Realisierung des Regelkreises mit Vorsteuerung und Trajektorienplanung

Da bei allen Anwendungen Störungen und Modellunbestimmtheiten auftreten, muss man Vorsteuerungen mit einer Regelung kombinieren (Abb. 7.24). Die Untersuchungen dieses Abschnitts zeigen, dass man dabei die Trajektorienplanung und die Vorsteuerung nicht, wie in Abb. 7.21 gezeigt, als zwei Blöcke realisieren kann, die durch die Führungsgröße  $w(t)$  verkoppelt sind. Statt dessen muss die Trajektorienplanung der Vorsteuerung den gesamten Vektor  $\mathbf{x}_{ISoll}(t)$  oder einen analytischen Ausdruck für die Funktion  $w_{[0, t_e]}$  übergeben, aus dem die Vorsteuerung die Ableitungen dieser Funktion durch symbolisches Differenzieren gewinnen kann.

Den Anfangszustand  $\mathbf{x}_{N0}$  der Nulldynamik kann man ermitteln, wenn sich die Strecke  $\Sigma_S$  vor der Umsteuerung solange im Arbeitspunkt  $y(0) = \bar{w}_0$  befinden hat, dass  $\dot{x}(0) = \mathbf{0}$  gilt. Mit der Eingangsgröße  $u(0) = \frac{\bar{w}_0}{k_s}$  erhält man dann

$$\mathbf{x}_0 = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \frac{\bar{w}_0}{k_s}.$$

Der dazu gehörige Zustand der internen Dynamik ist

$$\mathbf{x}_{N0} = -\mathbf{T}_u \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \frac{\bar{w}_0}{k_s} \quad (7.59)$$

mit der Matrix  $\mathbf{T}_u$  aus Gl. (5.100) auf S. 164.

Gleichung (7.58) kann man als ein *inverses Modell*  $\Sigma_S^{-1}$  der Regelstrecke interpretieren, denn sie liefert zu einem Verlauf der Ausgangsgröße  $y(t) = w(t)$  den

Stellgrößenverlauf  $u(t)$ , für den die Regelstrecke der Führungsgröße folgt, und invertiert damit die Wirkungsrichtung von der Stellgröße zur Regelgröße. Die Inversion ist nur möglich, wenn außer  $w(t)$  auch die  $r$  ersten Ableitungen von  $w(t)$  bekannt sind. Diese zusätzlichen Informationen sind notwendig, weil jedes dynamische System seine Eingangsgröße mit Zeitverzögerungen überträgt und die Systeminverse deshalb zukünftige Werte der Ausgangsgröße verarbeiten muss, die durch die Ableitungen repräsentiert werden. Aus dieser Interpretation folgt der Begriff „inversionsbasierter Vorsteuerungsentwurf“ für das hier beschriebene Vorgehen.

**Vorsteuerung von Regelstrecken ohne Nullstellen.** Wenn die Regelstrecke keine Nullstellen besitzt ( $r = n$ ), gibt es keine interne Dynamik und die Vorsteuerung reduziert sich auf

Vorsteuerung von Systemen mit  $r = n$ :

$$\Sigma_V : \quad u(t) = -v^T x_{ISoll}(t). \quad (7.60)$$

Es müssen alle Ableitungen von  $w(t)$  bis zur Ordnung  $n$  existieren und bekannt sein. Die Vorsteuerung  $u(t)$  ist eine Linearkombination der Führungsgröße  $w(t)$  und dieser Ableitungen und man braucht keine interne Dynamik zu integrieren, um  $x_N(t)$  zu berechnen. Aus der Sicht des Vorsteuerungsentwurfs sind Regelstrecken mit dem relativen Grad  $r = n$  also das beste, was man sich wünschen kann.

**Anwendungsbereich der inversionsbasierten Vorsteuerung.** Die in Abb. 7.23 gezeigte Struktur der Vorsteuerung ist praktisch nur realisierbar, wenn die interne Dynamik stabil ist, so dass Gl. (7.58) für die gegebene Solltrajektorie  $w(t)$  numerisch stabil integriert werden kann. Da die Eigenwerte der Matrix  $A_{NN}$  mit den Nullstellen der Regelstrecke übereinstimmen, ist die inversionsbasierte Vorsteuerung also nur für minimalphasige Systeme anwendbar.

Für nichtminimalphasige Systeme müssen andere Entwurfsverfahren für die Vorsteuerung eingesetzt werden. Eine Möglichkeit ist der Entwurf der Vorsteuerung anhand der Regelungsnormalform der Regelstrecke. Da man bei einer Umsteuerung des Systems den neuen Arbeitspunkt auch in den Zustandskoordinaten der Regelungsnormalform darstellen kann, ist die hier erläuterte Methode auf diese Normalform übertragbar, allerdings für eine Sollvorgabe für die erste Zustandsvariable  $x_{R1}(t)$  dieses Modells, die für  $r < n$  nicht mit der Ausgangsgröße  $y(t)$  übereinstimmt (vgl. S. 85). Deshalb muss bei dieser Vorgehensweise die im folgenden Abschnitt erläuterte Trajektorienplanung für die Zustandsvariable  $x_{R1}(t)$  anstelle für die Ausgangsgröße  $y(t)$  angewendet werden. Das Problem der Nichtminimalphasigkeit der Regelstrecke führt also zu der Schwierigkeit, dass der Vorsteuerungsentwurf und die Trajektorienplanung nicht für die Regelgröße  $y(t)$ , sondern für eine Ersatzgröße  $x_{R1}(t)$  ausgeführt werden müssen.

**Forderungen an den Verlauf der Führungsgröße.** Aus den vorherigen Untersuchungen geht hervor, dass ein System mit dem relativen Grad  $r$  nur dann einer Führungsgröße  $w(t)$  exakt folgen kann, wenn die Führungsgröße  $r$ -mal differenzierbar ist, denn in das Stellgesetz (7.58) gehen alle Ableitungen bis zur Ordnung  $r$  ein. Dies zeigt insbesondere, dass ein System zweiter Ordnung ohne Nullstelle ( $r = 2$ ) aus der Ruhelage keiner sprungförmigen Führungsgröße und auch keiner Führungsgröße folgen kann, die zur Zeit  $t = 0$  einen von null verschiedenen Anstieg aufweist. Eine sprungförmige Solltrajektorie kann nur ein statisches System durchlaufen, eine zur Zeit  $t = 0$  ansteigende Trajektorie nur ein System erster Ordnung bzw. ein System, dessen Polüberschuss  $r$  höchstens eins ist.

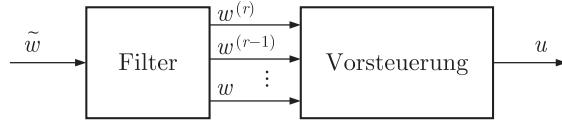
Diese Beschränkung der Solltrajektorie geht auch aus den Signalflussgraphen der E/A-Normalform der Regelstrecke hervor (Abb. 5.15 auf S. 163). Die Eingangsgröße  $u$  beeinflusst die Ausgangsgröße  $y$  über  $r$  in Reihe geschaltete Integratoren und verändert zur Zeit  $t$  folglich nicht den Signalwert  $y(t)$ , sondern nur die  $r$ -te Ableitung von  $y(t)$ .

Die bisherigen Betrachtungen gehen davon aus, dass sich die Stellgröße zum Zeitpunkt  $t = 0$  sprungförmig ändern kann, wie es beispielsweise bei elektrischen Schaltungen möglich ist, bei denen Spannungen zu- und abgeschaltet werden können. Wenn man außerdem fordert, dass sich die Stellgröße stetig ändern soll wie beispielsweise die Kraft bei mechanischen Systemen, so muss über die genannten Forderungen hinaus die Führungsgröße noch mindestens einmal mehr differenzierbar sein.

Trotz der genannten Forderungen hat man bei der Trajektorienplanung noch erhebliche Freiheiten.

**Konsequenzen für Servoregelungen.** Die Ergebnisse für die Trajektorienplanung haben direkte Konsequenzen für Servoregelungen, bei der die Führungsgröße nicht durch eine Trajektorienplanung ermittelt, sondern von einer höheren Steuerungsebene online vorgegeben wird. Eine unzweckmäßige Wahl der Führungsgröße kann hier zu einer Überschreitung der Stellgrößenbeschränkungen und zur Anregung unerwünschter Schwingungen führen. Um beides zu verhindern, ist es zweckmäßig, die vorgegebene Führungsgröße, die mit  $\tilde{w}(t)$  bezeichnet wird, zunächst durch ein Filter so zu glätten, dass das gefilterte Signal  $w(t)$  die in diesem Abschnitt erläuterten Forderungen bezüglich der Existenz von  $r$  Ableitungen erfüllt (Abb. 7.25). Verwendet man als Filter ein System  $r$ -ter Ordnung in Regelungsnormalform (4.54) – (4.57), so stellen die Zustandsvariablen des Filters die gesuchte Führungsgröße und deren Ableitungen dar. Dann kann man wieder mit der in diesem Abschnitt abgeleiteten Vorsteuerung arbeiten.

Diese Betrachtungen wie auch die im Folgenden behandelten Beispiele zeigen, dass es unzweckmäßig ist, für einen Arbeitspunktwechsel die Führungsgröße  $w(t)$  sprungförmig auf den neuen Sollwert zu setzen, weil kein Regelkreis einem solchen Sprung folgen kann und weil durch diese sprungförmige Eingangsgröße Eigenschwingungen des Regelkreises angeregt werden. Ungeachtet dieser Tatsache hat sich für die in den folgenden Kapiteln behandelten Entwurfsverfahren durchgesetzt, dass die Führungsübergangsfunktion zur Bewertung der Regelgüte herange-



**Abb. 7.25:** Vorsteuerung für Servoregelungen

zogen wird. Das auf diese Weise erhaltene Entwurfsergebnis führt auf Regelkreise, die so stark gedämpft sind, dass sie selbst für eine sprungförmige Führungsgröße ein gutes Verhalten aufweisen und deshalb insbesondere in Kombination mit der hier behandelten Vorsteuerung strenge Dynamikforderungen (III) erfüllen.

### 7.5.3 Trajektorienplanung für Arbeitspunktwechsel

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Trajektorienplanung, die für den häufig auftretenden Fall behandelt wird, dass die Regelstrecke vom aktuellen Arbeitspunkt  $\bar{w}_0$  in einen neuen Arbeitspunkt  $\bar{w}_e$  überführt werden soll:

$$y(0) = \bar{w}_0 \quad \longrightarrow \quad y(t_e) = \bar{w}_e.$$

In der zweiten Forderung bezeichnet  $t_e$  die für den Arbeitspunktwechsel notwendige Transitionszeit. Das Folgende betrachtet stabile Regelstrecken bzw. instabile Regelstrecken, für die bereits eine stabilisierende Regelung realisiert wurde.

Wie die Untersuchungen des vorhergehenden Abschnitts gezeigt haben, muss man für eine Regelstrecke mit dem relativen Grad  $r$  in Erweiterung der Bedingungen für den Anfangs- und den Endwert der Solltrajektorie fordern, dass die ersten  $r - 1$  Ableitungen der Regelgröße in beiden Arbeitspunkten verschwinden. Häufig fordert man darüber hinaus, dass die Stellgröße  $u(t)$  stetig verläuft, was sich in derselben Forderung an die  $r$ -te Ableitung niederschlägt:

$$y(0) = \bar{w}_0 \tag{7.61}$$

$$y^{(i)}(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \tag{7.62}$$

$$y(t_e) = \bar{w}_e \tag{7.63}$$

$$y^{(i)}(t_e) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r. \tag{7.64}$$

Die Forderung (7.62) stimmt mit Gl. (7.54) überein, während es die Forderung (7.64) ermöglicht, die Stellgröße nach der Umsteuerung so zu wählen, dass das System im Arbeitspunkt bleibt.

Damit muss die Solltrajektorie  $w_{[0, t_e]}$  insgesamt  $2(r + 1)$  Forderungen erfüllen und man kann sie beispielsweise als ein Polynom mit dem Grad  $p = 2r + 1$

$$w(t) = a_{wp}t^p + \dots + a_{w1}t + a_{w0}$$

ansetzen und die Polynomkoeffizienten  $a_{wi}$  mit Hilfe der Gln. (7.61) – (7.64) berechnen.

**Berücksichtigung von Stellgrößenbeschränkungen.** Der berechnete Stellgrößenverlauf kann genutzt werden, um zu überprüfen, ob die geforderte Trajektorie  $w(t)$  unter Einhaltung von Stellgrößenbeschränkungen erzeugt werden kann. Dabei muss man berücksichtigen, dass die in diesem Abschnitt mit  $u(t)$  bezeichnete Größe nur der Vorsteuerungsanteil  $u_V(t)$  der Stellgröße ist, dem der durch die Regelung vorgegebene Anteil  $u_R(t)$  überlagert wird. Bei der Betrachtung der Stellgrößenbeschränkung muss man eine entsprechende „Reserve“ für die Regelung einplanen. Werden die Beschränkungen verletzt, so muss die Transitionszeit  $t_e$  vergrößert werden.

Die Trajektorienplanung ist im folgenden Algorithmus zusammengefasst:

#### Algorithmus 7.1 Trajektorienplanung

**Gegeben:** Modell der Regelstrecke  
Arbeitspunkte  $\bar{w}_0$  und  $\bar{w}_e$ .

1. Legen Sie die Transitionszeit  $t_e$  in Abhängigkeit von der Regelstreckendynamik fest.
2. Bestimmen Sie die Solltrajektorie als ein Polynom  $(2r + 1)$ -ter Ordnung, indem Sie die Polynomkoeffizienten aus den Bedingungen (7.61) – (7.64) berechnen.
3. Berechnen Sie die Stellgröße  $u(t)$  aus den Gln. (7.58), (7.59) bzw. aus Gl. (7.60). Wenn diese Stellgröße Stellgrößenbeschränkungen verletzt, vergrößern Sie die Transitionszeit  $t_e$  und setzen den Algorithmus ab Schritt 2 fort.

**Ergebnis:** Verlauf der Solltrajektorie  $w_{[0, t_e]}$  und der Stellgröße  $u_{[0, t_e]}$

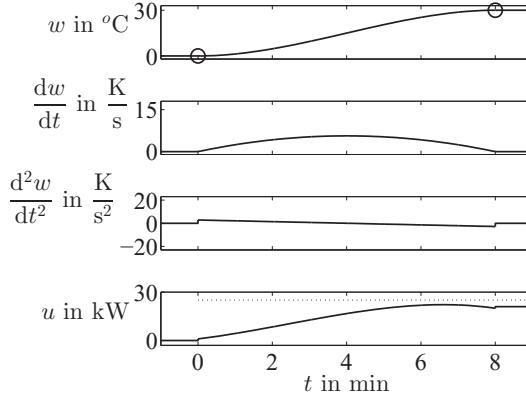
#### Beispiel 7.4 Arbeitspunktwechsel bei einem Rührkesselreaktor

Der Rührkesselreaktor aus Beispiel 4.3 auf S. 62 wird jetzt mit der Heizleistung  $\dot{Q}(t)$  als Eingangsgröße und der Flüssigkeitstemperatur  $T(t)$  als Ausgangsgröße betrachtet, wofür man das Modell in E/A-Normalform

$$\text{Rührkessel : } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2,01 & -3,16 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 2,87 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = (1 \ 0) \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

mit dem relativen Grad  $r = n = 2$  erhält. Der Arbeitspunktwechsel besteht in der Erhöhung der Temperatur vom aktuellen Wert  $y(0) = 0^\circ\text{C}$  auf den neuen Wert  $y(t_e) = \bar{w}_e = 30^\circ\text{C}$ .

Da die Stellgröße bei diesem Beispiel die Leistung einer elektrischen Heizung ist, die man (im Vergleich zu den Zeitkonstanten des Reaktors) sprungförmig verändern kann, müssen die Forderungen (7.62), (7.64) nur für die erste Ableitung erfüllt werden ( $r - 1 = 1$ ), so dass man für die Funktion  $w(t)$  ein Polynom dritter Ordnung ansetzen kann. Allerdings



**Abb. 7.26:** Solltrajektorie  $w(t)$ ,  $\dot{w}(t)$  und  $\ddot{w}(t)$  sowie Stellgröße  $u(t)$  für den Rührkesselreaktor bei  $t_e = 8$  min

muss die Eingangsgröße die Stellgrößenbeschränkung  $|u(t)| \leq 25$  W einhalten. Durch die Bedingungen (7.61) – (7.64) sind für jede gegebene Endzeit  $t_e$  sämtliche Polynomkoeffizienten festgelegt, wobei man für  $t_e = 8$  min die Solltrajektorie

$$w(t) = -0,1172t^3 + 1,4063t^2, \quad 0 \leq t \leq 8$$

erhält, bei der  $w(t)$  in Grad Celsius und  $t$  in Minuten gemessen wird. Dieser Verlauf ist in Abb. 7.26 (oben) dargestellt. Der Anfangs- und der Endwert der Temperatur sind durch die beiden Kreise markiert. Mit dem Verlauf von  $w(t)$  sind auch die zeitlichen Ableitungen der Solltrajektorie bekannt.

Den Verlauf der Stellgröße erhält man aus Gl. (7.60):

$$\begin{aligned} u(t) &= -\mathbf{v}^T \mathbf{x}_{\text{ISoll}}(t) \\ &= -\frac{1}{2,87}(-2,01 \quad -3,16 \quad -1) \begin{pmatrix} w(t) \\ \dot{w}(t) \\ \ddot{w}(t) \end{pmatrix} \\ &= -0,082t^3 + 0,594t^2 + 2,85t + 0,98, \quad 0 \leq t \leq 8. \end{aligned} \quad (7.65)$$

Da die Temperatur zur Zeit  $t_e = 8$  min auf dem vorgegebenen Wert  $\bar{w}_e$  liegt, die Bedingung (7.63) gilt und die Regelstrecke den relativen Grad  $r = n = 2$  hat, bleibt das System für  $t \geq 8$  min für die konstante Stellgröße

$$u(t) = \frac{\bar{w}_e}{k_s} = \frac{30}{1,432} = 20,95, \quad t \geq 8$$

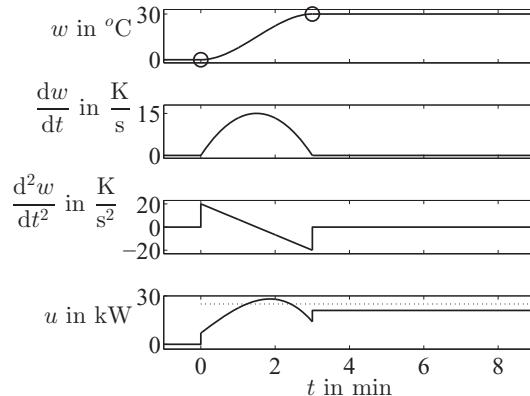
im Arbeitspunkt. Die Stellgröße hat ihren Maximalwert bei 22,2 kW

$$|u(t)| \leq 22,2 \text{ kW}, \quad t \geq 0$$

und hält damit die angegebene Stellgrößenbeschränkung von 25 kW ein.

**Diskussion.** Das Beispiel zeigt, dass das Ergebnis der Trajektorienplanung ein arithmetischer Ausdruck für den Verlauf der Führungsgröße ist. Da man diesen Ausdruck symbolisch

differenzieren kann, kann man auch für die Stellgröße  $u(t)$  einen arithmetischen Ausdruck erhalten, in diesem Beispiel das Polynom (7.65) dritter Ordnung. In der praktischen Realisierung des Arbeitspunktwechsels stellt dieser Ausdruck den Ausgang der beiden Blöcke „Trajektorienplanung“ und „Vorsteuerung“ dar.



**Abb. 7.27:** Solltrajektorie  $w(t)$ ,  $\dot{w}(t)$  und  $\ddot{w}(t)$  sowie Stellgröße  $u(t)$  für den Rührkesselreaktor bei  $t_e = 3$  min

Um Stellgrößenbeschränkungen einzuhalten, muss die Transitionszeit  $t_e$  geeignet gewählt werden. Für den Rührkessel ist die minimale Transitionszeit durch die maximale Heizleistung bestimmt. Will man beispielsweise die Temperaturerhöhung schon nach 3 Minuten erreichen, so erhöht sich die maximale Stellamplitude auf 28 kW, die die punktiert eingetragene Stellgrößenbeschränkung verletzt (Abb. 7.27). Dies zeigt, dass die Transitionszeit ein wichtiger Entwurfsparameter bei der Trajektorienplanung ist.

Bei dem hier verwendete Polynomansatz dritter Ordnung springt die Stellgröße zu Beginn und am Ende des Arbeitspunktwechsels. Wenn dies verhindert werden soll, muss man mit einem Polynom  $2(r+1) = 6$ -ter Ordnung arbeiten (Aufgabe 7.10).  $\square$

#### 7.5.4 Vorsteuerung in den stationären Zustand

Die Solltrajektorie  $w_{[0,t_e]}$  wurde so festgelegt, dass sich zur Zeit  $t = t_e$  die Regelgröße  $y(t)$  im neuen Arbeitspunkt befindet und die  $r-1$  ersten Ableitungen der Regelgröße verschwinden. Es muss jetzt noch untersucht werden, mit welcher Stellgröße  $u(t)$ , ( $t \geq t_e$ ) die Strecke  $\Sigma_S$  im Arbeitspunkt gehalten werden kann, so dass  $y(t) = \bar{w}_e$  auch im Zeitintervall  $t \geq t_e$  gilt.

Für Systeme mit Relativgrad  $r = n$  ergibt Gl. (7.60) für  $w(t) = \bar{w}_e$  und  $w^{(i)}(t) = 0$ , ( $t \geq t_e$ ,  $i = 1, \dots, n$ ) die konstante Stellgröße

$$u(t) = -\frac{e_1}{b_0} \bar{w}_e = \frac{\bar{w}_e}{k_s}, \quad t \geq t_e. \quad (7.66)$$

Die Umformung am zweiten Gleichheitszeichen ergibt sich aus der Berechnungsvorschrift für die statische Verstärkung der E/A-Normalform (vgl. Gl. (A.46)). Die

Strecke  $\Sigma_S$  bleibt für die Stellgröße (7.66) im gewünschten Arbeitspunkt. Im Beispiel 7.4, für das mit  $r = n = 2$  die Voraussetzung für diese Betrachtungen erfüllt ist, ist dies in Abb. 7.27 zu sehen. Für die konstante Stellgröße im Zeitintervall  $t \geq t_e = 3 \text{ min}$  bleibt die Temperatur im Sollwert  $30^\circ\text{C}$ .

Für Systeme mit Relativgrad  $r < n$  hat die Ausgangsgröße zum Zeitpunkt  $t_e$  den neuen Sollwert  $y(t) = \bar{w}_e$  angenommen, aber die interne Dynamik wurde durch den Arbeitspunktwechsel angeregt. Aus Gl. (7.58) erhält man deshalb keine konstante Stellgröße, sondern die Beziehungen

$$\Sigma_V : \begin{cases} \dot{x}_N(t) = A_{NN}x_N(t) + b_N\bar{w}_e, & x_N(t_e) = x_{Ne} \\ u(t) = -c_N^T x_N(t) - \frac{e_1}{b_q}\bar{w}_e & \text{für } t \geq t_e. \end{cases} \quad (7.67)$$

Dabei bezeichnet  $x_{Ne}$  den Zustand der internen Dynamik zur Zeit  $t = t_e$ , der aus der Berechnung der Stellgröße für das Zeitintervall  $0 \leq t \leq t_e$  bekannt ist. Der Zustand  $x_N(t)$  nähert sich asymptotisch einem stabilen Gleichgewichtszustand, so dass auch die Stellgröße asymptotisch ihren stationären Wert erreicht.

Die durch Gl. (7.67) beschriebene Stellgröße hält das System im Intervall  $t \geq t_e$  im neuen Arbeitspunkt ( $y(t) = \bar{w}_e$ ). Dabei gilt für die hier betrachteten minimalphasigen Systeme

$$u(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \bar{u}_e = \frac{\bar{w}_e}{k_s}.$$

### Beispiel 7.5 Arbeitspunktwechsel bei einem Reihenschwingkreis

Als Beispiel für die Umsteuerung schwingungsfähiger elektrischer Systeme wird der Reihenschwingkreis betrachtet, dessen Zustandsraummodell in E/A-Normalform im Beispiel 5.8 auf S. 166 angegeben wurde. Er soll vom Ruhezustand in den Arbeitspunkt  $\bar{w}_e = 1$  überführt werden. Da der Schwingkreis die statische Verstärkung  $k_s = 1$  hat, ist dafür statisch die Stellgröße  $\bar{u}_e = 1$  notwendig. Setzt man die Stellgröße zum Zeitpunkt  $t = 0$  auf diesen Wert, so regt man ein Übergangsverhalten an, das wegen der schwachen Dämpfung des Schwingkreises erst nach sehr langer Zeit abklingt (Abb. 7.28).

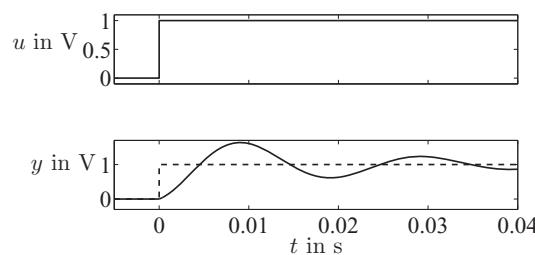
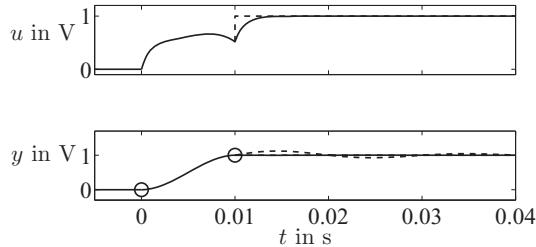


Abb. 7.28: Umsteuerung des Reihenschwingkreises mit konstanter Stellgröße

Wesentlich besser ist es, eine Führungsgröße vorzugeben, die einen stetigen Arbeitspunktwechsel vorsieht. Der in Abb. 7.29 gezeigte Übergang zwischen den durch Kreise markierten Arbeitspunkten ist durch ein Polynom dritter Ordnung beschrieben, dem der Schwingkreis mit der durch die Vorsteuerung (7.58) festgelegten Stellgröße exakt folgt.



**Abb. 7.29:** Stationäres Verhalten bei veränderlicher und bei konstanter Stellgröße

Wird im anschließenden Zeitintervall  $t \geq t_e = 0,01$  s mit einer konstanten Stellgröße gearbeitet, so schwingt das System aufgrund seiner internen Dynamik um den Arbeitspunkt (gestrichelte Linien in Abb. 7.29). Verwendet man jedoch die durch Gl. (7.67) festgelegte Stellgröße, so bleibt der Reihenschwingkreis im Arbeitspunkt. Die Stellgröße wird durch eine e-Funktion bestimmt, weil das System eine interne Dynamik erster Ordnung besitzt (durchgezogenen Linien). Der Vorteil des Einsatzes einer Vorsteuerung mit Trajektorienplanung gegenüber der sprungförmigen Stellgröße ist im Vergleich zu Abb. 7.28 offensichtlich.

□

**Zusammenfassung.** Zur Realisierung einer Folgeregelung geht man in den folgenden Schritten vor (Abb. 7.21):

1. **Trajektorienplanung:** Das Ergebnis der Anwendung von Algorithmus 7.1 ist der Verlauf  $w_{[0,t_e]}$  der Führungsgröße im Zeitintervall  $0 \leq t \leq t_e$ .
2. **Vorsteuerung für  $0 \leq t < t_e$ :** Die Eingangsgröße  $u_{[0,t_e]}$  für dasselbe Zeitintervall erhält man aus den Gln. (7.58), (7.59), die für Systeme mit relativem Grad  $r = n$  die Form (7.60) haben und die ebenfalls als Ergebnis des Algorithmus 7.1 entsteht. Diese Eingangsgröße ist der Anteil  $u_V(t)$ , den die Vorsteuerung an der Stellgröße  $u(t)$  erzeugt.
3. **Vorsteuerung für  $t \geq t_e$ :** Den Anteil  $u_V(t)$  an der Stellgröße erhält man für das folgende Intervall aus Gl. (7.67) bzw. Gl. (7.66).
4. **Kombination mit einer Regelung:** Die berechnete Solltrajektorie  $w(t)$  ist zugleich die Führungsgröße eines Reglers, der Störungen und die Wirkung von Modellunbestimmtheiten ausgleichen soll.

**Aufgabe 7.10** Arbeitspunktwechsel mit stetiger Stellgröße

Erweitern Sie die im Beispiel 7.4 behandelte Trajektorienplanung unter der zusätzlichen Forderung, dass die Stellgröße nur stetig verändert werden kann (weil beispielsweise die Heizleistung über einen vorgeschalteten Wärmeübertrager gesteuert wird).  $\square$

**Aufgabe 7.11\*** Abbremsen eines Fahrzeugs

Durch eine Vorsteuerung soll ein Fahrzeug, das sich mit der gleichbleibenden Geschwindigkeit  $v_0 = 120 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  bewegt, auf die neue Geschwindigkeit  $v_e = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  abgebremst werden. Dafür steht ein linearisiertes Modell

$$\Sigma_F : \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{v}(t) \\ \dot{\omega}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6,96 & 1,88 \\ 36,90 & -9,96 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -5,30 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = (1 \ 0) \begin{pmatrix} v(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

zur Verfügung, bei dem  $\omega(t)$  die Winkelgeschwindigkeit der Räder in  $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ,  $u(t)$  die Bremsbeschleunigung in  $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  und  $v(t)$  die Geschwindigkeit in  $\frac{\text{m}}{\text{s}}$  bezeichnen. Entwerfen Sie die Vorsteuerung und berechnen Sie die Verläufe der Bremsbeschleunigung und der Geschwindigkeit.  $\square$

## 7.6 Reglertypen und Richtlinien für die Wahl der Reglerstruktur

Unter der Reglerstruktur versteht man die Art des verwendeten Reglergesetzes. Sie beschreibt in der Darstellung des Reglers durch eine Übertragungsfunktion  $K(s)$  den Zähler- und Nennergrad sowie weitere Eigenschaften wie z. B. die Typen von Übertragungsgliedern, aus denen der Regler besteht.

**PID-Regler.** Der PID-Regler ist aus den folgenden drei Bausteinen zusammengesetzt (Abb. 7.30):

**P-Anteil** mit der Übertragungsfunktion  $k_P$

**I-Anteil** mit der Übertragungsfunktion  $\frac{k_I}{s}$

**D-Anteil** mit der Übertragungsfunktion  $k_D s$ .

Die Parallelschaltung dieser drei Komponenten ergibt:

PID-Regler:  $K_{\text{PID}}(s) = k_P + \frac{k_I}{s} + k_D s = k_P \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right).$

(7.68)

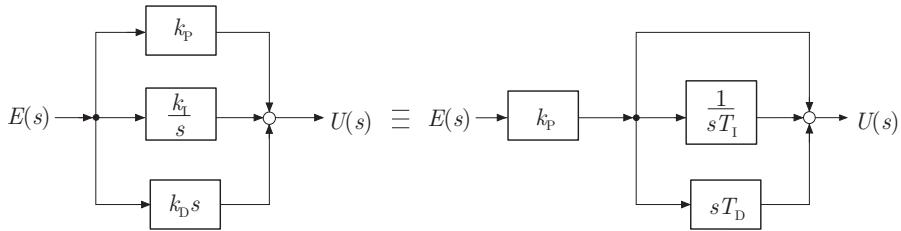


Abb. 7.30: Struktureller Aufbau eines PID-Reglers

Dabei wird  $T_I = \frac{k_P}{k_I}$  als *Nachstellzeit* und  $T_D = \frac{k_D}{k_P}$  als *Vorhaltezeit* bezeichnet.

Wie man aus der Rücktransformation des Reglergesetzes ermitteln kann, ist die Reglerausgangsgröße  $u(t)$  beim PID-Regler folgendermaßen von der Regelabweichung  $e(t)$  abhängig:

$$\text{PID-Regler: } u(t) = k_P e(t) + \frac{k_P}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + k_P T_D \frac{de(t)}{dt}. \quad (7.69)$$

Die vom PID-Regler gebildete Stellgröße besteht also aus drei Anteilen, die sich additiv überlagern:

- Der **P-Anteil** arbeitet nach dem Prinzip  
„Je größer die Regelabweichung ist, umso größer muss die Stellgröße sein.“  
Nach dieser Regel kann man Regelabweichungen zwar schnell abbauen, aber man kann i. Allg. nicht erreichen, dass die Regelabweichung vollständig verschwindet.
- Der **I-Anteil**, der bei sprungförmigen Führungs- und Stellsignalen eine bleibende Regelabweichung verhindert, arbeitet nach dem Prinzip  
„Solange eine Regelabweichung auftritt, muss die Stellgröße verändert werden.“  
Ist  $e = 0$ , so wird die Stellgröße nicht verändert, was so interpretiert werden kann, dass der aktuelle Wert der Stellgröße derjenige ist, mit dem die Störung kompensiert bzw. der vorgegebene Sollwert erreicht wird.
- Der **D-Anteil** reagiert nur auf Veränderungen der Regelabweichung nach dem Prinzip  
„Je stärker sich die Regelabweichung verändert, umso stärker muss die Regelung eingreifen.“  
Über den D-Anteil reagiert der Regler bereits dann mit einer großen Stellgröße, wenn die Regelabweichung stark zunimmt, selbst wenn sie noch keine großen Werte angenommen hat.

Diese Wirkung des Reglers kann man sich auch anhand der Übergangsfunktion klar machen. Für  $e(t) = \sigma(t)$  erhält man

$$h_{\text{PID}}(t) = k_P + \frac{k_P}{T_I} t + k_P T_D \delta(t) \quad (7.70)$$

(Abb. 7.31). Aufgrund des D-Anteiles besitzt  $h_{\text{PID}}$  für  $t = 0$  einen Diracimpuls mit der Wichtung  $k_P T_D$ . Der P-Anteil bringt einen Sprung der Übergangsfunktion zur Zeit  $t = 0$  hervor, und der I-Anteil liefert den linearen Anstieg.

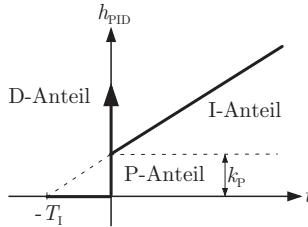


Abb. 7.31: Übergangsfunktion eines PID-Reglers

Aus dem PID-Regler entstehen durch Weglassen einzelner Anteile folgende Spezialfälle:

<b>PI-Regler:</b>	$K_{\text{PI}}(s) = k_P \left( 1 + \frac{1}{T_I s} \right)$
<b>PD-Regler:</b>	$K_{\text{PD}}(s) = k_P (1 + T_D s)$
<b>P-Regler:</b>	$K_P(s) = k_P$
<b>I-Regler:</b>	$K_I(s) = \frac{k_P}{T_I s} = \frac{k_I}{s}$ .

Für die einzelnen Reglertypen werden spezielle Symbole in Blockschaltbildern verwendet, beispielsweise das in Abb. 7.32 gezeigte Symbol für einen PI-Regler, das die Übergangsfunktion dieses Reglers stilisiert enthält.

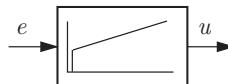


Abb. 7.32: Symbol des PI-Reglers

Beim Einsatz industrieller Standardregler sind P-, I- und D-Komponenten beliebig zusammenschaltbar, so dass aus ihnen der vollständige PID-Regler wie auch die aufgeführten Spezialfälle zusammengesetzt werden können. Da der „reine“ D-Anteil  $k_P T_D s$  technisch nicht realisierbar ist, wird er durch ein  $DT_1$ -Glied

$$k_P \frac{T_D s}{Ts + 1}$$

realisiert, wobei die Zeitkonstante  $T$  sehr klein gewählt wird. Für  $T \ll T_D$  hat das zusätzliche Verzögerungsglied  $\frac{1}{Ts+1}$  praktisch keine Wirkung, so dass man beim Entwurf davon ausgehen kann, dass der Regler einen reinen D-Anteil besitzt. Bei der Darstellung des I-Reglers in der ersten angegebenen Form wird  $k_P$  häufig mit der Integrationszeitkonstanten  $T_I$  zusammengefasst und mit

$$K_I(s) = \frac{1}{T_I s}$$

gearbeitet. Da der PI-Regler eine Nullstelle bei  $s_0 = -\frac{1}{T_I}$  hat, beziehen sich Reglerentwurfsverfahren auch auf die Darstellungen

$$K_{PI}(s) = k_P \frac{T_I s + 1}{T_I s}.$$

**Korrekturglieder.** Im Folgenden werden zwei wichtige Korrekturglieder behandelt, die genauso wie die angegebenen Regler zur Lösung von Regelungsaufgaben eingesetzt werden können. Der Unterschied zwischen einem Regler und einem Korrekturglied liegt vor allem in der Funktion dieser Elemente beim Entwurf. Ein Korrekturglied wird mit dem Ziel ausgewählt, das dynamische Verhalten der offenen Kette gegenüber dem bisherigen zu „korrigieren“ und auf diese Weise das Verhalten des geschlossenen Kreises zu beeinflussen. Korrekturglieder haben häufig eine statische Verstärkung von eins und sollen Phasenverschiebungen realisieren. Unter einem Regler versteht man eine Rückführung, die im Hinblick auf das statische und dynamische Verhalten des geschlossenen Kreises festgelegt wird.

In den folgenden Kapiteln werden vor allem zwei Typen von Korrekturgliedern verwendet. Das *phasenabsenkende Korrekturglied* hat die Übertragungsfunktion

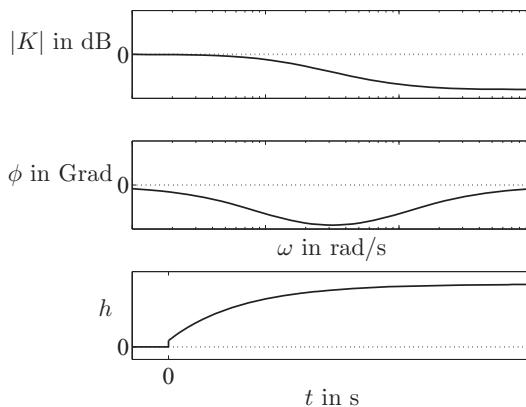
$$K(s) = \frac{T_D s + 1}{T s + 1}, \quad T > T_D, \quad (7.71)$$

aus der das in Abb. 7.33 (oben) gezeigte Bodediagramm entsteht. Es wirkt zwischen den Frequenzen  $\omega_1 = \frac{1}{T}$  und  $\omega_2 = \frac{1}{T_D}$  integrierend und erzeugt dort eine Phasenabsenkung. Deshalb wird es auch als *Korrekturglied mit integrierendem Charakter* bezeichnet, was auch dem qualitativen Verlauf der Übergangsfunktion entspricht.

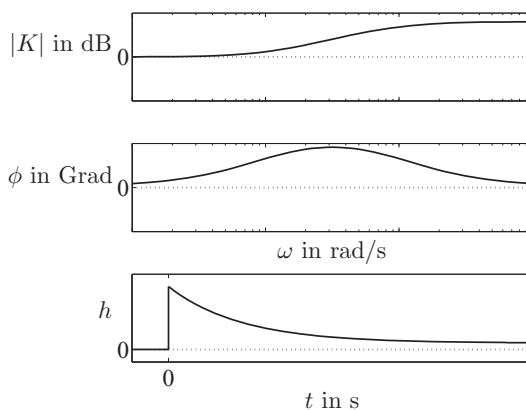
Das *phasenanhebende Korrekturglied* hat die Übertragungsfunktion

$$K(s) = \frac{T_D s + 1}{T s + 1}, \quad T < T_D \quad (7.72)$$

und das in Abb. 7.34 gezeigte Bodediagramm. Das Korrekturglied hebt die Phase zwischen den Frequenzen  $\omega_2 = \frac{1}{T_D}$  und  $\omega_1 = \frac{1}{T}$  an und führt gleichzeitig zu einer Verkleinerung des Amplitudenganges im niederfrequenten Bereich. Es wird auch als *Korrekturglied mit differenzierendem Charakter* bezeichnet, denn seine Übertragungsfunktion ähnelt der eines verzögerten D-Gliedes.



**Abb. 7.33:** Bodediagramm und Übergangsfunktion eines phasenabsenkenden Korrekturgliedes ( $T = 10 \text{ s}$ ,  $T_D = 1 \text{ s}$ )



**Abb. 7.34:** Bodediagramm und Übergangsfunktion eines phasenanhebenden Korrekturgliedes ( $T_1 = 1 \text{ s}$ ,  $T_D = 10 \text{ s}$ )

**Richtlinien für die Wahl der Reglerstruktur.** Die Lösung der Regelungsaufgabe beinhaltet als wichtigen Schritt die Auswahl der Reglerstruktur. Es muss festgelegt werden, ob ein PID-Regler notwendig ist oder ob einfachere Reglertypen ausreichen. Diese Wahl hängt von den Güteforderungen und den Eigenschaften der Regelstrecke ab. Im Folgenden können deshalb nur grobe Richtlinien angegeben werden.

- Um zu verhindern, dass bei sprungförmigen Führungs- und Störsignalen eine bleibende Regelabweichung entsteht, muss die offene Kette integrales Verhalten aufweisen, vgl. Abschn. 7.3. Ist bereits in der Regelstrecke ein I-Anteil vorhanden, so reicht für die Verhinderung einer bleibenden Regelabweichung ein

P-Regler aus. Zeigt die Strecke jedoch proportionales Verhalten, so muss der Regler einen I-Anteil aufweisen.

In diesem Zusammenhang spricht man auch von Regelstrecken mit bzw. ohne Ausgleich. Hat die Regelstrecke proportionales Verhalten, so reagiert sie auf eine Stellgrößenänderung mit einer endlichen Regelgrößenänderung. Es liegt eine Regelstrecke mit Ausgleich vor. Besitzt die Regelstrecke jedoch integrales Verhalten, so antwortet sie auf eine Stellgrößenänderung mit unbegrenzt steigender oder fallender Regelgröße. Es ist eine Regelstrecke ohne Ausgleich.

Die beschriebene Richtlinie besagt, dass für Regelstrecken mit Ausgleich ein I-Anteil im Regler notwendig ist, um eine bleibende Regelabweichung zu verhindern.

- Bei reinen I-Reglern steigt die Stellgröße langsam an und verändert sich nicht sprungförmig. Der I-Regler kann also nicht schnell auf große Regelabweichungen reagieren. Der Regelkreis hat deshalb ein langsames Übergangsverhalten.
- P- und D-Anteile beschleunigen das Übergangsverhalten des Regelkreises, da der Regler sehr schnell auf Veränderungen der Regelabweichung reagiert. Der Regelkreis neigt aber aufgrund des D-Anteiles, insbesondere bei großen Werten von  $k_D$ , zu großen Schwingungen oder ist instabil. Mit dem D-Anteil sollte auch deshalb vorsichtig umgegangen werden, weil stochastische Störungen wie z. B. das Messrauschen durch das Differenzierglied verstärkt werden. Der D-Anteil darf nur bei gut gefilterten Messgrößen verwendet werden.

Für den Einsatz der Korrekturglieder gilt das Gesagte für den Frequenzbereich, in dem diese Glieder differenzierend bzw. integrierend wirken. Bei geeigneter Wahl der Parameter kann mit ihnen folgendes erreicht werden:

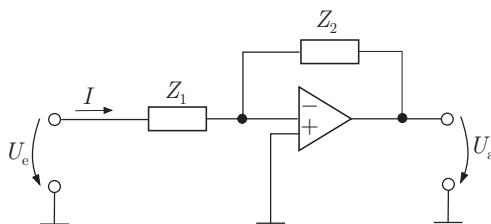
- Differenzierende Korrekturglieder wirken phasenanhebend. Sie verbessern den Phasenrand, vergrößern folglich die Dämpfung und mindern die Überschwingweite  $\Delta h$ . Sie haben jedoch bei hohen Frequenzen keine unendlich große Verstärkung wie (ideale) D-Anteile im Regler.
- Integrierende Korrekturglieder erhöhen die statische Verstärkung und mindern folglich die bleibende Regelabweichung  $e(\infty)$ , bewirken für hohe Frequenzen jedoch nur eine kleine Veränderung des Phasengangs. Die Verkleinerung der Regelabweichung wird deshalb nicht wie bei reinen I-Reglern durch eine große Phasenverschiebung und den daraus entstehenden Stabilitätsproblemen erkauft. Allerdings kann mit diesen Korrekturgliedern allein eine bleibende Regelabweichung nicht verhindert werden.

**Aufgabe 7.12** Übertragungseigenschaften von Reglern und Korrekturgliedern

Zeichnen Sie den prinzipiellen Verlauf von Übergangsfunktion, Gewichtsfunktion, Ortskurve und Bodediagramm sowie das PN-Bild aller angegebenen Regler und Korrekturglieder. Schreiben Sie das Zustandsraummodell des Korrekturgliedes (7.72) auf. Wodurch unterscheiden sich die Zustandsraummodelle phasenanhebender und phasenabsenkender Korrekturglieder? □

**Aufgabe 7.13** Technische Realisierung von Reglern

Lineare Regler können durch eine Operationsverstärkerschaltung realisiert werden, bei der im Vorwärtzweig ein Operationsverstärker mit sehr großem Verstärkungsfaktor und im Rückwärtzweig ein dynamisches Element mit der Übertragungsfunktion  $G_r(s)$  geschaltet ist (vgl. Aufgabe 6.19).



**Abb. 7.35:** Technische Realisierung von Reglern durch eine Operationsverstärkerschaltung

1. Stellen Sie die Übertragungsfunktion der in Abb. 7.35 gezeigten Schaltung in Abhängigkeit von den Impedanzen  $Z_1$  und  $Z_2$  dar.
2. Welche Bauelemente müssen Sie für  $Z_1$  und  $Z_2$  verwenden, damit die angegebene Schaltung einen P-, PD-, PI- und PID-Regler realisiert?
3. Zeichnen Sie die Operationsverstärkerschaltung des PI-Reglers.
4. Welche Einschränkungen bezüglich der Realisierbarkeit der Reglerelemente ergeben sich, wenn Sie an Stelle der hier gezeigten Schaltung die Schaltung aus Abb. 6.26 auf S. 286 verwenden? □

**Aufgabe 7.14\*\*** Technische Realisierung von Nullstellen im Regler

Die Anwendung von Reglern beinhaltet die Aufgabe, Übertragungsgliedern mit vorge schriebenen Polen und Nullstellen gerätetechnisch zu realisieren. Für Pole, die in allen hier betrachteten Fällen negative Realteile besitzen, bereitet dies keine Schwierigkeiten. Problematisch erscheint auf den ersten Blick die Realisierung von Nullstellen, mit der sich diese Aufgabe befasst.

1. Stellen Sie die Übertragungsfunktion parallel geschalteter P- und I-Glieder auf und untersuchen Sie, wie Sie durch geeignete Parameterwahl beliebig vorgegebene Nullstellen erzeugen können. Ist es möglich, auf diese Weise auch Nullstellen mit positivem Realteil zu realisieren?
2. Welche Anordnung und welche Parameter müssen Sie wählen, um die Korrekturglieder zu realisieren?
3. Wie kann man Glieder mit D-Anteil, z. B. das  $DT_1$ -Glied (6.121) durch Reihen/Parallelschaltung von P-Gliedern bilden?
4. Ein PID-Regler soll als Parallelschaltung eines PI-Reglers und eines  $PT_1$ -Gliedes realisiert werden. Geht das?  $\square$

## Literaturhinweise

Eine ausführliche Diskussion der Bedingungen, unter denen der Regelkreis bei unterschiedlichen Stör- und Führungssignalen stationäre Genauigkeit aufweist, ist in [68] zu finden. Eine Übersicht über die Grenzen der Regelgüte in linearen Regelkreisen gibt [5].

Der Wahl der Solltrajektorie für eine Folgeregelung wurde in letzter Zeit in der Literatur zu differenziell flachen Systemen besondere Aufmerksamkeit geschenkt. Bei flachen Systemen kann man die Stellgröße als algebraischen Ausdruck der Führungsgröße und deren Ableitungen darstellen. Abschnitt 7.5 stellt diese Ergebnisse für lineare Systeme dar. Ausführlichere Erläuterungen für Regelkreise mit zwei Freiheitsgraden findet man in [39, 59, 112].

# 8

## Stabilität rückgekoppelter Systeme

Nach der Einführung der Stabilitätsbegriffe für dynamische Systeme beschäftigt sich dieses Kapitels mit der Stabilität rückgeföhrter Systeme mit einem Schwerpunkt auf dem Nyquistkriterium. Eine Erweiterung dieses Kriteriums führt zu Methoden zur Überprüfung der robusten Stabilität bei Modellunbestimmtheiten.

### 8.1 Zustandsstabilität

#### 8.1.1 Stabilitätsbegriff

Unter Stabilität versteht man die Eigenschaft eines Systems, auf eine beschränkte Erregung mit einer beschränkten Bewegung zu reagieren. Diese sehr allgemeine Erklärung des Stabilitätsbegriffes kann ausgehend von zwei verschiedenen Betrachtungsweisen in exakte Definitionen überführt werden. Erstens kann unter „Erregung“ eine Auslenkung  $x_0$  des Zustands aus der Gleichgewichtslage verstanden werden.

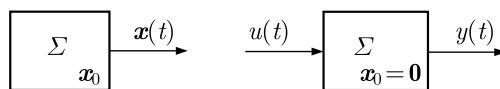


Abb. 8.1: Stabilitätsdefinitionen

Unter Stabilität versteht man dann die Eigenschaft, dass das System von diesem Anfangszustand in die Gleichgewichtslage zurückkehrt (Zustandsstabilität, Abb. 8.1 (links)). Zweitens kann das System aus der Ruhelage  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$  von außen durch eine Eingangsgröße  $u(t)$  erregt werden. Stabilität heißt dann, dass das System eine betragsbeschränkte Ausgangsgröße  $y(t)$  besitzt (Eingangs-Ausgangs-Stabilität, Abb. 8.1 (rechts)). Beide Definitionen werden in diesem und dem nächsten Abschnitt eingeführt. Anschließend werden Verfahren zur Überprüfung dieser Eigenschaften angegeben.

### 8.1.2 Definition der Zustandsstabilität

Die Definition der Zustandsstabilität bezieht sich auf lineare ungestörte Systeme ( $u(t) = 0$ ) mit der Anfangsauslenkung  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ . Aus Gl. (4.45) erhält man für ungestörte Systeme  $\Sigma$  die Beschreibung

$$\Sigma : \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \quad (8.1)$$

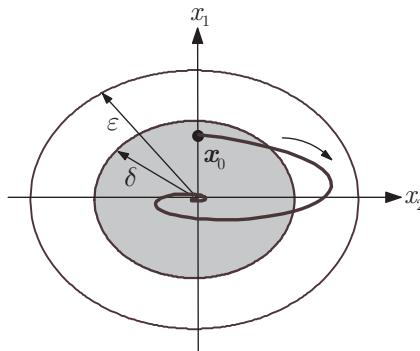
Dieses System befindet sich im *Gleichgewichtszustand* (Ruhelage)  $\bar{\mathbf{x}}$ , wenn  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$  gilt. Aus Gl. (8.1) erhält man

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$$

und für nichtsinguläre Matrizen  $\mathbf{A}$

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}, \quad (8.2)$$

d. h., dass das lineare ungestörte System für  $\det \mathbf{A} \neq 0$  genau *einen* Gleichgewichtszustand besitzt. Ist die Matrix  $\mathbf{A}$  singulär, so besitzt das System unendlich viele Ruhelagen, wie man sich am Beispiel eines I-Gliedes überlegen kann.



**Abb. 8.2:** Trajektorie eines asymptotisch stabilen Systems

Um den Abstand des aktuellen Zustands  $\mathbf{x}(t) = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  vom Gleichgewichtszustand  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$  beschreiben zu können, wird die Vektornorm  $\|\mathbf{x}(t)\|$  des

Zustands gebildet. Dabei kann eine beliebige Normdefinition verwendet werden, z. B. die euklidsche Vektornorm

$$\|\boldsymbol{x}(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2(t)}.$$

Da der Zustand zeitabhängig ist, ist auch seine Norm eine zeitabhängige Größe.

Jede Vektornorm besitzt die folgenden drei Eigenschaften (Normaxiome):

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}\| &\geq 0 \quad \text{und} \quad \|\boldsymbol{x}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{0} \\ \|\alpha \boldsymbol{x}\| &= |\alpha| \|\boldsymbol{x}\| \\ \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| &\leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|. \end{aligned} \tag{8.3}$$

Dabei bezeichnen  $\boldsymbol{x}$  und  $\boldsymbol{y}$   $n$ -dimensionale Vektoren und  $\alpha$  einen reellen Skalar. Die angegebenen Beziehungen gelten für beliebige Vektoren  $\boldsymbol{x}$ ,  $\boldsymbol{y}$  und Skalare  $\alpha$ . Deshalb gilt

$$\|\boldsymbol{x}(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{genau dann wenn } |x_i(t)| \rightarrow 0 \quad \text{für alle } i = 1, 2, \dots, n$$

und

$$\|\boldsymbol{x}(t)\| \rightarrow \infty \quad \text{genau dann wenn } |x_i(t)| \rightarrow \infty \quad \text{für mindestens ein } i.$$

### Definition 8.1 (Zustandsstabilität)

Der Gleichgewichtszustand  $\bar{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0}$  des Systems (8.1) heißt stabil (im Sinne von LJAPUNOW) oder zustandsstabil, wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  eine Zahl  $\delta > 0$  existiert, so dass bei einem beliebigen Anfangszustand, der die Bedingung

$$\|\boldsymbol{x}_0\| < \delta \tag{8.4}$$

erfüllt, die Eigenbewegung des Systems (8.1) die Bedingung

$$\|\boldsymbol{x}(t)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } t > 0 \tag{8.5}$$

erfüllt. Der Gleichgewichtszustand heißt asymptotisch stabil, wenn er stabil ist und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\boldsymbol{x}(t)\| = 0 \tag{8.6}$$

gilt.

Abbildung 8.2 veranschaulicht die in der Stabilitätsdefinition nach LJAPUNOW<sup>1</sup> genannten Bedingungen. Beginnend bei einem Anfangszustand  $\boldsymbol{x}_0$ , dessen Abstand

<sup>1</sup> ALEXANDER MICHAILOWITSCH LJAPUNOW (1857 – 1918), russischer Mathematiker

zum Gleichgewichtspunkt kleiner als  $\delta$  ist, durchläuft das System eine Trajektorie, auf der es sich nicht weiter als um den Abstand  $\varepsilon$  vom Gleichgewichtspunkt entfernt. Das System ist stabil, wenn es für jede beliebige Vorgabe von  $\varepsilon$  eine durch  $\delta$  beschriebene Beschränkung der Anfangsbedingung  $x_0$  gibt, so dass die Eigenbewegung des Systems diese Eigenschaft besitzt.

Die angegebene Stabilitätsdefinition ist für die Ruhelage  $\bar{x} = \mathbf{0}$  formuliert. Sie kann aber auch auf alle anderen Ruhelagen angewendet werden, die Systeme mit singulären Systemmatrizen besitzen.

Da lineare Systeme mit  $\det A \neq 0$  nur den einen Gleichgewichtszustand  $\bar{x} = \mathbf{0}$  haben, spricht man bei ihnen an Stelle von der Stabilität des Gleichgewichtszustandes häufig auch von der Stabilität des Systems  $\Sigma$ . Dieselbe Sprachregelung kann man auch für Systeme mit singulärer Systemmatrix  $A$  anwenden, denn die unendlich vielen Gleichgewichtszustände dieser Systeme haben untereinander stets dieselbe Stabilitätseigenschaft.

### 8.1.3 Kriterien für die Zustandsstabilität

Aus der Bewegungsgleichung (5.11) erhält man für das ungestörte System (8.1) die Beziehungen  $x(t) = e^{At}x_0$  und

$$\|x(t)\| \leq \|e^{At}\| \|x_0\|,$$

wobei das Zeichen  $\|\cdot\|$  hier sowohl für eine Vektornorm als auch für eine zugeordnete Matrixnorm verwendet wird. Die Stabilitätsbedingung (8.5) lässt sich genau dann für ein beliebiges gegebenes  $\varepsilon$  durch geeignete Wahl von  $\delta$  für alle Anfangszustände nach Gl. (8.4) erfüllen, wenn die Norm der Übergangsmatrix  $\|e^{At}\|$  durch eine endliche Schranke  $\Phi_{\max}$  beschränkt ist

$$\|e^{At}\| < \Phi_{\max} < \infty, \quad t \geq 0. \quad (8.7)$$

Mit

$$\delta \leq \frac{\varepsilon}{\Phi_{\max}}$$

ist die Bedingung (8.5) erfüllt. Für die asymptotische Stabilität muss zusätzlich

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{At}\| = 0 \quad (8.8)$$

gelten.

Die Beziehungen (8.7) und (8.8) können mit Hilfe der Gl. (5.23)

$$e^{At} = \text{diag } e^{\lambda_i t}$$

mit den Eigenwerten  $\lambda_i$  der Matrix  $A$  in Verbindung gebracht werden. Offenbar ist (8.8) genau dann erfüllt, wenn alle Modi  $e^{\lambda_i t}$  abklingen, d. h., wenn

$$\operatorname{Re}\{\lambda_i\} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8.9)$$

gilt. Alle Eigenwerte müssen also in der linken komplexen Halbebene liegen.

Um die Bedingungen (8.7) zu erfüllen, dürfen Eigenwerte auf der Imaginärachse liegen

$$\operatorname{Re}\{\lambda_i\} \leq 0, \quad (8.10)$$

denn die für  $\lambda_i = j\omega$  in Gl. (5.23) vorkommenden Modi  $e^{j\omega t}$  erfüllen die Bedingung

$$|e^{j\omega t}| = 1.$$

Dabei ist allerdings zu beachten, dass die Darstellung (5.23) für  $e^{\mathbf{A}t}$  nur für diagonalähnliche Matrizen  $\mathbf{A}$  möglich ist (vgl. Abschn. 5.2.4).

Für nichtdiagonalähnliche Matrizen dürfen die Eigenwerte mit verschwindendem Realteil nur einfach auftreten, wie die folgenden Beispiele zeigen. Für die diagonalähnliche Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten  $\lambda_{1,2} = 0$  gilt

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(0) \\ x_2(t) &= x_2(0). \end{aligned}$$

Das System ist also stabil, wenn auch nicht asymptotisch stabil. Für die nicht diagonalähnliche Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

die dieselben Eigenwerte besitzt, erhält man entsprechend

$$\begin{aligned} x_1(t) &= tx_2(0) + x_1(0) \\ x_2(t) &= x_2(0) \end{aligned}$$

eine unbeschränkt anwachsende Zustandsgröße  $x_1(t)$ . Das System ist also instabil.

Die Ergebnisse lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

**Satz 8.1 (Kriterium für die Zustandsstabilität)**

- Der Gleichgewichtszustand  $\bar{x} = \mathbf{0}$  des Systems (8.1) ist stabil, wenn die Matrix  $\mathbf{A}$  diagonalähnlich ist und alle Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{A}$  die Bedingung (8.10) erfüllen:

$$\operatorname{Re}\{\lambda_i\} \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

- Der Gleichgewichtszustand  $\bar{x} = \mathbf{0}$  des Systems (8.1) ist genau dann asymptotisch stabil, wenn die Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{A}$  die Bedingung (8.9) erfüllen:

$$\operatorname{Re}\{\lambda_i\} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Die Bedingung (8.9) für die Eigenwerte asymptotisch stabiler Systeme hat zur Folge, dass die Modi des Systems sowie alle Zustandsvariablen und deshalb auch die Ausgangsgröße abklingt. Die Funktionen erfüllen folglich die dirichletsche Bedingung (6.23). Aus diesem Grunde wurde für asymptotisch verschwindende Signale bisher schon mehrfach der Begriff *stabile Signale* verwendet.

Das Stabilitätskriterium zeigt, dass im PN-Bild die Imaginärachse die Stabilitätsgrenze markiert. Liegen alle Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{A}$  links der Imaginärachse, so ist das System asymptotisch stabil. Liegen Eigenwerte auf der Imaginärachse und erfüllen sie die o. g. Bedingungen, so ist das System stabil, aber nicht asymptotisch stabil. Man sagt dann auch, dass das System *grenzstabil* ist. Liegt einer oder mehrere Eigenwerte rechts der Imaginärachse, so ist das System instabil.

Für die meisten Regelungstechnischen Fragestellungen fordert man, dass das System nicht nur (grenz)stabil, sondern sogar asymptotisch stabil ist. Deshalb wird im Folgenden unter einem stabilen System stets ein asymptotisch stabiles System verstanden.

**Exponentielle Stabilität.** Wenn das System (8.1) asymptotisch stabil ist, so kann man zusätzlich zur Gl. (8.6) etwas über die „Geschwindigkeit“ aussagen, mit der das System den Gleichgewichtszustand erreicht. Aus Gl. (5.23) erhält man für diagonalähnliche Matrizen  $\mathbf{A}$

$$\left\| e^{\mathbf{A}t} \right\| \leq \|\mathbf{V}\| \|\mathbf{V}^{-1}\| \left| e^{\delta_{\max} t} \right|$$

wobei  $\delta_{\max}$  den größten Realteil der Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{A}$  darstellt. Das System erfüllt folglich die Bedingung

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq k e^{\delta t}$$

für einen geeignet gewählten Parameter  $k > 0$  sowie  $\delta_{\max} \leq \delta < 0$  und hat damit die Eigenschaft, *exponentiell stabil* zu sein. Jedes asymptotisch stabile lineare System besitzt also sogar die schärfere Eigenschaft der exponentiellen Stabilität.

**Bestimmung der Stabilität aus dem Phasenporträt.** Die Stabilitätseigenschaften schlagen sich im Phasenporträt nieder, wie Abb. 8.3 zeigt. Die oberen beiden Abbildungen zeigen asymptotisch stabile Systeme mit einem konjugiert komplexen bzw. zwei reellen Polen. Für beide Systeme verlaufen die Trajektorien in den Gleichgewichtspunkt  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ . Die mittleren beiden Phasenporträts treten bei stabilen, jedoch nicht asymptotisch stabilen Systemen auf, wobei das erste System zwei imaginäre Pole und das zweite System einen Pol bei null besitzt. Das zweite System hat also eine singuläre Systemmatrix und folglich unendlich viele Gleichgewichtspunkte auf der  $x_1$ -Achse. Alle diese Gleichgewichtspunkte sind stabil. Die beiden unteren Systeme sind instabil, wobei das erste von ihnen zwei Pole bei null hat und somit die Stabilitätsbedingung verletzt. Die Trajektorien entfernen sich beliebig weit von jedem der auf der  $x_1$ -Achse liegenden Gleichgewichtspunkten. Das unterste System ist instabil mit einem konjugiert komplexen Polpaar mit positivem Realteil. Auch dieses System entfernt sich vom Gleichgewichtspunkt  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ .

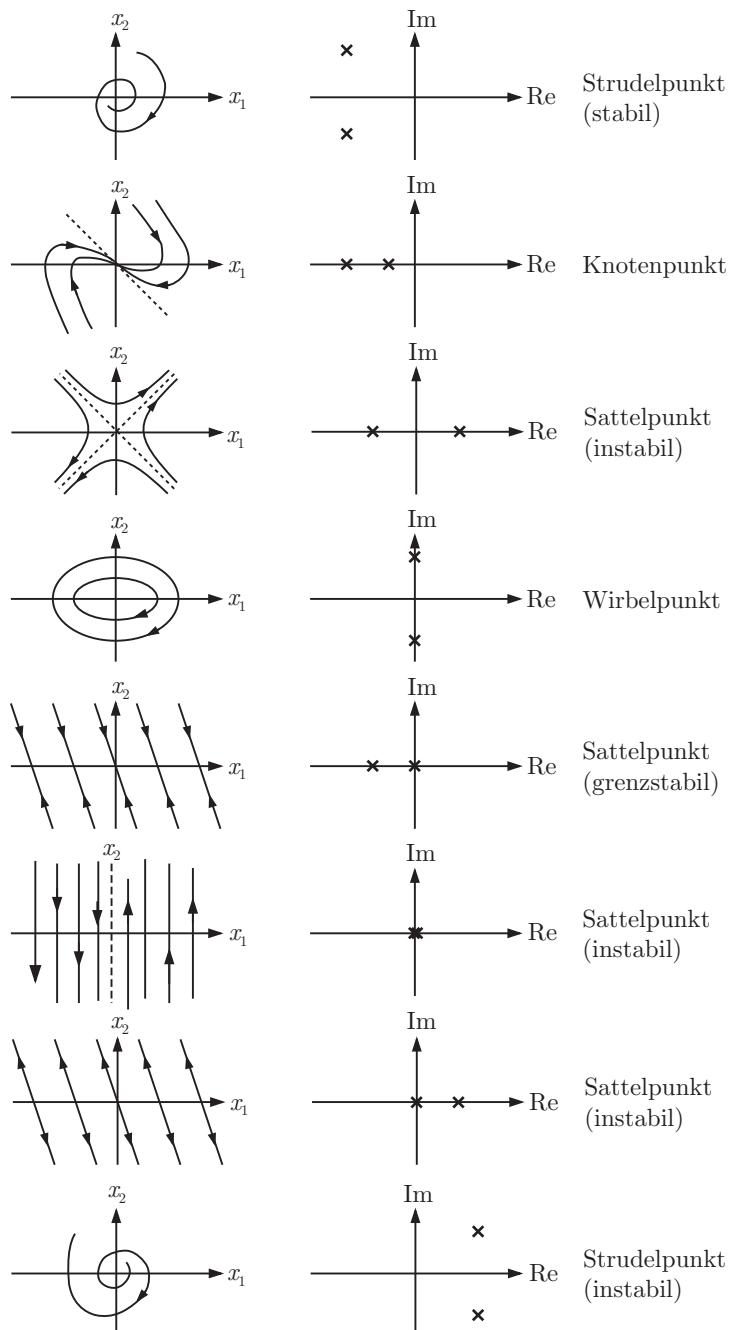


Abb. 8.3: Phasenporträts linearer Systeme zweiter Ordnung

**Aufgabe 8.1** Verhalten stabiler und instabiler Systeme

Betrachten Sie ein System zweiter Ordnung mit den Eigenwerten  $\lambda_{1/2} = \delta \pm j\omega$ . Welchen qualitativen Verlauf haben die Zustandsvariablen  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  unter folgenden Bedingungen:

- $\delta > 0, \quad \omega = 0$
- $\delta > 0, \quad \omega > 0$
- $\delta = 0, \quad \omega = 0$
- $\delta = 0, \quad \omega > 0$
- $\delta < 0, \quad \omega = 0$
- $\delta < 0, \quad \omega > 0 ? \square$

**Aufgabe 8.2** Verhalten instabiler Systeme

Betrachten Sie ein System zweiter Ordnung mit den Eigenwerten  $\lambda_1 = -3$  und  $\lambda_2 = 2$ . Bestimmen Sie die Menge aller Anfangszustände  $\mathbf{x}_0$ , von denen aus das System asymptotisch die Ruhelage  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$  annimmt. Ordnen Sie diesem Systemverhalten einen Teil von Abb. 8.3 zu.  $\square$

## 8.2 Eingangs-Ausgangs-Stabilität

### 8.2.1 Definition der E/A-Stabilität

Die Definition der Eingangs-Ausgangs-Stabilität (E/A-Stabilität) geht von der Be- trachtung eines Systems

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), & \mathbf{x}(0) = \mathbf{0} \\ y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + du(t) \end{cases} \quad (8.11)$$

als Übertragungsglied aus. Das System mit verschwindender Anfangsauslenkung ( $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ ) soll auf ein beliebiges beschränktes Eingangssignal  $u(t)$  mit einem be- schränkten Ausgangssignal  $y(t)$  antworten.

**Definition 8.2 (Eingangs-Ausgangs-Stabilität)**

Ein lineares System (8.11) heißt eingangs-ausgangs-stabil (E/A-stabil), wenn für verschwindende Anfangsauslenkung

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$$

und ein beliebiges beschränktes Eingangssignal

$$|u(t)| < u_{\max} \quad \text{für alle } t > 0$$

das Ausgangssignal beschränkt bleibt:

$$|y(t)| < y_{\max} \quad \text{für alle } t > 0. \quad (8.12)$$

Diese Definition wird häufig in verallgemeinerter Form angegeben, wobei auf Normen  $\|u\|$  und  $\|y\|$  der Funktionen  $u(t), y(t)$  ( $0 \leq t < \infty$ ) in einem Funktionenraum Bezug genommen wird, beispielsweise

$$\begin{aligned}\|u\|_\infty &= \sup_t |u(t)| \\ \|y\|_\infty &= \sup_t |y(t)|.\end{aligned}$$

Das System heißt dann E/A-stabil, wenn für eine beliebige Eingangsgröße  $u(t)$  mit  $\|u\|_\infty < \infty$  auch die Ausgangsgröße  $y(t)$  eine endliche Norm  $\|y\|_\infty < \infty$ , was mit der Aussage der Definition 8.2 übereinstimmt.

### 8.2.2 Kriterien für die E/A-Stabilität

**Stabilitätsprüfung anhand der Gewichtsfunktion.** Im Abschn. 5.4 wurde die Gl. (5.129) als Beschreibung des E/A-Verhaltens des Systems (8.11) abgeleitet

$$\Sigma : \quad y(t) = g * u,$$

wobei nach Gl. (5.119)

$$g(t) = \mathbf{c}^T e^{At} \mathbf{b} + d \delta(t) \quad (8.13)$$

gilt. Für ein beschränktes Eingangssignal erhält man daraus die Beziehung

$$\begin{aligned}|y(t)| &\leq \int_0^t |g(t-\tau)| |u(\tau)| d\tau \\ &\leq |u_{\max}| \int_0^t |g(t-\tau)| d\tau \\ &= |u_{\max}| \int_0^t |g(\tau)| d\tau.\end{aligned}$$

Folglich ist das System E/A-stabil, wenn das Integral  $\int_0^t |g(\tau)| d\tau$  für alle  $t$  existiert, also

$$\int_0^\infty |g(t)| dt < \infty \quad (8.14)$$

gilt. Wird umgekehrt die Eingangsgröße  $u(t) = u_{\max} \operatorname{sgn}(g(t_1 - t))$  gewählt, so erhält man für den Ausgang zur Zeit  $t_1$ :

$$\begin{aligned}y(t_1) &= u_{\max} \int_0^{t_1} g(t_1 - \tau) \operatorname{sgn}(g(t_1 - \tau)) d\tau \\ &= u_{\max} \int_0^{t_1} |g(t_1 - \tau)| d\tau \\ &= u_{\max} \int_0^{t_1} |g(\tau)| d\tau.\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet  $\text{sgn}(.)$  die Signumfunktion

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Aus diesen Beziehungen wird für  $t_1 \rightarrow \infty$  offensichtlich, dass Gl. (8.14) auch notwendig für die E/A-Stabilität ist.

**Satz 8.2 (Kriterium für die E/A-Stabilität)**

Das System (8.11) ist genau dann E/A-stabil, wenn seine Gewichtsfunktion  $g(t)$  die Bedingung (8.14) erfüllt:

$$\int_0^\infty |g(t)| dt < \infty.$$

Das Kriterium kann auch dann angewendet werden, wenn die Gewichtsfunktion nur grafisch gegeben ist, z. B. als Ergebnis eines Experiments mit dem zu untersuchenden System. Die Gewichtsfunktion muss für große Zeiten asymptotisch verschwinden.

Außerdem zeigt das Kriterium, dass die Stabilität anhand der Übergangsfunktion überprüft werden kann. Aufgrund der Beziehung (5.125) ist die Forderung (8.14) äquivalent zu der Bedingung

$$\int_0^\infty \left| \frac{dh(t)}{dt} \right| dt < \infty.$$

Da die Übergangsfunktion des Systems (8.11) für  $t > 0$  stetig ist und zum Zeitpunkt  $t = 0$  eine endliche Sprunghöhe  $h(+0) = d$  besitzt, bedeutet diese Bedingung lediglich, dass das System in einen statischen Endwert einschwingt. Auch diese Bedingung kann experimentell überprüft werden, so dass die Stabilitätsanalyse auch dann ausgeführt werden kann, wenn kein Modell (8.11) zur Verfügung steht.

**Stabilitätsprüfung anhand der Übertragungsfunktion.** Ist an Stelle der Gewichtsfunktion  $g(t)$  die Übertragungsfunktion  $G(s) \bullet\circ g(t)$  bekannt, so kann die E/A-Stabilität anhand der Pole der Übertragungsfunktion überprüft werden. Entsprechend Gl. (6.88) ist  $G(s)$  gebrochen rational und kann in der Form

$$G(s) = k \frac{\prod_{i=1}^{q'} (s - s_{0i})}{\prod_{i=1}^{n'} (s - s_i)}$$

dargestellt werden. Wie im Abschn. 6.5 über die Partialbruchzerlegung gezeigt wurde, setzt sich die zu  $G(s)$  gehörende Zeitfunktion  $g(t)$  – wenn die Nullstellen des Nennerpolynoms einfach sind – aus  $n'$  Summanden der Form  $k_i e^{\delta_i t}$  für reelle Pole  $s_i = \delta_i$  bzw.

$$-2|k_i| e^{\delta_i t} \sin\left(\omega_i t - \arg \frac{1}{k_i}\right)$$

für konjugiert komplexe Pole  $s_i, s_{i+1} = \delta_i \pm j\omega_i$  zusammen. Die Bedingung (8.14) ist also genau dann erfüllt, wenn alle Pole der Übertragungsfunktion negativen Realteil haben.

**Satz 8.3 (Kriterium für die E/A-Stabilität)**

Das System (8.11) ist genau dann E/A-stabil, wenn sämtliche Pole seiner Übertragungsfunktion  $G(s)$  die Bedingung

$$\operatorname{Re}\{s_i\} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n' \quad (8.15)$$

erfüllen.

Im Gegensatz zur Zustandsstabilität dürfen keine Pole mit verschwindendem Realteil auftreten. Deshalb ist das in Beispiel 5.6 auf S. 151 behandelte Flugzeug in Bezug auf die Steuerung mit dem Querruder nicht E/A-stabil.

### 8.2.3 Beziehungen zwischen Zustandsstabilität und E/A-Stabilität

Die beiden Stabilitätseigenschaften beziehen sich auf unterschiedliche Situationen, wie Abb. 8.1 zeigt. Dennoch kann aus Gl. (8.13) ein direkter Zusammenhang zwischen ihnen abgeleitet werden. Ist das System  $\Sigma$  für  $u(t) = 0$  asymptotisch zustandsstabil, so verschwindet die Norm der Übergangsmatrix asymptotisch. Das Gleiche gilt für die Gewichtsfunktion  $g(t)$ . Folglich existiert das Integral (8.14) und das gesteuerte System  $\Sigma$  mit  $u(t) \neq 0$  ist E/A-stabil:

**Satz 8.4 (Zustandsstabilität und E/A-Stabilität)**

Ist ein System  $\Sigma$  asymptotisch stabil, so ist es auch E/A-stabil.

Die Umkehrung dieses Satzes gilt, wenn alle Eigenvorgänge des Systems  $\Sigma$  in die Gewichtsfunktion eingehen und somit die Gewichtsfunktion nicht asymptotisch verschwindet, sobald auch nur ein Eigenwert der Matrix  $A$  keinen negativen Realteil besitzt. Für diese Systeme gilt Gl. (5.123) auf S. 173 für *keinen* Index  $i$  und alle Eigenwerte der Matrix  $A$  sind auch Pole der Übertragungsfunktion. Im zweiten Band wird gezeigt, dass diese Systeme vollständig steuerbar und vollständig beobachtbar sind. Folglich sind die in den Gln. (8.9) und (8.15) beschriebenen Stabilitätsbedingungen äquivalent.

Dieser Zusammenhang wird in den Kap. 10 und 11 für den Reglerentwurf genutzt. Da der Regler anhand des PN-Bildes des geschlossenen Kreises bzw. der Frequenzkennlinie der offenen Kette ausgewählt wird, sichert er die E/A-Stabilität des

Regelkreises und unter den genannten Bedingungen gleichzeitig auch die Zustandsstabilität.

## 8.3 Stabilitätsprüfung anhand des charakteristischen Polynoms

### 8.3.1 Vorgehensweise

Die im vorangegangenen Abschnitt angegebenen Kriterien für die Zustandsstabilität und für die E/A-Stabilität enthalten sehr ähnliche Forderungen: Einerseits sollen sämtliche Eigenwerte  $\lambda_i$  der Systemmatrix  $A$  negative Realteile haben, andererseits sollen die Realteile sämtlicher Pole  $s_i$  der Übertragungsfunktion negativ sein. Gemeinsam ist beiden Bedingungen, dass die Eigenwerte bzw. Pole die Nullstellen eines Polynoms sind und dass die genauen Werte dieser Nullstellen gar nicht von Interesse sind, sondern nur die Tatsache überprüft werden muss, ob alle diese Nullstellen negative Realteile haben.

Das im folgenden angegebene Kriterium ermöglicht es zu entscheiden, ob sämtliche Nullstellen eines Polynoms

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 \quad (8.16)$$

einen negativen Realteil haben, ohne dass dabei die Nullstellen selbst berechnet werden müssen. Es wird also eine Gleichung betrachtet, die man einerseits als charakteristische Gleichung

$$\det(\lambda I - A) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (8.17)$$

der Matrix  $A$  oder durch Nullsetzen des Nennerpolynoms  $N(s)$  der Übertragungsfunktion  $G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)}$  erhalten kann:

$$N(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0. \quad (8.18)$$

Die Ergebnisse des Stabilitätstests betreffen im ersten Fall die Zustandsstabilität und im zweiten Fall die E/A-Stabilität. In der Erläuterung des Kriteriums wird deshalb nur von der Stabilität im Allgemeinen gesprochen.

### 8.3.2 Hurwitzkriterium

Das von HURWITZ<sup>2</sup> aufgestellte Kriterium verwendet die  $(n, n)$ -Matrix  $\mathbf{H}$ , in der die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms folgendermaßen angeordnet sind:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}.$$

Dabei sind entsprechend der Systemordnung nur  $n$  Zeilen und Spalten anzugeben. Koeffizienten in  $\mathbf{H}$ , deren Index größer als  $n$  ist, werden durch Nullen ersetzt.

Die führenden Hauptabschnittsdeterminanten  $D_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) dieser Matrix erhält man, indem man die Determinanten der in der linken oberen Ecke stehenden  $(i, i)$ -Matrizen bildet:

$$\left( \begin{array}{cc|cc|cc|c} a_1 & & a_3 & & a_5 & & a_7 & \dots \\ a_0 & a_2 & & a_4 & & a_6 & & \dots \\ \hline 0 & a_1 & a_3 & & & a_5 & & \dots \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & & & & \dots \\ \hline 0 & 0 & a_1 & a_3 & & & & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \end{array} \right). \quad (8.19)$$

Es gilt

$$\begin{aligned} D_1 &= a_1 \\ D_2 &= \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{pmatrix} \\ D_3 &= \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix} \\ &\vdots \\ D_n &= \det \mathbf{H}. \end{aligned}$$

Diese Determinanten werden auch als Hurwitzdeterminanten bezeichnet.

---

<sup>2</sup> ADOLF HURWITZ (1859 – 1919), deutscher Mathematiker

**Satz 8.5 (Hurwitzkriterium)**

Sämtliche Nullstellen des Polynoms (8.16) haben genau dann einen negativen Realteil, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Alle Koeffizienten  $a_i$  sind positiv:

$$a_i > 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (8.20)$$

2. Die  $n$  führenden Hauptabschnittsdeterminanten  $D_i$  der Matrix  $\mathbf{H}$  sind positiv:

$$D_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8.21)$$

Diese beiden Bedingungen sind folglich notwendig und hinreichend für die Stabilität des betrachteten Systems.

Wenn das untersuchte Polynom (8.16) das charakteristische Polynom der Systemmatrix  $\mathbf{A}$  ist und die beiden Bedingungen des Hurwitzkriteriums erfüllt sind, so ist das betrachtete System asymptotisch stabil. Erfüllt das Nennerpolynom der Übertragungsfunktion  $G(s)$  das Hurwitzkriterium, dann ist das System E/A-stabil.

Die Vorzeichenbedingung (8.20) des Hurwitzkriteriums ist eine notwendige Stabilitätsbedingung<sup>3</sup>, d. h., wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, so weiß man, dass das System instabil ist. Bei der Durchführung des Stabilitätstests wird man diese einfache Bedingung stets zuerst nachprüfen. Dieser Bedingung zufolge müssen in dem betrachteten Polynom alle Potenzen von  $\lambda$  vorkommen und alle Koeffizienten gleiches Vorzeichen haben. Gegebenenfalls kann man dann durch Multiplikation mit  $-1$  alle Koeffizienten *positiv* machen.

Wenn die Vorzeichenbedingung (8.20) erfüllt ist, dann kann es keine reellen Nullstellen des charakteristischen Polynoms mit positivem Realteil geben. Wenn man also weiß, dass das betrachtete System nur reelle Eigenwerte haben kann (weil beispielsweise die Systemmatrix  $\mathbf{A}$  symmetrisch ist), dann ist diese Bedingung sogar hinreichend für die Stabilität. Mit der Bedingung (8.21) wird ausgeschlossen, dass es konjugiert-komplexe Nullstellen mit positivem Realteil gibt.

Ist das Hurwitzkriterium nicht erfüllt, so gibt die Anzahl der Vorzeichenwechsel von

$$a_1, D_1, \frac{D_2}{D_1}, \frac{D_3}{D_2}, \dots, \frac{D_n}{D_{n-1}}$$

an, wie viele Nullstellen des Polynoms positiven Realteil haben, wie viele Eigenvorgänge des Systems demzufolge aufklingende („instabile“) e-Funktionen sind.

Im Zusammenhang mit diesem Kriterium seien noch zwei weitere Begriffe erwähnt. Wenn ein Polynom nur Nullstellen mit negativem Realteil besitzt, so bezeichnet man dieses Polynom auch als *Hurwitzpolynom*. Wenn eine Matrix nur Eigenwer-

<sup>3</sup> In der Originalarbeit [46] wird nur gefordert, dass der Koeffizient  $a_n$  positiv ist. Diese sowie die zweite Bedingung können aber nur dann erfüllt werden, wenn sämtliche Koeffizienten positiv sind, so wie es hier in der ersten Bedingung gefordert wird.

te mit negativem Realteil besitzt, so ist sie eine *Hurwitzmatrix*. Der letztgenannte Begriff wird nicht einheitlich verwendet, denn gelegentlich wird auch die Matrix  $\mathbf{H}$  als Hurwitzmatrix bezeichnet.

**Beispiel 8.1** Anwendung des Hurwitzkriteriums

Gegeben ist das charakteristische Polynom

$$3\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 0,5$$

der Systemmatrix  $\mathbf{A}$  eines linearen Systems. Für die Stabilitätsprüfung mit Hilfe des Hurwitzkriteriums wird die Matrix  $\mathbf{H}$  für  $n = 3$  gebildet:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0,5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Die erste Bedingung des Hurwitzkriteriums ist erfüllt, denn alle Polynomkoeffizienten sind positiv. Für die führenden Hauptabschitttdeterminanten erhält man

$$\begin{aligned} D_1 &= 1 > 0 \\ D_2 &= \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0,5 & 2 \end{pmatrix} = 0,5 > 0 \\ D_3 &= \det \mathbf{H} = 3 \cdot D_2 > 0, \end{aligned}$$

wobei  $D_3$  nach der letzten Spalte entwickelt wurde. Alle Determinanten sind positiv. Das System ist folglich asymptotisch stabil.  $\square$

**Aufgabe 8.3\*** Eigenschaften des Hurwitzkriteriums

1. Welche Vereinfachung des Hurwitzkriteriums ergibt sich für Systeme zweiter Ordnung?
2. Warum kann es keine positiven reellen Nullstellen des charakteristischen Polynoms (8.16) geben, wenn die Vorzeichenbedingung (8.20) erfüllt ist?
3. Zeigen Sie, dass die Vorzeichenbedingung (8.20) nicht hinreichend dafür ist, dass das charakteristische Polynom gar keine Nullstellen mit positivem Realteil hat.  $\square$

**Aufgabe 8.4\*** Stabilisierbarkeit eines invertierten Pendels

Das im Beispiel 10.4 auf S. 498 genauer beschriebene invertierte Pendel ist instabil und hat die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{40}{s^2 - 29,43}.$$

Beweisen Sie mit dem Hurwitzkriterium, dass das Pendel nicht mit einer proportionalen Rückführung stabilisierbar ist, d. h., dass der Regelkreis für keine Reglerverstärkung  $k_P$  eines P-Reglers asymptotisch stabil ist.  $\square$

**Aufgabe 8.5** Stabilitätsprüfung eines Kraftwerksblocks

Die Regelstrecke der im Beispiel 11.1 auf S. 533 behandelten Knotenspannungsregelung, die aus dem klemmenspannungsgeregelten Kraftwerksblock und dessen Kopplung an das Verteilungsnetz besteht, hat die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{2,76s + 0,491}{s^3 + 4,45s^2 + 5,31s + 0,819}.$$

Überprüfen Sie die Stabilität dieses Systems mit dem Hurwitzkriterium. Bezieht sich Ihr Ergebnis auf die Zustandsstabilität oder die E/A-Stabilität?  $\square$

## 8.4 Stabilitätsprüfung von Regelkreisen anhand der Pole des geschlossenen Kreises

### 8.4.1 E/A-Stabilität von Regelkreisen

Im Folgenden wird die Stabilität des in Abb. 8.4 gezeigten Standardregelkreises  $\bar{\Sigma}$  untersucht. Das E/A-Verhalten dieses Kreises wird durch die Führungsübertragungsfunktion  $G_w(s)$  und die Störübertragungsfunktion  $G_d(s)$  beschrieben:

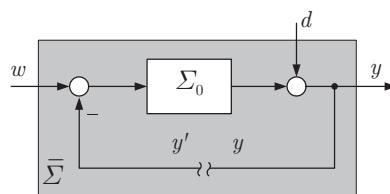
$$\bar{\Sigma} : \quad Y(s) = G_w(s)W(s) + G_d(s)D(s). \quad (8.22)$$

Dabei gilt entsprechend Gln. (7.6) und (7.7)

$$G_w(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)}, \quad \text{und} \quad G_d(s) = \frac{1}{1 + G_0(s)}$$

mit  $G_0(s)$  als Übertragungsfunktion der offenen Kette  $\Sigma_0$ :

$$G_0(s) = G(s)K(s). \quad (8.23)$$



**Abb. 8.4:** Stabilitätsuntersuchung des Regelkreises  $\bar{\Sigma}$

Die Übertragungsfunktionen  $G_w(s)$  und  $G_d(s)$  haben dasselbe Nennerpolynom

$$F(s) = 1 + G_0(s) \quad (8.24)$$

und folglich auch dieselben Pole. Es sind dies die Pole  $\bar{s}_i$  des geschlossenen Kreises, die als Nullstellen von  $F(s)$  berechnet werden können. Die charakteristische Gleichung des geschlossenen Kreises lautet also

$$\boxed{\text{Charakteristische Gleichung des Regelkreises } \bar{\Sigma}: \quad 1 + G_0(s) = 0.} \quad (8.25)$$

Im Folgenden wird angenommen, dass die offene Kette  $\Sigma_0$  ein System  $n$ -ter Ordnung ist und der geschlossene Kreis die Pole  $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_n$  besitzt, die zur Unterscheidung von den Polen  $s_i$  der offenen Kette mit einem Querstrich versehen sind. Sind diese Pole des geschlossenen Kreises bekannt, so kann die Stabilität entsprechend Satz 8.3 geprüft werden. Der geschlossene Kreis ist genau dann E/A-stabil, wenn alle Pole des geschlossenen Kreises einen negativen Realteil haben:

$$\operatorname{Re}\{\bar{s}_i\} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8.26)$$

Diese Eigenschaft kann mit dem Hurwitzkriterium oder dem Routhkriterium geprüft werden.

**Rückführdifferenzfunktion.** Die in Gl. (8.24) eingeführte Übertragungsfunktion  $F(s)$  hat eine interessante Interpretation. Schneidet man den Regelkreis bei  $Y(s)$  auf und gibt der der Mischstelle zugewandten Seite des Schnittes die Bezeichnung  $Y'(s)$  (Abb. 8.4), so gilt mit  $W(s) = 0$  die Beziehung

$$Y(s) = -G_0(s) Y'(s).$$

Für die Differenz der beiden an der Schnittstelle auftretenden Signale gilt

$$Y'(s) - Y(s) = (1 + G_0(s)) Y'(s) = F(s) Y'(s)$$

mit

$$\boxed{\text{Rückführdifferenzfunktion:} \quad F(s) = 1 + G_0(s).} \quad (8.27)$$

Die Übertragungsfunktion  $F(s)$  beschreibt also, wie groß diese Differenz bezogen auf das eingespeiste Signal  $Y'(s)$  ist. Sie wird deshalb als Rückführdifferenzfunktion bezeichnet.

Die Rückführdifferenzfunktion ist für  $s = \bar{s}_i$  gleich null:

$$F(\bar{s}_i) = 0.$$

Das heißt, die Pole  $\bar{s}_i$  des geschlossenen Kreises beschreiben diejenigen komplexen Frequenzen, für die

$$Y(s) = Y'(s) \quad (8.28)$$

gilt. Für die Signale

$$Y'(s) = |Y| e^{\bar{s}_i t}$$

kann der aufgeschnittene Kreis geschlossen werden, ohne dass sich an den Signalen etwas ändert. Diese Signale erfüllen die *Selbsterregungsbedingung* (8.28) von BARKHAUSEN<sup>4</sup>. Ist der Realteil eines oder mehrerer Pole  $\bar{s}_i$  positiv, so heißt das, dass sich ein oder mehrere entdämpfte Signale selbst erregen und der Kreis folglich instabil ist. Haben alle Pole einen negativen Realteil, so können sich nur gedämpfte Funktionen selbst erregen. Der Kreis ist stabil.

Die Rückführdifferenzfunktion ist unabhängig davon, wo der Regelkreis aufgeschnitten wird. Liegt die Schnittstelle bei der Stellgröße bzw. bei der Regelgröße, so gilt

$$F(s) = 1 + K(s)G(s) = 1 + G(s)K(s). \quad (8.29)$$

Wie man aus der Definitionsgleichung (7.14) für die Empfindlichkeitsfunktion sieht, gilt außerdem  $F'(s) = \frac{1}{S(s)}$ .

**Aufgabe 8.6** *Stabilität eines Regelkreises*

Betrachten Sie einen Regelkreis, der aus der Regelstrecke mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{2}{(5s+1)(3s+1)(s+1)}$$

und einem P-Regler mit dem Verstärkungsfaktor  $k_P$  besteht.

1. Ist die Regelstrecke stabil?
2. Stellen Sie die charakteristische Gleichung des geschlossenen Regelkreises auf.
3. Überprüfen Sie die Stabilität des Regelkreises mit dem Hurwitzkriterium. Für welche Reglerverstärkung  $k_P$  ist der Kreis stabil? □

**Aufgabe 8.7\*** *Stabilisierung einer instabilen Regelstrecke*

Gegeben ist eine instabile Regelstrecke

$$G(s) = \frac{3}{(s-1)(s+3)}.$$

Wie muss die Reglerverstärkung  $k_P$  eines P-Reglers gewählt werden, damit der geschlossene Kreis stabil ist. Was passiert mit der Reglerverstärkung, wenn der instabile Pol  $s_1 = 1$  vergrößert wird? Erklären Sie, inwieweit dieser Regler zur Regelstrecke *gegengekoppelt* ist. □

---

<sup>4</sup> HEINRICH BARKHAUSEN (1881 – 1956), deutscher Physiker, untersuchte Rückkopplungen in Röhrenschaltungen

**Aufgabe 8.8\*** *Stabilität von Regelkreisen mit I-Regler*

Betrachten Sie einen Regelkreis, der aus einer stabilen Regelstrecke

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)}$$

und einem I-Regler

$$K_I(s) = \frac{k_I}{s}$$

besteht. Welche Vorzeichenbedingung muss  $k_I$  erfüllen, damit der Regelkreis stabil ist? Interpretieren Sie diese Bedingung als Gegenkopplungsbedingung für I-Regler.

(Hinweis: Leiten Sie die geforderte Bedingung aus der notwendigen Stabilitätsbedingung ab, dass die Koeffizienten der charakteristischen Polynome der Regelstrecke und des Regelkreises jeweils gleiches Vorzeichen haben. Gesucht ist eine *notwendige* Stabilitätsbedingung.)  $\square$

### 8.4.2 Innere Stabilität von Regelkreisen

Mit Hilfe von Frequenzbereichsmodellen kann nur die E/A-Stabilität des Regelkreises geprüft werden. In diese Analyse gehen nur diejenigen Modi ein, die durch die Pole der betrachteten Übertragungsfunktion bestimmt werden. Gibt es weitere Modi und sind diese instabil, so können im Regelkreis instabile Signale auftreten, obwohl die betrachtete Übertragungsfunktion nur stabile Pole besitzt.

**Beispiel 8.2** *Instabile Signale in einem E/A-stabilen Regelkreis*

Stabilisiert man die Regelstrecke

$$G(s) = \frac{1}{s - 3}$$

durch den Regler

$$K(s) = \frac{s - 3}{s + 5},$$

so erhält man die charakteristische Gl. (8.25)

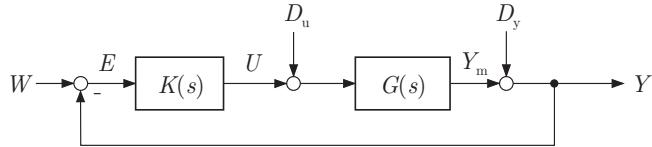
$$1 + G_0(s) = 1 + \frac{1}{s + 5} = 0$$

und daraus den Pol  $\bar{s} = -6$  für den Regelkreis. Der Regelkreis ist folglich E/A-stabil.

Untersucht man nun das Verhalten der Regelgröße für den Fall, dass der Stellgröße additiv eine Störung  $D_u$  überlagert ist (vgl. Abb. 8.5), so erhält man die Übertragungsfunktion

$$G_{yd}(s) = \frac{Y(s)}{D_u(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)K(s)} = \frac{s + 5}{s^2 + 3s - 18},$$

die einen instabilen Pol besitzt, denn die Koeffizienten des Nennerpolynoms haben unterschiedliches Vorzeichen. Das heißt, dass die kleinste Erregung  $D_u$  zu einem über alle Grenzen aufklingenden Ausgangssignal  $Y$  führt, der Regelkreis also nicht E/A-stabil ist bezüglich  $D_u$  als Eingang und  $Y$  als Ausgang.  $\square$



**Abb. 8.5:** Regelkreis mit Angabe der bei der inneren Stabilität untersuchten Signale

Die beschriebene Eigenschaft tritt auf, wenn in der offenen Kette instabile Pole gegen instabile Nullstellen gekürzt werden. Um dieses ungewollte Regelkreisverhalten zu verhindern, fordert man häufig nicht nur die E/A-Stabilität bezüglich  $W$  und  $D$  als Eingang und  $Y$  als Ausgang, sondern die E/A-Stabilität des Regelkreises bezüglich aller in Abb. 8.5 eingetragenen Signale. Diese Eigenschaft wird als *innere Stabilität* (I-Stabilität) bezeichnet<sup>5</sup>.

Da sich die Signale  $Y$  und  $E$  nur um  $W$  unterscheiden und der Eingang  $D_y$  dieselbe Wirkung bezüglich der Stabilität wie  $W$  hat, genügt es, bei der Untersuchung des Regelkreises auf innere Stabilität die Signale  $W$  und  $D_u$  als Eingänge und  $Y$  und  $U$  als Ausgänge zu betrachten, also mit  $D_y = 0$  zu rechnen. Für das Übertragungsverhalten des Regelkreises  $\bar{\Sigma}$  bezüglich dieser Signale gilt

$$\bar{\Sigma} : \begin{cases} Y(s) = \frac{G(s)K(s)}{1+G(s)K(s)} W(s) + \frac{G(s)}{1+G(s)K(s)} D_u(s) \\ U(s) = \frac{K(s)}{1+G(s)K(s)} W(s) - \frac{G(s)K(s)}{1+G(s)K(s)} D_u(s), \end{cases}$$

was in der Form

$$\begin{pmatrix} Y(s) \\ U(s) \end{pmatrix} = \mathbf{G}_{EA}(s) \begin{pmatrix} W(s) \\ D_u(s) \end{pmatrix}$$

mit der Matrix

$$\mathbf{G}_{EA}(s) = \begin{pmatrix} \frac{G(s)K(s)}{1+G(s)K(s)} & \frac{G(s)}{1+G(s)K(s)} \\ \frac{K(s)}{1+G(s)K(s)} & \frac{-G(s)K(s)}{1+G(s)K(s)} \end{pmatrix}$$

zusammengefasst werden kann.

#### Satz 8.6 (Kriterium für I-Stabilität)

Der Regelkreis  $\bar{\Sigma}$  ist genau dann I-stabil, wenn alle Elemente der Matrix  $\mathbf{G}_{EA}(s)$  nur Pole mit negativem Realteil haben.

<sup>5</sup> Für die englische Bezeichnung *internal stability* hat sich in der deutschsprachigen Literatur noch keine einheitliche Bezeichnungsweise durchgesetzt. Zu Verwechslungen kann die Tatsache führen, dass häufig die Stabilität nach LJAPUNOW als innere Stabilität bezeichnet wird.

**Beispiel 8.2 (Forts.)** Instabile Signale in einem E/A-stabilen Regelkreis

Prüft man die I-Stabilität des angegebenen Regelkreises, so erkennt man in der Matrix

$$G_{EA} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+6} & \frac{s+5}{s^2+3s-18} \\ \frac{s-3}{s+6} & \frac{-1}{s+6} \end{pmatrix},$$

dass das obere rechte Element mindestens einen Pol mit positivem Realteil besitzt. Der Kreis ist nicht I-stabil.  $\square$

Die Betrachtung der I-Stabilität hat wichtige Konsequenzen für den Reglerentwurf. Instabile Pole der Regelstrecke dürfen nicht gegen Nullstellen des Reglers mit positivem Realteil gekürzt werden. Beschränkt man die Stabilitätsforderung (I) an den Regelkreis auf die E/A-Stabilität, so wäre dieses Vorgehen möglich, vorausgesetzt, dass man mit der Reglernullstelle den instabilen Pol exakt „trifft“. Die Forderung nach I-Stabilität verbietet dieses Vorgehen!

Werden in der offenen Kette keine instabilen Pole gegen entsprechende Nullstellen gekürzt, so ist die E/A-Stabilität äquivalent zur I-Stabilität und es reicht, die E/A-Stabilität bezüglich eines beliebigen E/A-Paares zu prüfen.

**Aufgabe 8.9\*\*** Regelkreis mit Allpassanteil

Betrachten Sie einen Regelkreis mit nichtminimalphasiger Regelstrecke. Die Nachteile des Allpassanteils der Regelstrecke bezüglich des Übergangsverhaltens des Regelkreises kann man dadurch beseitigen, dass man einen Regler verwendet, der die Nullstellen des Allpassanteils näherungsweise oder exakt kompensiert. Kann dabei ein I-stabiler Regelkreis entstehen?  $\square$

## 8.5 Stabilitätsprüfung von Regelkreisen anhand des Frequenzganges der offenen Kette

### 8.5.1 Herleitung der Stabilitätsbedingung

In diesem Abschnitt wird das von NYQUIST<sup>6</sup> angegebene Kriterium abgeleitet, mit dem die Stabilität des geschlossenen Kreises  $\bar{\Sigma}$  geprüft werden kann, ohne die Pole zu berechnen. Dieses Kriterium wird in der Praxis sehr häufig angewendet, weil es sich auf die Ortskurve der offenen Kette  $\Sigma_0$  bezieht. Das Nyquistkriterium beantwortet die Frage, welche Eigenschaften die offene Kette  $\Sigma_0$  haben muss, damit der aus dieser Kette entstehende Regelkreis  $\bar{\Sigma}$  E/A-stabil ist.

<sup>6</sup> HARRY NYQUIST (1889 – 1976), amerikanischer Elektrotechniker schwedischer Herkunft

Zur Ableitung des Kriteriums sind zunächst einige Umformungen von  $G_0(s)$  notwendig.  $G_0(s)$  ist eine gebrochen rationale Funktion und kann als Quotient

$$G_0(s) = \frac{Z_0(s)}{N_0(s)}$$

eines Zählerpolynoms  $Z_0(s)$  und eines Nennerpolynoms  $N_0(s)$  dargestellt werden. Für die Rückführdifferenzfunktion gilt dann

$$F(s) = 1 + G_0(s) = \frac{N_0(s) + Z_0(s)}{N_0(s)}.$$

Entsprechend Gl. (8.25) sind die Nullstellen von  $F(s)$  die Pole des Regelkreises. Die Nullstellen von  $N_0(s)$  sind die Pole der offenen Kette. Folglich gilt

$$\text{HSU-CHEN-Theorem: } F(s) = k \frac{\prod_{i=1}^n (s - \bar{s}_i)}{\prod_{i=1}^m (s - s_i)}. \quad (8.30)$$

Das heißt, dass die Rückführdifferenzfunktion proportional zum Quotienten der charakteristischen Polynome des geschlossenen Kreises und der offenen Kette ist:

$$F(s) \sim \frac{\text{charakteristisches Polynom des geschlossenen Kreises}}{\text{charakteristisches Polynom der offenen Kette}}.$$

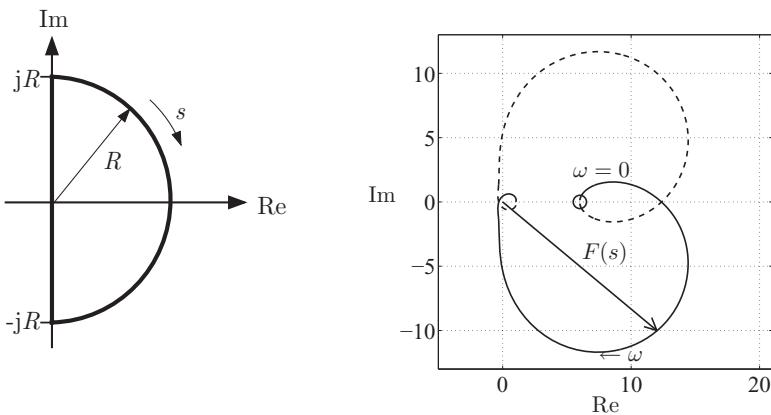
Die Gleichheit gilt bei nicht sprungfähigen Systemen. Dieses wichtige Ergebnis wird auch als HSU-CHEN-Theorem bezeichnet.

Streng genommen gilt die angegebene Beziehung nur dann, wenn  $s_i \neq \bar{s}_j$  für alle  $i$  und  $j$  gilt, d. h., wenn keine Pole sowohl in der offenen Kette als auch im geschlossenen Kreis auftreten. Würde dies der Fall sein, so würden sich die entsprechenden Linearfaktoren aus dem Quotienten herauskürzen. Derartige Pole spielen jedoch keine Rolle für die E/A-Stabilität des Regelkreises, weshalb das angegebene Theorem ohne Beachtung dieses Sachverhaltes angewendet werden kann.

**Abbildung der Nyquistkurve.** Gleichung (8.30) wird nun verwendet um festzustellen, wie viele Pole des geschlossenen Kreises  $\bar{\Sigma}$  in der rechten komplexen Halbebene liegen. Dabei wird zunächst angenommen, dass keine Pole der offenen Kette  $\Sigma_0$  oder des geschlossenen Kreises  $\bar{\Sigma}$  auf der Imaginärachse liegen. Die Anzahl der Pole der offenen Kette mit positivem Realteil ist  $n^+$ ; die Anzahl der Pole des geschlossenen Kreises mit positivem Realteil  $\bar{n}^+$ .

Das in diesem Abschnitt behandelte Stabilitätskriterium beruht auf dem Residuensatz, demzufolge der Wert eines Kurvenintegrals längs einer geschlossenen Kurve lediglich von den Residuen in den Singularitäten des Integranden, die innerhalb der Kurve liegen, und der Windungszahl der Kurve um diese Singularitäten abhängt. Anstelle diesen abstrakten Sachverhalt zu nutzen, wird das Stabilitätskriterium im Folgenden in anschaulicher Weise hergeleitet, so dass offenkundig wird, wieso die Stabilität des Regelkreises  $\bar{\Sigma}$  aus dem Verlauf der Ortskurve der offenen Kette  $\Sigma_0$  abgelesen werden kann.

Es wird die in Abb. 8.6 (links) gezeigte Kurve betrachtet, die als *Nyquistkurve*  $\mathcal{D}$  bezeichnet und deren Radius  $R$  so groß gewählt wird, dass die Kurve alle in der rechten Halbebene liegenden Pole der offenen Kette und des geschlossenen Kreises umschließt. Im Folgenden wird die Abbildung der auf der Nyquistkurve liegenden Punkte  $s$  durch die Funktion  $F(s)$  untersucht und dafür die Nyquistkurve beim Punkt  $s = j0$  beginnend im Uhrzeigersinn durchlaufen, so dass sie zunächst auf der positiven Imaginärachse den Punkt  $jR$  erreicht, dann den Halbkreis im Uhrzeigersinn entlangläuft, die Imaginärachse bei  $-jR$  erreicht und auf der negativen Imaginärachse zurück zum Punkt  $j0$  führt.



**Abb. 8.6:** Nyquistkurve  $\mathcal{D}$  (links) und Abbildung der Nyquistkurve durch die Rückführdifferenzfunktion  $F(s)$  (rechts)

Alle auf der Nyquistkurve  $\mathcal{D}$  liegenden komplexen Zahlen  $s$  bilden den Definitionsbereich der betrachteten Abbildung. Jeder dieser Zahlen wird der Wert von  $F(s)$  zugeordnet. Da  $F(s)$  ein komplexwertige Funktion ist, kann ihr Verlauf in der komplexen Ebene als Ortskurve dargestellt werden, wie dies im rechten Teil von Abb. 8.6 für ein Beispiel getan ist. Während  $s$  einmal um die Nyquistkurve herumläuft, durchläuft  $F(s)$  einmal die gezeigte Kurve. Der Abschnitt der Nyquistkurve, auf dem  $|s| = R$  gilt, führt für hinreichend großen Radius  $R$  bei nicht sprungfähigen Systemen auf  $G(s) \approx 0$  und folglich  $F(s) \approx 1$ , d. h., dieser Teil der Nyquistkurve wird in den Punkt 1 abgebildet.

Im Folgenden ist nur die bei einem derartigen Umlauf stattfindende Argumentänderung von  $F(s)$  von Bedeutung. Um dies zu verstehen, stelle man sich den zu einem gegebenen Wert  $\bar{s}$  gehörenden Funktionswert  $F(\bar{s})$  als Zeiger vor, der in Abb. 8.6 (rechts) im Ursprung des Koordinatensystems beginnt und zu dem entsprechenden Punkt der Ortskurve zeigt. Zerlegt man  $F(\bar{s})$  in Betrag und Phase

$$F(\bar{s}) = |F(\bar{s})| e^{j\phi_F(\bar{s})},$$

so ist das Argument  $\phi_F(\bar{s}) = \arg(F(\bar{s}))$  von  $F(\bar{s})$  der Winkel, den dieser Zeiger mit der positiven reellen Achse einschließt.

**Argumentänderung von  $F(s)$ .** Die im Folgenden betrachtete Argumentänderung entsteht, wenn man den Zeiger  $F(s)$  für einen geschlossenen Umlauf von  $s$  auf der Nyquistkurve  $\mathcal{D}$  beobachtet. Dabei wird vereinbart, dass der Umlauf der Nyquistkurve bei  $+j0$  auf der Imaginärachse beginnt und bei  $-j0$  endet.  $F(s)$  beginnt dann in dem in Abb. 8.6 dargestellten Beispiel bei dem durch einen kleinen Kreis gekennzeichneten Punkt auf der positiven reellen Achse, durchläuft die verschlungene Kurve im Uhrzeigersinn und endet wieder auf der positiven reellen Achse. Die Argumentänderung

$$\Delta \arg F(s) = \arg(F(-j0)) - \arg(F(+j0))$$

beschreibt, wie sich das Argument von  $F(s)$  während eines solchen Durchlaufs ändert. Dabei muss berücksichtigt werden, dass eine volle Drehung des Zeigers im Uhrzeigersinn einer Argumentänderung von  $2\pi$  (oder  $360^\circ$ ) entspricht. Im Beispiel dreht sich der Zeiger zweimal im Uhrzeigersinn, also ist die Argumentänderung gleich  $4\pi$ .

Im Folgenden wird untersucht, wie die Argumentänderung  $\Delta \arg F(s)$  von der Anzahl der instabilen Pole der offenen Kette und des geschlossenen Regelkreises abhängt. Das dabei abgeleitete Ergebnis folgt aus dem Residuensatz, der besagt, dass das Integral längs einer geschlossenen Kurve über eine bis auf isolierte Singularitäten holomorphe Funktion lediglich vom Residuum der Funktion in den Singularitäten abhängt, die hier durch die Pole der offenen Kette und des geschlossenen Regelkreises gegeben sind. Da es im Folgenden nicht allein auf dieses mathematische Ergebnis, sondern auf das Verständnis dieses Satzes für die Stabilitätsanalyse ankommt, wird dieses Ergebnis noch einmal anschaulich hergeleitet.

Aus Gl. (8.30) folgt für das Argument von  $F(s)$  die Beziehung

$$\arg(F(s)) = \arg k + \sum_{i=1}^n \arg(s - \bar{s}_i) - \sum_{i=1}^n \arg(s - s_i)$$

und für die Argumentänderung

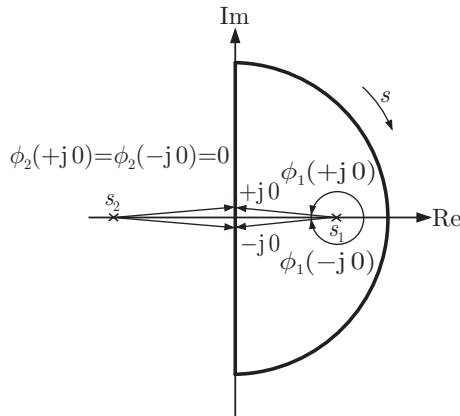
$$\Delta \arg F(s) = \Delta \arg k + \sum_{i=1}^n \Delta \arg(s - \bar{s}_i) - \sum_{i=1}^n \Delta \arg(s - s_i). \quad (8.31)$$

Da  $k$  nicht von  $s$  abhängt, ist  $\Delta \arg k = 0$ . Die anderen beiden Summen kann man aus Abb. 8.7 ablesen. Für einen Pol  $s_i$  beschreibt  $\arg(s - s_i)$  den Winkel, den der Vektor zwischen  $s_i$  und  $s$  mit der reellen Achse einschließt. Da  $s$  die Nyquistkurve durchläuft, ändert sich  $\arg(s - s_i)$  stetig.

Die nachfolgende Überlegung zeigt, dass für einen geschlossenen Umlauf die Änderung von  $\phi_i = \arg(s - \bar{s}_i)$  und  $\phi_i = \arg(s - s_i)$  nur davon abhängig ist, ob  $\bar{s}_i$  bzw.  $s_i$  in der rechten oder linken Halbebene liegt.

Für den in der linken Halbebene liegenden reellen Pol  $s_2$  besitzt der Linearfaktor  $(s - s_2)$  für  $s = -j0$  und  $s = +j0$  dasselbe Argument

$$\phi_2(-j0) = \phi_2(+j0) = 0,$$



**Abb. 8.7:** Darstellung der Argumentänderungen für je einen Pol in der rechten und der linken komplexen Halbebene

so dass die Argumentänderung gleich null ist:

$$\Delta \arg(s - s_2) = \phi_2(-j0) - \phi_2(+j0) = 0.$$

Dasselbe gilt für jeden komplexen Pol in der linken Halbebene.

Für den in der rechten Halbebene liegenden reellen Pol  $s_1$  hat der Linearfaktor  $(s - s_1)$  für  $s = -j0$  und  $s = +j0$  unterschiedliche Argumente, denn der den Linearfaktor darstellende Pfeil hat sich beim Durchlauf der Nyquistkurve um  $360^\circ$  im Uhrzeigersinn gedreht:

$$\Delta \arg(s - s_1) = \phi_1(-j0) - \phi_1(+j0) = 2\pi.$$

Diese Beziehung gilt für alle reellen und konjugiert komplexen Pole in der rechten Halbebene.

Für die Argumentänderung  $\Delta \arg F(s)$  von  $F(s)$  erhält man aus Gl. (8.31) deshalb die Beziehung

$$\Delta \arg F(s) = 2(\bar{n}^+ - n^+) \pi, \quad (8.32)$$

wobei die Argumentänderung im Uhrzeigersinn positiv gezählt wird, weil die Nyquistkurve im Uhrzeigersinn durchlaufen wird.

Dieses Ergebnis führt zu einem Stabilitätskriterium, wenn man fordert, dass  $\bar{n}^+ = 0$  gilt:

**Satz 8.7** Eine offene Kette  $\Sigma_0$  mit der Übertragungsfunktion  $G_0(s)$  führt genau dann auf einen E/A-stabilen Regelkreis  $\bar{\Sigma}$ , wenn

$$\Delta \arg F(s) = -2n^+ \pi$$

gilt, d. h., wenn die Abbildung  $F(s) = 1 + G_0(s)$  der Nyquistkurve  $\mathcal{D}$  den Ursprung der komplexen Ebene  $-n^+$ -mal im Uhrzeigersinn umschließt. Dabei bezeichnet  $n^+$  die Anzahl der Pole von  $G_0(s)$  mit positivem Realteil.

Die übliche Formulierung „ $-n^+$ -mal im Uhrzeigersinn“ kann durch „ $n^+$ -mal entgegen dem Uhrzeigersinn“ ersetzt werden. Man wählt bei der Nyquistkurve  $\mathcal{D}$  und deren Abbildung jedoch üblicherweise dieselbe Durchlaufrichtung.

### 8.5.2 Nyquistkriterium

Das angegebene Stabilitätskriterium kann in eine besser anwendbare Form gebracht werden, wenn vorausgesetzt wird, dass die offene Kette  $\Sigma_0$  nicht sprungfähig ist:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G_0(s) = 0.$$

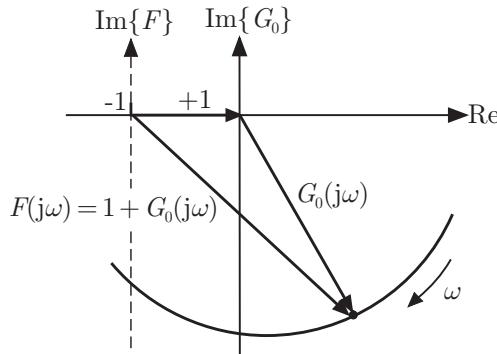
Dann ist  $F(s)$  für  $s$  entlang des großen Halbkreises der Nyquistkurve gleich 1, wenn der Radius  $R$  genügend groß gewählt wird. Die Abbildung des gesamten Halbkreises der Nyquistkurve fällt also in einen einzigen Punkt und es reicht aus, im Folgenden nur den Frequenzgang  $F(j\omega)$  für  $\omega = -\infty \dots +\infty$  zu betrachten.

Bei stabilen offenen Ketten wird davon ausgegangen, dass die statische Verstärkung nicht negativ ist

$$k_0 = G_0(0) \geq 0, \quad (8.33)$$

was durch eine geeignete Vorzeichenfestlegung der Reglerparameter gesichert werden kann. Bei stabilen Regelstrecken wählt man ohnehin die Messbereiche der Stell- und Regelgröße so, dass die statische Verstärkung der Regelstrecke positiv ist ( $k_s > 0$ ), so dass bei positiver Reglerverstärkung die Bedingung (8.33) erfüllt ist. Die Bedingung (8.33) wird eingeführt, um eine Vereinheitlichung in der grafischen Darstellung zu erreichen. Unter dieser Bedingung beginnen alle Ortskurven für  $\omega = 0$  im Punkt  $F(0) = 1 + k_0$  auf der positiven reellen Achse.

Als zweite Änderung gegenüber der bisherigen Betrachtung wird an Stelle der Abbildung der Nyquistkurve durch  $F(s)$  jetzt die Abbildung durch  $G_0(s)$  untersucht. Der Übergang von  $F(s)$  zu  $G_0(s)$  bedeutet lediglich eine Verschiebung der Ordinate um 1 (siehe Abb. 8.8). Der „kritische Punkt“, dessen Umschließung durch die Kurve untersucht wird, ist jetzt der Punkt  $-1 + j0$  der komplexen Ebene für  $G_0$ .

Abb. 8.8: Zusammenhang von  $F(j\omega)$  und  $G_0(j\omega)$ **Satz 8.8 (Nyquistkriterium)**

Eine offene Kette  $\Sigma_0$  mit der Übertragungsfunktion  $G_0(s)$  führt genau dann auf einen E/A-stabilen Regelkreis  $\bar{\Sigma}$ , wenn die Ortskurve  $G_0(j\omega)$  für  $\omega = -\infty \dots +\infty$  den Punkt  $-1 + j0$  der komplexen Ebene  $-n^+$ -mal im Uhrzeigersinn umschließt. Dabei bezeichnet  $n^+$  die Anzahl der Pole von  $G_0(s)$  mit positivem Realteil.

Auch hier ist die Formulierung „ $-n^+$ -mal im Uhrzeigersinn“ durch die Festlegung der Durchlaufrichtung der Nyquistkurve begründet.

Das Nyquistkriterium wurde hier für gebrochen rationale Übertragungsfunktionen abgeleitet. Es gilt jedoch auch für Systeme mit Totzeit.

**Nyquistkriterium für stabile offene Kette.** In vielen Anwendungen ist die offene Kette stabil. Der Regelkreis ist dann ebenfalls stabil, wenn die Ortskurve der offenen Kette den Punkt  $-1 + j0$  nicht umschlingt ( $n^+ = 0$ ).

**(Nyquistkriterium für stabile offene Kette)**

Eine stabile offene Kette  $\Sigma_0$  mit der Übertragungsfunktion  $G_0(s)$  führt genau dann zu einem E/A-stabilen Regelkreis  $\bar{\Sigma}$ , wenn die Ortskurve  $G_0(j\omega)$  für  $\omega = -\infty \dots +\infty$  den Punkt  $-1 + j0$  der komplexen Ebene nicht umschließt.

**Anwendung des Nyquistkriteriums.** Da die im Satz 8.8 angegebene Formulierung des Nyquistkriteriums kompliziert erscheint, sollen die wichtigen Schritte der Stabilitätsanalyse hier noch einmal zusammengefasst werden. Beim Nyquistkriterium erkennt man aus einer Analyse der offenen Kette  $\Sigma_0$ , ob der geschlossene Regelkreis  $\bar{\Sigma}$  stabil ist oder nicht. Damit  $\bar{\Sigma}$  stabil ist, muss die Ortskurve von  $\Sigma_0$  den Prüfpunkt  $-1 + j0$  „korrekt umschlingen“. Was „korrekt“ heißt, wird durch die Anzahl der Pole der offenen Kette festgelegt, die man deshalb als erstes bestimmen muss. Außerdem

muss man beachten, dass der Punkt  $-1 + j0$  immer entgegen der Uhrzeigerrichtung umschlungen werden muss. In allen Abbildungen ist deshalb der zu positiven Kreisfrequenzen  $\omega$  gehörende Teil der Ortskurve als durchgezogene Linie und der für negative Frequenzen geltende Teil durch eine gestrichelte Linie dargestellt.

---

**Algorithmus 8.1** *Stabilitätstest mit Hilfe des Nyquistkriteriums*


---

**Gegeben:** Frequenzgang  $G_0(j\omega)$  der offenen Kette  $\Sigma_0$

1. **Analyse der offenen Kette:** Bestimmen Sie die Anzahl  $n^+$  der Pole der offenen Kette mit positivem Realteil.
2. **Ortskurve:** Zeichnen Sie die Ortskurve von  $G_0(j\omega)$  für  $\omega = -\infty \dots +\infty$ .
3. **Stabilitätstest:** Überprüfen Sie, dass die Ortskurve den Punkt  $-1+j0$  genau  $n^+$ -mal entgegen dem Uhrzeigersinn umschlingt.

**Ergebnis:** Der Regelkreis ist genau dann stabil, wenn der Stabilitätstest erfüllt ist.

---

### 8.5.3 Beispiele

Die Anwendung des Nyquistkriteriums wird im Folgenden anhand mehrerer Beispiele demonstriert. Dabei wird einerseits gezeigt, wann eine Ortskurve den kritischen Punkt umschlingt. Diese Frage ist insbesondere für komplizierter aussehende Ortskurven nicht immer sofort zu beantworten. Die Beispiele werden den Blick dafür schulen.

Andererseits soll durch die Beispiele demonstriert werden, dass das Nyquistkriterium nicht nur eine ja-nein-Entscheidung über die Stabilität fällt, sondern auch die „Nähe zur Instabilität“ charakterisiert, also auch ein Maß dafür liefert, „wie stabil“ ein Regelkreis ist. Diese Tatsache wird im Abschn. 8.6 ausgenutzt, um mit der robusten Stabilität eine Stabilitätseigenschaft nachzuweisen, die auch bei beschränkten Parameteränderungen bestehen bleibt.

**Beispiel 8.3** *Anwendung des Nyquistkriteriums für ein stabiles PT<sub>2</sub>-Glied*

Die Umschlingsbedingung des Nyquistkriteriums soll zunächst an einem einfachen Beispiel erläutert werden, bei dem der Regelkreis aus einem PT<sub>2</sub>-Glied als Regelstrecke

$$G(s) = \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)}$$

und einem P-Regler

$$K(s) = k_P$$

besteht. Die offene Kette  $\Sigma_0$  hat die Übertragungsfunktion

$$G_0(s) = \frac{k_P}{(s - s_1)(s - s_2)}. \quad (8.34)$$

Es wird angenommen, dass das PT<sub>2</sub>-Glied stabil ist, also  $\operatorname{Re}\{s_1\} < 0, \operatorname{Re}\{s_2\} < 0$  gilt.

Für den geschlossenen Kreis  $\bar{\Sigma}$  erhält man die charakteristische Gleichung (8.25), die nach Umformung auf

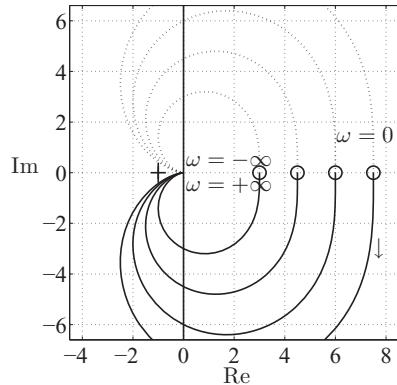
$$s^2 - (s_1 + s_2)s + k_P + s_1s_2 = 0$$

führt. Der Regelkreis ist für beliebige Reglerverstärkung  $k_P > -s_1s_2$ , also insbesondere für alle  $k_P > 0$  stabil, weil dann alle drei Koeffizienten des charakteristischen Polynoms positiv sind (vgl. Aufg. 8.3). Es soll jetzt untersucht werden, wie sich diese Tatsache aus dem Nyquistkriterium herleiten lässt.

Abbildung 8.9 zeigt die Ortskurve der offenen Kette

$$G_0(s) = \frac{k_P}{s^2 + s + 1}$$

für  $k_P = 1, 1,5, 2$  und  $2,5$ . Keine der Ortskurven umschließt den Punkt  $-1$ , vgl. Linke-Hand-Regel. Da die offene Kette  $\Sigma_0$  stabil ist, bedeutet das Nichtumschlingen des Punktes  $-1$ , dass auch der geschlossene Kreis stabil ist.



**Abb. 8.9:** Ortskurve einer offenen Kette zweiter Ordnung für veränderte Reglerverstärkung

Für eine feste Frequenz  $\omega$  führt die Veränderung der Reglerverstärkung  $k_P$  zu einer Veränderung des Betrages  $|G_0(j\omega)|$  des Frequenzganges  $G_0(j\omega)$  der offenen Kette. Da dabei die Phase  $\arg G_0(j\omega)$  unverändert bleibt, wandern die Punkte der Ortskurve entlang des Strahles, der den Ursprung der komplexen Ebene mit dem Punkt  $G_0(j\omega)$  verbindet. Deshalb liegen in Abb. 8.9 die zu derselben Frequenz gehörenden Punkte auf den vier Ortskurven auf derselben Verbindungsgeraden mit dem Ursprung der komplexen Ebene. Da die Phase von  $-180^\circ$  erst bei  $\omega \rightarrow \infty$  erreicht wird, wofür  $|G_0(\infty)| = 0$  gilt, schneiden auch die für sehr große Reglerverstärkungen gezeichneten Ortskurven die negative reelle Achse nicht und das Nyquistkriterium kann nicht verletzt werden. Der Regelkreis ist für beliebig hohe Reglerverstärkungen stabil.

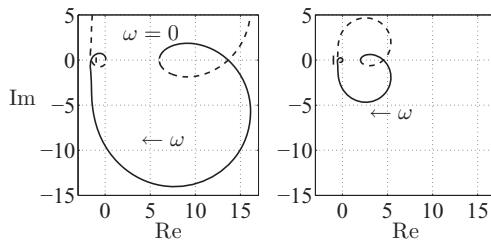
Diese Aussage gilt nicht nur für das Beispiel, sondern für PT<sub>2</sub>-Glieder ganz allgemein. Die Ortskurve  $G_0(j\omega)$  nach Gl. (8.34) hat qualitativ denselben Verlauf wie die in Abb. 8.9 gezeigte Ortskurve. Insbesondere durchläuft die Ortskurve für  $\omega = 0 \dots \infty$  nur den vierten und dritten Quadranten der komplexen Ebene, so dass die vollständige Kurve für  $\omega = -\infty \dots +\infty$  durch den Koordinatenursprung verläuft und die negative reelle Achse nicht schneidet. Dies gilt auch bei beliebiger Erhöhung oder Verkleinerung der Reglerverstärkung  $k_P$ . Der Punkt  $-1$  kann also niemals umschlossen werden.  $\square$

#### Beispiel 8.4 Anwendung des Nyquistkriteriums für eine stabile offene Kette

Wie im Beispiel 8.3 wird von einer stabilen offenen Kette  $\Sigma_0$  ausgegangen, jetzt jedoch die Voraussetzung bezüglich der dynamischen Ordnung fallen gelassen. Als Beispiel wird die offene Kette

$$G_0(s) = \frac{k_P (s + 0,2)}{(s^2 + 2s + 10)(s + 4)(s^2 + 0,2s + 0,1)}$$

betrachtet, bei der  $k_P$  wieder die Verstärkung eines P-Reglers bezeichnet. Für  $k_P = 120$  ist die Ortskurve  $G_0(j\omega)$  im linken Teil von Abb. 8.10 zu sehen, wobei der Bildausschnitt so gewählt wurde, dass im Wesentlichen nur der für positive Frequenzen gültige Teil der Ortskurve zu sehen ist.



**Abb. 8.10:** Ortskurve der offenen Kette fünfter Ordnung für  $k_P = 120$  (links) und  $k_P = 40$  (rechts)

Da die offene Kette stabil ist, wovon man sich durch Betrachtung des Nennerpolynoms von  $G_0(s)$  überzeugen kann, ist der Regelkreis  $\bar{\Sigma}$  entsprechend dem Nyquistkriterium genau dann stabil, wenn die Ortskurve der offenen Kette den Punkt  $-1$  nicht umschlingt. Die Abbildung zeigt jedoch, dass für  $k_P = 120$  der kritische Punkt  $-1$  umschlossen wird (vgl. Linke-Hand-Regel). Der Regelkreis  $\bar{\Sigma}$  ist also instabil.

Die Stabilitätsprüfung hätte man natürlich genauso durch Berechnung der Pole des geschlossenen Kreises oder durch Anwendung des Hurwitzkriteriums auf die charakteristische Gleichung des Regelkreises durchführen können. Dies ist jedoch in der Regel komplizierter und bezüglich der Konsequenzen für die Wahl bzw. Veränderung der Reglerverstärkung nicht so anschaulich. Bei dem Beispiel entsteht ein charakteristisches Polynom fünfter Ordnung, dessen Nullstellen man nur mit Hilfe eines Rechners bestimmen kann. Aus den

erhaltenen Polen ist nicht zu sehen, nach welcher Veränderung der Reglerverstärkung der Kreis stabil ist.

Das Nyquistkriterium ist anschaulicher. Aus Abb. 8.10 ist zu erkennen, dass der Punkt  $-1$  nicht umschlossen würde, wenn die Verstärkung  $k_P$  verkleinert wird. Dann behält die Ortskurve ihre Form, ist aber insgesamt kleiner, denn eine Verkleinerung von  $k_P$  verkleinert für jeden Punkt  $G_0(j\omega)$  der Ortskurve dessen Abstand  $|G_0(j\omega)|$  vom Ursprung der komplexen Ebene, nicht jedoch dessen Winkel  $\arg G_0(j\omega)$ .

Deshalb kann aus der Ortskurve sofort ermittelt werden, für welche Reglerverstärkung der geschlossene Kreis  $\bar{\Sigma}$  stabil ist. Dafür bestimmt man den Schnittpunkt der Ortskurve mit der negativen reellen Achse. Im Beispiel ist dies der Punkt  $-1,55$ , d. h., es gilt

$$G(j\omega_{-180^\circ}) = -1,55,$$

wobei  $\omega_{-180^\circ}$  die Frequenz bezeichnet, bei der der Frequenzgang  $G(j\omega)$  der Regelstrecke negativ reell ist. Wird nun an Stelle von  $G_0(s)$  mit  $\frac{1}{1,55}G_0(s)$  gearbeitet, so verläuft die „verkleinerte“ Ortskurve durch den kritischen Punkt  $-1$ . Diese Veränderung der Ortskurve wird erreicht, wenn an Stelle von  $k_P = 120$  mit  $\frac{k_P}{1,55} = 74,4$  als Reglerverstärkung gearbeitet wird, denn dann gilt

$$74,4 G(j\omega_s) = -1.$$

Folglich ist der geschlossene Kreis genau dann stabil, wenn die Reglerverstärkung kleiner als 74,4 ist. Als Beispiel ist im rechten Teil von Abb. 8.10 die Ortskurve für  $k_P = 40$  gezeigt. Diese Ortskurve umschlingt den kritischen Punkt nicht.  $\square$

### Beispiel 8.5 Anwendung des Nyquistkriteriums für eine instabile offene Kette

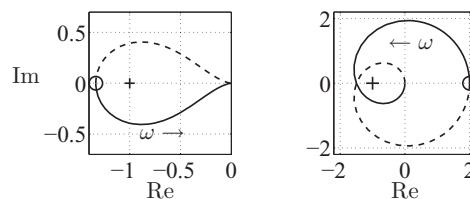
Das Nyquistkriterium soll jetzt auf die instabile offene Kette

$$G_0(s) = \frac{k_P}{(s-1)(s+3)}$$

angewendet werden. Aus der charakteristischen Gleichung  $1 + G_0(s) = 0$  erhält man das charakteristische Polynom

$$s^2 + 2s - 3 + k_P,$$

dessen Nullstellen genau dann negative Realteile haben, wenn  $k_P > 3$  gilt. Es soll jetzt untersucht werden, wie man dieses Ergebnis mit dem Nyquistkriterium erhalten kann.



**Abb. 8.11:** Ortskurve zweier instabiler offener Ketten, die zu stabilen Regelkreises führen (links: ein instabiler Pol; rechts: zwei instabile Pole)

Im linken Teil der Abb. 8.11 ist die Ortskurve  $G_0(j\omega)$  für  $k_P = 4$  grafisch dargestellt. Es wird offensichtlich, dass die gezeichnete Kurve den Punkt  $-1$  einmal entgegen dem Uhrzeigersinn umschlingt. Da die offene Kette *einen* Pol mit positivem Realteil besitzt, muss das Nyquistkriterium für  $n^+ = 1$  angewendet werden. Folglich ist der Regelkreis stabil.

Auch hier kann die Stabilitätsgrenze sofort abgelesen werden. Da die Ortskurve für  $k_P = 4$  die negative reelle Achse bei  $-\frac{4}{3}$  schneidet, ist das geregelte System für Reglerverstärkungen, die kleiner als 3 sind, instabil (vgl. Beispiel 8.4). Dieser Wert stimmt mit dem aus der charakteristischen Gleichung bestimmten Wert überein.

Der aus der offenen Kette

$$G_0(s) = \frac{6(s+1)}{(s-1)(s-3)}$$

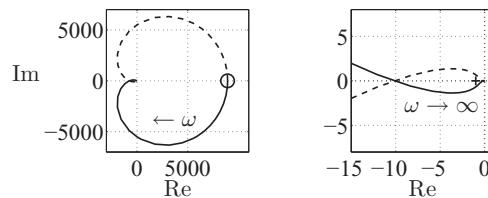
mit zwei instabilen Polen entstehende Regelkreis ist stabil, denn die Ortskurve umschlingt den Punkt  $-1$  zweimal entgegen dem Uhrzeigersinn, wie im rechten Teil von Abb. 8.11 gezeigt ist.  $\square$

### Beispiel 8.6 Stabilitätsprüfung eines Systems siebenter Ordnung

Für das System

$$G_0(s) = \frac{1000(s+0,48)(s+0,96)(s+1,44)(s+1,92)}{(s+0,1)(s+0,2)(s+0,3)(s+0,4)(s+0,5)(s+20)(s+40)} \quad (8.35)$$

erhält man eine Ortskurve, die die negative reelle Achse mehrfach schneidet. Abbildung 8.12 zeigt im linken Teil die vollständige Ortskurve, aus der man vermuten kann, dass der kritische Punkt umschlungen wird. Wie die Detaildarstellung rechts daneben jedoch zeigt, umschlingt die Ortskurve den Punkt  $-1$  nicht. Der geschlossene Kreis ist folglich stabil.  $\square$



**Abb. 8.12:** Ortskurve einer offenen Kette siebenter Ordnung (Gesamtbild (links) und Ausschnitt (rechts))

In allen genannten Umschlingungsbedingungen ist ausgeschlossen, dass die Ortskurve den Prüfpunkt durchdringt. Ein Kreuzen des kritischen Punktes würde bedeuten, dass mindestens ein Pol des geschlossenen Kreises auf der Imaginärachse liegt, so dass das System grenzstabil oder instabil ist.

### 8.5.4 Erweiterungen

**Stabilitätsprüfung für positive Systeme.** Positive Systeme  $\Sigma$  sind dadurch gekennzeichnet, dass sie bei jeder positiven Eingangsgröße ein positives Ausgangssignal erzeugen. Für ihre Gewichtsfunktion gilt

$$g(t) \geq 0. \quad (8.36)$$

Ein Beispiel ist ein Behälter, dessen Zufluss als Eingangsgröße und dessen Füllstand als Ausgangsgröße wirkt.

Ist die offene Kette  $\Sigma_0$  mit der Gewichtsfunktion  $g_0(t)$  ein stabiles positives System ( $g_0(t) \geq 0$ ), so kann das Nyquistkriterium vereinfacht werden, denn es gilt

$$|G_0(j\omega)| = \left| \int_0^\infty g_0(t) e^{-j\omega t} dt \right| \leq \int_0^\infty |g_0(t)| |e^{-j\omega t}| dt = \int_0^\infty g_0(t) dt = k_0$$

und folglich

$$|G_0(j\omega)| \leq k_0, \quad (8.37)$$

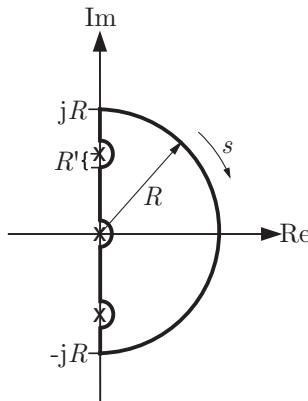
wobei  $k_0$  die statische Verstärkung der offenen Kette ist. Gilt

$$k_0 < 1, \quad (8.38)$$

so ist für jede stabile positive offene Kette  $\Sigma_0$  die Stabilität des Regelkreises  $\bar{\Sigma}$  gesichert, denn dann kann die Ortskurve  $G_0(j\omega)$  den kritischen Punkt  $-1$  nicht umschlingen. Interessanterweise ist unter der angegebenen Bedingung die Stabilität unabhängig von den genauen dynamischen Eigenschaften der positiven offenen Kette.

**Stabilitätsprüfung bei Ketten mit imaginären Polen.** Die angegebenen Stabilitätskriterien gelten auch dann, wenn die offene Kette  $\Sigma_0$  Pole auf der Imaginärachse besitzt und Totzeitelemente enthält. Für die Erweiterung auf rein imaginäre Pole wird das konjugiert komplexe Paar  $s_1, s_2 = \pm j\omega_0$  betrachtet. Die Abbildung  $F(\pm j\omega_0)$  hat dort einen unendlich großen Betrag. Deshalb wird die Nyquistkurve an dieser Stelle durch einen Kreis mit dem Radius  $R'$  um die Polstellen herumgeführt (siehe Abb. 8.13). Die Abbildung bleibt dann im Endlichen, so dass ihre grafische Darstellung einen geschlossenen Linienzug ergibt. Die imaginären Polstellen liegen wie die Pole in der linken Halbebene außerhalb der Nyquistkurve und tragen nichts zur Argumentänderung  $\Delta \arg F(s)$  bei. Das Stabilitätskriterium bleibt unverändert bis auf die Tatsache, dass mit der veränderten Nyquistkurve gearbeitet wird.

Wird der Radius  $R'$  hinreichend klein gewählt, so spart die Nyquistkurve lediglich die imaginären Polstellen und eine sehr kleine Umgebung um diese herum aus. Das Stabilitätskriterium versagt also lediglich, wenn in dieser Umgebung, die theoretisch unendlich klein gemacht werden kann, ein Pol des geschlossenen Kreises liegt. Dies hat praktisch nur für den (sehr unwahrscheinlichen) Fall eine Bedeutung, dass Pole des geschlossenen Kreises mit den imaginären Polen der offenen Kette zusammenfallen.



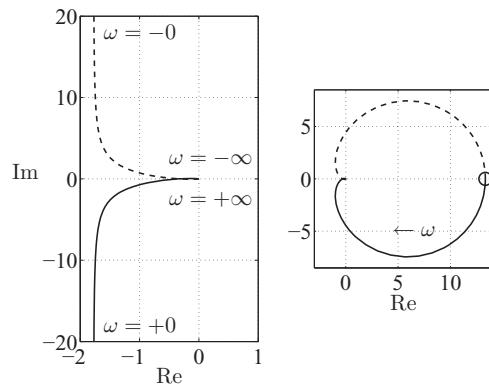
**Abb. 8.13:** Modifizierte Nyquistkurve für offene Ketten mit Polen auf der Imaginärachse

**Beispiel 8.7 Anwendung des Nyquistkriteriums für eine I-Kette**

Es wird die Stabilität eines Regelkreises  $\bar{\Sigma}$  untersucht, der aus der I-Kette

$$G_0(s) = \frac{k_P}{s(s+1)(s+3)}$$

entsteht. Die Ortskurve  $G_0(j\omega)$  ist im linken Teil der Abb. 8.14 gezeigt. Würde man die beiden Enden der Ortskurve über  $-\infty$  schließen, so wäre der kritische Punkt umschlossen. Schließt man die Ortskurve über  $+\infty$ , so ist der Punkt nicht umschlossen. Um die Frage zu beantworten, welche Vorgehensweise richtig ist, wenn man auf der in Abb. 8.13 gezeigten Weise dem Pol  $s_1 = 0$  der Kette ausweicht, kann man sich folgendes überlegen.



**Abb. 8.14:** Ortskurve einer I-Kette (links) und einer Kette mit Pol  $s_1 = -0,1$  (rechts)

Das Ausweichen des im Koordinatenursprung liegenden Pols kann man näherungsweise dadurch erreichen, dass man die Nyquistkurve in der in Abb. 8.6 (links) gezeigten Form belässt, aber den Pol  $s_1 = 0$  der offenen Kette um ein kleines Stück in die linke Halbebene verschiebt. Dann ist die Kette stabil und hat eine positive statische Verstärkung. Ihre Ortskurve beginnt auf der positiven reellen Achse, ist also rechts herum geschlossen. Der rechte Teil der Abb. 8.14 zeigt die entstehende Ortskurve für  $s_1 = -0,1$ . Mit Hilfe der Linken-Hand-Regel wird offensichtlich, dass der betrachtete Regelkreis stabil ist.

Dieses Beispiel zeigt, dass man das Nyquistkriterium für stabile offene Ketten (Satz 8.8) auch für I-Ketten anwenden kann, wenn man die Ortskurve der offenen Kette über die positive Halbebene schließt.  $\square$

**Stabilitätsprüfung bei Totzeitsystemen.** Die Erweiterung auf Totzeitsysteme erfordert einen wesentlich längeren Beweis, da die Übertragungsfunktion nicht mehr gebrochen rational ist. Es soll deshalb an dieser Stelle nur darauf hingewiesen werden, dass das Nyquistkriterium unverändert bleibt, wenn die Übertragungsfunktion  $G_0$  der offenen Kette in einen gebrochen rationalen Anteil  $\bar{G}_0(s)$  und einen Totzeitanteil  $e^{-sT_t}$  zerlegt werden kann:

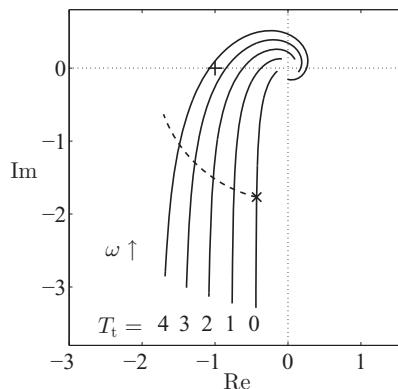
$$G_0(s) = \bar{G}_0(s) e^{-sT_t}.$$

Totzeitglieder in einem Regelkreis verursachen häufig Stabilitätsprobleme. Diese Erfahrung findet man im Nyquistkriterium sehr schnell bestätigt. Der Faktor  $e^{-sT_t}$  verändert nur die Phase von  $G_0$ , nicht jedoch den Betrag. Jeder Punkt  $\bar{G}_0(j\omega)$  der Ortskurve des totzeitfreien Systems wird also im Uhrzeigersinn auf dem Kreis um den Ursprung der komplexen Ebene mit dem Radius  $|\bar{G}_0(j\omega)|$  verschoben und zwar um den Winkel  $\omega T_t$ . Dieser Winkel ist umso größer, je größer die zu diesem Ortskurvenpunkt gehörige Frequenz  $\omega$  ist.

|| Durch Einfügen eines Totzeitgliedes mit einer hinreichend großen Totzeit  $T_t$  kann man jeden stabilen Regelkreis instabil machen.

Diese Verschiebung ist in Abb. 8.15 für eine offene Kette mit I-Verhalten zu sehen. Die Ortskurve ist nur für einen sehr kleinen Frequenzbereich ( $\omega = 0,1 \dots 1,26$ ) gezeichnet, so dass man die Wirkung der Totzeit auch an den Verschiebungen der Anfangs- und Endpunkte der Ortskurve erkennen kann. Der eingetragene Kreis zeigt, wie der durch ein Kreuz markierte Ortskurvenpunkt bei Vergrößerung der Totzeit verschoben wird.

Offensichtlich wird der kritische Punkt  $-1$  für das totzeitfreie System nicht umschlungen, wohl aber für die offene Kette mit  $T_t = 4$ . Je größer die Totzeit ist, umso größer ist der Betrag der Ortskurve bei der Phase  $-180^\circ$ . Diese für die Anwendung des Nyquistkriteriums wichtige Tatsache ist nicht auf eine Veränderung des Betrages von  $G_0$  zurückzuführen (die das Totzeitsystem gar nicht vornehmen kann!), sondern resultiert aus einer Phasenveränderung, bei der Ortskurvenpunkte mit größerem Betrag auf die negative reelle Achse geschoben werden. Diese Überlegung gilt für viele rückgekoppelte Systeme: Wenn die Totzeit  $T_t$  zu groß wird, werden die Systeme instabil.



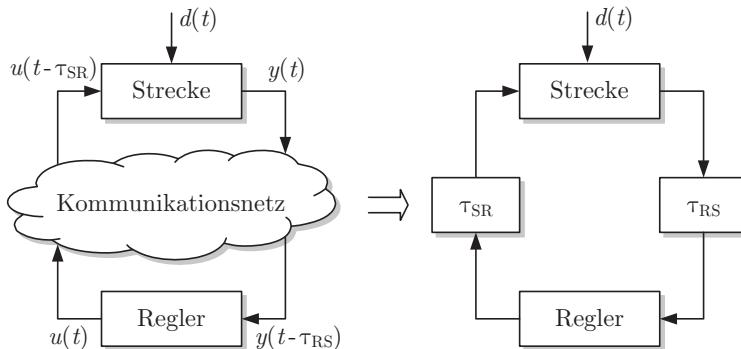
**Abb. 8.15:** Ortskurve einer I-Kette mit Totzeit  $T_t = 0 \dots 4$

Diese Erkenntnis hat auch eine sehr wichtige regelungstechnische Interpretation, denn sie zeigt die Bedeutung der Informationsrückkopplung im Regelkreis. Es genügt nicht, dass der Regler die Information über die aktuelle Regelgröße  $y$  „irgendwann“ einmal erhält, sondern er muss diese Information rechtzeitig haben, um durch eine geeignete Reaktion darauf den Regelkreis stabil halten zu können.

#### Beispiel 8.8 Stabilitätsprüfung digital vernetzter Regelungssysteme

Die zunehmende Verfügbarkeit und Zuverlässigkeit digitaler Kommunikationsnetze eröffnet für die Realisierung von Regelungen die Möglichkeit, für den Informationsaustausch zwischen der Regelstrecke und dem Regler auf derartige Netze zurückzugreifen, wodurch man auf die Installation einer speziellen Datenleitung verzichten kann. Allerdings muss man bei der in Abb. 8.16 links gezeigten Regelkreisstruktur berücksichtigen, dass das Kommunikationsnetz nicht mehr allein für Regelungsaufgaben genutzt wird und bei einem hohen Datenaufkommen für andere Anwendungen erhebliche Zeitverzögerungen für die unter Echtzeitbedingungen arbeitende Regelung verursachen kann. Der Regler kennt dann nicht mehr den aktuellen Wert  $y(t)$  der Regelgröße, sondern den um  $\tau_{RS}$  Zeiteinheiten zurückliegenden Wert  $y(t - \tau_{RS})$ . Anstelle der zur Zeit  $t$  vom Regler berechneten Stellgröße  $u(t)$  erhält das Stellglied den Wert  $u(t - \tau_{SR})$ .

Die Wirkung, die das Kommunikationsnetz auf das Verhalten des Regelkreises hat, kann man dadurch erkennen, dass man das Datennetz durch zwei Totzeitglieder ersetzt, wie es im rechten Teil von Abb. 8.16 zu sehen ist. Durch die Totzeit  $T_t = \tau_{RS} + \tau_{SR}$  erhält der Frequenzgang  $G_0(j\omega)$  der offenen Kette die zusätzliche Phasenverschiebung  $\phi_\tau(\omega) = \omega T_t$ , durch die das Kommunikationsnetz den Regelkreis instabil machen kann. Dem Vorteil der einfachen Realisierung der Informationskopplung steht also der Nachteil einer möglichen Verschlechterung der Regelgüte gegenüber. Das in der englischsprachigen Fachliteratur als *Networked control systems* bezeichnete aktuelle Forschungsthema beschäftigt sich mit der Frage, wie digital vernetzte Regelungen trotz unbekannter, sich häufig verändernder Eigenschaften des Kommunikationsnetzes entworfen werden sollen. □



**Abb. 8.16:** Realisierung einer Regelung mit Hilfe eines digitalen Kommunikationsnetzes

**Aufgabe 8.10** *Stabilitätsprüfung mit dem Nyquistkriterium*

Betrachtet wird der in Aufgabe 8.6 gegebene Regelkreis, der aus der Regelstrecke mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{2}{(5s+1)(3s+1)(s+1)}$$

und einem P-Regler mit dem Verstärkungsfaktor  $k_P$  besteht.

1. Zeichnen Sie die Ortskurven der offenen Kette für  $k_P = 3, 6, 4$  und  $7,5$ . Berechnen Sie den Schnittpunkt der Ortskurve mit der reellen Achse in Abhängigkeit von  $k_P$ .
2. Wie sieht die Ortskurve für  $k_P < 0$  aus?
3. Prüfen Sie die Stabilität des geschlossenen Kreises mit Hilfe des Nyquistkriteriums.
4. Vergleichen Sie den in Aufgabe 8.6 berechneten unteren Grenzwert für die Kreisverstärkung mit dem Wert, der sich aus der Anwendung des Nyquistkriteriums ergibt.
5. Welchen qualitativen Verlauf hat die Ortskurve, wenn an Stelle des P-Reglers ein PI-Regler verwendet wird? □

**Aufgabe 8.11\*** *Stabilitätsanalyse einer Lautsprecheranlage*

Ein Problem, das Regelungstechnisch ein Stabilitätsproblem darstellt, tritt auf, wenn bei einer Lautsprecheranlage eine Rückkopplung des ausgestrahlten Tones auf das Mikrofon auftritt, zum Beispiel bei einer Freisprechanlage im Auto oder einer Videokonferenz. Der bekannte Pfeifton entsteht, wenn die Übertragung eines Signals vom Mikrofon über die Verstärkeranlage, den Lautsprecher und den Luftweg vom Lautsprecher zum Mikrofon mit einer Verstärkung größer als eins und einer Phasedrehung von  $-180^\circ$  erfolgt (vgl. Nyquistkriterium). Da Verstärkung und Phasendrehung von der Länge  $d$  des Luftweges, der als Totzeitglied mit entfernungsabhängiger Verstärkung aufgefasst werden kann, bestimmt wird, kann man bekanntlich die Rückkopplung dadurch verändern, dass man das Mikrofon gegenüber dem Lautsprecher abschirmt (kleinere Kreisverstärkung) oder die Entfernung zwischen Lautsprecher und Mikrofon verändert (Veränderung von Verstärkung und Phasenverschiebung). In dieser Aufgabe soll die Stabilität des Systems in Abhängigkeit von der Entfernung  $d$  untersucht werden.

Mikrofon, Verstärker und Lautsprecher werden als PT<sub>1</sub>-Glieder mit folgenden Verstärkungsfaktoren und Grenzfrequenzen beschrieben:

$$\text{Mikrofon: } k_M = 0,02 \frac{\text{Vm}^2}{\text{N}} \quad \omega_M = 60\,000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\text{Verstärker: } k_V = 1\,000 \quad \omega_V = 125\,000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\text{Lautsprecher: } k_L = 1 \frac{\text{N}}{\text{Vm}^2} \quad \omega_L = 60\,000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Das Totzeitglied hängt von der Entfernung  $d$  zwischen Lautsprecher und Mikrofon ab. Die Schallgeschwindigkeit wird mit  $v_s = 335 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  angenommen. Der Schalldruck nimmt quadratisch mit der Entfernung  $d$  ab, wobei angenommen wird, dass sich aufgrund der Geometrie des Lautsprechers der Schalldruck bei einer Entfernung von 5 Metern halbiert hat.

1. Zeichnen Sie das Blockschaltbild der Anlage. Aus welchen Elementen besteht die offene Kette  $\Sigma_0$ ?
2. Stellen Sie die Übertragungsfunktion der offenen Kette auf.
3. Ermitteln Sie, für welchen Mikrofon-Lautsprecher-Abstand das System instabil ist und folglich der Pfeifton auftritt.
4. Dasselbe Problem tritt auf, wenn ein Rundfunksender ein Gespräch mit einem Hörer sendet und der Hörer sein Radio neben dem Telefonhörer stehen hat. Aufgrund des begrenzten Übertragungsbereiches des Telefons und der kleineren Leistung des Radiolautsprechers verändern sich das für die vom Lautsprecher abgestrahlte Leistung wichtige Produkt  $k_V k_L$  sowie die Grenzfrequenz des Mikrofons und der daran geschlossenen Übertragungsstrecke folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \text{Mikrofon: } \omega_M &= 5\,000 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ \text{Verstärker/Lautsprecher: } k_V \cdot k_L &= 10 \end{aligned}$$

Der Schalldruck halbiert sich jetzt bereits nach einer Entfernung von 1 Meter. Überprüfen Sie, ob beim Abstand  $d = 30\text{cm}$  eine instabile Rückkopplung auftritt.

5. Wodurch unterscheiden sich die Quellen der Instabilität in beiden Fällen? Diskutieren Sie die Verläufe der Ortskurve bzw. der Frequenzkennlinien in Bezug auf die Stabilitätsforderung. □

### Aufgabe 8.12\*\* PI-Regelung für eine stabile Regelstrecke

Für eine stabile Regelstrecke  $G(s)$  mit  $k_S = G(0) > 0$  soll ein PI-Regler

$$G_{\text{PI}}(s) = k_P + \frac{k_I}{s}$$

so entworfen werden, dass der Regelkreis stabil ist.

1. Zeichnen Sie den qualitativen Verlauf der Ortskurve  $G_0(j\omega)$  der offenen Kette.
2. Begründen Sie mit Hilfe des Nyquistkriteriums, dass die Stabilität des Regelkreises für beliebige stabile Regelstrecken dadurch gesichert werden kann, dass für  $k_P$  und  $k_I$  hinreichend kleine positive Werte verwendet werden. □

### 8.5.5 Phasenrandkriterium

Das im Folgenden behandelte Phasenrandkriterium geht aus einer Interpretation des Nyquistkriteriums für die Ortskurve bzw. das Bodediagramm hervor, die hier nur für den Fall besprochen wird, dass die offene Kette  $\Sigma_0$  stabil ist.

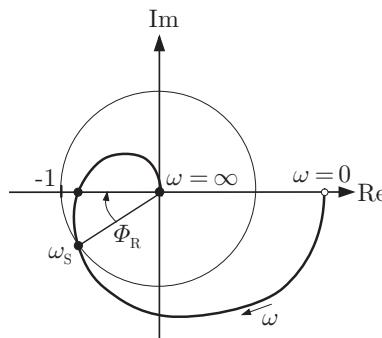
Für die Entscheidung, ob entsprechend des Nyquistkriteriums der kritische Punkt  $-1 + j0$  umschlungen wird oder nicht, ist offenbar nur der Teil des Frequenzganges maßgebend, bei dem entweder der Betrag von  $G_0(j\omega)$  gleich 1 oder der Phasengang den Wert  $-180^\circ$  erreicht. Aus diesen Gründen werden zwei Begriffe eingeführt, die den Frequenzgang in diesem Bereich charakterisieren. Unter der *Schnittpunktfrequenz*  $\omega_s$  wird eine Frequenz  $\omega$  verstanden, bei der die Amplitudenkennlinie die 0 dB-Achse schneidet, d. h., für die gilt

$$|G_0(j\omega_s)| = 1 \quad \text{bzw.} \quad |G_0(j\omega_s)|_{\text{dB}} = 0.$$

Der *Phasenrand*  $\Phi_R$  bezeichnet den Abstand der Phase  $\phi(\omega_s) = \arg G_0(j\omega_s)$  von  $-180^\circ$ :

$$\Phi_R = 180^\circ - |\phi(\omega_s)|.$$

Der Phasenrand ist also genau dann positiv, wenn die Schnittpunktfrequenz  $\omega_s$  betragsmäßig kleiner als  $180^\circ$  ist.



**Abb. 8.17:** Phasenrand einer Ortskurve

Betrachtet man eine offene Kette, deren Ortskurve den Einheitskreis nur einmal schneidet, so muss nach dem Nyquistkriterium der Schnittpunkt im dritten Quadranten der komplexen Ebene liegen (Abb. 8.17). Das heißt:

**Satz 8.9 (Phasenrandkriterium)**

Eine stabile offene Kette  $\Sigma_0$ , deren Phasengang nur eine Schnittpunktfrequenz  $\omega_s$  besitzt, führt genau dann auf einen E/A-stabilen Regelkreis  $\bar{\Sigma}$ , wenn der Phasenrand positiv ist.

Im Bodediagramm heißt das, dass bei der Frequenz  $\omega_s$ , bei der der Amplitudengang die 0 dB-Achse schneidet, der Phasengang  $-180^\circ$  noch nicht unterschritten haben darf (Abb. 8.17 und Abb. 8.18).

Die Bedingung des Phasenrandkriteriums, dass der Amplitudengang die 0 dB-Achse nur einmal schneidet, ist bei I- und P-Ketten meistens erfüllt. Durch diese Annahme werden jedoch D-Ketten ausgeklammert (vgl. Aufgabe 8.14).

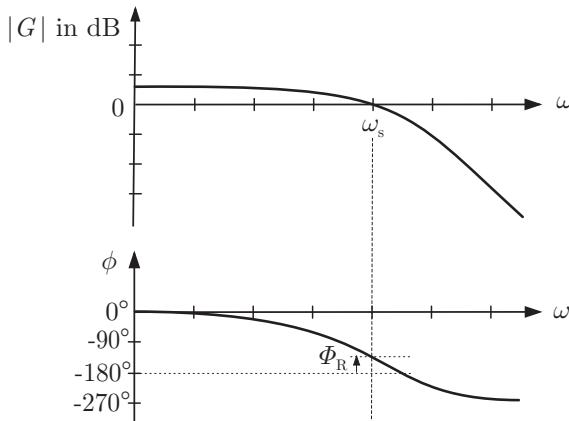


Abb. 8.18: Phasenrand im Bodediagramm

Neben der Tatsache, dass ein positiver Phasenrand der offenen Kette einen stabilen Regelkreis kennzeichnet, sagt die Größe des Phasenrandes etwas über das Übergangsverhalten des Regelkreises aus. Damit das Übergangsverhalten in akzeptabler Zeit abklingt, darf der Phasenrand nicht nur positiv sein, sondern sollte im Intervall

für gutes Übergangsverhalten:  $\Phi_R = 30^\circ \dots 60^\circ$

liegen.

**Phasenrandkriterium für Totzeitsysteme.** Beim Phasenrandkriterium wird die Wirkung von Totzeitgliedern auf die Stabilitätseigenschaft rückgeführter Systeme besonders deutlich. Die offene Kette sei durch

$$G_0(j\omega) = \bar{G}_0(j\omega) e^{-j\omega T_t}$$

beschrieben, wobei das totzeitfreie System  $\bar{G}_0(j\omega)$  auf den Phasenrand  $\bar{\Phi}_R$  führt. Da das Totzeitsystem nur die Phase von  $G_0(j\omega)$ , nicht jedoch die Amplitude beeinflusst, verändert es den Phasengang nach unten, ohne den Amplitudengang zu beeinflussen (vgl. Abb. 8.18). Die Schnittfrequenz bleibt dieselbe, aber die bei dieser Schnittfrequenz auftretende Phase ist kleiner. Totzeitglieder verkleinern den Phasenrand und

führen zu instabilen Regelkreisen, wenn die Phasenveränderung größer als der Phasenrand ist.

Welche Beschränkungen sich aus der Totzeit  $T_t$  für den totzeitfreien Anteil  $\bar{G}_0(j\omega)$  ergeben, geht aus folgender Abschätzung hervor: Schneidet der Amplitudengang die 0 dB-Achse mit einer Neigung von  $-20 \text{ dB/Dekade}$ , so führt das totzeitfreie System auf eine Phasenverschiebung von etwa  $-90^\circ$ . Liegt die Schnittfrequenz bei  $\omega_s = \frac{1}{T_t}$ , so verschiebt das Totzeitglied die Phase dort um  $-1 \text{ rad} = -57^\circ$ , so dass ein Phasenrand von  $\Phi_R = 180^\circ - 90^\circ - 57^\circ = 33^\circ$  entsteht, den man für einen Regelkreis mindestens fordern sollte, um neben der Stabilität auch noch ein schnelles Einstellungsverhalten zu erzielen (vgl. S. 520). Tritt also in der offenen Kette die Totzeit  $T_t$  auf, so sollte die Schnittfrequenz des totzeitfreien Anteils  $\bar{G}_0(j\omega)$  der offenen Kette die Bedingung

$$\omega_s < \frac{!}{T_t} \quad (8.39)$$

erfüllen. Diese Bedingung zeigt, wie eine Totzeit in der Regelstrecke die Freiheiten in der Gestaltung der offenen Kette durch den Regler einschränkt.

**Amplitudenrand.** In ähnlicher Weise kann der Spielraum bestimmt werden, in dem die Verstärkung der offenen Kette  $\Sigma_0$  verändert werden kann, bis der Regelkreis  $\bar{\Sigma}$  instabil wird. Dieser Wert wird *Amplitudenrand*  $k_R$  bezeichnet.

Dazu bestimmt man die Amplitude  $|G_0(j\omega)|$  für diejenige Frequenz  $\omega_{-180^\circ}$ , für die die Phasenverschiebung  $-180^\circ$  beträgt. Entsprechend dem Phasenrandkriterium ist diese Verstärkung kleiner als eins. Der Kehrwert

$$k_R = \frac{1}{|G_0(j\omega_{-180^\circ})|}$$

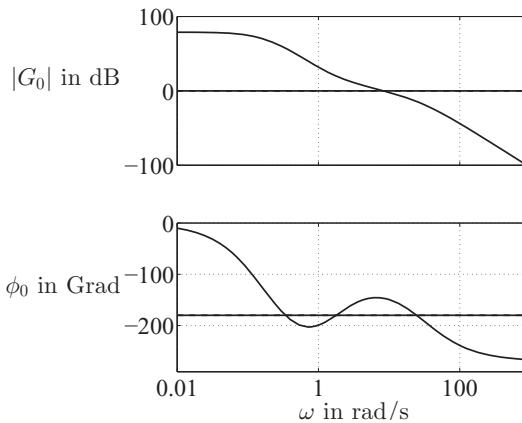
gibt an, um welchen Faktor die Kreisverstärkung angehoben werden darf, ohne dass der Regelkreis instabil wird. Dieser Wert stimmt übrigens mit dem überein, den man aus dem Schnittpunkt der Ortskurve mit der negativen reellen Achse erhält (vgl. Diskussion der Wahl der Reglerverstärkung in den Beispielen 8.3 – 8.5).

### Beispiel 8.9 Phasenrand des Systems (8.35)

Das Bodediagramm der offenen Kette (8.35) ist in Abb. 8.19 dargestellt. Offensichtlich besitzt die offene Kette einen positiven Phasenrand, so dass der geschlossene Kreis stabil ist. Der Verlauf der Phase begründet, warum die Ortskurve, wie im Beispiel 8.6 gezeigt, die negative reelle Achse mehrfach schneidet. Für die „entscheidende“ Frequenz  $\omega = \omega_s$  ist die Phasenverschiebung kleiner als  $-180^\circ$ .  $\square$

### Aufgabe 8.13\* Lageregelung von Raumflugkörpern

Einige Raumflugkörper oder Experimente in Raumflugkörpern werden von der Erde aus gesteuert. Um die dabei auftretenden Stabilitätsprobleme untersuchen zu können, wird vereinfachend angenommen, dass der Raumflugkörper oder der Roboterarm wie ein  $\text{PT}_1$ -Glied



**Abb. 8.19:** Bodediagramm eines Systems mit positivem Phasenrand

mit der Zeitkonstante  $T_1$  (in der Größenordnung von 30 Sekunden) auf Stelleingriffe reagiert und der Mensch im Kontrollzentrum auf der Erde wie ein I-Regler mit der Nachstellzeit  $T_1$  arbeitet. Um die Stellsignale und die aktuellen Werte der Regelgröße zwischen der Kontrollstation und dem Flugkörper zu übermitteln, tritt für jede Strecke eine Totzeit  $T_t$  (in der Größenordnung von 10 Sekunden) auf.

Unter welcher Bedingung ist der Regelkreis  $\bar{\Sigma}$  stabil? Wie muss man die Regelungsstruktur verändern, damit diese Stabilitätsprobleme nicht auftreten können?  $\square$

**Aufgabe 8.14\*** *Phasenrandkriterium bei D-Ketten*

Zeichnen Sie die Ortskurve und das Bodediagramm der D-Kette

$$G_0(s) = \frac{0,0005s^3}{(s + 0,1)^8} \quad (8.40)$$

und kennzeichnen Sie den Phasenrand und den Amplitudenrand.  $\square$

**Aufgabe 8.15** *Phasenrand stark gedämpfter Systeme*

Wie groß ist der Phasenrand, wenn der Frequenzgang der offenen Kette die Bedingung  $|G_0(j\omega)| < 1$  für alle  $\omega$  erfüllt? Wie sieht die Ortskurve eines solchen Systems aus?  $\square$

## 8.6 Robuste Stabilität

### 8.6.1 Zielsetzung

Die Stabilitätskriterien haben gezeigt, dass es nicht nur möglich ist, über die Stabilität eine Ja/nein-Entscheidung zu fällen, sondern auch den Abstand von der Stabilitätsgrenze abzuschätzen. So wird durch den Abstand der Ortskurve vom kritischen Punkt  $-1$  offenkundig, wie weit der geschlossene Kreis von einem instabilen Kreis entfernt ist. Ähnliches gilt für den Phasenrand und den Amplitudenrand.

Diese Größen charakterisieren die *Robustheit* des Regelkreises bezüglich Modellunbestimmtheiten. Genauer gesagt, beschreiben sie, wie groß Modellunbestimmtheiten werden dürfen, bevor der Regelkreis die Eigenschaft der Stabilität verliert. Dabei gilt:

|| Je größer der Phasenrand und der Amplitudenrand sind, desto größer ist die Robustheit der Stabilität des Regelkreises gegenüber Modellunsicherheiten.

Man kann sich leicht überlegen, dass diese qualitative Beschreibung zwar einige Anhaltspunkte für die Robustheit des Regelkreises vermittelt, jedoch in vielen praktischen Fällen keine Gewissheit über die Stabilität des Regelkreises gibt. Ein Phasenrand von  $60^\circ$  wird i. Allg. als Indiz für eine große Robustheit gewertet. Man vergleiche nur, wie viel kleiner die Phasenränder der im letzten Abschnitt angegebenen Beispiele waren. Bedenkt man jedoch, dass bereits die Vernachlässigung eines Messgliedes erster Ordnung für hohe Frequenzen eine Phasendrehung von  $-90^\circ$  bringen kann, so sieht man, dass dieser Phasenrand u. U. nicht ausreicht, um die Stabilität trotz Modellunbestimmtheiten zu sichern.

Im Folgenden wird untersucht, wie diese Aussagen quantifiziert werden können. Es soll ein Kriterium aufgestellt werden, mit dem geprüft werden kann, wie groß der Abstand  $|G_0(j\omega) - \hat{G}_0(j\omega)|$  des wahren Frequenzganges  $G_0$  der offenen Kette vom Frequenzgang  $\hat{G}_0$  des Modells sein darf, bevor der Regelkreis instabil wird. Dafür sind zwei Schritte notwendig. Zuerst muss ein Maß für die Differenz zwischen dem Verhalten des Modells und des realen Systems definiert werden. Danach ist ein Kriterium aufzustellen, das sich auf dieses Maß für die Modellunbestimmtheiten bezieht und prüft, ob der Regelkreis trotz dieser Modellunbestimmtheiten stabil ist.

### 8.6.2 Beschreibung der Modellunbestimmtheiten

Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass sich die wahre Übertragungsfunktion  $G(s)$  der Regelstrecke  $\Sigma_R$  um  $\delta G(s)_A$  von der Übertragungsfunktion  $\hat{G}(s)$  des Regelstreckenmodells  $\hat{\Sigma}_R$  unterscheidet:

$$G(s) = \hat{G}(s) + \delta G_A(s). \quad (8.41)$$

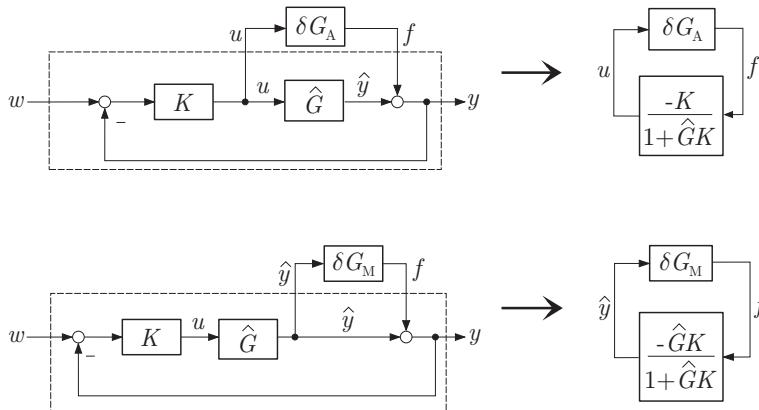
Für den Modellfehler  $\delta G$  sei eine obere Schranke  $\bar{G}_A$  bekannt, so dass

$$|\delta G_A(s)| \leq \bar{G}_A(s) \quad (8.42)$$

gilt. Da für die Stabilitätsanalyse an Stelle von  $G$  nur  $\hat{G}$  und  $\bar{G}_A$  bekannt sind, kommt für die Regelstrecke jede Übertragungsfunktion der Menge

$$\mathcal{G} = \{G(s) = \hat{G}(s) + \delta G_A(s) \mid |\delta G_A(s)| \leq \bar{G}_A(s)\} \quad (8.43)$$

in Betracht. Für einen gegebenen Regler  $K(s)$  muss deshalb die Stabilität aller Regelkreise geprüft werden, die aus dem Regler und einer Regelstrecke  $G(s) \in \mathcal{G}$  gebildet wird. Diese Regelkreise haben die im oberen Teil der Abb. 8.20 angegebene Struktur.



**Abb. 8.20:** Regelkreis mit additiver bzw. multiplikativer Modellunbestimmtheit

Da die bisher betrachteten Modellunbestimmtheiten auf eine Zerlegung der Übertragungsfunktion der Regelstrecke in die Summe (8.41) führt, wird sie auch als *additive Modellunbestimmtheit* bezeichnet. In ähnlicher Weise können *multiplikative Modellunbestimmtheiten* eingeführt werden.  $G$  wird entsprechend

$$G(s) = \hat{G}(s) (1 + \delta G_M(s)) \quad (8.44)$$

in ein Produkt der Übertragungsfunktion des Näherungsmodells  $\hat{G}$  und einen Term mit den Modellunbestimmtheiten zerlegt. Für die Modellunbestimmtheiten wird eine obere Schranke  $\bar{G}_M(s)$  festgelegt, so dass

$$|\delta G_M(s)| \leq \bar{G}_M(s) \quad (8.45)$$

gilt. Die Regelstrecke besitzt folglich eine Übertragungsfunktion aus der Menge

$$\mathcal{G} = \{G(s) = \hat{G}(s) (1 + \delta G_M(s)) \mid |\delta G_M(s)| \leq \bar{G}_M(s)\}. \quad (8.46)$$

Die zugehörige Modellstruktur des Regelkreises ist im unteren Teil der Abb. 8.20 zu sehen.

Wie man zu oberen Fehlerschranken  $\bar{G}_A(s)$  bzw.  $\bar{G}_M(s)$  gelangen kann, hängt von der Anwendung ab. Typischerweise sollen durch diese Schranken Modellunbestimmtheiten abgeschätzt werden, die durch die vernachlässigte Dynamik von Stellgliedern, die vernachlässigte Verzögerung von Messgliedern oder durch Veränderungen maßgebender Regelstreckenparameter entstehen. Das folgende Beispiel verdeutlicht dies.

**Beispiel 8.10** *Modellunbestimmtheiten eines drehzahlgeregelten Gleichstrommotors*

Die Drehzahl des in Aufgabe 6.32 beschriebenen Gleichstrommotors  $\Sigma_M$  wird über ein Messglied mit der Übertragungsfunktion

$$G_m(s) = \frac{1}{0,008s + 1}$$

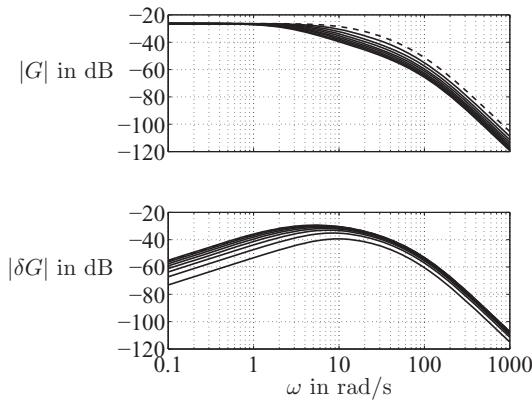
gemessen. Wenn der Motor als Last unterschiedliche Werkstücke bewegt, so wirkt die Last nicht als bremsendes Drehmoment und damit als Störgröße, sondern als Veränderung des Trägheitsmoments und folglich als Modellunbestimmtheit. Für jeden Wert aus dem Intervall  $J = 0,1, \dots, 0,5$  entsteht ein Modell mit neuen Parametern, dessen Frequenzgang deshalb als  $G(j\omega, J)$  geschrieben wird. Der Näherungswert  $\hat{J} = 0,1$  des Trägheitsmoments entspricht dem Wert, für den die Regelung entworfen wurde:

$$\hat{G}(j\omega) = G(j\omega, \hat{J}).$$

Für alle anderen Parameter tritt ein Modellfehler

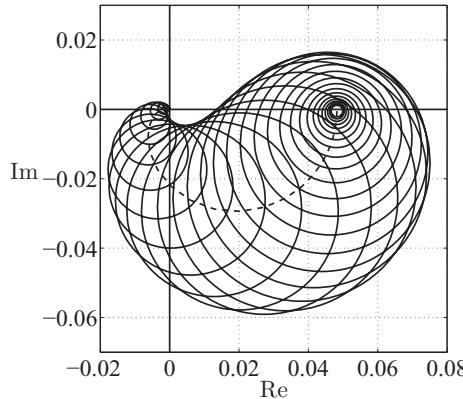
$$\delta G_A(j\omega, J) = G(j\omega, J) - \hat{G}(j\omega)$$

auf, der ebenfalls von  $J$  abhängt. Für die obere Fehlerschranke  $\bar{G}_A(j\omega)$ , die von  $J$  unabhängig sein soll, muss Gl. (8.42) gelten.



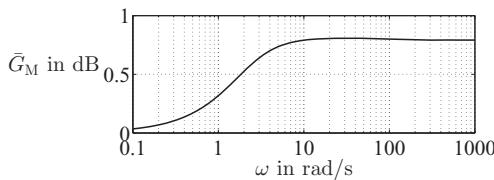
**Abb. 8.21:** Modell des Gleichstrommotors bei verändertem Trägheitsmoment  
 $J$

Der obere Teil von Abb. 8.21 zeigt, wie sich der Amplitudengang von  $G(j\omega, J)$  für  $J = 0,1, \dots, 0,5$  verändert. Die oberste, gestrichelt dargestellte Kurve ist das Näherungsmo dell  $\hat{G}(j\omega)$ . Aufgrund des logarithmischen Maßstabs, in dem der Betrag des Frequenzgan ges aufgetragen ist, kann die Fehlerschranke nicht aus diesem Diagramm abgelesen werden, sondern es muss die im unteren Teil der Abbildung gezeigte Differenz  $G(j\omega, J) - \hat{G}(j\omega)$  be trachtet werden. Der obere Rand dieser Kurvenschar ist eine obere Fehlerschranke  $\bar{G}_A(j\omega)$ .



**Abb. 8.22:** Toleranzband für die Ortskurve des Gleichstrommotors

Für die Ortskurven der Systeme, die zur Menge aus Gl. (8.43) gehören, kann man ein Toleranzband konstruieren, indem man um alle Ortskurvenpunkte  $\hat{G}(j\omega)$  einen Kreis mit dem Radius  $\bar{G}_A(j\omega)$  schlägt. Dieses Ortskurvenband ist in Abb. 8.22 zu sehen.



**Abb. 8.23:** Fehlerschranke  $\bar{G}_M(j\omega)$  für das Regelstreckenmodell

Man kann auch den relativen Fehler des Gleichstrommotors ausrechnen, wenn man anstelle der Gl. (8.41) die Zerlegung (8.44) verwendet. Für das angegebene Intervall des Trägheitsmoments erhält man eine obere Fehlerschranke  $\bar{G}_M(s)$ , deren Amplitudengang in Abb. 8.23 dargestellt ist. Obwohl das Trägheitsmoment auf den fünfachen Wert ansteigt, ist der relative Fehler kleiner als eins. Die Abbildung zeigt außerdem, dass der Fehler sehr stark mit der Frequenz steigt. Das statische Verhalten des Motors ist sogar unabhängig von  $J$  (warum?).  $\square$

### 8.6.3 Nachweis der robusten Stabilität

Die Modellunbestimmtheit, die einen Block der in Abb. 8.20 gezeigten Regelkreise darstellt, kann zur Instabilität des Regelkreises führen, auch wenn der aus  $K$  und  $\hat{G}$  gebildete Kreis stabil ist. Dies erkennt man aus der Zusammenfassung der Kreise im rechten Teil der Abbildung. Die Übertragungsfunktion  $\delta G_A$  bzw.  $\delta G_M$  bildet mit dem Rest des Regelkreises eine Rückführschaltung, die bei „ungünstigen“ Eigenschaften der Modellunsicherheit Instabilität verursacht.

Im Folgenden wird untersucht, wie die Stabilität des Regelkreises für alle Übertragungsfunktionen der Menge  $\mathcal{G}$  gesichert werden kann.

**Definition 8.3 (Robuste Stabilität)**

Ein Regelkreis  $\bar{\Sigma}$ , der aus dem Regler  $\Sigma_R$  mit der Übertragungsfunktion  $K(s)$  und einer durch die Menge  $\mathcal{G}$  beschriebenen Regelstrecke  $\Sigma_S$  besteht, wird robust E/A-stabil genannt, wenn alle aus  $K(s)$  und  $G(s) \in \mathcal{G}$  bestehenden Regelkreise  $\bar{\Sigma}$  E/A-stabil sind.

Bei der Prüfung der robusten Stabilität wird davon ausgegangen, dass der Regler  $\Sigma_R$  mit dem Näherungsmodell  $\hat{\Sigma}_S$  einen stabilen Regelkreis  $\bar{\Sigma}$  bildet, der Frequenzgang  $\hat{G}_0(j\omega) = \hat{G}(j\omega)K(j\omega)$  des Näherungsmodells  $\hat{\Sigma}_0$  der offenen Kette also das Nyquistkriterium erfüllt. Für die robuste Stabilität ist zu überprüfen, dass die Modellunbestimmtheiten die Ortskurve  $G_0(j\omega) = G(j\omega)K(j\omega)$  der offenen Kette  $\Sigma_0$  nicht so weit von der Ortskurve  $\hat{G}_0(j\omega)$  des Näherungsmodells  $\hat{\Sigma}_0$  verschieben können, dass sich die Umschlingung des kritischen Punktes verändert.

Da

$$G_0(j\omega) - \hat{G}_0(j\omega) = G(j\omega)K(j\omega) - \hat{G}(j\omega)K(j\omega)$$

und folglich für additive Modellunbestimmtheiten

$$|G_0(j\omega) - \hat{G}_0(j\omega)| = |\delta G_A(j\omega)K(j\omega)| \leq \bar{G}_A(j\omega)|K(j\omega)|$$

gilt, ändert sich die Anzahl der Umschlingungen nicht, solange  $|K(j\omega)|\bar{G}_A(j\omega)$  die Beziehung

$$\bar{G}_A(j\omega)|K(j\omega)| < |1 + \hat{G}_0(j\omega)|$$

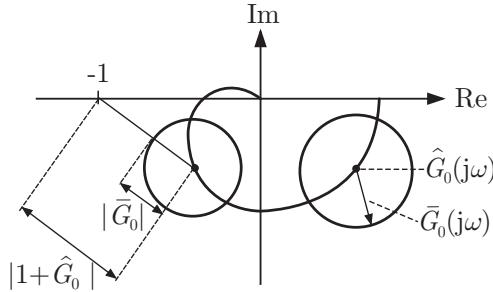
erfüllt (Abb. 8.24). Daraus erhält man die Bedingung

$$\bar{G}_A(j\omega)|K(j\omega)| < \left|1 + \hat{G}(j\omega)K(j\omega)\right|, \quad (8.47)$$

die nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig für die Stabilität aller genannter Regelkreise ist. Diese Bedingung ist äquivalent zur Forderung

Robuste Stabilität:  $\bar{G}_A(j\omega) < \left|\frac{1 + \hat{G}(j\omega)K(j\omega)}{K(j\omega)}\right|.$

(8.48)



**Abb. 8.24:** Untersuchung der robusten Stabilität

Die Bedingung (8.47) lässt sich anschaulich interpretieren. Die Ortskurve der offenen Kette  $\Sigma_0$  beschreibt den Frequenzgang

$$G_0(j\omega) = G(j\omega) K(j\omega),$$

der von der Ortskurve

$$\hat{G}_0(j\omega) = \hat{G}(j\omega) K(j\omega)$$

des Näherungsmodells  $\hat{\Sigma}_0$  für alle Frequenzen um

$$|G_0(j\omega) - \hat{G}_0(j\omega)| = |\delta G(j\omega) K(j\omega)| \leq \bar{G}_A(j\omega) |K(j\omega)|$$

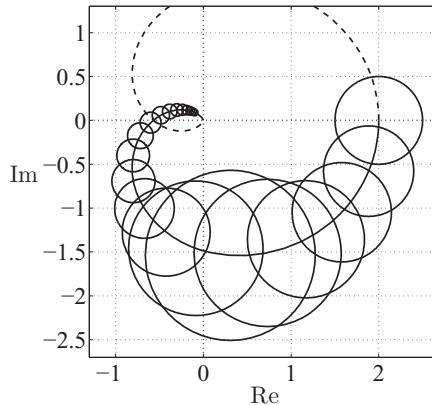
entfernt ist. Das heißt, der zu  $G_0(j\omega)$  gehörende Punkt der Ortskurve liegt in einem Kreis mit dem Radius  $\bar{G}_0(j\omega) = \bar{G}_A(j\omega) |K(j\omega)|$  um den Punkt  $\hat{G}_0(j\omega) = \hat{G}(j\omega) K(j\omega)$ . Zeichnet man alle diese Kreise um die Ortskurve  $\hat{G}_0$  der offenen Kette  $\hat{\Sigma}_0$ , so erhält man ein aus vielen Kreisen gebildetes Band von Ortskurven, für die man fordert, dass sie alle den kritischen Punkt in gleicher Häufigkeit und Richtung umschlingen. Ein solches Band ist in Abb. 8.25 für eine stabile offene Kette aufgezeichnet. Da in der Abbildung nicht nur das Näherungsmodell der offenen Kette, sondern das gesamte Band den kritischen Punkt nicht umschlingt, ist der Regelkreis  $\bar{\Sigma}$  robust stabil.

Die Bedingung (8.48) besagt, dass die Kreisverstärkung des im rechten Teil der Abb. 8.20 gezeigten Kreises kleiner als eins sein muss:

$$\left| \frac{K(j\omega)}{1 + \hat{G}(j\omega)K(j\omega)} \right| \bar{G}_A(j\omega) < 1.$$

Der linke Faktor stellt den Betrag des Frequenzganges des unteren Blockes mit Eingang  $f$  und Ausgang  $u$  dar, während  $\bar{G}_A(j\omega)$  eine obere Schranke für den Betrag des Frequenzganges des Blockes mit der Übertragungsfunktion  $\delta G(s)$  beschreibt.

Auf ähnliche Weise kann die Bedingung für robuste Stabilität bei multiplikativen Modellunbestimmtheiten angegeben werden. Hier ist zu sichern, dass die Kreise mit dem Radius



**Abb. 8.25:** Toleranzband für die Ortskurve eines Systems dritter Ordnung mit Modellunbestimmtheiten

$$|G_0(j\omega) - \hat{G}_0(j\omega)| = |\hat{G}(j\omega) K(j\omega) \delta G_M(j\omega)| \leq |\hat{G}(j\omega) K(j\omega)| \bar{G}_M(j\omega)$$

den kritischen Punkt nicht einschließen und sich demzufolge die Anzahl der Umschlingungen aller zu betrachtenden Ortskurven nicht ändert. An Stelle der Bedingung (8.48) erhält man jetzt die Forderung

Robuste Stabilität:  $\bar{G}_M(j\omega) < \left| \frac{1 + \hat{G}(j\omega)K(j\omega)}{\hat{G}(j\omega)K(j\omega)} \right|, \quad (8.49)$

die auch als

$$|\hat{T}(j\omega)| \bar{G}_M(j\omega) < 1$$

mit der komplementären Empfindlichkeitsfunktion

$$\hat{T}(j\omega) = \frac{\hat{G}(j\omega)K(j\omega)}{1 + \hat{G}(j\omega)K(j\omega)}$$

geschrieben werden kann. Der Radius der in Abb. 8.25 dargestellten Kreise ist jetzt  $|\hat{G}(j\omega) K(j\omega) \bar{G}_M(j\omega)|$ . Wie beim Vorhandensein von additiven Modellunbestimmtheiten fordert auch diese Bedingung, dass die Kreisverstärkung des im rechten Teil der Abb. 8.20 gezeigten Kreises kleiner als eins sein muss.

**Satz 8.10 (Kriterium für robuste Stabilität)**

Ist der aus der nominalen Regelstrecke  $\hat{\Sigma}_S$  mit und dem Regler  $\Sigma_R$  gebildete Regelkreis  $\hat{\Sigma}$  stabil und ist die Anzahl der Pole mit nichtnegativem Realteil für alle Regelstrecken  $G(s) \in \mathcal{G}$  dieselbe, so ist der Regelkreis  $\bar{\Sigma}$  genau dann robust stabil, wenn die Bedingung (8.48) bzw. (8.49) erfüllt ist.

Mit anderen Worten: Wenn die angegebenen Bedingungen erfüllt sind, führt der Regler  $K(s)$  nicht nur im Zusammenspiel mit dem Näherungsmodell  $\hat{G}(s)$ , sondern auch mit jeder Regelstrecke  $G(s) \in \mathcal{G}$  zu einem stabilen Regelkreis.

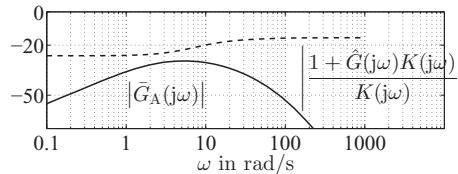
Die Bedingung (8.49) gibt quantitative Schranken für den Amplitudengang  $|\hat{G}(j\omega) K(j\omega)|$  der offenen Kette an, damit der Regelkreis trotz Änderungen im Verhalten der Regelstrecke stabil bleibt. Sie unterstreicht die auf S. 384 angegebene Richtlinie, für hohe Frequenzen durch eine geeignete Wahl des Reglers zu sichern, dass  $|\hat{G}_0(j\omega)| \ll 1$  gilt und damit zu erreichen, dass  $|T(j\omega)| \ll 1$  ist. Die Bedingung (8.49) gibt diese Vorschrift genauer wieder:  $|\hat{G}_0(j\omega)| \ll 1$  muss für alle diejenigen Frequenzen gelten, für die  $\bar{G}_M(j\omega)$  groß ist.

### Beispiel 8.11 Robustheitsanalyse der Drehzahlregelung eines Gleichstrommotors

Der in Aufgabe 6.32 beschriebene Gleichstrommotor  $\Sigma_M$  wird mit einer Drehzahlregelung

$$K(s) = 6 \left( 1 + \frac{1}{0,0777s} \right)$$

versehen. Wie man mit Hilfe des Nyquistkriteriums leicht überprüfen kann, ist der geschlossene Kreis für die im Aufgabe 6.32 angegebenen Motordaten stabil (vgl. Beispiel 11.2 auf S. 538). Es entsteht die Frage, ob der Kreis weiterhin stabil ist, wenn der Motor an unterschiedlichen Lasten betrieben wird und folglich das Modell des Motors die im Beispiel 8.10 beschriebenen Modellunbestimmtheiten aufweist. Diese Frage kann mit Hilfe der angegebenen Bedingungen für die robuste Stabilität für alle Betriebsfälle gemeinsam geprüft werden.

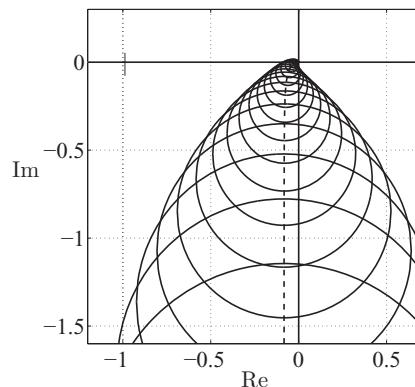


**Abb. 8.26:** Prüfung der Stabilitätsbedingung (8.48)

In Abb. 8.26 ist als durchgezogene Linie die obere Fehlerschranke  $\bar{G}_A$  aus Beispiel 8.10 aufgetragen. Diese Kurve ist entsprechend Gl. (8.48) mit dem Betrag  $\left| \frac{1+\hat{G}K}{K} \right|$  zu verglichen, der aus dem Näherungsmodell und dem Regler berechnet werden kann und als gestrichelte Linie in Abb. 8.26 eingetragen ist. Offensichtlich gilt die Ungleichung (8.48) für alle Frequenzen  $\omega$ .

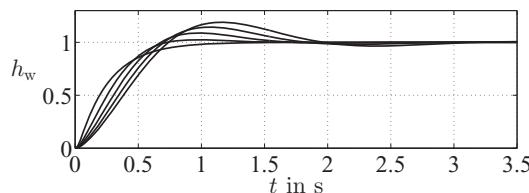
Es ist allerdings zu sehen, dass sich beide Kurven im mittleren Frequenzbereich annähern, ohne allerdings die Grenze der robusten Stabilität zu erreichen. Eine Verletzung der Bedingung (8.48) würde bedeuten, dass der Regelkreis für ein bestimmtes Trägheitsmoment aus dem gegebenen Intervall instabil ist.

Verwendet man die Interpretation des Stabilitätskriteriums entsprechend Abb. 8.24 und zeichnet das Toleranzband für die Ortskurve der offenen Kette, so erhält man Abb. 8.27.



**Abb. 8.27:** Toleranzband für die Ortskurve der offenen Kette des Motorregelkreises

Die gestrichelt dargestellte Kurve in der Mitte des Bandes ist die Ortskurve der mit dem Näherungsmodell gebildeten offenen Kette  $\hat{G}K$ , an der man die Stabilität des Regelkreises für den Nominalwert des Trägheitsmoments ablesen kann. Offensichtlich umschlingt nicht nur diese gestrichelte Kurve, sondern auch das gezeigte Toleranzband den kritischen Punkt nicht. Der Regelkreis ist also robust stabil. Für die Überprüfung der robusten Stabilität muss man dieses Toleranzband nicht zeichnen, wenn man die Gültigkeit der Ungleichung (8.48) überprüft hat. Das Band zeigt jedoch sehr anschaulich, wie sich die Stabilitätsbedingung verändert, wenn man anstelle eines Wertes für das Trägheitsmoment  $J$  mit einem Intervall für  $J$  arbeitet.



**Abb. 8.28:** Schar der Führungsübergangsfunktionen des geregelten Motors bei  $J = 0,1, \dots, 0,5$

Natürlich ändert sich das Übergangsverhalten des Regelkreises erheblich, wenn der Motor mit den unterschiedlichen Lasten betrieben wird. Abbildung 8.28 zeigt die für unterschiedliche Trägheitsmomente aus dem angegebenen Bereich berechneten Führungsübergangsfunktionen. Es ist offensichtlich, dass alle Regelkreise stabil sind, sich die Überschwingweite und die Einschwingzeit jedoch erheblich ändern. Für den Nominalwert  $J = 0,1 \frac{\text{Nm}^2}{\text{rad}}$  erreicht der Motor die Solldrehzahl ohne Überschwingen, während er für größere Trägheitsmomente erheblich überschwingt. □

**Aufgabe 8.16 Robustheitsprobleme beim Autofahren**

Beim Autofahren stellt der Chauffeur den Regler und das Auto die Regelstrecke dar.

1. Zeichnen Sie den Regelkreis.
2. Wodurch verändert sich das Verhalten des Reglers (!) und der Regelstrecke? Wie wirken sich diese Veränderungen auf die Amplitude bzw. die Phasenverschiebung dieser (als linear angenommenen) Übertragungsglieder aus?
3. Suchen Sie nach Erklärungen, warum dieser Regelkreis so robust ist, dass er mit demselben Fahrer bei unterschiedlichen Wetter- und Straßenverhältnissen und bei unterschiedlichen Fahrzeugen funktioniert.  $\square$

**Aufgabe 8.17\*\* Robustheit gegenüber einer vernachlässigten Messdynamik**

Im Näherungsmodell  $\hat{G}(s)$  der Regelstrecke wurde das Übertragungsverhalten  $G_m(s) = \frac{1}{T_m s + 1}$  des Messgliedes vernachlässigt.

1. Wie groß ist die obere Schranke  $\bar{G}_M(j\omega)$  der daraus resultierenden multiplikativen Modellumbestimmtheit? Stellen Sie den prinzipiellen Verlauf im Bodediagramm dar.
2. In welchem Bereich darf der Betrag der komplementären Empfindlichkeitsfunktion liegen, damit der Regelkreis robust stabil ist?  $\square$

**Aufgabe 8.18 Robustheit von Thermostatventilen**

Thermostatventile sind Raumtemperaturregler (vgl. Aufg. 7.9 auf S. 368). Man kann sie in vielen Baumärkten kaufen und setzt sie ein, ohne ihre Parameter vorher an die Regelstrecke (d. h. an den entsprechenden Raum und die verwendete Heizung) anzupassen. Begründen Sie, warum das geht.  $\square$

## 8.7 Stabilitätsanalyse mit MATLAB

Da sich die Stabilitätskriterien entweder auf die Eigenwerte einer Systemmatrix bzw. die Pole einer Übertragungsfunktion oder auf die Ortskurve einer offenen Kette beziehen, sind für ihre praktische Durchführung nur wenige neue Funktionen notwendig. Auf die Funktion `eig` zur Eigenwertberechnung bzw. die Funktion `nyquist` zur grafischen Darstellung der Ortskurve wurde bereits in früheren Kapiteln eingegangen.

Ist das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

einer Matrix bzw. das Nennerpolynom einer Übertragungsfunktion bekannt, so werden die Koeffizienten beginnend mit dem höchsten Index einem Vektor `p` zugewiesen. Die Eigenwerte bzw. Pole können dann mit der Funktion

» `roots(p)`

als Nullstellen des Polynoms bestimmt werden.

Bei der Anwendung des Nyquistkriteriums kann für eine gegebene offene Kette mit Hilfe der Funktionen `roots` die Anzahl  $n^+$  der instabilen Pole der offenen Kette bestimmt und mit der Funktion `nyquist` das Bodediagramm gezeichnet werden. In der grafischen Darstellung ist der kritische Punkt  $-1$  besonders markiert.

Für die Bestimmung des Amplitudenrandes und des Phasenrandes steht die Funktion

» `margin(System)`

zur Verfügung. Mit dieser Funktion wird das Bodediagramm in einem Fenster grafisch dargestellt und beide Kenngrößen markiert. Außerdem werden die Werte von Amplitudenrand und Phasenrand sowie die Frequenzen  $\omega_{-180^\circ}$  und  $\omega_s$ , bei denen sie auftreten, ausgegeben.

Für die Untersuchung der robusten Stabilität gibt es eine Sammlung spezieller Funktionen, die in der *Robust Control Toolbox* zusammengefasst sind. Die im Abschn. 8.6 angegebenen Beispiele wurden jedoch ohne größeren Aufwand ohne Verwendung dieser Toolbox erstellt. Der Leser sollte sich in Erweiterung dieses Abschnitts überlegen, welche Funktionen für die Prüfung der robusten Stabilität notwendig sind.

### Aufgabe 8.19\* Stabilitätseigenschaften von Drehrohrofen und Klinkerkühler



Beim Betrieb der im Beispiel 3.1 auf S. 43 beschriebenen Kopplung von Drehrohrofen und Klinkerkühler treten häufig große Schwankungen der Sekundärlufttemperatur auf, die man sich in grober Näherung als sinusförmige Veränderungen mit einer Periodendauer zwischen 30 Minuten und 1 Stunde vorstellen kann. Bei dieser Aufgabe sollen Sie zeigen, dass diese Schwankungen bei dem gegebenen Aufbau der Anlage zu erwarten sind.

Um die Aufgabe zu vereinfachen, werden in Abänderung des Blockschaltbildes 3.4 auf S. 44 die beiden Signale „Klinkertemperatur“ und „Klinkermassenstrom“ zu einem Signal „Klinkerenergiestrom“ zusammengefasst, das den für das Systemverhalten maßgebenden Energiefluss vom Ofen in den Kühler beschreibt. Bei konstanter Rostgeschwindigkeit und Lüfterdrehzahl kann der Kühler wie ein  $PT_1$ -Glied beschrieben werden, dessen Übergangsverhalten nach etwa 6 Minuten abgeklungen ist. Bei einer langzeitlichen Erhöhung des Klinkerenergiestromes um 15% verändert sich die bei  $950\text{ }^\circ\text{C}$  liegende Sekundärlufttemperatur  $\theta$  um 40 Kelvin.

Im Ofen beeinflusst die Sekundärlufttemperatur die Brenntemperatur. Die Veränderung der Brenntemperatur bei veränderter Sekundärlufttemperatur betrifft das Störverhalten des Temperaturregelkreises des Ofens, das als  $DT_1$ -Glied mit einer Zeitkonstante von 3 Minuten beschrieben werden kann. Würde sich die Sekundärlufttemperatur sprungförmig verändern, so würde die Brenntemperatur zunächst auch um diesen Betrag springen, dann aber aufgrund der Regelung den alten Wert annehmen.

Die Brenntemperatur beeinflusst die Klinkertemperatur und die Abwurfmenge, weil bei unterschiedlicher Temperatur der Klinker unterschiedlich schnell in Ofenrichtung rutscht. Bei einer sprungförmigen Erhöhung der Brenntemperatur geht der Klinkerabwurf zunächst zurück, erhöht sich später und nimmt stationär näherungsweise den alten Wert an. Dieses Verhalten kann durch die Übertragungsfunktion

$$G_M(s) = \frac{-2,5s^2}{(s+0,1)(s+0,2)^2} \quad (8.50)$$

dargestellt werden, die den Klinkerenergiestrom in Abhängigkeit von der Brenntemperatur beschreibt.

1. Zeichnen Sie das Blockschaltbild unter Berücksichtigung der beschriebenen Annahmen.
2. Wie lautet die Übertragungsfunktion der offenen Kette? Welchen Charakter besitzt sie?
3. Zeigen Sie anhand der mit MATLAB gezeichneten Ortskurve, dass das System an der Stabilitätsgrenze arbeitet und die auftretenden Schwankungen der Sekundärlufttemperatur folglich aus der Anlagenstruktur resultieren.
4. Berechnen Sie den Verlauf der Sekundärlufttemperatur, wenn Ofen und Kühler durch eine impulsförmige Erhöhung des Klinkerenergiestromes erregt werden. Erregungen dieser Art treten im Betrieb der Anlage durch einen sogenannten Durchbruch auf, bei dem sich eine im Ofen festgebackene Klinkermenge plötzlich löst und in den Kühler fällt.
5. Im Kühler soll eine Regelung der Sekundärlufttemperatur eingebaut werden, die die Rostgeschwindigkeit und damit die Verweilzeit des heißen Klinkers in dem für die Sekundärlufttemperatur maßgebenden Bereich des Kühlers beeinflusst. Das Kühlerverhalten bei Erhöhung des Klinkerenergiestromes entspricht dem Störverhalten dieser Regelung. Wenn die Regelung keine bleibende Regelabweichung hat, kann für das Verhalten des Kühlers bezüglich des Klinkerenergiestroms als Eingangsgröße und der Sekundärlufttemperatur als Ausgangsgröße näherungsweise ein  $DT_2$ -Verhalten angenommen werden, wobei der D-Anteil durch die Regelung bedingt ist, die bei konstanter Klinkertemperatur keine Abweichung der Sekundärlufttemperatur vom Sollwert zulässt. Die beiden verzögerten Anteile resultieren aus der bereits im ungeregelten Betrieb vorhandenen Verzögerung zwischen Klinkertemperatur und Sekundärlufttemperatur einerseits sowie der Verzögerung in der Wirkung der Regelung andererseits:

$$G_{Kr}(s) = \frac{4s}{(4s+1)(2s+1)}. \quad (8.51)$$

Kann eine solche Regelung die Schwankungen der Sekundärlufttemperatur deutlich mindern?  $\square$

#### Aufgabe 8.20 Stabilitätsprüfung mit dem Nyquistkriterium



Lösen Sie die Aufgabe 8.10 unter Verwendung von MATLAB. Untersuchen Sie dabei auch, wie sich die Ortskurve verändert, wenn Sie einen PID-Regler verwenden.  $\square$

## Literaturhinweise

Die klassischen Ergebnisse zur Stabilität dynamischer Systeme, auf die sich die Regelungstheorie noch heute bezieht, wurden u. a. 1860 von ROUTH, 1892 von LJAPUNOW und 1895 von HURWITZ in [92, 67, 46] veröffentlicht. Abschnitt 8.3 konzentriert sich auf das Hurwitzkriterium, weil dieses auch im Zeitalter der rechnergestützten Analyseprogramme noch häufig angewendet wird. Ein zweites Kriterium, das von ROUTH<sup>7</sup> und HURWITZ unabhängig voneinander angegeben und früher gleichberechtigt eingesetzt wurde, entsteht aus der Transformation der Hurwitzmatrix  $H$  in eine obere Dreiecksmatrix, wofür von ROUTH in [92] ein Tabellenverfahren angegeben wurde.

Das Kriterium von NYQUIST stammt aus dem Jahr 1932 [82]. Bereits 1928 hatte KÜPFMÜLLER in seiner Arbeit [60] zur Stabilität rückgekoppelter Filter ein ähnliches Kriterium angegeben. Eine gute Zusammenfassung des mathematischen Hintergrunds dieser Kriterien findet man in [37], neue Beweise der klassischen Ergebnisse beispielsweise in [30, 41]. Für eine ausführliche Erläuterung von Abb. 8.3 wird auf [52] verwiesen.

Die Beziehung (8.30) wurde von HSU und CHEN 1968 in [45] für Mehrgrößensysteme bewiesen.

Die robuste Stabilität von Regelkreisen ist in den letzten zwanzig Jahren ausführlich untersucht worden, wobei von unterschiedlichen Beschreibungsformen für die Modellunsicherheiten ausgegangen wurde. Eine Übersicht gibt [69], wo auch die Erweiterung der in diesem Kapitel angesprochenen Stabilitätsuntersuchungen auf die Abschätzung des E/A-Verhaltens des Regelkreises unter dem Einfluss von Modellunsicherheiten behandelt wird.

Eine Übersicht über die im Beispiel 8.8 angesprochene Stabilitätsanalyse digital vernetzter Regelungssysteme wird in [66, 73] gegeben.

---

<sup>7</sup> EDWARD JOHN ROUTH (1831 – 1907), englischer Mathematiker

# 9

## Entwurf einschleifiger Regelkreise

Dieses Kapitel gibt einen Überblick über die Entwurfsverfahren für einschleifige Regelkreise und behandelt Einstellregeln für die Bestimmung der Reglerparameter mit Hilfe experimentell ermittelter Übergangsfunktionen der Regelstrecke.

### 9.1 Allgemeines Vorgehen beim Reglerentwurf

Die im Abschn. 7.1 auf S. 345 erläuterte Reglerentwurfsaufgabe bezieht sich auf eine bereits festgelegte Regelkreisstruktur. Zu ihrer Lösung müssen folgende Entscheidungen getroffen werden:

- **Wahl der Reglerstruktur.** Es ist zu entscheiden, welcher Regler eingesetzt werden muss. Richtlinien hierfür sind im Abschn. 7.6 behandelt worden. Weitere Entscheidungskriterien ergeben sich aus dem verwendeten Entwurfsverfahren, das die Notwendigkeit für die Einführung dynamischer Elemente in das Reglergesetz zeigt.
- **Wahl der Reglerparameter.** Die Reglerparameter sind so zu wählen, dass die an den Regelkreis gestellten Gütforderungen bestmöglich erfüllt werden.

Die in den folgenden Kapiteln beschriebenen Entwurfsverfahren befassen sich mit beiden Entscheidungen. Typisch für den Reglerentwurf ist ein iteratives Vorge-

hen, bei dem diese Entscheidungen solange revidiert werden, bis ein befriedigender Regler gefunden ist.

Unabhängig vom gewählten Entwurfsverfahren sind zur Lösung einer Reglerentwurfsaufgabe folgende Schritte zu absolvieren:

---

### **Entwurfsverfahren 9.1 Lösung einer Reglerentwurfsaufgabe**

---

**Gegeben:** Modell der Regelstrecke  $\Sigma_S$   
Güteforderungen an den Regelkreis  $\bar{\Sigma}$

1. Überführen Sie die gegebenen Güteforderungen in Ersatzforderungen, die im gewählten Entwurfsverfahren direkt berücksichtigt werden können.
2. Legen Sie die Struktur und die Parameter des Reglers  $\Sigma_R$  fest.
3. Analysieren Sie das Regelkreisverhalten und bewerten Sie die Regelgüte. Sind die Güteforderungen erfüllt, ist das Entwurfsproblem gelöst. Andernfalls müssen Sie den Reglerentwurf mit Schritt 1 oder 2 fortsetzen.

**Ergebnis:** Reglergesetz  $\Sigma_R$ , mit dem der Regelkreis  $\bar{\Sigma}$  die Güteforderungen erfüllt.

---

Für den Reglerentwurf werden die gegebenen, häufig verbal formulierten Güteforderungen durch andere, mathematisch besser handhabbare Forderungen ersetzt. Beispielsweise wird an Stelle der Einschwingzeit und der Überschwingweite mit der Schnittfrequenz und Forderungen an die Steigung der Amplitudenkennlinie gearbeitet, weil diese Kenngrößen direkt aus dem Bodediagramm abgelesen werden können. Der Auswahl des Reglers schließt sich deshalb i. Allg. eine Simulationsuntersuchung des Regelkreisverhaltens an, bei der überprüft wird, inwieweit die ursprünglich gegebenen Güteforderungen erfüllt werden. Sind diese Forderungen nicht erfüllt, so wird der Reglerentwurf mit veränderten Ersatzforderungen wiederholt. Während beim Reglerentwurf mit einem linearen Regelstreckenmodell gearbeitet wird, kann in der Simulation auch ein nichtlineares Modell eingesetzt werden, das die Wirkung von Stellgrößenbeschränkungen oder wichtigen nichtlinearen Eigenschaften auf das Verhalten des Regelkreises berücksichtigt.

Die im Folgenden behandelten Entwurfsverfahren geben wichtige Anhaltspunkte dafür, wie Struktur und Parameter des Reglers  $\Sigma_R$  gewählt werden sollen. Sie lassen jedoch mehrere Möglichkeiten offen, von denen der Ingenieur die eine oder andere auswählt, um ihre Brauchbarkeit anhand einer Analyse des dabei entstehenden Regelkreises zu bewerten. Die Entwurfsverfahren sind deshalb „systematische Probierverfahren“, wenngleich sich auch an den später behandelten Beispielen herausstellen wird, dass sie die Probiermöglichkeiten gewaltig einschränken und damit zu einer schnellen Lösung der Entwurfsaufgabe beitragen.

Die große Anzahl der im Folgenden und im Band 2 entwickelten Entwurfsverfahren ist dadurch begründet, dass sich aufgrund der praktischen Randbedingungen die Regelungsaufgaben auf sehr unterschiedliche Voraussetzungen und Zielstellungen beziehen. Die einzelnen Verfahren unterscheiden sich deshalb bezüglich ihren Anforderungen an die Regelstrecke und der wichtigsten Güteforderungen an den Regelkreis. Die Übersicht im Abschn. 9.2 macht dies deutlich.

Im Folgenden wird stets vom Standardregelkreis aus Abb. 7.1 auf S. 346 ausgegangen. Wie im Kap. 13 gezeigt wird, ist es jedoch möglich, mit verallgemeinerten Rückführstrukturen zu arbeiten, die bei besonders scharfen Dynamikforderungen zum Erfolg führen können, für deren Erfüllung der Standardregelkreis zu wenige Freiheitsgrade besitzt.

## 9.2 Übersicht über die Entwurfsverfahren

**Heuristische Einstellregeln.** Viele praktische Regelungsaufgaben sind dadurch gekennzeichnet, dass kein Modell der Regelstrecke verfügbar ist und ein Regler gesucht ist, der relativ schwache Güteforderungen zu erfüllen hat. In diesem Falle wird häufig so vorgegangen, dass der Regler an die Regelstrecke angeschlossen und mit Hilfe von Experimenten nach günstigen Reglerparametern gesucht wird. Die Experimente dienen einerseits zum Kennenlernen wichtiger dynamischer Eigenschaften der Regelstrecke und andererseits zum Beurteilen des Regelkreisverhaltens mit den gewählten Reglerparametern.

Da nur schwache Güteforderungen zu erfüllen sind, kann der im Algorithmus 9.1 beschriebene längere Weg über die Modellbildung der Regelstrecke bis zum Reglerentwurf abgekürzt werden. Voraussetzung für dieses Vorgehen ist, dass die Regelstrecke stabil ist und mit der Regelstrecke experimentiert werden kann. Weiterhin muss bereits entschieden sein, welche Regelkreisstruktur verwendet und welcher Regelungstyp eingesetzt werden soll. Die Einstellregeln dienen lediglich der Wahl der Reglerparameter.

Der Vorteil der Reglereinstellung liegt darin, dass kein genaues Modell der Regelstrecke aufgestellt werden muss und damit der häufig sehr aufwändige Modellierungsschritt entfällt. Das Anwendungsgebiet ist jedoch auf relativ einfache Regelungsaufgaben beschränkt (vgl. Abschn. 9.4).

**Reglerentwurf durch Loopshaping.** Einschleifige Regelkreise werden i. Allg. dadurch entworfen, dass man die an den Regelkreis  $\bar{\Sigma}$  gestellten Güteforderungen in Forderungen an die offene Kette  $\Sigma_0$  übersetzt und dann durch eine geeignete Wahl des Reglers  $\Sigma_R$  eine offene Kette erzeugt, die diese Forderungen erfüllt. Da die offene Kette  $\Sigma_0$  (bzw. die Übertragungsfunktion der offenen Kette) dabei eine neue Form (*shape*) erhält, verwendet man für dieses Vorgehen auch den englischen Begriff *Loopshaping*.

Der Vorteil dieser Vorgehensweise resultiert aus der Tatsache, dass die Übertragungsfunktion  $G_0(s) = G(s)K(s)$  der offenen Kette  $\Sigma_0$  linear von den Über-

tragungsfunktionen  $G(s)$  und  $K(s)$  der Strecke  $\Sigma_S$  und des Reglers  $\Sigma_R$  abhängt, während die Übertragungsfunktionen des geschlossenen Kreises  $\bar{\Sigma}$  mit  $G(s)$  und  $K(s)$  in einem nichtlinearen Zusammenhang stehen (z. B.  $G_w(s) = \frac{G(s)K(s)}{1+G(s)K(s)}$ ).

Auf dieser Tatsache sind Entwurfsverfahren begründet, die die Frequenzkennlinie oder die Ortskurve der offenen Kette durch die Auswahl eines geeigneten Reglers zielgerichtet beeinflussen. Der Frequenzgang des Reglers wird aus dem Vergleich der Frequenzkennlinie der Regelstrecke und der gewünschten Frequenzkennlinie für die offene Kette ermittelt (Kap. 11).

**Reglerentwurf anhand des Pol-Nullstellen-Bildes des Regelkreises.** Im Abschn. 5.3 wurde gezeigt, dass die Ausgangsgröße eines linearen Systems in Abhängigkeit von den Modi dargestellt werden kann, die von den Eigenwerten der Systemmatrix bzw. den Polen der Übertragungsfunktion abhängig sind. Dies gilt natürlich nicht nur für die Regelstrecke, sondern auch für den Regelkreis. Die Grundidee einer Reihe von Entwurfsverfahren ist es deshalb, durch geeignete Wahl der Reglerparameter die Eigenwerte der Systemmatrix bzw. die Pole der Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises  $\bar{\Sigma}$  zielgerichtet zu beeinflussen. Es sollen Reglerparameter ausgewählt werden, für die der Regelkreis  $\bar{\Sigma}$  eine vorgegebene Menge von Polen (und Nullstellen) besitzt. Durch geeignete Vorgabe der Pole können auf diese Weise die wichtigsten dynamischen Eigenschaften des Regelkreises festgelegt werden. Liegen die Pole in der linken komplexen Halbebene, so ist der entstehende Regelkreis stabil. Liegen die Pole darüber hinaus in der Nähe der reellen Achse, so sind die Eigenschwingungen des Systems stark gedämpft.

Diese Verfahren gehen vom Zustandsraummodell oder der Übertragungsfunktion der Regelstrecke  $\Sigma_S$  aus. Sie beinhalten i. Allg. systematische Berechnungsverfahren für die Reglerparameter. Da der Zusammenhang zwischen den vorgegebenen Eigenwerten des geschlossenen Kreises  $\bar{\Sigma}$  und den in der Regelungsaufgabe festgelegten Dynamikforderungen nicht eindeutig ist, schließt sich an die Bestimmung der Reglerparameter eine Simulationsuntersuchung des geschlossenen Kreises an. Sind die Güteforderungen nicht befriedigend erfüllt, werden neue Eigenwerte des geschlossenen Kreises vorgegeben und der Berechnungsweg wird erneut durchlaufen.

Ein Verfahren für den Reglerentwurf einschleifiger Regelkreise anhand des PN-Bildes wird im Kap. 10 erläutert.

Für die Mehrgrößenregelung werden in den Kap. II-6 und II-8 weitere Entwurfsverfahren behandelt, die auf proportionale Zustandsrückführungen, proportionale Ausgangsrückführungen und dynamische Mehrgrößenregler führen.

**Parameteroptimierung des Reglers.** Sind die Güteforderungen an den Regelkreis durch ein Gütfunktional beschrieben, so kann die Aufgabe des Reglerentwurfs als Optimierungsproblem formuliert werden. So ist es beispielsweise wünschenswert, dass die Regelabweichung im zeitlichen Mittel möglichst klein ist, wobei große Abweichungen stärker bewertet werden sollen als kleine. Diese Forderung kann man gut in der Form

$$J = \int_0^{\infty} e^2(t) dt \quad (9.1)$$

darstellen. Der Wert von  $J$  wird als quadratische Regelfläche bezeichnet. Er hängt bei vorgegebener Regelstrecke und gewählter Regelkreisstruktur von den verwendeten Reglerparametern ab. Ziel des Entwurfsverfahrens ist es, den Wert des Gütekriteriums möglichst klein zu machen. Ein Verfahren zur Lösung des Optimierungsproblems

$$\min_{K(s)} J$$

wird im Abschn. 12.2.2 behandelt.

In Erweiterung der genannten Zielstellung versucht man, den Aufwand, der für die Überführung des Systems in die Gleichgewichtslage notwendig ist, in die Gütebewertung einzubeziehen. Dieses Ziel kann beispielsweise durch das Gütefunktional

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)) dt$$

ausgedrückt werden. Wie man einen optimalen Regler findet, der dieses Gütefunktional minimiert, wird in Kap. II-7 erläutert.

## 9.3 Rechnergestützter Entwurf

Die Lösung der Regelungsaufgabe umfasst viele, teilweise iterativ zu durchlaufende Schritte, bei denen ein oder mehrere Verfahren aus einer Menge verfügbarer Verfahren ausgewählt und angewendet werden. Ziel des rechnergestützten Entwurfes ist es, so viele Schritte wie möglich durch den Rechner ausführen zu lassen. Die Entwurfsaufgabe kann dann arbeitsteilig durch den Regelungstechniker und den Rechner gelöst werden.

Der Rechner kann folgende Schritte übernehmen:

- die Ausführung numerischer Operationen und die Lösung von Suchproblemen,
- die Verwaltung der Daten, die das Regelstreckenmodell, den Regler, den daraus entstehenden Regelkreis usw. beinhalten,
- die grafische Aufbereitung der Entwurfsergebnisse, z. B. die grafische Darstellung der Führungsübergangsfunktion.

Diese Schritte gehen in Bezug auf die Datenverwaltung und die Dialoggestaltung wesentlich über die Unterstützung hinaus, die der Ingenieur durch das Programm- system MATLAB erhält. Bezüglich der Anzahl und der Zuverlässigkeit der numerischen Algorithmen ist MATLAB jedoch bereits ein sehr leistungsfähiges Werkzeug.

Vom Ingenieur müssen weiterhin folgende Schritte ausgeführt werden:

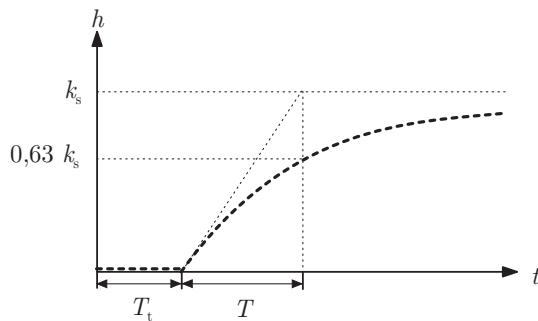
- die Aufbereitung der Aufgabenstellung in eine mit bekannten Entwurfsverfahren lösbare Form,
- die Auswahl des im nächsten Analyse- oder Entwurfsschritt anzuwendenden Verfahrens oder Algorithmus,

- die Bewertung der Entwurfsergebnisse in Bezug auf die gestellten Güteforderungen,
- die Entscheidung über den Fortgang des Entwurfs.

Heute gibt es eine größere Zahl kommerziell verfügbarer Programm pakete für den rechnergestützten Reglerentwurf. Für ihre Anwendung reicht i. Allg. ein leistungsfähiger PC.

## 9.4 Einstellregeln für PID-Regler

Dieser Abschnitt behandelt Einstellregeln, bei denen die Parameter von PID-Reglern anhand von Experimenten mit der Regelstrecke und dem Regelkreis festgelegt werden. Dieses Vorgehen hat gegenüber den später behandelten Entwurfsverfahren den Vorteil, dass kein Modell von der Regelstrecke aufgestellt werden muss. Die im Folgenden behandelten Beispiele werden jedoch zeigen, dass Einstellregeln nur dann eingesetzt werden können, wenn die Regelstrecke stabil ist, wenn sie für Experimente zur Verfügung steht und wenn die Güteforderungen keine strengen Maßstäbe an das dynamische Übergangsverhalten des Regelkreises anlegen.



**Abb. 9.1:** Übergangsfunktion eines  $PT_1T_t$ -Gliedes

**Voraussetzungen an die Regelstrecke  $\Sigma_S$ .** Viele Regelstrecken, die eine aperiodische Übergangsfunktion besitzen, kann man näherungsweise durch ein  $PT_1T_t$ -Modell

$$G(s) \approx \hat{G}(s) = \frac{k_s}{Ts + 1} e^{-sT_t} \quad (9.2)$$

beschreiben. Die drei Modellparameter  $k_s$ ,  $T$  und  $T_t$  können aus der gemessenen Übergangsfunktion abgelesen werden (Abb. 9.1).

Werden an den Regelkreis nur relativ schwache Güteforderungen gestellt, so können die Parameter von P-, PI- und PID-Reglern für diese Regelstrecken mit Hilfe

empirisch ermittelter Einstellregeln festgelegt werden. Dabei hat der Regler  $\Sigma_R$  die Übertragungsfunktion

$$K_{\text{PID}}(s) = k_P \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right).$$

Die bekanntesten sind die von ZIEGLER und NICHOLS<sup>1</sup>, die im Folgenden behandelt werden.

**Erste Einstellregel.** Das folgende Einstellverfahren verwendet das Modell (9.2) und bestimmt die Parameter aus der Übergangsfunktion der Regelstrecke.

### **Einstellverfahren 9.1** Reglereinstellung mit näherungsweiser Beschreibung der Regelstrecke

**Voraussetzungen:** Die Regelstrecke  $\Sigma_S$  ist stabil und weist näherungsweise aperiodisches Übergangsverhalten auf.

1. Bestimmen Sie durch Experimente die Übergangsfunktion der Regelstrecke  $\Sigma_S$ .
2. Approximieren Sie die Übergangsfunktion durch die eines  $PT_1T_t$ -Gliedes, indem Sie die statische Verstärkung  $k_s$ , die Totzeit  $T_t$  und die Zeitkonstante  $T$  bestimmen.
3. Legen Sie die Reglerparameter entsprechend Tabelle 9.1 (oben) fest.

**Ergebnis:** Reglerparameter für P-, PI bzw. PID-Regler.

Die in der Tabelle angegebenen Reglerparameter wurden empirisch bzw. durch Simulationsuntersuchungen so festgelegt, dass der geschlossene Kreis mit mäßigem Überschwingen schnell einschwingt.

#### **Beispiel 9.1** Einstellung einer Temperaturregelung

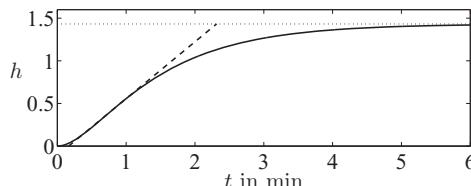
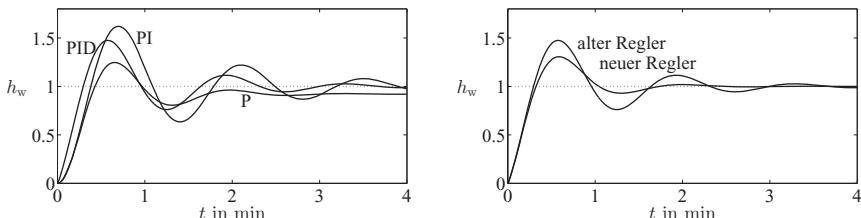
Diese Einstellregel soll am Beispiel einer Temperaturregelung demonstriert werden. Die Regelstrecke besteht aus einem kontinuierlich durchströmten Reaktor, dessen Inhalt als homogen durchmischt angenommen wird. Regelgröße ist die Temperatur der aus dem Reaktor abgezogenen Flüssigkeit. Durch Veränderung der Heizleistung sollen Störungen, die sich in Änderungen der Temperatur am Zulauf bemerkbar machen, ausgeglichen werden.

Die Übergangsfunktion der Regelstrecke ist in Abb. 9.2 gezeigt. Sie führt näherungsweise auf ein  $PT_1T_t$ -Glied mit der Totzeit  $T_t = 0,18$  min und der Verzögerungszeit  $T = 2,1$  min. Die Verzögerungen entstehen dadurch, dass die Heizung den Stahlmantel des Reaktors und die durchströmende Flüssigkeit erwärmen muss. Die statische Verstärkung beträgt  $k_s = 1,4$ .

<sup>1</sup> NATHANIEL B. NICHOLS (1914 – 1997), amerikanischer Regelungstechniker

**Tabelle 9.1.** Reglereinstellung nach ZIEGLER und NICHOLS

Voraussetzung	Regler	Reglerparameter
Approximation der Regelstrecke durch ein $PT_1T_t$ -Glied	P	$k_P = \frac{1}{k_s} \frac{T}{T_t}$
	PI	$k_P = \frac{0,9}{k_s} \frac{T}{T_t}, T_I = 3,33 T_t$
	PID	$k_P = \frac{1,2}{k_s} \frac{T}{T_t}, T_I = 2 T_t, T_D = 0,5 T_t$
Kritische Verstärkung und Periodendauer sind bekannt	P	$k_P = 0,5 k_{\text{krit}}$
	PI	$k_P = 0,45 k_{\text{krit}}, T_I = 0,85 T_{\text{krit}}$
	PID	$k_P = 0,6 k_{\text{krit}}, T_I = 0,5 T_{\text{krit}}, T_D = 0,12 T_{\text{krit}}$

**Abb. 9.2:** Übergangsfunktion der Regelstrecke**Abb. 9.3:** Führungsübergangsfunktion des Temperaturregelkreises für unterschiedliche Reglertypen (links) und für PID-Regler mit unterschiedlicher Nachstellzeit  $T_I$  (rechts)

Die Reglerparameter werden entsprechend Tabelle 9.1 (oben) eingestellt. Die Führungsübergangsfunktion ist in Abb. 9.3 (links) zu sehen. Es wurde dieselbe Zeitskala verwendet wie für die Übergangsfunktion der Regelstrecke. Wie man sieht, sind alle drei Regelkreise sehr schnell im Vergleich zur Regelstrecke. Dies ist dadurch begründet, dass in den I- und den D-Anteil des Reglers nur die Totzeit  $T_t$  eingeht, die bei diesem Beispiel wesentlich kleiner als die Zeitkonstante  $T$  ist. Das Überschwingen kann man deshalb dadurch verkleinern, dass man die Integrationszeitkonstante  $T_I$  vergrößert. Für den PID-Regelkreis

sind in Abb. 9.3 (rechts) die Führungsübergangsfunktionen für  $T_I = 2T_t$  (entsprechend der Einstellregel) sowie für  $T_I = 4T_t$  im Vergleich zueinander dargestellt.

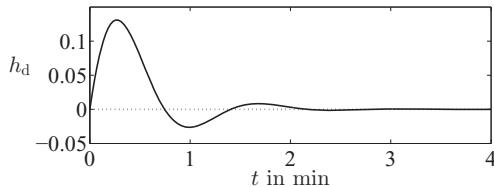


Abb. 9.4: Störübergangsfunktion des Temperaturregelkreises

**Diskussion.** Die Einstellregeln ermöglichen eine schnelle und unkomplizierte Festlegung der Reglerparameter, sie lassen es jedoch nicht zu, dass Forderungen an das dynamische Übergangsverhalten des Regelkreises bei der Wahl der Reglerparameter berücksichtigt werden. Deshalb können sie nur bei Regelkreisen verwendet werden, an die keine wesentlichen Dynamikforderungen gestellt werden. Dass man für die hier betrachtete Temperaturregelung eine viel bessere Regelung entwerfen kann, zeigt das Beispiel 12.1 auf S. 549, bei dem für dieselbe Regelstrecke ein Kompensationsregler berechnet wurde, der zu einem Regelkreis mit wesentlich schnellerer Sollwertfolge führt.

Das Regelungsziel besteht bei diesem Beispiel vor allem im Ausgleich von Störungen, also Temperaturänderungen am Zulauf. Die Güte des Regelkreises wird deshalb auch anhand der Störübergangsfunktion bewertet (Abb. 9.4). Das Überschwingen der Temperatur ist relativ klein, da die Störung nur verzögert auf die Strecke wirkt, denn eine sprungförmige Temperaturänderung am Zulauf breitet sich nur langsam auf den gesamten Reaktorinhalt aus.

Das Korrigieren der Reglerparameter nach der experimentellen Erprobung des Regelkreises ist insbesondere dann eine typische Vorgehensweise, wenn die Reglerparameter wie hier durch heuristische Regeln und nicht mit Hilfe eines „exakten“ Entwurfsverfahrens gefunden wurden. □

**Zweite Einstellregel.** Ein anderer Weg der Reglereinstellung beruht darauf, dass zunächst die Stabilitätsgrenze des proportional geregelten Systems  $\bar{\Sigma}$  experimentell ermittelt wird. Diese Methode kommt vollkommen ohne Regelstreckenmodell aus, ist jedoch nur bei Prozessen einsetzbar, die zumindest kurzzeitig an der Stabilitätsgrenze betrieben werden können.

---

**Einstellverfahren 9.2 Reglereinstellung ohne Regelstreckenmodell**


---

**Voraussetzung:** Die Regelstrecke  $\Sigma_S$  ist stabil und kann zeitweise im grenzstabilen Bereich betrieben werden.

1. Schließen Sie den Regelkreis mit Hilfe eines P-Reglers  $\Sigma_R$ .
2. Erhöhen Sie die Reglerverstärkung solange, bis der geschlossene Kreis  $\bar{\Sigma}$  nach einer Sollwertänderung eine Dauerschwingung ausführt. Bestimmen Sie die eingestellte Reglerverstärkung  $k_{\text{krit}}$  und die Periodendauer  $T_{\text{krit}}$  der Schwingung.
3. Legen Sie die Reglerparameter entsprechend Tabelle 9.1 (unten) fest.

**Ergebnis:** Reglerparameter für P-, PI- und PID-Regler.

---

Bei diesem Verfahren sind die Informationen über das Verhalten der Regelstrecke  $\Sigma_S$  implizit in den Parametern  $k_{\text{krit}}$  und  $T_{\text{krit}}$  des Regelkreises  $\bar{\Sigma}$  enthalten.

**Aufgabe 9.1\*\* Stabilitätsanalyse der nach Tabelle 9.1 eingestellten Regelkreise**

Untersuchen Sie die Stabilität von Regelkreisen, die aus einem  $PT_2$ -Glied bzw. einem  $PT_1T_t$ -Glied und einem Regler bestehen, dessen Parameter entsprechend Tabelle 9.1 gewählt werden. Unter welchen Bedingungen kann ein instabiler Regelkreis entstehen, wenn Sie außer den genannten Übertragungsgliedern auch Regelstrecken höherer Ordnung betrachten?  $\square$

## Literaturhinweise

Eine sehr ausführliche Darstellung der Entwurfsverfahren für einschleifige Regelkreise wird in [91], Kap. 7 gegeben. Darin sind insbesondere eine größere Zahl von Entwurfsverfahren für einschleifige Regelkreise beschrieben, die hier nicht behandelt werden, aber eine praktische Bedeutung haben, wenn die Regelstrecke in guter Näherung durch einfache Übertragungsglieder beschrieben werden kann.

Ferner sei auf einige Entwurfs- und Einstellverfahren hingewiesen, auf die auch in der weiterführenden Literatur, beispielsweise zur robusten Regelung, Bezug genommen wird, die für die Anwendung jedoch mit der breiten Verfügbarkeit rechnergestützter Entwurfswerkzeuge an Bedeutung verloren haben. Die Verwendung des *Nicholsdiagramms*, das einen grafischen Zusammenhang zwischen den Frequenzgängen der offenen Kette und des geschlossenen Kreises herstellt und somit zum Entwurf für direkt im Frequenzbereich formulierte Gütekriterien dient, wird in [91], Abschn. 7.3.6. erläutert. Dieses Verfahren spielte eine große Rolle, als der Entwurf noch nicht durch Rechner unterstützt werden konnte und auf grafische Verfahren besonderer Wert gelegt wurde. Für den Entwurf auf Robustheit wurde dieses Verfahren von I. M. HOROWITZ in [44] erweitert.

Da Einstellregeln für die Inbetriebnahme von Regelungen mit einfacher Regelstreckendynamik und schwachen Güteforderungen in der Praxis eine große Rolle spielen, werden sie nach wie vor ausführlich in der Literatur diskutiert. Außer den klassischen Arbeiten [23, 113] und Verbesserungsvorschlägen zu diesen wie beispielsweise [40] seien deshalb auch die neuen Arbeiten [61, 63, 88] erwähnt.

Für die praktische Durchführung der hier behandelten Entwurfsverfahren werden heute überwiegend rechnergestützte Entwurfswerkzeuge eingesetzt. Weit verbreitet ist das in diesem Buch behandelte Programm Paket MATLAB. Mit den durch dieses Programm Paket dem Ingenieur zur Verfügung gestellten Funktionen können viele Entwurfsschritte dem Rechner übertragen werden, ohne dass das Programm Paket die einzelnen Entwurfsschritte selbst vorschlägt. Dem Anwender muss bekannt sein, welche Modellformen für den Entwurf zweckmäßig sind, wie diese Modellformen miteinander kombiniert werden können und welche Analyse- und Entwurfsschritte nacheinander auszuführen sind.

Verwendet man ein rechnergestütztes Analyse- und Entwurfswerkzeug, so ist man von numerischen Betrachtungen befreit (zumindest bis zum ersten offensichtlichen Rechenfehler!). Die Gestaltung numerisch zuverlässiger Algorithmen für die beim Entwurf verwendeten Lösungsschritte wird in diesem Buch ausgeklammert, da dies ein umfangreiches Thema ist, das einer eingehenden Behandlung bedarf. Als Beispiele aus der umfangreichen Literatur zu diesem Thema wird auf [24, 85, 100] verwiesen.

# 10

## Reglerentwurf anhand des PN-Bildes des geschlossenen Kreises

Der Reglerentwurf anhand des Pol-Nullstellen-Bildes des geschlossenen Kreises beruht auf der Konstruktion der Wurzelortskurve, die die Abhängigkeit der Pole des geschlossenen Kreises von der Reglerverstärkung beschreibt. Mit Hilfe der Konstruktionsvorschriften für Wurzelortskurven können aus gegebenen Forderungen an die Lage der Pole des geschlossenen Kreises sowohl die Reglerstruktur als auch die Reglerparameter bestimmt werden.

### 10.1 Beziehungen zwischen dem PN-Bild des geschlossenen Kreises und den Güteforderungen

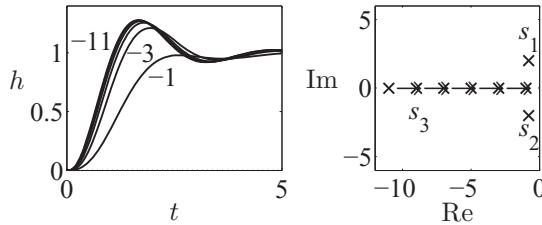
#### 10.1.1 Regelkreise mit dominierendem Polpaar

**Näherungsweise Beschreibung des Regelkreises als  $PT_2$ -Glied.** Die Idee des in diesem Kapitel beschriebenen Entwurfverfahrens besteht darin, dass dem geschlossenen Kreis  $\bar{\Sigma}$  durch die Auswahl eines geeigneten Reglers  $\Sigma_R$  bestimmte Pole zugewiesen werden. Da diese Pole das Übertragungsverhalten des Regelkreises maßgebend beeinflussen, kann auf diesem Weg ein Regler gefunden werden, der vorgegebene Güteforderungen erfüllt. Voraussetzung dafür ist jedoch, dass bekannt ist, wie die Pole des geschlossenen Kreises mit den Güteforderungen zusammenhängen.

Dieser Zusammenhang wird im Folgenden untersucht. Dabei wird angenommen, dass der geschlossene Kreis  $\bar{\Sigma}$  näherungsweise das Verhalten eines  $PT_2$ -Gliedes besitzt. Das heißt, es wird von einer Führungsübertragungsfunktion  $G_w(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)}$  ausgegangen, für die die Näherung

$$G_w(s) \approx \hat{G}_w(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2dT s + 1} \quad (10.1)$$

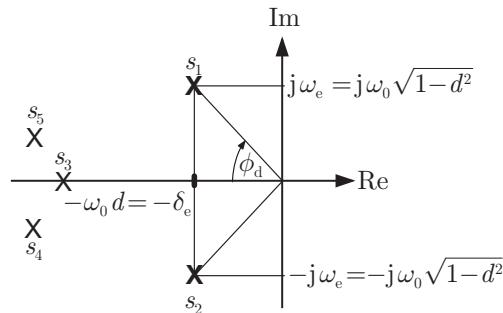
gilt. In diesem Ansatz für  $G_w(s)$  wurde – im Gegensatz zu Gl. (6.107) – der statische Übertragungsfaktor gleich eins gesetzt, weil der Regelkreis die Forderung nach Sollwertfolge erfüllen soll. Das Verhalten des  $PT_2$ -Gliedes wurde im Abschn. 6.7 ausführlich untersucht. Es ist vollständig durch die Dämpfung  $d$  und die Eigenfrequenz  $\omega_0 = \frac{1}{T}$  bestimmt.



**Abb. 10.1:** Übergangsfunktion eines Systems dritter Ordnung für unterschiedliche Lage des Pol  $s_3$

Die Approximation (10.1) ist dann besonders gut, wenn der geschlossene Kreis  $\bar{\Sigma}$  ein *dominierendes Polpaar* besitzt, d. h., wenn im PN-Bild ein konjugiert komplexes Polpaar weit rechts von allen anderen Polen liegt (Abb. 10.2). Dies wird an dem in Abb. 10.1 gezeigten Beispiel deutlich. Bei dem dort untersuchten System liegt ein dritter Pol  $s_3$  in unterschiedlicher Entfernung von einem konjugiert komplexen Polpaar  $s_{1/2} = -1 \pm j2$ . Ist die Entfernung groß, so spielt der dritte Pol eine vernachlässigbar kleine Rolle für den Verlauf der Übergangsfunktion. Schiebt man den Pol immer weiter an das konjugiert komplexe Polpaar heran, so tritt erst bei  $s_3 = -3$  eine sichtbare Veränderung der Übergangsfunktion auf. Hat der Pol denselben Realteil  $-1$  wie das Polpaar  $s_{1/2}$ , so verändert sich der Charakter der Übertragungsfunktion wesentlich.

Im Folgenden werden Beziehungen zwischen den an den Regelkreis  $\bar{\Sigma}$  gestellten Güteforderungen und der Lage der Pole des Näherungsmodells (10.2) abgeleitet. Diese Beziehungen gelten exakt nur dann, wenn das geregelte System tatsächlich ein System zweiter Ordnung ist. Sie können aber als Näherungswerte für Regelkreise höherer Ordnung verwendet werden, wobei die Approximationsgenauigkeit umso besser ist, je größer der Abstand des dominierenden Polpaares von den anderen Polen des geschlossenen Kreises ist. Obwohl der Entwurfsgedanke hier für



**Abb. 10.2:** PN-Bild eines Regelkreises mit dominierendem Polpaar

die  $PT_2$ -Approximation des Regelkreises abgeleitet wird, ist er also für Regelkreise beliebiger Ordnung anwendbar.

**Zusammenhang zwischen dem dominierenden Polpaar und dem Regelkreisverhalten.** Die Pole des Systems (10.1)

$$s_{1/2} = -\omega_0 d \pm \omega_0 \sqrt{d^2 - 1}$$

können für  $0 < d < 1$  in der Form

$$s_{1/2} = -\delta_e \pm j\omega_e$$

mit

$$\delta_e = \omega_0 d \quad \text{und} \quad \omega_e = \omega_0 \sqrt{1 - d^2}$$

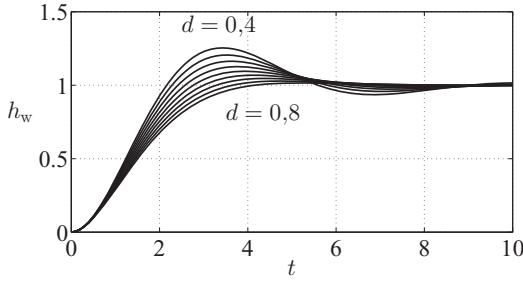
geschrieben werden. Ihre Lage in der komplexen Ebene ist durch den Winkel  $\phi_d$  gekennzeichnet, für den die Beziehung

Dämpfungsgerade:       $\cos \phi_d = d$

(10.2)

gilt (Abb. 10.2). Wenn also eine Vorgabe für die Dämpfung  $d$  – oder für die entsprechend Gl. (6.117) direkt damit zusammenhängende Resonanzüberhöhung des Führungs frequenzganges – gemacht wird, so erhält man daraus eine Forderung an den im PN-Bild ablesbaren Winkel  $\phi_d$  des dominierenden Polpaars. Häufig wird die Vorgabe nicht in einem exakten Wert für  $d$ , sondern in einer unteren Schranke  $\underline{d}$  und möglicherweise in einer oberen Schranke  $\bar{d}$  bestehen, woraus man eine obere und eine untere Schranke  $\phi_{\max}$  bzw.  $\phi_{\min}$  für  $\phi_d$  erhält, die in der komplexen Ebene zwei durch die entsprechenden Geraden eingeschlossene Sektoren für das dominante Polpaar ergeben. (Abb. 10.8).

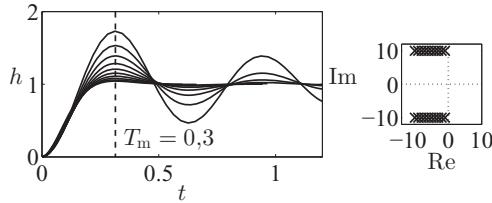
Das System hat für  $d < 1$  die Übergangsfunktion (6.114), die hier die zum Näherungsmodell  $\hat{G}_w(s)$  gehörige Führungsübergangsfunktion  $\hat{h}_w(t)$  darstellt:



**Abb. 10.3:** Führungsübergangsfunktion  $\hat{h}_w(t)$  des Regelkreises für Dämpfungsfaktor  $d = 0,4 \dots 0,8$

$$\hat{h}_w(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-d^2}} e^{-d\omega_0 t} \sin \left( \omega_0 \sqrt{1-d^2} t + \arccos d \right). \quad (10.3)$$

Typische Übergangsfunktionen dieser Art sind in Abb. 10.3 gezeigt, wobei die Dämpfung in dem für den geschlossenen Kreis wichtigen Bereich  $d = 0,4 \dots 0,8$  verändert wurde. Dies entspricht Polen, deren Winkel  $\phi_d$  im Bereich von  $\arccos 0,4 \dots 0,8 = 37^\circ \dots 66^\circ$  liegt. Eine kleine Dämpfung führt auf ein großes Überschwingen, eine große Dämpfung auf ein kleines Überschwingen.



**Abb. 10.4:** Übergangsfunktion eines Schwingungsgliedes mit Polen bei  $\omega_e = 10$  und  $\delta_e = 1, \dots, 10$

Aus Gl. (10.3) können wichtige Kenngrößen der Führungsübergangsfunktion wie die Überschwingweite und die Beruhigungszeit berechnet werden. Die Überschwingweite  $\Delta h$  erhält man aus

$$\Delta h = \hat{h}_w(T_m) - 1,$$

wobei  $T_m$  die Überschwingzeit, also den Zeitpunkt des ersten Maximums von  $\hat{h}_w(t)$  bezeichnet. Aus Gl. (10.3) folgt

$$\text{Überschwingzeit: } T_m = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-d^2}} = \frac{\pi}{\omega_e}.$$

(10.4)

Das heißt, die Überschwingzeit ist nur vom Imaginärteil des Polpaars  $s_{1/2}$  abhängig. Abbildung 10.4 illustriert diesen Sachverhalt. Die Übergangsfunktionen wurden für konstanten Wert von  $\omega_e$ , aber veränderten Wert von  $\delta_e$  gezeichnet. Alle Kurven erreichen das erste Überschwingen zur selben Zeit. Eine Verschiebung der Pole parallel zur reellen Achse verändert  $T_m$  nicht. Allerdings ist die Überschwingweite umso größer, je kleiner  $\delta_e$  ist.

Aus Gl. (10.3) erhält man auch einen Ausdruck für  $\Delta h$ :

$$\text{Überschwingweite: } \Delta h = e^{-\frac{\pi d}{\sqrt{1-d^2}}} = e^{-\frac{\delta_e}{\omega_e}\pi} = e^{-\pi \cot \phi_d}. \quad (10.5)$$

Das heißt, die Überschwingweite hängt nur vom Winkel  $\phi_d$  ab, wobei  $\Delta h$  umso größer ist, je größer  $\phi_d$  ist (Abb. 10.5). Alle Polpaare, die auf derselben in Abb. 10.2 eingezeichneten Geraden mit dem Winkel  $\phi_d$  zur reellen Achse liegen, führen auf dieselbe Überschwingweite (Abb. 10.6). Als Richtwert sollte man sich die in Abb. 10.5 markierten Punkte merken: Zu Polen mit  $\phi_d = 45^\circ$  gehört ein Überschwingen von  $\Delta h \approx 5\%$  und zu  $\phi_d = 54^\circ$  die Überschwingweite  $\Delta h \approx 10\%$ .

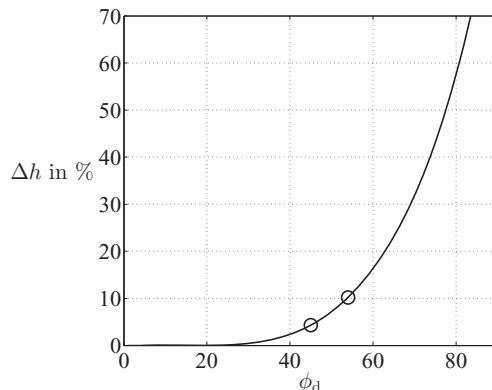
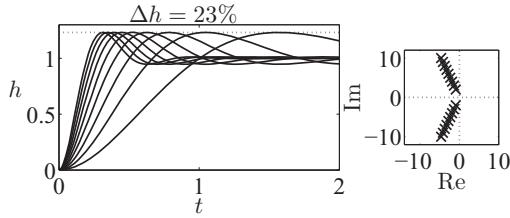


Abb. 10.5: Abhängigkeit der Überschwingweite  $\Delta h$  vom Winkel  $\phi_d$

Die Forderung, dass die Dämpfung  $d$  des geschlossenen Kreises im Bereich  $d = 0,4 \dots 0,8$  liegen soll, bedeutet also, dass die Überschwingweite bei  $\Delta h = 0,25 \dots 0,02$  liegt. Die dominierenden Pole dieser Regelkreise liegen in zwei durch  $\phi_{\min}$  und  $\phi_{\max}$  begrenzten Sektoren der linken komplexen Halbebene (Abb. 10.8). Allgemein führen zwei für die Überschwingweite gegebenen Schranken  $\underline{\Delta h}$  und  $\overline{\Delta h}$ , mit denen

$$\underline{\Delta h} \leq \Delta h \leq \overline{\Delta h}$$

gelten soll, zu einem Sektor, wobei  $\phi_{\max}$  durch  $\overline{\Delta h}$  und  $\phi_{\min}$  durch  $\underline{\Delta h}$  bestimmt wird.



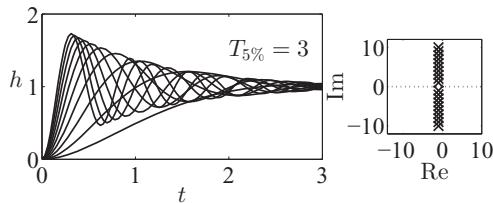
**Abb. 10.6:** Übergangsfunktion eines Schwingungsgliedes mit Polen auf den Dämpfungsgerade mit  $\phi_d = 65^\circ$

Die Beruhigungszeit  $T_{5\%}$  beschreibt den Zeitpunkt, bei dem die Übergangsfunktion  $h_w(t)$  zum letzten Mal in einen  $2 \cdot 5\%$  breiten Schlauch um den statischen Endwert eintaucht. Sie kann näherungsweise dadurch berechnet werden, dass man diejenige Zeit bestimmt, bei der die Umhüllende  $\frac{1}{\sqrt{1-d^2}}e^{-d\omega_0 t}$  der Übergangsfunktion  $\hat{h}_w(t)$  den Wert 0,05 hat. Auf diesem Wege erhält man für  $d < 0,8$  die Beziehung

$$\boxed{\text{Beruhigungszeit: } T_{5\%} \approx \frac{3}{\delta_e} = \frac{3}{d\omega_0}} \quad (10.6)$$

und für die 2%-Zeit

$$T_{2\%} \approx \frac{4,5}{\delta_e}. \quad (10.7)$$



**Abb. 10.7:** Übergangsfunktion eines Schwingungsgliedes mit Polen bei  $\delta_e = 1$  und  $\omega_e = 1, \dots, 10$

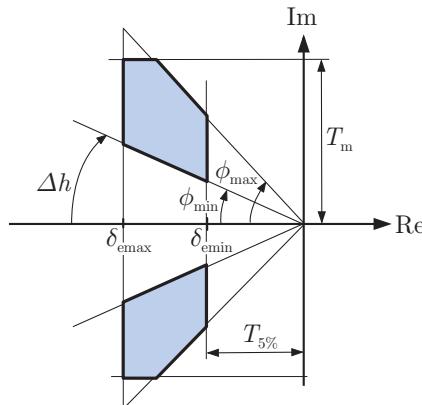
Die Beruhigungszeit hängt also nur vom Realteil  $\delta_e$  des dominierenden Polpaars ab. In der Abb. 10.7 ist das Übergangsverhalten des Schwingungsgliedes für  $\delta_e = 1$  und unterschiedliche Werte von  $\omega_e$  aufgetragen, wobei die Kurven umso schneller oszillieren, je größer  $\omega_e$  ist. Die Einschwingzeit ist aber für alle Kurven entsprechend Gl. (10.6) gleich, nämlich  $T_{5\%} \approx 3$ . Die  $T_{5\%}$ -Zeit wird am rechten Ende des Bildes erreicht.

Je weiter das Polpaar in der komplexen Ebene nach links verschoben wird, umso schneller schwingt die Führungsübergangsfunktion in den 5 %-Schlauch ein. Dabei

ist folgender Richtwert interessant: Hat das Polpaar den Realteil  $-3$ , so schwingt der Regelkreis nach etwa 1 Zeiteinheit ein ( $T_{5\%} \approx 1$ ).

**Folgerungen für den Reglerentwurf.** Aus den abgeleiteten Beziehungen wird deutlich, dass je eine Vorgabe für  $\Delta h$  und  $T_{5\%}$  (oder  $T_m$ ) die Lage des dominierenden Polpaars und folglich auch die Übertragungsfunktion  $\hat{G}_w(s)$  zweiter Ordnung eindeutig festlegt. Für eine gegebene Regelstrecke  $\Sigma_S$  muss dann nach einem Regler  $\Sigma_R$  gesucht werden, für den die Führungsübertragungsfunktion die durch  $\hat{G}_w(s)$  angegebene Form besitzt.

In der bisher behandelten Form folgt aus den Gütvorgaben genau *eine* Funktion  $\hat{G}_w(s)$ , aus der eindeutig ein Regler  $K(s)$  für die betrachtete Regelstrecke  $G(s)$  gefunden werden kann. In Anwendungen geht die Eindeutigkeit dieser Lösungsschritte allerdings aus zwei Gründen verloren. Erstens ist der Regelkreis i. Allg. nicht von zweiter Ordnung, so dass die angegebenen Beziehungen nur näherungsweise gelten und nur als mehr oder weniger gute Anhaltspunkte für den Entwurf verwendet werden können. Zweitens sind die zu erreichen Werte für die Überschwingweite und die Beruhigungszeit nicht exakt vorgegeben, sondern durch Grenzwerte charakterisiert. Aus oberen und unteren Schranken für  $\Delta h$  und  $T_{5\%}$  können dann obere und untere Schranken für  $\delta_e$  und  $\phi_d$  ermittelt werden, so dass die Entwurfsforderungen im PN-Bild durch Gebiete dargestellt sind (Abb. 10.8). Die eingetragene obere Grenze für die Frequenz  $\omega_e$  entsteht aus einer unteren Schranke für die Einschwingzeit  $T_m$ , die durch  $\phi_{\min}$  gekennzeichnete untere Schranke für die Dämpfung durch eine untere Schranke für die Überschwingweite  $\Delta h$ . Wenn es beide Schranken nicht gibt, so entsteht ein zusammenhängendes Gebiet für das dominierende Polpaar.



**Abb. 10.8:** Gebiete für die angestrebte Lage des dominierenden Polpaars des Regelkreises

Ähnliche Beziehungen können auch für andere Charakteristika des Zeitverhaltens bzw. andere Übertragungseigenschaften des Regelkreises  $\bar{\Sigma}$  abgeleitet werden.

Betrachtet man an Stelle des Führungsverhaltens das Verhalten des Regelkreises bei Störung am Regelstreckenausgang, so gilt für die Störübertragungsfunktion

$$G_d(s) = 1 - G_w(s)$$

sowie für die Störübergangsfunktion

$$h_d(t) = 1 - h_w(t).$$

Aus diesen Beziehungen ist zu erkennen, dass das Überschwingen der Störübergangsfunktion (also ein Unterschwingen unter die Zeitachse) zur selben Zeit  $T_m$  und mit derselben Amplitude  $\Delta h$  eintritt wie das Überschwingen von  $h_w(t)$  (Abb. 7.3 auf S. 348).

Bezieht man an Stelle der Übergangsfunktion die Gewichtsfunktion des Regelkreises  $\bar{\Sigma}$  in die Gütebewertung ein, so beschreibt die in gleicher Weise definierte Beruhigungszeit, von welcher Zeit ab die Gewichtsfunktion keine nennenswerte Amplitude mehr aufweist und folglich die Systemantwort auf eine impulsförmige Erregung abgeklungen ist. Die für die Gewichtsfunktion definierte Beruhigungszeit hat also etwa denselben Wert wie die Beruhigungszeit der Übergangsfunktion.

Diese Überlegungen zeigen, dass man ähnliche Gebiete für die Lage des dominierenden Polpaars erhält, wenn man die Güteforderungen nicht an die Führungsübergangsfunktion, sondern an das Störverhalten oder an das Verhalten des Regelkreises bei impulsförmiger Erregung stellt.

**„Schöne Stabilität“.** Die in Abb. 10.8 veranschaulichte Forderung an die Lage der Eigenwerte des Regelkreises weist auf eine praktisch wichtige Erkenntnis der Regelungstechnik hin: Die Stabilitätsforderung (I) ist eine Minimalforderung, die „sehr gut“ erfüllt werden muss, damit der Regelkreis brauchbar ist. Es genügt nämlich in der Praxis nicht, die Eigenwerte des geschlossenen Kreises in die linke komplexe Halbebene zu schieben. Typische Forderungen an das Regelkreisverhalten wie die hier untersuchten Forderungen nach hinreichend kurzer Überschwingzeit und akzeptablem Überschwingen schränken die Lage der (dominierenden) Pole auf relativ kleine Gebiete in der linken komplexen Halbebene ein. Um einen Regelkreis in einer für die praktische Aufgabenstellung akzeptablen Weise einzustellen, muss man also mehr tun als nur die Stabilität zu sichern. Man spricht in der Literatur deshalb auch davon, dass man eine „schöne Stabilität“ erreichen will, wobei dieser Begriff durch die Vorgabe eines Gebietes der linken komplexen Halbebene definiert ist, in dem die dominierenden (oder alle) Pole des Regelkreises liegen sollen .

Die Bedeutung, die die Stabilitätsanalyse in der Regelungstechnik hat, ist dadurch begründet, dass man für die Stabilität notwendige und hinreichende Kriterien angeben kann und aus diesen Intervalle für die Reglerparameter ausrechnen kann. Auf diesem Wege kann man zeigen, unter welchen Bedingungen die Stabilitätsforderung überhaupt erfüllbar ist, und zwischen lösbar und unlösbar Regelungsaufgaben unterscheiden. Dennoch bleibt die Stabilität eine *Minimalforderung* an den Regelkreis, die durch Forderungen an das Übergangsverhalten wesentlich verschärft wird.

**Aufgabe 10.1** Beziehung zwischen Beruhigungszeit und dominierendem Polpaar

Stellen Sie die Beziehung (10.6) grafisch dar. Welche Schlussfolgerungen ergeben sich daraus für den Reglerentwurf? □

### 10.1.2 Regelkreise mit einem dominierenden Pol

Alternativ zu den im vorhergehenden Abschnitt betrachteten Fall, dass das Regelkreisverhalten maßgebend durch ein dominierendes Polpaar bestimmt wird, gibt es Regelkreise, deren Übergangsverhalten durch einen dominierenden reellen Pol festgelegt ist. Das Führungsverhalten dieser Regelkreise lässt sich durch ein  $PT_1$ -Glied approximieren, so dass

$$G_w(s) \approx \hat{G}_w(s) = \frac{1}{Ts + 1} \quad (10.8)$$

gilt. Die Zeitkonstante  $T$  erhält man aus dem dominierenden Pol  $\bar{s}$  entsprechend der Beziehung

$$T = -\frac{1}{\bar{s}}. \quad (10.9)$$

Diese Näherung trifft vor allem bei langsam eingestellten Regelkreisen zu, insbesondere dann, wenn mit I-Reglern mit großer Integrationszeitkonstante gearbeitet wird. Stellt man die Gleichung

$$\hat{G}_w(s) = \frac{\hat{G}_0(s)}{1 + \hat{G}_0(s)} \approx \frac{1}{Ts + 1}$$

nach  $\hat{G}_0(s)$  um, so erhält man

$$\hat{G}_0(s) \approx \frac{1}{Ts}.$$

Die  $PT_1$ -Approximation des Führungsverhaltens ist also für Regelkreise angemessen, bei denen die offene Kette näherungsweise ein I-Glied darstellt. Das ist insbesondere dann der Fall, wenn die Pole der Regelstrecke  $\Sigma_S$  weit links in der linken komplexen Halbebene liegen und das Verhalten der offenen Kette  $\Sigma_0$  durch den Integratorpol dominiert wird.

Aus den in den Abschnitten 5.6.1 und 5.7.2 angegebenen Eigenschaften von  $PT_1$ -Gliedern ergeben sich folgende Konsequenzen für das Regelkreisverhalten:

Die Führungsübergangsfunktion von Regelkreisen mit einem dominierenden reellen Pol  $\bar{s}$  hat kein Überschwingen. Für die Beruhigungszeit gilt

$$T_{5\%} \approx \frac{3}{|\bar{s}|}. \quad (10.10)$$

## 10.2 Wurzelortskurve

### 10.2.1 Definition

Um durch eine geeignete Wahl der Reglerparameter Pole im geschlossenen Kreis  $\bar{\Sigma}$  zu erzeugen, die in den in Abb. 10.8 gezeigten Gebieten liegen, muss untersucht werden, wie die Pole des geschlossenen Kreises von den Reglerparametern abhängen. Für den geschlossenen Regelkreis berechnen sich die Pole als Wurzeln (Lösungen) der charakteristischen Gleichung

$$1 + G(s) K(s) = 0 \quad (10.11)$$

(vgl. Gln. (8.23) und (8.25)). Sie verändern sich mit den Reglerparametern, die in die Übertragungsfunktion  $K(s)$  des Reglers eingehen.

Aus diesen Gründen ist es sinnvoll, die Abhängigkeit der Wurzeln der charakteristischen Gleichung von den Reglerparametern explizit darzustellen. Übersichtlich ist diese Abhängigkeit nur für einen (oder zwei) Reglerparameter. Sie wird hier für den häufig auftretenden Fall untersucht, dass die Reglerverstärkung  $k$  positiv ist ( $0 \leq k \leq \infty$ ). Die Übertragungsfunktion  $K(s)$  des Reglers  $\Sigma_R$  wird deshalb in  $K(s) = k\hat{K}(s)$  zerlegt, wobei  $\hat{K}(s)$  eine Reglerdynamik darstellt. Die charakteristische Gl. (10.11) erhält dann die Form

$$1 + kG(s) \hat{K}(s) = 1 + k\hat{G}_0(s) = 0. \quad (10.12)$$

#### Definition 10.1 (Wurzelortskurve)

*Der Wurzelort ist der geometrische Ort der Wurzeln der charakteristischen Gl. (10.12) in der komplexen Ebene. Die Wurzelortskurve stellt die Abhängigkeit der Wurzelorte vom Verstärkungsfaktor  $k$  dar.*

Die Wurzelortskurve zeigt also, wie sich die Pole des geschlossenen Regelkreises  $\bar{\Sigma}$ , der aus der offenen Kette  $\Sigma_0$  mit der Übertragungsfunktion  $k\hat{G}_0(s)$  entsteht, in Abhängigkeit vom Verstärkungsfaktors  $k$  verändern.

#### Beispiel 10.1 Wurzelortskurve eines Regelkreises

Es wird eine Regelstrecke mit PT<sub>2</sub>-Verhalten betrachtet, deren Ausgangsgröße über ein Messglied mit der Zeitkonstante  $T_M = 0,15$  gemessen wird, so dass die Regelstrecke  $\Sigma_S$  durch die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{(T^2 s^2 + 2dT s + 1)(T_M s + 1)} = \frac{1}{(0,1s^2 + 0,6s + 1)(0,15s + 1)}$$

beschrieben ist. Als Regler  $\Sigma_R$  wird der PI-Regler

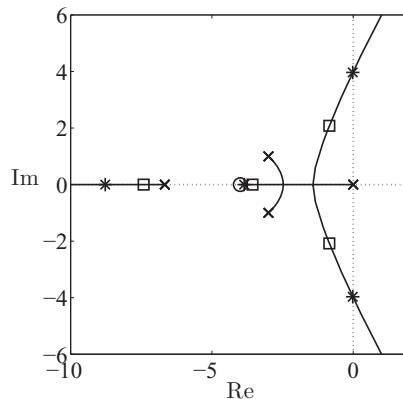
$$K(s) = k_P \left( 1 + \frac{1}{T_I s} \right) = k_P \left( \frac{T_I s + 1}{T_I s} \right) = k_P \left( \frac{0,25s + 1}{0,25s} \right)$$

eingesetzt, dessen Reglerverstärkung  $k_P$  noch festzulegen ist. Zeichnet man die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$1 + k \frac{(0,25s + 1)}{0,25s(0,1s^2 + 0,6s + 1)(0,15s + 1)} = 0 \quad (10.13)$$

(mit  $k = k_P$ ) auf, so erhält man Abb. 10.9. Für eine gegebene Reglerverstärkung beschreibt der Wurzelort die Lage der Pole des geschlossenen Kreises  $\bar{\Sigma}$  in der komplexen Ebene. Da es sich um einen Regelkreis vierter Ordnung handelt, gibt es in diesem Beispiel vier Wurzeln. Für  $k = 0 \dots +\infty$  entstehen folglich vier Kurven, die als Äste der Wurzelortskurve bezeichnet werden. Für  $k = 0,25$  sind die Wurzeln in der Abbildung durch ein Viereck markiert.

Aus der Wurzelortskurve als Ganzem kann man erkennen, wie sich die Eigenschaften des geschlossenen Kreises  $\bar{\Sigma}$  bei Veränderung der Reglerverstärkung verändern. In diesem Beispiel ist der Regelkreis für  $k = 0$  aufgrund des I-Anteils im Regler grenzstabil, denn ein Pol liegt im Koordinatenursprung. Er ist für kleine Verstärkungen stabil, z. B. für die Verstärkung  $k = 0,25$ , für die der Regelkreis die durch  $\square$  in Abb. 10.9 markierten Pole hat. Er wird instabil, sobald  $k$  den kritischen Wert  $k_{\text{krit}} = 2$  überschreitet, für den zwei Wurzelorte die Imaginärachse schneiden.  $\square$



**Abb. 10.9:** Wurzelortskurve eines Regelkreises ( $\square$  für  $k = 0,25$ , \* für  $k_{\text{krit}} = 2$ )

### 10.2.2 Eigenschaften und Konstruktionsvorschriften

In diesem Abschnitt werden Eigenschaften der Wurzelortskurve abgeleitet und Regeln angegeben, die die Konstruktion der Wurzelortskurve erleichtern. Es wird von einer Übertragungsfunktion  $G_0(s)$  der offenen Kette  $\Sigma_0$  in folgenden Darstellungsformen ausgegangen:

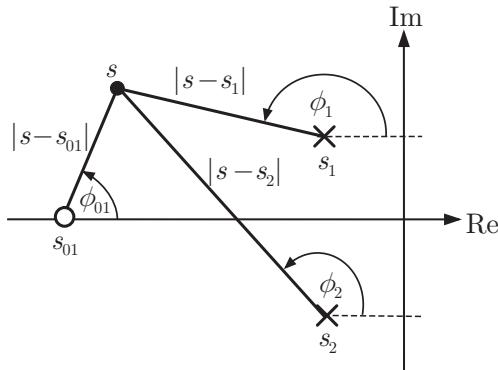
$$G_0(s) = k \hat{G}_0(s) = k \frac{s^q + b_{q-1}s^{q-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad (10.14)$$

$$= k \frac{\prod_{i=1}^q (s - s_{0i})}{\prod_{i=1}^n (s - s_i)} \quad (10.15)$$

$$= k \frac{\prod_{i=1}^q |s - s_{0i}|}{\prod_{i=1}^n |s - s_i|} e^{j(\sum_{i=1}^q \phi_{0i} - \sum_{i=1}^n \phi_i)}. \quad (10.16)$$

Dabei bezeichnen  $\phi_{0i}$  und  $\phi_i$  die Argumente der komplexen Zahlen  $s - s_{0i}$  bzw.  $s - s_i$ , also der Vektoren von den Punkten  $s_{0i}$  bzw.  $s_i$  zum Punkt  $s$ . In den Verstärkungsfaktor  $k$  gehen die Verstärkungsfaktoren der Regelstrecke und des Reglers ein, so dass im Folgenden nicht von der Reglerverstärkung, sondern allgemeiner vom Verstärkungsfaktor gesprochen wird.

Es wird vorausgesetzt, dass der Verstärkungsfaktor  $k$  positiv ist. Aus der Darstellung (10.14) geht hervor, dass auch die vor den höchsten Potenzen  $s^q$  im Zähler und  $s^n$  im Nenner stehenden Koeffizienten positiv und dass diese Faktoren gleich eins sein müssen. Wenn diese Koeffizienten nicht gleich eins sind wie beispielsweise in Gl. (10.13), so ändert dies zwar nichts am prinzipiellen Verlauf der Wurzelortskurve, aber Berechnungsvorschriften wie Gl. (10.17) für den Verstärkungsfaktor  $k$  gelten nicht mehr. Deshalb ist es zweckmäßig, die charakteristische Gleichung als erstes auf die Standardform (10.14) zu bringen, wie es für das Beispiel in Gl. (10.20) getan wird. Ist sogar einer der beiden Koeffizienten negativ, so gelten andere Konstruktionsprinzipien für die Wurzelortskurve (siehe Gl. (10.24)).



**Abb. 10.10:** Analyse der Wurzelortskurve

Aus Gl. (10.12)

$$k \hat{G}_0(s) = -1$$

folgen die

$$\text{Amplitudenbedingung: } \frac{\prod_{i=1}^q |s - s_{0i}|}{\prod_{i=1}^n |s - s_i|} = \frac{1}{|k|} \quad (10.17)$$

und die

$$\text{Phasenbedingung: } \sum_{i=1}^q \phi_{0i} - \sum_{i=1}^n \phi_i = (2l + 1)\pi, \quad (10.18)$$

wobei  $l$  eine ganze Zahl darstellt. Beide Bedingungen können geometrisch geprüft werden, wie es in Abb. 10.10 gezeigt ist. Damit ein beliebiger Punkt  $s$  der komplexen Ebene auf der Wurzelortskurve liegt, muss sein Abstand zu allen Polen und Nullstellen die Bedingung (10.17) erfüllen und die durch die Winkel  $\phi_{0i}$  und  $\phi_i$  beschriebenen Richtungen müssen der Bedingung (10.18) für einen ganzzahligen Wert von  $l$  genügen.

Die Amplituden- und Phasenbedingungen können herangezogen werden, um zu bestimmen, ob ein Punkt  $s$  der komplexen Ebene auf der Wurzelortskurve liegt oder nicht. Für die Konstruktion der Wurzelortskurve ist dieser Weg allerdings zu aufwändig. Es werden deshalb im Folgenden einige Regeln angegeben, die die Konstruktion wesentlich vereinfachen. Die Amplitudenbedingung ist jedoch auch nützlich, um für einen ausgewählten Punkt einer bekannten Wurzelortskurve die zugehörige Reglerverstärkung auszurechnen. Dafür muss man den mit Gl. (10.17) berechneten Wert in die Reglerverstärkung und einen aus der Umformung der Übertragungsfunktion in die Form (10.14) gegebenenfalls herausgezogenen Faktor aufteilen.

**Bestimmung des Parameters  $k$  für einen gegebenen Wurzelort.** Zu jedem Wert des Verstärkungsfaktors  $k$  gehört je ein Punkt auf jedem Ast der Wurzelortskurve, wobei man den zum Punkt  $s$  gehörenden Wert von  $k$  entsprechend der Amplitudenbedingung (10.17) folgendermaßen berechnen kann:

Der Punkt  $s$  auf der Wurzelortskurve entsteht für den Verstärkungsfaktor

$$k = \frac{\prod_{i=1}^n |s - s_i|}{\prod_{i=1}^q |s - s_{0i}|}. \quad (10.19)$$

Für Systeme ohne Nullstellen ( $q = 0$ ) steht im Nenner eine Eins. In die Berechnung von  $k$  gehen die Abstände des betrachteten Punktes  $s$  von allen Polen und Nullstellen ein. Wenn man die Abstände in einer grafischen Darstellung ausmessen will, müssen die reelle und die imaginäre Achse mit gleichem Maßstab gezeichnet sein, was bei Handskizzen selbstverständlich ist, bei Rechnerausdrucken aufgrund der automatischen Skalierung jedoch kontrolliert werden muss.

**Beispiel 10.2 Bestimmung der kritischen Reglerverstärkung**

Es soll der Wert der Verstärkung  $k_P$  des im Beispiel 10.1 verwendeten PI-Reglers bestimmt werden, für den zwei Pole des Regelkreises an der Stabilitätsgrenze (auf der Imaginärachse) liegen. Dafür muss zunächst die charakteristische Gleichung (10.13) in die Form (10.14) gebracht werden:

$$\begin{aligned} & 1 + k_P \frac{(0,25s + 1)}{0,25s(0,1s^2 + 0,6s + 1)(0,15s + 1)} \\ &= 1 + k_P \frac{0,25s + 1}{0,00375s^4 + 0,0475s^3 + 0,1875s^2 + 0,25s} \\ &= 1 + k_P \underbrace{\frac{0,25}{0,00375}}_k \frac{s + 4}{s^4 + 12,67s^3 + 50s^2 + 66,67s} = 0. \end{aligned} \quad (10.20)$$

Der mit Gl. (10.19) berechenbare Faktor  $k$  stellt also den Ausdruck

$$k = k_P \frac{0,25}{0,00375} = 66,67k_P$$

dar. Aus Abb. 10.11 liest man näherungsweise folgende Abstände des durch einen Stern markierten Punktes  $s$  auf der Imaginärachse von den vier Polen und der Nullstelle ab:

$$\begin{aligned} |s - s_1| &= 4,0, & |s - s_2| &= 4,3 \\ |s - s_3| &= 6,1, & |s - s_4| &= 8,0 \\ |s - s_{01}| &= 6,0. \end{aligned}$$

Damit erhält man aus Gl. (10.19)

$$k_{\text{krit}} = \frac{\prod_{i=1}^4 |s - s_i|}{|s - s_{01}|} \approx \frac{4,0 \cdot 4,3 \cdot 6,1 \cdot 8,0}{6,0} = 139,89$$

und für die kritische Reglerverstärkung

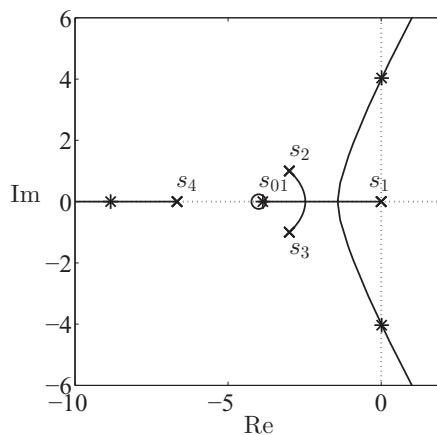
$$k_{P\text{krit}} = k_{\text{krit}} \frac{0,00375}{0,25} \approx 139,89 \frac{0,00375}{0,25} = 2,098.$$

Es ist dasselbe Ergebnis wie im Beispiel 10.1, aber der hier dargestellte Rechenweg zeigt, wie man dieses Ergebnis mit den für Wurzelortskurven geltenden Regeln erhält, wobei man beachten muss, dass sich diese Regeln auf die in Gl. (10.14) angegebene Standardform der charakteristischen Gleichung beziehen.  $\square$

**Symmetrie.** Da die Wurzeln der charakteristischen Gleichung reell oder konjugiert komplex sind, ist die Wurzelortskurve symmetrisch zur reellen Achse.

**Beziehungen der Wurzelortskurve zum PN-Bild.** Die charakteristische Gl. (10.12) ergibt mit  $G_0(s)$  aus Gl. (10.15) die Beziehung

$$k \prod_{i=1}^q (s - s_{0i}) + \prod_{i=1}^n (s - s_i) = 0.$$



**Abb. 10.11:** Wurzelortskurve mit Markierung der Pole \* des Regelkreises bei der kritischen Reglerverstärkung  $k_{P\text{krit}}$

Für  $k = 0$  erhält man daraus als Wurzelorte erwartungsgemäß die Pole  $s_i$  der offenen Kette. Für  $k \rightarrow \infty$  folgt aus der Amplitudenbedingung (10.17), dass die Nullstellen  $s_{0i}$  Wurzelorte sind.

Die Wurzelortskurve besteht aus  $n$  Ästen, die für  $k = 0$  in den Polen der offenen Kette beginnen.  $q$  Äste enden für  $k \rightarrow \infty$  in den Nullstellen der offenen Kette und  $n - q$  Äste im Unendlichen.

Ist die Vielfachheit von Polen oder Nullstellen größer als eins, so beginnen bzw. enden genau so viele Äste in diesen Punkten wie die Vielfachheit angibt.

Eine direkte Konsequenz dieser Tatsache ist, dass Regelkreise mit allpasshaltigen Elementen für große Kreisverstärkungen instabil werden. Ein Allpassanteil in der Regelstrecke beschränkt also die mögliche Reglerverstärkung und damit die Möglichkeit, durch den Regler das dynamische Verhalten der Regelstrecke zu beeinflussen.

**Asymptoten der Wurzelortskurve.** Die Äste der Wurzelortskurve, die nicht in Nullstellen enden, können für große Verstärkung  $k$  näherungsweise durch Geraden approximiert werden. Aus der charakteristischen Gleichung und (10.14) erhält man für betragmäßig große  $s$

$$1 + k \hat{G}_0(s) \xrightarrow{|s| \rightarrow \infty} 1 + ks^{q-n} = 0$$

und daraus die Bedingung

$$s^{n-q} = -k,$$

unter der der Punkt  $s$  für  $k \rightarrow \infty$  auf der Wurzelortskurve liegt. Folglich sind alle komplexen Zahlen  $s$  Wurzelorte, die einen sehr großen Betrag haben und für die die Phasenbedingung

$$(n - q) \arg s = (2l + 1)\pi$$

erfüllt ist, wobei  $l$  eine beliebige ganze Zahl ist. Die Äste der Wurzelortskurve sind also näherungsweise durch Geraden mit den Neigungswinkeln

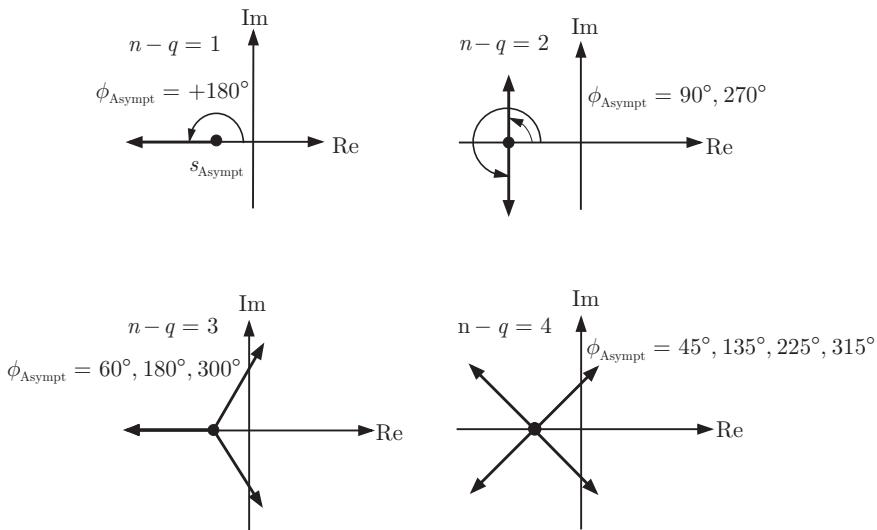
$$\phi_{\text{Asympt}} = \frac{180^\circ + l \cdot 360^\circ}{n - q}, \quad l = 0, 1, \dots, n - q - 1 \quad (10.21)$$

beschrieben. Diese Geraden haben einen gemeinsamen Schnittpunkt auf der reellen Achse im Punkt

$$s_{\text{Asympt}} = \frac{\sum_{i=1}^n s_i - \sum_{i=1}^q s_{0i}}{n - q} = \frac{b_{q-1} - a_{n-1}}{n - q}. \quad (10.22)$$

Dieser Punkt kann als Schwerpunkt der Pole und Nullstellen der offenen Kette gedeutet werden.

In Abb. 10.12 sind die Asymptoten für verschiedene relative Grade  $r = n - q$  aufgezeichnet.



**Abb. 10.12:** Asymptoten der Wurzelortskurve für unterschiedlichen Polüberschuss der offenen Kette

**Wurzelorte auf der reellen Achse.** Anhaltspunkte für die Konstruktion der Wurzelortskurve gibt auch die folgende Aussage, die sich auf reelle Wurzelorte bezieht. Aus der Phasenbedingung (10.18) folgt:

Zur Wurzelortskurve gehören genau diejenigen Werte  $s$  auf der reellen Achse, für die die Anzahl der von diesem Punkt  $s$  aus gesehen rechts liegenden Pole und Nullstellen der offenen Kette ungerade ist.

Da konjugiert komplexe Paare von Polen bzw. Nullstellen rechts von  $s$  gemeinsam einen Winkel von  $\pm 360^\circ$  zur Phasenbedingung (10.18) beitragen, müssen nur die reellen Pole und Nullstellen gezählt werden. Die bezüglich  $s$  links liegenden Pole und Nullstellen haben keinen Einfluss, da für reelle Pole bzw. Nullstellen dieser Art das Argument von  $s - s_{0i}$  bzw.  $s - s_i$  null ist bzw. für konjugiert komplexe Pole oder Nullstellen die Summe der Argumente verschwindet (vgl. Abb. 10.10, wenn der Punkt  $s$  auf die reelle Achse verschoben wird).

**Verzweigungs- und Vereinigungspunkte.** Verzweigungs- und Vereinigungspunkte der Wurzelortskurve stellen mehrfache Wurzeln der charakteristischen Gleichung dar. In ihnen muss deshalb außer der charakteristischen Gleichung  $1 + G_0(s) = 0$  auch die Beziehung

$$\frac{dG_0(s)}{ds} = G'_0(s) = 0$$

gelten. Diese Beziehung ist nur notwendig, aber nicht hinreichend für einen Vereinigungs- oder Verzweigungspunkt. Aus Gl. (10.15) erhält man

$$\ln G_0(s) = \ln k + \sum_{i=1}^q \ln(s - s_{0i}) - \sum_{i=1}^n \ln(s - s_i)$$

und durch Differenziation

$$\frac{d}{ds} \ln G_0(s) = \frac{G'_0(s)}{G_0(s)} = \sum_{i=1}^q \frac{1}{s - s_{0i}} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{s - s_i}.$$

Der Punkt  $s$  ist ein Wurzelort, wenn  $G_0(s) = -1$  gilt. Folglich gilt für diese Punkte die Beziehung

$$\frac{G'_0(s)}{G_0(s)} = -G'_0(s)$$

und die Verzweigungs- und Vereinigungspunkte sind durch die Gleichung

$$\sum_{i=1}^q \frac{1}{s - s_{0i}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{s - s_i} \tag{10.23}$$

beschrieben.

Es wurde schon darauf hingewiesen, dass diese Beziehung notwendig, aber nicht hinreichend für Verzweigungs- und Vereinigungspunkte ist. Man muss deshalb für jeden aus Gl. (10.23) bestimmten Punkt überprüfen, ob die Phasenbedingung (10.18) erfüllt ist.

Für reelle Verzweigungs- und Vereinigungspunkte lassen sich aus Gl. (10.23) folgende Regeln ableiten (vgl. Abb. 10.13):

- Liegt ein Ast der Wurzelortskurve zwischen zwei reellen Polen auf der reellen Achse, so gibt es mindestens einen Verzweigungspunkt zwischen diesen beiden Polen.
- Liegt ein Ast der Wurzelortskurve zwischen zwei reellen Nullstellen auf der reellen Achse, so existiert mindestens ein Vereinigungspunkt zwischen den beiden Nullstellen.
- Liegt ein Ast der Wurzelortskurve zwischen einem reellen Pol und einer reellen Nullstelle auf der reellen Achse, dann sind entweder keine Verzweigungs- und Vereinigungspunkte vorhanden, oder diese Punkte treten paarweise auf.

**Wurzelortskurve bei negativer Verstärkung.** Die bisherigen Betrachtungen gingen von der Darstellungsform (10.14) der offenen Kette aus, wobei der Faktor  $k$  eine positive Verstärkung bezeichnete. Sie werden jetzt für die Übertragungsfunktion

$$G_0(s) = k \hat{G}_0(s) = k \frac{b_q s^q + b_{q-1} s^{q-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (10.24)$$

$$= k b_q \frac{\prod_{i=1}^q (s - s_{0i})}{\prod_{i=1}^n (s - s_i)} \quad (10.25)$$

$$= k b_q \frac{\prod_{i=1}^q |s - s_{0i}|}{\prod_{i=1}^n |s - s_i|} e^{j \left( \sum_{i=1}^q \phi_{0i} - \sum_{i=1}^n \phi_i \right)} \quad (10.26)$$

erweitert. Solange das Produkt  $k b_q$  positiv ist, ändert sich nichts an den bisher behandelten Konstruktionsvorschriften. Für

$$k b_q < 0 \quad (10.27)$$

gelten die Amplituden- und Phasenbedingungen in der Form

$$|b_q| \frac{\prod_{i=1}^q |s - s_{0i}|}{\prod_{i=1}^n |s - s_i|} = \frac{1}{|k|} \quad (10.28)$$

$$\sum_{i=1}^q \phi_{0i} - \sum_{i=1}^n \phi_i = 2l\pi. \quad (10.29)$$

Mit Hilfe der Gl. (10.28) kann der zu einem Wert  $s$  auf der Wurzelortskurve gehörende Verstärkungsfaktor  $k$  bestimmt werden, wobei die Gleichung den Betrag  $|k|$  liefert und das Vorzeichen aus der Bedingung (10.27) für das gegebene  $b_q$  festgelegt wird. Die veränderte Phasenbedingung hat zwei Konsequenzen. Erstens gehören jetzt alle reellen Werte  $s$  zur Wurzelortskurve, bezüglich derer die Anzahl der rechts

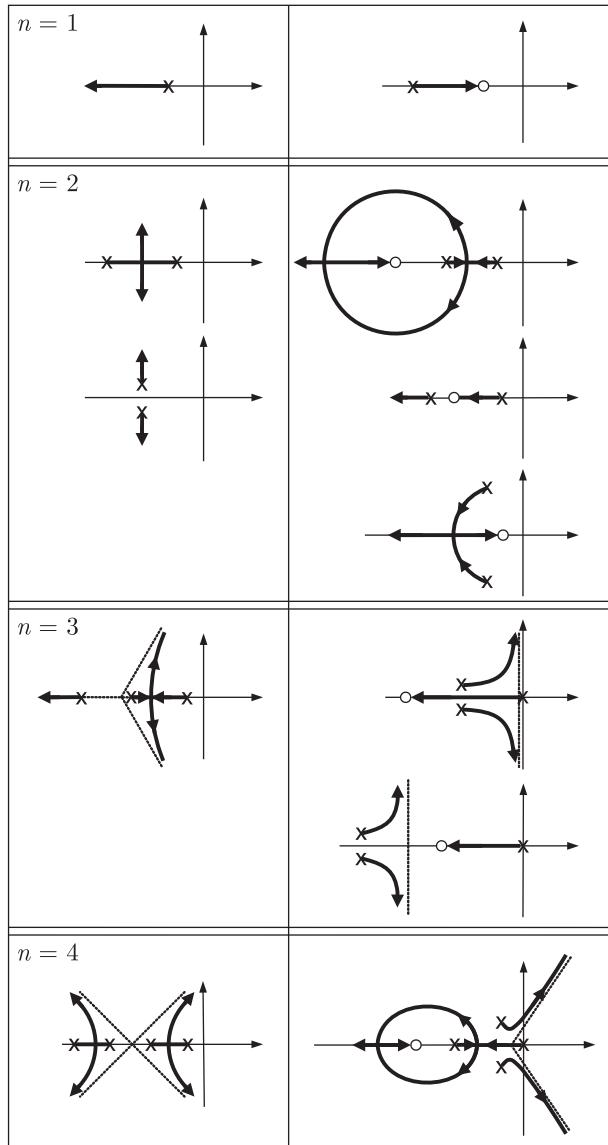


Abb. 10.13: Typischer Verlauf von Wurzelortskurven

liegenden Pole und Nullstellen der offenen Kette *gerade* ist. Zweitens ändern sich die Neigungswinkel der Asymptoten:

$$\phi_{\text{Asympt}} = \frac{l \cdot 360^\circ}{n - q}, \quad l = 0, 1, \dots, n - q - 1. \quad (10.30)$$

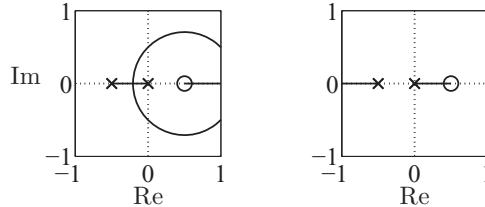
Das heißt, die in Abb. 10.12 gezeigten Schemata müssen um  $\frac{180^\circ}{n-q}$  gedreht werden, so dass beispielsweise die Asymptote für  $n - q = 1$  nicht in Richtung der negativen, sondern in Richtung der positiven reellen Achse zeigt.

**Beispiel 10.3 Wurzelortskurve bei nichtminimalphasiger offener Kette**

Die Veränderung, die sich durch das negative Vorzeichen von  $kb_q$  ergibt, ist in Abb. 10.14 veranschaulicht. Wird der Allpass  $G(s) = \frac{-2s+1}{2s+1}$  mit einem I-Regler  $K(s) = \frac{k}{s}$  zurückgeführt, so kann die Übertragungsfunktion der offenen Kette

$$G_0(s) = k \frac{-2s+1}{s(2s+1)}$$

nicht in die Form (10.14) überführt werden, denn der Koeffizient  $b_q = -2$  ist negativ.



**Abb. 10.14:** Wurzelortskurve eines nichtminimalphasigen Systems

Würde man die Wurzelortskurve anhand der für  $kb_q > 0$  erläuterten Konstruktionsvorschriften zeichnen, so erhielte man das in Abb. 10.14 rechts gezeigte Bild und würde daraus folgern, dass der Regelkreis für alle Werte von  $k$  instabil ist. Da jetzt jedoch  $kb_q$  negativ ist, ändern sich die Konstruktionsvorschriften. Reelle Werte gehören zur Wurzelortskurve, wenn die Anzahl der von  $s$  rechts liegenden Pole und Nullstellen gerade ist. Außerdem zeigt die Asymptote jetzt nach rechts. Man erhält die linke Wurzelortskurve, aus der man ablesen kann, dass der Regelkreis für kleine Verstärkungen  $k$  stabil ist.  $\square$

Für die Verwendung der Wurzelortskurve zum Reglerentwurf ist es wichtig, die hier angegebenen Konstruktionsprinzipien zu kennen, um daraus ableiten zu können, *warum* die Wurzelortskurven so wie dargestellt verlaufen. Dies gilt auch, wenn man die Wurzelortskurven nicht per Hand zeichnet, sondern sich von einem Rechner ausgeben lässt. Nur wenn man die Konstruktionsprinzipien kennt, kann man beim Reglerentwurf durch die Einführung von Nullstellen oder Polen des Reglers die Wurzelorte zielgerichtet so verändern, dass die Pole des Regelkreises für eine geeignet gewählte Reglerverstärkung in die gewünschten Gebiete geschoben werden.

**Aufgabe 10.2** Wurzelortskurve eines Regelkreises mit I-Regler

Die Regelstrecke

$$G(s) = \frac{22}{s^2 + 6s + 11}$$

wird mit einem I-Regler

$$K_I = \frac{1}{T_I s}$$

geregelt. Zeichnen Sie die Wurzelortskurve bezüglich der Integrationszeitkonstanten  $T_I$ . Für welche Integrationszeitkonstante kann die Führungsübertragungsfunktion des Regelkreises wie in Gl. (10.8) durch ein PT<sub>1</sub>-Glied approximiert werden? □

**Aufgabe 10.3** Wurzelortskurven von Regelkreisen

Gegeben sind folgende Regelstrecken:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{(s+1)(s+2)}, & G(s) &= \frac{5}{s^2 + 2s + 1} \\ G(s) &= \frac{5}{(s+1)(s-1)}, & G(s) &= \frac{10}{(s+1)(s+3)(s-1)} \end{aligned}$$

Zeichnen Sie die Wurzelortskurven der Regelkreise, die bei Verwendung eines P-Reglers entstehen. Wie verändern sich die Wurzelortskurven, wenn Sie anstelle des P-Reglers einen I- bzw. einen PI-Regler verwenden? □

**Aufgabe 10.4\*** Wurzelortskurve für P-geregelte Systeme

Die im Folgenden angegebenen Regelstrecken werden mit einer P-Regelung versehen. Zeichnen Sie die Wurzelortskurven und interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

1. Gleichstrommotor aus Aufgabe 6.32 auf S. 330 mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{0,0482}{0,0011s^2 + 0,0920s + 1} \quad (10.31)$$

(Eingangsgröße: Motorspannung; Ausgangsgröße: Drehzahl).

2. Verladebrücke aus Beispiel 5.1 auf S. 128 mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{0,00123}{s^4 + 3,066s^2} \quad (10.32)$$

(Eingangsgröße: Kraft an der Laufkatze; Ausgangsgröße: Position des Greifers). □

## 10.3 Reglerentwurf unter Verwendung der Wurzelortskurve

### 10.3.1 Entwurfsverfahren

Beim Reglerentwurf mit dem Wurzelortskurvenverfahren geht man davon aus, dass die Dynamikforderungen an das Zeitverhalten des geschlossenen Kreises in Forderungen an die Lage des dominierenden Polpaars übersetzt sind. Für eine Regelstrecke mit gegebener Übertragungsfunktion  $G(s)$  wird dann nach einem Regler mit der unbekannten Übertragungsfunktion  $K(s) = k\hat{K}(s)$  gesucht, für den die Übertragungsfunktion  $G_w(s)$  des geschlossenen Kreises das geforderte dominierende Polpaar besitzt. Dieses Vorgehen wird durch die Wurzelortskurve folgendermaßen unterstützt:

- Für gegebene Pole und Nullstellen der offenen Kette, die sich aus  $G(s)\hat{K}(s)$  berechnen lassen, ist aus dem qualitativen Verlauf der Wurzelortskurve bekannt, wie sich die Pole des geschlossenen Kreises in Abhängigkeit von der Reglerverstärkung  $k$  verändern. Daraus kann abgeleitet werden, welche Pole bzw. Nullstellen in die offene Kette durch entsprechende Wahl des dynamischen Teils  $\hat{K}(s)$  des Reglers eingeführt werden müssen, damit der geschlossene Kreis ein dominierendes Polpaar mit vorgegebenen Werten haben *kann*.
- Für die gegebene Übertragungsfunktion  $G(s)\hat{K}(s)$  der offenen Kette kann mit Hilfe der Wurzelortskurve eine solche Reglerverstärkung  $k$  bestimmt werden, für die das dominierende Polpaar des Regelkreises (annähernd) die geforderte Lage im PN-Bild besitzt.

Der Reglerentwurf mit Hilfe der Wurzelortskurve läuft deshalb in den im Entwurfsverfahren 10.1 angegebenen Schritten ab.

Problematisch ist die Wahl der Pole und Nullstellen des Reglers. Auf die Wurzelortskurve des geschlossenen Kreises bezogen sollen die neu eingeführten Pole bzw. Nullstellen die Äste der Wurzelortskurve so „verbiegen“, dass das dominierende Polpaar an die gewünschte Stelle in der komplexen Ebene verschoben werden kann und dass dieses Polpaar auch insofern „dominiert“, als dass alle anderen Pole des geschlossenen Kreises weit genug links von diesem Polpaar liegen. Für die Wahl der Reglerpole und -nullstellen gibt es keine exakten Vorschriften. Aus den folgenden Beispielen wird offensichtlich, wie dieses Problem mit Hilfe der behandelten Eigenschaften und Konstruktionsvorschriften für Wurzelortskurven gelöst werden kann.

Wenn der Regelkreis nur einen dominierenden Pol haben soll, wird der Reglerentwurf in derselben Weise, aber mit entsprechend modifizierter Zielstellung durchgeführt.

**PN-Bilder linearer Regler und Korrekturglieder.** Die Einführung neuer Pole und Nullstellen in das PN-Bild ist an eine Reihe von Bedingungen geknüpft, da sämtliche neu eingeführten Pole und Nullstellen im Regler realisiert werden müssen. In

---

**Entwurfsverfahren 10.1** *Reglerentwurf mit Hilfe der Wurzelortskurve*


---

**Gegeben:** Übertragungsfunktion  $G(s)$  der Regelstrecke  $\Sigma_S$

Güteforderungen an den Regelkreis  $\bar{\Sigma}$

1. Leiten Sie aus den Güteforderungen an den geschlossenen Kreis Gebiete für die Lage des dominierenden Polpaars des Regelkreises ab.
2. Legen Sie die qualitative Lage der Wurzelortskurve fest, indem Sie Pole und Nullstellen des Reglers  $\Sigma_R$  einführen, wobei Sie zunächst mit möglichst wenigen Polen und Nullstellen arbeiten. Aus den neu eingeführten Polen und Nullstellen erhalten Sie den dynamischen Teil  $\hat{K}(s)$  des Reglers.
3. Zeichnen Sie die Wurzelortskurve des Regelkreises  $\bar{\Sigma}$ , der aus der offenen Kette  $\Sigma_0$  mit der Übertragungsfunktion  $kG(s)\hat{K}(s)$  entsteht.
4. Ermitteln Sie den Verstärkungsfaktor  $k$  aus Punkten der Wurzelortskurve, die in den vorgegebenen Gebieten für das dominierende Polpaar liegen. Bestimmen Sie sämtliche Wurzelorte für den erhaltenen Wert von  $k$  und überprüfen Sie, ob ein dominierendes Polpaar vorhanden ist und der Einfluss der übrigen Pole auf das Regelkreisverhalten voraussichtlich klein ist.
5. Bestimmen Sie aus dem Verstärkungsfaktor  $k$  die zugehörige Reglerverstärkung  $k_P$ .
6. Analysieren Sie das Zeitverhalten des geschlossenen Kreises. Entspricht das Verhalten nicht den gegebenen Güteforderungen, so müssen Sie den Entwurf unter Verwendung anderer Regler  $\Sigma_R$  ab Schritt 2 wiederholen.

**Ergebnis:** Übertragungsfunktion  $K(s) = k_P \hat{K}(s)$  des Reglers  $\Sigma_R$

---

Abb. 10.15 sind deshalb die PN-Bilder wichtiger Reglertypen und Korrekturglieder gezeigt. Aus diesen Abbildungen wird offensichtlich, dass die Einführung von Nullstellen in das PN-Bild die Einführung mindestens genauso vieler Pole nach sich zieht. Eine Ausnahme bilden der ideale PD- oder PID-Regler, deren (idealer) differenzierender Anteil in der praktischen Realisierung allerdings auch einen zusätzlichen, in der komplexen Ebene sehr weit links liegenden Pol mit sich bringt. Das in der Tabelle verwendete PID-Reglergesetz stimmt mit zwei Nullstellen sowie einem Pol bei null mit dem bisher verwendeten überein (vgl. Gl. (7.68)). Es wurde hier umgeschrieben, um die Wirkung im PN-Bild besser darstellen zu können.

Regler bzw. Korrekturglied	Übertragungsfunktion	PN-Bild
PD (ideal)	$k_p (T_D s + 1)$	
PI	$k_p \frac{T_I s + 1}{T_I s}$	
PID	$k_p \frac{(T_{D1}s + 1)(T_{D2}s + 1)}{T_I s}$	
phasenabsenkendes Korrekturglied	$\frac{T_D s + 1}{T s + 1} \quad T > T_D$	
phasenanhebendes Korrekturglied	$\frac{T_D s + 1}{T s + 1} \quad T < T_D$	

Abb. 10.15: PN-Bilder wichtiger Regler und Korrekturglieder

Regler und Korrekturglieder sind Bestandteile der zu realisierenden Rückführung und können beim Entwurf am PN-Bild in Kombination miteinander verwendet werden. Natürlich ist es möglich, mehrere dieser Elemente in Reihe zu schalten oder die Übertragungsfunktion  $K(s)$  beliebig zu wählen.

#### Beispiel 10.4 Stabilisierung eines invertierten Pendels

Es ist ein Regler zu entwerfen, der das in Abb. 10.16 gezeigte invertierte Pendel in der oberen Position ( $\phi = 0$ ) stabilisiert. Stellgröße ist das Moment auf den Stab, Regelgröße der Winkel  $\phi$ .

Vernachlässigt man die Reibung und linearisiert das Modell um den Arbeitspunkt  $\bar{\phi} = 0$ , so erhält man das Zustandsraummodell

$$\text{Pendel : } \begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \phi(t) \\ \dot{\phi}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3g}{2l} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi(t) \\ \dot{\phi}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{ml^2} \end{pmatrix} u(t), & \begin{pmatrix} \phi(0) \\ \dot{\phi}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \dot{\phi}_0 \end{pmatrix} \\ y(t) = (1 \ 0) \begin{pmatrix} \phi(t) \\ \dot{\phi}(t) \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (10.33)$$

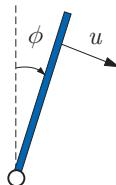
das hier für die folgenden Parameter verwendet wird:

Parameter	Bedeutung	Wert
$m$	Masse der Stange	0,3 kg
$l$	Länge der Stang	0,5 m
$g$	Erdbeschleunigung	$9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Die Zeit wird in Sekunden gemessen. Daraus ergibt sich für die Regelstrecke die Übertragungsfunktion

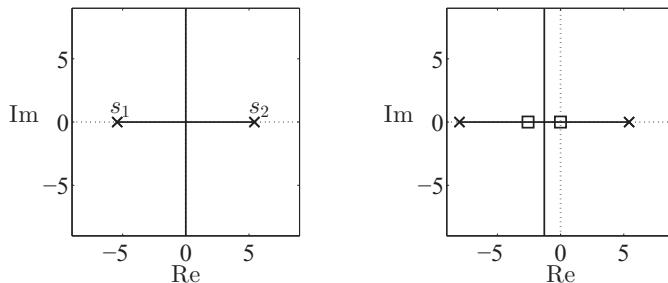
$$G(s) = \frac{40}{s^2 - 29,43}$$

mit den Polen  $s_1 = -5,42$  und  $s_2 = 5,42$ .



**Abb. 10.16:** Invertiertes Pendel

Wird eine proportionale Rückführung  $K(s) = k_P$  verwendet, so erhält man die in Abb. 10.17 (links) gezeigte Wurzelortskurve. Für alle Reglerverstärkungen  $k_P$  ist der geschlossene Kreis instabil bzw. grenzstabil. Der Grund dafür liegt in der Tatsache, dass die Asymptoten entsprechend der Konstruktionsvorschrift auf der Imaginärachse liegen, was übrigens für beliebige Systemparameter gilt.



**Abb. 10.17:** Wurzelortskurve des Pendels mit P-Regler (links) und mit Korrekturglied (rechts) (Pole  $\square$  für die kritische Verstärkung)

Durch die Pole und Nullstellen eines dynamischen Reglers  $K(s)$  muss die Wurzelortskurve so verändert werden, dass für einen Bereich der Reglerverstärkung alle Äste in der linken Halbebene liegen. Dafür muss das PN-Bild der offenen Kette modifiziert werden. Eine Möglichkeit besteht darin, einen Regler mit einem Pol und einer Nullstelle zu verwenden, wobei die Nullstelle auf dem linken Pol der Regelstrecke liegt und der Pol weiter links davon. Die Nullstelle des Reglers kürzt sich dann mit dem Pol der Strecke, so dass die

offene Kette wiederum zwei Pole hat, deren linker Pol jetzt allerdings weiter links in der komplexen Ebene liegt als der der Regelstrecke. Damit wird die Wurzelortskurve insgesamt nach links geschoben, wie Abb. 10.17 (rechts) zeigt.

Für die Durchführung dieses Entwurfsschrittes wird ein phasenanhebendes Korrekturglied mit einer zusätzlichen Proportionalverstärkung  $k_P$  verwendet

$$K(s) = k_P \frac{T_D s + 1}{T s + 1}$$

und dessen Nullstelle so gewählt, dass sie mit dem Pol  $s_1$  übereinstimmt:

$$T_D = -\frac{1}{s_1} = 0,184.$$

Die Zeitkonstante  $T$  wird deutlich kleiner als diese Zeitkonstante gewählt, beispielsweise

$$T = 0,125.$$

Mit diesem Regler hat die offene Kette außer dem instabilen Pol  $s_2$  einen Pol bei  $-\frac{1}{T} = -8$ . Die in Abhängigkeit von der Reglerverstärkung  $k_P$  gezeichnete Wurzelortskurve zeigt Abb. 10.17 (rechts). Die Asymptoten liegen jetzt in der linken Halbebene. Wenn die Reglerverstärkung  $k_P$  groß genug gewählt wird, ist der Regelkreis stabil.

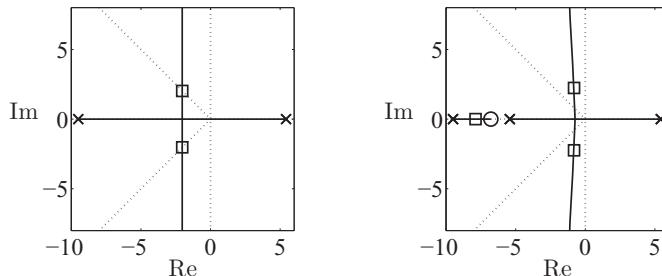
Um die kritische Reglerverstärkung ermitteln zu können, muss die charakteristische Gleichung des Regelkreises zunächst in die Standardform (10.14) gebracht werden:

$$\begin{aligned} 1 + K(s)G(s) &= 1 + k_P \frac{0,184s + 1}{0,125s + 1} \frac{40}{s^2 - 29,43} \\ &= 1 + k_P \underbrace{\frac{40 \cdot 0,184}{0,125}}_k \frac{1}{(s + 8)(s - 5,42)}. \end{aligned}$$

Für

$$k = k_P \frac{40 \cdot 0,184}{0,125} = 58,9 k_P$$

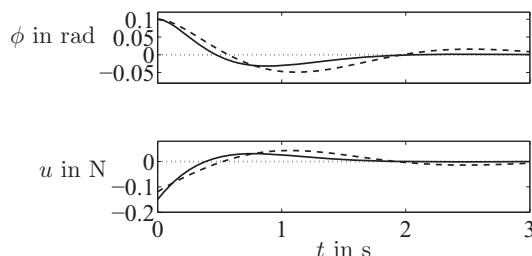
erhält man dann aus Abb. 10.17 (rechts) den kritischen Wert  $k_{\text{krit}} = 8 \cdot 5,42 = 43,36$ . Das geregelte Pendel ist folglich für  $k_P > 0,736$  stabil.



**Abb. 10.18:** Wurzelortskurve bei genauer (links) und ungenauer (rechts) Kompenstation des Regelstreckenpols durch die Nullstelle des Reglers

In Erweiterung der bisherigen Betrachtungen soll der Regler jetzt auch sicherstellen, dass die Eigenbewegung des geregelten Pendels nach etwa 1,5 s abgeklungen ist und wenig Überschwingen aufweist. Entsprechend Gl. (10.6) muss dafür der Realteil der Pole bei  $-\delta_e \approx -\frac{3}{T_{5\%}} \approx -2$  liegen. Annähernd asymptotisches Verhalten erreicht man, wenn die Pole unterhalb der Winkelhalbierenden liegen, die in Abb. 10.18 (links) punktiert eingetragen sind.

Um die erste Forderung zu erfüllen, muss die Zeitkonstante  $T$  des Korrekturgliedes so gewählt werden, dass die Asymptote der Wurzelortskurve bei  $s_{\text{Asymp}} = -2$  liegt, also  $T = \frac{1}{9.5}$ . Das konjugiert komplexe Polpaar des Regelkreises liegt dann auf der Winkelhalbierenden, wenn  $k = 50,3$  und folglich  $k_P = 0,854$  gewählt wird, was man mit Hilfe von Gl. (10.19) aus Abb. 10.18 (links) ermitteln kann. Die durchgezogenen Linien von Abb. 10.19 zeigen die Eigenbewegung des geregelten Pendels für den Anfangszustand  $\phi(0) = 0,1, \dot{\phi}(0) = 0$ . Die Güteforderungen sind offensichtlich erfüllt.



**Abb. 10.19:** Eigenbewegung des Regelkreises bei  $\phi(0) = 0,1$  rad

**Diskussion.** Die bisherige Lösung beruht auf einer Pol-Nullstellen-Kompensation, bei der in der Übertragungsfunktion der offenen Kette ein Pol des Pendels gegen die Nullstelle des Reglers gekürzt wird. Es erhebt sich die Frage, welche Veränderung das Regelkreisverhalten aufweist, wenn die Nullstelle des Reglers den Regelstreckenpol  $s_1$  nicht exakt kompensiert, weil entweder die Regelstreckenparameter nicht exakt bekannt sind oder die Reglerparameter nicht genau eingestellt wurden. Abbildung 10.18 (rechts) zeigt die Wurzelortskurve, die sich bei Veränderung von  $T_D$  auf 80 Prozent des bisherigen Wertes ergibt. Die Wurzelortskurve hat jetzt drei Äste. Das dominierende Polpaar rutscht weiter nach rechts. Der Regelkreis bleibt jedoch stabil. Die Eigenbewegung ist in Abb. 10.19 als gestrichelte Kurve zu erkennen. Die geringere Dämpfung ist aufgrund der veränderten Pollage zu erwarten.

Diese Betrachtungen zeigen, dass es „ungefährlich“ ist, stabile Pole der Strecke gegen Reglernullstellen zu kürzen. Anders verhält es sich, wenn man versuchen würde, instabile Pole auf diese Weise unwirksam zu machen. Sobald die Reglernullstelle den betreffenden Pol nicht exakt trifft, hat die Wurzelortskurve einen Ast, der von dem instabilen Pol in die daneben liegende Nullstelle verläuft. Folglich besitzt der geschlossene Kreis für beliebige Reglerverstärkungen einen instabilen Pol. Wie im Abschn. 8.4.2 erläutert wurde, wird diese Vorgehensweise ohnehin verboten, wenn man vom Regelkreis nicht nur E/A-Stabilität, sondern auch die I-Stabilität fordert. □

### 10.3.2 Regelung mit hoher Kreisverstärkung

Anhand der in Abb. 10.12 dargestellten Asymptotenmuster für die Wurzelortskurve lässt sich leicht erklären, auf welcher Überlegung die Regelung mit hoher Kreisverstärkung beruht, die in der Literatur ausführlich unter dem Begriff *High-gain feedback* untersucht worden ist. Setzt man voraus, dass die Regelstrecke einen Polüberschuss von eins besitzt

$$r = n - q = 1 \quad (10.34)$$

und dass sämtliche Nullstellen in der linken komplexen Ebene liegen

$$\operatorname{Re}\{s_{0i}\} < 0, \quad (10.35)$$

so tritt bei sehr hoher Kreisverstärkung  $k$  folgendes ein.  $n - 1$  Äste der Wurzelortskurve nähern sich den Nullstellen der offenen Kette und die auf diesen Ästen liegenden Pole des Regelkreises sind somit stabil. Der verbleibende Pol nähert sich der Asymptoten, die auf der negativen reellen Achse nach  $-\infty$  führt, so dass auch dieser Pol stabil ist. Die Stabilität des Regelkreises kann also einfach dadurch erreicht werden, dass der Regler eine genügend hohe Verstärkung erhält.

Wichtig für die Anwendung dieses Regelungsprinzips ist, dass es vollkommen gleichgültig ist, welche dynamische Ordnung und wie viele instabile Pole die Regelstrecke besitzt. Auch kann dem Regler ein beliebiges dynamisches Verhalten  $\tilde{K}(s)$  gegeben werden, wenn man darauf achtet, dass der Regler einen P-Anteil und folglich keinen Polüberschuss besitzt und dass alle seine Nullstellen negativen Realteil haben. Der Polüberschuss der offenen Kette ist dann derselbe wie der der Strecke, also nach Voraussetzung gleich eins.

Der entstehende Regelkreis besitzt eine bemerkenswerte Robustheitseigenschaft. Da die Stabilität gesichert ist, wenn die Voraussetzungen (10.34), (10.35) erfüllt sind und eine hinreichend große Reglerverstärkung gewählt wurde, kann die Stabilität des Regelkreises unabhängig von den Parametern der Regelstrecke gesichert werden. Um das beschriebene Regelungsprinzip anzuwenden, muss man noch nicht einmal ein Modell der Regelstrecke aufstellen. Es genügt, die Voraussetzungen (10.34), (10.35) zu prüfen, indem man die in der Regelstrecke auftretenden Wirkprinzipien analysiert.

Die Anwendbarkeit dieser Regelungsmethode ist durch die Forderung (10.34), dass der relative Grad  $r$  der Strecke höchstens eins sein darf, stark eingeschränkt. Beachtet man, dass im Regelkreis nach Abb. 1.3 auf S. 5 zur Strecke ein Stellglied und ein Messglied gehören, die jeweils einen Polüberschuss von eins erzeugen können, so wird offensichtlich, dass der relative Grad in den meisten Anwendungen größer als eins ist und die Grundidee der Regelung mit hoher Kreisverstärkung nicht wirksam ist.

### 10.3.3 Zusammenfassende Bewertung des Entwurfsverfahrens

Im Mittelpunkt des hier behandelten Entwurfsverfahrens steht die Gestaltung der Eigendynamik des Regelkreises. Die Pole des Regelkreises sollen durch eine geeignete Wahl des Reglers so in der komplexen Ebene platziert werden, dass der Regelkreis ein gutes dynamisches Verhalten aufweist. Dabei muss das dominierende Polpaar in Gebiete verschoben werden, die durch die Güteforderungen bestimmt sind.

Das Wurzelortskurvenverfahren eignet sich damit sehr gut für Stabilisierungsprobleme, bei denen instabile Pole der Regelstrecke durch den Regler in die linke komplexe Halbebene verschoben werden müssen. Die Wurzelortskurve zeigt, ob diese Aufgabe durch eine proportionale Regelung gelöst werden kann bzw. welche dynamischen Elemente in den Regler eingeführt werden müssen, um die Strecke stabilisieren zu können. Gleichfalls lässt das Verfahren sehr gut erkennen, wie die Dämpfung eines Systems durch den Regler verbessert werden kann.

Um Sollwertfolge zu erreichen, muss die offene Kette entsprechend dem Inneren-Modell-Prinzip über bestimmte dynamische Eigenschaften verfügen, beispielsweise bei sprungförmigen Führungs- und Störsignalen über integrales Verhalten. Darauf muss zusätzlich zu den bisherigen Überlegungen geachtet werden. So muss der Regler  $\hat{K}(s)$  gegebenenfalls einen I-Anteil besitzen, wodurch ein Pol im Ursprung der komplexen Ebene eingeführt wird.

#### Aufgabe 10.5 Stabilität von Regelkreisen

Begründen Sie anhand des prinzipiellen Verlaufs der Wurzelortskurve, dass folgende Aussagen richtig sind:

1. Ein Regelkreis  $\bar{\Sigma}$ , der aus einer stabilen Regelstrecke  $\Sigma_S$  mit PT<sub>2</sub>-Verhalten und einem proportionalen Regler  $\Sigma_R$  besteht, ist für alle Reglerverstärkungen  $k = 0 \dots +\infty$  E/A-stabil.
2. Wenn die Regelstrecke  $\Sigma_S$  stabil ist und  $k_s > 0$  gilt, so können für den geschlossenen Kreis  $\bar{\Sigma}$  Stabilität und Sollwertfolge dadurch gesichert werden, dass ein I-Regler mit hinreichend kleiner Reglerverstärkung verwendet wird.
3. Wird eine Nullstelle des Reglers  $\Sigma_R$  so gewählt, dass sie mit einem Pol der Regelstrecke  $\Sigma_S$  übereinstimmt und folglich Pol und Nullstelle nicht mehr in der Übertragungsfunktion der offenen Kette  $\Sigma_0$  vorkommen, so ist der geschlossene Kreis  $\bar{\Sigma}$  instabil, wenn es sich dabei um einen instabilen Pol handelt und bei der technischen Realisierung der Reglernullstelle der Pol nicht exakt getroffen wird. Demgegenüber ist die Kompensation eines stabilen Poles in dieser Beziehung unkritisch. □

#### Aufgabe 10.6\* Reglerentwurf mit Hilfe der Wurzelortskurve

Gegeben ist die Regelstrecke

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+3)}.$$

1. Überprüfen Sie mit Hilfe der Wurzelortskurve, ob die Regelstrecke durch einen P-Regler stabilisiert werden kann.
2. Wie muss der Regler gewählt werden, damit der Regelkreis bei sprungförmigen Führungs- und Störgrößen keine bleibende Regelabweichung besitzt?
3. Entwerfen Sie einen Regler, mit dem der geschlossene Kreis ein Überschwingen der Führungsübergangsfunktion von  $\Delta h < 16\%$  und eine Beruhigungszeit von  $T_{5\%} < 4$  besitzt.  $\square$

**Aufgabe 10.7** *Entwurf stabilisierender Regler*

In den beiden Aufgaben 8.6 und 8.7 auf S. 424 mussten Intervalle für den Reglerparameter  $k_P$  bestimmt werden, für die der Regelkreis stabil ist. Lösen Sie diese Aufgaben jetzt mit Hilfe der Wurzelortskurve.  $\square$

**Aufgabe 10.8\*** *Steuerung eines Schiffes*

Ein Schiff soll auf einem Kurs  $w(t)$  gehalten werden, wobei der Kapitän den Ruderausschlag  $u(t)$  in Abhängigkeit von der Abweichung  $e(t) = w(t) - y(t)$  der Fahrtrichtung  $y$  von der vorgegebenen Richtung  $w$  festlegt. Zur Vereinfachung der Betrachtungen kann  $w(t) = 0$  festgelegt und angenommen werden, dass sich das Schiff in einem von den Vorgaben abweichenden Kurs  $y \neq 0$  befindet.

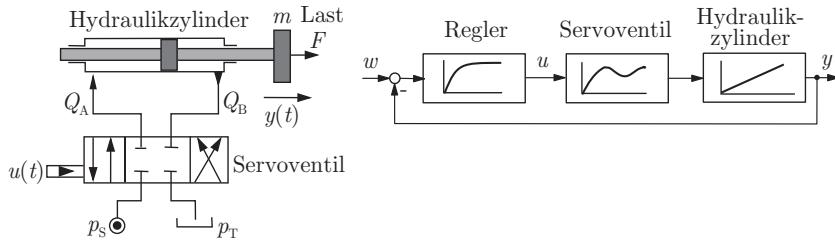
1. Stellen Sie die Differentialgleichung bzw. das Zustandsraummodell des Schiffes als Regelstrecke auf und bestimmen Sie daraus die Übertragungsfunktion.
2. Zeigen Sie, dass der Kapitän das Schiff nicht auf dem vorgegebenen Kurs halten kann, wenn er als P-Regler fungiert, also die Ruderstellung proportional zur Kursabweichung festlegt.
3. Wie muss der Kapitän reagieren, damit er das Schiff auf den vorgegebenen Kurs führen kann?  $\square$

**Aufgabe 10.9\*** *Lageregelung hydraulischer Ruderstellsysteme*

Durch hydraulische Stellsysteme werden die Ruder von Flugzeugen auf vorgegebene Positionen  $w$  gebracht. Abbildung 10.20 zeigt links den hydraulischen Schaltplan. Durch die Stellgröße  $u$  wird das Servoventil ausgelenkt und damit der Weg von der Hochdruckseite der Hydraulikversorgung  $p_S$  in den Gleichlaufzylinder mit größerem oder kleinerem Querschnitt freigegeben, so dass Öl in die rechte oder die linke Seite des Hydraulikzylinders gepresst wird. Die parallelen und überkreuzten Pfeile zeigen, dass das Servoventil wahlweise die Hochdruckseite auf die rechte oder die linke Hälfte des Zylinders leiten und damit eine Links- bzw. Rechtsbewegung des Zylinders auslösen kann.

Die Lageregelung hat die Aufgabe, die Position  $y$  des Ruders auf den vorgegebenen Sollwert  $w$  zu bringen, unabhängig davon, wie groß die Kraft  $F$  auf das Ruder ist.

Die Stellgröße  $u$  ist die Spannung bzw. der Strom durch den elektrischen Antrieb des Servoventils. Die im linken Teil der Abbildung gezeigte Anordnung hat IT<sub>2</sub>-Verhalten, wobei der I-Anteil durch die integrierende Wirkung des Hydraulikzylinders hervorgerufen



**Abb. 10.20:** Hydraulischer Schaltplan und Regelkreis des Ruderstellsystems

wird. Stellantriebe sind unterschiedlich gedämpft, wobei hier mit dem für Ruderstellantriebe typischen Dämpfungsfaktor von  $d = 0,3$  gearbeitet werden soll.

Stellantriebe für Flugzeuge werden mit proportionalen Reglern geregelt. Die damit nicht zu verhindern bleibende Regelabweichung bei Störungen wie z. B. Seitenwinden wird durch den Piloten ausgeglichen, der die Sollgröße für die Ruderbewegung entsprechend größer oder kleiner wählt, so dass das Ruder die geforderte Wirkung auf das Flugverhalten hat.

Das Störverhalten des lagegeregelten Antriebes ist durch die Laststeifigkeit beschrieben, die die Empfindlichkeit der Kolbenposition von der äußeren Kraft auf den Kolben beschreibt. Aus Regelungstechnischer Sicht wird damit die bleibende Regelabweichung in Bezug zur Amplitude der Störung bewertet. Deshalb ist die Laststeifigkeit umso besser, je größer die Kreisverstärkung des Regelkreises ist. Aus diesem Grund wird für die Lageregelung mit verzögerten Reglern gearbeitet, so dass  $K(s)$  beispielsweise ein  $PT_1$ -Glied beschreibt. Warum? □

**Aufgabe 10.10** Wurzelortskurve bei negativem Verstärkungsfaktor  $k$

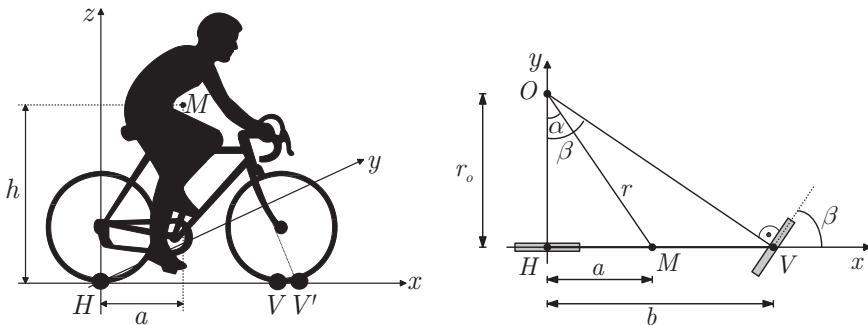
1. Welche Änderungen in den Konstruktionsregeln und in den Beispielen aus Tabelle 10.13 ergeben sich, wenn der Verstärkungsfaktor  $k$  negativ ist?
2. Zeigen Sie anhand der Wurzelortskurve, dass für jede nicht sprungfähige stabile Regelstrecke mit positiver statischer Verstärkung ( $k_s > 0$ ) eine betragsmäßig große, jedoch negative Kreisverstärkung ( $k < 0$ ) zu einem instabilen Regelkreis führt. Wo liegen die Pole des Regelkreises bei  $k \rightarrow -\infty$ ? □

**Aufgabe 10.11\*** Stabilisierung eines Fahrrades

Beim Fahrradfahren wirkt der Mensch als Regler. Dies soll im folgenden anhand des Balancievorganges untersucht werden. Durch Vorgabe eines geeigneten Lenkwinkels  $\beta$  beeinflusst der Mensch dabei den Neigungswinkel  $\theta$  des Fahrrades, wobei man im Wesentlichen von einem proportionalen Verhalten des Reglers „Mensch“ ausgehen kann:

$$\beta(t) = -k_P \theta(t). \quad (10.36)$$

Die wichtigsten Größen des Fahrrades sind in Abb. 10.21 markiert. Der Radabstand wird mit  $b$  bezeichnet. Der Schwerpunkt  $M$  des Fahrrades einschließlich dem Fahrer wird



**Abb. 10.21:** Fahrradfahrer (links) und Fahrradkinematik in der  $x/y$ -Ebene (rechts)

durch die Abstände  $a$  und  $h$  beschrieben. Der Lenkwinkel  $\beta$  beschreibt, wie stark das Vorderrad gegenüber der Längsachse des Fahrrades eingeschlagen ist. Entsprechend Abb. 10.21 (rechts) legt  $\beta$  den auf der  $y$ -Achse liegenden Punkt  $O$  fest, um den sich das Fahrrad bei einer Kurvenfahrt dreht, und folglich auch den Winkel  $\alpha$  sowie die Abstände  $r$  und  $r_0$  zwischen den Punkten  $O$  und  $M$  bzw.  $O$  und  $H$ .

Das Fahrrad wirkt als Regelstrecke mit der Stellgröße  $\beta$  und der Regelgröße  $\theta$ . Zu einem Modell kommt man, wenn man das Fahrrad als ein invertiertes Pendel auffasst und berechnet, welche Kräfte in Abhängigkeit vom Lenkwinkel  $\beta$  auf das Pendel wirken. Nach Linearisierung um den Punkt  $\bar{\theta} = 0$  erhält man die lineare Differentialgleichung:

$$\text{Fahrrad: } \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} - \frac{mgh}{J_p}\theta(t) = \frac{mahv_0}{bJ_p} \frac{d\beta(t)}{dt} + \frac{mhv_0^2}{bJ_p}\beta(t). \quad (10.37)$$

Parameter	Bedeutung	Wert
$a$	$x$ -Koordinate des Schwerpunktes	0,60 m
$h$	$z$ -Koordinate des Schwerpunktes	1,00 m
$b$	Radabstand	1,20 m
$m$	Masse von Fahrrad und Fahrer	75 kg
$J_p$	Trägheitsmoment bezüglich der Balancierbewegung	$75 \text{ kg m}^2$
$g$	Erdbeschleunigung	$9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
$v_0$	Geschwindigkeit	$2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

1. Zeichnen Sie den Regelkreis, durch den das Balancierproblem gelöst werden soll.
2. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion der Regelstrecke und daraus die Pole und Nullstellen in Abhängigkeit von den Parametern des Fahrrades.
3. Zeichnen Sie die Wurzelortskurve des Regelkreises und untersuchen Sie, für welche Reglerverstärkung der Regelkreis stabil ist. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.
4. Betrachten Sie nun ein Fahrrad mit einer Hinterradlenkung, für das sich das Modell (10.37) nur insofern ändert, als dass der Term  $\frac{mhv_0^2}{bJ_p}\beta(t)$  mit einem Minuszeichen in die Differentialgleichung eingeht. Welche Konsequenzen hat diese Veränderung für das Balancieren des Fahrrades? Diskutieren Sie Ihr Ergebnis anhand der Wurzelortskurve.  $\square$

**Aufgabe 10.12\*** Reglerentwurf für eine allpasshaltige Regelstrecke

Für die nichtminimalphasige Regelstrecke

$$G(s) = \frac{s-1}{s+2}$$

soll die Reglerverstärkung  $k_P$  des PI-Reglers

$$K(s) = k_P \left( 1 + \frac{1}{s} \right)$$

so bestimmt werden, dass ein stabiler Regelkreis entsteht.

1. Stellen Sie die charakteristische Gleichung des Regelkreises auf und bestimmen Sie diejenigen Intervalle für die Reglerverstärkung  $k_P$ , für die der Regelkreis stabil ist. Interpretieren Sie dieses Ergebnis.
2. Zeigen Sie, dass man dasselbe Ergebnis durch Betrachtung der Wurzelortskurve erhalten kann.  $\square$

**Aufgabe 10.13\*\* Robustheitsanalyse mit Hilfe der Wurzelortskurve**

Wie kann mit Hilfe der Wurzelortskurve die Robustheit des Regelkreises gegenüber Parameterunbestimmtheiten des Regelstreckenmodells untersucht werden? Für welche Arten von Unsicherheiten in der Beschreibung der Regelstrecke eignet sich dieses Hilfsmittel besonders gut?  $\square$

## 10.4 MATLAB-Funktionen zum Reglerentwurf anhand des PN-Bildes

Außer der bereits erwähnten Funktion `pzmap` zur Berechnung des PN-Bildes sind für die Konstruktion der Wurzelortskurve zwei Funktionen notwendig. Mit

» `rlocus(offeneKette);`

kann man sich die Wurzelortskurve grafisch auf dem Bildschirm ausgeben lassen, wenn man zuvor das Modell der offenen Kette festgelegt hat. Beispielsweise entstand die in Abb. 10.9 dargestellte Wurzelortskurve als Ergebnis der folgenden Befehle:

```
» z = [0.25, 1];
» n = [0.00375, 0.0475, 0.1875, 0.25, 0];
» offeneKette = tf(z, n);
» rlocus(offeneKette);
```

Wenn man die Regelstrecke durch das Modell `Strecke` und die dynamischen Elemente des Reglers durch das Modell `Regler` beschrieben hat, kann man den Aufruf in der Form

```
» rlocus(Regler*Strecke);
```

schreiben, bei der das Produktzeichen zur Kennzeichnung der Reihenschaltung bei der Blöcke dient.

Die zweite Funktion dient der Auswahl einer geeigneten Reglerverstärkung. Nach dem Funktionsaufruf

```
» [k, Pole] = rlocfind(offeneKette)
```

erscheint ein Fadenkreuz auf dem Bildschirm, mit dem ein Punkt der Wurzelortskurve ausgewählt („angeklickt“) werden kann. Anschließend steht in der Variablen `k` der zugehörige Wert der Verstärkung  $k$  und in der Matrix `Pole` die Werte aller Pole des geschlossenen Kreises. Der erhaltene Wert für  $k$  gibt den Verstärkungsfaktor an, der vor der in `offeneKette` stehenden Übertragungsfunktion stehen muss, damit der Regelkreis den ausgewählten Pol besitzt. Die Übertragungsfunktion der offenen Kette muss dabei nicht in die Darstellung (10.14) überführt werden.

#### **Beispiel 10.4 (Forts.) Stabilisierung eines invertierten Pendels**

Für den auf S. 498 behandelten Entwurf des Reglers für das invertierte Pendel kann mit den hier eingeführten Funktionen das Programm 10.1 aufgestellt werden. Um die MATLAB-Eingaben hier auf das Wichtigste zu beschränken, wurden alle Funktionsaufrufe weggelassen, die lediglich der besseren grafischen Ausgaben dienen. Bis auf diese geringfügigen Änderungen entstanden die beiden Teile der Abbildung 10.17 mit dem angegebenen Programm.

Der mit der Funktion `rlocfind` bestimmte Verstärkungsfaktor `k` ist der Wert für den Faktor  $k_P$ , für den ein Pol des Regelkreises auf der Stabilitätsgrenze liegt.

Geht man das Programm Schritt für Schritt durch, so erkennt man, dass der Rechner nur die aufwändigen numerischen Berechnungen übernehmen kann und die Entwurfsentscheidungen dem Ingenieur überlassen bleiben. Das Verständnis der Wurzelortskurve und die Kenntnisse darüber, wie sich der qualitative Verlauf der Wurzelortskurve bei unterschiedlichen Reglern verändert, sind entscheidend, um die behandelte Aufgabe lösen zu können.

Die in Abb. 10.18 gezeigte Wurzelortskurve, die bei nicht exakter Kompensation des Regelstreckenpols durch die Reglernullstelle entsteht, kann auf ähnliche Weise erzeugt werden. Für die Simulationsuntersuchungen des geschlossenen Kreises wurde in diesem Beispiel mit dem Zustandsraummodell gearbeitet, da die Eigenbewegung maßgebend ist, die sich sehr einfach mit der Funktion `initial` aus dem Zustandsraummodell berechnen lässt. □

Die *Control System Toolbox* bietet auch eine grafische Benutzeroberfläche, mit der der Reglerentwurf mit Hilfe der Wurzelortskurve durchgeführt werden kann. Nach dem Aufruf

```
» rltool(Regelstrecke)
```

zeigt die Benutzeroberfläche die Wurzelortskurve für das System `Regelstrecke` in Verbindung mit einem Proportionalregler. Man kann weitere Pole und Nullstellen

**Programm 10.1** Reglerentwurf mit Hilfe der Wurzelortskurve  
*(Beispiel 10.4: Stabilisierung des invertierten Pendels)*

```

» zs = [40];
» ns = [1 0 -29.43];
» Pendel = tf(zs, ns);
» rlocus(Pendel);                                ...erzeugt Abb. 10.17 (links)

Verwendung eines Korrekturgliedes, das den negativen
reellen Pol kompensiert

» T=0.125;
» TD=0.216;
» kP=1;
» zPD=[kP*TD kP];
» nPD=[T 1];
» PDRegler = tf(zPD, nPD)

Berechnung der Übertragungsfunktion der offenen Kette

» offeneKette = series(PDRegler, Pendel);
» minOffeneKette = minreal(offeneKette);           ...kürzt die Übertragungsfunktion

Zeichnen der Wurzelortskurve und Auswahl eines Poles
auf der Winkelhalbierenden

» rlocus(minOffeneKette);                          ...erzeugt Abb. 10.17 (rechts)
» [k, Pole] = rlocfind(minOffeneKette)

selected_point =
0.0031 - 0.0000i

k =
0.7357

P =
-2.5782
0.0031

```

einführen, womit man den dynamischen Anteil  $\tilde{K}(s)$  des Reglers definiert, und sich dabei ansehen, wie sich die Wurzelortskurve verändert. Dieses Hilfsmittel ist nicht nur für den Reglerentwurf, sondern auch für das Verständnis der Konstruktionsprinzipien von Wurzelortskurven sehr hilfreich.

**Aufgabe 10.14\*** Wurzelortskurve eines Schwingkreises

Wurzelortskurven können nicht nur zur Untersuchung von Regelkreisen bei veränderlicher Reglerverstärkung, sondern auch zur Analyse von Systemen in Abhängigkeit von bestimmten Parametern eingesetzt werden. Voraussetzung für die Nutzung der in diesem Kapitel angegebenen Konstruktionsvorschriften ist, dass das dynamische System als ein rückgeführtes System mit variabler Rückführverstärkung interpretiert wird.

Untersuchen Sie auf diese Weise, wie sich die Eigenwerte des in Gl. (4.44) auf S. 72 beschriebenen Schwingkreises in Abhängigkeit vom Wert des Widerstandes  $R$  verändern, wenn  $L = 100 \text{ mH}$  und  $C = 10 \mu\text{F}$  vorgegeben sind.

1. Wie kann das Modell

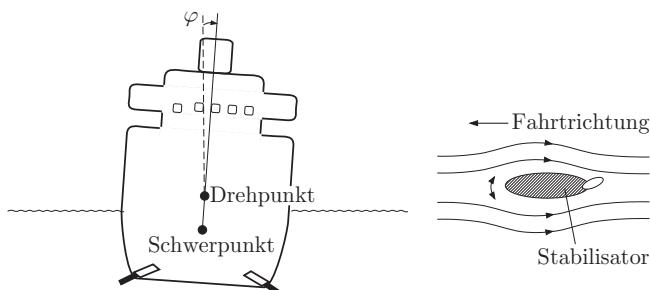
$$\begin{pmatrix} \frac{di_1(t)}{dt} \\ \frac{du_2(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \quad (10.38)$$

des ungestörten Schwingkreises als rückgekoppeltes System mit variabler Rückführverstärkung  $R$  interpretiert werden?

2. Bestimmen Sie die Wurzelortskurve und ermitteln sie den Wertebereich für den Widerstand  $R$ , für den der Schwingkreis reelle Eigenwerte besitzt und folglich so stark gedämpft ist, dass er keine periodischen Schwingungen ausführt.  $\square$

**Aufgabe 10.15\*** Dämpfung der Rollbewegung eines Schiffes

Der Drehpunkt von Schiffen um die Längsachse liegt oberhalb des Schwerpunktes, weil Luft und Wasser unterschiedliche Dichten haben (Abb. 10.22). Die Drehbewegung um diesen Punkt, die Rollen genannt wird, wird durch Wellen angeregt, die als impulsförmige Erregung betrachtet werden. Das Störverhalten des (ungeregelten) Schiffes soll als  $\text{PT}_2$ -Glied beschrieben werden, wobei sich die Modellparameter aus der Beobachtung ergeben, dass das Schiff mit einer Periodendauer von 6 Sekunden rollt. Die Dämpfung ist sehr schwach ( $d = 0,1$ ). Bei einer „Normwelle“ rollt das Schiff bis zum maximalen Winkel von  $3^\circ$ .



**Abb. 10.22:** Rollbewegung eines Schiffes

Die Rollbewegung großer Schiffe wird durch Stabilisatoren gedämpft. Dies sind zwei in Abb. (10.22) durch schwarze Striche eingetragene Stahlkonstruktionen. Ihre Wirkung

beruht auf dem gleichen Auftriebsprinzip wie bei Flugzeugflügeln. Durch die Längsbewegung des Schiffes wird der Stabilisator umströmt und erzeugt eine Auftriebskraft, die bei Nullstellung beider Stabilisatoren auf beiden Seiten des Schiffes gleich null ist. Durch gelegentliches Verdrehen der Stabilisatoren wirken die Kräfte auf beiden Seiten des Schiffes in entgegengesetzter Richtung und erzeugen ein Drehmoment, mit dem man die Rollbewegung beeinflussen kann. Zur Vereinfachung kann man annehmen, dass sich die Kraftwirkungen der Wellen und der Stabilisatoren additiv überlagern.

Die Dämpfung der Rollbewegung erfolgt durch eine P-Rückführung der Rollgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}$  auf die Verstellung der Stabilisatoren. Regelungstechnisch gesehen ist also der Stabilisator nur das Stellglied und die Stabilisierung erfolgt durch die beschriebene Rückführung, die so eingestellt wird, dass die Störübertragungsfunktion eine Dämpfung von  $d = 0,7$  besitzt, so dass sich das Schiff nach Anregung durch eine impulsförmige Welle ohne Überschwingen wieder in die senkrechte Position ( $\varphi = 0$ ) zurückbewegt.

1. Zeichnen Sie das Blockschaltbild des Regelkreises.
2. Stellen Sie das Modell des Schiffes als Regelstrecke auf, wobei Sie den Stabilisator näherungsweise durch ein P-Glied darstellen. Berechnen Sie die Schiffsbewegung bei impulsförmiger Anregung und überprüfen Sie die von Ihnen gewählten Parameter.
3. Zeichnen Sie die Wurzelortskurve des Regelkreises und wählen Sie die Reglerverstärkung.
4. Berechnen Sie das Verhalten des stabilisierten Schiffes bei impulsförmiger Anregung durch eine Windböe, die wie die Wellen ein Drehmoment auf den Schiffskörper erzeugt.
5. Vergleichen Sie den Frequenzgang des ungeregelten und des geregelten Schiffes bezüglich der Erregung durch die Welle als Eingang und den Rollwinkel als Ausgang. Diskutieren Sie Ihr Ergebnis: Würden Sie mit einem solchen Schiff mitfahren?
6. Erklären Sie mit Ihrem Ingenieurverständnis, warum das Schiff nach einer impulsförmigen Störung stets in die senkrechte Lage zurückkehrt, obwohl nicht der Winkel  $\varphi$ , sondern die Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}$  als Regelgröße verwendet wird.  $\square$

## Literaturhinweise

Die Idee, die Abhängigkeit der Pole des geschlossenen Kreises von der Reglerverstärkung durch Wurzelortskurven zu veranschaulichen, stammt von W. R. EVANS (1950) [28]. Seit dieser Zeit ist der Reglerentwurf im PN-Bild ein Standardverfahren für einschleifige Regelungen.

Regelungen mit hohen Rückführverstärkungen (*High-gain feedback*) wurden bereits von BODE [17] und HOROWITZ [43] eingesetzt, wobei durch die hohe Reglerverstärkung eine geringe Empfindlichkeit des Regelkreises bezüglich der Parameterunbestimmtheiten erreicht werden sollte. Das hier anhand der Wurzelortskurve erläuterte Vorgehen zur Sicherung der Stabilität wurde u. a. in [55] zur Erzeugung einer perfekten Regelung erweitert. Abschätzungen für die durch den Regelkreis tolerierbaren Modellunbestimmtheiten bzw. zur Berechnung der für die Sicherung der Stabilität erforderlichen Reglerverstärkung sind u. a. in [83] angegeben.

Die in der Aufgabe 10.9 verwendete Regelungsstruktur ist in [9] beschrieben. Aufgabe 10.11 entstand aus den in [6] dargestellten Untersuchungen zur Stabilisierung eines Fahrrades. Das Modell (10.33) des invertierten Pendels ist in [72] abgeleitet.

# 11

## Reglerentwurf anhand der Frequenzkennlinie der offenen Kette

Ausgehend von den Dynamikforderungen an den geschlossenen Regelkreis werden Bedingungen an die Frequenzkennlinie der offenen Kette aufgestellt, die durch eine geeignete Wahl des Reglers erfüllt werden müssen. Dann wird gezeigt, wie Entwurfsaufgaben gelöst werden können, bei denen einerseits das Führungsverhalten und andererseits das Störverhalten des Regelkreises maßgebend für die Erfüllung der Güteforderungen ist.

### 11.1 Beziehungen zwischen der Frequenzkennlinie der offenen Kette und den Güteforderungen im Zeitbereich

#### 11.1.1 Näherung des Regelkreises durch ein PT<sub>2</sub>-Glied

Das in diesem Kapitel vorgestellte Entwurfsverfahren nutzt die Tatsache, dass die Störübertragungsfunktion  $G_d(s)$  und die Führungsübertragungsfunktion  $G_w(s)$  in Abhängigkeit von der Übertragungsfunktion  $G_0(s)$  der offenen Kette dargestellt werden können, vgl. Gln. (7.7), (7.6). Durch eine geeignete Wahl des Reglers  $K(s)$  soll  $G_0(s) = G(s)K(s)$  so verändert werden, dass der geschlossene Kreis die gestellten Güteforderungen erfüllt. Als Voraussetzung für dieses Entwurfsvorgehen müssen die wichtigsten Charakteristika des Zeitverhaltens des geschlossenen Kreises

$\bar{\Sigma}$  mit Kennwerten des Bodediagramms der offenen Kette  $\Sigma_0$  in Beziehung gesetzt werden.

Um diesen Zusammenhang herstellen zu können, wird auf die bereits im Kap. 10 verwendete Näherung des Regelkreisverhaltens durch ein  $PT_2$ -Glied zurückgegriffen. Entsprechend Gl. (10.1) gilt

$$G_w(s) \approx \hat{G}_w(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2dT s + 1}. \quad (11.1)$$

Die Übertragungsfunktion  $\hat{G}_0(s)$  der offenen Kette  $\Sigma_0$ , die bei Schließung des Regelkreises dieses Führungsverhalten erzeugt, erhält man gemäß Gl. (7.6) aus der Formel

$$\begin{aligned} \hat{G}_0(s) &= \frac{\hat{G}_w(s)}{1 - \hat{G}_w(s)} \\ &= \frac{1}{T^2 s^2 + 2dT s} \\ &= \frac{1}{2dT s} \frac{1}{\frac{T}{2d}s + 1} \\ &= \frac{1}{T_I s(T_1 s + 1)} \end{aligned} \quad (11.2)$$

mit

$$T_I = 2dT = \frac{2d}{\omega_0} \quad \text{und} \quad T_1 = \frac{T}{2d} = \frac{1}{2d\omega_0}, \quad (11.3)$$

wobei wie immer  $T = \frac{1}{\omega_0}$  gesetzt wurde. Gleichung (11.2) zeigt, dass die offene Kette  $\Sigma_0$  näherungsweise ein  $IT_1$ -Verhalten haben muss, damit der geschlossene Kreis  $\bar{\Sigma}$  durch ein Schwingungsglied approximiert werden kann.

Im Folgenden wird von einer Dreiteilung des Frequenzbereiches nach Abb. 11.1 ausgegangen, die etwa der im rechten Teil von Abb. 7.13 angegebenen Einteilung entspricht. Der untere Frequenzbereich bestimmt im Wesentlichen das statische Verhalten des geschlossenen Kreises, der mittlere Bereich wichtige dynamische Eigenschaften und der obere Bereich stellt den Unempfindlichkeitsbereich dar, in dem die Regelung wirkungslos ist. Im Folgenden wird angenommen, dass die Approximation  $\hat{G}_w(s)$  für  $G_w(s)$  im mittleren Frequenzbereich gültig ist.

### 11.1.2 Statisches Verhalten des Regelkreises

Die Approximation  $\hat{G}_0(s)$  hat die in Gl. (7.32) angegebene typische Form, wobei  $q = 0$ ,  $n = 2$ ,  $l = 1$  gilt. Für sprungförmige Führungs- und Störsignale gibt es deshalb keine bleibende Regelabweichung:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0.$$

Wie im Abschn. 7.3 untersucht wurde, gilt diese Aussage auch dann, wenn die offene Kette  $\Sigma_0$  von höherer Ordnung als  $\hat{G}_0(s)$  ist und I-Verhalten besitzt ( $l \geq 1$ ).

Hat die offene Kette  $\Sigma_0$  P-Verhalten ( $l = 0$  in Gl. (7.32)), so kann  $G_0(s)$  für sehr kleine Frequenzen  $s$  nicht durch  $\hat{G}_0(s)$  approximiert werden, sondern es gilt

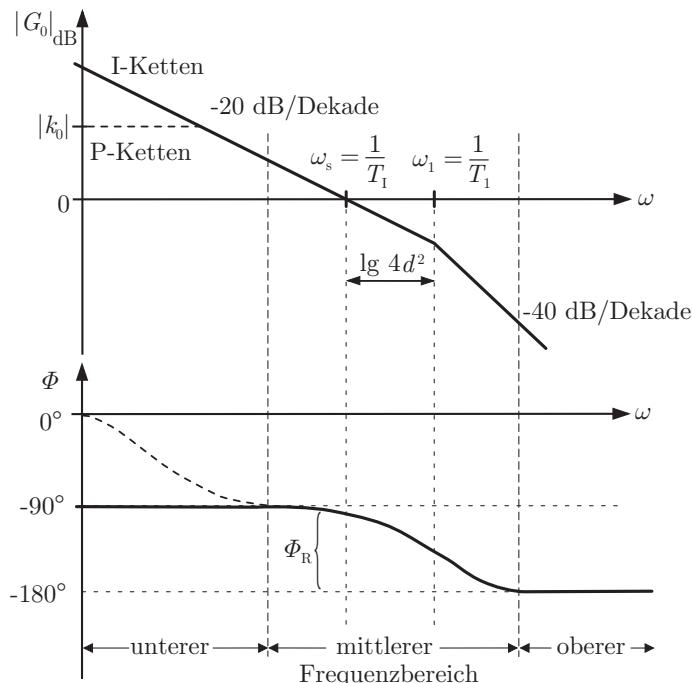
$$|G_0(s)| \approx |k_0| \quad \text{für kleines } s.$$

Der Regelkreis  $\bar{\Sigma}$  besitzt deshalb für sprungförmige Erregung eine bleibende Regelabweichung entsprechend Gl. (7.33)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{1}{1 + k_0},$$

wobei  $k_0$  die statische Verstärkung der offenen Kette darstellt.

Im Bodediagramm unterscheiden sich P- und I-Ketten im Amplitudengang für kleine Kreisfrequenzen (Abb. 11.1). Während bei P-Ketten  $|G_0(j\omega)|_{\text{dB}}$  für kleine Frequenzen konstant ist, hat der Amplitudengang von I-Ketten auch bei kleinen Frequenzen eine Neigung von  $-20 \text{ dB/Dekade}$ .



**Abb. 11.1:** Bodediagramm der offenen Kette  $\Sigma_0$

### 11.1.3 Führungsverhalten des Regelkreises

Der Amplitudengang von  $\hat{G}_0(j\omega)$  hat den in Abb. 11.1 gezeigten prinzipiellen Verlauf, wobei  $\omega_1 = \frac{1}{T_1}$  gilt.  $\omega_s$  bezeichnet die Schnittfrequenz. Ob die Knickfrequenz  $\omega_1$  rechts oder links von  $\omega_s$  liegt, hängt von der Wahl von  $d$  und  $T$  in Gl. (10.1) ab. Wie sich im Folgenden herausstellen wird, ist anzustreben, dass

$$\omega_s < \omega_1$$

gilt.

Aus dem im Abschn. 8.5.5 angegebenen Phasenrandkriterium geht hervor, dass die Schnittphase  $\phi(\omega_s)$  betragsmäßig kleiner sein muss als  $180^\circ$ , damit der Regelkreis stabil ist. Andererseits haben die im Abschn. 6.7 eingeführten Approximationen für Amplituden- und Phasengang rationaler Übertragungsglieder gezeigt, dass zwischen der Neigung des Amplitudenganges und der Phase ein enger Zusammenhang besteht. Liegen die Knickfrequenzen von  $G_0(j\omega)$  weit genug auseinander, so ist bekannt, dass zu den Teilen des Amplitudenganges mit der Neigung von  $-20$  dB/Dekade eine Phase zwischen  $-90^\circ$  und  $-180^\circ$  gehört. Deshalb ist es zweckmäßig zu fordern, dass der Amplitudengang von  $G_0(j\omega)$  in der Nähe der Schnittfrequenz  $\omega_s$  um  $20$  dB pro Dekade abfällt, so dass der Phasenrand  $\Phi_R$  positiv und der Regelkreis stabil ist. Für die Approximation  $\hat{G}_0(j\omega)$  wird deshalb  $\omega_s < \omega_1$  gefordert, woraus  $\omega_s < \frac{1}{T_1}$  folgt.

Welche weiteren Konsequenzen diese Forderung auf das dynamische Verhalten des Regelkreises  $\bar{\Sigma}$  hat, kann aus der Beziehung  $|\hat{G}_0(j\omega_s)| = 1$  abgeleitet werden. Aus (11.2) erhält man

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{j2d \frac{\omega_s}{\omega_0} - (\frac{\omega_s}{\omega_0})^2} \right| &= 1 \\ \frac{\omega_s}{\omega_0} &= \sqrt{\sqrt{4d^4 + 1} - 2d^2}. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Andererseits gilt

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1} = 2d\omega_0.$$

Die Forderung  $\omega_s < \omega_1$  ist also genau dann eingehalten, wenn die Bedingung

$$\sqrt{\sqrt{4d^4 + 1} - 2d^2} < 2d$$

erfüllt ist, was für  $d > 0,42$  der Fall ist.

Abbildung 10.3 auf S. 478 zeigt die Übergangsfunktionen, die zu  $\hat{G}_w(s)$  nach (10.1) für unterschiedliche Dämpfungsfaktoren  $d$  gehören. Dabei wird offensichtlich, dass die zu  $d > 0,4$  gehörenden Funktionen ein für Regelkreise sehr zweckmäßiges Einschwingen aufweisen. Das heißt, dass mit der Forderung  $\omega_s < \omega_1$  neben der Stabilität des Regelkreises auch ein ausreichend gedämpftes Einschwingen der Führungsübergangsfunktion erreicht wird.

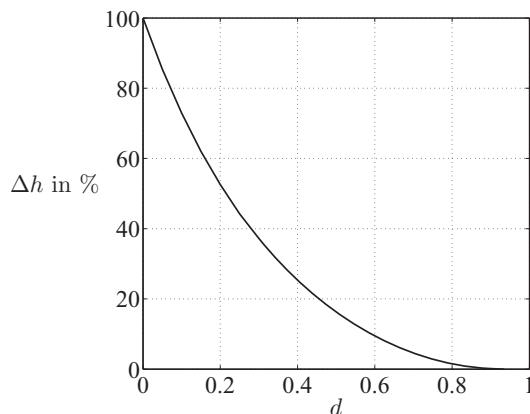


Abb. 11.2: Abhängigkeit der Überschwingweite  $\Delta h$  von der Dämpfung  $d$

Diese qualitative Aussage über das Führungsverhalten kann genauer gefasst werden, wenn die Überschwingweite  $\Delta h$  in Abhängigkeit von den Parametern von  $\hat{G}_0(s)$  dargestellt wird. Dafür wird  $\hat{G}_0$  aus Gl. (11.2) in

$$\hat{G}_0(s) = \frac{1}{aT_1 s (T_1 s + 1)}$$

umgeformt, wobei der *Einstellfaktor*  $a$  entsprechend

$$a = \frac{T_1}{T_1} = 4d^2$$

eingeführt wurde und die rechte Seite aus Gl. (11.3) folgt. Die Bezeichnung „Einstellfaktor“ ist dadurch begründet, dass dieser Faktor – wie sich später herausstellen wird – zur Einstellung der Überschwingweite verwendet werden kann. Aufgrund der Forderung  $d > 0,42$  wird  $\hat{G}_0$  im Folgenden nur für  $a > 1$  betrachtet.

Zunächst ist festzustellen, dass  $a$  direkt aus dem Bodediagramm der offenen Kette  $\Sigma_0$  in Abb. 11.1 abgelesen werden kann. Ist  $a \gg 1$ , so liegen Schnittfrequenz  $\omega_s$  und Knickfrequenz  $\omega_1$  so weit auseinander, dass der Amplitudengang für  $\omega = 0 \dots \omega_s$  durch die Geradenapproximation für den I-Anteil gut angenähert wird. Folglich gilt  $\omega_s \approx \frac{1}{T_1} = \frac{1}{aT_1}$ . Daraus folgt

$$\lg \omega_1 - \lg \omega_s = \lg \frac{\omega_1}{\omega_s} \approx \lg \frac{\frac{1}{T_1}}{\frac{1}{aT_1}} = \lg a.$$

Das heißt,  $\lg a$  beschreibt näherungsweise den Abstand des Knickpunktes auf der logarithmisch geteilten Frequenzachse von der Schnittfrequenz. Man spricht auch vom *Knickpunktabstand*.

Für die Führungsübertragungsfunktion  $\hat{G}_w(s)$  des Regelkreises  $\bar{\Sigma}$  nach Gl. (11.1) erhält man durch Umstellung der Gl. (11.3) nach  $T$  und  $d$  unter Nutzung des eingeführten Einstellfaktors  $a$  die Beziehungen

$$T = \sqrt{a} T_1, \quad d = \frac{\sqrt{a}}{2}.$$

Daraus folgt mit Gl. (10.5)

$$\Delta h = e^{-\frac{\pi d}{\sqrt{1-d^2}}} = e^{-\frac{\pi \sqrt{a}}{2\sqrt{1-\frac{a}{4}}}} \quad \text{für } d < 1. \quad (11.5)$$

Das heißt, die Überschwingweite hängt nur vom Einstellfaktor  $a$  ab.

Abbildung 11.3 zeigt, dass die Überschwingweite monoton mit steigendem Knickpunktabstand abnimmt. Nach  $a$  aufgelöst erhält man

Knickpunktabstand:  $a = 4 \frac{(\ln \Delta h)^2}{\pi^2 + (\ln \Delta h)^2}$

als Bemessungsvorschrift für  $a$  bei vorgegebener Überschwingweite  $\Delta h$ . Man nutzt aber i. Allg. die Abb. 11.3, um  $a$  für ein vorgegebenes  $\Delta h$  festzulegen.

Die Abbildung zeigt, dass für  $a > 4$  kein Überschwingen auftritt. Dies entspricht im Bodediagramm einem Knickpunktabstand, der größer als  $\lg 4 = 0,6$  ist. Für  $a < 1$  stellt die angegebene Beziehung zwischen  $a$  und  $\Delta h$  nur eine grobe Näherung dar, wie man aus der angegebenen Ableitung dieser Formel erkennen kann.

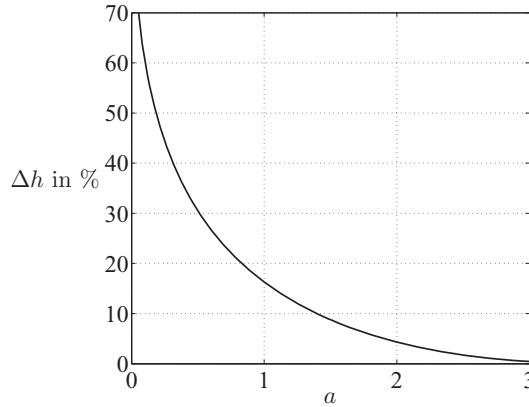


Abb. 11.3: Abhängigkeit der Überschwingweite  $\Delta h$  vom Einstellfaktor  $a$

Weitere Zusammenhänge können auf ähnlichem Wege abgeleitet werden. Hier sei nur noch auf einen näherungsweisen Zusammenhang zwischen der Phase an der Schnittfrequenz und der Überschwingweite hingewiesen. Es gilt

$$\phi(\omega_s) = \begin{cases} -109^\circ(1 + \Delta h) & \text{für } 0 \leq \Delta h \leq 0,3 \\ -122^\circ - \Delta h 66^\circ & \text{für } 0,3 < \Delta h \leq 0,7. \end{cases}$$

Diese Beziehung gilt mit guter Genauigkeit auch für offene Ketten  $\Sigma_0$ , deren Übertragungsfunktion gebrochen rational und nicht auf IT<sub>1</sub>-Verhalten beschränkt ist. Sie zeigt, dass die Überschwingweite mit steigendem Betrag der Phase  $\phi(\omega_s)$ , also abnehmendem Phasenrand  $\Phi_R$ , zunimmt.

Eine weitere Abschätzung betrifft die Zeit  $T_m$ , bei der die Übergangsfunktion des Regelkreises  $\bar{\Sigma}$  den Wert  $1 + \Delta h$  erreicht. Diese Zeit heißt *Überschwingzeit* oder Einschwingzeit. Sie wird mit steigender Schnittfrequenz  $\omega_s$  kleiner, wobei die folgende Näherung gilt:

Schnittfrequenz:  $\omega_s \approx \frac{\pi}{T_m}$ .

(11.6)

Der Schnittfrequenz  $\omega_s = 1$  entspricht also näherungsweise einer Überschwingzeit  $T_m$  von drei Zeiteinheiten.

Im oberen Frequenzbereich (Unempfindlichkeitsbereich), der in der Approximation  $\hat{G}_0(s)$  deutlich oberhalb der Knickfrequenz  $\omega_1$  beginnt, wird gefordert, dass der Amplitudengang möglichst große Neigung aufweist. Dieser Bereich hat vernachlässigbaren Einfluss auf das Übergangsverhalten des Regelkreises.

**Vorgaben für den Phasengang.** Die bisherige Betrachtungen bezogen sich auf den Amplitudengang, den die offene Kette  $\Sigma_0$  zur Erfüllung von Güteforderungen durch den Regelkreis  $\bar{\Sigma}$  besitzen soll. Am Beispiel des Zusammenhangs von Dämpfung  $d$  und Phasenrand  $\Phi_R$  soll jetzt gezeigt werden, wie Forderungen an den Phasengang behandelt werden können.

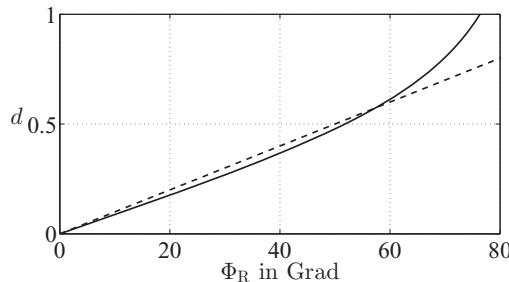


Abb. 11.4: Zusammenhang zwischen Phasenrand  $\Phi_R$  und Dämpfung  $d$

Für die IT<sub>1</sub>-Approximation der offenen Kette  $\Sigma_0$  kann man die Phasenverschiebung an der Schnittfrequenz  $\omega_s$  und daraus den Phasenrand berechnen, wobei man unter Verwendung von Gl. (11.4) die Beziehung

$$\Phi_R = \arctan \frac{2d}{\sqrt{\sqrt{4d^4 + 1} - 2d^2}}$$

erhält. Dieser Zusammenhang zwischen dem Phasenrand  $\Phi_R$  und der Dämpfung  $d$  ist in Abb. 11.4 grafisch dargestellt. Für den beim Reglerentwurf besonders interessanten Bereich von  $d = 0,4 \dots 0,8$  liegt der Phasenrand bei  $40^\circ \dots 70^\circ$ . Die in der Abbildung eingetragene Approximation dieses Zusammenhangs durch eine Gerade zeigt, dass bei vorgegebener Dämpfung der Phasenrand entsprechend

$$\text{Phasenrand: } \Phi_R \approx d \cdot 100^\circ \quad (11.7)$$

zu wählen ist.

Aufgrund dieser Beziehung zwischen  $d$  und  $\Phi_R$  sowie der bereits früher beschriebenen Beziehung zwischen  $d$  und  $\Delta h$  erkennt man, dass mit steigendem Phasenrand die Dämpfung steigt und die Überschwingweite sinkt. Man kann deshalb auch den Phasenrand direkt als Dynamikforderung vorschreiben. Dabei muss die Forderung nach einem Phasenrand von  $30^\circ$  als eine Minimalforderung angesehen werden, die jeder Regelkreis erfüllen soll.

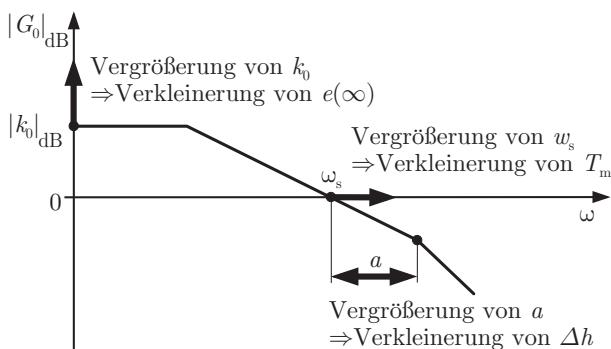


Abb. 11.5: Zusammenfassung der Entwurfskriterien

**Zusammenfassung.** Die für ein gutes Führungsverhalten des Regelkreises  $\bar{\Sigma}$  bei sprungförmiger Führungsgröße zu erfüllenden Forderungen an den Amplitudengang der offenen Kette  $\Sigma_0$  sind in Abb. 11.5 zusammengefasst:

- Eine Vergrößerung der Kreisverstärkung  $|k_0|$  führt bei P-Ketten zu einer Verkleinerung der bleibenden Regelabweichung  $e(\infty)$ . Am besten ist es, wenn man eine I-Kette erzeugt, für die der entstehende Regelkreis keine bleibende Regelabweichung besitzt:  $e(\infty) = 0$ .
- Der Regelkreis reagiert schneller (kleinere Überschwingzeit  $T_m$ ), wenn die Schnittfrequenz  $\omega_s$  vergrößert wird.
- Der Regelkreis wird stärker gedämpft und hat folglich eine kleinere Überschwingweite  $\Delta h$ , wenn der Knickpunktabstand  $a$  vergrößert wird.

**Aufgabe 11.1** Forderung an das Bodediagramm für eine gegebene Beruhigungszeit

Welche Forderungen muss das Frequenzkennliniendiagramm der offenen Kette erfüllen, damit der Regelkreis eine vorgegebene Beruhigungszeit  $T_{5\%}$  (näherungsweise) besitzt? Leiten Sie diese Bedingungen aus der Näherung (10.6) her.  $\square$

**Aufgabe 11.2** Bleibende Regelabweichung bei rampenförmiger Führungsgröße

Betrachtet wird ein Regelkreis, der mit einer rampenförmigen Führungsgröße  $w(t) = t\sigma(t)$  beaufschlagt wird.

1. Berechnen Sie die bleibende Regelabweichung in Abhängigkeit vom Frequenzgang der offenen Kette.
2. Unter welcher Bedingung an die offene Kette tritt keine bleibende Regelabweichung auf? Woran erkennt man im Bodediagramm, dass diese Bedingung erfüllt ist?  $\square$

**Aufgabe 11.3\*\*** Reglerentwurf für Totzeitsysteme

Welche Bedingungen müssen an die Frequenzkennlinie der offenen Kette gestellt werden, wenn die Regelstrecke ein Totzeitglied enthält? Überlegen Sie sich zur Beantwortung dieser Frage, wie die Betrachtungen des Abschnitts 11.1 modifiziert werden müssen, um die Totzeit zu berücksichtigen. Inwiefern beschränkt die Totzeit die erreichbare Regelgüte?  $\square$

#### 11.1.4 Störverhalten des Regelkreises

**Störungen am Regelstreckenausgang.** Um das Störverhalten eines Regelkreises  $\bar{\Sigma}$  zu beurteilen, betrachtet man häufig die auf den Ausgang der Regelstrecke  $\Sigma_S$  verschobene Störung. Für die Störübertragungsfunktion des Regelkreises  $\bar{\Sigma}$  gilt dann Gl. (7.17)

$$G_d(s) = \frac{1}{1 + G(s)K(s)} = 1 - G_w(s),$$

aus der für die Übergangsfunktionen

$$\begin{aligned} h_w(t) &\circlearrowleft \frac{1}{s} G_w(s) \\ h_d(t) &\circlearrowleft \frac{1}{s} G_d(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} G_w(s) \end{aligned}$$

die Beziehung

$$h_d(t) = 1 - h_w(t) \quad (11.8)$$

folgt. Da bei der Betrachtung der Führungsübergangsfunktion  $h_w(t)$  mit der Führungsgröße  $w(t) = \sigma(t)$  gearbeitet wird, während bei der Störübergangsfunktion

die Beziehung  $w(t) = 0$  gilt, erhält man aus den angegebenen Beziehungen für die Regelabweichung in den beiden betrachteten Fällen

$$e(t) = 1 - h_w(t) \quad \text{bzw.} \quad e(t) = h_d(t).$$

Aufgrund von Gl. (11.8) tritt also in beiden Fällen betragsmäßig dieselbe Regelabweichung auf (Abb. 7.3 auf S. 348). Ein Regelkreis mit gutem Führungsverhalten hat also für Störungen am Regelstreckenausgang gleichzeitig ein gutes Störverhalten. Wird der Regler so entworfen, dass die Führungsübergangsfunktion ein kleines Überschwingen

$$\Delta h = h_w(T_m) - 1$$

aufweist und schnell einschwingt, so ist gleichzeitig gesichert, dass der Regelkreis auch für Störungen am Ausgang ein kleines Überschwingen

$$\Delta h_d = h_d(T_m) = 1 - h_w(T_m) = -\Delta h$$

besitzt und genauso schnell wie bei Führungsgrößenänderungen den stationären Endwert erreicht.

Bei sprungförmigen Störungen am Regelstreckenausgang gelten für den Reglerentwurf deshalb dieselben Regeln wie für den Entwurf auf gutes Führungsverhalten. Die Forderungen an die Überschwingweite  $\Delta h_d = -\Delta h$  und die Überschwingzeit  $T_m$  werden in der im Abschn. 11.1.3 angegebenen Weise in Forderungen an die Schnittfrequenz  $\omega_s$  und den Knickpunktabstand  $a$  überführt.

**Verzögerte Störung.** Die Transformation der Störung an den Regelstreckenausgang bringt es i. Allg. mit sich, dass nicht mehr mit sprungförmigen Störsignalen gerechnet werden darf, denn die Wirkung der Störung auf den Ausgang  $y$  ist durch den Teil der Regelstrecke verzögert, den die Störung bis zur Regelgröße durchlaufen muss. Man kann auch in diesem Falle weiterhin davon ausgehen, dass die Störung am Regelstreckenausgang eintritt, darf jedoch nicht mehr gleichzeitig annehmen, dass die maßgebenden Störfälle durch sprungförmige Störsignale ausreichend gut beschrieben werden. Statt dessen muss mit einer verzögerten Störung gerechnet werden, die durch

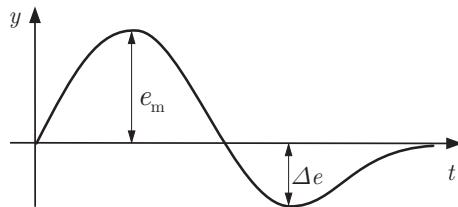
$$D(s) = G_{yd}(s) \frac{1}{s}$$

beschrieben ist, wobei  $D(s)$  die auf den Ausgang wirkende Störung und  $G_{yd}(s)$  die Übertragungsfunktion von der Eintrittsstelle der Störung zum Regelstreckenausgang darstellt. Vereinfachend werden zur Beschreibung dieses Signalweges Verzögerungsglieder

$$G_{yd}(s) = \frac{k_{yd}}{\prod_{i=1}^{n_d} (T_{dis} + 1)} \quad (11.9)$$

verwendet.

Für verzögerte Störungen hat der Regelkreis  $\bar{\Sigma}$  ein anderes Verhalten als für sprungförmige Störungen, da der Regler der Störung bereits entgegenwirken kann,



**Abb. 11.6:** Störverhalten des Regelkreises bei verzögerter Störung am Streckenausgang

bevor die Störung ihre maximale Wirkung auf die Regelgröße erreicht hat. Zu Beginn der Störeinwirkung springt die Regelgröße nicht auf den Wert  $y(0) = 1$ , sondern steigt stetig auf den maximalen Wert  $e_m$  an. Das Überschwingen  $\Delta e$ , das der Überschwingweite  $\Delta h_d$  bei sprungförmiger Störung entspricht, tritt später auf und ist kleiner (Abb. 11.6).

Wie stark die Störung den Streckenausgang im geschlossenen Kreis beeinflusst, hängt vom Charakter der an den Streckenausgang transformierten Störung  $D(s)$ , der Regelstrecke  $G(s)$  und dem Regler  $K(s)$  ab und kann für jeden Regelkreis im Einzelnen nachgerechnet werden. Für den Entwurf sind Abschätzungen dieser Wirkung wichtig, um ähnlich wie beim Führungsverhalten die Reglerparameter zielgerichtet auswählen zu können. Im Folgenden werden deshalb die Kenngrößen  $e_m$  und  $\Delta e$  des Störverhaltens zur Überschwingweite  $\Delta h$  der Führungsübergangsfunktion in Beziehung gesetzt. Die dabei erhaltenen Richtwerte stellen einen Zusammenhang zwischen dem Entwurf auf Führungsverhalten und den dabei gleichzeitig erreichbaren Eigenschaften des Störverhaltens her.

Wie zuvor wird mit einer  $PT_2$ -Approximation (11.1) der Führungsübertragungsfunktion des Regelkreises gearbeitet. Die Verzögerung der Störung wird durch das  $PT_1$ -Glied

$$\hat{G}_{yd}(s) = \frac{k_{yd}}{T_\Sigma s + 1}$$

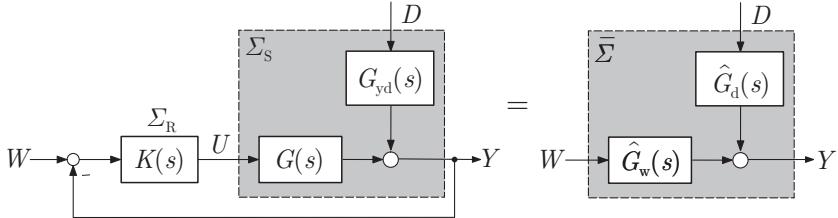
beschrieben, dessen Zeitkonstante  $T_\Sigma$  die Summenzeitkonstante aller in  $G_{yd}(s)$  zusammengefasster Verzögerungsglieder darstellt. In Beziehung zu Gl. (11.9) gilt also

$$T_\Sigma = \sum_{i=1}^{n_d} T_{di}.$$

Durch den Verstärkungsfaktor  $k_{yd}$  wird berücksichtigt, dass die Störeinwirkung durch die Regelstrecke verstärkt oder gemindert werden kann.

Unter Verwendung des in Abb. 11.7 gezeigten Blockschaltbildes kann jetzt ein Zusammenhang zwischen dem Führungsverhalten und dem Störverhalten des Regelkreises  $\bar{\Sigma}$  hergestellt werden. Für das Führungsverhalten gilt

$$G_w(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} \approx \hat{G}_w(s),$$



**Abb. 11.7:** Regelkreis  $\bar{\Sigma}$  mit der auf den Ausgang der Regelstrecke transformierten Störung

während man für das Störverhalten die Beziehung

$$G_d(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{1}{1 + G(s)K(s)} G_{yd}(s)$$

erhält. Aus diesen Gleichungen folgen die Beziehungen

$$\begin{aligned} G_d(s) &= (1 - G_w(s)) G_{yd}(s) \\ &\approx (1 - \hat{G}_w(s)) \hat{G}_{yd}(s) = \hat{G}_d(s) \end{aligned}$$

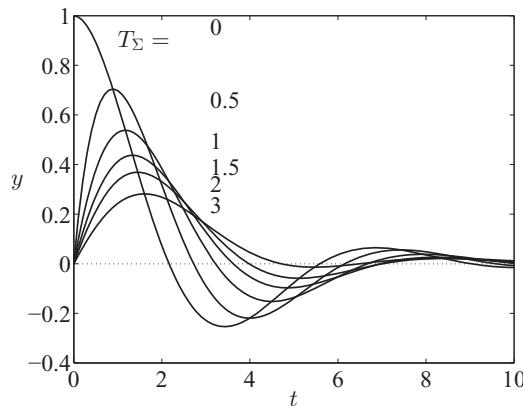
und daraus mit der PT<sub>2</sub>-Approximation (11.1) des Führungsverhaltens die folgende Näherung für das Störverhalten:

$$G_d(s) \approx \hat{G}_d(s) = \frac{T^2 s^2 + 2dT s}{(T^2 s^2 + 2dT s + 1)} \frac{k_{yd}}{(T_\Sigma s + 1)}. \quad (11.10)$$

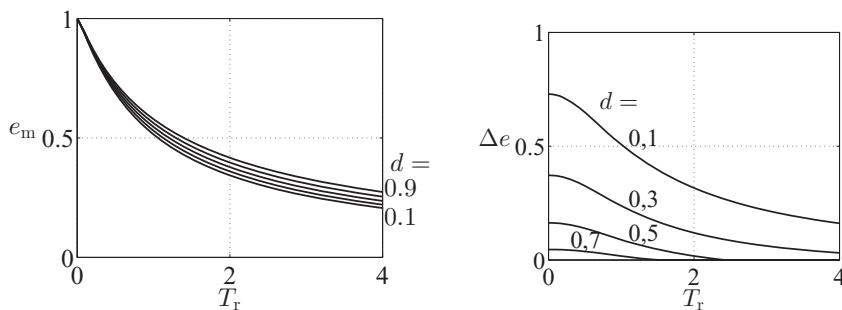
Während die Parameter  $d$  und  $T$  das Führungsverhalten kennzeichnen, charakterisieren  $T_\Sigma$  und  $k_{yd}$  die Verzögerung und die Verstärkung, mit der die Störung auf den Regelkreis wirkt. Für jede Wertekombination  $(d, T, T_\Sigma, k_{yd})$  kann mit Hilfe der Approximation (11.10) das Störverhalten untersucht werden. Dabei entstehen die im Folgenden behandelten Abbildungen, die für  $k_{yd} = 1$  gelten und bei Anwendungen auf den dort vorhandenen Verstärkungsfaktor umgerechnet werden müssen.

Welche Eigenschaften im gestörten Regelkreis zu erwarten sind, zeigt Abb. 11.8. Dort ist die Störübergangsfunktion für einen Regelkreis gezeigt, für den  $T = 1$  und  $d = 0,4$  gilt. Für die unverzögerte Störung erhält man das bereits in Abb. 7.3 gezeigte Verhalten, bei dem die sprungförmige Störung die Regelgröße sofort auf den Wert eins verschiebt und bei dem diese Störwirkung mit mehr oder weniger Überschwingen durch die Regelung abgebaut wird. Ist  $T_\Sigma > 0$ , so hat die Störübergangsfunktion den bereits in Abb. 11.6 gezeigten prinzipiellen Verlauf. Die Störwirkung tritt langsamer ein und ist durch die maximale Störwirkung  $e_m$  und das Überschwingen  $\Delta e$  charakterisiert. Je größer  $T_\Sigma$  ist, desto flacher ist die Übergangsfunktion. Für  $T_\Sigma > 3$  ist  $\Delta e$  gleich null.

Die Abbildung gilt übrigens für beliebige  $T$ , denn man kann die Zeitachse bezüglich  $T$  normieren. Die Kurven in Abb. 11.8 haben dann den Parameter  $T_r = \frac{T_\Sigma}{T}$ .



**Abb. 11.8:** Störübergangsfunktion bei verzögerter Störung ( $d = 0,4$ ,  $T = 1$ ,  $k_{yd} = 1$ )



**Abb. 11.9:**  $e_m$  und  $\Delta e$  in Abhängigkeit von  $T_r = \frac{T_\Sigma}{T}$  und dem Parameter  $d$  bei  $k_{yd} = 1$

Abbildung 11.9 (links) zeigt, wie sich die maximale Störwirkung  $e_m$  in Abhängigkeit von  $T_r$  verändert. Wie bereits aus Abb. 11.8 bekannt ist, fällt  $e_m$  mit steigender Zeitkonstante des Störmodells. Wichtig für den Entwurf ist, dass dieser Zusammenhang praktisch unabhängig von der Dämpfung  $d$  des Führungsverhaltens ist. Das heißt,  $e_m$  hängt für eine vorgegebene Summenzeitkonstante  $T_\Sigma$  der Störung nur von der Zeitkonstante  $T$  des Regelkreises, nicht jedoch von der Dämpfung  $d$  ab. Je schneller das Führungsverhalten ist, d. h., je kleiner  $T$  im Vergleich zu  $T_\Sigma$  gemacht wird (was i. Allg. eine hohe Reglerverstärkung erfordert), desto weniger wirkt sich eine Störung auf den Regelkreis aus. Dieser Zusammenhang ist plausibel, denn die Zeitkonstante  $T$  beschreibt, wie schnell der Regelkreis auf eine Regelabweichung reagiert. Je schneller diese Reaktion eintritt, umso kleiner ist die maximale Störauswirkung.

Wesentlich komplizierter ist der Zusammenhang von  $\Delta e$  und  $T_r$ . Zwar ist auch hier zu erkennen, dass die Störwirkung umso kleiner wird, je größer die Verzöge-

rung  $T_{\Sigma}$  ist. Das betrachtete Verhältnis von Stör- und Führungsverhalten hängt jedoch stark von der Dämpfung  $d$  ab (Abb. 11.9 (rechts)). Je stärker das Führungsverhalten gedämpft ist, umso schneller verschwindet das Überschwingen  $\Delta e$  der Störübergangsfunktion. Bei einer Dämpfung von  $d = 0,5$  des Führungsverhaltens ist  $\Delta e$  praktisch bedeutungslos, wenn die Zeitkonstante  $T_{\Sigma}$  mindestens doppelt so groß wie  $T$  ist. Für dieselbe Störung liegt der maximale Wert  $e_m$  der Störübergangsfunktion übrigens bei 0,4.

**Zusammenfassung.** Diese Betrachtungen zeigen, wie Forderungen an das Störverhalten in Forderungen an das Führungsverhalten übersetzt werden können, so dass der Entwurf des Reglers dann wie bisher auf Führungsverhalten erfolgen kann.

- Forderungen bezüglich der maximalen Störwirkung  $e_m$  können nur dadurch erfüllt werden, dass der Regelkreis durch eine geeignete Wahl des Reglers eine genügend kleine Zeitkonstante  $T$  erhält. Dadurch wird für eine bekannte Summenzeitkonstante  $T_{\Sigma}$  und Verstärkung  $k_{yd}$  das Verhältnis  $T_r = \frac{T_{\Sigma}}{T}$  festgelegt.
- Forderungen an die Überschwingweite  $\Delta e$  führen bei bekanntem  $T_r$  auf Vorgaben für die Dämpfung  $d$  des Führungsverhaltens.

Unter Verwendung von Gl. (11.3) erhält man aus  $T$  und  $d$  Vorgaben für

$$T_1 = 2dT \quad \text{und} \quad T_1 = \frac{T}{2d}$$

und daraus für die im Frequenzkennliniendiagramm der offenen Kette ablesbaren Parameter

$$a = \frac{T_1}{T_1} = 4d^2 \quad \text{und} \quad \omega_s = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{2dT}.$$

Ein mit diesen Vorgaben für die offene Kette entworfener Regelkreis besitzt näherungsweise das gewünschte Störverhalten.

#### Aufgabe 11.4 Verhalten des Regelkreises bei Störung am Eingang der Regelstrecke

Betrachten Sie Regelkreise, bei denen die maßgebende Störung am Eingang der Regelstrecke auftritt, also zur Stellgröße addiert wird.

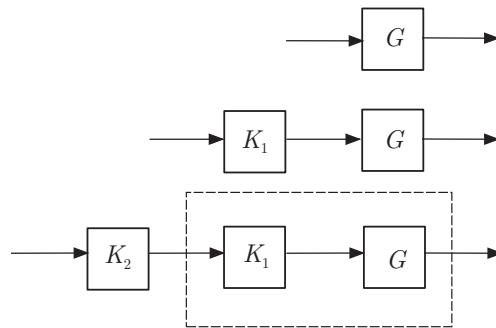
1. Zeichnen Sie das Blockschaltbild.
2. Nennen Sie Regelungsaufgaben, bei denen der Regelkreis die gezeichnete Struktur besitzt.
3. Interpretieren Sie die Abbildungen 11.8 und 11.9 für derartige Regelkreise unter der Annahme, dass die Zeitkonstante  $T$  des Regelkreises in der Größenordnung der Summenzeitkonstante der Regelstrecke liegt.  $\square$

## 11.2 Reglerentwurf unter Beachtung des Führungsverhaltens

### 11.2.1 Entwurfsverfahren

Beim Entwurf unter Verwendung des Frequenzkennliniendiagramms wird das Ziel verfolgt, den Frequenzgang der offenen Kette  $\Sigma_0$  durch Auswahl eines geeigneten Reglerfrequenzganges so zu verändern, dass er eine gewünschte Form erhält. Dieses Verformen des Frequenzganges wird sehr treffend in der englischen Sprache als *loopshaping* bezeichnet. Dabei wird davon ausgegangen, dass die Güteforderungen an den Regelkreis  $\bar{\Sigma}$  in Kennwerte für die Frequenzkennlinie der offenen Kette  $\Sigma_0$  umgeformt wurden, also eine oder mehrere Güteforderungen folgender Form vorliegen:

- Forderung, dass die offene Kette für kleine Frequenzen I-Verhalten besitzt
- Vorgaben für die Schnittfrequenz  $\omega_s$
- Forderung, dass die Neigung der Amplitudenkurve in der Nähe der Schnittfrequenz  $-20 \text{ dB/Dekade}$  betragen soll
- Vorgaben für den Einstellfaktor  $a$
- Vorgaben für den Phasenrand  $\Phi_R$ .



**Abb. 11.10:** Entwurfsschritte

Amplitudengang und Phasengang der offenen Kette setzen sich entsprechend

$$\begin{aligned} |G_0(j\omega)|_{\text{dB}} &= |G(j\omega)|_{\text{dB}} + |K(j\omega)|_{\text{dB}} \\ \arg G_0(j\omega) &= \arg G(j\omega) + \arg K(j\omega) \end{aligned}$$

additiv aus den Amplitudengängen bzw. Phasengängen der Strecke  $G(j\omega)$  und des Reglers  $K(j\omega)$  zusammen. Besteht der Regler aus der Reihenschaltung mehrerer Komponenten (Abb. 11.10)

$$K(j\omega) = K_1(j\omega) K_2(j\omega) \dots ,$$

so werden die Amplituden- und Phasengänge dieser Komponenten schrittweise zu  $G(j\omega)$  addiert

$$|G_0(j\omega)|_{dB} = |G(j\omega)|_{dB} + |K_1(j\omega)|_{dB} + |K_2(j\omega)|_{dB} + \dots$$

$$\arg G_0(j\omega) = \arg G(j\omega) + \arg K_1(j\omega) + \arg K_2(j\omega) + \dots$$

Der Entwurf vollzieht sich in folgenden Schritten:

---

### **Entwurfsverfahren 11.1 Reglerentwurf anhand der Frequenzkennlinie der offenen Kette**

---

**Gegeben:** Übertragungsfunktion  $G(s)$  der Regelstrecke  $\Sigma_S$   
Güteforderungen an den Regelkreis  $\bar{\Sigma}$

1. Ermitteln Sie aus den Güteforderungen an den geschlossenen Kreis  $\bar{\Sigma}$  Vorgaben für die Frequenzkennlinie der offenen Kette  $\Sigma_0$ .
2. Zeichnen Sie die Frequenzkennlinie der Regelstrecke  $\Sigma_S$ .
3. Addieren Sie zur Frequenzkennlinie der Strecke die Frequenzkennlinie eines oder mehrerer Regler bzw. Korrekturglieder  $\Sigma_R$ . Ihr Ziel ist es dabei, die an die Frequenzkennlinie der offenen Kette gestellten Güteforderungen zu erfüllen.
4. Analysieren Sie das Zeitverhalten des geschlossenen Kreises  $\bar{\Sigma}$ . Entspricht das Verhalten nicht den gegebenen Güteforderungen, so müssen Sie den Entwurf unter Verwendung anderer Regler  $\Sigma_R$  wiederholen.

**Ergebnis:** Übertragungsfunktion  $K(s)$  des Reglers  $\Sigma_R$

---

Die Wirkung der bekannten Regler und Korrekturglieder für die Frequenzkennlinie der offenen Kette ist in Abb. 11.11 zusammengefasst. Für die Reglergesetze werden Darstellungen verwendet, aus denen die Bodediagramme besonders einfach abgelesen werden können.

#### **11.2.2 Entwurfsdurchführung**

Im Folgenden wird gezeigt, wie die im Abschn. 11.1 abgeleiteten Forderungen an das Verhalten der offenen Kette schrittweise durch Einfügen von Reglern erfüllt werden können.

**Verbesserung des statischen Verhaltens.** Das statische Verhalten ist durch den niederfrequenten Teil der Frequenzkennlinien bestimmt. Entsprechend Gl. (7.33) wird die bleibende Regelabweichung umso kleiner, je größer die Kreisverstärkung ist. Wird also die Verstärkung der offenen Kette angehoben, so verkleinert sich die Regelabweichung. Wird ein PI-Regler eingesetzt, so verschwindet die Regelabweichung.

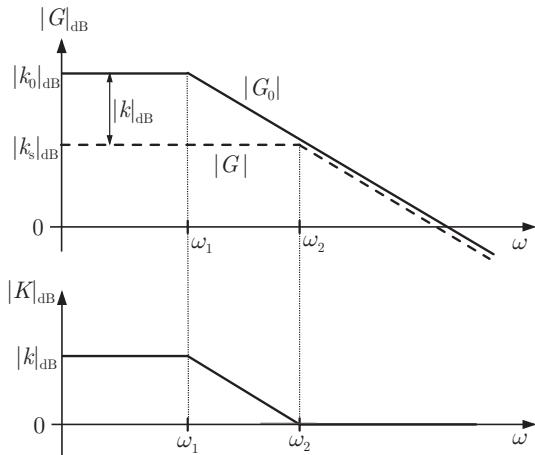
Regler bzw. Korrekturglied	Übertragungsfunktion	Bodediagramm
PD (ideal)	$k_p (T_D s + 1)$	<p>The magnitude plot shows a linear increase from 0 dB to <math>k_p \frac{1}{T_D}</math> dB at the corner frequency <math>\frac{1}{T_D}</math>. The phase plot shows a step increase from 0° to 90° at the same corner frequency.</p>
PI	$k_p \left( 1 + \frac{1}{T_I s} \right)$	<p>The magnitude plot shows a linear decrease from <math>k_p</math> dB to <math>k_p \frac{1}{T_I}</math> dB at the corner frequency <math>\frac{1}{T_I}</math>. The phase plot shows a step increase from 0° to -90° at the corner frequency.</p>
PID	$k_p \frac{(T_{D1}s + 1)(T_{D2}s + 1)}{T_I s}$ $T_{D2} < T_{D1}$	<p>The magnitude plot shows two corner frequencies <math>\frac{1}{T_{D1}}</math> and <math>\frac{1}{T_{D2}}</math>, resulting in a piecewise linear approximation. The phase plot shows a step increase from 0° to -90° between the corner frequencies.</p>
phasenabsenkendes Korrekturglied	$\frac{T_D s + 1}{T s + 1}$ $T > T_D$	<p>The magnitude plot shows a corner frequency <math>\frac{1}{T_D}</math> and a roll-off slope of <math>\frac{1}{T}</math>. The phase plot shows a peak at low frequencies followed by a roll-off starting at <math>\frac{1}{T_D}</math>.</p>
phasenanhebendes Korrekturglied	$\frac{T_D s + 1}{T s + 1}$ $T < T_D$	<p>The magnitude plot shows a corner frequency <math>\frac{1}{T_D}</math> and a roll-off slope of <math>\frac{1}{T}</math>. The phase plot shows a peak at high frequencies followed by a roll-off starting at <math>\frac{1}{T_D}</math>.</p>

Abb. 11.11: Frequenzkennlinien wichtiger Regler und Korrekturglieder

Diese Tatsachen sind in den Abbildungen 11.12 und 11.13 am Beispiel einer Strecke veranschaulicht, die (zumindest im niederfrequenten Teil) eine Übertragungsfunktion der Form

$$G(s) = \frac{k_s}{T_2 s + 1}$$

hat. Die Geradenapproximation des Amplitudenganges der Regelstrecke hat bei  $\omega_2 = \frac{1}{T_2}$  eine Knickfrequenz. Man kann den niederfrequenten Teil mit zwei Maßnahmen verbessern:



**Abb. 11.12:** Verbesserung des statischen Verhaltens mit Hilfe eines integrierenden Korrekturgliedes

- **Verwendung eines integrierenden Korrekturgliedes:** Wird ein Korrekturglied

$$K(s) = k \frac{T_2 s + 1}{T_1 s + 1}, \quad T_1 > T_2$$

mit der statischen Verstärkung  $k$  verwendet, dessen Nullstelle mit dem Pol der Regelstrecke übereinstimmt

$$T_2 = \frac{1}{\omega_2},$$

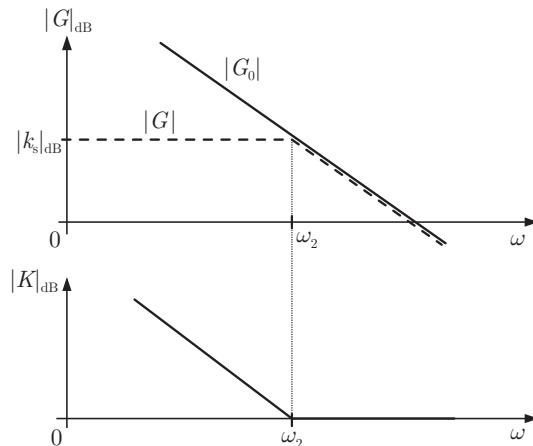
so wird der Amplitudengang im Frequenzintervall  $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$  angehoben und die offene Kette hat die statische Verstärkung  $k_0 = k k_s$ . Die bleibende Regelabweichung bei sprungförmigen Führungssignalen vermindert sich auf den Wert  $e(\infty) = \frac{1}{1+k k_s}$ .

- **Verwendung eines PI-Reglers:** Mit dem Regler

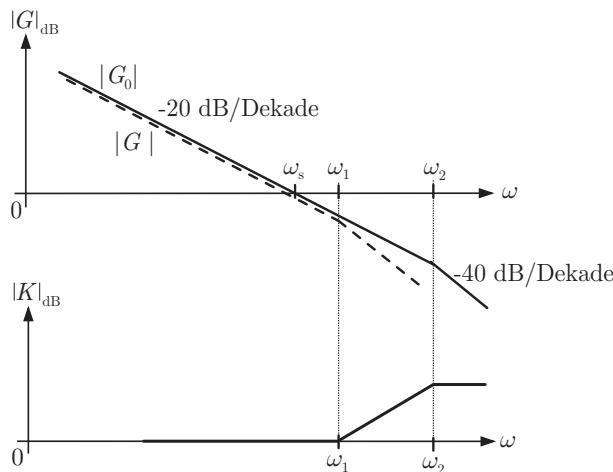
$$K(s) = k_P \left( 1 + \frac{1}{T_I s} \right) = \frac{k_P T_I s + k_P}{T_I s}$$

mit  $k_P = 1$  und  $T_I = \frac{1}{\omega_2}$  entsteht die in Abb. 11.13 gezeigte Frequenzkennlinie für die offene Kette. Die offene Kette hat I-Verhalten, so dass der geschlossene Kreis für sprungförmige Führungs- und Störsignale keine bleibende Regelabweichung besitzt.

**Verbesserung des Übergangsverhaltens.** Für das Übergangsverhalten ist der mittelfrequente Teil des Frequenzkennliniendiagramms maßgebend, wobei Vorgaben für die Schnittfrequenz  $\omega_s$  und den Knickpunktabstand  $\lg a$  erfüllt werden müssen. Die folgenden Maßnahmen dienen dazu, die Knickfrequenz zu verschieben:



**Abb. 11.13:** Verbesserung des statischen Verhaltens durch Verwendung eines PI-Reglers



**Abb. 11.14:** Verbesserung des Übergangsverhaltens mit Hilfe eines differenzierenden Korrekturgliedes

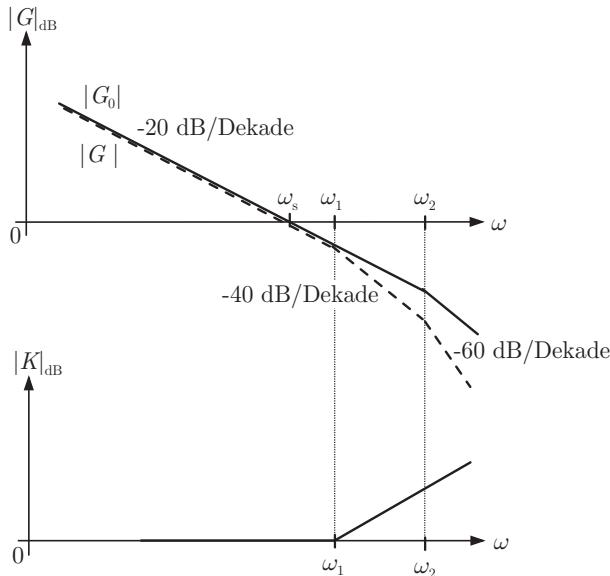
- **Verwendung eines differenzierenden Korrekturgliedes:** In Abb. 11.14 verhält sich die Regelstrecke wie ein  $IT_1$ -Glied

$$G(s) = \frac{1}{T_I s (T_I s + 1)}, \quad T_I > T_1$$

und hat einen Knickpunktabstand von  $\lg \omega_1 - \lg \omega_s$ . Durch Verwendung eines differenzierenden Korrekturgliedes

$$K(s) = \frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1}, \quad T_1 > T_2$$

wird der Knickpunktabstand auf  $\lg \omega_2 - \lg \omega_s$  vergrößert. Dabei wird der Pol der Strecke durch die Nullstelle  $-\frac{1}{T_1} = \omega_1$  des Korrekturgliedes kompensiert („gekürzt“). Der neue Knickpunktabstand wird durch die Wahl des Pols  $-\frac{1}{T_2}$  des Korrekturgliedes festgelegt. Durch die Vergrößerung des Knickpunktabstandes verkleinert sich die Überschwingweite des geschlossenen Kreises. Die von  $\omega_s$  abhängige Einschwingzeit bleibt unverändert.



**Abb. 11.15:** Verbesserung des Übergangsverhaltens durch Verwendung eines PD-Reglers

- **Verwendung eines PD-Reglers:** In Abb. 11.15 hat die Regelstrecke IT<sub>2</sub>-Verhalten mit den Knickfrequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$ . Durch Verwendung des (idealen) PD-Reglers

$$K(s) = T_D s + 1$$

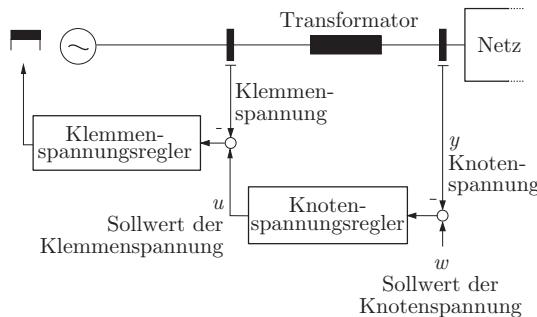
wird der Knickpunktabstand auf  $\lg \omega_2 - \lg \omega_s$  angehoben. Das heißt, dass die Nullstelle  $-\frac{1}{T_D} = \omega_1$  des PD-Reglers den Pol der Regelstrecke kompensiert.

**Auswirkung von Verstärkungsänderungen.** Eine Veränderung der Reglerverstärkung verschiebt den Amplitudengang nach oben bzw. nach unten und hat folglich Einfluss sowohl auf das statische als auch auf das dynamische Verhalten des geschlossenen Kreises. Bei Betrachtung einer IT<sub>2</sub>-Kette wird offensichtlich, dass eine

Erhöhung der Verstärkung eine Anhebung des Amplitudenganges und folglich eine Erhöhung der Schnittfrequenz  $\omega_s$  zur Folge hat. Der Regelkreis wird schneller. Da sich gleichzeitig der Knickpunktabstand verringert, wird die Überschwingweite größer. Die Verringerung der Reglerverstärkung bewirkt das Gegenteil.

### Beispiel 11.1 Entwurf einer Knotenspannungsregelung

Das Entwurfsverfahren soll am Beispiel einer Knotenspannungsregelung demonstriert werden (Abb. 11.16). Die Regelungsaufgabe besteht in der Stabilisierung der Spannung am Einspeiseknoten eines Kraftwerkes in das Netz auf einem vorgegebenen Sollwert, wobei der Sollwert des Klemmenspannungsreglers des Kraftwerksblocks als Stellgröße dient. Da der Sollwert der Knotenspannung bezogen auf die Zeitkonstanten des zu entwerfenden Regelkreises nur sehr selten verändert wird, kann er als konstant betrachtet werden, so dass die Sollwertfolge durch Verwendung eines I-Anteils im Regler gesichert werden kann. Die Überschwingzeit  $T_m$  soll unter einer Sekunde, die Überschwingweite unter 10 Prozent liegen.



**Abb. 11.16:** Knotenspannungsregelung

Ein vereinfachtes Zustandsraummodell der Regelstrecke lautet

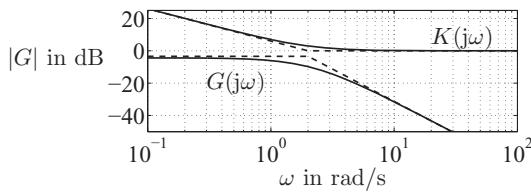
$$\Sigma_S : \begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -2,45 & -0,16 & 0 \\ 2,56 & 0 & 0 \\ 3,07 & 0 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0,9 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = (0 \ 0 \ 1) x(t), \end{cases}$$

woraus man die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{2,76s + 0,491}{s^3 + 4,45s^2 + 5,31s + 0,819} \quad (11.11)$$

erhält. Der Amplitudengang ist durch die untere Kurve in Abb. 11.17 beschrieben. Da das System drei Pole und eine Nullstelle hat

$$s_1 = -0,18, \quad s_2 = -2, \quad s_3 = -2,27, \quad s_{01} = -0,17,$$



**Abb. 11.17:** Bodediagramm der Regelstrecke (untere Kurven) und des Reglers (obere Kurven)

wobei sich ein Pol näherungsweise gegen die Nullstelle kürzen lässt, verhält es sich wie ein PT<sub>2</sub>-Glied. Als gestrichelte Kurve ist die Geradenapproximation eingetragen, die nur die Knickfrequenzen bei  $2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  und  $2,27 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  berücksichtigt.

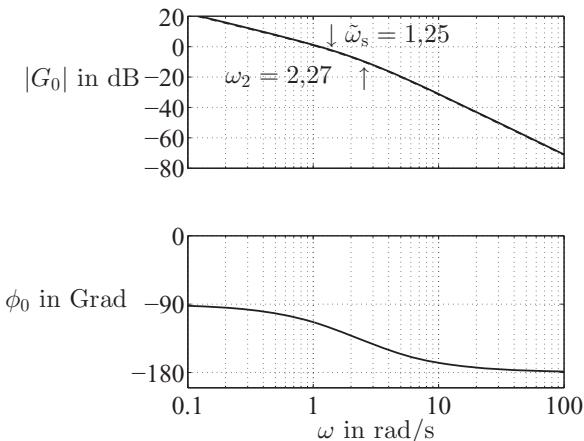
Da der Regler die Sollwertfolge sichern soll, wird zunächst ein PI-Regler

$$K_{\text{PI}}(s) = k_{\text{P}} \left( 1 + \frac{1}{T_{\text{I}} s} \right) = k_{\text{P}} \frac{T_{\text{I}} s + 1}{T_{\text{I}} s} \quad (11.12)$$

verwendet, dessen Parameter wie in Abb. 11.13 gezeigt bestimmt werden. Die Nullstelle des Reglers wird auf die Knickfrequenz  $\omega_1 = 2$  der Regelstrecke gelegt und die Verstärkung so gewählt, dass der PI-Regler für hohe Frequenzen keine Amplitudenveränderung bewirkt ( $|K_{\text{PI}}(j\omega)| \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 1$ ):

$$k_{\text{P}} = 1, \quad T_{\text{I}} = \frac{1}{2}. \quad (11.13)$$

Für diese Parameter erhält man die oberen Kurven von Abb. 11.17, wobei die gestrichelte Kurve wieder die Geradenapproximation zeigt.



**Abb. 11.18:** Bodediagramm der offenen Kette mit PI-Regler

Die mit diesem Regler entstehende offene Kette hat das in Abb. 11.18 gezeigte Bodediagramm. Der Amplitudengang der offenen Kette ist durch die durchgezogene Linie dargestellt. Ihre Schnittfrequenz beträgt

$$\tilde{\omega}_s = 1,25 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

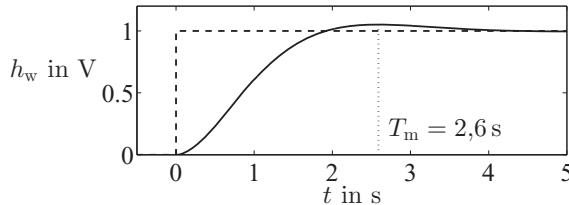
Die Knickfrequenz der Regelstrecke bei  $\omega_2 = 2,27 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  bleibt in der offenen Kette bestehen, so dass die offene Kette durch das  $\text{IT}_1$ -Glied

$$G_{\text{IT}_1}(s) = \frac{1}{\frac{1}{1,25}s} \frac{1}{\frac{1}{2,27}s + 1} = \frac{1}{0,352s^2 + 0,8s}$$

approximiert werden kann, wie die fast vollständig überdeckte gestrichelte Linie zeigt. Aus der Schnittfrequenz  $\tilde{\omega}_s$  und dem Knickpunktabstand

$$a = \frac{2,27}{1,25} = 1,8$$

ist zu schließen, dass der geschlossene Kreis eine Überschwingzeit von  $T_m \approx 2,4 \text{ s}$  und 5 Prozent Überschwingen aufweist. Abbildung 11.19 zeigt, dass diese Abschätzungen zu treffen, obwohl es sich um ein System vierter Ordnung handelt.



**Abb. 11.19:** Führungsübergangsfunktion des PI-geregelten Systems

Die erreichte Regelgüte genügt in Bezug auf die Überschwingzeit den gestellten Forderungen noch nicht. Der Grund liegt in der zu kleinen Schnittfrequenz. Angestrebgt werden die Werte

$$\omega_s = 3, \quad \omega_1 = 1,5 \omega_s = 4,5.$$

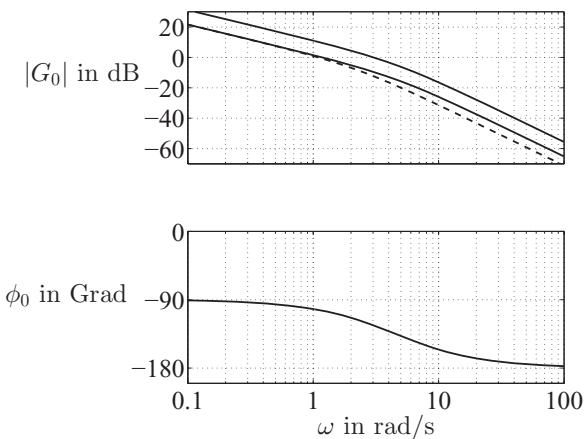
Die entsprechenden Veränderungen der offenen Kette erreicht man in zwei Schritten. Zunächst wird die Knickfrequenz von ihrem jetzigen Wert  $\omega_1 = 2,27 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  auf den neuen Wert  $\omega_1 = 4,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  verschoben, wofür das phasenanhebende Korrekturglied

$$K(s) = \frac{0,44s + 1}{0,22s + 1} \quad (11.14)$$

verwendet wird, dessen Nullstelle sich aus der bisherigen Knickfrequenz und dessen Pol sich aus der angestrebten Knickfrequenz ergibt (vgl. Abb. 11.14). Anschließend wird durch den Verstärkungsfaktor

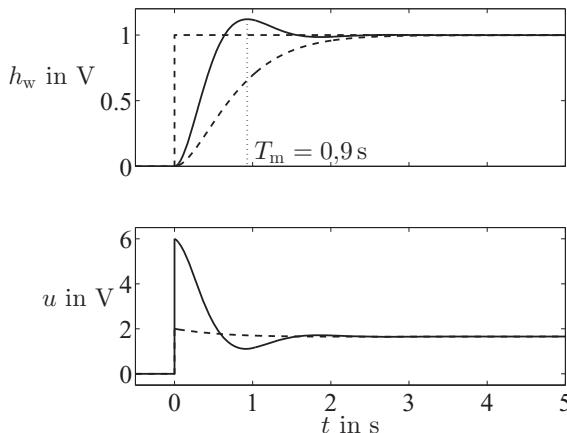
$$k_P = 3 = 9,5 \text{ dB} \quad (11.15)$$

der Amplitudengang soweit angehoben, dass die geforderte Schnittfrequenz  $\omega_s \approx 3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  entsteht. Abbildung 11.20 zeigt beide Schritte, wobei für den Amplitudengang schließlich



**Abb. 11.20:** Bodediagramm der offenen Kette mit PI-Regler und Korrekturglied

die oberste Kurve entsteht. Darunter ist der Amplitudengang vor der Verstärkungsanhebung und als Vergleich als gestrichelte Linie die in Abb. 11.18 gezeigte offene Kette mit PI-Regler dargestellt. Die Wirkung des phasenanhebenden Korrekturgliedes ist im Phasengang, der sich durch die Verstärkungsanhebung nicht ändert, deutlich zu erkennen (vgl. Abb. 11.20 mit Abb. 11.18).



**Abb. 11.21:** Führungsübergangsfunktion des Regelkreises mit PI-Regler und Korrekturglied (---) sowie mit Korrekturglied und Verstärkungsanhebung (—)

Die in Abb. 11.21 gezeigte Führungsübergangsfunktion erfüllt die gestellten Güteforderungen. Bei der Veränderung des Sollwertes zur Zeit  $t = 0$  reagiert die Regelung mit

einer sprungförmigen Veränderung der Stellgröße, denn der Regler, der sich aus einer Reihenschaltung des PI-Reglers (11.12), (11.13), des Korrekturgliedes (11.14) und dem Verstärkungsfaktor (11.15) zusammensetzt, ist ein sprungfähiges System.  $\square$

**Aufgabe 11.5** Reglerentwurf mit Hilfe des Frequenzkennliniendiagramms

Für die Regelstrecke

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(0,4s+1)}$$

soll eine Regelung entworfen werden, mit der der geschlossene Kreis eine Überschwingweite  $\Delta h \leq 0,25$  bei einer Überschwingzeit  $T_m \leq 1,5$  besitzt.

1. Bestimmen Sie Kennwerte der Amplitudenkennlinie der offenen Kette, für die der geschlossene Kreis die angegebenen Güteforderungen erfüllt.
2. Zeichnen Sie das Bodediagramm der Regelstrecke.
3. Bestimmen Sie den gesuchten Regler.
4. Welche Auswirkungen hat eine Verschärfung der Anforderungen an die Überschwingweite (z. B.  $\Delta h \leq 0,1$ ) auf das Entwurfsergebnis?
5. Wie wirkt sich eine begrenzte Bandbreite des Stellgliedes aus? Zeigen Sie die Wirkung eines Stellgliedes, das durch ein PT<sub>1</sub>-Glied mit der Zeitkonstante  $T_1$  dargestellt wird. Für welchen Bereich der Zeitkonstante kann das Stellglied beim Reglerentwurf vernachlässigt werden und für welchen beeinflusst es die erreichbare Regelgüte maßgebend?  $\square$

**Aufgabe 11.6\*** Dämpfung der Rollbewegung eines Flugzeugs

Entsprechend Beispiel 5.6 auf S. 151 kann das Flugzeug als Regelstrecke durch die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{k}{I_{xx}s^2}$$

beschrieben werden, wobei unter Verwendung der Zeiteinheit Sekunden im Folgenden mit dem Parameter  $\frac{k}{I_{xx}} = 2$  gearbeitet werden soll.

Es ist ein Regler zu entwerfen, der den Rollwinkel  $y = \phi$  gegenüber Störungen näherungsweise konstant hält. Störungen, die ein Rollen des Flugzeugs bewirken, entstehen beispielsweise aus einer Thermik oder aus Turbulenzen, bei denen sich der rechte Flügel im Aufwind und der linke Flügel im Abwind befindet. Störungen dieser Art haben näherungsweise impulsförmigen Charakter. Sie üben eine Kraft aus, die der durch die Querruder erzeugten Kraft überlagert ist und folglich am Eingang der Regelstrecke auftritt. Für die Analyse des Regelkreises wird eine Störung  $0,1\delta(t)$  verwendet, die einer Amplitude von 10% der maximalen Stellamplitude entspricht. Die beschriebene Störung soll ohne Überschwingen ( $\Delta e \approx 0$ ) und mit einer maximalen Störung von  $e_m \approx 0,5$  abgebaut werden.

1. Welche Struktur muss der Regler besitzen?
2. Welche Kennwerte soll die offene Kette haben, damit die Dynamikforderungen erfüllt werden?
3. Entwerfen Sie einen Regler, der die angegebenen Störungen möglichst schnell abbaut.

4. Was ändert sich an der Strecke, wenn die Dynamik des Stellgliedes, das das Querruder bewegt, im Modell durch ein zusätzliches Verzögerungsglied  $\frac{1}{0,05s+1}$  berücksichtigt wird? □

**Aufgabe 11.7\*** *Entwurf einer Abstandsregelung für Fahrzeuge*

Die Aufgabe, den Abstand eines Fahrzeugs zum vorherfahrenden Fahrzeug auf den Sollwert  $w$  zu bringen, kann mit einer proportionalen Regelung gelöst werden (vgl. Aufg. 7.7 und Lösung auf S. 645). Bei einer sprungförmigen Veränderung des Sollwertes muss der Abstandsfehler ohne Überschwingen ausgeglichen werden, um die Kolonnenstabilität zu sichern, also zu verhindern, dass sich Abstandspendelungen in einer Fahrzeugkette von einem Fahrzeug zu den weiter hinten fahrenden Fahrzeugen ausbreiten und dabei die Amplitude der Schwingungen vergrößert wird. Der Übergangsvorgang soll nach etwa 10 Sekunden abgeschlossen sein.

Die Stellgröße ist die Kraft, mit der der Motor das Fahrzeug beschleunigt (bzw. mit der Bremse das Fahrzeug abbremst), die Regelgröße der Fahrzeugabstand. Bei konstanter Geschwindigkeit des voranfahrenden Fahrzeugs erhält man für die Regelstrecke die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{-0.001}{s(s + 0,04)}.$$

1. Entwerfen Sie den Regler mit Hilfe des Frequenzkennlinienverfahrens.
2. Untersuchen Sie, welche Veränderungen Ihre Entwurfsschritte für die Wurzelortskurve des Regelkreises bedeuten. □

### 11.3 Reglerentwurf unter Beachtung des Störverhaltens

Nachdem im Abschn. 11.1.4 gezeigt wurde, wie die das Störverhalten betreffenden Güteforderungen in Forderungen an das Führungsverhalten umgeformt werden können, ist das Vorgehen beim Reglerentwurf unter Beachtung des Störverhaltens dasselbe wie für Regelungsaufgaben, bei denen das Führungsverhalten die dominierende Rolle spielt. Der Entwurf erfolgt nämlich genauso wie bisher, nur dass andere Güteforderungen erfüllt werden sollen.

**Beispiel 11.2** *Entwurf der Drehzahlregelung eines Gleichstrommotors*

Für den im Beispiel 5.2 beschriebenen und in Abb. 5.12 auf S. 140 abgebildeten Gleichstrommotor soll eine Regelung entworfen werden, so dass die Drehzahl auch bei Laständerungen näherungsweise konstant bleibt. Bei einer sprungförmigen Laständerung  $d = \sigma(t)$  sollen für das Störverhalten die Forderungen  $e_m < 0,10$  und  $\Delta e \approx 0$  erfüllt werden.

Die Störung besteht in einem durch die Last verursachten Drehmoment  $d(t)$ , durch das Gl. (5.45) in

$$M(t) = J \frac{d^2\phi(t)}{dt^2} + k_L \frac{d\phi(t)}{dt} + d(t)$$

übergeht. Unter Verwendung der im Beispiel 5.2 angegebenen Parameterwerte erhält man eine Störübertragungsfunktion der Regelstrecke, die man noch mit der Übertragungsfunktion des Messgliedes multiplizieren muss:

$$G_{yd}(s) = -\frac{0,0175s + 1,43}{0,011s^2 + 0,911s + 9,90} \cdot \frac{1}{0,008s + 1} \approx -\frac{0,145}{0,09s + 1}.$$

Das exakte Modell und die Näherungsbeschreibung mit der Summenzeitkonstante  $T_\Sigma = 0,09$  s haben fast identische Bodediagramme.

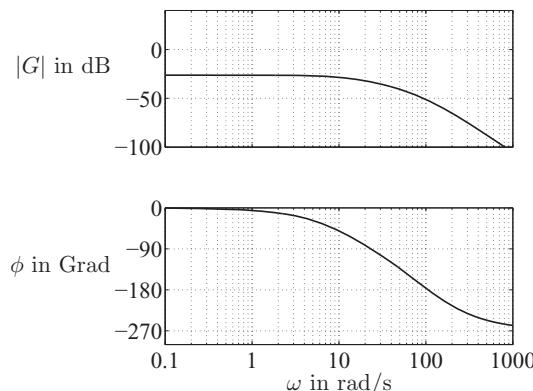
Bei der Überführung der gegebenen Güteforderungen in Vorgaben für das Bodediagramm der offenen Kette muss beachtet werden, dass sich die Abbildungen im Abschn. 11.1.4 auf eine Störübertragungsfunktion mit der statischen Verstärkung  $k_{yd} = 1$  beziehen, hier jedoch  $k_{yd} = 0,145$  gilt. Diese Tatsache wird dadurch berücksichtigt, dass anstelle von  $e_m < 0,10$  jetzt  $e_m < \frac{0,10}{0,145} = 0,7$  gefordert wird. Entsprechend Abb. 11.9 (links) führt dies zu  $T_r > 0,5$  und

$$T = \frac{T_\Sigma}{T_r} < \frac{0,09}{0,5} = 0,18.$$

Die zweite Forderung  $\Delta e \approx 0$  ist für  $d > 0,7$  erfüllt. Damit muss der Regler so entworfen werden, dass die offene Kette die Forderungen

$$\omega_s = \frac{1}{2dT} = 4 \quad \text{und} \quad a = 4d^2 = 2$$

erfüllt, wobei der Knickpunktabstand  $a$  auch größer sein darf (Abb. 11.9 (rechts)).



**Abb. 11.22:** Bodediagramm des Gleichstrommotors

Mit den angegebenen Parametern erhält man für die aus dem Motor und dem Drehzahlmessglied bestehende Regelstrecke die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{5,426}{0,0010s^3 + 0,2078s^2 + 11,252s + 112,50}.$$

Das dazugehörige in Abb. 11.22 gezeigte Bodediagramm macht deutlich, dass der Amplitudengang durch den Regler deutlich angehoben werden muss, um die aufgestellten Bedingungen zu erfüllen. Die Knickfrequenzen der Geradenapproximation des Amplitudenganges liegen bei den Polen der Übertragungsfunktion  $G(s)$ :

$$\omega_1 = |\lambda_1| = 12,87, \quad \omega_2 = |\lambda_2| = 69,95, \quad \omega_3 = |\lambda_3| = 125.$$

Es wird ein PI-Regler verwendet, dessen Nullstelle

$$s_0 = -\frac{1}{T_I} = -12,87$$

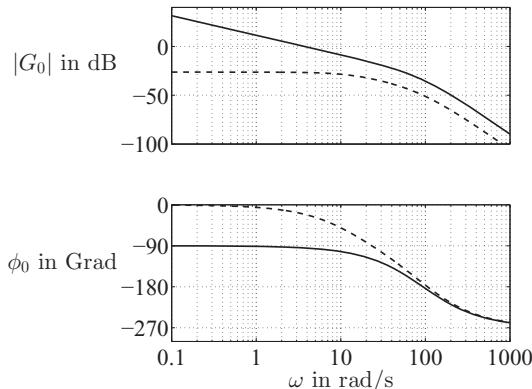
am größten Pol der Regelstrecke liegt, so dass die Knickfrequenz des Reglers mit der ersten Knickfrequenz der Regelstrecke zusammenfällt. Für den PI-Regler

$$K(s) = 6 \left( 1 + \frac{1}{0,0777s} \right) \quad \text{mit } k_P = 6 \text{ und } T_I = 0,0777$$

hat die offene Kette näherungsweise die geforderte Schnittfrequenz  $\omega_s = 4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ . Der Knickpunktabstand kann aus der Schnittfrequenz und der zweiten Knickfrequenz der Regelstrecke, die jetzt die erste Knickfrequenz der offenen Kette ist, berechnet werden:

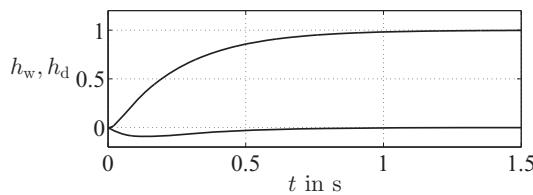
$$a = \frac{\omega_1}{\omega_s} = \frac{69,95}{4} = 17.$$

Er ist wesentlich größer als gefordert, was für das Störverhalten gut ist.



**Abb. 11.23:** Bodediagramm der offenen Kette bestehend aus Gleichstrommotor und PI-Regler

Die Störübergangsfunktion des Regelkreises ist gemeinsam mit der Führungsübergangsfunktion in Abb. 11.24 dargestellt. Die Störübergangsfunktion hat aufgrund der Bremswirkung einer Lasterhöhung negative Werte. Die an das Störverhalten gestellten Güteforderungen sind erfüllt. Mit  $e_m = 0,1$  verhält sich der Kreis sogar deutlich besser als gefordert. Die Führungsübergangsfunktion zeigt, dass das Führungsverhalten kein Überschwingen aufweist, was nicht unerwartet ist, weil der Knickpunktabstand sehr groß ist (vgl. Abb. 11.3 auf S. 518). Wenn man neben dem Störverhalten auch ein gutes Führungsverhalten haben will, muss man mit einem differenzierenden Korrekturglied den Knickpunktabstand auf den geforderten Wert verkleinern.  $\square$



**Abb. 11.24:** Führungsübergangsfunktion und Störübergangsfunktion des geregelten Gleichstrommotors

**Zusammenfassende Bewertung des Reglerentwurfs anhand der Frequenzkennlinie.** Das hier behandelte Verfahren ist vor allem für Regelungsaufgaben gut geeignet, bei denen die Regelstrecke stabil ist und sprungförmige Störungs- und Führungs signale vorhanden sind, die offene Kette also I-Verhalten haben muss. Im Mittelpunkt steht dann die Festlegung eines Reglers, mit dem vorgegebene Dynamikforderungen an den Regelkreis erfüllt werden. Für diese Aufgabenstellung kann man mit denen im Abschn. 11.1 beschriebenen Überlegungen die gewünschte Frequenzkennlinie der offenen Kette festlegen und dann nach einem Regler suchen, mit dem die Frequenzkennlinie der Regelstrecke in diese Wunschkenmlinie überführt wird.

## 11.4 MATLAB-Programm zum Frequenzkennlinienentwurf

Das in diesem Kapitel behandelte Entwurfsverfahren kann mit Hilfe der bereits früher eingeführten MATLAB-Funktionen durchgeführt werden. Wie bei allen Entwurfsverfahren übernimmt der Rechner die aufwändigen numerischen Operationen sowie die grafische Darstellung des Systemverhaltens. Die eigentlichen Entwurfsentscheidungen muss der Ingenieur selbst treffen.

### Beispiel 11.2 (Forts.) Entwurf der Drehzahlregelung eines Gleichstrommotors

Als Beispiel wird der auf S. 538 behandelte Entwurf des Geschwindigkeitsreglers für einen Gleichstrommotor betrachtet. Da alle für den Entwurf notwendigen MATLAB-Funktionen bereits bekannt sind, ist das Programm 11.1 ohne weitere Erläuterungen verständlich. □

### Aufgabe 11.8 Störübergangsfunktion des geregelten Gleichstrommotors



Erweitern Sie das Programm 11.1, so dass auch das in Abb. 11.24 gezeigte Störverhalten des geschlossenen Kreises für die Bewertung der Regelgüte herangezogen werden kann. □

**Programm 11.1** Reglerentwurf mit dem Frequenzkennlinienverfahren  
 (Beispiel 11.2: Geschwindigkeitsregelung eines Gleichstrommotors)

```

Regelstreckenmodell
» RA = 9;
» LA = 0.11;
» km = 3;
» kL = 0.1;
» kT = km;
» J = 0.1;
» zs = [1/2/pi];
» ns = [LA*J/kT (LA*kL/kT + RA*J/kT) (RA*kL/kT + km)];
» Motor = tf(zs, ns);

» Td = 0.008;
» zm = 1;
» nm = [Td, 1];
» Messglied = tf(zm, nm);
» MotorMessglied = series(Motor, Messglied);

Erweiterung um den Drehzahlgeber
» bode(MotorMessglied);

Bodediagramm der Regelstrecke
...erzeugt Abb. 11.22

Verwendung eines PI-Reglers
mit  $k_P = 4, T_I = 0,0777$ 
» zr = 4*[0.0777 1];
» nr = [0.0777 0];
» PIREgler = tf(zr, nr);
» offeneKette = series(MotorMessglied, PIREgler);
» bode(offeneKette);

...erzeugt Abb. 11.23

Berechnung der Führungsübergangsfunktion
» Regelkreis = feedback(offeneKette, 1);
» step(Regelkreis);
...erzeugt die obere Kurve von Abb. 11.24

```

**Aufgabe 11.9\*** Regelung der Leerlaufdrehzahl eines Verbrennungsmotors



Es soll ein Regler entworfen werden, der Störungen der Leerlaufdrehzahl  $n(t)$  (gemessen in  $\frac{1}{\text{min}}$ ) eines Verbrennungsmotors kompensiert. Als Störung wird hier das Einschalten der Klimaanlage betrachtet, wodurch über die Lichtmaschine ein sprungförmiges Lastmoment  $M_L(t) = d\sigma(t)$  auf den Motor wirkt. Das Störverhalten soll in diesem Fall eine maximale Drehzahländerung von  $e_{\max} \leq 80 \frac{1}{\text{min}}$  und ein Überschwingen von  $\Delta e \leq 20 \frac{1}{\text{min}}$  aufweisen.

Die Leerlaufdrehzahl  $n(t)$  hängt im Wesentlichen vom zugeführten Luft-Kraftstoffverhältnis  $\lambda(t)$  ab. Das Verbrennen des Kraftstoffs erzeugt einen Druck im Verbrennungsraum, der den Kolben bewegt und über die Pleuelstange ein Antriebsmoment  $M_a(t)$  auf die Kurbelwelle überträgt, für das näherungsweise

$$T_a \dot{M}_a(t) + M_a(t) = k_a \lambda(t)$$

gilt. Für die Leerlaufwinkelgeschwindigkeit  $\omega(t)$  (Maßeinheit  $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ) führt die Drehmomentbilanz auf die Beziehung

$$J\dot{\omega}(t) = M_a(t) - M_R(t) - M_L(t)$$

mit dem Trägheitsmoment  $J$  des Antriebsstrangs, wobei sich das geschwindigkeitsproportionale Reibmoment aus der Beziehung  $M_R(t) = \gamma\omega(t)$  mit dem Proportionalitätsfaktor  $\gamma$  ergibt. Die Messung  $y(t)$  der Motordrehzahl  $n(t) = \frac{60}{2\pi}\omega(t)$  erfolgt verzögert mit der Zeitkonstante  $T_m$ :

$$T_m\dot{y}(t) + y(t) = n(t).$$

Parameter	Bedeutung	Wert
$\bar{d}$	Störamplitude	12 Nm
$k_a$	statische Verstärkung des Zylinders	115,2 Nm
$T_a$	Zeitkonstante des Zylinders	0,4 s
$J$	Trägheitsmoment	0,07 $\frac{\text{Nm}^2}{\text{rad}}$
$\gamma$	Proportionalitätsfaktor der Reibung	0,43 $\frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$
$T_m$	Zeitkonstante der Drehzahlmessung	10 ms

1. Zeichnen Sie das Blockschaltbild der Regelstrecke und bestimmen Sie die darin vorkommenden Übertragungsfunktionen.
2. Für welche Kennwerte der Amplitudenkennlinie der offenen Kette soll der Regler entworfen werden?
3. Entwerfen Sie den Regler und zeigen Sie, dass der Regelkreis das geforderte Störverhalten besitzt.  $\square$

## Literaturhinweise

Der Reglerentwurf unter Verwendung des Frequenzkennliniendiagramms ist ausführlich in [91], Abschn. 7.3 beschrieben. Dabei wird auch auf eine Realisierung unterschiedlicher Korrekturglieder durch RC-Netzwerke und den Entwurf bei Vorgaben für den Phasengang eingegangen.

# 12

## Weitere Entwurfsverfahren

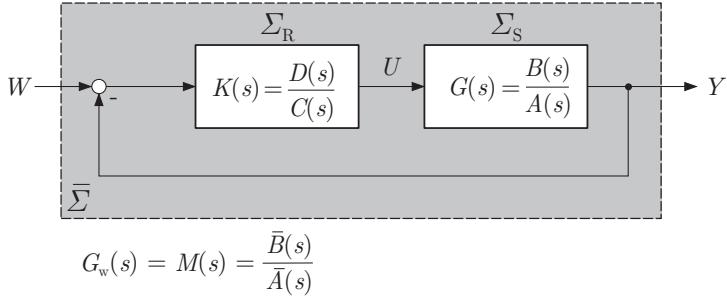
In diesem Kapitel werden Entwurfsverfahren behandelt, bei denen das Regelstreckenmodell explizit im Regler enthalten ist.

### 12.1 Kompressionsregler

**Grundidee des Entwurfsverfahrens.** Der Reglerentwurf hat zum Ziel, dem geschlossenen Regelkreis  $\bar{\Sigma}$  durch die Festlegung eines geeigneten Reglers  $\Sigma_R$  ein vorgegebenes dynamisches Verhalten zu verleihen. Bisher wurde das Regelungsziel durch Vorgaben für das Zeitverhalten oder die Übertragungseigenschaften im Frequenzbereich beschrieben, beispielsweise durch Forderungen an das Überschwingen oder die Einschwingzeit der Führungsübergangsfunktion. Bei dem in diesem Abschnitt behandelten Vorgehen wird das Verhalten des Regelkreises durch ein Modell  $M(s)$  vorgegeben. Der Regler ist so zu bestimmen, dass der geschlossene Kreis gerade das durch  $M(s)$  beschriebene Verhalten aufweist (Abb. 12.1):  $G_w(s) = M(s)$ . In der englischsprachigen Literatur wird dieses Vorgehen als *model matching*, also als Anpassung des Kreises an ein vorgegebenes Modell, bezeichnet. Im deutschen Sprachgebrauch hat sich aus einem später erkennbaren Grund der Begriff Kompressionsregler eingebürgert.

Im Vergleich zu den bisher betrachteten Güteforderungen enthält diese Entwurfsaufgabe wesentlich genauere Vorgaben für das Regelkreisverhalten, denn durch  $M(s)$  sind die Übertragungseigenschaften vollständig fixiert. Deshalb entfällt auch

die den Entwurf typischerweise begleitende Kompromissbildung zwischen der Erfüllung unterschiedlicher, sich teilweise widersprechender Regelungsziele. Die Entwurfsaufgabe hat entweder exakt eine Lösung, die zu genau dem durch  $M(s)$  beschriebenen Führungsverhalten führt, oder gar keine Lösung.



**Abb. 12.1:** Idee des Entwurfsverfahrens

In den folgenden Betrachtungen wird direkt mit den Zähler- und Nennerpolynomen der Übertragungsfunktionen der Regelstrecke, des Reglers und des geschlossenen Kreises gearbeitet. Dabei wird von folgenden Bezeichnungen ausgegangen. Die Regelstrecke  $\Sigma_S$  ist durch

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

beschrieben, wobei  $B(s)$  das Zählerpolynom und  $A(s)$  das Nennerpolynom darstellt. Entsprechende Zerlegungen des Reglers  $\Sigma_R$  und des Modells des geschlossenen Kreises  $\bar{\Sigma}$  lauten

$$K(s) = \frac{D(s)}{C(s)} \quad \text{und} \quad M(s) = \frac{\bar{B}(s)}{\bar{A}(s)}.$$

$M(s)$  stellt die geforderte Führungsübertragungsfunktion dar. Deshalb soll durch eine geeignete Wahl des Reglers erreicht werden, dass

$$G_w(s) = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} \stackrel{!}{=} M(s)$$

gilt. Aufgelöst nach  $K(s)$  erhält man daraus die Beziehung

$$K(s) = \frac{M(s)}{G(s) - G(s)M(s)} = \frac{1}{G(s)} \frac{M(s)}{1 - M(s)} \quad (12.1)$$

und unter Verwendung der Zähler- und Nennerpolynome

Kompensationsregler  $\Sigma_R$ :  $K(s) = \frac{A(s)}{B(s)} \frac{\bar{B}(s)}{\bar{A}(s) - \bar{B}(s)}.$

(12.2)

Mit den bereits eingeführten Bezeichnungen für das Zähler- und das Nennerpolynom des Reglers gilt

$$\begin{aligned} D(s) &= A(s) \bar{B}(s) \\ C(s) &= B(s) (\bar{A}(s) - \bar{B}(s)). \end{aligned}$$

**Diskussion des Verfahrens.** Gleichung (12.1) zeigt, dass der Regler das inverse Modell der Regelstrecke sowie das mit einer Mitkopplung versehene Regelkreismodell  $M(s)$  enthält (Abb. 12.2). Interessant ist, dass bei diesem Entwurfsverfahren das Regelstreckenmodell nicht nur für die Festlegung der Reglerparameter verwendet wird, sondern im Regler selbst enthalten ist (wenn auch als inverses Modell). Wenn dieser Aspekt des Regelungsverfahrens hervorgehoben werden soll, spricht man von einer *modellbasierten Regelung*<sup>1</sup>.

In der Übertragungsfunktion der offenen Kette  $\Sigma_0$  kürzt sich die Regelstrecke gegen ihr inverses Modell heraus

$$G(s)K(s) = G(s) \frac{1}{G(s)} \frac{M(s)}{1 - M(s)} = \frac{M(s)}{1 - M(s)},$$

so dass der Regelkreis nicht mehr von  $G(s)$ , sondern nur noch von  $M(s)$  bestimmt wird. Das Regelstreckenverhalten  $G(s)$  wird also durch das inverse Modell  $G(s)^{-1} = \frac{1}{G(s)}$  im Regler kompensiert, woraus sich die Bezeichnung *Kompensationsregler* ableitet.

Damit man im Produkt  $G(s)G(s)^{-1}$  keine instabilen Pole gegen Nullstellen kürzt und der Regelkreis I-stabil ist, müssen zwei Forderungen erfüllt sein:

- Die Regelstrecke muss stabil sein.
- Das inverse Modell  $G(s)^{-1}$  der Regelstrecke muss stabil sein. Das heißt,  $G(s)$  darf nur Nullstellen mit negativem Realteil haben und die Strecke muss folglich minimalphasig sein.

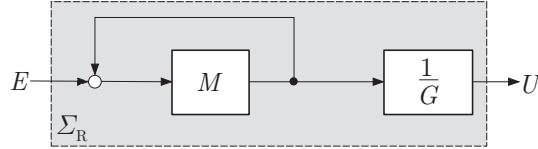
Wenn man außerdem fordert, dass der Regler  $K(s)$  stabil sein soll, so muss das mit einer positiven Rückführung versehene Modelle  $M(s)$  stabil sein.

Abbildung 12.2 zeigt die Struktur des Kompensationsreglers. Man wird den Regler jedoch nicht in der gezeigten Weise realisieren, denn die Reihenschaltung enthält mit  $\frac{1}{G(s)}$  ein Element mit Nullstellenüberschuss. Die folgenden Betrachtungen werden zeigen, unter welcher Bedingung ein physikalisch realisierbarer Regler mit Polüberschuss entsteht.

Eine Bedingung an das vorgegebene Modell  $M(s)$  erhält man, wenn man sich die in Gl. (12.2) stehenden Polynome ansieht. Abgesehen von dem Spezialfall, dass der Grad der Differenz  $\bar{A} - \bar{B}$  kleiner als der Grad von  $\bar{A}$  ist, gilt folgende Forderung:

---

<sup>1</sup> Den Begriff der modellbasierten Regelung darf man nicht mit dem des modellbasierten Entwurfes verwechseln, denn alle in den Kap. 10 bis 12 behandelten Entwurfsverfahren sind modellbasiert, verwenden das Modell also während des Entwurfs. Im Unterschied dazu ist bei der modellbasierten Regelung das Regelstreckenmodell auch ein Bestandteil des Reglers.



**Abb. 12.2:** Struktur des Kompensationsreglers

- Damit die Reglerübertragungsfunktion  $K(s)$  mindestens genauso viele Pole wie Nullstellen besitzt, muss gelten

$$\text{Grad } A(s) - \text{Grad } B(s) \stackrel{!}{\leq} \text{Grad } \bar{A}(s) - \text{Grad } \bar{B}(s). \quad (12.3)$$

Das heißt, das Modell  $M(s)$  muss mindestens denselben Polüberschuss (bzw. relativen Grad) haben wie die Regelstrecke. Diese Forderung lässt sich anschaulich interpretieren, da der Polüberschuss als ein Maß für die durch das System vorgenommene Verzögerung der Ausgangsgröße gegenüber der Eingangsgröße angesehen werden kann (vgl. S. 313). Das Führungsverhalten des Regelkreises  $\bar{\Sigma}$  hat mindestens dieselbe Verzögerung wie die Regelstrecke  $\Sigma_R$ , denn der Signalweg vom Führungssignal  $w$  zur Regelgröße  $y$  führt durch die Regelstrecke und enthält mit dem Regler  $\Sigma_R$  ein weiteres verzögerndes Element (Abb. 12.1). Also muss auch das Modell  $M(s)$  mindestens dieselbe Verzögerung wie die Regelstrecke besitzen, wenn die Regelungsaufgabe lösbar sein soll.

Aus Gl. (12.2) folgt außerdem, dass für die dynamische Ordnung des Reglers die Beziehung

$$\text{Grad } C(s) = \text{Grad } B(s) + \text{Grad } \bar{A}(s)$$

gilt, die Reglerordnung also durch die Anzahl der Nullstellen der Regelstrecke und durch die dynamische Ordnung des vorgegebenen Modells  $M(s)$  bestimmt wird. Man sollte deshalb im Sinne einer einfachen Realisierung des Reglers die Ordnung von  $M(s)$  möglichst klein wählen.

**Forderungen aus dem Inneren-Modell-Prinzip.** Wie die Ableitung der Entwurfsgleichung (12.2) zeigt, wird durch den angegebenen Regler gesichert, dass der Regelkreis alle durch das Modell  $M(s)$  vorgegebenen Eigenschaften besitzt. Es ist deshalb interessant zu untersuchen, wie der bei anderen Entwurfsverfahren aufgrund des Inneren-Modell-Prinzips durch den Entwurfsingenieur eingeführte I-Anteil „automatisch“ im Kompensationsregler auftritt, wenn die Regelstrecke P-Verhalten besitzt und für sprungförmige Führungs- und Störsignale keine bleibende Regelabweichung auftreten soll.

Sollwertfolge für sprungförmige Führungssignale wird dadurch im Modell  $M(s)$  vorgeschrieben, dass die statische Verstärkung auf  $M(0) = 1$  festgelegt wird. Das heißt, dass die Polynome

$$\begin{aligned}\bar{B}(s) &= \bar{b}_q s^{\bar{q}} + \bar{b}_{\bar{q}-1} s^{\bar{q}-1} + \dots + \bar{b}_0 \\ \bar{A}(s) &= \bar{a}_{\bar{n}} s^{\bar{n}} + \bar{a}_{\bar{n}-1} s^{\bar{n}-1} + \dots + \bar{a}_0\end{aligned}$$

gleiche Absolutglieder haben:  $\bar{b}_0 = \bar{a}_0$ . Deshalb ist die in Gl. (12.2) im Nenner von  $K(s)$  auftretende Differenz  $\bar{A}(s) - \bar{B}(s)$  ein Polynom  $\bar{n}$ -ter Ordnung mit verschwindendem Absolutglied. Der Regler hat also einen Pol bei null.

Besitzt andererseits die Regelstrecke bereits I-Verhalten, so hat auch das Polynom  $A(s)$  ein verschwindendes Absolutglied. Dann tritt auch im Zähler von  $K(s)$  eine Nullstelle bei null auf, die gegen die verschwindende Nullstelle von  $\bar{A}(s) - \bar{B}(s)$  gekürzt wird. Der Regler hat dann kein I-Verhalten.

### Beispiel 12.1 Entwurf einer Temperaturregelung

Die bereits im Beispiel 9.1 auf S. 469 behandelte Temperaturregelung soll jetzt auf anderem Wege neu entworfen werden. Für die Regelstrecke  $\Sigma_S$  wurde das Modell

$$G(s) = \frac{1,432}{0,498s^2 + 1,578s + 1} \quad (12.4)$$

aufgestellt.

Das Modell  $M(s)$  für den Regelkreis  $\bar{\Sigma}$  erhält man aus folgenden Überlegungen. Da es einen Polüberschuss von mindestens zwei haben muss, ist ein Modellansatz der Form

$$M(s) = \frac{s_1 s_2}{(s - s_1)(s - s_2)}$$

sinnvoll. Dieses Modell hat die statische Verstärkung  $M(0) = 1$ , was die Forderung nach Sollwertfolge widerspiegelt. Die beiden Pole  $s_1$  und  $s_2$  werden so gewählt, dass der geschlossene Kreis kein bzw. ein sehr kleines Überschwingen besitzt und in etwa einer Minute einschwingt. Die erste Forderung ist für Temperaturregelkreise sinnvoll, denn Überschwingen bedeutet, dass die Regelstrecke zunächst zu weit aufgeheizt wird, bevor sie die Solltemperatur annimmt. Ein solches Verhalten würde Energieverluste verursachen. Die zweite Forderung führt auf Regelkreiseigenwerte, deren Realteil bei  $-3$  liegt (vgl. Gl. (10.6) auf S. 480).

Für die Modellpole  $s_1 = -3$  und  $s_2 = -5$  erhält man aus Gl. (12.2) den Regler

$$K(s) = \frac{0,499s^2 + 1,58s + 1}{0,0955s^2 + 0,764s}$$

zweiter Ordnung. Der Regler hat einen I-Anteil. Für seinen Proportionalanteil gilt

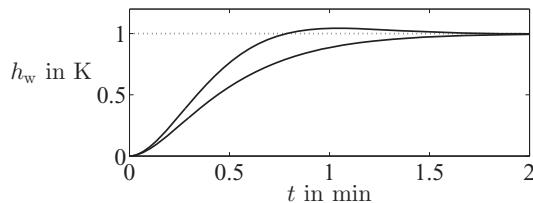
$$k_P = \frac{0,499}{0,0955} = 5,22.$$

Die Führungsübergangsfunktion ist als die untere Kurve in Abb. 12.3 zu sehen. Es tritt erwartungsgemäß kein Überschwingen auf, und die Regelgröße erreicht nach reichlich einer Minute den Sollwert.

Wählt man die Modellpole bei  $s_{1,2} = -3 \pm j3$ , so erhält man den Regler

$$K(s) = \frac{0,499s^2 + 1,58s + 1}{0,08s^2 + 0,477s},$$

der wie der erste Regler einen I-Anteil besitzt und dessen Proportionalanteil 6,24 größer ist als der des ersten Reglers. Der Regler hat denselben Zähler wie der erste, da nur der Nenner  $\bar{A}$  des Modells verändert wurde. Das Einschwingen der Regelgröße erfolgt schneller, wie



**Abb. 12.3:** Führungsübergangsfunktionen der entworfenen Temperaturregelkreise

die obere Kurve in Abb. 12.3 zeigt. Allerdings tritt ein Überschwingen von etwa 5% auf, was durch die Vorgabe von Polen  $s_{1,2}$  auf der Winkelhalbierenden in der komplexen Ebene bewirkt wird.

Im Vergleich zu der in Abb. 9.3 auf S. 470 gezeigten Führungsübergangsfunktion, für die der Regler mit einem Einstellverfahren festgelegt wurde, schwingt der Regelkreis jetzt etwas langsamer, dafür jedoch ohne Überschwingen ein. Im Gegensatz zum Einstellverfahren, bei dem man nach der Festlegung der Reglerparameter nur heuristische Veränderungen an den Parametern und folglich auch am Regelkreisverhalten vornehmen kann, kann jetzt jedoch durch zielgerichtete Veränderung des Modells  $M(s)$  ein vollkommen anderes Verhalten des Kreises gefordert und der entsprechende Regler bestimmt werden. Dabei ist das Reglertypgesetz nicht auf das von PI- oder PID-Reglern beschränkt. Die Flexibilität bei der Wahl der Güteforderungen wird jedoch durch ein Reglertypgesetz mit möglicherweise wesentlich höherer dynamischer Ordnung erkauft. □

**Wahl des Modells  $M(s)$ .** Wie das Beispiel gezeigt hat, kann man das Modell  $M(s)$  für den Regelkreis mit einiger Überlegung aus den Güteforderungen an den geschlossenen Kreis ableiten. Für Systeme höherer Ordnung, die einen großen Polüberschuss besitzen und bei denen demzufolge auch der Polüberschuss von  $M(s)$  groß sein muss, bereitet die Modellvorgabe jedoch einige Schwierigkeiten. Dabei ist insbesondere nicht einfach überschaubar, welche Änderungen im Regelkreisverhalten sich durch Änderungen einzelner Modellparameter ergeben.

Aus diesem Grunde wählt man Modelle in bestimmten Standardformen, beispielsweise in der Binomialform

$$M(s) = \frac{1}{(Ts + 1)^n},$$

die eine Reihenschaltung von  $n$   $PT_1$ -Gliedern beschreibt. Das Zeitverhalten derartiger Modelle für unterschiedliche Parameter kann in Tabellenbüchern nachgeschlagen werden (oder man berechnet es mit MATLAB). Man wählt entsprechend des geforderten Polüberschusses ein Modell aus, dessen Gewichtsfunktion oder Übergangsfunktion den Güteforderungen an den Regelkreis am nächsten kommt. Dabei muss man gegebenenfalls einen Kompromiss zwischen unterschiedlichen Güteforderungen finden. Diese Kompromissbildung erfolgt bei anderen Entwurfsverfahren bei der Auswahl des Reglers, hier also bei der Vorgabe des Modells  $M(s)$ .

**Erweiterungen.** Bisher wurde nur das Führungsverhalten untersucht. Anhand des erläuterten Prinzips kann der Reglerentwurf auf Störverhalten in ähnlicher Weise durchgeführt werden, nur dass sich dann etwas veränderte Formeln ergeben.

Soll der Regler für Führungs- und Störverhalten gleichzeitig entworfen werden, so werden zwei Modelle  $M_w(s)$  und  $M_d(s)$  vorgegeben, wobei der Regelkreis den Forderungen

$$G_w(s) \stackrel{!}{=} M_w(s) \quad \text{und} \quad G_d(s) \stackrel{!}{=} M_d(s)$$

genügen soll. Diese beiden Forderungen können durch eine Regelung mit einem Freiheitsgrad (s. S. 355) nicht gleichzeitig erfüllt werden. Man muss deshalb den Regelkreis um ein Vorfilter erweitern. Die Rückführung  $K(s)$  wird dann so entworfen, dass das Störverhalten die Vorgaben erfüllt. Anschließend wird das Vorfilter für den bestehenden Regelkreis festgelegt, wobei das Führungsverhalten auf die durch  $M_w(s)$  festgelegte Weise verändert wird. Dabei wird – in Erweiterung zum Abschn. 7.3.5 – ein dynamisches Filter  $V(s)$  verwendet.

## 12.2 Modellbasierte Regelung (*Internal Model Control*)

### 12.2.1 Grundidee des Verfahrens

Die Vielzahl der bisher behandelten Analyse- und Entwurfsverfahren hat gezeigt, dass für die Lösung regelungstechnischer Probleme dynamische Modelle der Regelstrecke und des Regelkreises unbedingt erforderlich sind. Die im Modell enthaltenen Informationen über das Verhalten der Regelstrecke gingen in entscheidender Weise in die Wahl der Reglerparameter ein. Das Reglergesetz selbst beinhaltet jedoch das Modell nicht (abgesehen vom Kompensationsregler).

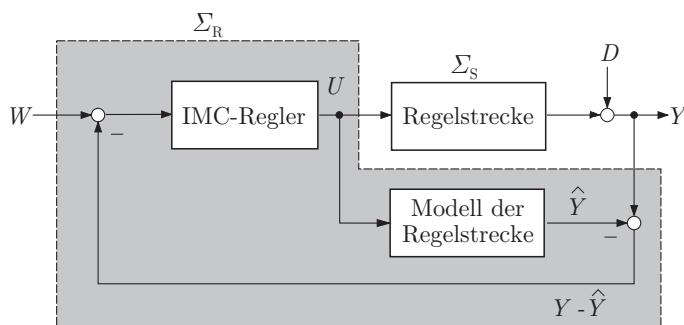


Abb. 12.4: Struktur des IMC-Regelkreises

Das in diesem Abschnitt behandelte Regelungsverfahren unterscheidet sich von den bisherigen dadurch, dass jetzt das Modell der Regelstrecke  $\Sigma_S$  von vornherein

als Bestandteil des Reglers  $\Sigma_R$  verwendet wird, weshalb dieses Verfahren als *Internal Model Control*<sup>2</sup> (IMC) bezeichnet wird. Es gehört wie der Kompensationsregler zu den modellbasierten Regelungsverfahren.

Abbildung 12.4 zeigt die verwendete Struktur des Regelkreises. Das Modell der Regelstrecke wird der Regelstrecke parallel geschaltet, so dass nicht wie bisher die Regelgröße  $Y(s)$ , sondern nur die Differenz  $Y(s) - \hat{Y}(s)$  zu dem als IMC-Regler  $K_{\text{IMC}}(s)$  bezeichneten Block zurückgeführt wird. Die vollständige Regeleinrichtung  $\Sigma_R$  besteht aus den beiden umrahmten Blöcken. Sie ist wie alle bisherigen Regler  $K(s)$  eine Rückführung der Regelgröße  $Y(s)$  auf die Stellgröße  $U(s)$ , wie die Umformung des Blockschaltbildes aus Abb. 12.4 in die dazu äquivalente Abb. 12.5 zeigt.

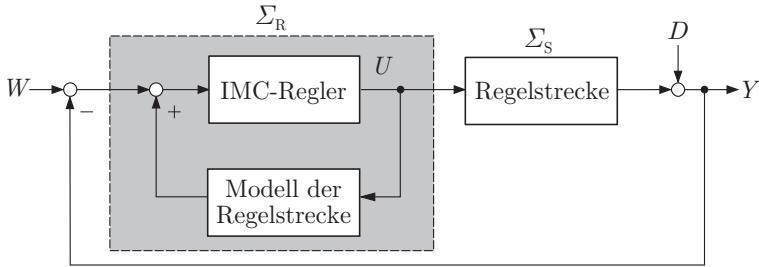


Abb. 12.5: Umgeformtes Blockschaltbild des IMC-Regelkreises

**Verhalten des IMC-Regelkreises bei fehlerfreiem Modell.** Die Wirkung, die das zur Regelstrecke

$$\Sigma_S : \quad Y(s) = G(s)U(s) + D(s)$$

parallel geschaltete Modell

$$\hat{\Sigma}_S : \quad \hat{Y}(s) = \hat{G}(s)U(s)$$

hat, lässt sich am einfachsten dadurch erläutern, dass man zunächst einmal annimmt, das Modell repräsentiere die Regelstrecke vollkommen fehlerfrei ( $\hat{G}(s) = G(s)$ ). Die wahre und die durch das Modell vorhergesagte Regelgröße unterscheiden sich dann im störungsfreien Fall ( $D(s) = 0$ ) nicht und das Rückföhrsignal  $Y(s) - \hat{Y}(s)$  verschwindet:

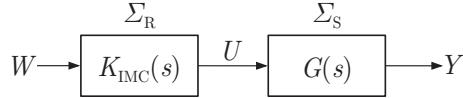
$$U(s) = K_{\text{IMC}}(s)W(s).$$

Der IMC-Regler wirkt als eine reine Vorwärtssteuerung und kann als solche entworfen werden (vgl. Abschn. 7.5). Die Führungsübertragungsfunktion des Regelkreises heißt

$$G_w(s) = G(s)K_{\text{IMC}}(s). \quad (12.5)$$

<sup>2</sup> Da sich der in [35] verwendete Begriff „Modellrückkopplung“ im deutschen Sprachgebrauch nicht durchgesetzt hat, wird hier mit der Abkürzung IMC und den Begriffen IMC-Regler und IMC-Regelkreis gearbeitet.

Diese Beziehung lässt sich auch aus dem Blockschaltbild in Abb. 12.6 ablesen, das durch Umformungen aus dem IMC-Regelkreis in Abb. 12.4 für  $G(s) = \hat{G}(s)$  und  $D(s) = 0$  entstanden ist. Sie zeigt, dass der Regelkreis genau dann stabil ist, wenn die Strecke  $G$  und der IMC-Regler  $K_{\text{IMC}}$  stabil sind.



**Abb. 12.6:** Umgeformter IMC-Regelkreis für  $G(s) = \hat{G}(s)$

Tritt eine Störung  $D$  auf, so beschreibt das Rückführsignal  $Y(s) - \hat{Y}(s) = D(s)$  die Wirkung dieser Störung auf die Regelgröße. Der IMC-Regler kann auf Störungen reagieren

$$\text{IMC-Regler : } U(s) = K_{\text{IMC}}(s)(W(s) - D(s)), \quad (12.6)$$

was ihn von einer reinen Vorwärtssteuerung unterscheidet. Das Rückführsignal verändert den Sollwert  $W$  entsprechend der Wirkung der Störung  $D$ , wodurch der IMC-Regler die Störung kompensieren kann. Für die Störübertragungsfunktion gilt

$$G_d(s) = 1 - G(s)K_{\text{IMC}}(s).$$

**Modell des IMC-Regelkreises.** Die bisherigen Erläuterungen lassen sich anhand des Modells des Regelkreises noch etwas genauer ausführen, wobei jetzt der allgemeine Fall untersucht wird, in dem das Modell der Regelstrecke nicht exakt mit der Regelstrecke übereinstimmt ( $G(s) \neq \hat{G}(s)$ ). Für den Regler gelten die Beziehungen

$$\Sigma_R : \begin{cases} U(s) = K_{\text{IMC}}(s)(W(s) - Y(s) + \hat{Y}(s)) \\ Y(s) = G(s)U(s) + D(s) \\ \hat{Y}(s) = \hat{G}(s)U(s) \end{cases} \quad (12.7)$$

(Abb. 12.4) und

$$K(s) = \frac{U(s)}{W(s) - Y(s)} = \frac{K_{\text{IMC}}(s)}{1 - \hat{G}(s)K_{\text{IMC}}(s)} \quad (12.8)$$

(Abb. 12.5). Durch Einsetzen der Gln. (12.7) ineinander erhält man

$$\begin{aligned} U(s) &= K_{\text{IMC}}(s)W(s) - K_{\text{IMC}}(s)G(s)U(s) - K_{\text{IMC}}(s)D(s) + \\ &\quad + K_{\text{IMC}}(s)\hat{G}(s)U(s) \end{aligned}$$

und nach Umstellung dieser Beziehung

$$U(s) = \frac{K_{\text{IMC}}(s)}{1 + K_{\text{IMC}}(s)(G(s) - \hat{G}(s))}(W(s) - D(s)). \quad (12.9)$$

Diese Gleichung gilt auch, wenn das Modell die Regelstrecke nicht exakt beschreibt; andernfalls vereinfacht sie sich zu Gl. (12.6). Aus Gl. (12.9) erhält man nach Einsetzen in Gl. (12.7) die Führungsübertragungsfunktion des Regelkreises  $\bar{\Sigma}$

$$G_w(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G(s)K_{IMC}(s)}{1 + (G(s) - \hat{G}(s))K_{IMC}(s)} \quad (12.10)$$

sowie die Störübertragungsfunktion

$$G_d(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{1 - \hat{G}(s)K_{IMC}(s)}{1 + (G(s) - \hat{G}(s))K_{IMC}(s)}. \quad (12.11)$$

**YOULA-Parametrierung.** Der IMC-Regelkreis hat noch eine weitere interessante Interpretation. Verwendet man die Gl. (12.8) unter der genannten Voraussetzung eines exakten Regelstreckenmodells, so erhält man mit

$$K(s) = \frac{K_{IMC}(s)}{1 - G(s)K_{IMC}(s)} \quad (12.12)$$

eine Parametrierung der Menge  $\mathcal{K}$  aller stabilisierenden Regler  $\Sigma_R$  der Regelstrecke  $\Sigma_S$ :

$$\mathcal{K} = \left\{ K(s) = \frac{K_{IMC}(s)}{1 - G(s)K_{IMC}(s)} \mid K_{IMC}(s) \text{ beliebig, stabil} \right\} \quad (12.13)$$

Das heißt folgendes: Wenn man für eine gegebene Regelstrecke  $G(s)$  nach Reglern sucht, mit denen der geschlossene Kreis stabil ist, so muss man nach Übertragungsfunktionen  $K(s)$  beliebiger Ordnung suchen, für die die Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises  $\frac{1}{1+G(s)K(s)}$  stabil ist. Dabei muss man sowohl stabile als auch instabile Funktionen  $K(s)$  betrachten. Gleichung (12.13) beschreibt die Klasse aller derartigen Regler. Nimmt man eine beliebige stabile Übertragungsfunktion  $K_{IMC}(s)$ , so erhält man aus Gl. (12.12) einen Regler  $K(s)$ , mit dem der geschlossene Kreis stabil ist.  $K_{IMC}(s)$  tritt also als frei wählbarer „Parameter“ in der Gleichung auf. Nach dem Entdecker dieses Zusammenhangs wird Gl. (12.13) als YOULA-Parametrierung bezeichnet.

## 12.2.2 Entwurf von IMC-Reglern durch $H_2$ -Optimierung

**Reglerentwurf als Optimierungsproblem.** Bei den bisher behandelten Entwurfsverfahren wurden die Güteforderungen an den geschlossenen Kreis durch Richtwerte für das Übergangsverhalten vorgegeben. Bewertet wurden dabei nur einzelne Punkte der Übergangsfunktion wie beispielsweise die Überschwingweite und die Beruhigungszeit. In diesem Abschnitt wird ein Entwurfsverfahren erläutert, bei dem das Übergangsverhalten als Ganzes bewertet wird. Das Regelungsziel wird durch

ein Gütefunktional ausgedrückt und es wird nach einem Regler gesucht, bei dem das Gütefunktional den kleinstmöglichen Wert annimmt. Dabei wird zunächst davon ausgegangen, dass die Regelstrecke exakt bekannt ist und folglich  $\hat{G}(s) = G(s)$  gilt.

Bei der Festlegung des Gütefunktionalen gibt es mehrere Möglichkeiten. Hier soll nur das ISE-Kriterium (*integral square error-Kriterium*)

$$J = \int_0^\infty e^2(t) dt \quad (12.14)$$

behandelt werden, weil es für das damit formulierte Optimierungsproblem

$$\min_{K_{\text{IMC}}} J \quad (12.15)$$

eine geschlossene Lösung gibt. Das Gütefunktional bewertet den zeitlichen Verlauf der Regelabweichung  $e(t)$ , wobei durch Verwendung des Quadrates  $e^2$  große Regelabweichungen stärker in das Gütefunktional eingehen als kleine Abweichungen. Da das angegebene Gütefunktional die sogenannte  $H_2$ -Norm von  $e(t)$

$$\|e(t)\|^2 = \int_0^\infty e^2(t) dt$$

darstellt, spricht man auch von  $H_2$ -Optimierung.

Um dieses Kriterium anwenden zu können, muss eine Eingangsgröße vorgegeben werden, wobei folgende Fälle von besonderer Bedeutung sind:

	Führungsgröße	Störgröße	Anfangsbedingung
1	$w(t) = 0$	$d(t) = 0$	$x(0) = x_0$
2	$w(t) = \delta(t)$	$d(t) = 0$	$x(0) = 0$
3	$w(t) = \sigma(t)$	$d(t) = 0$	$x(0) = 0$
4	$w(t) = 0$	$d(t) = \delta(t)$	$x(0) = 0$
5	$w(t) = 0$	$d(t) = \sigma(t)$	$x(0) = 0$

Die Optimierungsaufgabe (12.15) fordert, dass ein Reglergesetz  $K_{\text{IMC}}(s)$  gesucht wird, für das der für den Regelkreis berechnete Wert des Gütefunktionalen so klein wie möglich ist. Typisch für dieses Optimierungsproblem ist, dass keine Vorgaben für die Struktur des Reglers  $K_{\text{IMC}}$  gemacht werden, also nicht nur nach besonders guten Reglerparametern, sondern gleichzeitig nach einer zweckmäßigen dynamischen Ordnung für den Regler gesucht wird. Dass diese gegenüber dem bisherigen Entwurfsvorgehen verallgemeinerte Formulierung des Entwurfsproblems nicht nur Vorteile, sondern auch Nachteile hat, wird sich schnell herausstellen.

**Lösung des Optimierungsproblems.** Das Optimierungsproblem (12.15) kann mit Hilfe des PARSEVALSchen Theorems in

$$\int_0^\infty e^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |E(j\omega)|^2 d\omega$$

überführt werden. An dieser Formel sieht man, dass das Optimierungsproblem (12.15) die Aufgabe stellt, einen Regler zu suchen, für den die über den gesamten Frequenzbereich gemittelte Amplitude  $|E(j\omega)|^2$  der Regelabweichung minimal wird.

Für die in der zweiten Zeile der oben angegebenen Tabelle verzeichneten Eingangsgröße kann  $E(j\omega)$  entsprechend Gl. (12.5) in der Form

$$E(j\omega) = (1 - G_w(j\omega))W(j\omega) = 1 - G(j\omega)K_{IMC}(j\omega)$$

dargestellt werden, wobei  $K_{IMC}(j\omega)$  den noch unbekannten Frequenzgang des Reglers bezeichnet. Für das Gütefunktional erhält man dann

$$J = \int_0^\infty e^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |1 - G(j\omega)K_{IMC}(j\omega)|^2 d\omega.$$

Zur Lösung des Optimierungsproblems wird die Übertragungsfunktion der Regelstrecke entsprechend

$$G(s) = G_{MP}(s) G_A(s)$$

in den minimalphasigen Anteil  $G_{MP}(s)$  und den Allpassanteil  $G_A(s)$  zerlegt. Den optimalen IMC-Regler  $K_{IMC}^*(s)$ , der das Problem (12.15) löst, erhält man dann aus der Beziehung

$$K_{IMC}^*(s) = \frac{1}{G_{MP}(s)}. \quad (12.16)$$

Der Regler ist für beliebige Regelstrecken stabil, denn in ihn geht nur der minimalphasige Anteil der Regelstrecke ein.

**Diskussion der Lösung.** Für minimalphasige Regelstrecken erhält man mit dem Regler (12.16) eine perfekte Regelung, denn für den geschlossenen Kreis gilt

$$G_w(s) = G(s) K_{IMC}^*(s) = 1$$

und folglich

$$J = 0.$$

Die Regelgröße folgt der Führungsgröße ohne Verzögerung.

Wie kommt diese überraschende Lösung zustande? Zunächst ist festzustellen, dass der Regler (12.16) nur für sprungfähige Regelstrecken  $G(s)$  realisierbar ist, denn für nicht sprungfähige Systeme übersteigt der Zählergrad des Reglers den Nennergrad, so dass das Reglergesetz die Kausalitätsbedingung (4.39) verletzt. Für sprungfähige Regelstrecken widerspricht das Ergebnis dem Gleichgewichtstheorem (7.40) auf S. 375 nicht, denn die offene Kette hat keinen Polüberschuss, so dass eine perfekte Regelung möglich ist.

Das beschriebene ideale Regelkreisverhalten ist jedoch i. Allg. aus drei Gründen nicht erreichbar:

- Das inverse Modell  $\frac{1}{G_{MP}(s)}$  hat mehr Nullstellen als Pole und ist deshalb technisch nicht realisierbar.

- Der Regler ist nur dann stabil, wenn die Regelstrecke minimalphasig ist. Bereits eine geringe Totzeit macht eine perfekte Regelung unmöglich. Für die Führungsübertragungsfunktion gilt dann

$$G_w(s) = G(s) K_{IMC}^*(s) = G_A(s).$$

- Modellunbestimmtheiten und Störungen führen dazu, dass die angegebenen vereinfachten Beziehungen nicht gelten.

Es muss deshalb untersucht werden, wie sich der reale Regelkreis verhält.

Besitzt die Regelstrecke einen nichtminimalphasigen Anteil  $G_A(s)$ , so wird die erreichbare Regelgüte durch diesen Anteil bestimmt. Das Gütekriterium hat in dem mit dem Regler (12.16) geschlossenen Kreis den Wert

$$J^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty |1 - G_A(j\omega)|^2 d\omega.$$

**Erfüllung der Realisierbarkeitsbedingung.** Um den IMC-Regler technisch realisierbar zu machen, wenn der nichtminimalphasige Anteil  $G_A(s)$  der Regelstrecke, wie üblich, einen Polüberschuss  $r$  hat, erweitert man den optimalen IMC-Regler  $K_{IMC}^*(s)$  um einen Filter  $F(s)$   $n_f$ -ter Ordnung, so dass sich der im Regelkreis realisierte IMC-Regler entsprechend

$$\text{IMC-Regler: } K_{IMC}(s) = K_{IMC}^*(s) F(s) = \frac{F(s)}{G_{MP}(s)}$$

(12.17)

aus dem optimalen IMC-Regler und diesem Filter zusammensetzt. Der Polüberschuss  $n_f$  von  $F(s)$  mindestens genauso groß sein wie der Polüberschuss  $r$  von  $\hat{G}_{MP}$ , denn dieser Polüberschuss bewirkt in  $K_{IMC}^*$  einen gleich großen Nullstellenüberschuss.

Im Prinzip kann dieses Filter beliebig gewählt werden. Zweckmäßig ist die Verwendung eines  $PT_n$ -Gliedes genügend hoher Ordnung, wobei entsprechend

$$F(s) = \frac{1}{(T_f s + 1)^{n_f}}$$

$n_f$  Verzögerungsglieder erster Ordnung mit derselben Zeitkonstante  $T_f$  in Reihe geschaltet werden. Aufgrund der statischen Verstärkung  $F(0) = 1$  verändert dieses Filter das statische Verhalten des Regelkreises nicht.

**Verhalten des idealen Regelkreises.** Mit dem IMC-Regler (12.17) erhält man für den idealen Regelkreis ( $\hat{G}(s) = G(s)$ ,  $D(s) = 0$ ) die Führungsübertragungsfunktion

$$G_w(s) = G(s) K_{IMC}(s) = G_{MP}(s) G_A(s) \frac{F(s)}{G_{MP}(s)} = G_A(s) F(s),$$

die für minimalphasige Systeme in

$$G_w(s) = F(s)$$

übergeht. Das heißt, bei einer minimalphasigen Regelstrecke wirkt der Regelkreis unter den angegebenen idealen Bedingungen wie ein Verzögerungsglied der Ordnung  $r$ , wobei  $r$  den relativen Grad der Regelstrecke bezeichnet. Je kleiner der relative Grad ist, umso schneller reagiert der Regelkreis. Bei nichtminimalphasigen Regelstrecken erhöht sich die Verzögerung um den Nichtminimalphasenanteil  $G_A(s)$ , der im Regelkreis nicht kompensiert werden kann.

### 12.2.3 Entwurf robuster IMC-Regler

In diesem Abschnitt wird untersucht, wie der IMC-Regler unter Beachtung der Modellunbestimmtheiten, durch die sich das Regelstreckenmodell  $\hat{G}(s)$  von der Regelstrecke  $G(s)$  unterscheidet, entworfen werden kann. Es wird so vorgegangen, dass der im letzten Abschnitt erläuterte  $H_2$ -Entwurf auf das Regelstreckenmodell  $\hat{G}(s)$  angewendet und anschließend das Filter  $F(s)$  so bemessen wird, dass der Regelkreis gegenüber den Modellunbestimmtheiten robust ist. Nach einer Zerlegung des Modells in den minimalphasigen und den Allpassanteil

$$\hat{G}(s) = \hat{G}_{MP}(s) \hat{G}_A(s)$$

erhält man im ersten Schritt den IMC-Regler entsprechend Gl. (12.17):

$$K_{IMC}(s) = \frac{F(s)}{\hat{G}_{MP}(s)}. \quad (12.18)$$

**Robustheit des IMC-Reglers.** Die Robustheit des IMC-Reglers wird jetzt für Regelstrecken untersucht, deren Modell eine multiplikative Modellunsicherheit aufweist und für die deshalb die Beziehung

$$G(s) = \hat{G}(s) (1 + \delta G_M(s)) \quad (12.19)$$

mit

$$|\delta G_M(s)| \leq \bar{G}_M(s)$$

gilt, wobei  $\bar{G}_M(s)$  eine bekannte obere Schranke für die Modellunbestimmtheiten ist (vgl. Gl. (8.45) auf S. 450). Die robuste Stabilität des Regelkreises ist gesichert, wenn die Ungleichung

$$|\hat{T}(s)| \bar{G}_M(s) < 1, \quad s \in \mathcal{D}$$

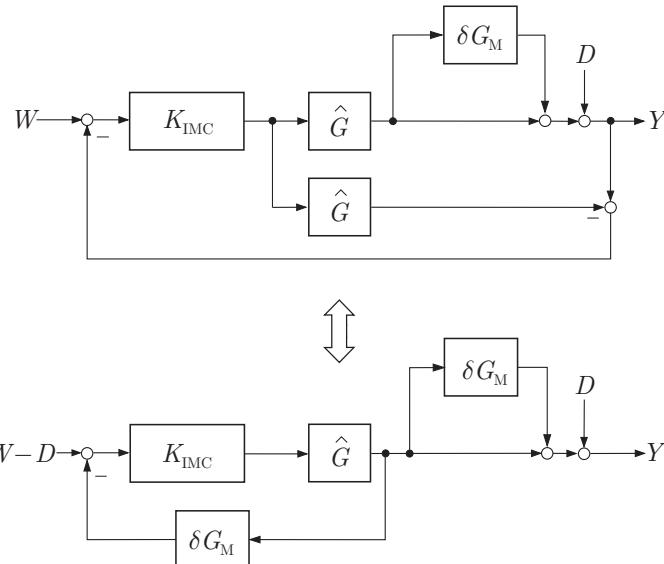
erfüllt ist, wobei

$$\hat{T}(s) = K_{IMC}(s) \hat{G}(s) = F(s) \hat{G}_A(s)$$

die komplementäre Empfindlichkeitsfunktion des IMC-Regelkreises (mit  $\hat{G} = G$ ) darstellt (vgl. Gl. (12.5)). Die robuste Stabilität ist also gesichert, wenn die Ungleichung

$$|\hat{G}_A(s)| |F(s)| \bar{G}_M(s) < 1, \quad s \in \mathcal{D} \quad (12.20)$$

erfüllt ist. In diesem Falle führt der am Näherungsmodell  $\hat{G}(s)$  entworfene Regler trotz der durch  $\bar{G}_M(s)$  beschränkten Modellunbestimmtheiten zu einem stabilen Regelkreis.



**Abb. 12.7:** Zwei äquivalente Darstellungen des IMC-Regelkreises mit Näherungsmodell

Die erhaltene Robustheitsbedingung lässt sich anhand von Abb. 12.7 begründen. Das obere Blockschaltbild zeigt, wie der für das Näherungsmodell  $\hat{G}(s)$  ausgelegte IMC-Regler an die reale Regelstrecke angeschlossen wird, deren Übertragungsfunktion sich entsprechend Gl. (12.19) aus dem Näherungsmodell und der Modellunsicherheit zusammensetzt. Eine Umformung des Blockschaltbildes führt auf das darunter gezeigte Bild, aus dem die angegebene Robustheitsbedingung abgelesen werden kann, die die Stabilität der gezeigten Rückführung sichert (vgl. Gl. (8.49) auf S. 455).

Durch eine geeignete Wahl der Filterparameter soll erreicht werden, dass die hinreichende Bedingung (12.20) für die robuste Stabilität des Regelkreises erfüllt wird. Dies ist der Fall, wenn die Ungleichung

$$|F(j\omega)| < \frac{1}{|G_A(j\omega)| \bar{G}_M(j\omega)} \quad (12.21)$$

gilt, in der gegenüber den oben genannten Bedingungen  $s$  durch  $j\omega$  ersetzt wurde, weil  $F(s)$  in der angegebenen Form für  $n_f \geq 1$  nicht sprungfähig ist und die bisherigen Betrachtungen für  $s \in \mathcal{D}$  auf  $s = j\omega$  beschränkt werden können.

Bei der Wahl des Parameters  $T_f$  des Filters muss ein Kompromiss zwischen den folgenden beiden Zielstellungen gefunden werden:

- $T_f$  muss groß genug gemacht werden, damit  $F(j\omega)$  die Robustheitsbedingung erfüllt.
- $T_f$  muss klein genug gemacht werden, damit sich die Regelgüte nicht zu stark gegenüber der des optimalen Regelkreises verschlechtert.

Ein Wert für  $T_f$ , der beiden Forderungen genügt, kann immer dann gefunden werden, wenn die Modellunbestimmtheiten die Bedingung

$$\bar{G}_M(0) < 1 \quad (12.22)$$

erfüllen. Diese Bedingung fordert lediglich, dass der *statische* Fehler des Regelstreckenmodells kleiner als 100% ist, d. h., dass das Vorzeichen der statischen Verstärkung der Regelstrecke genau bekannt ist.

Den beschriebenen Kompromiss kann man dadurch ermitteln, dass man die im Gütefunktional (12.14) enthaltene Forderung an die Regelkreisdynamik und die Robustheitsforderung (12.21) in der Beziehung

$$|F(j\omega) \hat{G}_A(j\omega) \bar{G}_M(j\omega)| + |(1 - F(j\omega) G_A(j\omega))v| \leq 1 \quad (12.23)$$

zusammenfasst. Der erste Summand stellt das in der Robustheitsforderung stehende Produkt aus komplementärer Empfindlichkeitsfunktion und oberer Schranke der Modellunbestimmtheiten dar. Der zweite Summand beschreibt die Empfindlichkeitsfunktion für den Regelkreis mit  $G = \hat{G}$ . Der Faktor  $v$  wurde eingeführt, um beide Summanden gegeneinander zu wichtigen. Es beschreibt den größten zugelassenen Wert der Empfindlichkeitsfunktion, denn für die Frequenz  $\bar{\omega}$ , für die

$$F(j\bar{\omega}) G_A(j\bar{\omega}) \bar{G}_M(j\bar{\omega}) \approx 0$$

gilt, erfüllt das Filter bei kleinstmöglicher Wahl von  $T_f$  die Bedingung

$$1 - F(j\bar{\omega}) G_A(j\bar{\omega}) \approx \frac{1}{v}.$$

$F(j\omega)$  wird nun so gewählt, dass die Bedingung (12.23) für wenigstens eine Frequenz mit dem Gleichheitszeichen erfüllt ist. Durch geeignete Wahl von  $v$  kann man auf diese Weise zu einem guten Kompromiss für die beiden genannten Forderungen kommen.

Der erhaltene Regler  $K(s)$ , der den IMC-Regler  $K_{IMC}(s)$  und das Regelstreckenmodell  $\hat{G}(s)$  zusammenfasst, hat die Übertragungsfunktion

Rückführung im IMC-Regelkreis:  $K(s) = \frac{K_{IMC}^*(s)F(s)}{1 - \hat{G}(s)K_{IMC}^*(s)F(s)}$

(12.24)

**Zusammenfassung des Entwurfsverfahrens.** Der Entwurf des IMC-Reglers kann in folgendem Algorithmus zusammengefasst werden.

---

### Entwurfsverfahren 12.1 *Entwurf eines IMC-Reglers*

---

- Gegeben:** Näherungsmodell  $\hat{G}(s)$  der Regelstrecke  $\Sigma_S$   
Abschätzung  $\bar{G}_M(s)$  der multiplikativen Modellunbestimmtheiten
1. Berechnen Sie den optimalen IMC-Reglers  $K_{IMC}^*(s)$  entsprechend Gl. (12.18).
  2. Wählen Sie die Ordnung  $n_f$  des Filters  $F(s)$ , so dass der IMC-Regler  $K_{IMC}^*(s)F(s)$  realisierbar ist.
  3. Geben Sie einen Wert für die Wichtung  $v$  in Gl. (12.23) vor.
  4. Wählen Sie die Zeitkonstante  $T_f$ , so dass die Bedingung (12.23) für wenigstens eine Frequenz mit dem Gleichheitszeichen erfüllt ist.
  5. Analysieren Sie das Regelkreisverhalten und bewerten Sie die Eigenschaften im Sinne der gegebenen Güteforderungen. Entspricht das Verhalten nicht den gegebenen Güteforderungen, so müssen Sie den Entwurf ab Schritt 3 mit veränderter Wichtung  $v$  wiederholen.

**Ergebnis:** Übertragungsfunktion  $K(s)$  des Reglers  $\Sigma_R$  entsprechend Gl. (12.24)

---

Der beschriebene Rechenweg zeigt, dass im ersten Schritt zwar ein Optimierungsproblem gelöst wird, der entstehende Regler jedoch aufgrund der Realisierungsbedingung und der Robustheitsforderung nicht optimal ist. Das Optimierungsproblem wird also nicht zur Optimierung des Regelkreises im eigentlichen Sinne des Wortes, sondern als Hilfsmittel genutzt, um ein Entwurfsverfahren zu erhalten, bei dem die Dynamik des Regelkreises als Ganzes bewertet wird.

#### 12.2.4 Beziehung zwischen klassischen Reglern und IMC-Reglern

Da das Modell der Regelstrecke im IMC-Regelkreis explizit verwendet wird und deshalb ein Bestandteil des Reglers ist, kann der entstehende Regler eine sehr hohe dynamische Ordnung haben. Andererseits haben die in den vorangegangenen Kapiteln behandelten Beispiele gezeigt, dass die in der Praxis auftretenden Regelstrecken häufig durch sehr einfache Modelle (näherungsweise) beschrieben werden können. Diese Tatsache ist für die IMC-Regelung insofern von Bedeutung, als dass im zweiten Schritt des Entwurfs auf Robustheitsforderungen Rücksicht genommen und damit die Möglichkeit eröffnet wird, sehr einfache Regelstreckenmodelle für den Entwurf einzusetzen. Das Näherungsmodell  $\hat{G}$  kann also u. U. durch Modellvereinfachung aus einem genaueren Modell gewonnen werden, wenn dabei gleichzeitig

eine obere Schranke  $\bar{G}_M$  für die Modellunbestimmtheiten bestimmt wird. Im Folgenden wird gezeigt, dass sich bei sehr einfachen Modellen in der IMC-Regelung die bekannten Reglerstrukturen wiederfinden lassen.

**PT<sub>1</sub>-Glied als Regelstrecke.** Verwendet man das sehr einfache Modell

$$\hat{G}(s) = \frac{k_s}{T_1 s + 1}$$

für die Regelstrecke  $\Sigma_S$ , so erhält man aus Gl. (12.16) den optimalen IMC-Regler

$$K_{\text{IMC}}^*(s) = \frac{T_1 s + 1}{k_s}.$$

Um diesen Regler realisieren zu können, ist ein Filter  $F(s)$  erster Ordnung notwendig:

$$F(s) = \frac{1}{T_f s + 1}.$$

Damit erhält man als vollständiges Reglergesetz aus Gl. (12.8) den PI-Regler

$$K(s) = \frac{T_1 s + 1}{k_s(T_f s + 1) \left(1 - \frac{1}{T_f s + 1}\right)} = \frac{1}{k_s} \frac{T_1}{T_f} \left(1 + \frac{1}{T_1 s}\right),$$

dessen Zeitkonstante  $T_f$  noch entsprechend der im vorangegangenen Abschnitt angegebenen Forderungen gewählt werden muss. Interessant ist, dass sich die Struktur des PI-Reglers automatisch aus dem IMC-Verfahren ergibt und nicht zu Beginn des Entwurfes als Reglerstruktur angesetzt wurde.

**PT<sub>2</sub>-Glied als Regelstrecke.** Approximiert man das Verhalten der Regelstrecke  $\Sigma_S$  durch ein PT<sub>2</sub>-Glied

$$\hat{G}(s) = \frac{k_s}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)},$$

so erhält man den optimalen IMC-Regler

$$K_{\text{IMC}}^*(s) = \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{k_s},$$

der für die Realisierung ein Filter zweiter Ordnung

$$F(s) = \frac{1}{(T_f s + 1)^2}$$

erforderlich macht. Der daraus entstehende Regler ist durch

$$\begin{aligned} K(s) &= \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{k_s(T_f s + 1)^2 \left(1 - \frac{1}{(T_f s + 1)^2}\right)} \\ &= \frac{1}{k_s} \frac{T_1 T_2}{T_f^2} \left(1 + \frac{T_f}{T_1 T_2} \frac{1}{s(2 + sT_f)} + \frac{T_1 T_f + T_2 T_f + T_1 T_2}{T_f s + 2}\right) \end{aligned}$$

beschrieben. Er besteht aus einem proportionalen, einem verzögerten integralen sowie einem verzögerten proportionalen Anteil.

## 12.3 Smithprädiktor

Der Smithprädiktor ist ein Regelungsprinzip, das wie der IMC-Regler mit einem inneren Modell der Regelstrecke arbeitet und das für Totzeitregelstrecken entwickelt wurde. Um die Grundidee dieses Prinzips zu erläutern, wird das Regelstreckenmodell in den totzeitfreien Anteil  $\tilde{G}(s)$  und ein verbleibendes Totzeitglied zerlegt:

$$G(s) = \tilde{G}(s) e^{-sT_t}. \quad (12.25)$$

Aufgrund der Totzeit wird ein Stelleingriff zur Zeit  $t$  frühestens zur Zeit  $t + T_t$  am Ausgang der Regelstrecke erkennbar.

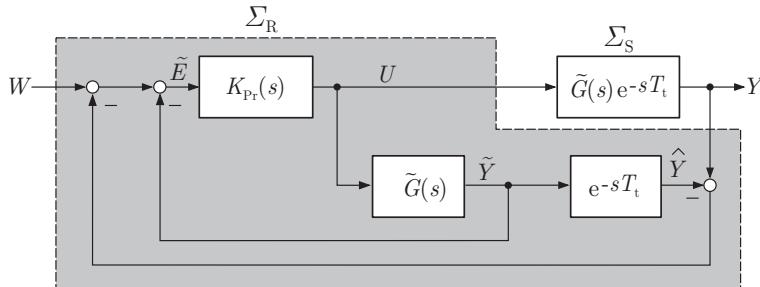


Abb. 12.8: Grundidee des Smithprädiktors

Die Wirkung eines Stelleingriffs auf die Regelstrecke kann man schneller erkennen, wenn man diese Wirkung mit dem totzeitfreien Modell  $\tilde{G}(s)$  vorhersagt. Dafür kann die in Abb. 12.4 dargestellte Idee der IMC-Regelung genutzt werden, wobei der Regler jetzt jedoch nicht nur die Differenz  $Y - \hat{Y}$  der Ausgangsgrößen von Regelstrecke und Modell, sondern auch die Ausgangsgröße der totzeitfreien Strecke verarbeitet, so dass der in Abb. 12.8 mit  $K_{Pr}(s)$  gekennzeichnete Regler die modifizierte Eingangsgröße  $\tilde{E}$  erhält. Dadurch kann der Regler auf die nicht messbare Wirkung  $\tilde{G}(s)U(s)$  der Stellgröße reagieren, bevor diese Wirkung in der gemessenen Regelgröße  $Y$  erkennbar wird.

Die Rückführung  $K_{Pr}(s)$  gemeinsam mit dem zur Regelstrecke parallel angeordneten Modell bilden den nach seinem Erfinder benannten Smithprädiktor. Die Bezeichnung „Prädiktor“ (prädiktive Regelung) weist darauf hin, dass innerhalb der Regelung ein Modell verwendet wird, mit dem die Wirkung der Stellgröße auf das Verhalten der Regelstrecke vorhergesagt wird. Die zum Prädiktor gehörenden Blöcke, die in Abb. 12.8 durch einen Rahmen zusammengefasst sind, können so umgeordnet werden, dass der in Abb. 12.9 gezeigte Regler mit der Übertragungsfunktion  $K(s)$  entsteht.

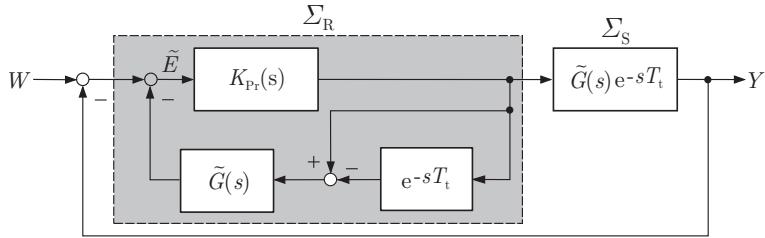


Abb. 12.9: Smithprädiktor

Wie die folgenden Überlegungen zeigen werden, können die in den Abbildungen 12.8 und 12.9 gezeigten Regelkreise auf die in Abb. 12.10 dargestellte Form gebracht werden. Die im Regelkreis wirkende Totzeit überschreitet die durch die Regelstrecke vorgegebene nicht. Der Regler wirkt so, als ob an Stelle der messbaren Regelgröße  $Y$  die vor der Totzeit wirkende Größe  $\tilde{Y}$  zurückgeführt wird. Beim Entwurf der Übertragungsfunktion  $K_{Pr}(s)$  kann deshalb so getan werden, als ob die Regelstrecke gar keine Totzeit besitzt. Damit entfallen alle Forderungen an die offene Kette, die durch das Vorhandensein der Totzeit bestimmt sind, beispielsweise die Forderung (8.39) auf S. 447, durch die die Stabilität des totzeitbehafteten Regelkreises gesichert wird.

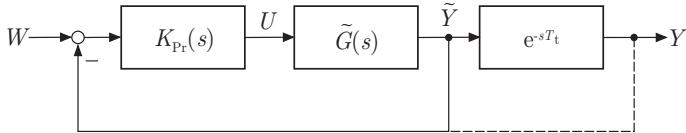


Abb. 12.10: Blockschaltbild des Regelkreises, der durch den Smithprädiktor erzeugt werden soll

Dass die in den Abbildungen 12.8 – 12.10 dargestellten Regelkreise tatsächlich äquivalent sind, erkennt man entweder durch eine schrittweise Umformung der Blockschaltbilder oder aus dem folgenden Vergleich der Führungsübertragungsfunktionen. Der Standardregelkreis in Abb. 12.9 mit Regler  $\Sigma_R$  und Regelstrecke  $\Sigma_S$  hat die Führungsübertragungsfunktion

$$G_w(s) = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} = \frac{\tilde{G}(s)e^{-sT_t}K(s)}{1 + \tilde{G}(s)e^{-sT_t}K(s)},$$

während die Führungsübertragungsfunktion des in Abb. 12.10 gezeigten Regelkreises

$$G_w(s) = \frac{\tilde{G}(s)K_{Pr}(s)}{1 + \tilde{G}(s)K_{Pr}(s)} e^{-sT_t}$$

heißt. Beide Übertragungsfunktionen sind gleich, wenn der Regler  $K(s)$  die Bedingung

$$\text{Smithprädiktor } \Sigma_R: \quad K(s) = \frac{K_{Pr}(s)}{1 + K_{Pr}(s) \tilde{G}(s) (1 - e^{-sT_t})} \quad (12.26)$$

erfüllt, wenn er also die in Abb. 12.9 dargestellte Struktur besitzt.

Wie die Herleitung des Reglertypes  $K(s)$  gezeigt hat, ist der Regelkreis mit Smithprädiktor mit dem in Abb. 12.10 gezeigten Regelkreis äquivalent. Man kann den Regler  $K_{Pr}(s)$  deshalb für den totzeitfreien Teil der Regelstrecke entwerfen, wobei alle bisher vorgestellten Verfahren angewendet werden können. Bei der Bewertung der Regelgüte muss man lediglich beachten, dass die Ausgangsgröße  $y(t)$  des totzeitfreien Regelkreises auf der Zeitachse um die Totzeit  $T_t$  zu verschieben ist.

### Beispiel 12.2 Smithprädiktor für eine Konzentrationsregelung

Es ist eine Konzentrationsregelung für den in Abb. 6.71 auf S. 335 gezeigten kontinuierlich durchflossenen Reaktor mit dem Volumen  $V$  zu entwerfen. Der Reaktor wird mit einem konstanten Durchfluss  $q$  durchströmt. Betrachtet man den Reaktor als homogen durchmischt, so kann man ihn als PT<sub>1</sub>-Glied mit der Zeitkonstante

$$T = \frac{V}{q}$$

und der statischen Verstärkung eins auffassen. Die Konzentrationsmesseinrichtung wird durch ein PT<sub>1</sub>-Glied mit der Zeitkonstante  $T_m$  und der statischen Verstärkung eins beschrieben. Die Stellgröße wirkt mit der Totzeit  $T_t$ , die für den Transport der Flüssigkeit von den Ventilen in den Reaktor notwendig ist. Damit erhält man für die Regelstrecke  $\Sigma_S$  die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{V}{q}s + 1\right)(T_ms + 1)} e^{-sT_t} \quad (12.27)$$

mit dem minimalphasigen Anteil

$$\tilde{G}(s) = \frac{1}{\left(\frac{V}{q}s + 1\right)(T_ms + 1)}.$$

Für die Parameter

$$\text{Volumen: } V = 10 \text{ dm}^3$$

$$\text{Durchfluss: } q = 10 \frac{\text{dm}^3}{\text{min}}$$

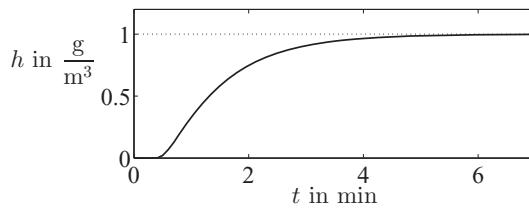
$$\text{Zeitkonstante der Messeinrichtung: } T_m = 0,2 \text{ min}$$

$$\text{Totzeit aufgrund der Rohrleitung: } T_t = 0,4 \text{ min}$$

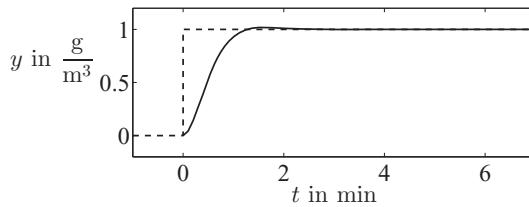
hat die Regelstrecke die in Abb. 12.11 gezeigte Übergangsfunktion, bei der die Totzeit und das PT<sub>2</sub>-Verhalten zu erkennen sind.

Unter Verwendung des totzeitfreien Regelstreckenmodells  $\tilde{G}(s)$  kann mit dem Frequenzkennlinienverfahren der PI-Regler

$$K_{Pr}(s) = k_P \left( +\frac{1}{T_1 s} \right)$$



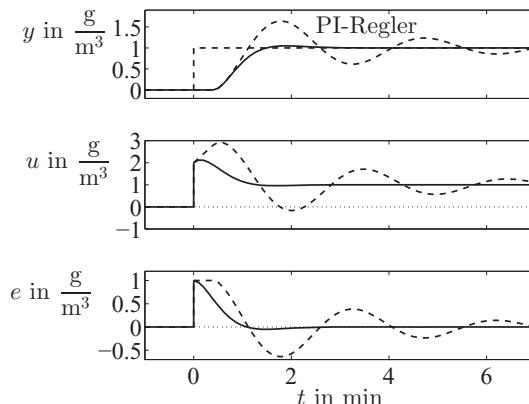
**Abb. 12.11:** Übergangsfunktion der Regelstrecke



**Abb. 12.12:** Führungsübergangsfunktion des PI-geregelten Systems ohne Totzeit

so entworfen werden, dass für den totzeitfreien Regelkreis die in Abb. 12.12 gezeigte annähernd aperiodisch einschwingende Führungsübergangsfunktion entsteht. Für die angegebenen Regelstreckenparameter erhält man die Reglerparameter

$$k_P = 2 \quad \text{und} \quad T_I = 1 \text{ min.}$$



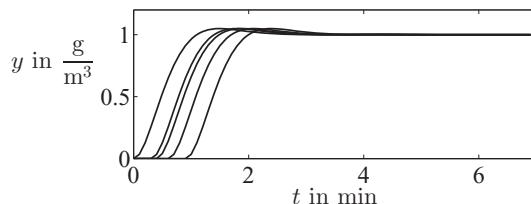
**Abb. 12.13:** Führungsübergangsfunktion des geregelten Reaktors bei Verwendung des PI-Reglers (---) bzw. des Smithprädiktors (—)

Würde man diesen PI-Regler für die totzeitbehaftete Regelstrecke anwenden, so erhielte man die in Abb. 12.13 oben durch die gestrichelte Linie gezeigte Führungsübergangsfunktion, die aufgrund der durch die Totzeit hervorgerufenen Phasenverschiebung sehr stark schwingt. Berücksichtigt man die Streckentotzeit, indem man an Stelle des PI-Reglers den mit diesem Regler berechneten Smithprädiktor (12.26)

$$K(s) = \frac{2(1 + \frac{1}{s})}{1 + 2\left(1 + \frac{1}{s}\right) \frac{1}{(s+1)(0.2s+1)} (1 - e^{-0.4s})} = \frac{2(0.2s+1)(s+1)}{s(1+0.2s)+2(1-e^{-0.4s})}$$

verwendet, so erhält man als Führungsübergangsfunktion des totzeitbehafteten Regelkreises die um  $T_t$  verschobene Führungsübergangsfunktion des nicht totzeitbehafteten Kreises aus Abb. 12.12, die in Abb. 12.13 (oben) durch die durchgezogene Linie dargestellt ist.

Den Unterschied in der Wirkungsweise von PI-Regler und Smithprädiktor erkennt man aus dem mittleren und dem unteren Teil von Abb. 12.13, in denen die Stellgröße  $u(t)$  sowie die Regelabweichung  $e(t)$  bzw.  $\tilde{e}(t)$  gezeigt werden. Auf die Änderung des Sollwertes zur Zeit  $t = 0$  reagieren beide Regler mit einer sofortigen Veränderung der Stellgröße. Da für den PI-Regler jedoch die Regelabweichung bis zum Ablauf der Totzeit konstant bei eins bleibt, vergrößert dieser Regler die Stellgröße weiter, während der Smithprädiktor die Reaktion der totzeitfreien Regelstrecke auf die Stellgröße vorausberechnet, so dass sich die Regelabweichung sofort verkleinert und dieser Regler die Stellgröße ohne Überschwingen dem statischen Endwert anpasst.



**Abb. 12.14:** Führungsübergangsfunktion des geregelten Reaktors mit Smithprädiktor bei unterschiedlichen Totzeiten

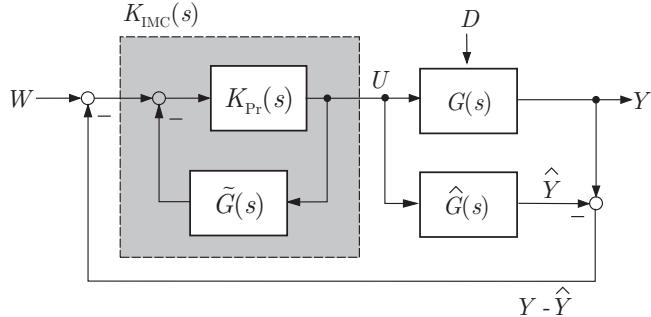
Durch den Smithprädiktor kann das beim Entwurf des PI-Reglers festgelegte Verhalten des geschlossenen Kreises – bis auf die beschriebene Zeitverschiebung um  $T_t$  – für beliebige Streckentotzeiten erreicht werden. Voraussetzung dafür ist, dass die Totzeit exakt bekannt ist und im Smithprädiktor berücksichtigt wird. Abbildung 12.14 zeigt die Führungsübergangsfunktionen, die für Regelstrecken mit dem gegebenen minimalphasigen Anteil  $\tilde{G}(s)$  und unterschiedlichen Totzeiten zwischen 0,2 min und 1 min entstehen. □

**Vergleich von Smithprädiktor und IMC-Regelung.** Interessant ist ein Vergleich des Smithprädiktors mit der im vorhergehenden Abschnitt behandelten IMC-Regelung. Entsprechend Abb. 12.5 würde der IMC-Regler das vollständige Modell  $\tilde{G}(s)e^{-sT_t}$  des Regelkreises enthalten, während die Rückkopplung im Smithprädiktor durch

$$G(s) - \tilde{G}(s) = \tilde{G}(s) (1 - e^{-sT_t})$$

vorgenommen wird. Formt man den Smithprädiktor-Regelkreis um, so erhält man das in Abb. 12.15 dargestellte Blockschaltbild, aus dem der äquivalente IMC-Regler abgelesen werden kann:

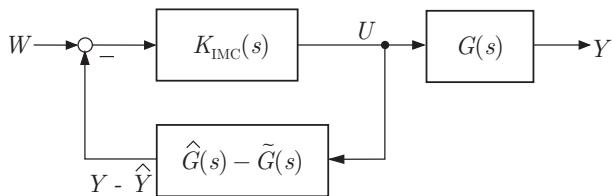
$$K_{\text{IMC}}(s) = \frac{K_{\text{Pr}}(s)}{1 + \tilde{G}(s)K_{\text{Pr}}(s)}. \quad (12.28)$$



**Abb. 12.15:** Darstellung des Smithprädiktors als IMC-Regler

Mit dieser Beziehung gelten alle für den IMC-Regler erhaltenen Ergebnisse auch für den Smithprädiktor. Ist das Regelstreckenmodell fehlerfrei und tritt keine Störung  $D$  auf, so gilt  $Y = \hat{Y}$  und die Rückführung ist wirkungslos. Der Regelkreis wirkt wie eine offene Kette bestehend aus IMC-Regler  $K_{\text{IMC}}$  und Strecke  $G$  und ist genau dann stabil, wenn  $G(s)$  und  $K_{\text{IMC}}(s)$  aus Gl. (12.28) stabil sind. Aus dieser Überlegung wird offensichtlich, dass der Smithprädiktor nur für stabile Regelstrecken angewendet werden kann.

Der Regelkreis mit fehlerfreiem Modell ist genau dann stabil, wenn  $K_{\text{IMC}}(s)$  nach Gl. (12.28) stabil ist. Bemerkenswerterweise geht in diese Bedingung die Totzeit der Regelstrecke nicht ein.



**Abb. 12.16:** Smithprädiktor-Regelkreis mit Modellunbestimmtheiten

Wird ein fehlerbehaftetes Regelstreckenmodell  $\hat{G}(s)$  verwendet, so kann die Robustheit wie beim IMC-Regelkreis geprüft werden. Dabei stellt man zweckmäßigerweise die Modellunbestimmtheiten additiv dar

$$\delta G_A(s) = G(s) - \hat{G}(s),$$

denn wie die Umformung von Abb. 12.15 in Abb. 12.16 zeigt, ist für die robuste Stabilität gerade der aus  $K_{IMC}(s)$  und  $G(s) - \hat{G}(s)$  gebildete Kreis verantwortlich. Hat man eine obere Fehlerschranke

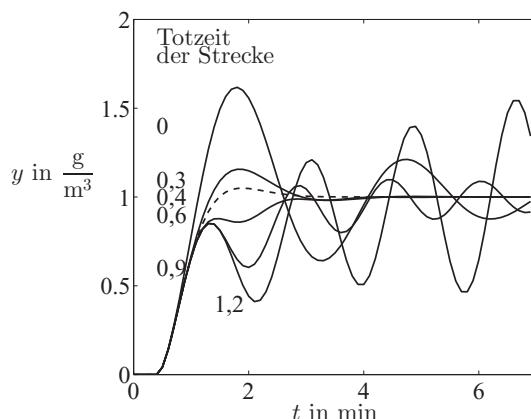
$$\bar{G}_A(s) \geq |G(s) - \hat{G}(s)|$$

bestimmt, so kann man die Stabilität mit der auf S. 453 angegebenen Bedingung (8.48) prüfen:

$$\bar{G}_A(s) |K_{IMC}(s)| < 1 \quad \text{für } s \in \mathcal{D}. \quad (12.29)$$

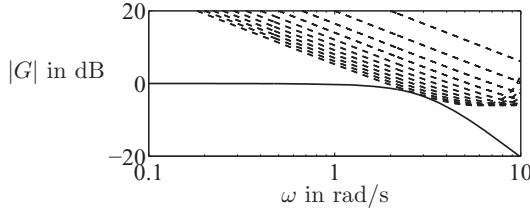
### Beispiel 12.2 (Forts.) Smithprädiktor für eine Konzentrationsregelung

Für die praktische Realisierung wichtig ist die Frage, was passiert, wenn das Regelsteckennetzmodell erhebliche Fehler aufweist. Um die Robustheitseigenschaften für die Konzentrationsregelung zu verdeutlichen, wurde der für die Totzeit  $T_t = 0,4$  min entworfene Smithprädiktor auf Regelstrecken mit Totzeiten zwischen 0 min und 1,2 min angewendet, ohne dass dabei die im Smithprädiktor enthaltene Totzeit angepasst wurde. Die dabei erhaltenen Führungsübergangsfunktionen sind in Abb. 12.17 zusammengestellt, wobei die gestrichelte Kurve der Totzeit von 0,4 Minuten entspricht.



**Abb. 12.17:** Führungsübergangsfunktion des geregelten Reaktors, wenn der Smithprädiktor mit fehlerbehaftetem Modell realisiert wird

Hat die Regelstrecke eine kleinere Totzeit als das Modell, so hat der Regelkreis ein deutlich größeres Überschwingen als vorher. Für größere Totzeiten verzögert sich das Übergangsverhalten und lässt bei sehr großen Abweichungen Instabilität des Regelkreises erkennen. Um die Robustheit des Smithprädiktors richtig beurteilen zu können, sollte man



**Abb. 12.18:** Amplitudengang zur Überprüfung der robusten Stabilität des Smithprädiktor-Regelkreises

berücksichtigen, dass die in der Simulation verwendeten Fehler relativ zum Nominalwert der Totzeit von 0,4 Minuten sehr groß sind.

Abbildung 12.17 wurde hier eingefügt, um den Einfluss der fehlerhaften Modelltotzeit auf das Regelkreisverhalten anschaulich darzustellen. Die Frage, wie groß der Totzeitfehler im Modell werden darf, bevor der Kreis instabil wird, sollte man jedoch nicht anhand von Simulationsuntersuchungen beantworten. Viel eleganter lässt sich die Antwort mit Hilfe der Stabilitätsbedingung (12.29) finden. Stellt  $\hat{T}_t$  die im Modell verwendete und  $T_t$  die wahre Totzeit der Regelstrecke dar, so ist diese Bedingung erfüllt, wenn

$$\left| \tilde{G}(s)(e^{-s\hat{T}_t} - e^{-sT_t}) \right| |K_{IMC}(s)| = \left| \frac{\tilde{G}(s)K_{Pr}(s)e^{-s\hat{T}_t}}{1 + \tilde{G}(s)K_{Pr}(s)} \right| \left| 1 - e^{-s(T_t - \hat{T}_t)} \right| < 1$$

für  $s \in \mathcal{D}$  gilt, wovon man sich unter Verwendung der Gl. (12.28) überzeugen kann. Mit den angegebenen Beispieldaten erhält man für den linken Faktor die Beziehung

$$\left| \frac{\tilde{G}(s)K_{Pr}(s)e^{-s\hat{T}_t}}{1 + \tilde{G}(s)K_{Pr}(s)} \right| = \left| \frac{0,67e^{-0,4s}}{0,1s^2 + 0,5s + 1} \right|$$

und daraus den in Abb. 12.18 gezeigten Amplitudengang (untere Kurve). Für den Totzeitfehler  $\delta T_t = T_t - \hat{T}_t$  muss der Amplitudengang von

$$\left| \frac{1}{1 - e^{-\delta T_t s}} \right|$$

für alle Frequenzen über dem in der Abbildung gezeigten Amplitudengang liegen. Diese Forderung ist für

$$|\delta T_t| < 0,55 \text{ min}$$

erfüllt, denn wie die in Abb. 12.18 für unterschiedliche Werte von  $\delta T_t$  gestrichelt dargestellten Kurven zeigen, berühren sich die beiden angegebenen Amplitudengänge gerade für  $|\delta T_t| = 0,55 \text{ min}$ . Die wahre Totzeit kann also zwischen 0 und 0,95 Minuten liegen! □

## Literaturhinweise

Die Idee des *Internal Model Control* wird seit langer Zeit vor allem bei prädiktiven Regelungen eingesetzt, z. B. bei dem von O. J. M. SMITH 1957 vorgeschlagenen Prädiktor [97]. In

verallgemeinerter Form und unter Berücksichtigung der Robustheitseigenschaften ist sie in [79] beschrieben. Dort wie in [69] wird auch ausführlich auf die Robustheitseigenschaften des Smithprädiktors eingegangen, die aus praktischer Sicht als kritisch bewertet wird und deshalb vor der Anwendung des Prädiktors einer Prüfung mit analytischen Methoden bedarf.

Die Idee der prädiktiven Regelung wurde in den letzten Jahren ausführlich für die allgemeine Aufgabenstellung untersucht, zum Zeitpunkt  $t = \bar{t}$  eine Steuerung  $u(t)$  für das zukünftige Zeitintervall  $\bar{t} \leq t \leq \bar{t} + T_u$  zu finden, so dass die Regelgröße der Führungsgröße möglichst gut folgt. Für diese Aufgabe ist der Verlauf der Führungsgröße für ein in die Zukunft reichendes Zeitintervall  $\bar{t} \leq t \leq T_w$  bekannt und das Systemverhalten wird mit Hilfe eines Regelstreckenmodells für ein Zeitintervall  $0 \leq t \leq T_v$  vorhergesagt. Die prädiktive Regelung beruht also darauf, die Steuerung für ein längeres Zeitintervall zu bestimmen ( $T_w, T_v$  groß), um sie dann nur für ein relativ kurzes Zeitintervall ( $T_u$  klein) tatsächlich anzuwenden. Mit fortschreitender Zeit  $\bar{t}$  verschieben sich die drei betrachteten Zeitintervalle, so dass die Steuerung ständig neu berechnet werden muss, wobei aufgrund der Wirkung unvorhersehbarer Störungen auch ständig modifizierte Stelleingriffe als Ergebnis entstehen. Diese Betrachtungen werden vor allem für zeitdiskrete Systeme (vgl. Kap. II-11) durchgeführt. Den aktuellen Stand dieser Methoden kann man z. B. in [74] nachlesen.

Die im Zusammenhang mit der IMC-Regelung behandelte Parametrierung aller stabilisierenden Regler wurde in allgemeiner Form von YOULA und Mautoren 1976 in [107, 108] angegeben.

# 13

## Erweiterungen der Regelungsstruktur

*Die Wirkung von Regelungen kann wesentlich verbessert werden, wenn die Struktur des Regelkreises erweitert wird. Im Folgenden werden „näherungsweise einschleifige“ Regelkreise behandelt, von denen sich in der Praxis vor allem die Störgrößenaufschaltung, die Regelung mit Hilfsregelgröße bzw. Hilfsstellgröße und die Kaskadenregelung bewährt haben.*

### 13.1 Vermischte Regelungen

Bisher wurden einschleifige Regelungen betrachtet, bei denen genau eine Ausgangsgröße der Regelstrecke als Messgröße vorlag und die Regelstrecke über genau eine Stellgröße beeinflusst werden konnte. Mit derartigen Regelungen können selbst bei bestmöglicher Wahl der Reglerstruktur und Reglerparameter nur beschränkte Güteforderungen erfüllt werden. Liegt z. B. zwischen der Eingriffsstelle der Störung an der Regelstrecke und der Messgröße ein Teil der Regelstrecke mit großer Verzögerung, so kann die Störung nur sehr langsam ausgeregelt werden, selbst wenn der Regler sehr schnell reagiert. Eine Verbesserung des Regelkreisverhaltens wäre möglich, wenn die Messgröße näher an den Störeintritt verlagert werden kann und der Regler folglich Informationen über die Störeinwirkung mit kürzerer Zeitverzögerung erhält.

Im Folgenden werden Erweiterungen der einschleifigen Regelkreise vorgenommen, wodurch Regelungen entstehen, die schneller auf Störungen reagieren können. Es entstehen vermaschte Regelungen, bei denen der Regler nicht mehr nur aus einem

Element besteht. Voraussetzung ist, dass zusätzliche Mess- oder Stellgrößen vorhanden sind, also mehr Informationen über das Verhalten der Regelstrecke bzw. mehr Eingriffsmöglichkeiten in das Regelstreckenverhalten zur Verfügung stehen.

### 13.1.1 Störgrößenaufschaltung

Voraussetzung für eine Störgrößenaufschaltung ist die Messbarkeit der Störgröße  $d$ . Der Regler erhält Informationen über die aktuelle Störung nicht erst dann, wenn der Einfluss der Störung am Ausgang der Regelstrecke messbar ist, sondern er wird früher über Größe und Art der Störung informiert. Diese Information kann genutzt werden, um eine Stellgröße zu berechnen, durch die die Störung kompensiert wird (Abb. 13.1). Neben der Rückführung über den Regler  $K(s)$  wird eine Vorwärtssteuerung mit der Übertragungsfunktion  $K_d(s)$  verwendet.

Eine Störgrößenaufschaltung kann z. B. bei einer Gebäuderegelung verwendet werden. Die wechselnde Umgebungstemperatur wirkt als Störung der Raumtemperatur. Die Regelstrecke kann zwar nicht von dieser Störung abgeschirmt werden, aber die Störung ist messbar und steht dem Regler als zusätzliche Information neben der Zimmertemperatur zur Verfügung.

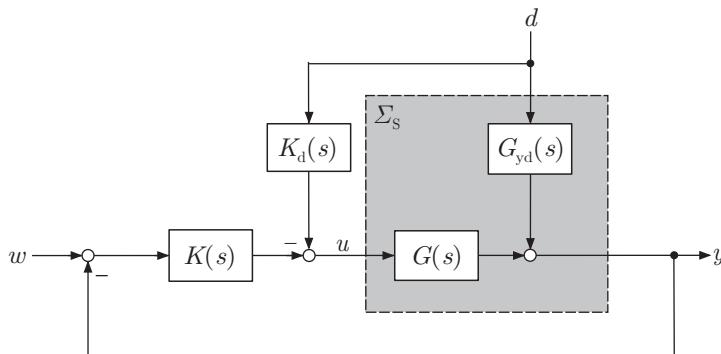


Abb. 13.1: Blockschaubild einer Störgrößenaufschaltung

Aus Abb. 13.1 erhält man die Beziehungen

$$\begin{aligned}\Sigma_S : \quad Y(s) &= G_{yd}(s)D(s) + G(s)U(s) \\ \Sigma_R : \quad U(s) &= -K_d(s)D(s) + K(s)(W(s) - Y(s))\end{aligned}$$

und durch Umstellung

$$Y = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} W(s) + \frac{G_{yd}(s) - G(s)K_d(s)}{1 + G(s)K(s)} D(s).$$

Auf die im Abschn. 7.2 verwendete Form gebracht erhält man daraus

$$Y(s) = G_w(s)W(s) + G_d(s)D(s)$$

mit

$$G_w(s) = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)}, \quad G_d(s) = \frac{G_{yd}(s) - G(s)K_d(s)}{1 + G(s)K(s)}.$$

$G_w(s)$  ist gegeben über dem Standardregelkreis unverändert (vgl. Gl. (7.6)). Der Regelkreis mit Störgrößenaufschaltung hat also auch dieselbe charakteristische Gleichung und folglich dieselben Stabilitätseigenschaften wie der Standardregelkreis. Das Störverhalten  $G_d(s)$  verändert sich jedoch aufgrund der Störgrößenaufschaltung. Gilt insbesondere

$$\text{Störgrößenaufschaltung:} \quad K_d(s) = \frac{G_{yd}(s)}{G(s)}, \quad (13.1)$$

so wird die Störung vollständig durch die Störgrößenaufschaltung kompensiert und macht sich am Ausgang  $y$  überhaupt nicht bemerkbar. Die parallelen Signalwege von  $d$  über den durch  $G_{yd}(s)$  beschriebenen Teil der Regelstrecke bzw. durch die Störgrößenaufschaltung  $K_d(s)$  und den durch  $G(s)$  beschriebenen Teil der Regelstrecke heben sich an der Summationsstelle auf. Man sagt, dass die Ausgangsgröße gegenüber der Störgröße *invariant* ist.

Die Störgrößenaufschaltung kann die Bedingung (13.1) nicht ohne weiteres erfüllen. Erstens muss die Übertragungsfunktion  $G_{yd}(s)$  bekannt sein. Zweitens muss eine Realisierungsbedingung erfüllt sein, die sich aus der Zerlegung der Übertragungsfunktionen  $G(s)$  und  $G_{yd}$  in ihre Zähler- und Nennerpolynome ergibt. Aus

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)}, \quad G_{yd}(s) = \frac{Z_{yd}(s)}{N_{yd}(s)}$$

und Gl. (13.1) folgt

$$K_d(s) = \frac{Z_{yd}(s) N(s)}{N_{yd}(s) Z(s)}.$$

$K_d(s)$  ist nur dann technisch realisierbar, wenn die Bedingung

$$\text{Grad } N_{yd}(s) + \text{Grad } Z(s) \geq \text{Grad } Z_{yd}(s) + \text{Grad } N(s) \quad (13.2)$$

erfüllt ist. Durch Umformung erhält man daraus die Forderung

$$\text{Grad } N_{yd}(s) - \text{Grad } Z_{yd}(s) \geq \text{Grad } N(s) - \text{Grad } Z(s),$$

die besagt, dass der Polüberschuss in dem durch  $G_{yd}$  bezeichneten Signalweg nicht kleiner sein darf als in dem durch  $G$  bezeichneten Signalweg durch die Regelstrecke.

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so soll wenigstens die einfachere Forderung nach *statischer Invarianz* erfüllt sein. Das heißt, dass im stationären Zustand die Ausgangsgröße von der Eingangsgröße unabhängig ist. Aus Gl. (13.1) erhält man die Beziehung

$$K_d(0) = \frac{G_{yd}(0)}{G(0)}, \quad (13.3)$$

die sich auf den statischen Verstärkungsfaktor  $K_d(0)$  der Störgrößenaufschaltung bezieht.

Ist die Bedingung (13.3) erfüllt, so muss der Regler nur während des dynamischen Übergangsvorganges eingreifen. Sprungförmige Störungen werden deshalb ohne bleibende Regelabweichungen abgebaut, ohne dass der Regler einen I-Anteil besitzen muss.

### Beispiel 13.1 Regelung der menschlichen Körpertemperatur

Die Körperkerntemperatur muss beim Menschen in engen Grenzen um  $37^{\circ}\text{C}$  gehalten werden (Homiothermie), obwohl der Körper in Abhängigkeit von der aktuellen Belastung unterschiedlich viel Wärme produziert und der Wärmeaustausch mit der Umgebung von der dort wirkenden Temperatur, Feuchtigkeit und Luftbewegung abhängt. Dem Hypothalamus als Regler stehen dabei drei unterschiedliche Stellgrößen zur Verfügung. Durch Absondern von Schweiß kann die Verdunstung erhöht und damit die Wärmeabgabe gesteigert werden. Andererseits kann die Wärmeproduktion im Körper durch Zittern vergrößert werden. Schließlich kann die Haut mehr oder weniger stark durchblutet werden, wodurch der Wärmetransport vom Körperinneren zur Haut verändert wird.

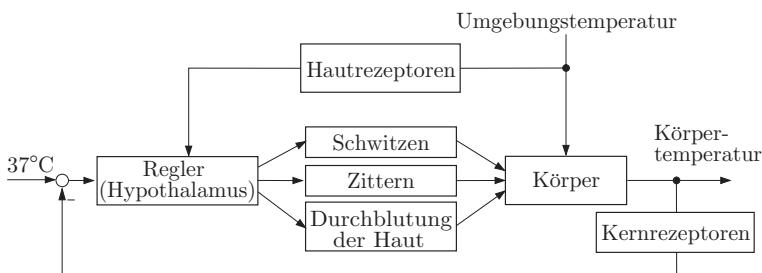


Abb. 13.2: Regelung der Körpertemperatur beim Menschen

Die Regelung reagiert auf Thermorezeptoren, die im Inneren des Körpers und auf der Haut angeordnet sind. Die Hautrezeptoren bewirken gleichzeitig eine Störgrößenaufschaltung, denn sie signalisieren dem Körper eine besonders hohe bzw. niedrige Umgebungstemperatur, so dass sich der Körper auf diese Störgröße einstellen kann (Abb. 13.2).

Bemerkenswerterweise haben diese Rezeptoren PD-Verhalten, d. h., sie reagieren besonders stark auf Temperaturänderungen. Dies kann man im Freibad beobachten, wenn man das Wasser nur am Anfang als besonders kalt empfindet, sich dann aber schnell an diese Wassertemperatur gewöhnt. Der durch den D-Anteil verstärkt aufgenommene Kältereiz führt dazu, dass die Durchblutung der Haut verringert wird, wodurch sich der Körper auf den größeren Temperaturunterschied zur Umgebung einstellt. Nach Abklingen des D-Anteils im Rezeptorsignal hat sich der Körper auf die neue Umgebungsbedingung eingestellt, und zwar sowohl durch die Wirkung der Rückführung als auch aufgrund der Störgrößenaufschaltung. □

**Aufgabe 13.1 Außentemperaturgeführte Vorlauftemperaturregelung**

Inwiefern beinhaltet die im Abschn. 2.1 behandelte außentemperaturgeführte Vorlauftemperaturregelung eine Störgrößenaufschaltung? Zeichnen Sie das Blockschaltbild der Regelung und vergleichen Sie es mit Abb. 13.1. Erwarten Sie, dass die Bedingung (13.2) erfüllt ist?

□

**Aufgabe 13.2 Störgrößenaufschaltung bei einer Reaktortemperaturregelung**

Betrachten Sie den in Abb. 4.4 auf S. 62 dargestellten Rührkesselreaktor. Die durch die Heizung dem Reaktor zugeführte Wärmemenge  $\dot{Q}$  soll durch eine Regelung so eingestellt werden, dass die Temperatur  $T$  im Reaktor einem vorgegebenen Sollwert entspricht, unabhängig davon, wie groß die Temperatur  $T_z$  der zulaufenden Flüssigkeit ist. Wie sieht das Blockschaltbild einer Regelung mit Störgrößenaufschaltung aus? Erläutern Sie, welchen Vorteil die Störgrößenaufschaltung bei der Lösung dieser Regelungsaufgabe bietet. □

**13.1.2 Regelkreis mit Hilfsregelgröße**

Die Voraussetzung für die Anwendung der Störgrößenaufschaltung, dass die Störgröße messbar ist, ist häufig nicht erfüllt. Um dennoch schnell auf eintretende Störungen reagieren zu können, muss die Auswirkung der Störung auf die Regelstrecke möglichst nahe dem Störeingriffspunkt gemessen werden. Diese Messung erfolgt zusätzlich zur Regelgröße  $y$  und wird als Hilfsregelgröße  $y_H$  bezeichnet.

Abbildung 13.3 zeigt, dass die Regelstrecke in zwei Teile zerlegt ist. Der Einfluss der Störung auf die Regelstrecke kann gemessen werden, wobei  $y_H$  sowohl von der Stellgröße  $u$  als auch von der Störung  $d$  beeinflusst wird.  $y_H$  ist Eingangsgröße des zweiten Teils der Regelstrecke.

Im Gegensatz zu Abb. 13.1 ist der Weg vom Eintrittspunkt der Störung zum Ausgang der Regelstrecke jetzt nicht mehr durch ein einziges Übertragungsglied mit der Übertragungsfunktion  $G_{yd}(s)$ , sondern durch zwei in Reihe geschaltete Übertragungsglieder beschrieben. Der erste Teil des Signalweges hat die durch  $G_{y_{Hd}}(s)$  beschriebenen Eigenschaften. Der zweite Teil ist durch  $G_2(s)$  dargestellt. Zwischen  $G_{yd}(s)$  in Abb. 13.1 und  $G_{y_{Hd}}(s)$  in Abb. 13.3 besteht also der Zusammenhang

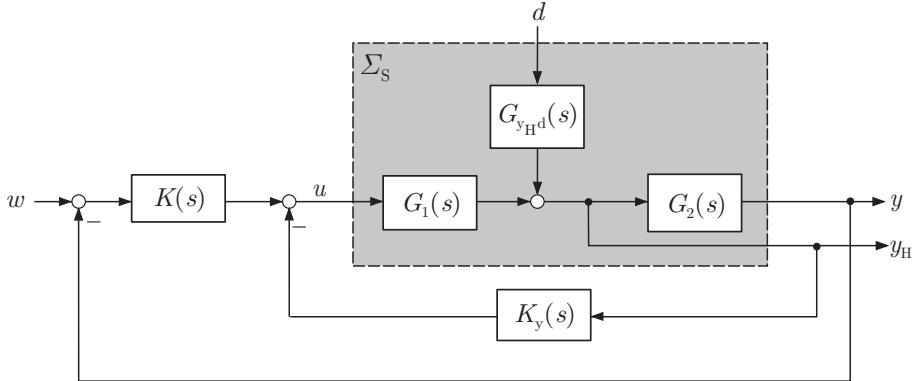
$$G_{yd}(s) = G_{y_{Hd}}(s) G_2(s).$$

Aus Abb. 13.3 erhält man die Gleichungen

$$\Sigma_S : \begin{cases} Y(s) = G_2(s) G_{y_{Hd}}(s) D(s) + G_2(s) G_1(s) U(s) \\ Y_H(s) = G_{y_{Hd}}(s) D(s) + G_1(s) U(s) \end{cases}$$

$$\Sigma_R : \quad U(s) = K(s) (W(s) - Y(s)) - K_Y(s) Y_H(s).$$

Die ersten beiden Gleichungen beschreiben die Regelstrecke, die dritte den Regler. Daraus kann für den Regelkreis  $\bar{\Sigma}$  die Darstellung



**Abb. 13.3:** Regelung mit Hilfsregelgröße

$$\bar{\Sigma} : \quad Y(s) = G_w(s) W(s) + G_d(s) D(s)$$

mit

$$G_w(s) = \frac{G_1(s) G_2(s) K(s)}{1 + G_1(s) K_y(s) + G_1(s) G_2(s) K(s)} \quad (13.4)$$

$$G_d(s) = \frac{G_2(s) G_{yHd}(s)}{1 + G_1(s) K_y(s) + G_1(s) G_2(s) K(s)} \quad (13.5)$$

ableiten. Die charakteristische Gleichung des Regelkreises heißt

$$1 + G_1(s) K_y(s) + G_1(s) G_2(s) K(s) = 0.$$

Sie ist von der des Standardregelkreises verschieden, da jetzt zwei Rückführungen im Regelkreis auftreten (Abb. 13.3).

Als Invarianzbedingung folgt aus  $G_d(s) = 0$  die Beziehung

$$G_2(s) G_{yHd}(s) = 0,$$

in die weder  $K(s)$  noch  $K_y(s)$  eingehen. Eine vollständige Invarianz gegenüber der Störgröße ist also nicht zu erreichen. Näherungsweise wird jedoch die Invarianz dann erreicht, wenn

$$G_{yHd}(s) \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s) K_y(s) + G_2(s) G_1(s) K(s)} \approx 0$$

gilt. Dies kann in dem für die Störung wesentlichen Frequenzbereich dadurch erreicht werden, dass der Nenner betragsmäßig groß gemacht wird. Für statische Invarianz erhält man daraus die Bedingung, dass entweder die offene Kette  $G_1 K_y$  des inneren Regelkreises oder die offene Kette  $G_2 G_1 K$  des äußeren Regelkreises I-Charakter haben muss. Diese Forderung kann gegebenenfalls durch einen I-Anteil in  $K_y$  oder  $K$  erfüllt werden.

Die Einführung einer Hilfsregelgröße ist besonders dann vorteilhaft, wenn der Signalweg der Störung durch die Regelstrecke sehr lang ist, die Störung also in der Nähe der Stellgröße eingreift. Der aus der Rückführung  $K_y(s)$  und dem ersten Teil der Regelstrecke gebildete Kreis kann dann durch hohe Reglerverstärkung schnell gemacht werden, so dass die Störung nur eine kleine Wirkung auf den Eingang des zweiten Teils der Regelstrecke hat. Für  $K(s) = 0$  berechnet sich der Eingang des zweiten Streckenteils gemäß

$$Y_H(s) = \frac{G_{y_H d}(s)}{1 + G_1(s) K_y(s)} D(s).$$

Wird ein P-Regler  $K_y(s) = k_P$  mit hoher Verstärkung  $k_P$  eingesetzt, so ist der Nenner groß und  $|Y_H(s)|$  klein. Die Störung wird also unter starker Abschwächung ihrer Amplitude am zweiten Streckenteil wirksam.

**Aufgabe 13.3\*** *Modell des Regelkreises mit Hilfsregelgröße*

Leiten Sie die Beziehungen (13.4) und (13.5) für die Führungsübergangsfunktion und die Störübergangsfunktion des Regelkreises mit Hilfsregelgröße her.  $\square$

**Aufgabe 13.4\*\*** *Smithprädiktor als Regelung mit Hilfsregelgröße*

Inwiefern kann ein Smithprädiktor als Regelung mit Hilfsregelgröße interpretiert werden? Muss diese Interpretation geändert werden, wenn das im Smithprädiktor verwendete Regelstreckenmodell fehlerbehaftet ist?  $\square$

### 13.1.3 Kaskadenregelung

Die in Abb. 13.4 gezeigte Regelungsstruktur ist ein wichtiger Spezialfall der Regelung mit Hilfsregelgröße. Hier wird der Regler in die zwei Teile  $K_1(s)$  und  $K_2(s)$  zerlegt und die zusätzliche Messgröße  $y_H$  als zweite Eingangsgröße an den zweiten Teil des Reglers angelegt. Es entstehen zwei einander überlagerte Regelkreise, bei dem der äußere Regelkreis den Sollwert für den inneren Regelkreis liefert. Der innere Kreis besteht aus dem Regler  $K_1(s)$  und der Strecke  $G_1(s)$ . Er hat das Ziel, seine Regelgröße  $y_H$  dem Sollwert  $w_H$  nachzuführen. Dieser Sollwert wird vom Regler  $K_2(s)$  des äußeren Kreises geliefert. Als Regelstrecke des äußeren Reglers wirkt der zweite Teil  $G_2(s)$  der Regelstrecke in Reihenschaltung mit dem inneren Regelkreis.

Kaskadenregelungen werden folgendermaßen entworfen:

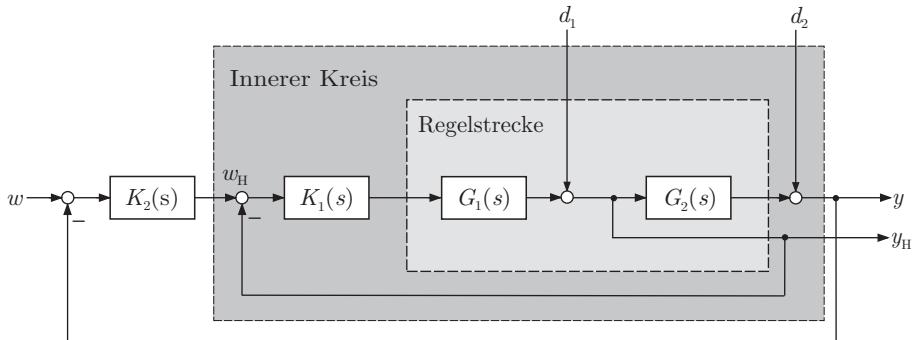


Abb. 13.4: Kaskadenregelung

---

**Algorithmus 13.1** Entwurf einer Kaskadenregelung

---

**Gegeben:** Regelstrecke  $\Sigma_S$  bestehend aus der Reihenschaltung  $G_1(s) \cdot G_2(s)$   
Güteforderungen an den Regelkreis  $\bar{\Sigma}$

1. **Entwurf des inneren Reglers:** Entwerfen Sie den inneren Kreis so, dass die Störung  $d_1$  soweit gedämpft wird, dass sie keinen wesentlichen Einfluss auf den äußeren Kreis hat.
2. **Zusammenfassung des inneren Kreises:** Fassen Sie den inneren Kreis zu einem Block mit der Eingangsgröße  $w_H$ , dem Störeingang  $d_1$  sowie der Ausgangsgröße  $y_H$  zusammen. Dieser Block bildet zusammen mit  $G_2(s)$  die Regelstrecke für den äußeren Regler  $K_2(s)$ .
3. **Entwurf des äußeren Reglers:** Entwerfen Sie den äußeren Regelkreis so, dass für das Gesamtsystem ein gutes Führungsverhalten bezüglich der Führungsgröße  $w$  entsteht.

**Ergebnis:** Regler  $\Sigma_R$  in Kaskadenstruktur  $K_1(s), K_2(s)$

---

Bei diesem Entwurf fordert man, dass der innere Kreis auch ohne das Wirken des äußeren Kreises stabil ist, also nicht erst durch den Regler  $K_2$  stabilisiert wird. Außerdem ist es zweckmäßig zu fordern, dass der innere Kreis schneller als der äußere Kreis ist und beim Entwurf des äußeren Kreises als statisches Übertragungsglied betrachtet werden kann. Dieses Entwurfsvorgehen kann anhand des Modells des inneren Regelkreises folgendermaßen begründet werden.

Für den inneren Kreis liest man aus dem Blockschaltbild das Modell

$$Y_H = \frac{G_1 K_1}{1 + G_1 K_1} W_H + \frac{1}{1 + G_1 K_1} D_1$$

ab. Bis zu seiner Grenzfrequenz  $\omega_{gr1}$  gilt für diesen Kreis

$$G_{w1}(j\omega) = \frac{G_1(j\omega)K_1(j\omega)}{1 + G_1(j\omega)K_1(j\omega)} \approx 1$$

und

$$G_{d1}(j\omega) = \frac{1}{1 + G_1(j\omega)K_1(j\omega)} \approx 0.$$

Für langsame Veränderungen des Sollwertes  $w_H$  und niederfrequente Störungen, also für Führungs- und Störsignale mit Frequenz  $\omega < \omega_{gr1}$  gilt deshalb

$$Y_H(j\omega) \approx W_H(j\omega),$$

d. h., der innere Kreis ist unabhängig von der Störung  $D_1$  und folgt der Führungsgröße  $w_H$  nahezu verzögerungsfrei. Der innere Kreis tritt deshalb gar nicht mehr in der Beschreibung des äußeren Kreises auf. Es gilt

$$Y(j\omega) \approx \frac{G_2(j\omega)K_2(j\omega)}{1 + G_2(j\omega)K_2(j\omega)} W(j\omega) + \frac{1}{1 + G_2(j\omega)K_2(j\omega)} D_2(j\omega).$$

Der äußere Kreis kann für  $\omega < \omega_{gr1}$  so entworfen werden, als würde der innere Kreis gar nicht existieren.

#### Aufgabe 13.5 Kaskadenstruktur der Knotenspannungsregelung

Zeichnen Sie das Blockschaltbild der im Beispiel 11.1 auf S. 533 behandelten Knotenspannungsregelung und begründen Sie, dass es sich dabei um eine Kaskadenregelung handelt.  
□

#### Aufgabe 13.6\* Kaskadenregelung des Fahrzeugabstandes

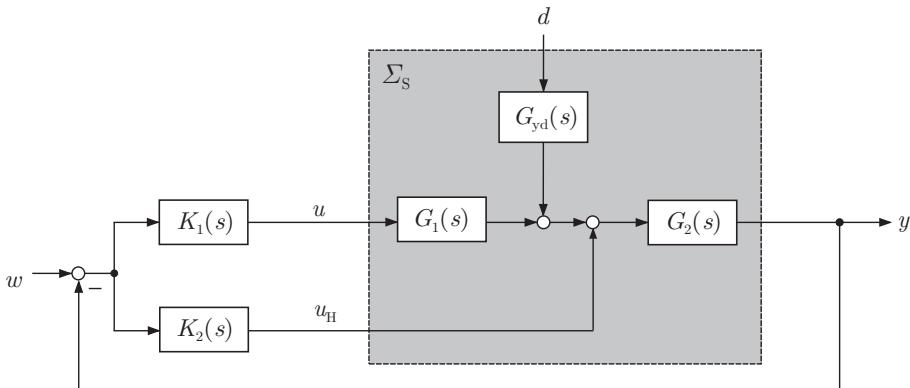
Bei der in Aufgabe 7.7 auf S. 366 betrachteten Regelung des Fahrzeugabstandes ist es notwendig, für eine I-Strecke einen I-Regler zu verwenden, um eine bleibende Regelabweichung bei Wirkung einer Hangabtriebskraft zu vermeiden. Dadurch besitzt die offene Kette I<sub>2</sub>-Verhalten, so dass nur bei starker Phasenanhebung ein stabiler Regelkreis entsteht.

Im folgenden soll deshalb untersucht werden, welche Vereinfachungen sich für diese Regelung ergeben, wenn man eine Kaskadenregelung verwendet, bei der der innere Regelkreis die Fahrzeuggeschwindigkeit auf den Sollwert  $w_v$  bringt und der äußere Regelkreis den Sollwert  $w_v$  so vorgibt, dass der Fahrzeugabstand auf dem vorgegebenen Wert  $w_d$  gehalten wird. Zeichnen Sie das Blockschaltbild und diskutieren Sie die Vorteile der Kaskadenregelung gegenüber der in Abb. A.45 auf S. 646 gezeigten Abstandsregelung. □

#### 13.1.4 Regelkreis mit Hilfsstellgröße

Einer Störung kann auch dadurch schneller entgegengewirkt werden, dass zusätzlich zur Eingangsgröße  $u$  eine weitere Stellgröße verwendet wird, die in der Nähe des Eingriffsortes der Störung wirkt. Diese Stellgröße heißt Hilfsstellgröße  $u_H$ . Abbildung 13.5 zeigt das Blockschaltbild einer Regelung mit Hilfsstellgröße.

Die beiden Teile des Reglers werden mit folgenden Zielstellungen entworfen:



**Abb. 13.5:** Regelung mit Hilfsstellgröße

- $K_2(s)$  bildet mit dem zweiten Streckenteil  $G_2(s)$  einen Regelkreis, der die Störung  $d$  ausregeln soll. Dies ist gut möglich, wenn die Störung in der Nähe des Streckenausganges angreift und folglich  $G_2(s)$  wenig Zeitverzögerung beinhaltet.
- Mit  $K_1(s)$  soll wie üblich die Sollwertfolge für die Regelgröße  $y$  erreicht werden.

**Aufgabe 13.7** Stabilität der Kaskadenregelung und der Regelung mit Hilfsstellgröße

Stellen Sie die charakteristischen Gleichungen für die in Abb. 13.4 gezeigte Kaskadenregelung sowie für die in Abb. 13.5 dargestellte Regelung mit Hilfsstellgröße auf. Wie beeinflussen die einzelnen Kreise die Stabilität des gesamten Systems? □

## 13.2 Mehrgrößenregelungen

Bei vielen technischen Anlagen muss man mehr als eine Größe in einem Arbeitspunkt stabilisieren bzw. einer gegebenen Führungsgröße nachführen. So sind bei einem Dampferzeuger Druck und Temperatur des erzeugten Dampfes auf vorgegebenen Werten zu halten, unabhängig davon, wie viel Dampf durch die angeschlossenen Maschinen abgenommen wird. Als Stellgrößen können die zugeführten Mengen von Speisewasser und Brennstoff dienen.

Die Anzahl der Regelgrößen bereitet keine Schwierigkeit, solange die entstehenden Regelkreise dynamisch oder statisch schwach gekoppelt sind. Beeinflussen sich mehrere Stell- und Regelgrößen jedoch wie beim Beispiel des Dampferzeugers untereinander sehr stark, so müssen diese Kopplungen beim Reglerentwurf berücksichtigt werden. Der Regler besitzt dann mehr als eine Regelgröße bzw. Regelabweichung als Eingang und bildet mehr als eine Stellgröße als Ausgang. Werden die

Eingangsgrößen  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$ , die Ausgangsgrößen  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_r(t)$  sowie die Führungsgrößen  $w_1(t), w_2(t), \dots, w_r(t)$  zu Vektoren  $\mathbf{u}(t)$ ,  $\mathbf{y}(t)$  und  $\mathbf{w}(t)$  zusammengefasst, so kann das Reglergesetz z. B. durch die Gleichung

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}(\mathbf{w}(t) - \mathbf{y}(t))$$

beschrieben werden. Beim Reglerentwurf muss dann die  $(m, r)$ -Reglermatrix  $\mathbf{K}$  bestimmt werden.

Mehrgrößenregelungen werfen neue Probleme für die Modellierung, die Analyse rückgekoppelter Systeme und den Reglerentwurf auf. In Erweiterung der bisher behandelten Themen sind u. a. die folgenden Fragestellungen zu betrachten:

- Unter welchen Bedingungen sind die Stell- und Regelgrößen einer gegebenen Regelstrecke untereinander so stark verkoppelt, dass die Regelungsaufgabe nicht durch mehrere einschleifige Regelkreise gelöst werden kann und ein Mehrgrößenregler eingesetzt werden muss?
- Wie werden Mehrgrößenregelkreise beschrieben?
- Wie kann die Stabilität von Mehrgrößenregelkreisen überprüft werden?
- Unter welchen Bedingungen kann eine instabile Regelstrecke durch einen Mehrgrößenregler stabilisiert werden?
- Welche Reglerstrukturen sind für eine Mehrgrößenregelung zweckmäßig?
- Wie können Mehrgrößenregler entworfen werden?

Antworten darauf werden im Band 2 gegeben. Dabei wird sich zeigen, dass sich einerseits viele der bisher behandelten Methoden auf Mehrgrößensysteme übertragen lassen, wenn man die Mehrgrößenprobleme auf eine Menge gegenseitig verkoppelter Eingrößenprobleme reduziert. Andererseits werden neue Phänomene zu untersuchen sein, die insbesondere aus der Verkopplung mehrerer Stell- und Regelgrößen resultieren.

Auf besondere Probleme führen *dezentrale Regler*, bei denen sich der Regler zwar aus mehreren unabhängigen Ein- oder Mehrgrößenreglern zusammensetzt, die Regelstrecke jedoch starke Kopplungen zwischen allen Stellgrößen und allen Regelgrößen aufweist. Diese Regler sind zwar in der Realisierung mit mehreren unabhängigen Regelungen vergleichbar. Es muss jedoch bei ihrem Entwurf darauf Rücksicht genommen werden, dass sich die entstehenden Regelkreise dynamisch sehr stark beeinflussen. Auf die dezentrale Regelung schwach gekoppelte Stell- und Regelgrößen wird im Kap. II-9 eingegangen. Für eine ausführliche Darstellung der Analyse- und Entwurfsverfahren dezentraler Regelungen wird auf [70] verwiesen.

### 13.3 Robuste, adaptive, nichtlineare und fehlertolerante Regelungen

**Robuste Regelung.** Bei den meisten bisherigen Betrachtungen wurde vorausgesetzt, dass für die Regelstrecke ein exaktes Modell in Form eines Zustandsraummodells oder einer Übertragungsfunktion vorhanden ist. Diese Voraussetzung kann in vielen Anwendungsfällen nicht erfüllt werden. Maßgebende Gründe dafür sind die folgenden:

- Die Regelstrecke kann nicht genau identifiziert werden, weil entweder der Regler vor Inbetriebnahme der Regelstrecke entworfen werden muss oder die Regelstrecke keiner genauen theoretischen oder experimentellen Prozessanalyse zugänglich ist.
- Die Regelstrecke hat viele Eingangsgrößen und Ausgangsgrößen und eine hohe dynamische Ordnung, so dass das Modell sehr umfangreich ist und an Stelle des exakten Modells ein vereinfachtes Modell für den Reglerentwurf eingesetzt werden muss.
- Die Regelstrecke hat nichtlineare oder zeitabhängige Eigenschaften, so dass jedes lineare, zeitunabhängige Modell wesentliche Modellfehler aufweist.

Unter diesen Bedingungen muss bei der Analyse der Strecke und dem Entwurf des Reglers beachtet werden, dass das Streckenmodell nicht vernachlässigbare Modellunbestimmtheiten besitzt. Das für das Modell erhaltene Analyse- oder Entwurfsergebnis kann nicht ohne weiteres auf das reale System übertragen werden. So muss z. B. untersucht werden, ob ein Regler, der mit dem Streckenmodell einen stabilen Regelkreis bildet, auch mit der realen Regelstrecke zu einem stabilen Regelkreis führt. Ein solcher Regler heißt robuster Regler, denn er erfüllt die Güteforderung nach Stabilität trotz der beim Entwurf vorhandenen Modellunbestimmtheiten. Ein kleiner Einblick in die Robustheitsanalyse wurde im Abschn. 8.6 gegeben.

Um die Wirkung der Modellfehler auf das Regelkreisverhalten abschätzen zu können, muss quantitativ bekannt sein, wie groß die Modellfehler sind. Da Fehler naturgemäß nicht exakt erfasst werden können, muss mit Fehlerabschätzungen gearbeitet werden. Wie diese Fehlerabschätzungen für dynamische Systeme aussehen, wie unvollständig bekannte Systeme analysiert werden können und wie Regler so robust entworfen werden können, dass sie trotz der Modellfehler die Regelungsaufgabe erfüllen, wird in [1, 69, 114] erläutert.

**Adaptive Regelung.** Sind die Modellfehler so groß, dass sie von keinem linearen Regler toleriert werden können, so müssen die Reglerparameter dem aktuellen Verhalten der Regelstrecke angepasst werden. Man spricht dann von einem adaptiven Regler.

Ein wichtiges Grundprinzip der adaptiven Regelung beruht darauf, dass der Regler eine Komponente zur Identifikation der Regelstrecke und eine Komponente zur Festlegung der Reglerparameter enthält. Die Identifikation gibt Auskunft über das gegenwärtige dynamische Verhalten der Strecke, d. h., sie führt das Modell den sich

zeitlich verändernden Streckeneigenschaften nach. Durch den Entwurfsalgorithmus werden die Reglerparameter dem aktuellen Streckenmodell angepasst.

Mit der adaptiven Regelung wird die Klasse der linearen Regler verlassen, denn jeder adaptive Regler ist nichtlinear. Diese Tatsache erfordert neue Methoden zur Analyse von Regelkreisen und zum Reglerentwurf. Für die Realisierung des Reglergesetzes erhöht sich der Aufwand. Da aber viele Regler heute durch Mikrorechner realisiert werden, bringt der Übergang von der linearen zur adaptiven Regelung im Wesentlichen nur eine Erhöhung des Softwareaufwandes mit sich. Grundlage der adaptiven Regelung ist eine gut ausgearbeitete Theorie, die beispielsweise in [8] nachgelesen werden kann.

**Nichtlineare Regelungen.** Die in diesem Buch behandelten Methoden eignen sich sehr gut für die Regelung von Systemen, die durch lineare oder linearisierte Modelle beschrieben werden können. Sie können bei nichtlinearen Systemen eingesetzt werden, wenn das System auch unter dem Einfluss von Störungen in einer Umgebung eines Arbeitspunktes verbleibt, in der die Regelstrecke mit guter Genauigkeit durch ein linearisiertes Modell beschrieben werden kann.

Wenn jedoch Nichtlinearitäten das Verhalten der Regelstrecke entscheidend beeinflussen, so muss man nichtlineare Regler einsetzen, bei denen der Zusammenhang zwischen der Regelgröße, der Führungsgröße und der Stellgröße durch nichtlineare Funktionen beschrieben wird. Dies trifft beispielsweise bei chemischen Reaktoren zu, bei denen die Reaktionsgeschwindigkeit nicht nur von den durch Regelungen konstant gehaltenen Temperaturen und Drücken, sondern auch vom Fortschritt der Reaktion abhängt. Bei diesen Reaktoren kann eine gute Regelgüte mit einem linearen Regler nicht über die gesamte Reaktionszeit erreicht werden, weil aufgrund des linearen Zusammenhangs zwischen der Stell- und der Regelgröße der Einfluss des Reglers entweder zu Beginn oder zum Ende der Reaktion dem Regelstreckenverhalten nicht adäquat angepasst ist. Man muss die Reglerverstärkung dem Reaktionsfortschritt nachführen, was auf ein nichtlineares Reglergesetz führt.

Gut lesbare, an die hier behandelten Methoden unmittelbar anschließende Einführungen in die nichtlinearen Regelungen sind [33, 52]. Für eine systemtheoretisch anspruchsvolle, die moderne Theorie nichtlinearer Systeme einführende Monografie wird auf [47] verwiesen.

**Fehlertolerante Steuerungen.** Wenn man erreichen will, dass beim Auftreten eines Fehlers in der Regelstrecke die Regelung an die Fehlersituation angepasst wird, so muss man den Fehler identifizieren und das Reglergesetz den veränderten Eigenschaften der Regelstrecke nachführen. Man spricht dann von einer fehlertoleranten Steuerung (und i. Allg. nicht von einer fehlertoleranten Regelung, weil sich der allgemeinere Begriff der Steuerung hier eingebürgert hat).

Die Grundstruktur einer fehlertoleranten Steuerung ist in Abb. 13.6 zu sehen. Der auf den Prozess wirkende Fehler  $f$  wird durch ein Diagnosesystem identifiziert. Die Anpassung des Reglergesetzes an die veränderten Streckeneigenschaften erfolgt durch den Rekonfigurationsblock. Die Rekonfiguration der Regelung beinhaltet oft nicht nur die Veränderung von Reglerparametern, sondern auch die Veränderung der

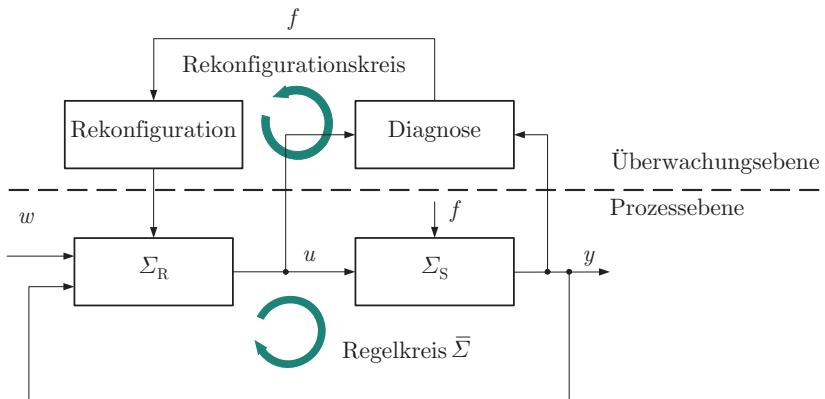


Abb. 13.6: Struktur fehlertoleranter Steuerungen

Regelungsstruktur, insbesondere dann, wenn das Stellglied oder der Sensor ausgefallen ist und die Regelung nur unter Verwendung von redundanten Stell- oder Messgliedern wieder hergestellt werden kann.

Eine aktuelle Übersicht über das Gebiet der fehlertoleranten Steuerung gibt [14]. Die Grundidee der Fehlerdiagnose ist auch in [72] dargestellt.

# Literaturverzeichnis

1. Ackermann, J.: *Robust Control: The Parameter Space Approach*, Springer-Verlag, London 2002.
2. Adamy, J.; Kempf, R.: Analytische Berechnung der laplacetransformierten Transitionsmatrix, *Automatisierungstechnik* **55** (2007) H. 4, S. 201-202.
3. Albertos, P.; Mareels, I.: *Feedback and Control for Everyone*, Springer-Verlag, Berlin 2010.
4. Antoulas, A. C.: *Approximation of Large-Scale Dynamical Systems*, SIAM, Philadelphia 2005.
5. Åström, K. J.: Limitations on control system performance, *European Journal of Contr.* **6** (2000), pp.2-26.
6. Åström, K. J.; Lunze, J.: Warum können wir Fahrrad fahren?, *Automatisierungstechnik* **49** (2001), S. 427-435.
7. Åström, K. J.; Murray, R. M.: *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers*, Princeton Univ. Press, Princeton 2008.
8. Åström, K. J.; Wittenmark, B.: *Adaptive Control*, Addison-Wesley, Reading 1995.
9. Backé, W.: *Servohydraulik*, Vorlesungsskript, RWTH Aachen 1992.
10. Becker, E. W.; Stehl, O.: Ein elektrisches Differenzialmanometer mit einer Empfindlichkeit von  $2 \cdot 10^{-4}$  Torr, *Z. Angew. Physik* **4** (1952), 20-22.
11. Bernstein, D. S.: *Matrix Mathematics: Theory, Facts, and Formulas with Application to Linear Systems Theory*, Princeton Univ. Press, Princeton 2005.
12. Bernstein, D. S.; Bushnell, L. G.: The history of control: from idea to technology, *IEEE Control Systems Magazine* **22** (2002), No. 2.
13. Bittanti, S.; Gevers, M. (eds.): On the dawn and development of control science in the XX-th century, *European J. of Control* **13** (2007), No. 1.
14. Blanke, M.; Kinnaert, M.; Lunze, J.; Staroswiecki, M.: *Diagnosis and Fault-Tolerant Control*, Springer-Verlag, Heidelberg 2006 (2nd edition).
15. Brockett, R. W.: *Finite Dimensional Linear Systems*, J. Wiley & Sons, New York 1970.
16. Brockhaus, R.: *Flugregelung*, Springer-Verlag, Berlin 1994.
17. Bode, H. W.: *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*, Van Nostrand, New York 1945.
18. Bossel, H.: *Systemdynamik*, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1987.
19. Bushnell, L. G. (ed.): The evolving history of control, *IEEE Control Systems Magazine* **16** (1996), No. 3.
20. Byrnes, C. I.; Isidori, A.: A frequency domain philosophy for nonlinear systems, with applications to stabilization and to adaptive control, *IEEE Conf. on Decision and Control*, Las Vegas 1984, pp. 1569-1573.
21. Callier, F. M.; Desoer, C. A.: *Linear System Theory*, Springer Science and Business Media, New York 1991.
22. Chee, G.; Fernando, T.: *Closed-Loop Control of Blood Glucose*, Springer-Verlag, Heidelberg 2007.

23. Cohen, G. H.; Coon, G. A.: Theoretical consideration of retarded control, *Trans. ASME* **75** (1953), 827-834.
24. Datta, B. N.: *Numerical Methods for Linear Control Systems*, Elsevier Academic Press, Amsterdam 2004.
25. Doetsch, G.: *Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation und der Z-Transformation*, Oldenbourg-Verlag, München 1985.
26. Edelkott, D.: *Regelung des Energiestroms zur Drehofensteuerung bei der Herstellung von Portlandzementklinker*, Schriftenreihe der Zementindustrie, Beton-Verlag, Düsseldorf 1995.
27. Engel, H. O.: *Stellgeräte für die Prozessautomatisierung*, VDI-Verlag, Düsseldorf 1994.
28. Evans, W. R.: Control systems synthesis by the root locus method, *Trans. AIEE* **69** (1950), 67-69.
29. Fasol; K. H.; Lauber, R.; Mesch, F.; Rake, H.; Thoma, M.; Töpfer, H.: Great names and the early days of control in Germany, *Automatisierungstechnik* **54** (2006), H. 9, S. 462-473.
30. Ferrante, A.; Lepschy, A.; Viaro, U.: A simple proof of the Routh test, *IEEE Trans. AC-44* (1999), 1306-1309.
31. Föllinger, O.: *Regelungstechnik*, Hüthig-Verlag, Heidelberg 1990.
32. Föllinger, O.: *Laplace- und Fourier-Transformation*, Hüthig-Verlag, Heidelberg 1986.
33. Föllinger, O.: *Nichtlineare Regelung* (Bände 1-3), Oldenbourg-Verlag, München 1980.
34. Frank, P.: Selbsttätige elektrostatische Membranrückstellung bei einem kapazitiven Membranmanometer, *Archiv für Technisches Messen und Industrielle Messtechnik* (1965), S. R 49-R 60.
35. Frank, P. M.: *Entwurf von Regelkreisen mit vorgeschriebenem Verhalten*, G. Braun, Karlsruhe 1974.
36. Franke, D.: *Systeme mit örtlich verteilten Parametern*, Springer-Verlag, Berlin 1987.
37. Gantmacher, F. R.: *Matrizentheorie*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1986.
38. Guyton, A. C.; Coleman, T. G.; Cowley, A. W.; Liard, J.-F.; Norman, R. A.; Mannig, R. D.: Systems analysis of arterial pressure regulation and hypertension, *Annals of Biomedical Engr.* **1** (1972), pp. 254-281.
39. Hagenmeyer, V.; Zeitz, M.: Flachheitsbasierter Entwurf von linearen und nichtlinearen Vorsteuerungen, *Automatisierungstechnik* **52** (2004), S. 3-12.
40. Hang, C. C.; Åström, K. J.; Ho, W. K.: Refinements of the Ziegler-Nichols tuning formula, *IEE Proc., Series D*, **138** (1991), 111-118.
41. Ho, M.-T.; Datta, A.; Bhattacharyya, S. P.: An elementary derivation of the Routh-Hurwitz criterion, *IEEE Trans. AC-43* (1998), 405-409.
42. Hoagg, J. B.; Bernstein, D. S.: Nonminimum-phase zeros, *Control Systems Magazine* (2007) No. 6, pp. 45-57.
43. Horowitz, I. M.: *Synthesis of Feedback Systems*, Academic Press, New York 1963.
44. Horowitz, I. M.; Sidi, M.: Synthesis of feedback systems with large plant ignorance for prescribed time-domain tolerances, *Intern. J. Control* **16** (1972), 287-309.
45. Hsu, C.-H., Chen, C.-T.: A proof of the stability of multivariable feedback systems, *Proc. IEEE* **56** (1968), 2061-2062.
46. Hurwitz, A.: Über Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt, *Mathem. Annalen* **46** (1895), 273-284.
47. Isidori, A.: *Nonlinear Control Systems*, Springer-Verlag, Berlin 1995.
48. Isermann, R.: *Identifikation dynamischer Systeme*, Springer-Verlag, Berlin 1988.
49. Jamshidi, M.: *Large-Scale Systems*, North-Holland, New York 1983.
50. Kailath, T.: *Linear Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs 1980.

51. Kalman, R. E.: On the general theory of control systems, *Proc. of the First IFAC Congress*, Moscow 1960, vol. 1, 481-492.
52. Khalil, H. K.: *Nonlinear Systems*, Prentice-Hall 2002.
53. Khoo, M.C.: *Physiological Control Systems*, IEEE Press Series in Biomedical Engineering, New York 2000.
54. Kiencke, U.; Nielsen, L.: *Automotive Control Systems for Engine, Driveline and Vehicle*, Springer-Verlag, Berlin 2000.
55. Kimura, H.: Perfect and subperfect regulation in linear multivariable control systems, *Automatica* **18** (1984), 125-145.
56. Korn, U.; Wilfert, H.-H.: *Mehrgrößenregelungen*, Verlag Technik, Berlin 1982.
57. Korn, U.; Jumar, U.: *PI-Mehrgrößenregler*, Oldenbourg-Verlag, München 1991.
58. Kortüm, W.; Lugner, P.: *Systemdynamik und Regelung von Fahrzeugen*, Springer-Verlag, Berlin 1994.
59. Kreisselmeier, G.: Struktur mit zwei Freiheitsgraden, *Automatisierungstechnik* **47** (1999), S. 266-269.
60. Küpfmüller, K.: Über die Dynamik der selbsttägigen Verstärkungsregler, *Elektr. Nachrichtentechnik* **5** (1928) H. 11, S. 459-467.
61. Kuhn, U.: Eine praxisnahe Einstellregel für PID-Regler: Die T-Summen-Regel, *Automatisierungstechnische Praxis* **37** (1995), 10-16.
62. Kwakernaak, H.; Sivan, R.: *Modern Signals and Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1991.
63. Latzel, W.: Einstellregeln für vorgegebene Überschwingweiten, *Automatisierungstechnik* **41** (1993), 103-113.
64. Leonhardt, S.; Böhm, S.; Lachmann, B.: Optimierung der Beatmung beim akuten Lungenversagen durch Identifikation physiologischer Kenngrößen, *Automatisierungstechnik* **46** (1998), S. 532-539.
65. Litz, L.: *Reduktion der Ordnung linearer Zustandsraummodelle mittels modaler Verfahren*, Hochschulverlag, Freiburg 1979.
66. Litz, L.; Gabriel, T.; Groß, M.; Gabel, O.: Networked Control Systems - Stand und Ausblick, *Automatisierungstechnik* **56** (2008) H. 1, S. 4-19.
67. Ljapunow, A.: *Stabilität der Bewegung* (russ.), Tipografia Silberberga, Charkow 1892; englische Übersetzung: The general problem of the stability of motion, *Intern. J. Control* **55** (1992), 531-773.
68. Ludyk, G.: *Theoretische Regelungstechnik* (2 Bände), Springer-Verlag, Berlin 1995.
69. Lunze, J.: *Robust Multivariable Feedback Control*, Prentice-Hall, London 1988.
70. Lunze, J.: *Feedback Control of Large Scale Systems*, Prentice-Hall, London 1992.
71. Lunze, J.: *Künstliche Intelligenz für Ingenieure. Band 2: Technische Anwendungen*, Oldenbourg-Verlag, München 1995.
72. Lunze, J.: *Automatisierungstechnik*, Oldenbourg-Verlag, München 2012 (3. Aufl.).
73. Lunze, J. (Ed.): *Control Theory of Digitally Networked Dynamic Systems*, Springer-Verlag, Heidelberg 2014.
74. Maciejowski, J. M.: *Predictive Control with Constraints*, Prentice-Hall, Harlow 2001.
75. Mahmoud, M. S.; Singh, M. G.: *Large Scale Systems Modelling*, Pergamon Press, Oxford 1981.
76. Maxwell, J. C.: On governors, *Proceedings of the Royal Society* (1868) No.100.
77. McClamroch, N. H.: *Steady Aircraft Flight and Performance*, Princeton Univ. Press, Princeton 2011.
78. McLean, D.: *Automatic Flight Control Systems*, Prentice Hall, London 1990.
79. Morari, M.; Zafiriou, E.: *Robust Process Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1989.

80. Müller, P. C.: *Stabilität und Matrizen*, Springer-Verlag, Berlin 1977.
81. Müller, R.; Bettenhäuser, W.: *Stelltechnik*, Oldenbourg-Verlag, München 1995.
82. Nyquist, H.: Regeneration theory, *The Bell System Technical Journal*, **XI** (1932), 126-147.
83. Owens, D. H.; Chotai, A.: Robust controller design for linear dynamic systems using approximate models, *Proc. IEE D-130* (1983), 45-54.
84. Pahl, M.: *Dynamische Modellierung und Regelung eines Biogas-Turmreaktors zur anaeroben Abwasserreinigung*, VDI-Fortschrittberichte, Reihe 8, Nr. 723, VDI-Verlag, Düsseldorf 1998.
85. Patel, R. V.; Laub, A. J.; Van Dooren, P. M. (Eds.): *Numerical Linear Algebra Techniques for Systems and Control*, IEEE Press, New York 1994.
86. Persson, P. B.: Energie- und Wärmehaushalt, Thermoregulation, in Schmidt, R. F.; Lang, F. (Hrsg.): *Physiologie des Menschen*, Springer-Verlag, Berlin 2007, S. 906-927.
87. Petersen, C.: *Dynamik der Baukonstruktionen*, Vieweg, Braunschweig 2000.
88. Preuß, H.-P.: Prozessmodellfreier PID-Regler-Entwurf nach dem Betragsoptimum, *Automatisierungstechnik* **39** (1991), 15-22.
89. Reinisch, K.: Näherungsformeln zur Dimensionierung von Regelkreisen für vorgeschriebene Überschwingweiten, *Messen, Steuern, Regeln* **7** (1964), 4-10.
90. Reinisch, K.: *Kybernetische Grundlagen und Beschreibung kontinuierlicher Systeme*, Verlag Technik, Berlin 1974.
91. Reinisch, K.: *Analyse und Synthese kontinuierlicher Steuerungssysteme*, Verlag Technik, Berlin 1979.
92. Routh, E. J.: *Dynamics of a System of Rigid Bodies*, Dover Publications, New York 1860.
93. Schlitt, H.: *Systemtheorie für stochastische Prozesse*, Springer-Verlag, Berlin 1992.
94. Schwarze, G.: Bestimmung der regelungstechnischen Kennwerte von P-Gliedern aus der Übergangsfunktion ohne Wendetangentenkonstruktion, *Messen, Steuern, Regeln* **5** (1962), 447-449.
95. Seborg, D. E.; Edgar, T. F.; Mellichamp, D. A.: *Process Dynamics and Control*, J. Wiley & Sons, New York 1989.
96. Silbernagl, S.; Despopoulos, A.: *Taschenatlas der Physiologie*, Georg Thieme Verlag, Stuttgart 2001.
97. Smith, O. J. M.: Closer control of loops with dead time, *Chemical Engineering Progress* **53** (1957), 217-219.
98. Stengel, R. F.: *Flight Dynamics*, Princeton Univ. Press, Princeton 2004.
99. Strejc, V.: Approximation aperiodischer Übertragungscharakteristiken, *Regelungstechnik* **7** (1959), 124-128.
100. Svaricek, F.: *Zuverlässige numerische Analyse linearer Regelungssysteme*, B. G. Teubner, Stuttgart 1995.
101. Svaricek, F.: Nulldynamik linearer und nichtlinearer Systeme: Definitionen, Eigenschaften und Anwendungen, *Automatisierungstechnik* **54** (2006), S. 310-322.
102. Voigt, C.; Adamy, J.: *Formelsammlung der Matrizenrechnung*, Oldenbourg-Verlag, München 2007.
103. Vidyasagar, M.: On undershoot and nonminimum phase zeros, *IEEE Trans. on Autom. Contr.* **AC-31** (1986) No. 5, p. 440.
104. Werner, J. (Hrsg.): *Kooperative und autonome Systeme der Medizintechnik*, Oldenbourg-Verlag, München 2005.
105. Wernstedt, J.: *Experimentelle Prozessanalyse*, Verlag Technik, Berlin 1989.
106. Wood, W.; Wollenberg, B. F.: *Power Generation, Operation and Control*, John Wiley & Sons, New York 1984.

107. Youla, D. C.; Bongiorno, J. J.; Jabr, H. A.: Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers - Part I: The single input-output case, *IEEE Trans. Autom. Control* **AC-21** (1976), 3-13
108. Youla, D. C.; Jabr, H. A.; Bongiorno, J. J.: Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers - Part II: The multivariable case, *IEEE Trans. Autom. Control* **AC-21** (1976), 319-338.
109. Zadeh, L. A.; Desoer, C. A.: *Linear System Theory*, Dover Publ. Inc., Mineola 1963.
110. Zeitz, M.: Differenzielle Flachheit: eine nützliche Methodik auch für lineare SISO-Systeme, *Automatisierungstechnik* **58** (2010), S. 5-13.
111. Zeitz, M.: Minimalphasigkeit – keine relevante Eigenschaft für die Regelungstechnik!, *Automatisierungstechnik* **62** (2014) H. 1.
112. Zeitz, M.; Graichen, K.; Meurer, T.: Vorsteuerung mit Trajektorienplanung als Basis einer Folgeregelung, *GMA-Kongress*, Baden-Baden 2005.
113. Ziegler, J. G.; Nichols, N. B.: Optimum settings for automatic controllers, *Trans. ASME* **64** (1942), 759-768.
114. Zhou, K.; Doyle, J.C.: *Essentials of Robust Control*, Prentice Hall, Upper Saddle River 1998.

# Anhang 1

## Lösungen der Übungsaufgaben

### Aufgabe 2.4 Lautstärkeregler

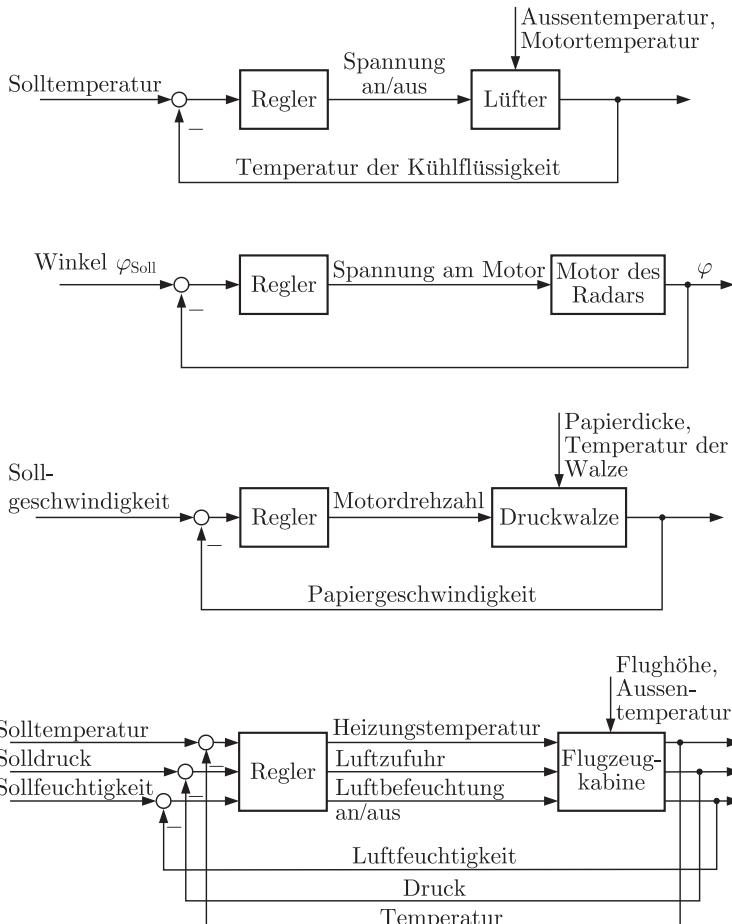
Mit dem Lautstärkeregler kann man die Lautstärke der Hifi-Anlage verändern. Ein Regler in dem hier verwendeten Sinne würde die aktuelle Lautstärke jedoch selbstständig einem vorgegebenen Sollwert anpassen, was offensichtlich bei Hifi-Anlagen nicht passiert. Der Lautstärkeregler ist im Regelungstechnischen Sinn also nur ein Stellglied, das der als Regler wirkende Mensch verwendet, um die Lautstärke dem durch seine Empfindung gegebenen Sollwert anzupassen.

### Aufgabe 2.5 Praktische Regelungsaufgaben

Alle vier Aufgaben haben gemeinsam, dass eine oder mehrere Größen einen vorgegebenen Wert annehmen sollen. Bei der Verfolgung des Raumflugkörpers verändert sich dieser Sollwert mit der Zeit. Würden keine Störungen auftreten, wären die Aufgaben durch eine einmalige Festlegung der Stellgröße zu lösen. Da die Sollwerte jedoch auch unter dem Einfluss von Störungen eingehalten werden sollen, muss ein Regler verwendet werden, der die Stellgröße der durch die Störung verursachten Bewegung des Systems anpasst und dadurch die Abweichung des Istwertes der Regelgröße von ihrem Sollwert klein hält.

Die Blockschaltbilder der vier Regelkreise sind in Abb. A.1 dargestellt.

- Bei der Temperaturregelung der Kühlflüssigkeit verändert der Regler die Geschwindigkeit der Wasserpumpe oder schaltet den Lüfter an oder aus je nach dem, ob die Temperatur des Kühlwassers nach oben oder nach unten vom Sollwert abweicht. Beispiele für Störungen sind eine veränderliche AußenTemperatur und eine sich zeitlich ändernde Wärmeabgabe des Motors.
- Wenn angenommen wird, dass sich die Flugbahn des Raumflugkörper nicht ändert und sich der Raumflugkörper radial um die Erde bewegt, kann seine Position mit dem Winkel  $\phi$  exakt beschrieben werden (Abb. A.2). Ein Motor muss die Ausrichtung der Antenne so verändern, dass sie dem Flugkörper folgt.
- Soll die Papiergeschwindigkeit in einer Druckmaschine konstant sein, muss die Drehzahl der Druckwalze geregelt werden. Da das Papier eine veränderliche Dicke haben kann und

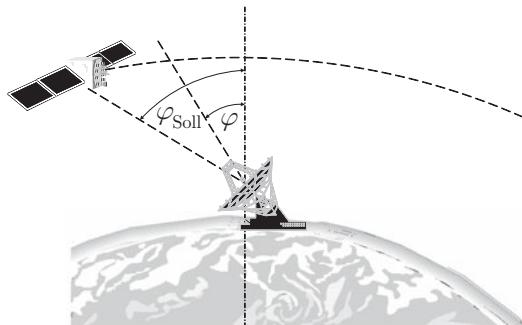
**Abb. A.1:** Blockschaltbilder der Regelkreise

der Umfang der beheizten Druckwalze von deren Temperatur abhängt, ist eine ständige Anpassung des Drehzahl nötig, um eine konstante Papiergeschwindigkeit zu erreichen.

- Um in einem Flugzeug eine angenehme Atemluft zu schaffen, müssen Temperatur, Druck und Luftfeuchtigkeit konstant gehalten werden. In dem dargestellten Blockschaltbild sind alle Größen separat dargestellt.

**Aufgabe 3.2** *Blockschaltbild des Antriebsstranges eines Kraftfahrzeugs*

Abbildung A.3 zeigt das Blockschaltbild, bei dem das durch das Gaspedal, die Stellung der Kupplung und die Wahl des Gangs festgelegte Antriebsmoment um das durch den Fahrwider-



**Abb. A.2:** Verfolgung eines Satelliten mit einem Radar

stand entstehende Moment sowie um das Bremsmoment verkleinert wird. Das daraus resultierende Moment auf die Räder verkleinert oder vergrößert die Fahrzeuggeschwindigkeit.

Die Signalübertragung erfolgt in allen Blöcken über dynamische Systeme, bei denen der aktuelle Wert der Ausgangsgröße nicht nur vom aktuellen Wert, sondern vom vergangenen Verlauf der Eingangsgröße abhängt. Beispielsweise wirkt das Drehmoment auf die Räder als eine Beschleunigung, die die aktuelle Geschwindigkeit erhöht oder verkleinert. Man kann deshalb die aktuelle Geschwindigkeit nur dann ausrechnen, wenn man den Verlauf des Drehmoments bis zur aktuellen Zeit kennt oder, was dasselbe ist, wenn man zur Geschwindigkeit zu einem Zeitpunkt  $t_0$  das Integral der Beschleunigung zwischen  $t_0$  und der aktuellen Zeit  $t$  addiert.

Die Geschwindigkeitsregelung verwendet die aktuelle Fahrzeuggeschwindigkeit als Istwert, vergleicht sie mit einer Sollgeschwindigkeit und verändert den Gaspedalwinkel (oder die Kraftstoffeinspritzung direkt) so, dass die Regelabweichung kleiner wird. Bei Fahrzeugen mit Automatikgetrieben wirkt darüber hinaus eine Rückführung von der Geschwindigkeit auf die Kupplung und das Getriebe.

### Aufgabe 3.3 Künstliche Beatmung

1. Das in Abb. A.4 gezeigte Blockschaltbild besteht aus einer Reihenschaltung von drei Blöcken. Das Beatmungsgerät erzeugt im Mund des Patienten einen bestimmten Luftdruck bzw. einen bestimmten Luftvolumenstrom. Mit dem Block „Atemmechanik“ ist das Zusammenwirken der in den Mund einströmenden Luft mit der Lunge und möglicherweise Atemreflexen des Patienten zusammengefasst. Für den Gasaustausch ist der Luftdruck und das Luftvolumen in der Lunge maßgebend. Die arteriellen Partialdrücke entstehen als Ergebnis eines Gasaustauschs, wobei nicht nur die physikalischen Verhältnisse auf der Gasseite der Alveolen (Lungenbläschen), sondern auch die Partialdrücke im Blut vor dem Gasaustausch von Bedeutung sind, so dass  $p_{O_2}$  und  $p_{CO_2}$  auch von den genannten Störungen abhängen.
2. Das Beatmungsgerät arbeitet in einer offenen Steuerkette, denn die Vorgaben  $p_{Luft}$ ,  $RR$  und  $f_{O_2}$  werden nicht den aktuellen Werten  $p_{O_2}$  und  $p_{CO_2}$  nachgeführt, sondern durch den Arzt fest vorgegeben.

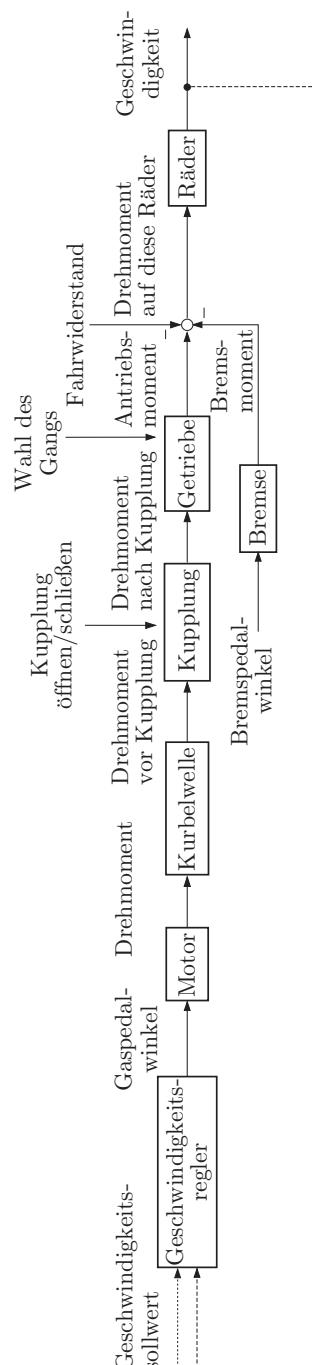


Abb. A.3: Blockschaltbild des Antriebsstranges

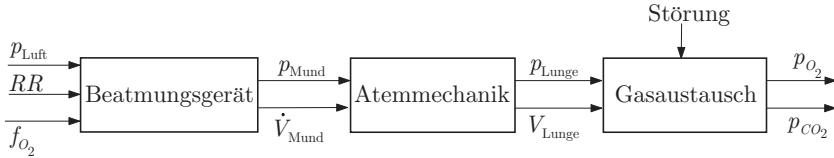


Abb. A.4: Blockschaltbild der künstlichen Beatmung

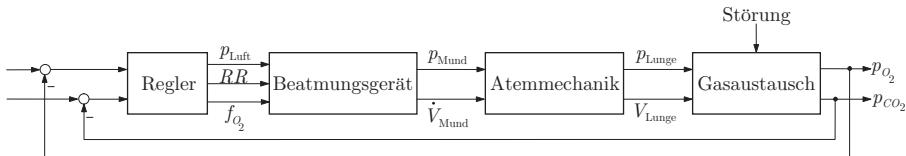


Abb. A.5: Erweitertes Blockschaltbild der künstlichen Beatmung

3. Man kann die aktuellen Partialdrücke  $p_{O_2}$  und  $p_{CO_2}$  nur dann vorgegebenen Sollwerten anpassen, wenn man sie kontinuierlich im Blut misst oder beispielsweise durch Analyse der Ausatemluft Rückschlüsse auf ihre aktuellen Werte zieht. Dann entsteht der in Abb. A.5 gezeigte Regelkreis, in dem der Arzt oder ein automatischer Regler die Vorgaben  $p_{Luft}$ ,  $RR$  und  $f_{O_2}$  für das Beatmungsgerät den aktuellen Regelabweichungen anpasst.

#### Aufgabe 4.4 Phasenporträt eines ungedämpften Schwingkreises

Das Zustandsraummodell des ungedämpften Schwingkreises erhält man aus Gl. (4.5) für  $u = 0$  durch Nullsetzen des ohmschen Widerstandes:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t).$$

Um das Phasenporträt zu bestimmen, muss die Zeit aus diesen Gleichungen eliminiert werden, denn die Zeit kommt in Phasenporträts nicht vor. Aus den beiden Zustandsgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -\frac{1}{L}x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{1}{C}x_1(t)\end{aligned}$$

erhält man

$$dt = -L \frac{dx_1(t)}{x_2(t)} = C \frac{dx_2(t)}{x_1(t)}$$

und

$$\int_0^t L x_1 \, dx_1 = - \int_0^t C x_2 \, dx_2$$

sowie nach Integration

$$Lx_1^2(t) + Cx_2^2(t) = r.$$

Dabei ist  $r$  eine Konstante, in die die Anfangsbedingungen  $x_1(0)$  und  $x_2(0)$  eingehen. Diese Gleichung beschreibt im  $x_1$ - $x_2$ -Raum eine Ellipse, die bei entsprechender Normierung der beiden Koordinatenachsen in einen Kreis übergeht. Für jede Anfangsauslenkung  $x_0$  beschreibt der ungedämpfte Schwingkreis im Phasenraum einen Kreis bzw. eine Ellipse.

**Aufgabe 4.6** Zustandsraummodell eines gekoppelten Feder-Masse-Systems

**1. Systemzerlegung.** Das System besteht aus zwei Massen und drei Federn. Im Schnittbild in Abb. A.6 sind die an den Massen befestigten Federn durch die angreifenden Federkräfte ersetzt.

**2. Komponentenmodelle.** Entsprechend der angegebenen Modellierungssystematik werden zunächst die Gleichungen für die Komponenten getrennt aufgestellt. Die Kraft, mit der die linke Feder auf die Masse  $m_1$  wirkt, ist

$$f_1(t) = c_1 y_1(t). \quad (\text{A.1})$$

Die mittlere Feder übt auf die beiden benachbarten Massen die Kraft

$$f_2(t) = c_2(y_2(t) - y_1(t)) \quad (\text{A.2})$$

aus und die rechte Feder erzeugt die Kraft

$$f_3(t) = -c_3 y_2(t). \quad (\text{A.3})$$

Für die beiden Massen gilt, dass die Summe der angreifenden Kräfte gleich der Trägheitskraft ist, so dass

$$f_{m1}(t) = m_1 \ddot{y}_1(t) \quad (\text{A.4})$$

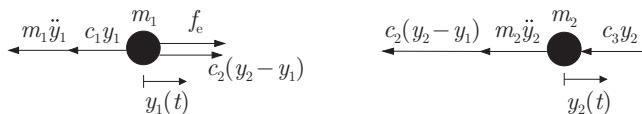
$$f_{m2}(t) = m_2 \ddot{y}_2(t) \quad (\text{A.5})$$

gilt.

**3. Kopplungsbeziehungen.** Die Kopplung der Elemente erfolgt durch die in der Abbildung erkennbaren Kräftegleichgewichte:

$$f_{m1}(t) + f_1(t) - f_2(t) = f_e(t) \quad (\text{A.6})$$

$$f_{m2}(t) + f_2(t) - f_3(t) = 0. \quad (\text{A.7})$$



**Abb. A.6:** Schnittbild des Feder-Masse-Systems

**4. Modellumformung.** In den folgenden Modellbildungsschritten muss aus den angegebenen Gleichungen ein Zustandsraummodell abgeleitet werden. Das Einsetzen der Gln. (A.1) - (A.5) in (A.6) und (A.7) ergibt

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1(t) + c_1 y_1(t) - c_2(y_2(t) - y_1(t)) &= f_e(t) \\ m_2 \ddot{y}_2(t) + c_2(y_2(t) - y_1(t)) + c_3 y_2(t) &= 0. \end{aligned}$$

Durch Auflösen nach  $\ddot{y}_1$  und  $\ddot{y}_2$  erhält man

$$\ddot{y}_1(t) = -\left(\frac{c_1}{m_1} + \frac{c_2}{m_1}\right)y_1(t) + \frac{c_2}{m_1}y_2(t) + \frac{1}{m_1}f_e(t) \quad (\text{A.8})$$

$$\ddot{y}_2(t) = -\left(\frac{c_3}{m_2} + \frac{c_2}{m_2}\right)y_2(t) + \frac{c_2}{m_2}y_1(t). \quad (\text{A.9})$$

Da die Gln. (A.8) und (A.9) zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung darstellen, ergibt sich ein lineares Zustandsraummodell mit vier Zustandsvariablen. Wird der Zustandsvektor entsprechend

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \dot{y}_1(t) \\ y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{pmatrix}$$

gewählt, so folgt aus den Gln. (A.8) und (A.9) mit  $u(t) = f_e(t)$  das Zustandsraummodell

$$\Sigma_{\text{FMS}} : \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{c_1+c_2}{m_1} & 0 & \frac{c_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{c_2}{m_2} & 0 & -\frac{c_2+c_3}{m_2} & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = (1 \ 0 \ 0 \ 0) \ \boldsymbol{x}(t). \end{cases}$$

**Diskussion.** Die angegebenen Differentialgleichungen kann man für das Beispiel direkt aus der Abbildung ablesen. Die Kräfte an den Federn und Massen werden hier erst einzeln in den Gln. (A.1) – (A.5) aufgeschrieben und anschließend zusammengefasst, um zu verdeutlichen, dass die behandelte Modellierungssystematik hinter diesen Kräftegleichungen steckt und bei komplizierteren Beispielen hilft, Fehler zu vermeiden.

Bemerkenswerterweise hat das Zustandsraummodell nur die dynamische Ordnung vier, obwohl sich im System mit den drei Federn und zwei Massen insgesamt fünf Speicherelemente befinden. Der Grund dafür liegt in der Tatsache, dass die Gesamtlänge der Anordnung durch die beiden Seitenwände festgelegt ist und die in den Elementen gespeicherte Energie deshalb einer zusätzlichen Bedingung unterworfen ist. Die dynamische Ordnung ist gleich der Anzahl der zur Zeit  $t = 0$  unabhängig voneinander vorgebbaren Größen. Hier können nur die vier Größen  $y_1$ ,  $\dot{y}_1$ ,  $y_2$  und  $\dot{y}_2$  unabhängig voneinander festgelegt werden. Damit sind auch die Längen der drei Federn vorgegeben. Wie in diesem Beispiel gilt allgemein, dass die dynamische Ordnung eines Systems gleich oder kleiner der Zahl der Speicherelemente ist.

2. Der Signalflussgraph des Systems  $\Sigma_{\text{FMS}}$  ist in Abb. A.7 dargestellt. Nur die Zustandsvariable  $x_2$  wird direkt von der Eingangsgröße beeinflusst, weil die Kraft  $f_e$  direkt nur auf die Masse  $m_1$  wirkt. Es gibt jedoch Pfade im Signalflussgraphen von  $u$  zu allen Zustandsvariablen sowie von allen Zustandsvariablen zu  $y$ .

Die eingezeichnete Schnittlinie verdeutlicht, dass die beiden Massen nur über die mittlere Feder (Federkonstante  $c_2$ ) miteinander gekoppelt sind.

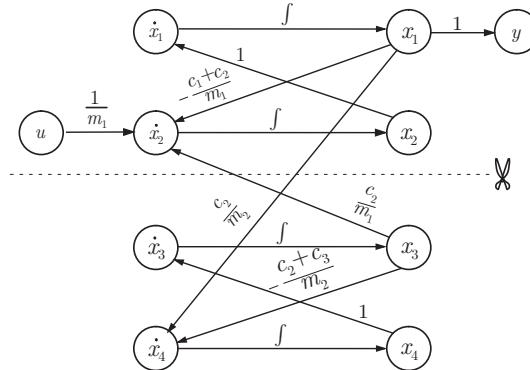


Abb. A.7: Signalflussgraph des Feder-Masse-Systems

**Aufgabe 4.7 Zustandsraummodell eines RC-Gliedes**

1. Die Bauelemente sind durch folgende Gleichungen beschrieben:

$$u_{R_1}(t) = R_1 i_{C_1}(t) \quad (A.10)$$

$$u_{R_2}(t) = R_2 i_{R_2}(t) \quad (A.11)$$

$$i_{C_1}(t) = C_1 \frac{du_{C_1}(t)}{dt} \quad (A.10)$$

$$i_{C_2}(t) = C_2 \frac{du_{C_2}(t)}{dt}. \quad (A.11)$$

Für die Kopplung der Bauelemente erhält man die Gleichungen für die in der Abb. A.8 gekennzeichneten Maschen I und II

$$u_{C_2}(t) - u(t) + u_{R_2}(t) = 0 \quad (A.12)$$

$$u_{C_1}(t) - u_{C_2}(t) + u_{R_1}(t) = 0 \quad (A.13)$$

sowie die Knotenpunktsgleichung

$$i_{R_2}(t) = i_{C_1}(t) + i_{C_2}(t). \quad (A.14)$$

Mit diesen Gleichungen ist das RC-Glied vollständig beschrieben. Alle folgenden Umformungen dienen dazu, aus diesen Gleichungen das gesuchte Zustandsraummodell abzuleiten.

Setzt man zunächst die Bauelementegleichungen für die ohmschen Widerstände und die Knotenpunktgleichung in die Maschengleichungen (A.12), (A.13) ein, so erhält man

$$u_{C_2}(t) - u(t) + R_2 (i_{C_1}(t) + i_{C_2}(t)) = 0 \quad (A.15)$$

$$u_{C_1}(t) - u_{C_2}(t) + R_1 i_{C_1}(t) = 0. \quad (A.16)$$

Das RC-Glied enthält mit den beiden Kondensatoren zwei Energiespeicher, so dass als Zustandsvariablen die Kondensatorspannungen  $u_{C_1}$  und  $u_{C_2}$  eingeführt werden:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} u_{C_1}(t) \\ u_{C_2}(t) \end{pmatrix}. \quad (A.17)$$

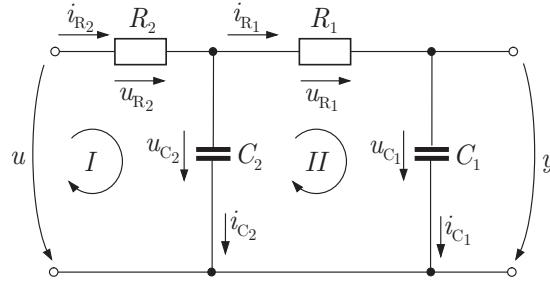


Abb. A.8: RC-Glied

Um die Zustandsgleichung zu erhalten, werden die Gln. (A.15) und (A.16) folgendermaßen umgeformt:

$$\begin{aligned} i_{C_1}(t) &= \frac{u_{C_2}(t) - u_{C_1}(t)}{R_1} \\ u(t) - u_{C_2}(t) &= R_2 \left( \frac{u_{C_2}(t) - u_{C_1}(t)}{R_1} + i_{C_2}(t) \right) \\ i_{C_2}(t) &= \frac{u(t) - u_{C_2}(t)}{R_2} - \frac{u_{C_2}(t) - u_{C_1}(t)}{R_1}. \end{aligned}$$

Das Einsetzen in die Gln. (A.10) und (A.11) ergibt

$$\dot{u}_{C_1}(t) = -\frac{1}{R_1 C_1} u_{C_1}(t) + \frac{1}{R_1 C_1} u_{C_2}(t) \quad (\text{A.18})$$

$$\dot{u}_{C_2}(t) = \frac{1}{R_1 C_2} u_{C_1}(t) - \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C_2} u_{C_2}(t) + \frac{1}{R_2 C_2} u(t) \quad (\text{A.19})$$

und damit die Zustandsgleichung in der Form (4.45)

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_{C_1}(t) \\ \dot{u}_{C_2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & \frac{1}{R_1 C_1} \\ \frac{1}{R_1 C_2} & -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{C_1}(t) \\ u_{C_2}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{R_2 C_2} \end{pmatrix} u(t) \quad (\text{A.20})$$

mit dem Anfangszustand

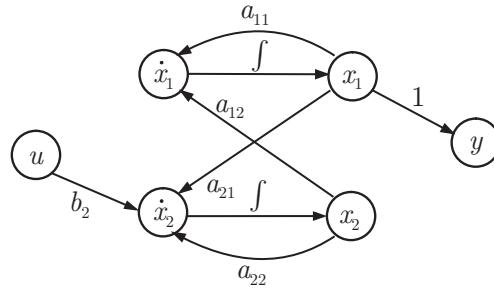
$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} u_{C_1}(0) \\ u_{C_2}(0) \end{pmatrix}.$$

2. Als Zustandsvariablen wurden die beiden Kondensatorspannungen gewählt. Deshalb heißt die Ausgabegleichung

$$y(t) = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} u_{C_1}(t) \\ u_{C_2}(t) \end{pmatrix}.$$

3. Aus dem linearen Zustandsraummodell folgt der in Abb. A.9 dargestellte Signalflussgraph. Die Kantengewichte setzen sich wie im Modell angegeben aus den Parametern  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $C_1$  und  $C_2$  zusammen, beispielsweise  $a_{11} = \frac{-1}{R_1 C_1}$ .

Der Signalflussgraph zeigt, dass die Eingangsgröße  $u$  direkt nur auf  $\dot{x}_2$  wirkt. Die Ausgangsgröße  $y$  ist gleich der Zustandsgröße  $x_1$ . Der Signalweg vom Eingang zum Ausgang führt jedoch über beide Zustandsgrößen.

**Abb. A.9:** Signalflussgraph des RC-Gliedes

4. Wie im Abschn. 4.4.1 erläutert wird, kann man generell die Ausgangsgröße und deren Ableitungen als Zustandsvariablen verwenden. Für das Beispiel heißt dieser Zustandsvektor

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} u_{C_1}(t) \\ \dot{u}_{C_1}(t) \end{pmatrix}.$$

Als Zustandsraummodell erhält man nach Differenziation der Gl. (A.18) und Einsetzen der Gl. (A.19)

$$\Sigma_{RC} : \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \dot{u}_{C_1}(t) \\ \ddot{u}_{C_1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-1}{R_1 R_2 C_1 C_2} & -\frac{R_1 C_1 + R_2 C_1 + R_2 C_2}{R_1 R_2 C_1 C_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{C_1}(t) \\ \dot{u}_{C_1}(t) \end{pmatrix} + \\ \quad + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} u_{C_1}(t) \\ \dot{u}_{C_1}(t) \end{pmatrix}. \end{array} \right.$$

Den Anfangszustand berechnet man aus den als bekannt vorausgesetzten Kondensatorspannungen entsprechend

$$\begin{pmatrix} u_{C_1}(0) \\ \dot{u}_{C_1}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{C_1}(0) \\ \frac{1}{R_1 C_1} (u_{C_2}(0) - u_{C_1}(0)) \end{pmatrix}.$$

5. Bei der Eingangsgröße  $u$ , der Ausgangsgröße  $y$  sowie den im ersten Modell verwendeten Zustandsgrößen  $u_{C_1}$  und  $u_{C_2}$  handelt es sich um Spannungen mit der Maßeinheit Volt. Die Elemente der Systemmatrix  $A$  und des Steuervektors  $b$  haben die Einheit  $\frac{\text{AV}}{\text{VAs}} = \text{s}^{-1}$ . Die Elemente des Beobachtungsvektors  $c^T$  sind einheitenlos.
6. Für die Zeit wählt man zweckmäßigerweise die Einheit Millisekunde, so dass die Elemente von  $A$  und  $b$  dann die Maßeinheit  $\frac{1}{\text{ms}}$  haben. Dann erhält man beispielsweise für das Element  $a_{12}$  der Systemmatrix

$$a_{12} = \frac{1}{R_1 C_1} = \frac{1}{10^{-4} \text{ s}} = \frac{1}{10^{-4} \cdot 10^3 \text{ ms}} = 10 \frac{1}{\text{ms}},$$

also mit den gewählten Maßeinheiten  $a_{12} = 10$ . Das Zustandsraummodell hat dann folgendes Aussehen:

$$\Sigma_{\text{RC}} : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -10 & 10 \\ 25 & -26,25 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1,25 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = (1 \quad 0) \mathbf{x}(t). \end{cases}$$

**Aufgabe 4.8 Zustandsraummodell eines 3-Tank-Systems**

- Das System besteht aus drei Behältern, von denen jeder als Speicherelement wirkt. Das Zustandsraummodell wird deshalb die Ordnung drei haben. Geeignete Zustandsvariablen sind die Füllstände  $h_i$ , denn das zukünftige Verhalten jedes Behälters kann bei gegebenem Zufluss aus dem aktuellen Füllstand bestimmt werden.
- Bezeichnet man den Zufluss (Volumenstrom pro Zeiteinheit) in jeden Behälter mit  $p_{zi}$  und den Abfluss mit  $p_{ai}$ , so gilt für jeden Behälter die Volumenbilanz

$$A_i \frac{dh_i(t)}{dt} = p_{zi}(t) - p_{ai}(t),$$

wobei  $A_i$  den Querschnitt des  $i$ -ten Behälters bezeichnet. Der Zufluss zum ersten Behälter ist die Eingangsgröße

$$p_{z1}(t) = u(t).$$

Für die Kopplung zwischen den Behältern 1 und 2 gilt

$$p_{a1}(t) = p_{z2}(t),$$

wobei bei dem hier verwendeten linearen Ansatz der Volumenstrom proportional zu der Differenz der Füllstände in diesen Behältern ist<sup>1</sup>

$$p_{a1}(t) = k_{12}(h_1(t) - h_2(t)).$$

Der Proportionalitätsfaktor  $k_{12}$  hängt von der Geometrie, insbesondere vom Querschnitt des Verbindungsrohrs, ab. Ähnliche Gleichungen gelten für die Kopplung der beiden rechten Behälter. Der Ablauf aus dem rechten Behälter ist durch

$$p_{a3}(t) = k_3 h_3(t)$$

beschrieben. Damit erhält man das Zustandsraummodell

$$\Sigma : \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{h}_1(t) \\ \dot{h}_2(t) \\ \dot{h}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{k_{12}}{A_1} & \frac{k_{12}}{A_1} & 0 \\ \frac{k_{12}}{A_2} & -\frac{k_{23}+k_{12}}{A_2} & \frac{k_{23}}{A_2} \\ 0 & \frac{k_{23}}{A_3} & -\frac{k_{23}+k_3}{A_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ h_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = (0 \quad 0 \quad 1) \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ h_3(t) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

<sup>1</sup> Zwischen Volumenstrom und Füllstand gilt eigentlich der nichtlineare Zusammenhang (4.101), der jedoch um den Arbeitspunkt linearisiert werden kann, wie es im Abschn. 4.5.1 gezeigt wird.

Als Anfangszustand müssen die drei Füllstände  $h_1(0)$ ,  $h_2(0)$ ,  $h_3(0)$  bekannt sein.

3. Das Modell gilt nur, solange die Behälter weder leer- noch überlaufen. Eingangs- und Ausgangsgröße können nur positive Werte annehmen. Unter Verwendung von Schranken  $\bar{h}_1$ ,  $\bar{h}_2$  und  $\bar{h}_3$ , die von der Geometrie der Behälter abhängen, können diese Einschränkungen in der Form (4.98) aufgeschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} -u(t) \\ h_1(t) \\ -h_1(t) \\ h_2(t) \\ -h_2(t) \\ h_3(t) \\ -h_3(t) \\ -y(t) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{h}_1 \\ 0 \\ \bar{h}_2 \\ 0 \\ \bar{h}_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

### Aufgabe 4.9 Linearisierung der Pendelgleichungen

1. In Tangentialrichtung ergibt sich an der Masse  $m$  das in Abb. A.10 dargestellte Kräftegleichgewicht, wobei der Winkel  $\varphi$  entgegen dem Uhrzeigersinn positiv gezählt wird:

$$ml\ddot{\varphi}(t) + mg \sin \varphi(t) = f(t). \quad (\text{A.21})$$

Für die Zustandsvariablen  $x_1(t) = \varphi(t)$  und  $x_2(t) = \dot{\varphi}(t)$  erhält man aus Gl. (A.21) die Beziehungen

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (\text{A.22})$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{g}{l} \sin x_1(t) + \frac{1}{ml} u(t). \quad (\text{A.23})$$

Die Ausgangsgröße  $y(t)$  ist der Winkel  $\varphi(t) = x_1(t)$ , die Eingangsgröße  $u(t)$  die Kraft  $f(t)$ . Das nichtlineare Zustandsraummodell der Form (4.102) lautet

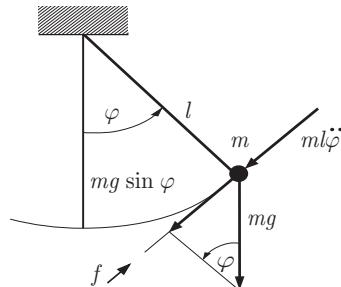


Abb. A.10: Kräftegleichgewicht am Pendel

$$\text{Pendel : } \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ -\frac{g}{l} \sin x_1(t) + \frac{1}{ml} u(t) \end{pmatrix}, & \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \dot{\varphi}(0) \end{pmatrix} \\ y(t) = x_1(t). \end{cases}$$

Die Nichtlinearität äußert sich darin, dass  $\dot{x}_2$  über die Sinusfunktion von  $x_1$  abhängt.

2. Um ein lineares Zustandsraummodell zu erhalten, muss zunächst ein Arbeitspunkt  $(\bar{x}, \bar{y})$  ermittelt werden. Aus der Annahme  $\bar{u} = \bar{f}$  und den Bedingungen (4.103), (4.104) für den Arbeitspunkt ergibt sich

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= \arcsin \frac{\bar{f}}{mg} \\ \bar{x}_2 &= 0 \\ \bar{y} &= \bar{x}_1.\end{aligned}$$

Die konstante Kraft  $\bar{f}$  führt dazu, dass das Pendel bei der Auslenkung  $\bar{\varphi}$  zur Ruhe kommt.

Für das linearisierte Modell erhält man entsprechend den Gln. (4.106), (4.107), (4.110) und (4.111)

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos x_1 & 0 \end{pmatrix}_{x=\bar{x}, u=\bar{u}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos \bar{x}_1 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{b} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml} \end{pmatrix}_{x=\bar{x}, u=\bar{u}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml} \end{pmatrix} \\ \mathbf{c}^T &= (1 \ 0) \\ d &= 0.\end{aligned}$$

Das linearisierte Modell

$$\begin{aligned}\delta \dot{\mathbf{x}}(t) &\approx \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g/l \cos \bar{x}_1 & 0 \end{pmatrix} \delta \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml} \end{pmatrix} \delta u(t), & \delta \mathbf{x}(0) &\approx \begin{pmatrix} \varphi(0) - \bar{x}_1 \\ \dot{\varphi}(0) \end{pmatrix} \\ \delta y(t) &\approx (1 \ 0) \delta \mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

beschreibt das Verhalten des Systems in der Nähe des angegebenen Arbeitspunktes.

3. Misst man die Masse in Kilogramm, die Länge in Metern, den Winkel im Bogenmaß und die Zeit in Sekunden, so liegt der Arbeitspunkt bei  $\bar{x}_1 = 0,205$ , also bei etwa 11 Grad. Das linearisierte Zustandsraummodell heißt

$$\text{linearisiertes Pendel : } \begin{cases} \delta \dot{\mathbf{x}}(t) \approx \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9,6 & 0 \end{pmatrix} \delta \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \delta u(t) \\ \delta \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} \varphi(0) - 0,205 \\ \dot{\varphi}(0) \end{pmatrix} \\ \delta y(t) \approx (1 \ 0) \delta \mathbf{x}(t). \end{cases}$$

Dieses Zustandsraummodell ist mit

$$\delta u(t) = f(t) - \bar{f}$$

zu verwenden. Hat man  $\delta y(t)$  berechnet, so erhält man den absoluten Wert aus der Beziehung

$$y(t) = \bar{y} + \delta y(t).$$

### Aufgabe 5.1 Eigenbewegungen zweier gekoppelter Wasserbehälter

1. Im Gleichgewichtszustand sind beide Flüssigkeitsspiegel auf derselben Höhe  $h_0$ . Aus der Volumenbilanz der beiden Behältern erhält man

$$\dot{v}_1(t) = A_1 \dot{h}_1(t) \quad (\text{A.24})$$

$$\dot{v}_2(t) = A_2 \dot{h}_2(t), \quad (\text{A.25})$$

wobei  $\dot{v}_i$  den Volumenstrom in den Behälter  $i$  hinein bezeichnet. Der von den Flüssigkeiten in den beiden Behältern auf die Flüssigkeit im Verbindungsrohr ausgeübte Druck ist proportional zum Füllstand:

$$p_1(t) = \rho h_1(t) \quad (\text{A.26})$$

$$p_2(t) = \rho h_2(t). \quad (\text{A.27})$$

Der durch das Verbindungsrohr fließende Volumenstrom ist unter der Annahme linearer Zusammenhänge proportional zum Druckabfall über der Rohrleitung

$$\dot{v}(t) = \bar{k} \Delta p(t). \quad (\text{A.28})$$

Die beiden Behälter und das Verbindungsrohr sind über die Massenbilanz

$$\dot{v}(t) = \dot{v}_1(t) = -\dot{v}_2(t) \quad (\text{A.29})$$

und das Kräftegleichgewicht

$$\Delta p(t) = p_1(t) - p_2(t) \quad (\text{A.30})$$

verkoppelt. Mit diesen Gleichungen ist das Behältersystem vollständig beschrieben. Die folgenden Umformungen dienen dazu, aus diesen Gleichungen ein Zustandsraummodell abzuleiten.

Aus den Gln. (A.26) – (A.28) und (A.30) erhält man

$$\dot{v}(t) = k (h_1(t) - h_2(t)), \quad (\text{A.31})$$

wobei  $k$  einen Proportionalitätsfaktor darstellt. Das Einsetzen in Gl. (A.29) und dann in Gl. (A.24) führt auf die Differentialgleichung

$$\dot{h}_1(t) = \frac{k}{A_1} (h_2(t) - h_1(t)). \quad (\text{A.32})$$

Andererseits führen die Gln. (A.24), (A.25) und (A.29) auf

$$A_1 \dot{h}_1(t) = -A_2 \dot{h}_2(t)$$

und nach Integration auf

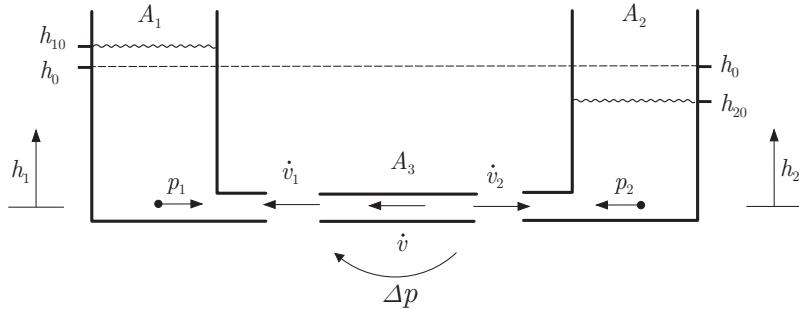


Abb. A.11: Zweitanksystem

$$A_1(h_1(t) - h_1(0)) = -A_2(h_2(t) - h_2(0))$$

und

$$h_2(t) = h_2(0) - \frac{A_1}{A_2}(h_1(t) - h_1(0)). \quad (\text{A.33})$$

Diese algebraische Gleichung muss für alle Zeiten  $t$  gelten.

Die insgesamt in den beiden Behältern vorhandene Flüssigkeit ist durch die Füllhöhe  $h_0$  im Gleichgewichtszustand bestimmt. Es gilt

$$h_2(0) = \frac{A_1 + A_2}{A_2}h_0 - \frac{A_1}{A_2}h_1(0).$$

Damit erhält man aus Gl. (A.33) als Relation zwischen den Füllständen beider Behälter die Beziehung

$$h_2(t) = \frac{A_1 + A_2}{A_2}h_0 - \frac{A_1}{A_2}h_1(t).$$

Diese Beziehung besagt, dass die Füllstände der beiden Behälter linear voneinander abhängen. Deshalb kann das Behältersystem durch ein Zustandsraummodell erster Ordnung beschrieben werden.

Zum Zustandsraummodell kommt man nun, indem man zunächst  $h_2$  aus der Gl. (A.32) eliminiert:

$$\dot{h}_1(t) = -\frac{k}{A_1} \frac{A_1 + A_2}{A_2}h_1(t) + \frac{k(A_1 + A_2)}{A_1 A_2}h_0.$$

Diese Gleichung hat noch nicht die gewünschte Form, da sie einen konstanten Summanden enthält. Dieser Summand wird eliminiert, indem man als Zustandsgröße

$$x(t) = h_1(t) - h_0$$

einführt, wodurch sich die Zustandsgleichung

$$\dot{x}(t) = -\frac{k}{A_1} \frac{A_1 + A_2}{A_2}x(t)$$

ergibt, die die Form

$$\dot{x}(t) = ax(t), \quad x(0) = x_0$$

mit

$$a = -\frac{k(A_1 + A_2)}{A_1 A_2}$$

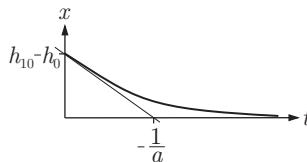
$$x_0 = h_1(0) - h_0$$

hat.

2. Aus dem gegebenen Anfangszustand  $h_1(0) = h_{10}$  folgt für das Modell die Anfangsbedingung  $x_0 = h_{10} - h_0$ . Die Eigenbewegung hat gemäß der Bewegungsgleichung (5.11) die Form

$$x(t) = (h_{10} - h_0)e^{at},$$

wobei der Modellparameter  $a$  negativ ist. Sie ist in Abb. A.12 dargestellt. Der Zustand  $x$  nähert sich asymptotisch dem Endwert  $x = 0$ , d. h., der Füllstand  $h_1$  erreicht asymptotisch den Gleichgewichtszustand  $h_0$ .



**Abb. A.12:** Eigenbewegung des Zweitanksystems

**Diskussion.** Das sehr einfache Systemverhalten ergibt sich aufgrund der als linear angenommenen Zusammenhänge zwischen Füllstand und Volumenstrom im Verbindungsrohr und aufgrund der Vernachlässigung der Trägheitskräfte. Beide Annahmen sind sinnvoll, wenn der Querschnitt  $A_3$  des Verbindungsrohres viel kleiner als die Querschnitte  $A_1$  und  $A_2$  der Behälter sind.

Da das System mit den beiden Behältern zwei Speicherelemente besitzt, würde man ein Zustandsraummodell der Ordnung  $n = 2$  erwarten. Als Folge der Annahme, dass die Flüssigkeit keine Trägheit besitzt, erhält man jedoch ein Modell erster Ordnung.

Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, so müssen die Trägheitskräfte berücksichtigt werden. Das heißt, die den Volumenstrom im Verbindungsrohr verursachenden Kräfte sind dann nicht nur von der Differenz der Füllstände, sondern auch von der Geschwindigkeit abhängig, mit der sich die Füllstände ändern. Es entsteht ein Zustandsraummodell zweiter Ordnung, das schwingungsfähig ist. Ausgehend von einer Anfangshöhe nähert sich der Füllstand  $h_1$  dem Gleichgewichtszustand  $h_0$ , wobei er zunächst ein- oder mehrfach über- schwingt.

### Aufgabe 5.2 Bewegungsgleichung für ein RC-Glied erster Ordnung

1. Das dynamische Verhalten des in Abb. A.13 dargestellten RC-Gliedes wird durch die Bauelementegleichungen

$$u_R(t) = (R_1 + R_2) i(t)$$

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$$

und die Maschengleichung

$$u_R(t) + u_C(t) - u(t) = 0$$

beschrieben (vgl. Aufgabe 4.7). Werden die Zeitkonstante  $T = (R_1 + R_2)C$  und die Zustandsvariable  $x = u_C$  eingeführt, so ergibt sich die skalare Zustandsgleichung:

$$\dot{x} = \underbrace{-\frac{1}{T}x(t)}_a + \underbrace{\frac{1}{T}u(t)}_b, \quad x(0) = u_C(0).$$

Sie hat die Form (5.7), wobei an Stelle der Matrix  $A$  und des Vektors  $b$  skalare Faktoren  $a$  und  $b$  stehen.

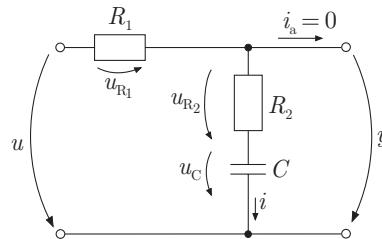
Ausgangsgröße  $y(t)$  ist die über dem Kondensator und dem Widerstand  $R_2$  abfallende Spannung

$$\begin{aligned} y(t) &= u_C(t) + R_2 i(t) = u_C(t) + R_2 C \dot{u}_C(t) \\ &= u_C(t) + R_2 C \left( -\frac{1}{T}u_C(t) + \frac{1}{T}u(t) \right). \end{aligned}$$

Damit lautet die Ausgabegleichung

$$y(t) = \underbrace{\frac{R_1}{R_1 + R_2}}_c x(t) + \underbrace{\frac{R_2}{R_1 + R_2}}_d u(t). \quad (\text{A.34})$$

Das RC-Glied stellt ein sprungfähiges System erster Ordnung dar, denn es gilt  $d \neq 0$ .



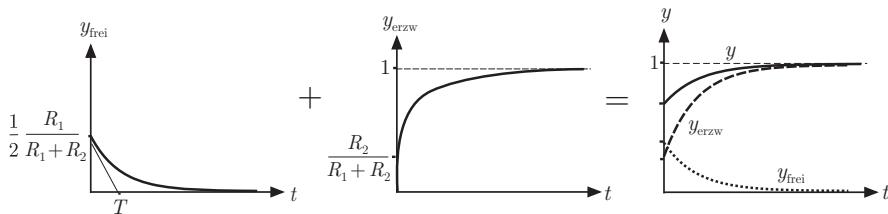
**Abb. A.13:** RC-Glied

In die angegebenen Gleichungen gehen alle physikalischen Größen mit ihrer Maßeinheit ein. Zu Zahlenwertgleichungen kommt man, wenn man die Maßeinheiten festlegt. Im Folgenden werden die Spannungen  $u_C$  und  $y$  in Volt, die Widerstände in Ohm und die Zeit in Sekunden gemessen.

2. Mit der Anfangsbedingung  $x_0 = \frac{1}{2}$  ergibt sich gemäß Gl. (5.5) für die Eigenbewegung

$$x_{\text{frei}}(t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{T}}.$$

Mit Gl. (A.34) folgt für die Eigenbewegung  $y_{\text{frei}}(t)$  der Ausgangsgröße



**Abb. A.14:** Überlagerung von Eigenbewegung und erzwungener Bewegung

$$y_{\text{frei}}(t) = \frac{1}{2} \frac{R_1}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{T}}.$$

Die Funktion hat den in Abb. A.14 (links) dargestellten Verlauf.

3. Für die Eingangsgröße  $u(t) = \sigma(t)$  und  $x_0 = 0$  ergibt aus der Bewegungsgleichung (5.5)

$$x_{\text{erzw}}(t) = \frac{1}{T} \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{T}} d\tau = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$$

und mit Gl. (A.34) die Ausgangsgröße

$$y_{\text{erzw}}(t) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) + \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

In Abb. A.14 (Mitte) ist der Verlauf von  $y_{\text{erzw}}(t)$  qualitativ dargestellt. Für die beiden Grenzfälle  $t \rightarrow 0$  und  $t \rightarrow \infty$  gilt

$$\begin{aligned} y_{\text{erzw}}(0) &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \\ y_{\text{erzw}}(\infty) &= 1. \end{aligned}$$

Die Sprungfähigkeit des Systems äußert sich in der sprungförmigen Veränderung von  $y_{\text{erzw}}(-0) = 0$  zu  $y_{\text{erzw}}(+0) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ .

4. Die Ausgangsspannung des RC-Gliedes ergibt sich aus der Überlagerung der erzwungenen Bewegung mit der Eigenbewegung:

$$y(t) = y_{\text{frei}}(t) + y_{\text{erzw}}(t).$$

In Abb. A.14 (rechts) ist dargestellt, wie  $y(t)$  grafisch durch Addition der beiden Teilbewegungen ermittelt werden kann.

### Aufgabe 5.3 Bewegungsgleichung eines Fahrzeugs

1. An dem Fahrzeug wirken die in Abb. A.15 eingetragenen Kräfte. Die Trägheitskraft  $m\dot{v}$  und die Widerstandskraft wirken entgegen der positiven  $v$ -Koordinate, so dass sich folgendes Kräftegleichgewicht ergibt:

$$m\dot{v}(t) + c_w^* v(t) = u(t).$$

Im Arbeitspunkt gilt  $u = \bar{u}$ , d. h., der Pedalwinkel ist so groß, dass der Luftwiderstand gerade kompensiert wird und sich das Fahrzeug mit konstanter Geschwindigkeit  $\bar{v}$  bewegt. Mit der Zustandsvariablen  $x(t) = v(t)$  gilt für die Abweichung vom Arbeitspunkt

$$\delta x(t) = x(t) - \bar{v} \quad (\text{A.35})$$

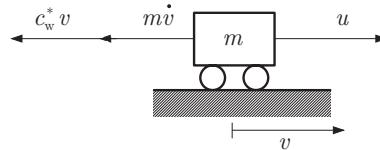
die lineare Zustandsgleichung

$$\begin{aligned}\delta \dot{x}(t) &\approx -\frac{c_w^*}{m} \delta x(t) + \frac{1}{m} \delta u(t) \\ \delta y(t) &\approx \delta x(t),\end{aligned}$$

bei der im Folgenden das  $\delta$  weggelassen und das Näherungszeichen  $\approx$  durch das Gleichheitszeichen  $=$  ersetzt wird:

$$\text{linearisiertes Fahrzeug : } \begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{c_w^*}{m} x(t) + \frac{1}{m} u(t) \\ y(t) = x(t). \end{cases} \quad (\text{A.36})$$

Bezüglich der Gültigkeit des Modells ist zu beachten, dass die mit Hilfe des Proportionalitätsfaktors  $c_w^*$  beschriebene lineare Abhängigkeit der Widerstandskraft von der Geschwindigkeit nur in der Nähe eines Arbeitspunktes gilt, denn wie im Beispiel 4.13 gezeigt wird hängt der Parameter  $c_w^*$  vom Arbeitspunkt ab:  $c_w^* = c_w^*(\bar{v})$ .



**Abb. A.15:** Kräftegleichgewicht am Fahrzeug

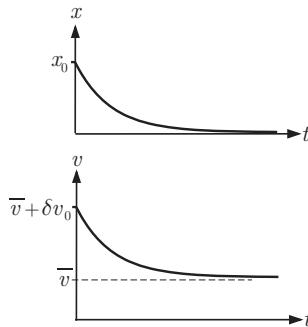
2. Entsprechend der Bewegungsgleichung (5.5) ergibt sich die Beziehung

$$x(t) = e^{-\frac{c_w^*}{m} t} x(0) + \frac{1}{m} \int_0^t e^{-\frac{c_w^*}{m}(t-\tau)} u(\tau) d\tau. \quad (\text{A.37})$$

3. Das Fahrzeug besitzt zum Zeitpunkt  $t = 0$  eine Geschwindigkeit, die um  $\delta v_0$  höher als die des Arbeitspunktes ist. Für das Modell gilt folglich  $x_0 = \delta v_0$ . Verbleibt die Gaspedalstellung für  $t \geq 0$  im Arbeitspunkt, so gilt  $u(t) = 0$ . Als Eigenbewegung folgt aus der Bewegungsgleichung (A.37)

$$x(t) = e^{-\frac{c_w^*}{m} t} \delta v_0,$$

(Abb. A.16 (oben)). Für den Geschwindigkeitsverlauf des Fahrzeugs muss man beachten, dass  $x(t)$  die Abweichung um die Geschwindigkeit  $\bar{v}$  im Arbeitspunkt beschreibt (vgl. Gl. (A.35)). Aus dieser Überlegung ergibt sich der mit dem linearen Modell berechnete Geschwindigkeitsverlauf  $v(t) = \bar{v} + x(t)$ , der im unteren Teil der Abb. A.16 dargestellt ist.



**Abb. A.16:** Eigenbewegung des Fahrzeugs

4. Befindet sich das Fahrzeug zum Zeitpunkt  $t = 0$  im Arbeitspunkt, so gilt  $x(0) = 0$  und der erste Summand der Bewegungsgleichung (A.37) verschwindet. Die erzwungene Bewegung folgt aus der Lösung des Integrals, das aufgrund der Unstetigkeit der Eingangsgröße  $u(t)$  in zwei Teileintegrale mit den Integrationsintervallen  $0 \dots t_1$  und  $t_1 \dots t_2$  aufgespalten werden muss. Das zweite Integral verschwindet, weil in diesem Integrationsintervall  $u = 0$  gilt. Beim ersten Integral müssen zwei Fälle unterschieden werden, bei denen die aktuelle Zeit  $t$ , für die  $x(t)$  bestimmt werden soll, größer oder kleiner als  $t_1$  ist. Es gilt

$$x(t) = \frac{1}{m} \int_0^t e^{-\frac{c_w^*}{m}(t-\tau)} u_B d\tau, \quad t < t_1$$

und

$$x(t) = \frac{1}{m} \int_0^{t_1} e^{-\frac{c_w^*}{m}(t-\tau)} u_B d\tau, \quad t \geq t_1.$$

Dabei bezeichnet  $u_B$  den Wert der Eingangsgröße im Zeitintervall  $0 \dots t_1$ . Wichtig ist, dass das Integrationsintervall des zweiten Integrals bei  $t_1$  endet, obwohl der Wert  $x(t)$  für  $t > t_1$  berechnet wird. Aus den angegebenen Integralen erhält man

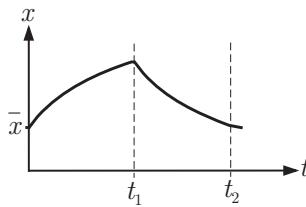
$$x(t) = \frac{u_B}{c_w^*} \left( 1 - e^{-\frac{c_w^*}{m}t} \right), \quad t < t_1 \quad (\text{A.38})$$

und

$$x(t) = \frac{u_B}{c_w^*} \left( e^{-\frac{c_w^*}{m}(t-t_1)} - e^{-\frac{c_w^*}{m}t} \right) = e^{-\frac{c_w^*}{m}t} \frac{u_B}{c_w^*} \left( e^{\frac{c_w^*}{m}t_1} - 1 \right). \quad (\text{A.39})$$

Der qualitative Verlauf von  $x(t) = \bar{x} + \delta x(t)$  ist in Abb. A.17 dargestellt. Für sehr große Zeit  $t_1$  nähert sich die in Gl. (A.38) beschriebene Trajektorie asymptotisch dem Endwert  $\frac{u_B}{c_w^*}$ , der nur von der Beschleunigung  $u_B$  und dem durch  $c_w^*$  beschriebenen Luftwiderstand bestimmt ist.

5. Kennt man den Anfangszustand eines Systems zu einem *beliebigen* Zeitpunkt  $t_0$ , so beschreibt das Zustandsraummodell den *weiteren* Verlauf der Zustandsgrößen. Die Lösung (A.39) für den zweiten Zeitabschnitt kann man deshalb so interpretieren, dass sie die Eigenbewegung des Systems beschreibt, wenn man  $t_0 = t_1$  setzt, also mit der bei  $t_1$  beginnenden Zeitachse  $t' = t - t_1$  arbeitet und vom Anfangszustand



**Abb. A.17:** Erzwungene Bewegung des Fahrzeugs

$$x(t' = 0) = x(t_1) = \frac{u_B}{c_w^*} \left( 1 - e^{-\frac{c_w^*}{m} t_1} \right)$$

ausgeht. Das Zustandsraummodell (A.36) bleibt dasselbe, gilt jetzt jedoch für die neue Zeitvariable  $t'$  im Intervall  $t' \geq 0$  und die oben angegebene Anfangsbedingung. Das Modell gilt für beliebige Eingangsgrößen  $u(t')$  mit  $u(t') = 0$  für  $t' < 0$ .

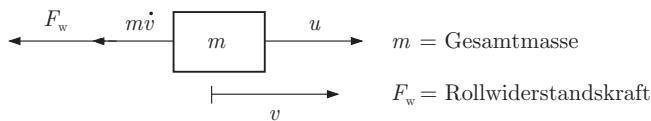
**Aufgabe 5.4    Fahrt mit der Eisenbahn**

1. Auf die Eisenbahn wirken die in Abb. A.18 eingetragenen Kräfte. Die Trägheitskraft  $m\dot{v}$  und die Widerstandskraft  $F_w = cv$  wirken entgegen der positiven Koordinatenrichtung, so dass sich folgendes Kräftegleichgewicht ergibt:

$$m\dot{v}(t) + cv(t) = u(t).$$

Mit der Zustandsvariablen  $x = v$  erhält man daraus die skalare Zustandsgleichung

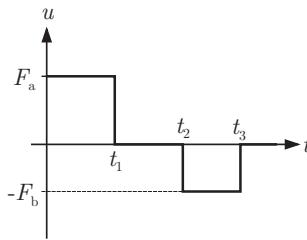
$$\text{Eisenbahn : } \begin{cases} \dot{x}(t) = -\underbrace{\frac{c}{m}}_a x(t) + \underbrace{\frac{1}{m}}_b u(t), & x(0) = v_0 \\ y(t) = x(t). \end{cases}$$



**Abb. A.18:** Kräftegleichgewicht an der fahrenden Eisenbahn

2. Für die Eingangsgröße gilt:

$$u(t) = \begin{cases} F_a & \text{für } 0 \leq t < t_1 \\ 0 & \text{für } t_1 \leq t < t_2 \\ -F_b & \text{für } t_2 \leq t < t_3. \end{cases}$$

**Abb. A.19:** Eingangsgröße

In Abb. A.19 ist der zeitliche Verlauf der Eingangsgröße dargestellt.

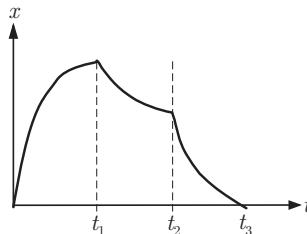
Die Bewegungsgleichung (5.5) muss für die drei Zeitintervalle getrennt gelöst werden. Die Lösung wird hier nur für das Intervall  $t_2 \leq t \leq t_3$  angegeben:

$$x(t) = \frac{1}{m} \left( \int_0^{t_1} e^{a(t-\tau)} F_a d\tau + \int_{t_1}^{t_2} e^{a(t-\tau)} 0 d\tau + \int_{t_2}^t e^{a(t-\tau)} (-F_b) d\tau \right).$$

Das mittlere Integral verschwindet. Für die beiden anderen Integrale folgt

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{m} e^{at} \left( \int_0^{t_1} e^{-a\tau} F_a d\tau + \int_{t_2}^t e^{-a\tau} (-F_b) d\tau \right) \\ &= \frac{1}{c} e^{-\frac{c}{m}t} \left( F_a e^{\frac{c}{m}\tau} \Big|_0^{t_1} + F_b e^{\frac{c}{m}\tau} \Big|_{t_2}^t \right) \\ &= \frac{F_a}{c} e^{-\frac{c}{m}t} \left( e^{\frac{c}{m}t_1} - 1 \right) + \frac{F_b}{c} e^{-\frac{c}{m}t} \left( e^{\frac{c}{m}t_2} - e^{\frac{c}{m}t} \right) \\ &= \frac{F_a}{c} \left( e^{-\frac{c}{m}(t-t_1)} - e^{-\frac{c}{m}t} \right) + \frac{F_b}{c} \left( e^{-\frac{c}{m}(t-t_2)} - 1 \right). \end{aligned}$$

3. Mit  $x(t_3) = 0$  ergibt sich, dass der Zug zur Zeit  $t_3 = 336$  zum Stillstand kommt. In Abb. A.20 ist der Geschwindigkeitsverlauf  $x(t)$  qualitativ dargestellt.

**Abb. A.20:** Geschwindigkeitsverlauf

**Aufgabe 5.5 Verhalten zweier Rührkessel**

1. Als Zustandsgrößen wählt man die Konzentrationen  $x_1(t) = c_1(t)$  und  $x_2(t) = c_2(t)$ , mit denen der Stoff A im ersten bzw. zweiten Behälter vorliegt. Die Konzentration im ersten Behälter ändert sich, wenn die Konzentration im Zulauf um  $u(t)$  vom Arbeitspunktwert  $c_A$  abweicht:

$$\dot{x}_1(t) = \frac{F}{V_1}(u(t) - x_1(t)). \quad (\text{A.40})$$

Dabei bezeichnen  $F$  den konstanten Volumenstrom durch die Behälter und  $V_1$  das Volumen des ersten Behälters. Zu dieser Gleichung kommt man, wenn man eine Teilchenbilanz aufstellt, in der die Änderung der Teilchenanzahl  $n_1$  betrachtet wird. Es gilt

$$n_1(t) = V_1 c_1(t)$$

und

$$\frac{dn_1(t)}{dt} = \frac{dV_1 c_1(t)}{dt} = c_0 F - c_1(t) F,$$

da das Volumen  $V_1$  konstant ist. Mit

$$c_1(t) = \frac{n_1(t)}{V_1}$$

erhält man Gl. (A.40).

Für den zweiten Behälter gilt

$$\dot{x}_2(t) = \frac{F}{V_2}(x_1(t) - x_2(t)).$$

Daraus erhält man das Zustandsraummodell

$$\text{Rührkessel : } \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{F}{V_1} & 0 \\ \frac{F}{V_2} & -\frac{F}{V_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{F}{V_1} \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_A \\ c_A \end{pmatrix} \\ y(t) = (0 \quad 1) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (\text{A.41})$$

2. Mit den in der Aufgabenstellung angegebenen Parametern erhält man das Modell

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -0,5 & 0 \\ 0,67 & -0,67 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= (0 \quad 1) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei die Zeit in Minuten und das Volumen in Litern gemessen wird.

3. Als Maßeinheit für die Konzentration wird  $\frac{\text{mol}}{\text{l}}$  verwendet. Ist  $u(t) = 1$ , so erhält man aus dem Zustandsraummodell für  $\dot{x}_1 = 0$  und  $\dot{x}_2 = 0$  die Beziehung  $x_1 = x_2 = 1$ , die als Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

verwendet wird.

Führt man die neuen Signale

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1(t) &= x_1(t) - 1 \\ \tilde{x}_2(t) &= x_2(t) - 1 \\ \tilde{u}(t) &= u(t) - 1 \\ \tilde{y}(t) &= y(t) - 1 \end{aligned}$$

ein, so erhält man das Modell

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}}_1(t) \\ \dot{\tilde{x}}_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -0,5 & 0 \\ 0,67 & -0,67 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \end{pmatrix} \tilde{u}(t), \quad \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(0) \\ \tilde{x}_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \tilde{y}(t) &= (0 \quad 1) \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

das die Abweichungen  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{x}_1$ ,  $\tilde{x}_2$  und  $\tilde{y}$  von den Arbeitspunktewerten  $\bar{u} = \bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{y} = 1$  darstellt.

4. Man rechnet zweckmäßigerweise mit dem zweiten Modell, da für dieses aufgrund der verschwindenden Anfangsbedingung keine Eigenbewegung zu ermitteln ist. Aus der gegebenen Eingangsgröße erhält man

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} 5 & 0 \leq t \leq 0,25 \\ 0 & t > 0,25, \end{cases}$$

woraus für die Zustände der beiden Behälter die Beziehungen

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{pmatrix} = 5 \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{b} d\tau \quad \text{für } t \leq 0,25$$

und

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{pmatrix} = 5 \int_0^{0,25} e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{b} d\tau \quad \text{für } t > 0,25$$

folgen. Dabei bezeichnet  $\mathbf{b}$  den Steuervektor des oben angegebenen Modells.

Mit Hilfe der Sylvesterformel (5.22) erhält man für die Übergangsmatrix

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3,94 & 0 \end{pmatrix} e^{-0,5t} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3,94 & 1 \end{pmatrix} e^{-0,67t}.$$

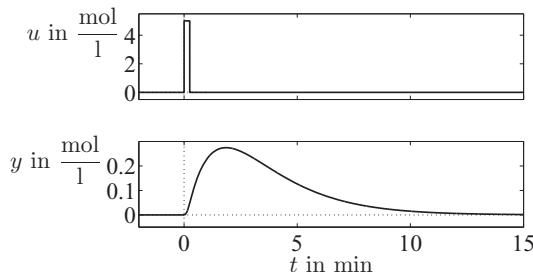
Damit gilt

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 - e^{-0,5t} \\ 1 - 3,94e^{-0,5t} + 2,94e^{-0,67t} \end{pmatrix} \quad \text{für } t \leq 0,25 \quad (\text{A.42})$$

und

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,668 \\ 2,62 \end{pmatrix} e^{-0,5t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2,68 \end{pmatrix} e^{-0,67t} \quad \text{für } t > 0,25. \quad (\text{A.43})$$

Die Ausgangsgröße  $\tilde{y}$  ist in Abb. A.21 (unten) dargestellt.



**Abb. A.21:** Ausgangsgröße des Behältersystems bei impulsförmiger Erregung

**Aufgabe 5.7 Transformation des Zustandsraumes eines RC-Gliedes**

1. Der neue Zustandsvektor ergibt sich durch die Transformation

$$\begin{pmatrix} u_{C_1}(t) \\ \dot{u}_{C_1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{R_1 C_1} & \frac{1}{R_1 C_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{C_1}(t) \\ u_{C_2}(t) \end{pmatrix},$$

denn aus den Gln. (A.10) und (A.16) folgt

$$\dot{u}_{C_1}(t) = \frac{u_{C_2}(t) - u_{C_1}(t)}{R_1 C_1}.$$

Die Beziehungen (5.26), (5.27) und (5.30) sind also mit

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{R_1 C_1} & \frac{1}{R_1 C_1} \end{pmatrix}$$

anzuwenden. Man erhält

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2} & -\frac{R_2 C_2 + C_1 (R_1 + R_2)}{R_1 C_1 R_2 C_2} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{c}}^T = (1 \ 0).$$

2. Die transformierte Systemmatrix  $\tilde{\mathbf{A}}$  ist eine Frobeniusmatrix, weil entsprechend der Aufgabenstellung die Ausgangsgröße und deren erste Ableitung als Zustandsvariablen verwendet werden.

**Aufgabe 5.8** Bewegungsgleichung in kanonischer Darstellung

1. Da es sich bei der gegebenen Systemmatrix um eine Dreiecksmatrix handelt, sind die Eigenwerte gleich den Diagonalelementen

$$\lambda_1 = -\frac{1}{T_1}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{T_2}.$$

Die Eigenvektoren folgen aus der Beziehung

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} \end{pmatrix} \mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i.$$

Man erhält

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ \frac{T_1}{T_1-T_2} v_{11} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ v_{22} \end{pmatrix},$$

wobei  $v_{11}$  und  $v_{22}$  beliebige reelle Werte sind, die im Folgenden gleich 1 gesetzt werden.

2. Die Transformationsmatrix und ihre Inverse lauten

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{T_1}{T_1-T_2} & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{V}^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{T_1}{T_2-T_1} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nach Gl. (5.25) wird mit dem neuen Zustandsvektor

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{T_1}{T_2-T_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \quad (\text{A.44})$$

gearbeitet. Für das Modell mit kanonischen Zustandsvariablen erhält man

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} \end{pmatrix} \\ \tilde{\mathbf{b}} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{T_1} \\ \frac{1}{T_2-T_1} \end{pmatrix} \\ \tilde{\mathbf{c}}^T &= \begin{pmatrix} T_2 \\ T_2-T_1 \end{pmatrix} - 1. \end{aligned}$$

Auch der Anfangszustand muss gemäß  $\tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{x}_0$  transformiert werden:

$$\tilde{\mathbf{x}}_0 = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ \frac{T_1}{T_2-T_1} x_1(0) + x_2(0) \end{pmatrix}.$$

Das Zustandsraummodell in kanonischer Normalform lautet damit

$$\tilde{\Sigma} : \begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(t) + \begin{pmatrix} \frac{1}{T_1} \\ \frac{1}{T_2-T_1} \end{pmatrix} u(t), & \tilde{\mathbf{x}}(0) = \tilde{\mathbf{x}}_0 \\ y(t) = \begin{pmatrix} T_2 \\ T_2-T_1 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(t). \end{cases}$$

Der Signalflussgraph ist in Abb. A.22 dargestellt. Es ist ersichtlich, dass im Unterschied zum Signalflussgraphen in Abb. 4.8 keine direkten Kopplungen zwischen den Zustandsvariablen mehr auftreten.

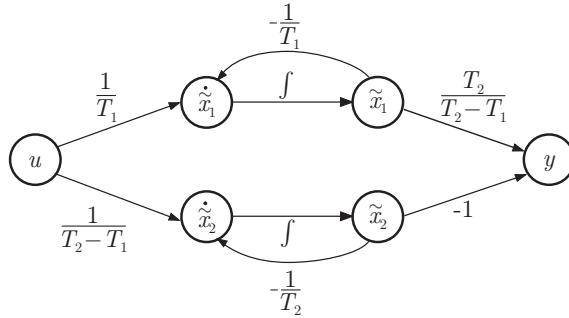


Abb. A.22: Signalflussgraph

3. Als Bewegungsgleichung ergibt sich gemäß Gl. (5.11) die Beziehung

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}(t) &= e^{\text{diag } \lambda_i t} \tilde{x}_0 + \int_0^t e^{\text{diag } \lambda_i(t-\tau)} \tilde{b} u(\tau) d\tau \\
 &= \begin{pmatrix} e^{-\frac{t}{T_1}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{t}{T_2}} \end{pmatrix} \tilde{x}_0 + \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-\frac{t-\tau}{T_1}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{t-\tau}{T_2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{T_1} \\ \frac{1}{T_2-T_1} \end{pmatrix} u(\tau) d\tau \\
 &= \begin{pmatrix} e^{-\frac{t}{T_1}} \tilde{x}_1(0) \\ e^{-\frac{t}{T_2}} \tilde{x}_2(0) \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{1}{T_1} e^{-\frac{t-\tau}{T_1}} \\ \frac{1}{T_2-T_1} e^{-\frac{t-\tau}{T_2}} \end{pmatrix} u(\tau) d\tau. \tag{A.45}
 \end{aligned}$$

4. Die Eigenbewegung folgt aus Gl. (A.45) für  $u(t) = 0$ :

$$\tilde{x}_{\text{frei}}(t) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{t}{T_1}} \tilde{x}_1(0) \\ e^{-\frac{t}{T_2}} \tilde{x}_2(0) \end{pmatrix}.$$

Die Rücktransformation nach (5.61) liefert:

$$\boldsymbol{x}_{\text{frei}}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{T_1}{T_1-T_2} \end{pmatrix} e^{-\frac{t}{T_1}}}_{\text{Eigenvorgang 1}} \tilde{x}_1(0) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\frac{t}{T_2}}}_{\text{Eigenvorgang 2}} \tilde{x}_2(0).$$

### Aufgabe 5.9 Bestimmung der statischen Verstärkung

Für die Regelungsnormalform (5.65) führt die Anwendung von Gl. (5.116) zu einer relativ aufwändigen Rechnung. Schneller erhält man  $k_s$  aus der Überlegung, dass im statischen Zustand  $\bar{x}$  für die konstante Eingangsgröße  $u(t) = \bar{u}$  alle Ableitungen der Zustandsvariablen verschwinden:

$$\dot{x}_1 = \bar{x}_2 = 0$$

$$\dot{x}_2 = \bar{x}_3 = 0$$

⋮

$$\dot{x}_{n-1} = \bar{x}_n = 0$$

$$\dot{x}_n = 0 = -a_0 \bar{x}_1 + \bar{u}$$

Daraus erhält man  $\bar{x}_1 = \frac{1}{a_0} \bar{u}$  und  $k_s = \frac{b_0}{a_0}$ .

In der E/A-Normalform müssen in beiden Integratorketten sämtliche Eingänge der Integriertoren verschwinden, damit sich das System in einer Ruhelage befindet. Wie bei der Regelungsnormalform erhält man für die E/A-Dynamik aus der letzten Zeile von Gl. (5.95)

$$\frac{d^r y}{dt^r} = 0 = e_1 \bar{y} + e_{r+1} \bar{x}_{N1} + b_q \bar{u}$$

und aus der letzten Zeile der Internen Dynamik (5.96)

$$\dot{x}_{Nq} = 0 = \frac{1}{b_q} \bar{y} - \frac{b_0}{b_q} \bar{x}_{N1},$$

also  $\bar{x}_{N1} = \frac{1}{b_0} \bar{y}$  und

$$\bar{y} \left( e_1 + \frac{e_{r+1}}{b_0} \right) + b_q \bar{u} = 0$$

sowie schließlich

$$k_s = -\frac{b_q}{e_1 + \frac{e_{r+1}}{b_0}}. \quad (\text{A.46})$$

Mit den abgeleiteten Beziehungen kann man die statische Verstärkung direkt aus den beiden Modellen ablesen.

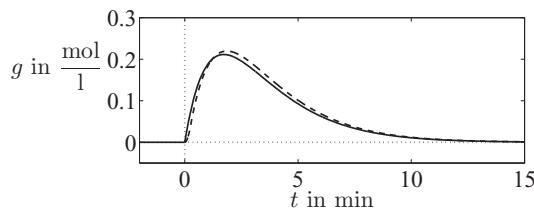
### Aufgabe 5.10 Berechnung der Gewichtsfunktion

1. Für die Gewichtsfunktion erhält man mit der Sylvesterformel (5.22) für die angegebenen Daten

$$\begin{aligned} g(t) &= (0 \ 1) \exp \left( \begin{pmatrix} -0,5 & 0 \\ 0,67 & -0,67 \end{pmatrix} t \right) \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (0 \ 1) \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3,94 & 0 \end{pmatrix} e^{-0,5t} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3,94 & 1 \end{pmatrix} e^{-0,67t} \right) \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 1,97 (e^{-0,5t} - e^{-0,67t}) \end{aligned}$$

(durchgezogene Kurve in Abb. A.23).

2. Die Eigenvorgänge des Behältersystems enthalten die e-Funktionen  $e^{-0,5t}$  und  $e^{-0,67t}$ , die 6 bzw. 4,5 Zeiteinheiten (Minuten) benötigen, um vom Anfangswert 1 bei  $t = 0$  auf den Wert 0,05 abzuklingen. Verglichen mit diesen Zeitangaben ist die Impulsdauer von 0,25 Zeiteinheiten sehr klein. Die verwendete Impulsdauer entspricht also in guter Näherung der eines Einheitsimpulses. Allerdings muss beachtet werden, dass er die Fläche  $5 * 0,25 = 1,25$  (an Stelle von eins) hat.



**Abb. A.23:** Vergleich der Gewichtsfunktion mit der Ausgangsgröße des Behältersystems bei impulsförmiger Erregung

3. Aus den Gln. (A.42) und (A.43) erhält man nach Multiplikation mit  $\frac{1}{125} = 0,8$  zur Korrektur der verwendeten Impulsfläche für die Näherung

$$\tilde{g}(t) = \begin{cases} 4 - 15,76 e^{-0,5t} + 11,76 e^{-0,67t} & \text{für } t \leq 0,25 \\ 2,09 e^{-0,5t} - 2,14 e^{-0,67t} & \text{für } t > 0,25. \end{cases}$$

Diese Näherung ist als gestrichelte Linie in Abb. A.23 eingetragen. Wie die Abbildung zeigt, stimmt sie gut mit der tatsächlichen Gewichtsfunktion überein.

**Aufgabe 5.14 Übergangsverhalten und stationäres Verhalten eines Regelkreises**

1. Setzt man das Reglergesetz

$$u(t) = kw(t) - kcx(t)$$

in das Regelstreckenmodell ein, so erhält man das Zustandsraummodell des Regelkreises:

$$\bar{\Sigma} : \begin{cases} \dot{x}(t) = (a - bkc)x(t) + bkw(t), & x(0) = 0 \\ y(t) = cx(t). \end{cases}$$

2. Für die Gewichtsfunktion kann man daraus die Beziehung  $g(t) = bkce^{(a-bkc)t}$  ablesen.

3. Die Ausgangsgröße entspricht der mit  $\bar{w}$  multiplizierten Übergangsfunktion, für die man entsprechend Gl. (5.113) die Beziehung

$$y(t) = -\frac{bkc}{a - bkc} \left( 1 - e^{(a-bkc)t} \right) \bar{w}$$

enthält. Wenn der Regelkreis stabil ist ( $a - bkc < 0$ ), existiert der Quotient. Die Übergangsfunktion des Regelkreises hat die in Abb. 5.30 für das PT<sub>1</sub>-Glied angegebene Form.

Durch Umstellung der Gleichung erhält man

$$y(t) = \underbrace{-\frac{bkc}{a - bkc} \bar{w}}_{y_s(t)} + \underbrace{\frac{bkc}{a - bkc} \bar{w} e^{(a-bkc)t}}_{y_{\ddot{u}}(t)},$$

wobei der erste Summand das stationäre Verhalten und der zweite Summand das Übergangsverhalten beschreibt (vgl. auch Gln. (5.134) – (5.136)). Das stationäre Verhalten

$y_s(t)$  ist eine Sprungfunktion mit der Amplitude  $-\frac{bkc}{a-bkc}$ , das Übergangsverhalten eine abklingende e-Funktion.

4. Die Zielstellung  $y(t) = \bar{w}$  der Regelung wird aus zwei Gründen nur näherungsweise erreicht. Erstens erfüllt das stationäre Verhalten  $y_s(t)$  die Forderung  $y_s(t) = \bar{w}$  nur, wenn für die Regelstrecke der Parameter  $a$  verschwindet. Für  $a \neq 0$  tritt eine bleibende Regelabweichung  $w(\infty) - y(\infty) = \frac{a}{a-bkc} \bar{w}$  auf. Zweitens folgt der Regelkreis dem zum Zeitpunkt  $t = 0$  auf den Wert  $\bar{w}$  gesetzten Sollwert nur verzögert. Die Verzögerung ist durch das Übergangsverhalten  $y_{\text{ü}}(t)$  beschrieben. Je kleiner der negative Parameter  $a - bkc$  ist, umso schneller klingt das Übergangsverhalten ab.
5. Für die Ausgangsgröße des Regelkreises erhält man

$$\begin{aligned} y(t) = g * w &= \int_0^t bkc e^{(a-bkc)(t-\tau)} \bar{w} e^{\mu \tau} d\tau \\ &= \underbrace{-\frac{bkc \bar{w}}{a - bkc - \mu} e^{\mu t}}_{y_s(t)} + \frac{bkc \bar{w}}{a - bkc - \mu} e^{(a-bkc)t}. \end{aligned}$$

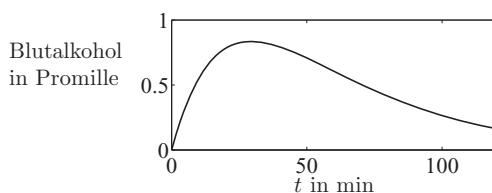
Es soll  $y_s(t) = w(t)$  gelten, also

$$-\frac{bkc \bar{w}}{a - bkc - \mu} = \bar{w}.$$

Daraus erhält man die Forderung  $a = \mu$ . Dies ist eine Bedingung an die Regelstrecke. Sie besagt, dass der Eigenvorgang  $e^{at}$  der Regelstrecke mit der Eingangsgröße  $w(t)$  des Regelkreises übereinstimmen muss. Im Abschn. 7.3.4 wird dies allgemeiner durch die Forderung ausgedrückt, dass die offene Kette ein „inneres Modell“ der Führungsgröße haben muss (Inneres-Modell-Prinzip).

### Aufgabe 5.18 Wirkstoffkonzentrationsverlauf im Blut

1. Die Konzentrationen verändern sich zeitlich so wie die Gewichtsfunktionen eines  $PT_n$ -Gliedes für  $n = 1, 2$  bzw.  $3$  (vgl. Abb. 5.34 auf S. 197). Die Darmkonzentration nimmt nach einer e-Funktion ab, die Blutkonzentration steigt bis zu einem Maximalwert an und fällt dann wieder auf null ab und die Konzentration im Urin verläuft noch flacher. Da es sich um Konzentrationen handelt, muss man die Kurven auf die Volumina normieren, denn die Stoffkonzentration ist beispielsweise im Darm schon aufgrund des kleineren Volumens deutlich höher als im Blut. Hinzu kommt, dass die maximalen Konzentrationswerte umso kleiner werden, je mehr Verzögerungsglieder durchlaufen werden.
2. Bei intravenöser Verabreichung des Medikaments springt die Blutkonzentration sofort auf den Maximalwert und fällt dann nach einer e-Funktion. Bei gleicher Dosierung wie durch eine Tablette ist die Maximalkonzentration also erheblich höher, allerdings ist der Wirkstoff auch schneller wieder aus dem Körper ausgeschieden. Bei der Verabreichung als Tablette wirkt der Darm als Zwischenspeicher, durch den der Wirkstoff länger im Körper gehalten wird.

**Abb. A.24:** Verlauf des Blutalkoholspiegels

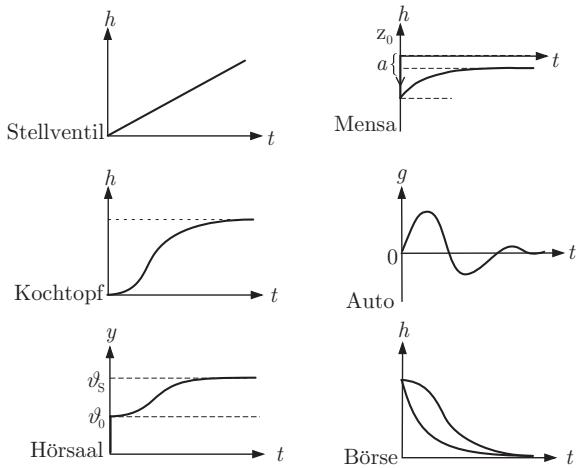
3. Der Blutalkoholspiegel ist bei der beschriebenen Modellvorstellung die Ausgangsgröße eines PT<sub>2</sub>-Gliedes mit den Zeitkonstanten  $T_1 = 25$  [Minuten] und  $T_2 = 35$ . Die statische Verstärkung ergibt sich aus der Verdünnung, die die Alkoholmenge in der betrachteten Flüssigkeitsmenge von  $0,5 \cdot (17 + 23 + 5) = 22,5$  [Liter] erfährt:  $k_s = 1/22,5$ . Die Eingangsgröße wird als Diracimpuls angesetzt, dessen Amplitude gleich der Alkoholmenge von  $4,5\% \cdot 1 + 40\% \cdot 0,04$  ist. Mit Gl. (5.163) erhält man den in Abb. A.24 gezeigten Verlauf, aus dem jeder seine Schlüsse ziehen sollte!

**Anmerkung.** Der Alkohol wird nicht proportional zur Konzentration (wie bei einem PT<sub>1</sub>-Glied), sondern mit einer konstanten Rate von 0,15 Promille pro Stunde abgebaut. Deshalb verläuft die Kurve nach Überschreiten des Maximums wesentlich flacher!

#### Aufgabe 5.24 Klassifikation alltäglicher Vorgänge

Das Übergangsverhalten der untersuchten Systeme ist qualitativ in Abb. A.25 dargestellt. Daraus ergibt sich folgende Klassifizierung:

- Stellventil:** Wird die Spannung am Stellmotor sprungförmig von null auf einen konstanten Wert  $u_0$  erhöht, so fährt das Ventil mit einer konstanten Geschwindigkeit auf, d. h., der Öffnungsquerschnitt vergrößert sich immer mehr. Somit liegt ein integrales Verhalten vor.
- Kochtopf:** Der Wärmeübergang wird nicht schlagartig erfolgen, aber es wird sich nach einiger Zeit eine stationäre Temperatur  $\vartheta$  einstellen, die proportional zur Schalterstellung des Elektroherdes ist. Die Verzögerung ist von höherer Ordnung, wobei man näherungsweise die Kochplatte und den Kochtopf mit je einem Verzögerungsglied erster Ordnung beschreiben kann, so dass ein PT<sub>n</sub>-Glied mit  $n \geq 2$  entsteht.
- Hörsaal:** Das qualitative Verhalten entspricht dem eines Kochtopfes (siehe Abb. A.25).
- Mensa:** Eine Erhöhung des Essenspreises hat vermutlich eine schlagartige Verringerung der Anzahl  $z$  der Essensteilnehmer zur Folge. Nachdem der überwiegende Teil der „Essenverweigerer“ festgestellt hat, dass es keine preiswerte Alternative zur Mensa gibt, wird er wieder essen gehen. Es handelt sich also um ein differenzierendes Verhalten mit Verzögerung. Nimmt man an, dass je nach Preiserhöhung ein kleiner Teil  $a$  der Teilnehmer dauerhaft wegbleibt, erhält man eine Kombination von P- und D-Verhalten, die sich in einer Parallelschaltung eines P- und eines DT<sub>1</sub>-Gliedes darstellen lässt.
- Hausarztpraxis:** Aus ähnlichen Gründen wie bei der Mensa hat die Einführung der Praxisgebühr im Jahr 2004 nur kurzzeitig die erhoffte Verringerung der Anzahl der Patienten



**Abb. A.25:** Qualitativer Verlauf der Übergangsfunktionen bzw. der Gewichtsfunktion

in den Hausarztpraxen bewirkt. Seit 2007 liegt die Anzahl der Arztbesuche wieder auf dem Niveau des Jahres 2003 (DT<sub>1</sub>-Verhalten).

**6. Fahrendes Auto:** Wird ein Schlagloch überfahren (= Impuls), so wird nach einer Verzögerung durch Trägheitskräfte je nach Dämpfungsgrad eine abklingende Schwingung  $y(t)$  entstehen. Aufgrund dieser Überlegung ist in Abb. A.25 nicht die Übergangsfunktion, sondern die Gewichtsfunktion dargestellt. Das Auto hat ein proportionales Verhalten höherer Ordnung, wobei die Ordnung von der Anzahl der Federn und Massen abhängt, aus denen man sich das Fahrzeug zusammengesetzt vorstellen kann. Näherungsweise verhält sich das Fahrzeug wie ein schwingungsfähiges PT<sub>2</sub>-Glied.

**7. Börse:** Fällt der Aktienindex sprungartig, so wird die Länge  $L$  des Börsenkommentars zunächst schlagartig ansteigen, um dann mit einer Verzögerung, möglicherweise höherer Ordnung, wieder auf die ursprüngliche Länge abzunehmen. Das entspricht einem differenzierenden Verhalten mit Verzögerung (wie viele journalistische Aktivitäten).

#### Aufgabe 5.25 Bestimmung der Systemtypen aus dem E/A-Verhalten

Um den Systemtyp bestimmen zu können, braucht man sich nur den ersten Übergangsvorgang anzusehen. Die erste Ausgangsgröße ist offensichtlich die eines PT<sub>1</sub>-Gliedes, die zweite Ausgangsgröße die eines PT<sub>2</sub>-Gliedes mit Dämpfung  $d < 1$ , denn die Übergangsfunktion schwingt erheblich über, und die dritte Ausgangsgröße ist die eines I-Gliedes, die sich genau so lange verändert, wie die Eingangsgröße von null verschieden ist.

**Diskussion.** Das stationäre Verhalten von Proportionalgliedern hängt vom Wert der Eingangsgröße ab. Ist  $u$  über einen längeren Zeitraum konstant, so klingt das Übergangsverhalten ab und die Ausgangsgröße nimmt einen zu  $u$  proportionalen Wert an. Dies ist an den beiden

oberen Ausgangsgrößen zu erkennen. Im Gegensatz dazu ändert sich die Ausgangsgröße des dritten Systems nur dann, wenn eine nicht verschwindende Eingangsgröße anliegt. Deshalb hat die Ausgangsgröße einen positiven konstanten Wert, nachdem das I-Glied durch die angegebene Eingangsgröße mehrfach umgesteuert wurde. Die beiden Proportionalglieder sind demgegenüber wieder in der Ruhelage.

**Aufgabe 6.4 Berechnung der Übertragungsfunktion**

- Wird Gl. (6.78) in Gl. (6.80) eingesetzt, so folgt daraus

$$y(t) = R_2 C \dot{x}(t) + x(t)$$

und die zeitliche Ableitung

$$\dot{y}(t) = R_2 C \ddot{x}(t) + \dot{x}(t). \quad (\text{A.47})$$

Aus Gln. (6.78) und (6.79) erhält man

$$u(t) = R_1 C \dot{x}(t) + y(t) \quad (\text{A.48})$$

$$\dot{u}(t) = R_1 C \ddot{x}(t) + \dot{y}(t) \quad (\text{A.49})$$

Kombiniert man die Gln. (A.47) und (A.48) zu

$$u(t) = R_1 C(\dot{y}(t) - R_2 C \ddot{x}(t)) + y(t)$$

und dann mit der Gl. (A.49), so folgt die gewünschte Differentialgleichung

$$(R_1 + R_2) C \dot{y}(t) + y(t) = R_2 C \dot{u}(t) + u(t)$$

und aus dieser die Übertragungsfunktion gemäß Gl. (6.74):

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{R_2 C s + 1}{(R_1 + R_2) C s + 1}. \quad (\text{A.50})$$

- Die Laplacetransformation jeweils beider Seiten der Gleichungen (6.78) – (6.80) liefert für  $y(0) = 0$  unter Anwendung des Differenziationssatzes

$$I(s) = s C X(s) \quad (\text{A.51})$$

$$U(s) = (R_1 + R_2) I(s) + X(s) \quad (\text{A.52})$$

$$Y(s) = R_2 I(s) + X(s). \quad (\text{A.53})$$

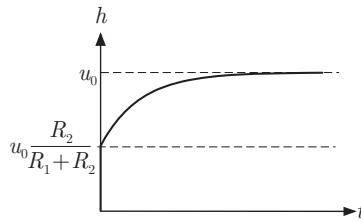
Aus den Gln. (A.51) und (A.53) folgt

$$Y(s) = R_2 C s X(s) + X(s) \quad (\text{A.54})$$

$$X(s) = \frac{1}{R_2 C s + 1} Y(s) \quad (\text{A.55})$$

und aus den Gln. (A.51) und (A.52)

$$U(s) = ((R_1 + R_2) C s + 1) X(s). \quad (\text{A.56})$$



**Abb. A.26:** Übergangsfunktion des RC-Gliedes

Aus Gln. (A.54), (A.55) und (A.56) ergibt sich wie im ersten Teil der Aufgabe die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{R_2 Cs + 1}{(R_1 + R_2)Cs + 1},$$

der Rechenaufwand ist jedoch geringer.

**Diskussion.** Bei dem gegebenen RC-Glied handelt es sich um ein sprungfähiges System, denn in der Übertragungsfunktion sind Zähler- und Nennergrad gleich groß. Die Übergangsfunktion ist in Abb. A.26 dargestellt. Aus dem Anfangswertsatz ergibt sich aus Gl. (A.50) direkt der Anfangswert der Übergangsfunktion  $h(+0)$ . Physikalisch bedeutet dies, dass zum Zeitpunkt  $t = +0$  (rechtsseitiger Grenzwert) durch den vorher vollständig entladenen Kondensator (Anfangsbedingung) ein Ladestrom fließt, der durch die Widerstände  $R_1$  und  $R_2$  begrenzt ist. Nach der Spannungsteilerregel ergibt sich deshalb am Ausgang die Spannung  $\frac{R_2}{R_1 + R_2} u_0$ . Aus dem Endwertsatz folgt  $h(\infty) = u_0$ , d. h., nachdem sich der Kondensator aufgeladen hat, fließt kein Strom mehr und der Spannungsabfall an den beiden Widerständen verschwindet. Die Ausgangsspannung entspricht dann der Eingangsspannung ( $y(\infty) = u(\infty) = u_0$ ).

### Aufgabe 6.6 Übertragungseigenschaften von $PT_2$ -Gliedern

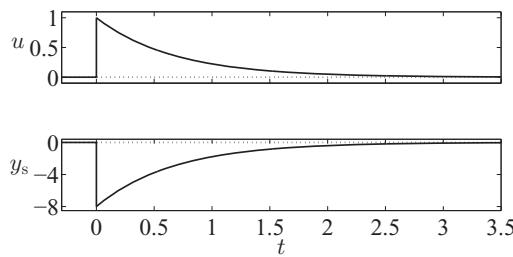
1. Aus Gl. (6.67) erhält man für  $\bar{u} = 1$ ,  $\omega = 0$ ,  $\phi_u = \frac{\pi}{2}$  und  $\delta = \mu$  die Beziehung

$$y_s(t) = |G(\mu)| e^{\mu t} = \frac{1}{(T_1 \mu + 1)(T_2 \mu + 1)} e^{\mu t}.$$

2. Das stationäre Verhalten ist eine e-Funktion mit demselben Exponenten wie die Eingangsgröße. Der Anfangswert  $y_s(0)$  hängt von  $\mu$  sowie den Systemparametern  $T_1$  und  $T_2$  ab. Für  $T_1 = 1$ ,  $T_2 = 0,5$  und  $\mu = 1,5$  ist der Verlauf in Abb. A.27 gezeigt. Für  $\mu > 0$  entstehen aufklingende e-Funktionen.

### Aufgabe 6.9 Beschreibung des Systemverhaltens

Die Lösung ist sehr einfach zu erkennen: Das gegebene System überträgt die sinusförmige Eingangsgröße nicht, besitzt also bei  $\pm j2$  zwei Nullstellen, so dass  $G(\pm j2) = 0$  gilt. Die einzige Übertragungsfunktion, die derartige Nullstellen aufweist, ist

**Abb. A.27:** Stationäres Verhalten des PT<sub>2</sub>-Gliedes

$$G(s) = \frac{s^2 + 4}{(s+1)(s+2)(s+3)}.$$

Die abgebildete Ausgangsgröße beschreibt das Übergangsverhalten  $y_{\text{ü}}(t)$ , da das stationäre Verhalten  $y_s(t)$  verschwindet.

Um dies nachzurechnen, transformiert man die gegebene Eingangsgröße

$$u(t) = \sin 2t \circledcirc \bullet U(s) = \frac{2}{s^2 + 4}$$

und berechnet mit dieser die Ausgangsgröße

$$\begin{aligned} Y(s) = G(s)U(s) &= \frac{s^2 + 4}{(s+1)(s+2)(s+3)} \frac{2}{s^2 + 4} \\ &= \frac{2}{(s+1)(s+2)(s+3)} \\ &= \frac{1}{s+1} + \frac{-2}{s+2} + \frac{1}{s+3} \end{aligned}$$

$$y(t) = e^{-t} - 2e^{-2t} + e^{-3t}.$$

Erwartungsgemäß tritt in dieser Summe kein Summand mit  $\sin 2t$  auf. Die Exponenten der e-Funktionen sind durch die Pole der Übertragungsfunktion bestimmt, nicht durch die Eingangsgröße.

**Aufgabe 6.10 Übertragungsfunktion der Verladebrücke**

Zur Vereinfachung des Lösungsweges wird das Zustandsraummodell in der Form

$$\text{Verladebrücke : } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \\ b_4 \end{pmatrix} u(t). \\ y(t) = (c_1 \ 0 \ c_3 \ 0) \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

geschrieben.

**1.** Entsprechend Gl. (6.76) erhält man für die Übertragungsfunktion die Beziehung

$$G(s) = (c_1 \ 0 \ c_3 \ 0) \begin{pmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s & -a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & -a_{43} & s \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \\ b_4 \end{pmatrix}.$$

Die inverse Matrix lässt sich folgendermaßen umformen

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s & -a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & -a_{43} & s \end{pmatrix}^{-1} &= \frac{1}{s^2(s^2 - a_{43})} \text{adj} \begin{pmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s & -a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & -a_{43} & s \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2(s^2 - a_{43})} \begin{pmatrix} * & s^2 - a_{43} & * & a_{23} \\ * & * & * & * \\ * & 0 & * & s^2 \\ * & * & * & * \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei für die weitere Rechnung von der Inversen aufgrund der Gestalt der Vektoren  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}^T$  nur die eingetragenen Elemente wichtig sind. Damit erhält man die Beziehung

$$G(s) = \frac{(c_1 b_2 + c_3 b_4)s^2 + (c_1 b_4 a_{23} - c_1 b_2 a_{43})}{s^2(s^2 - a_{43})}. \quad (\text{A.57})$$

Erwartungsgemäß steht für die Verladebrücke mit dem Zustandsraummodell vierter Ordnung ein Polynom vierter Ordnung im Nenner der Übertragungsfunktion. Der Zähler ver einfacht sich jedoch, wenn man die Parameter des Zustandsraummodells durch die physikalischen Parameter ersetzt. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} &(c_1 b_2 + c_3 b_4)s^2 + (c_1 b_4 a_{23} - c_1 b_2 a_{43}) \\ &= \left( \frac{1}{m_K} - l \frac{1}{m_K l} \right) s^2 + \left( -\frac{1}{m_K l} \frac{m_G g}{m_K} + \frac{1}{m_K} \frac{(m_K + m_G)g}{m_K l} \right) \\ &= \frac{g}{m_K l}, \end{aligned}$$

d. h., die Verladebrücke hat gar keine Nullstelle. Die in der letzten Zeile durchgeführte Vereinfachung gilt unabhängig von den physikalischen Parameterwerten. Als Übertragungsfunktion erhält man damit

$$G(s) = \frac{\frac{g}{m_K l}}{s^2(s^2 + \frac{(m_K + m_G)g}{m_K l})}. \quad (\text{A.58})$$

**2.** Die Verladebrücke hat keine Nullstelle und vier Pole. Zwei Pole haben den Wert null, die beiden anderen die Werte

$$s_{3/4} = \pm j \sqrt{\frac{(m_K + m_G)g}{m_K l}}. \quad (\text{A.59})$$

3. Die Ausgabegleichung für den Seilwinkel lautet

$$y(t) = (0 \ 0 \ 1 \ 0) \boldsymbol{x}(t),$$

so dass die Übertragungsfunktion (A.57) für  $c_1 = 0$  gilt:

$$G(s) = \frac{c_3 b_4 s^2}{s^2(s^2 - a_{43})}.$$

Nach Kürzen von  $s^2$  erhält man die Beziehung

$$G(s) = \frac{c_3 b_4}{s^2 - a_{43}} = \frac{-\frac{1}{m_K l}}{s^2 + \frac{(m_K + m_G)g}{m_K l}}. \quad (\text{A.60})$$

4. Der grundlegende Unterschied zwischen den beiden Übertragungsfunktionen (A.58) und (A.60) besteht in der Tatsache, dass bei der Verwendung des Seilwinkels als Ausgangsgröße das Nennerpolynom nur den Grad 2 hat, obwohl das Zustandsraummodell die dynamische Ordnung 4 hat. Bei der Berechnung wurde der Term  $s^2$  gekürzt. Die Übertragungsfunktion (A.60) hat deshalb nur zwei Pole und zwar die in Gl. (A.59) angegebenen.

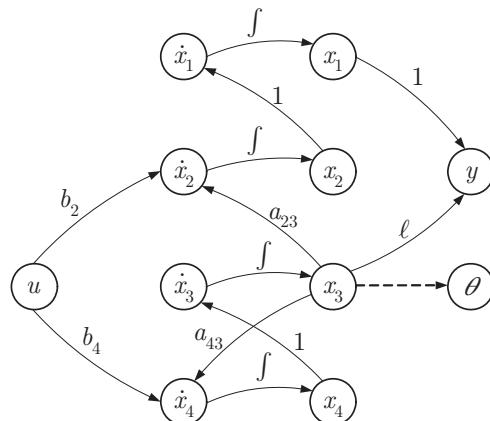


Abb. A.28: Signalflussgraph der Verladebrücke

Die Erklärung dafür findet man im Signalflussgraphen (Abb. A.28). Wenn man  $\vartheta$  als Ausgangsgröße verwendet, so gibt es keine Pfade von den Zustandsvariablen  $x_1 = s_k$  und  $x_2 = s_k$  zum Systemausgang. Die Bewegung dieser beiden Zustandsvariablen kommt deshalb nicht in der E/A-Beschreibung der Verladebrücke vor und die Ordnung der Übertragungsfunktion ist niedriger als die des Zustandsraummodells.

Physikalisch lässt sich diese Tatsache dadurch erklären, dass die Position und die Geschwindigkeit der Laufkatze keinen Einfluss auf den Seilwinkel hat. Die Wirkung einer Kraft, die die Laufkatze beschleunigt, wird direkt von dem im Signalflussgraphen unten dargestellten Teil des Modells mit den beiden Zustandsvariablen  $x_3 = \vartheta$  und  $x_4 = \dot{\vartheta}$  erfasst. Derartige Phänomene werden im Kap. II-3 eingehend untersucht, während in diesem Band davon ausgegangen wird, dass sich die Übertragungsfunktion nicht kürzen lässt.

**Aufgabe 6.15** Berechnung der Übergangsmatrix

1. Mit dem Differenziationssatz (6.57) der Laplacetransformation folgt aus der gegebenen Differentialgleichung die Beziehung

$$\dot{\Phi}(s) = -\Phi(0) + s\Phi(s) = A\Phi(s)$$

und mit  $\Phi(0) = I$

$$-I + s\Phi(s) = A\Phi(s).$$

Somit kann die Übergangsmatrix durch die Gleichung

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)}$$

berechnet werden. Aus der auf diese Weise ermittelten Matrix  $\Phi(s)$  kann jedes Element direkt in den Zeitbereich zurücktransformiert werden:

$$\phi_{ij}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\phi_{ij}(s)\}.$$

**Diskussion.** Ist  $A$  eine Diagonalmatrix  $A = \text{diag}\{\lambda_i\}$ , so ergibt sich die leicht nachprüfbare Beziehung

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{s-\lambda_1} & & & \\ & \frac{1}{s-\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{s-\lambda_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

2. Als Übergangsmatrix folgt für die gegebene Matrix  $A$

$$\Phi(s) = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{s(s+1)} \begin{pmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+1)} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{pmatrix}.$$

Die elementeweise Rücktransformation liefert

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Auf demselben Weg erhält man folgende weitere Ergebnisse:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \\ A &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \\ A &= \begin{pmatrix} \delta & \omega \\ -\omega & \delta \end{pmatrix}, \quad \Phi(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Aufgabe 6.19** Frequenzgang einer Operationsverstärkerschaltung

1. Es liegt eine Rückkopplung vor, weil ein Teil der Ausgangsspannung  $U_a$  den Eingang des Operationsverstärkers beeinflusst (Abb. 6.26). Es gilt

$$U_D = U_e - \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} U_a. \quad (\text{A.61})$$

Diese Gleichung erhält man unter der bei Operationsverstärkerschaltungen üblichen Annahme, dass der Strom durch den Operationsverstärker vernachlässigbar klein und folglich der Spannungsteiler unbelastet ist. Deshalb trifft Abb. 6.27 zu, wobei  $\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} U_a$  das rückgekoppelte Signal ist.

2. Aus Gl. (A.61) folgt unmittelbar

$$G_r = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

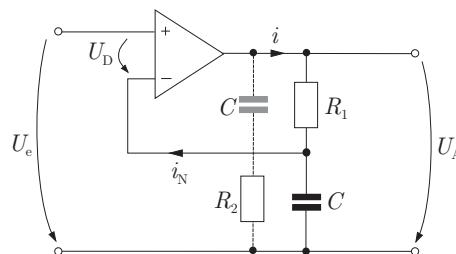
$G_r$  ist eine Übertragungsfunktion, deren Charakter von  $Z_1$  und  $Z_2$  abhängt. Sind beide Widerstände ohmsch, so stellt  $G_r$  ein P-Glied dar.

3. Die Zusammenfassung der Rückführung in Abb. 6.27 liefert

$$G(j\omega) = \frac{k}{1 + k G_r(j\omega)}.$$

Als Grenzwert ergibt sich  $\lim_{k \rightarrow \infty} G(j\omega) = \frac{1}{G_r}$ , d. h., das Übertragungsverhalten der Schaltung wird nur durch die äußere Beschaltung des Operationsverstärkers festgelegt. Die in Abb. 6.26 dargestellte Schaltung ist daher das Übertragungsglied

$$G(j\omega) = 1 + \frac{Z_1(j\omega)}{Z_2(j\omega)}. \quad (\text{A.62})$$



**Abb. A.29:** Beschaltung des Operationsverstärkers mit dynamischen Elementen

4. Die Übertragungsfunktionen für die in Abb. A.29 dargestellten Schaltungen erhält man unmittelbar aus Gl. (A.62), beispielsweise:

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{R_1 + R_2}{R_2} && \text{P-Glied} \\
 G(s) &= 1 + \frac{R_1}{\frac{1}{Cs}} = 1 + R_1 C s && \text{PD-Glied} \\
 G(s) &= 1 + \frac{\frac{1}{Cs}}{R_2} = \frac{1 + R_2 C s}{R_2 C s} && \text{PI-Glied.}
 \end{aligned} \tag{A.63}$$

**Aufgabe 6.21** Verhalten von  $PT_2$ -Gliedern

Die Übergangsfunktion unten rechts ist die einzige mit instabilem Verhalten (aufklingenden e-Funktionen). Folglich gehören zu ihr die beiden Pole in der rechten komplexen Halbebene. Die anderen Übergangsfunktionen unterscheiden sich bezüglich der Zeit, die bis zum Erreichen des statischen Endwertes vergeht, bzw. bezüglich der Schwingungsamplitude.

Die Zuordnung der Pole zu den Übergangsfunktionen ergibt sich aus folgender Tabelle, in der die Pole in derselben Position wie die zugehörigen Übergangsfunktionen in Abb. 6.44 auf S. 305 eingetragen sind:

	$-3 \pm 3j$	$-3 \pm 5j$
$-2, -2, 3$	$-5, -6$	$+2, +3$

**Aufgabe 6.23** Bestimmung der Übertragungsfunktion aus dem Amplitudengang

1. Aus der Geradenapproximation kann man die Knickfrequenzen

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_{01} = 5$$

$$\omega_2 = 20$$

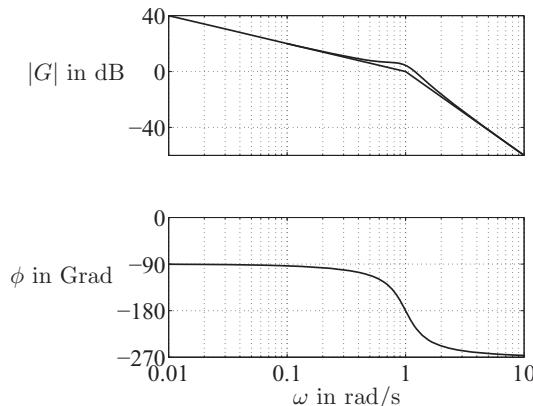
$$\omega_3 = 80$$

sowie die statische Verstärkung  $k_s = 1$  ablesen. Entsprechend Gl. (6.122) auf S. 309 erhält man daraus den Frequenzgang

$$\begin{aligned}
 G(j\omega) &= k_s \frac{1 + \frac{j\omega}{\omega_{01}}}{(1 + \frac{j\omega}{\omega_1})(1 + \frac{j\omega}{\omega_2})(1 + \frac{j\omega}{\omega_3})} \\
 &= 1 \frac{1 + \frac{j\omega}{5}}{(1 + \frac{j\omega}{1})(1 + \frac{j\omega}{20})(1 + \frac{j\omega}{80})}
 \end{aligned}$$

und die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{0,2s + 1}{(s + 1)(0,05s + 1)(0,0125s + 1)} = 320 \frac{s + 5}{(s + 1)(s + 20)(s + 80)}.$$



**Abb. A.30:** Geradenapproximation des hydraulischen Stellantriebs

2. Abbildung A.30 zeigt die Geradenapproximation des gegebenen Amplitudengangs, die man leicht mit Lineal und Bleistift konstruieren kann. Das System hat offenbar I-Verhalten, denn der Amplitudengang fällt für kleine Frequenzen um 20 dB/Dekade ab. Ab der Frequenz  $\omega_1 = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  verändert sich die Neigung auf -60 dB/Dekade, wobei in der Umgebung der Frequenz  $\omega_1$  eine Resonanzüberhöhung von etwa 5 dB auftritt. Das betrachtete System ist folglich eine Reihenschaltung eines I-Gliedes (6.118) mit einem schwingungsfähigen PT<sub>2</sub>-Glied (6.107), wofür man die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{T_I s} \frac{k_s}{T^2 s^2 + 2dTs + 1} \quad (\text{A.64})$$

aufschreiben kann. Es gilt  $T_I = 1$  s und  $T = \frac{1}{\omega_1} = 1$  s, weil die Knickfrequenz mit der Schnittfrequenz  $1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  durch die 0 dB-Achse übereinstimmt. Für  $d$  liest man aus dem Diagramm 6.42 auf S. 304 bei  $|G(j\omega_r)| = 5$  dB den Wert  $d = 0,3$  ab. Die statische Verstärkung ermittelt man aus dem Amplitudengang bei kleinen Frequenzen, für die

$$|G(j\omega)| \approx \left| \frac{k_s}{j\omega} \right| = \frac{|k_s|}{\omega}$$

gilt. Da beispielsweise  $|G(0,01j)|_{\text{dB}} = 40$  ist, erhält man aus dieser Betrachtung  $k_s = 1$ . Die gesuchte Übertragungsfunktion lautet somit

$$G(s) = \frac{1}{s(s^2 + 0,6s + 1)}.$$

Abbildung A.30 zeigt auch den dazugehörigen Phasengang, der für das hier betrachtete stabile System aus der Kenntnis des Amplitudenganges konstruiert werden kann.

Man kann in der Übertragungsfunktion (A.64) auch  $k_s$  und  $T_I$  zu einem neuen Parameter  $\tilde{T} = \frac{T_I}{k_s}$  zusammenfassen, wodurch der I-Anteil die Form  $\frac{1}{\tilde{T}s}$  und das PT<sub>2</sub>-Glied die statische Verstärkung von eins erhält. Den Parameter  $\tilde{T}$  erhält man dann aus dem Schnittpunkt der mit 20 dB/Dekade abfallenden Amplitudenkurve im Punkt  $\omega_s = 1$ :  $\tilde{T} = 1$ . Da bei dieser Frequenz die Geradenapproximation abknickt, gilt  $T = 1$  für das PT<sub>2</sub>-Glied.

**Aufgabe 6.24 Bodediagramm eines Feder-Masse-Schwingers**

Mit den gegebenen Parametern erhält man die Differentialgleichung (4.23) in der Form

$$\Sigma_{\text{FMS}} : \quad 0,2\ddot{y}(t) + 0,25\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

und daraus die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{0,2s^2 + 0,25s + 1} = \frac{k_s}{T^2 s^2 + 2dT s + 1}$$

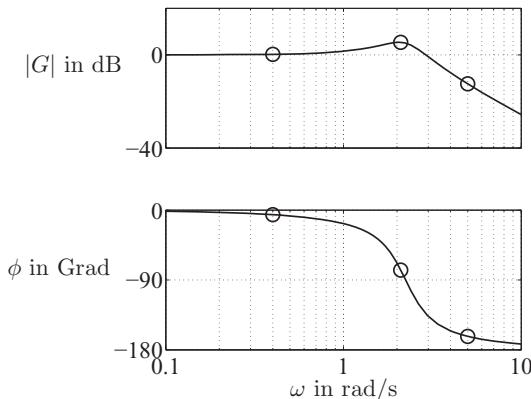
mit

$$k_s = 1, \quad T = 0,447 \text{ s} \quad \text{und} \quad d = 0,27.$$

Der Amplitudengang verläuft deshalb für kleine Frequenzen auf der Frequenzachse und fällt oberhalb der Knickfrequenz

$$\omega_1 = \frac{1}{0,447} = 2,24 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

um 40 dB/Dekade. Entsprechend Abb. 6.42 auf S. 304 hat der Amplitudengang bei der Knickfrequenz eine Resonanzüberhöhung von etwa 5dB. Dazu gehört ein Phasengang, der von  $0^\circ$  in der Nähe der Knickfrequenz auf  $-180^\circ$  fällt (Abb. A.31).



**Abb. A.31:** Bodediagramm des Feder-Masse-Schwingers

In der Abbildung sind die im Beispiel 6.2 auf S. 241 verwendeten Frequenzen gekennzeichnet. Es ist zu erkennen, dass in je einem Experiment eine Eingangsgröße mit einer Frequenz unterhalb, in der Nähe bzw. oberhalb der Resonanzfrequenz verwendet wird. Dies erklärt auch die im Beispiel beobachteten Phasenverschiebungen.

**Aufgabe 6.25 Bodediagramm der Verladebrücke**

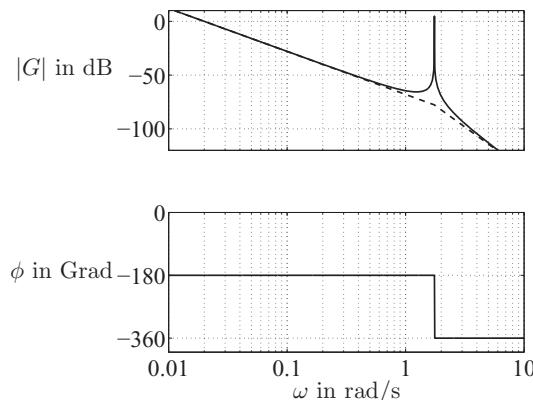
Die Verladebrücke hat keine Nullstelle und die vier Pole

$$s_{1/2} = 0 \quad \text{und} \quad s_{3/4} = \pm j1,75.$$

Die Übertragungsfunktion (6.128) kann entsprechend

$$G(s) = \frac{1}{49,9s} \frac{1}{49,9s} \frac{1}{0,326s^2 + 1}$$

zerlegt werden. Für niedrige Frequenzen bis zur Knickfrequenz 1,75 hat der Amplitudengang eine Neigung von -40 dB/Dekade, wozu eine Phase von  $-180^\circ$  gehört. Der Schnittpunkt mit der 0 dB-Achse liegt bei  $\frac{1}{49,9} = 0,02$ . Oberhalb der Knickfrequenz hat die Geradenapproximation des Amplitudenganges die Neigung von -80 dB/Dekade, wozu eine Phasenverschiebung von  $-360^\circ$  gehört.



**Abb. A.32:** Bodediagramm der Verladebrücke

Da der letzte Faktor der zerlegten Übertragungsfunktion einem ungedämpften  $\text{PT}_2$ -Glied ( $d = 0$ ) entspricht, hat die Verladebrücke bei der Knickfrequenz eine unendlich hohe Resonanzüberhöhung. Die unendliche Höhe resultiert aus der Tatsache, dass die Reibung in der Pendelbewegung des Greifers bei der Modellbildung vernachlässigt wurde. Für  $d = 0$  fällt die Phasenverschiebung sprungförmig von  $-180^\circ$  auf  $-360^\circ$  (Abb. A.32).

### Aufgabe 6.26 Elektrische Schaltungen mit positiv reeller Übertragungsfunktion

Die Schaltung hat dieselbe Zustandsgleichung (A.20) wie in der Aufg. 4.7. Die neue Ausgangsgleichung erhält man durch Einsetzen von Gl. (A.14) in Gl. (A.15), wodurch

$$y(t) = \left( 0 \quad -\frac{1}{R_2} \right) x(t) + \frac{1}{R_2} u(t)$$

mit dem Zustandsvektor aus Gl. (A.17) entsteht. Entsprechend Gl. (6.76) heißt die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{R_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s + \frac{1}{R_1 C_1} & -\frac{1}{R_1 C_1} \\ -\frac{1}{R_1 C_2} & s + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C_2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{R_2 C_2} \end{pmatrix} + \frac{1}{R_2}$$

$$= \frac{R_1 C_1 C_2 s^2 + (C_1 + C_2)s}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1)s + 1}$$

Der Frequenzgang

$$G(j\omega) = \frac{-R_1 C_1 C_2 \omega^2 + j(C_1 + C_2)\omega}{N(j\omega)}$$

mit dem Nenner  $N(j\omega) = -R_1 R_2 C_1 C_2 \omega^2 + 1 + j(R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1)\omega$  hat den Realteil

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}\{G(j\omega)\} \\ &= \frac{-R_1 C_1 C_2 \omega^2 (-R_1 R_2 C_1 C_2 \omega^2 + 1) + (C_1 + C_2)(R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1)\omega^2}{N(j\omega)N(-j\omega)} \\ &= \frac{R_1^2 R_2 C_1^2 C_2^2 \omega^4 + ((C_1 + C_2)(R_2 C_2 + R_2 C_1) + R_1 C_1^2)\omega^2}{N(j\omega)N(-j\omega)}, \end{aligned}$$

der für alle  $\omega > 0$  positiv ist. Als Beispiel ist die Ortskurve der Schaltung für  $R_1 = R_2 = 10 \Omega$  und  $C_1 = C_2 = 10 \mu\text{F}$  in Abb. A.33 zu sehen.

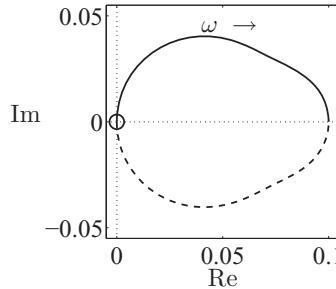


Abb. A.33: Ortskurve des RC-Gliedes

### Aufgabe 6.31 Rückwärtseinparken von Fahrzeugen

Wegen

$$\begin{aligned} c^T b &= 0 \\ c^T A b &= (1 \ -l \ 0) \begin{pmatrix} 0 & -v & 0 \\ 0 & 0 & \frac{v}{l} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -v \neq 0 \end{aligned}$$

hat das Fahrzeug den relativen Grad  $r = 2$ , also eine interne Dynamik erster Ordnung. Mit der Transformationsmatrix (5.100)

$$\mathbf{T}_E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -l & 0 \\ 0 & -v & -v \\ -\frac{l}{v^2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

erhält man die E/A-Normalform des Fahrzeugs

$$\Sigma : \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_{I1}(t) \\ \dot{x}_{I2}(t) \\ \dot{x}_{N1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{v^2}{l^2} & \frac{v}{l} & -\frac{v^4}{l^3} \\ -\frac{1}{v} & 0 & -\frac{v}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{I1}(t) \\ x_{I2}(t) \\ x_{N1}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -v \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} x_{I1}(t) \\ x_{I2}(t) \\ x_{N1}(t) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Die interne Dynamik

$$\Sigma_N : \begin{cases} \dot{x}_{N1}(t) = -\frac{v}{l}x_{N1}(t) - \frac{1}{v}y(t) \\ y_N(t) = \frac{v^3}{l^3}x_{N1}(t) \end{cases}$$

hat den Eigenwert  $s_0 = -\frac{v}{l}$ , der gleich der Nullstelle des Fahrzeugs ist. Für das Rückwärtsfahren ( $v < 0$ ) ist die interne Dynamik instabil, das Fahrzeug also nichtminimalphasig. Beim Vorwärtsfahren ist  $s_0$  negativ, das Fahrzeug folglich minimalphasig.

### Aufgabe 6.32 Übertragungsfunktion eines Gleichstrommotors

1. Abbildung A.34 zeigt das Blockschaltbild des Gleichstrommotors. Da die Drehzahl – und nicht der Drehwinkel – die Ausgangsgröße darstellt und die Spannung  $u_M(t)$  nicht von  $\phi(t)$ , sondern von  $\frac{d\phi(t)}{dt}$  abhängt, ist es nicht zweckmäßig,  $\phi(t)$  als Signal einzuführen und daraus  $\frac{d\phi(t)}{dt}$  durch ein Differenzierglied zu bestimmen.

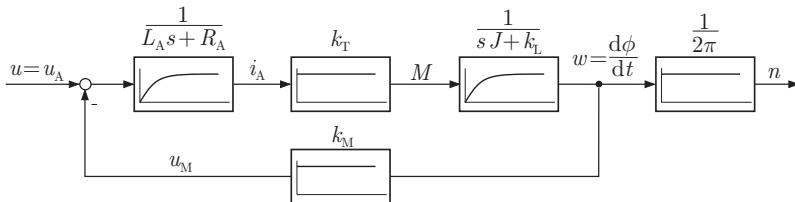


Abb. A.34: Blockschaltbild des Gleichstrommotors

2. Die in dem Block dargestellte Rückführung entsteht durch die aufgrund der Gegeninduktivität bewirkten Rückwirkung des Rotors auf den Ankerkreis. Sie ist Ausdruck dafür, dass sich die Belastung der Maschine auf den Ankerkreis auswirkt, weil der Motor zur Erzeugung einer höheren mechanischen Leistung eine höhere elektrische Leistung erfordert.
3. Die Übertragungsfunktionen, die in den Blöcken eingetragen sind, lassen sich direkt aus den in der Aufgabenstellung angegebenen Gleichungen ableiten. Eine Zusammenfassung der Blöcke ergibt das Motormodell

$$\Sigma_M : \quad N(s) = G(s)U_A(s) \quad (\text{A.65})$$

mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\frac{k_T}{2\pi}}{JL_A s^2 + (k_L L_A + J R_A)s + (R_A k_L + k_M k_T)}.$$

Der Motor hat PT<sub>2</sub>-Verhalten.

4. Wird der Drehwinkel als Ausgangsgröße verwendet, so erhält das Blockschaltbild einen zusätzlichen Integrator, mit dem  $\phi$  aus  $n$  berechnet wird. Der Motor hat dann IT<sub>2</sub>-Verhalten.
5. Mit den angegebenen Parametern erhält man die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{0,4775}{0,011s^2 + 0,911s + 9,90} = \frac{0,0482}{0,0011s^2 + 0,092s + 1},$$

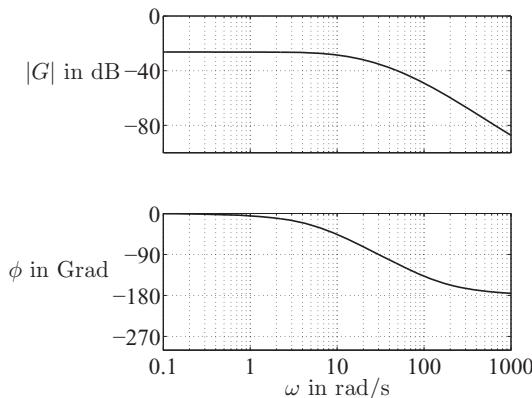
die keine Nullstellen und die Pole

$$s_1 = -69,95 \quad \text{und} \quad s_2 = -12,87$$

besitzt. Der Gleichstrommotor ist ein minimalphasiges System. Für die statische Verstärkung erhält man

$$k_s = G(0) = 0,0482.$$

Das Bodediagramm ist in Abb. A.35 zu sehen.



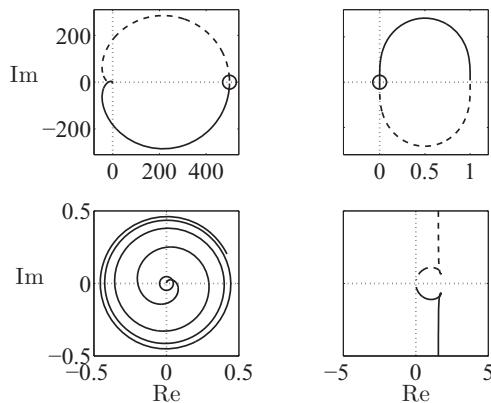
**Abb. A.35:** Bodediagramm des Gleichstrommotors

#### Aufgabe 6.34 Klassifikation von Systemen

Die Anordnung der Bodediagramme stimmt mit folgender Anordnung der Übertragungsfunktionen überein:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1000}{(s+0,1)(s+1)(s+2)(s+10)}, & G(s) &= \frac{s(s+2)}{s^2+4s+8} \\ G(s) &= \frac{0,25s}{0,5s+1} e^{-5s}, & G(s) &= \frac{100(s+1)(s+3)}{4s(s+10)(s+5)}. \end{aligned}$$

Die Systeme unterscheiden sich grundlegend, so dass sich die Zuordnung aus dem qualitativen Verlauf der Diagramme ergibt und man keine Knickfrequenzen und dergleichen berechnen muss. Das Diagramm oben links zeigt ein proportional wirkendes System. Die Phase fällt auf  $-360^\circ$  ab; das System hat also mindestens vier Pole. Die oben rechts bzw. unten links dargestellten Systeme übertragen kleine Frequenzen nicht und haben dort eine Phase von  $90^\circ$ . Oben rechts ist die Phasenverschiebung endlich, so dass ein Totzeitanteil ausgeschlossen werden kann, während unten links eine stark ansteigende Phasenverschiebung zu sehen ist, was auf das Totzeitglied hinweist. Das System unten rechts hat I-Verhalten, was aus dem Amplitudengang (Neigung -20 dB/Dekade) und der Phase von  $-90^\circ$  zu erkennen ist.



**Abb. A.36:** Ortskurven der vier Systeme

Die Ortskurven sind in Abb. A.36 dargestellt. Sie können direkt aus dem Frequenzkennliniendiagramm abgeleitet werden, wenn man die zu steigender Frequenz gehörende Amplitude und Phase als Vektor in der komplexen Ebene interpretiert. Die Ortskurve oben links mündet aus Richtung der positiven reellen Achse in den Nullpunkt, was aus der Phasenverschiebung zu erkennen ist, aufgrund der kleinen Amplitude aber schwer erkennbar ist. Durch den D-Anteil übertragen die Systeme oben rechts und unten links auch sehr hohe Frequenzen. Daher beginnen die Ortskurven im Nullpunkt. Dies gilt auch für die unten links gezeigte Spirale, die von innen nach außen durchlaufen wird. Auf die Darstellung der Ortskurve für negative Frequenzen wurde bei dem Totzeitssystem verzichtet, um das Bild lesbar zu machen. Durch den I-Anteil des Systems unten kommt die Ortskurve von  $-j\infty$ . Dass sie im vierten Quadranten verläuft, ist aus der Phasen zu erkennen, die zwischen  $0^\circ$  und  $-90^\circ$  liegt. Die kleine Schlinge kann aus dem Frequenzkennliniendiagramm nur bei sehr genauer Betrachtung abgelesen werden. Sie ist aber für den prinzipiellen Verlauf nicht entscheidend.

**Aufgabe 6.38 Schwingungstilgung am Hochhaus „Taipeh 101“**

1. Aus Gl. (5.142) erhält man die Nullstellen

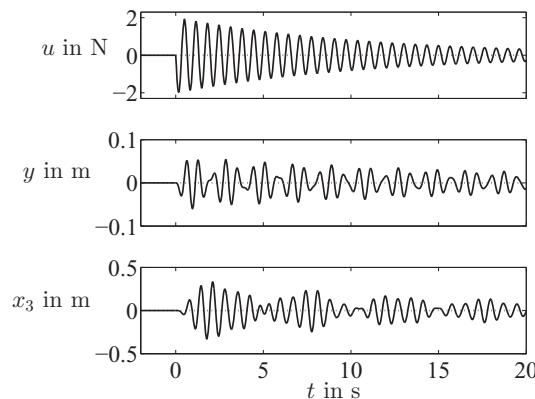
$$\mu_{1/2} = -\frac{d_2}{2m_2} \pm \sqrt{\frac{d_2^2}{4m_2^2} - \frac{c_2}{m_2}},$$

die offensichtlich nur von den Parametern des Dämpfers und nicht von den Parametern des Hauses abhängen. Durch eine geeignete Wahl dieser Parameter müssen die Nullstellen so platziert werden, dass sie die Wirkung der wichtigsten Anregung auslöschen. Diese Anregung darf dann eine abklingende Schwingung sein.

Da die Dämpfung typischerweise sehr klein ist, kann man näherungsweise mit  $d_2 = 0$  arbeiten, wofür sich die Nullstellen

$$\mu_{1/2} = \pm j \sqrt{\frac{c_2}{m_2}}$$

ergeben, durch die eine rein sinusförmige Störung mit der von  $c_2$  und  $m_2$  abhängigen Frequenz gedämpft wird.



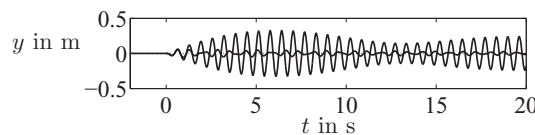
**Abb. A.37:** Verhalten des Hochhauses bei sinusförmiger Erregung

- Mit den angegebenen Parametern liegen die Nullstellen bei  $-0,068 \pm j9,53$ , so dass das Haus für die Erregung

$$u(t) = e^{-0,068t} \sin(9,53t)$$

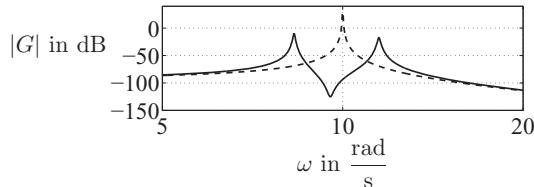
untersucht werden muss. Das Ergebnis ist in Abb. A.37 gezeigt.  $x_3(t)$  ist die Bewegung des Pendels, durch die die Dämpfung hervorgerufen wird.

Da die Dämpfung sehr klein ist, klingt das Übergangsverhalten sehr langsam ab und die Bewegung  $y(t)$  des Hauses und  $x_3(t)$  des Dämpfers besteht im betrachteten Zeitintervall aus der Summe des stationären und des Übergangsverhaltens, also aus Frequenzen der Anregung und des Hauses.



**Abb. A.38:** Vergleich des Verhaltens mit und ohne Dämpfer

Zum Vergleich ist in Abb. A.38 das Verhalten mit und ohne Dämpfer dargestellt. Das Pendel dämpft die Hochhausbewegung etwa um den Faktor 10.

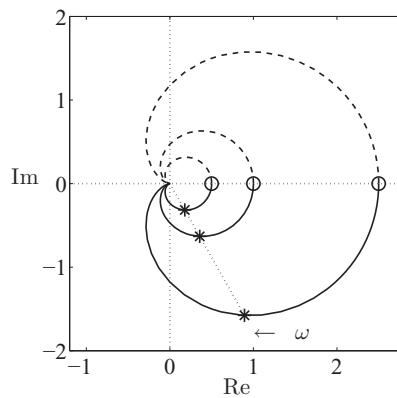


**Abb. A.39:** Vergleich des Amplitudenganges mit und ohne Dämpfer

3. Abbildung A.39 zeigt den Amplitudengang mit und ohne Dämpfer. Die eingeführten Nullstellen drücken den Amplitudengang in der Nähe der Resonanzfrequenz erheblich. Dieser Frequenzbereich muss durch die geeignete Wahl der Dämpferparameter so platziert werden, dass er im Bereich der wichtigsten Anregungen durch Wind bzw. Erdbeben liegt.

**Aufgabe 7.1** Frequenzgang eines Regelkreises

1. Die Ortskurve der Regelstrecke ist für drei Werte des Parameters  $k$  in Abb. A.40 gezeigt. Die Ortskurven unterscheiden sich für einen bestimmten Wert der Frequenz  $\omega$  nur im Betrag, nicht in der Phase, wie die drei für  $\omega = 0,8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  eingetragenen Punkte \* zeigen.

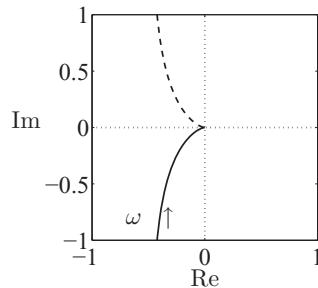


**Abb. A.40:** Ortskurve der Regelstrecke für  $k = 1, 2$  und  $5$

2. Für die offene Kette mit PI-Regler erhält man die Übertragungsfunktion

$$G_0(s) = \left(1 + \frac{1}{s}\right) \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{s(s+2)}.$$

Die zugehörige Ortskurve ist in Abb. A.41 dargestellt. Sie beginnt bei  $-j\infty$  und nähert sich für hohe Frequenzen dem Koordinatenursprung.



**Abb. A.41:** Ortskurve der offenen Kette

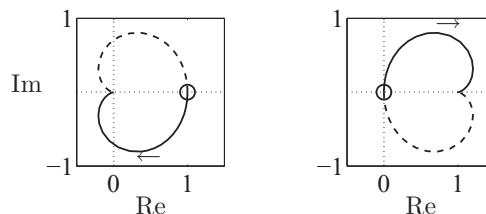
Die Frequenzgänge des Regelkreises sind

$$G_w(j\omega) = \frac{2}{-\omega^2 + j2\omega + 2}$$

und

$$G_d(j\omega) = \frac{-\omega^2 + j2\omega}{-\omega^2 + j2\omega + 2}.$$

Abbildung A.42 zeigt die Ortskurven. Das Führungsverhalten ist durch die statische Verstärkung von eins und  $G_w(\infty) = 0$  gekennzeichnet. Bezuglich des Störverhaltens ist der Standardregelkreis ein sprungfähiges System mit verschwindender statischer Verstärkung. Deshalb beginnt die Ortskurve im Koordinatenursprung und endet bei  $G_d(\infty) = 1$ .



**Abb. A.42:** Ortskurve des Führungs- bzw. Störverhaltens des Regelkreises

**Aufgabe 7.3 Notwendigkeit des I-Anteils in der offenen Kette**

1. Aus dem Blockschaltbild des Standardregelkreises in Abb. 7.7 auf S. 355 erkennt man, dass bei  $d(t) = 0$ ,  $r(t) = 0$  und  $w(t) = \bar{w}$  für die Stellgröße  $u$  die Beziehung

$$u(\infty) = \frac{1}{k_s} \bar{w} \quad (\text{A.66})$$

gelten muss, wenn die Regelgröße den Sollwert annehmen soll ( $y(\infty) = \bar{w}$ ). Dabei ist  $k_s$  die statische Verstärkung der Regelstrecke. Unter dieser Bedingung gilt wie gefordert

$$y(\infty) = k_s u(\infty) = k_s \frac{1}{k_s} \bar{w} = \bar{w}.$$

Diese Stellgröße (A.66) kann nicht mit einer proportionalen Regelung erzeugt werden, denn wenn die Regelgröße dem Sollwert angepasst ist und die Regelabweichung verschwindet ( $e = 0$ ), kann ein proportionaler Regler  $u = k_p e$  keine von null verschiedene Stellgröße erzeugen. Der Regler muss deshalb die Eigenschaft besitzen, seine Stellgröße solange zu verändern, bis die Regelabweichung verschwindet, und wenn die Regelabweichung verschwindet, die Stellgröße unverändert lassen. Diese Eigenschaft besitzen nur Systeme mit I-Verhalten (vgl. Abschn. 5.6.2 auf S. 199).

2. Bei einer proportionalen Regelung  $u(t) = k_p e(t)$  gilt für die stationären Endwerte

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \bar{w} - y(\infty) \\ y(\infty) &= k_s u(\infty). \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen erhält man mit  $k_0 = k_p k_s$  die Beziehung

$$e(\infty) = \frac{1}{1 + k_0} \bar{w},$$

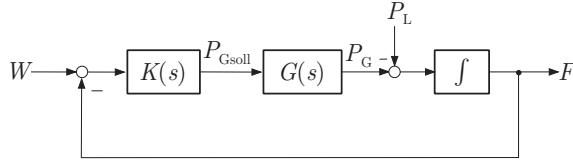
die Gl. (7.33) unter der für diese Gleichung verwendeten Voraussetzung  $\bar{w} = 1$  entspricht.

3. Wenn man die Führungsgröße sprungförmig verändert (z. B.  $w(t) = \bar{w}\sigma(t)$ ), so hat die Stellgröße im ungestörten Regelkreis den statischen Endwert (A.66), aus dem man den aktuellen Wert der statischen Verstärkung ermitteln kann.

**Diskussion.** Aus dieser Betrachtung wird die Wirkungsweise des I-Reglers offensichtlich. Bei einer Sollwerterhöhung vergrößert der Regler die Stellgröße solange, bis die Regelgröße ausreichend angehoben ist. Wenn man dies langsam genug macht, also mit einer hinreichend kleinen Reglerverstärkung arbeitet, ist das System stabil und die Regelung funktioniert wie gewünscht. Probleme kann es lediglich dadurch geben, dass der Regler die Stellgröße zu schnell anhebt. Die Regelgröße folgt dann dieser Anhebung erst mit einiger Zeitverzögerung, erreicht einen zu hohen Wert und erzeugt eine negative Regelabweichung, woraufhin der Regler die Stellgröße nach unten korrigiert. Durch eine zu große Reglerverstärkung kann der Regelkreis also instabil gemacht werden (vgl. Aufgabe 8.12 auf S. 444).

**Aufgabe 7.4** Frequenzregelung eines Elektroenergieverteilungsnetzes

1. Der Regelkreis ist in Abb. A.43 zu sehen.  $G(s)$  ist die zur Gewichtsfunktion  $g(t)$  gehörige Übertragungsfunktion des leistungsgeregelten Generators.



**Abb. A.43:** Blockschaltbild der Frequenzregelung

2. Für die Störübertragungsfunktion gilt

$$G_d(s) = \frac{F(s)}{P_L(s)} = \frac{\frac{-1}{Ts}}{1 + \frac{1}{Ts}G(s)K(s)} = \frac{-1}{Ts + G(s)K(s)},$$

woraus für den statischen Endwert der Störübergangsfunktion die Beziehung

$$h_d(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} G_d(s) = \frac{-1}{G(0)K(0)}$$

folgt. Wenn der Leistungsregler des Generators keine bleibende Regelabweichung zulässt, gilt  $p_{Gsoll}(\infty) = p_G(\infty)$  und folglich  $G(0) = 1$ . Wird der proportionale Regler eingesetzt, so erhält man

$$h_d(\infty) = \frac{-1}{k_P}.$$

Es entsteht also eine bleibende Regelabweichung. Folglich muss der Regler einen I-Anteil besitzen.

**Diskussion.** Die im Abschn. 7.3.3 angegebene Regel, dass bei einer offenen Kette mit integralem Verhalten keine bleibende Regelabweichung auftritt, gilt für die am Regelstreckenausgang auftretende sprungförmige Störung. Wie in Abb. A.43 zu sehen ist, greift die Störung hier vor dem Integrator ein. Transformiert man diese Störung an den Ausgang der Regelstrecke, so hat man es mit einer rampenförmigen Störung zu tun, für die die oben angegebene Regel nicht anwendbar ist.

Bezüglich des Führungsverhaltens sind die Ergebnisse des Abschnitts 7.3.3 anwendbar. Die offene Kette mit integralem Verhalten verhindert eine bleibende Regelabweichung. In Bezug auf das Führungsverhalten ist also kein integraler Anteil im Regler notwendig. Mit einem P-Regler gilt für die Führungsübertragungsfunktion  $G_w(0) = 1$ .

**Aufgabe 7.6** Füllstandsregelung einer Talsperre

Aus Gl. (7.36) erhält man für die Regelstrecke das Modell

$$sH(s) = k(Q_{zu}(s) - Q_{ab}(s)).$$

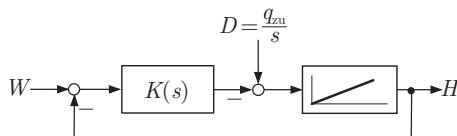
Weil  $q_{zu}$  als Störung und  $q_{ab}$  als Stellgröße wirkt, führt dieses Modell auf

$$sH(s) = k(D(s) - U(s))$$

und

$$G(s) = \frac{H(s)}{U(s)} = \frac{-k}{s}$$

(Abb. A.44). Die Regelstrecke hat I-Verhalten.



**Abb. A.44:** Regelkreis für die Talsperre

Um Sollwertfolge bezüglich sprungförmiger Führungssignale zu erhalten, ist keine besondere Reglerdynamik erforderlich, denn die offene Kette hat I-Charakter. Es kann mit einem P-Regler  $K(s) = k_P$  gearbeitet werden, aber auch ein dynamischer Regler eingesetzt werden, wenn die Dynamik zur Gestaltung des dynamischen Übergangsverhaltens eingesetzt wird.

Bei Betrachtung der Störkompensation muss man die sprungförmige Störung  $D(s) = \frac{q_{zu}}{s}$  zunächst an den Ausgang der Regelstrecke transformieren (Abb. A.44), damit das Innere-Modell-Prinzip anwendbar wird. Aus dem Blockschaltbild kann man die Beziehung

$$H(s) = G(s) \left( \frac{q_{zu}}{s} - U(s) \right) = -G(s)U(s) + \frac{-kq_{zu}}{s^2}$$

ablesen, in der die additiv am Ausgang wirkende Störung  $\frac{-kq_{zu}}{s^2}$  heißt. Um die Störung ohne bleibende Regelabweichung abbauen zu können, muss die Übertragungsfunktion der offenen Kette entsprechend dem Inneren-Modell-Prinzip den Faktor  $1/s^2$  besitzen. Um dies zu erreichen, muss ein I-Regler verwendet werden. Ein P-Regler ist nicht ausreichend.

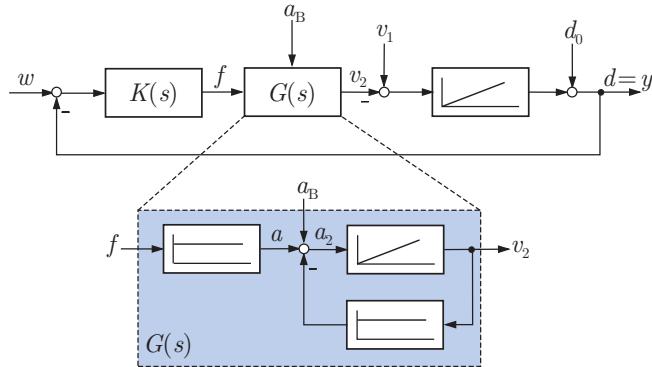
### Aufgabe 7.7 Struktur des Abstandsreglers bei Fahrzeugen

Abbildung A.45 zeigt den Regelkreis, in dem  $K(s)$  den Regler mit der hier zu bestimmenden Struktur darstellt. Das Übertragungsverhalten von der Kraft  $f$  auf die Geschwindigkeit  $v_2$  ist proportional und zeitlich verzögert und wird im Folgenden mit  $G(s)$  bezeichnet. Der Fahrzeugabstand wird, ausgehend vom Anfangsabstand  $d_0$ , durch Integration der Differenzgeschwindigkeit  $v_1 - v_2$  bestimmt.

- Bei der Konvoibildung wirkt der Anfangsabstand  $d_0$  wie eine impulsförmige Störung  $d_0\delta(t)$  auf den im Blockschaltbild gezeigten Integrator. Das Innere-Modell-Prinzip schreibt für den Regler keine eigene Dynamik vor, so dass ein P-Regler  $K(s) = k_P$  eingesetzt werden kann.

Um diesen Sachverhalt nachzuweisen, wird das durch

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{s}}{1 - \frac{G(s)}{s}k_P} d_0$$



**Abb. A.45:** Regelung des Fahrzeugabstandes

beschriebene Störverhalten betrachtet, bei dem  $G(s)$  das Übertragungsglied mit P-Verhalten beschreibt. Das Minuszeichen im Nenner erscheint wegen der zweimaligen Vorzeichenumkehr im Regelkreis. Nach dem Grenzwertsatz der Laplacetransformation erhält man

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{1}{s}}{1 - \frac{G(s)}{s} k_P} d_0 = 0.$$

2. Das Innere-Modell-Prinzip setzt voraus, dass die Störgröße an den Ausgang der Regelstrecke transformiert ist, was für den zweiten Störfall zu einer rampenförmigen Ausgangsstörung  $\bar{v}_1 t$  führt. Die offene Kette muss also I<sup>2</sup>-Verhalten besitzen. Da die Regelstrecke nur *einen* Integrator enthält, muss der Regler den Faktor  $\frac{1}{s}$  in die offene Kette einbringen; es muss also mit einem I-Regler gearbeitet werden.

Um dies zu veranschaulichen, wird für das Störverhalten aus dem Blockschaltbild die Beziehung

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{s}}{1 - \frac{G(s)}{s} K(s)} \frac{\bar{v}_1}{s} = \frac{1}{s - G(s) K(s)} \frac{\bar{v}_1}{s}$$

abgelesen. Der Fahrzeugabstand

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s - G(s) K(s)} \frac{\bar{v}_1}{s} = \frac{1}{-G(0) \lim_{s \rightarrow 0} K(s)} \bar{v}_1$$

verschwindet nur dann asymptotisch, wenn der Regler I-Charakter hat.

3. Bei der Betrachtung der Hangbeschleunigung muss der Block mit der proportionalen Übertragungsfunktion  $G(s)$  wie in Abb. A.45 unten gezeigt aufgelöst werden. Die Größe  $a_2(t)$  ist die resultierende Beschleunigung des Fahrzeugs, also die Summe der Beschleunigung  $a(t)$  des Motors, der Beschleunigung  $a_B(t)$  durch die Hangabtriebskraft und der Bremsbeschleunigung  $a_c(t)$ . Entsprechend der im Beispiel 4.13 abgeleiteten linearisierten Beziehung gilt

$$\dot{v}_2(t) = a_2(t) = \underbrace{-2 \frac{c_w}{m} v_2(t)}_{a_c(t)} + \underbrace{\frac{1}{m} f(t)}_{a(t)} + a_B(t),$$

was zu dem gezeigten Blockschaltbild führt, bei dem die P-Glieder die Verstärkungsfaktoren  $\frac{1}{m}$  und  $2\frac{c_w}{m}$  haben. Eine Erhöhung der Kraft  $f(t)$  führt nur solange zu einer zusätzlichen Beschleunigung, bis der mit der Geschwindigkeit steigende Luftwiderstand eine gleich große Gegenkraft erzeugt.

Da der Integrator zusammen mit der durch den Luftwiderstand hervorgerufenen Rückführung ein PT<sub>1</sub>-Glied darstellt, hat eine zusätzliche Beschleunigung  $\bar{a}_B \sigma(t)$  bezüglich der Sollwertfolge dieselbe Wirkung wie eine am Ausgang der Regelstrecke angreifende rampeförmige Störung  $-\bar{a}_B t$ . Die Übertragungsfunktion der offenen Kette muss deshalb den Faktor  $\frac{1}{s^2}$  enthalten, was nur dann der Fall ist, wenn  $K(s)$  einen I-Anteil enthält.

Aus dem Blockschaltbild erhält man die Beziehung

$$Y(s) = \frac{-\frac{\tilde{G}(s)}{s}}{1 - \frac{G(s)}{s}K(s)} \bar{a}_B = \frac{-\tilde{G}(s)}{s - G(s)K(s)} \bar{a}_B$$

wobei  $\tilde{G}(s)$  und  $G(s)$  die Übertragungsfunktionen von  $a_B$  nach  $v_2$  und von  $f$  nach  $v_2$  bezeichnen. Daraus ergibt sich der Ausdruck

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-\tilde{G}(s)}{s - G(s)K(s)} \bar{a}_B = \frac{-\tilde{G}(0)}{-G(0) \lim_{s \rightarrow 0} K(s)} \bar{a}_B,$$

der nur dann verschwindet, wenn  $K(s)$  den Faktor  $\frac{1}{s}$  enthält.

4. Um bei Änderung des Sollabstandes ( $w(t) = \bar{w}$ ) eine bleibende Regelabweichung zu verhindern, reicht ein P-Regler  $K(s) = k_P$ , denn die offene Kette hat I-Verhalten. Aus dem Blockschaltbild erhält man dafür

$$Y(s) = \frac{-\frac{G(s)}{s}k_P}{1 - \frac{G(s)}{s}k_P} \bar{w} = \frac{-G(s)k_P}{s - G(s)k_P} \bar{w}$$

und

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-G(s)k_P}{s - G(s)k_P} \bar{w} = \frac{-G(0)k_P}{-G(0)k_P} \bar{w} = \bar{w}.$$

**Diskussion.** Das Innere-Modell-Prinzip schreibt vor, welche dynamischen Elemente im Regler *notwendigerweise* vorkommen müssen, damit für vorgegebene Führungs- oder Störsignale keine bleibende Regelabweichung auftritt. Zusätzliche dynamische Elemente sind möglich. Bei dem hier betrachteten Fall würde man also mit einem I-Regler Sollwertfolge bzw. Störkompensation für alle vier Fälle erreichen, mit dem P-Regler nur in den Fällen 1 und 4.

Die Sollwertfolge bzw. Störkompensation setzt voraus, dass der Regelkreis stabil ist. Dies wird bei Verwendung des I-Reglers einige Schwierigkeiten mit sich bringen, weil die offene Kette den Faktor  $\frac{1}{s^2}$  enthält, der über den gesamten Frequenzbereich eine Phasenverschiebung von  $-180^\circ$  mit sich bringt, zu der die Phasenverschiebung der Verzögerungsglieder hinzukommt. Es müssen also zusätzliche dynamische Elemente in den Regler eingebracht werden, um die Phase in der Nähe der Schnittfrequenz soweit anzuheben, dass die Stabilität des Regelkreises gesichert ist.

Selbst wenn man den Regelkreis auf diese Weise stabil macht, ist es fraglich, ob man den hier betrachteten Regelkreis mit doppelt integrierender offener Kette dynamisch schnell genug machen kann. In Aufgabe 13.6 wird deshalb untersucht, wie man das Regelungsproblem für den Störfall 3 durch eine Kaskadenregelung vereinfachen kann, bei der ein unterlagerter

Regler zunächst die Geschwindigkeit  $v_2$  kontrolliert und ein überlagerter Regler den Abstand auf den geforderten Wert bringt.

### Aufgabe 7.8 Analyse des Fliehkraftreglers von Dampfmaschinen

Um die Sollwertfolge analysieren zu können, stellt man die im betrachteten Regelkreis vorhandenen Wirkungsketten in einem Blockschatzbild dar und bestimmt die wichtigsten Eigenschaften der auftretenden Blöcke. Abbildung A.46 zeigt, dass der Fliehkraftregler den Klappenwinkel  $\beta$  in Abhängigkeit von der Drehzahl  $n$  festlegt. Es findet kein expliziter Sollwertvergleich statt, weil die Solldrehzahl bei dieser Regelung durch die Position der Massen indirekt vorgegeben wird. Das im Regelkreis üblicherweise hervorgehobene Minuszeichen der Rückführung ist im Fliehkraftregler realisiert, denn eine Erhöhung von  $n$  führt auf eine Verkleinerung von  $\beta$ . Der Klappenwinkel  $\beta$  bestimmt die dem Kolben zugeführte Dampfmenge und damit das Drehmoment. Dieses wird als Signal im Blockschatzbild dargestellt, weil die angeschlossenen Maschinen ein Lastmoment erzeugen, das von diesem Signal abzuziehen ist. Die Differenz aus Antriebsmoment und Lastmoment bestimmt die Drehzahl  $n$ .

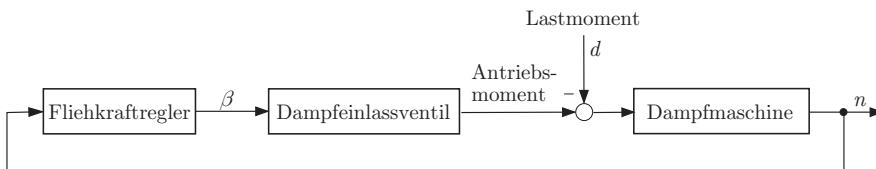


Abb. A.46: Regelkreis der Dampfmaschine

Der Fliehkraftregler hat ein proportionales Verhalten, denn eine bleibende Veränderung von  $n$  führt zu einer bleibenden Veränderung von  $\beta$ . Gleichermaßen gilt für das Klappenventil. Die Dampfmaschine hat integrales Verhalten, denn eine bleibende Erhöhung der Differenz von Antriebs- und Lastmoment führt auf einen rampenförmigen Anstieg der Drehzahl (bis die hier vernachlässigten Reibungskräfte dieses Moment kompensieren).

Es gibt zwei Wege um festzustellen, ob bei diesem Regelkreis eine bleibende Regelabweichung auftritt. Beim ersten Weg transformiert man den Regelkreis in die Standardform, bei der die Störung am Ausgang der Regelstrecke angreift. Dabei wird aus der hier als sprungförmig angenommenen Last  $\bar{d}\sigma(t)$  eine rampenförmige Störung  $\bar{d}t$ . Das Störmodell ist also ein Doppelintegrator  $\frac{1}{s^2}$ , den der Regelkreis als inneres Modell besitzen muss. Da die Dampfmaschine nur eine einfache Integration bewirkt, muss der Regler I-Verhalten haben, um die Störung restlos ausgleichen zu können. Der Fliehkraftregler hat aber proportionales Verhalten. Folglich tritt eine bleibende Regelabweichung auf.

Alternativ zu dieser Argumentation kann man ausrechnen, dass eine bleibende Regelabweichung auftritt. Aus dem Blockschatzbild liest man für die Störübertragungsfunktion die Beziehung

$$G_d(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{-G_D(s)}{1 - G_D(s)G_V(s)K(s)}$$

ab, wobei  $K(s)$  die Übertragungsfunktion des Fliehkraftreglers,  $G_V(s)$  die des Dampfeinlassventils und  $G_D(s)$  die der Dampfmaschine ist und das Minuszeichen im Nenner auftritt, weil

der geschlossene Kreis positiv rückgekoppelt ist (das Minuszeichen der Rückkopplung steckt in  $K(s)$ ). Dieses Modell gilt bekanntermassen für einen auf Null normierten Sollwert.  $N(s)$  ist also die Abweichung der Drehzahl vom Sollwert. Für sprungförmige Störung  $D(s) = \frac{\bar{d}}{s}$  erhält man für diese Drehzahlabweichung die Beziehung

$$N(s) = \frac{-G_D(s)}{1 - G_D(s)G_V(s)K(s)} \frac{\bar{d}}{s}$$

und daraus mit dem Grenzwertsatz der Laplacetransformation

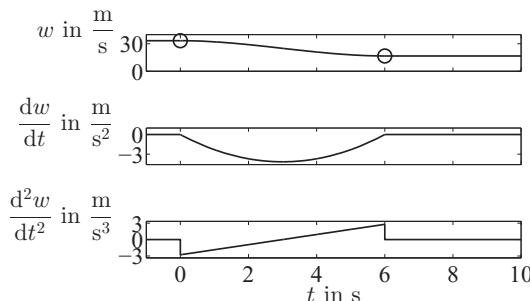
$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} n(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-G_D(s)}{1 - G_D(s)G_V(s)K(s)} \frac{\bar{d}}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-1}{\frac{1}{G_D(s)} - G_V(s)K(s)} \bar{d} \\ &= \frac{-1}{-G_V(0)K(0)} \bar{d} \neq 0, \end{aligned}$$

wobei  $G_V(0)$  und  $K(0)$  die statischen Verstärkungen des Dampfeinlassventils bzw. des Flieh-kraftreglers sind. Für die letzte Umformung wurde die Tatsache verwendet, dass die Dampfmaschine integrales Verhalten hat und  $G_D(s)$  für  $s \rightarrow 0$  unendlich gross wird. Die letzte Zeile zeigt, dass eine bleibende Regelabweichung auftritt. Beachtet man noch, dass  $G_V(0)$  positiv, aber  $K(0)$  negativ ist, so erkennt man auch, dass sich bei der Lasterhöhung ( $\bar{d} > 0$ ) die Drehzahl verkleinert, also  $n(\infty)$  negativ ist.

### Aufgabe 7.11 Abbremsen eines Fahrzeugs

Bei der Trajektorienplanung entsprechend Algorithmus 7.1 wird für die Solltrajektorie, auf der das Fahrzeug in sechs Sekunden auf die neue Geschwindigkeit abgebremst werden soll, ein Polynom dritter Ordnung angesetzt, da die Bremsbeschleunigung nicht stetig sein muss. Man erhält dabei die in Abb. A.47 (oben) gezeigte Solltrajektorie

$$w(t) = 0,154t^3 - 1,389t^2 + 33,33, \quad 0 \leq t \leq 6.$$



**Abb. A.47:** Solltrajektorie  $w_{[0,6]}$  und Ableitungen  $\dot{w}(t)$ ,  $\ddot{w}(t)$

Zum Entwurf der Vorsteuerung muss zunächst die E/A-Normalform des Modells ermittelt werden. Wegen

$$\mathbf{c}^T \mathbf{b} = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{b} = -9,96$$

gilt  $r = 2$  und die E/A-Normalform wird mit der Transformationsmatrix

$$\mathbf{T}_E^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6,96 & 1,88 \end{pmatrix}$$

erzeugt:

$$\Sigma_F : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_E(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -16,92 \end{pmatrix} \mathbf{x}_E(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -9,96 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = (1 \ 0) \mathbf{x}_E(t). \end{cases}$$

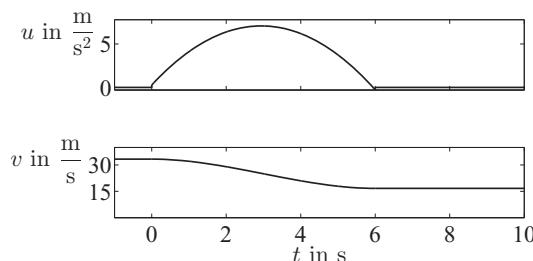
Damit erhält man für die Vorsteuerung (7.60) den Vektor

$$\mathbf{v}^T = -\frac{1}{-9,96} (0 \ -16,92 \ -1)$$

und

$$w_{[0,6]} = -0,786t^2 + 4,624t + 0,279$$

(Abb. A.48), die genau die gewünschte Trajektorie  $y_{[0,6]}$  erzeugt. Für  $t \geq 6$  verändert  $u(t) = 0$  die Geschwindigkeit nicht weiter.



**Abb. A.48:** Stellgröße  $u_{[0,6]}$  und Geschwindigkeit  $v(t)$

Für die gewählte Transitionszeit liegt  $u(t)$  unterhalb von  $6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ , was eine für trockenen Asphalt realisierbare Bremsbeschleunigung bedeutet.

### Aufgabe 8.3 Eigenschaften des Hurwitzkriteriums

- Für ein System zweiter Ordnung mit dem charakteristischen Polynom  $a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$  heißt die Hurwitzmatrix (8.19)

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Wenn die Vorzeichenbedingung (8.20) erfüllt ist

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0,$$

dann sind auch die Hauptabschnittsdeterminanten  $D_1 = a_1$  und  $D_2 = a_1 a_2$  positiv. Bei einem System zweiter Ordnung muss man also nur die Vorzeichenbedingung (8.20) des Hurwitzkriteriums überprüfen.

2. Wenn die Vorzeichenbedingung (8.20) erfüllt ist, so gilt

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 > 0, \quad \lambda \geq 0,$$

so dass es keine positiven reellen Nullstellen des Polynoms geben kann.

3. Aufgrund der Ergebnisse der ersten beiden Teilaufgaben muss man ein Polynom dritten Grades betrachten, das die reelle Nullstelle  $\lambda_1 < 0$  und die konjugiert-komplexen Nullstellen  $\lambda_{2/3} = \delta \pm j\omega$  hat. Das Polynom ist

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \\ &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda^2 - 2\delta\lambda + \delta^2 + \omega^2) \\ &= \lambda^3 + \underbrace{(-\lambda_1 - 2\delta)}_{a_2} \lambda^2 + (\delta^2 + \omega^2)\lambda - \lambda_1(\delta^2 + \omega^2) \end{aligned}$$

erfüllt die Vorzeichenbedingung, wenn der Koeffizient  $a_2$  positiv ist, also wenn

$$\delta < -\frac{\lambda_1}{2}$$

gilt. Obwohl die Vorzeichenbedingung erfüllt ist, hat das Polynom Nullstellen mit positivem Realteil, wenn  $0 < \delta < \frac{\lambda_1}{2}$  gilt.

#### Aufgabe 8.4 Stabilisierbarkeit eines invertierten Pendels

Aus der Übertragungsfunktion

$$G_0(s) = \frac{40 k_P}{s^2 - 29,43}$$

der offenen Kette erhält man die charakteristische Gleichung

$$\begin{aligned} 1 + \frac{40 k_P}{s^2 - 29,43} &= 0 \\ s^2 - 29,43 + 40 k_P &= 0. \end{aligned}$$

Da der Koeffizient  $a_1$  für alle Reglerverstärkungen  $k_P$  verschwindet, ist das Hurwitzkriterium verletzt und der Regelkreis also für keinen Parameterwert  $k_P$  E/A-stabil. Das Pendel ist folglich nicht durch einen P-Regler stabilisierbar.

#### Aufgabe 8.7 Stabilisierung einer instabilen Regelstrecke

Die charakteristische Gl. (8.25) heißt für den betrachteten Regelkreis

$$s^2 + 2s + 3(k_P - 1) = 0.$$

Da es sich um ein System zweiter Ordnung handelt, ist die erste Bedingung des Hurwitzkriteriums notwendig und hinreichend (vgl. Aufgabe 8.3). Stabilität ist genau dann gewährleistet, wenn

$$3(k_P - 1) \geq 0$$

gilt. Folglich ist der geschlossene Kreis für  $k_P > 1$  stabil. Für die Stabilisierung der instabilen Regelstrecke ist also ein Regler mit einer Mindestverstärkung notwendig.

Schreibt man die charakteristische Gleichung für den aus der Regelstrecke

$$G(s) = \frac{3}{(s - s_1)(s + 3)} \quad (\text{A.67})$$

und dem P-Regler bestehenden Regelkreis auf

$$s^2 + (3 - s_1)s + 3(k_P - s_1) = 0,$$

so ergeben sich aus dem Hurwitzkriterium die Bedingungen

$$s_1 < 3$$

$$k_P > s_1.$$

Diese Bedingungen zeigen, dass durch den P-Regler nur Regelstrecken der Form (A.67) stabilisiert werden können, für die der instabile Pol betragsmäßig den stabilen Pol nicht übersteigt. Für diese Regelstrecke braucht der Regler eine Mindestverstärkung, die von der Lage des instabilen Pols abhängt. Je weiter der Pol in der rechten komplexen Ebene auf der reellen Achse nach rechts wandert, umso größer muss die Reglerverstärkung sein.

Die Stabilität wird durch Gegenkopplung erreicht, denn durch das Reglertgesetz

$$\Sigma_R : \quad u(t) = -k_P y(t) + k_P w(t)$$

mit positiver Reglerverstärkung  $k_P$  wird das Signal  $y(t)$  mit negativem Vorzeichen auf die Stellgröße zurückgeführt.

**Diskussion.** Um zu erkennen, dass der Regler einer Abweichung der Regelgröße vom Sollwert 0 tatsächlich entgegenwirkt, muss man berücksichtigen, dass das gegebene instabile System auf eine positive Erregung ( $u(t) > 0$ ) mit einer positiven Regelgröße ( $y(t) > 0$ ) reagiert. Eine negative Stellgröße hat deshalb eine Verkleinerung der Regelgröße zur Folge. Da der Regler für  $y > 0$  mit einer Stellgröße  $u < 0$  reagiert, ist die Rückkopplung eine Gegenkopplung.

Würde die Regelstrecke an Stelle von  $G(s)$  die Übertragungsfunktion  $-G(s)$  besitzen, so würde ein P-Regler mit  $k_P > 0$  eine Mitkopplung erzeugen. In diesem Falle folgt aus dem Hurwitzkriterium als notwendige und hinreichende Stabilitätsbedingung  $k_P < -1$ , womit wiederum eine *Gegenkopplung* entsteht.

### Aufgabe 8.8 Stabilität von Regelkreisen mit I-Regler

Da die Regelstrecke stabil ist, haben alle Koeffizienten des Nennerpolynoms  $N(s)$  dasselbe Vorzeichen. Dieses Vorzeichen stimmt mit dem des Absolutgliedes  $N(0)$  überein.

Aus der charakteristischen Gl. (8.25) des Regelkreises erhält man nach Umstellung die Beziehung

$$s N(s) + k_I Z(s) = 0.$$

Damit sämtliche Lösungen dieser Gleichung negativen Realteil haben, müssen alle Koeffizienten des auf der linken Seite stehenden Polynoms dasselbe Vorzeichen haben. Da für ein technisch realisierbares System der Grad von  $Z(s)$  nicht größer als der Grad von  $N(s)$  ist und da alle Koeffizienten von  $N(s)$  dasselbe Vorzeichen haben, hat der Koeffizient der höchsten Potenz von  $s$  dasselbe Vorzeichen wie  $N(0)$ . Das Absolutglied hat dasselbe Vorzeichen wie  $k_I Z(0)$ . Notwendig für die Stabilität des Regelkreises ist deshalb, dass  $N(0)$  und  $k_I Z(0)$  dasselbe Vorzeichen haben müssen. Diese Bedingung kann auch als

$$\frac{Z(0)}{N(0)} = k_I k_s > 0 \quad (\text{A.68})$$

geschrieben werden, wobei  $k_s$  die statische Verstärkung der Regelstrecke bezeichnet. Die Bedingung (A.68) besagt, dass die durch den I-Regler erzeugte Rückkopplung eine Gegenkopplung sein muss (vgl. Diskussion der Aufgabe 8.7).

### Aufgabe 8.11 Stabilitätsanalyse einer Lautsprecheranlage

1. Abbildung A.49 zeigt das Blockschaltbild der Lautsprecheranlage. Die Signale stellen den Schalldruck am Mikrofon, das vom Mikrofon ausgegebene Signal, das verstärkte Signal sowie den vom Lautsprecher erzeugten Schalldruck dar. Im Gegensatz zum Standardregelkreis enthält diese Rückkopplung kein Minuszeichen.

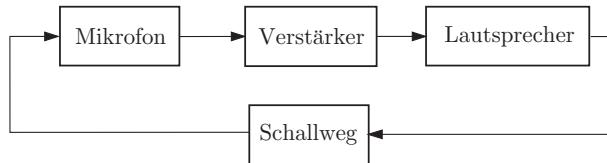


Abb. A.49: Blockschaltbild der Lautsprecheranlage

2. Die Übertragungsfunktion der offenen Kette setzt sich aus den Übertragungsfunktionen der vier Blöcke zusammen, die entsprechend der Aufgabenstellung als PT<sub>1</sub>- bzw. PT<sub>t</sub>-Glieder aufgefasst werden. Man erhält

$$G_0(s) = -\frac{k_M}{1 + \frac{s}{\omega_M}} \frac{k_V}{1 + \frac{s}{\omega_V}} \frac{k_L}{1 + \frac{s}{\omega_L}} k_{WE} e^{-sT_t}$$

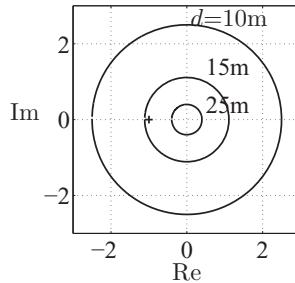
mit

$$k_W = \frac{k_{\frac{1}{2}}}{d^2} \quad \text{und} \quad T_t = \frac{d}{v_S},$$

wobei das Minuszeichen eingefügt werden muss, weil die Rückkopplungsschaltung die für Regelkreise typische Vorzeichenumkehr nicht enthält. Durch  $k_W$  wird die quadratische Abnahme des Schalldrucks gegenüber der Entfernung vom Lautsprecher und durch  $T_t$  die Totzeit für die Schallausbreitung berücksichtigt. Für den Proportionalitätsfaktor gilt

$$k_{\frac{1}{2}} = \frac{25 \text{ m}^2}{2} = 12,5 \text{ m}^2.$$

3. Die offene Kette ist stabil. Entsprechend dem Nyquistkriterium darf die Ortskurve von  $G_0(j\omega)$  den Punkt  $-1$  nicht umschließen.



**Abb. A.50:** Ortskurve der offenen Kette der Lautsprecheranlage für unterschiedliche Mikrofon-Lautsprecher-Entfernungen

Abbildung A.50 zeigt die Ortskurven für unterschiedliche Entfernungen  $d$  über den für die Stabilitätsanalyse bestimmenden Frequenzbereich. Für höhere Frequenzen nähern sich alle Ortskurven in Form einer Spirale dem Ursprung der komplexen Ebene, was in der Abbildung weggelassen ist. Offenbar erfüllt das System für einen Mikrofon-Lautsprecher-Abstand von 25 Metern das Stabilitätskriterium, während es für Entfernungen kleiner als etwa  $d = 15$  instabil ist.

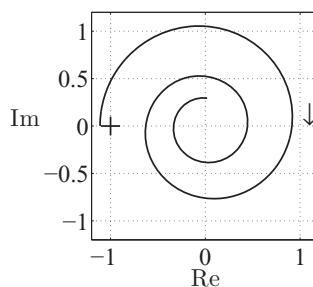
4. Bei der Telefon-Radio-Anordnung hat die offene Kette kleinere Grenzfrequenzen, der Proportionalitätsfaktor

$$k_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2},$$

die Verstärkung der offenen Kette und die betrachteten Entfernungen sind kleiner. Das Stabilitätskriterium ist dasselbe, die Ortskurve hat jedoch eine andere Form, wie Abb. A.51 zeigt. Das System ist für die angegebene Entfernung instabil, denn die Ortskurve umschlingt den Punkt  $-1$ . Stellen Sie sich also niemals zu nahe an Ihr Radio, wenn Sie mit dem eingeschalteten Sender telefonieren, weil sonst alle Rundfunkteilnehmer nur einen Pfeifton hören (sofern der Sender nicht eine „Sicherheitsschaltung“ eingebaut hat).

5. Das Prinzip der Stabilitätsprüfung ist bei beiden Anordnungen dasselbe. In beiden Fällen muss die mit wachsender Entfernung abnehmende Verstärkung  $k_w$  so klein sein, dass die statische Verstärkung der offenen Kette kleiner als eins ist. Die Phasenverschiebung spielt eine untergeordnete Rolle. Um einen Pfeifton zu verhindern, muss man also in jedem Fall den Signalweg vom Lautsprecher zum Mikrofon dämpfen.

**Anmerkung.** Da man bei Freisprechanlagen oder Videokonferenzen den Signalweg vom Lautsprecher zum Mikrofon (Echopfad) nicht beeinflussen kann, arbeitet man dort mit einer akustischen Echounterdrückung, bei der das Lautsprechersignal über ein Filter mit negativem



**Abb. A.51:** Ortskurve der Telefon-Radio-Anordnung für  $d = 0.3$

Vorzeichen hinter dem Mikrofon eingekoppelt wird, so dass es dort das über den Echopfad kommende Mikrofonsignal kompensiert.

### Aufgabe 8.13 Lageregelung von Raumflugkörpern

Die offene Kette besteht aus einem I-Regler, zwei  $T_t$ -Gliedern sowie einem  $PT_1$ -Glied:

$$G_0(s) = \frac{1}{T_1 s (T_2 s + 1)} e^{-2sT_1}.$$

Sie ist stabil, so dass die Stabilität des Regelkreises genau dann gesichert ist, wenn der Punkt  $-1$  nicht von der Ortskurve umschlossen wird bzw. wenn der Phasenrand positiv ist. Die Phasenverschiebung der offenen Kette und der Phasenrand berechnen sich aus

$$\begin{aligned}\phi &= -90^\circ - \arctan \omega_n T - 2\omega_n T_t \\ \varPhi_R &= 90^\circ - \arctan \omega_n T - 2\omega_n T_t,\end{aligned}$$

wobei  $\omega_n$  die Schnittfrequenz bezeichnet. Der zweite Summand liefert höchstens  $90^\circ$ , der letzte Summand steigt linear mit der Schnittfrequenz  $\omega_n$ . Aus diesem Grund muss die Schnittfrequenz sehr klein sein, wenn ein positiver Phasenrand entstehen soll.

Da das Totzeitglied keinen Einfluss auf die Amplitude  $|G_0(j\omega)|$  und folglich keinen Einfluss auf die Schnittfrequenz  $\omega_n$  hat, braucht man sich für die Diskussion der Stabilität nur den Amplitudengang eines  $IT_1$ -Gliedes aufzuzeichnen (vgl. Abb. 6.45 auf S. 306). Da in dem in der Aufgabenstellung angeführten Beispiel die Zeitkonstante  $T$  des  $PT_1$ -Gliedes in derselben Größenordnung liegt wie die doppelte Totzeit, trägt das Totzeitglied in der Nähe der Knickfrequenz  $\frac{1}{T}$  erheblich zur Phasenverschiebung der offenen Kette bei. Man muss deshalb die Nachstellzeit  $T_1$  sehr groß wählen und damit den Amplitudengang im Bodediagramm weit nach unten schieben, um eine niedrige Schnittfrequenz zu erhalten und die Stabilität des Regelkreises zu gewährleisten. Damit verbunden ist eine schlechte Dynamik, d. h., der Raumflugkörper bzw. Weltraumroboter erreicht nur sehr langsam einen angestrebten Sollwert.

**Diskussion.** Dieses Stabilitätsproblem wird übrigens noch größer, wenn der Raumflugkörper beispielsweise ein Satellit ist, dessen Lage durch kleine Impulse eines Düsenantriebs geregelt werden soll. Dann ist die Stellgröße eine Kraft, aus der die Lage durch zweimalige Integration hervorgeht. Die Regelstrecke hat folglich  $I_2$ -Verhalten. Für diesen Fall zeigen die oben

beschriebenen Überlegungen, dass die Lageregelung praktisch nicht von der Erde aus durchführbar ist.

Einen Ausweg erreicht man durch Installation des Regelkreises vor Ort im Flugkörper. Dann entfallen die Totzeiten der Signalübertragung. Der Mensch muss dann das Experiment nicht mehr Schritt für Schritt steuern, sondern nur noch Sollwerte vorgeben, die durch den schnelleren Regelkreis realisiert werden. Der Flugkörper bzw. Weltraumroboter erhält mehr Autonomie; der Mensch tritt aus dem Regelkreis heraus und übernimmt Überwachungsfunktionen. Dadurch tritt die Übertragungstotzeit nur dann in Erscheinung, wenn ein neuer Sollwert zum Flugkörper gesendet wird.

#### Aufgabe 8.14 Phasenrandkriterium bei D-Ketten

Wie Abb. A.52 zeigt, umschlingt die Ortskurve der offenen Kette (8.40) den kritischen Punkt  $-1$ . Da die offene Kette stabil ist, ist der Regelkreis folglich instabil.

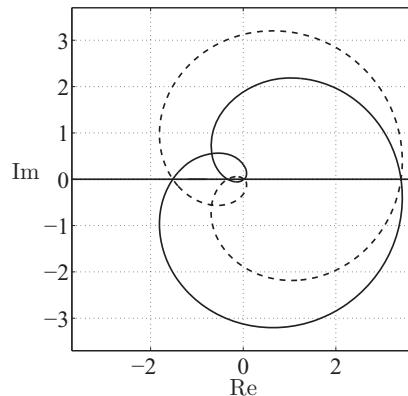


Abb. A.52: Ortskurve der D-Kette

Mit dem Bodediagramm in Abb. A.53 erhält man dasselbe Ergebnis. Durch den dreifachen D-Anteil hat der Amplitudengang im niederfrequenten Bereich eine Neigung von  $+60 \text{ dB/Dekade}$ , wozu eine Phasenverschiebung von  $+270^\circ$  gehört, und im hochfrequenten Bereich die Neigung von  $-100 \text{ dB/Dekade}$  mit der Phase von  $-450^\circ$ . Die offene Kette hat einen negativen Phasenrand, so dass der Regelkreis instabil ist.

Senkt man den Amplitudengang durch Verkleinerung der Reglerverstärkung ab, so dass beispielsweise im Zähler von  $G_0$  jetzt  $0,0001s^3$  steht, so entsteht ein positiver Phasenrand. Der Regelkreis ist mit der verkleinerten Verstärkung stabil.

Das Beispiel zeigt, dass man bei offenen Ketten, deren Amplitudengang die 0 dB-Achse mehrfach schneidet, auch einen Phasenrand und einen Amplitudenrand bestimmen kann, bei- de Größen jedoch besser an der Ortskurve als am Bodediagramm abgelesen werden können.

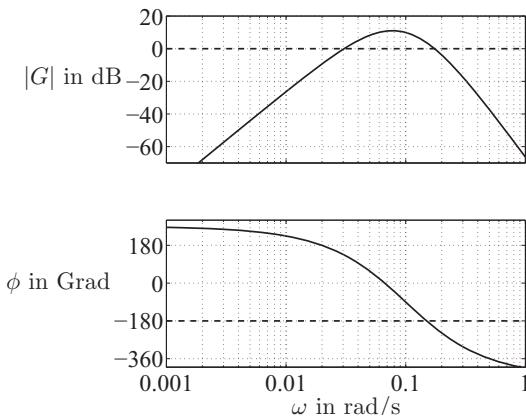


Abb. A.53: Bodediagramm der D-Kette

**Aufgabe 8.19 Stabilitätseigenschaften von Drehrohrofen und Klinkerkühler**

1. Abbildung A.54 zeigt das Blockschaltbild, in dem gegenüber Abb. 3.4 alle als konstant angenommenen Signale unberücksichtigt bleiben. Als Übertragungsglieder wurden entsprechend der Aufgabenstellung für die Brenntemperaturregelung ein DT<sub>1</sub>-Glied  $G_B(s)$ , für die Veränderung des Klinkerenergiestromes in Abhängigkeit von der Brenntemperatur ein Übertragungsglied mit der Übertragungsfunktion  $G_M(s)$  aus Gl. (8.50) und für den Kühler ein PT<sub>1</sub>-Glied  $G_K(s)$  eingesetzt.

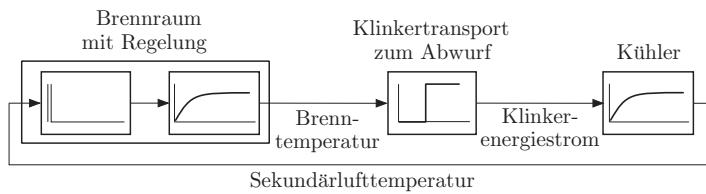


Abb. A.54: Vereinfachtes Blockschaltbild der Anordnung Drehrohrofen - Klinkerkühler

2. Die Rückkopplung erfolgt bei diesem System – im Gegensatz zu einem Regelkreis – nicht mit einer Vorzeichenumkehr. Es wird deshalb mit

$$G_0(s) = -G_B(s) G_M(s) G_K(s)$$

gerechnet. Mit den in der Aufgabenstellung genannten Parametern erhält man für die Übertragungsfunktionen

$$G_B(s) = \frac{3s}{3s + 1}$$

$$G_K(s) = \frac{\frac{40}{15}}{2s + 1}.$$

Die Zeit wird in Minuten und die Temperaturänderungen in Kelvin gemessen.  $G_B$  ist ein DT<sub>1</sub>-Glied der Form (6.121), bei dem  $T_D = T = 3$  min gesetzt wurde, weil sich eine Erhöhung der Sekundärlufttemperatur im ersten Moment in einer betragsmäßig gleichgroßen Erhöhung der Brenntemperatur äußert und weil der Regler diesen Fehler mit einer Zeitkonstante von 3 Minuten abbaut. Für den Kühler ergibt sich die Zeitkonstante von 2 Minuten, wenn die in der Aufgabenstellung genannte Zeit als „95%-Zeit“ angesetzt wird.

### Programm A.1 Stabilitätseigenschaften von Drehrohrofen und Klinkerkühler (Aufgabe 8.19)

<pre> » zb = [3 0]; » nb = [3 1]; » Brennraum = tf(zb, nb); » zm = [-2.5 0 0]; » nm = [1 0.5 0.08 0.004]; » Massenstrom = tf(zm, nm); » zk = 40/15; » nk = [2 1]; » Kuehler = tf(zk, nk); » Ofen = series(Massenstrom, Brennraum); » offeneKette = series(Ofen, Kuehler);  » nyquist(-offeneKette);</pre>	<p><b>Modell der offenen Kette</b> bestehend aus Brennraum, Massenstrom und Ofen</p> <p><b>Analyse der offenen Kette</b> ...erzeugt Abb. A.55 (links)</p>
<pre> » Kreis = feedback(Kuehler, Ofen, 1); » Time = [0:0.01:200]; » impulse(Kreis, Time);</pre>	<p><b>Kühlerverhalten bei impulsförmiger Störung</b></p> <p>...erzeugt Abb. A.56 (oben)</p>
<pre> » zkr = [4 0]; » nkr = [8 6 1]; » gerKuehler = tf(zkr, nkr); » offeneKette2 = series(Ofen, gerKuehler); » nyquist(-offeneKette2);</pre>	<p><b>Wiederholung der Analyse mit geregeltem Kühler</b></p> <p>DT<sub>2</sub>-Approximation des geregelten Kühlers</p> <p>...erzeugt Abb. A.55 (rechts)</p>
<pre> » Kreis2 = feedback(gerKuehler, Ofen, 1); » impulse(Kreis2, Time);</pre>	<p>...erzeugt Abb. A.56 (unten)</p>

3. Die Übertragungsfunktionen werden in MATLAB durch

```

» zb = [3 0];
» nb = [3 1];
» Brennraum = tf(zb, nb);
```

```

» zm = [-2.5 0 0];
» nm = [1 0.5 0.08 0.004];
» Massenstrom = tf(zm, nm);
» zk = 40/15;
» nk = [2 1];
» Kuehler = tf(zk, nk);

```

eingegeben und durch

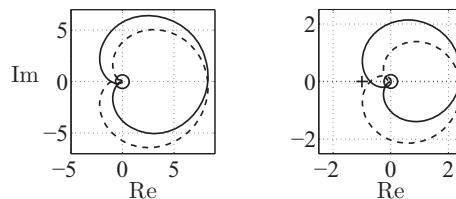
```

» Ofen = series(Massenstrom, Brennraum);
» offeneKette = series(Ofen, Kuehler);

```

zur Übertragungsfunktion des Ofens bzw. der offenen Kette zusammengefasst. Die in Abb. A.55 (links) gezeigte Ortskurve erhält man durch den Funktionsaufruf

```
» nyquist(-offeneKette);
```



**Abb. A.55:** Ortskurve der Anordnung Drehrohrofen – Klinkerkühler

Die Ortskurve beginnt und endet im Ursprung der komplexen Ebene, weil die offene Kette D-Verhalten hat. Sie umschlingt den Punkt  $-1$ . Folglich ist der geschlossene Kreis instabil. Die gezeigte Funktion ist übrigens wenig von den verwendeten Parametern abhängig, die im Anlagenbetrieb beobachteten Schwingungen sind also für derartige Anlagen typisch.

- Der geschlossene Kreis wird jetzt bezüglich einer am Eingang des Kühlers auftretenden impulsförmigen Störung untersucht. Für die Übertragungsfunktion von der Störung zur Sekundärlufttemperatur  $\theta$  erhält man

$$G_g(s) = \frac{G_K(s)}{1 - G_B(s)G_M(s)G_K(s)},$$

was man entsprechend

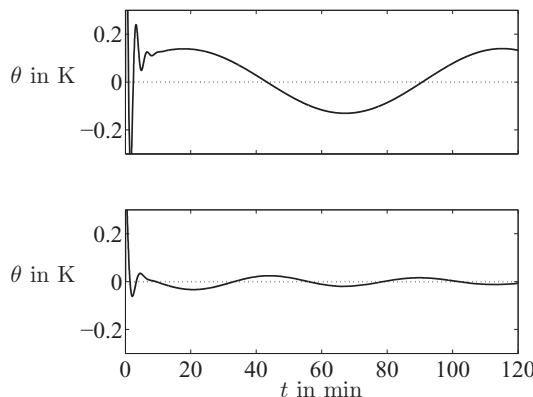
```
» Kreis = feedback(Kuehler, Ofen, 1);
```

berechnen kann. Die Systemantwort auf eine impulsförmige Erregung berechnet man durch

```

» Time = [0:0.01:200];
» impulse(Kreis, Time);

```



**Abb. A.56:** Sekundärlufttemperatur bei impulsförmiger Erregung (oben: ungeregt; unten: mit Sekundärlufttemperaturregelung)

wobei die explizite Angabe der Zeitachse Time notwendig ist, weil die für die Pendelungen verantwortlichen Zeitkonstanten sehr groß sind und sich die automatische Skalierung an den wesentlich kleineren Zeitkonstanten orientiert. Abb. A.56 (oben) zeigt das Ergebnis. Das System schwingt nach Abklingen des Übergangsvorganges mit einer Periodendauer von etwa 1 Stunde.

5. Um die Schwingungen zu dämpfen, muss die Regelung der Sekundärlufttemperatur im Kühler dafür sorgen, dass der Amplitudengang der Reihenschaltung von Drehrohrofen und Klinkerkühler kleiner wird, so dass die Ortskurve den kritischen Punkt nicht mehr umschlingt. Wie Abb. A.55 (rechts) zeigt, wird die Amplitude der Ortskurve durch die Regelung deutlich verkleinert. Der kritische Punkt ist nicht mehr umschlossen und die Anlage arbeitet stabil. Abbildung A.56 (unten) zeigt den Verlauf der Sekundärlufttemperatur bei impulsförmiger Erregung der Anlage. Die für die Berechnung der Ortskurve und die Darstellung des Verhaltens der Anlage notwendigen MATLAB-Befehle sind im Programm A.1 zusammengestellt.

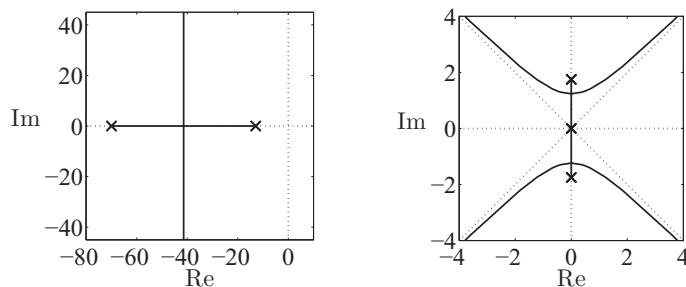
#### Aufgabe 10.4 Wurzelortskurve für P-geregelte Systeme

1. Der Motor hat zwei Pole bei

$$s_1 = -69,95 \quad \text{und} \quad s_2 = -12,87$$

und keine Nullstellen. Deshalb besteht die Wurzelortskurve aus zwei Ästen, die in den beiden Polen beginnen und deren Asymptote genau in der Mitte zwischen den beiden Polen parallel zur Imaginärachse verläuft (Abb. A.57 (links)).

Für jede positive Reglerverstärkung ist der Regelkreis stabil. Für kleine Reglerverstärkung ist der geregelte Motor stark gedämpft, denn er hat zwei reelle Pole. Die Reglerverstärkung  $k_{1/2}$ , für die die beiden Pole zusammenfallen, kann folgendermaßen berechnet



**Abb. A.57:** Wurzelortskurve des P-geregelten Gleichstrommotors (links) und der P-geregelten Verladebrücke (rechts)

werden. Man muss zunächst die Übertragungsfunktion der offenen Kette, die aus dem Motor mit der Übertragungsfunktion (A.65) und einem P-Regler besteht, in die Form (10.14) bringen:

$$\begin{aligned} k\hat{G}_0 &= k_P \frac{0,0482}{0,0011s^2 + 0,0920s + 1} \\ &= \frac{k_P \cdot 0,0482}{0,0011} \frac{1}{s^2 + 82,82s + 900} \\ &= k \frac{1}{s^2 + 82,82s + 900}. \end{aligned}$$

Folglich ergibt sich die Reglerverstärkung  $k_P$  aus dem bei der Konstruktion der Wurzelortskurve verwendeten Faktor  $k$  nach der Formel

$$k_P = k \frac{0,0011}{0,0482}.$$

Jetzt wird  $k$  aus der Wurzelortskurve bestimmt. Die Asymptoten schneiden bei

$$\frac{s_1 + s_2}{2} = 41,41$$

die reelle Achse. Von diesem Punkt liegen die beiden Pole um

$$\frac{s_1 - s_2}{2} = 28,54$$

entfernt. Deshalb ergibt sich die Verstärkung  $k_{1/2}$  entsprechend Gl. (10.17) aus

$$k_{1/2} = 28,54 \cdot 28,54 = 814,5$$

und die dafür notwendige Reglerverstärkung aus

$$k_P = 814,5 \frac{0,0011}{0,0482} = 18,59.$$

Das heißt, dass der Regelkreis bei dieser Reglerverstärkung zwei reelle Pole bei  $-41,41$  hat. Für jede größere Reglerverstärkung fängt der Regelkreis an zu schwingen, und zwar umso weniger gedämpft, je größer die Reglerverstärkung ist.

2. Die Verladebrücke (10.32) hat vier Pole:

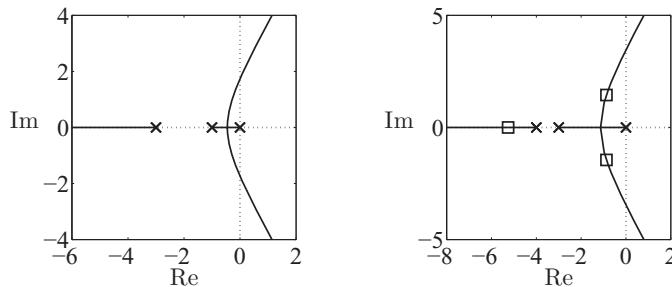
$$\begin{aligned}s_{1/2} &= 0 \\ s_{3/4} &= \pm j1,75.\end{aligned}$$

Deshalb beginnen die vier Äste der Wurzelortskurve in zwei Polen im Ursprung der komplexen Ebene und zwei Polen auf der Imaginärachse. Sie nähern sich für große Reglerverstärkung vier Asymptoten an, die sich im Ursprung der komplexen Ebene schneiden.

Da zwei Pole im Ursprung liegen, erfüllt kein Punkt auf der reellen Achse außer dem Ursprung die auf S. 490 angegebene Bedingung. Daraus ergibt sich, dass sich die im Ursprung der komplexen Ebene beginnenden Äste der Wurzelortskurve zunächst entlang der Imaginärachse bewegen. Dort treffen sie die von den beiden anderen Polen ausgehenden Äste, um sich anschließend in zwei konjugiert komplexe Äste aufzuteilen und den Asymptoten anzunähern (Abb. A.57 (rechts)).

#### Aufgabe 10.6 Reglerentwurf mit Hilfe der Wurzelortskurve

1. Der prinzipielle Verlauf der Wurzelortskurve lässt sich anhand der angegebenen Regeln leicht aufzeichnen. Da die offene Kette drei Pole und keine Nullstelle besitzt, ist die Wurzelortskurve durch die Asymptoten bestimmt, die für einen Polüberschuss von drei entstehen. Der „Schwerpunkt“ der Pole liegt in der linken Halbebene (Abb. A.58 (links)). Folglich gibt es Reglereinstellungen, für die der Regelkreis stabil ist.



**Abb. A.58:** Wurzelortskurve für das P-geregelte System (links) und für den Regelkreis mit dynamischem Regler (rechts, Pole  $\square$  für  $k = 15$ )

2. Sollwertfolge wird für P-Regler erreicht, da die Regelstrecke integrales Verhalten besitzt. Der Regler braucht also keine eigene Dynamik zu besitzen, wenn man allein Stabilität und Sollwertfolge als Güteforderungen betrachtet.
3. Um das geforderte Überschwingen zu erreichen, müssen die dominierenden Pole innerhalb eines Sektors der linken Halbebene liegen, für die der Winkel  $\phi$  kleiner als  $60^\circ$  ist. Die Beruhigungszeit fordert, dass die Pole links einer Parallelen zur Imaginärachse durch den Punkt  $-0,75$  liegen.

Diese Güteforderungen können durch einen P-Regler nicht erfüllt werden, wie man aus dem linken Teil von Abb. A.58 erkennt, wenn man bedenkt, dass der mittlere Pol bei  $-1$  liegt. Zur Erfüllung der Dynamikforderungen ist deshalb eine Reglerdynamik erforderlich.

Wählt man den Regler

$$K(s) = k \frac{s+1}{s+4},$$

mit dem der Regelstreckenpol bei  $-1$  kompensiert wird, so verschieben sich die Asymptoten nach links. Wie Abb. A.58 (rechts) zeigt, kann man eine Reglerverstärkung wählen, für die die gewünschte Pollage erreicht wird. In Abb. A.59 ist die Führungsübergangsfunktion für  $k = 15$  dargestellt. Die Güteforderungen an den Regelkreis sind erfüllt.

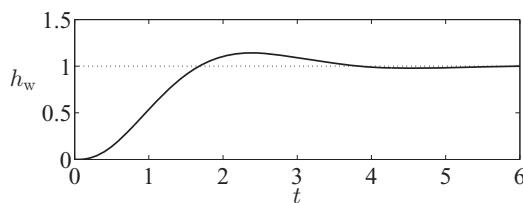


Abb. A.59: Führungsübergangsfunktion des Regelkreises

### Aufgabe 10.8 Steuerung eines Schiffes

1. Die Regelung betrifft die Drehbewegung des Schiffes um seine senkrechte Achse, wobei  $y$  der Drehwinkel ist. Die rotatorische Bewegung kann durch

$$\ddot{y}(t) = J f(t)$$

beschrieben werden, wenn man, wie bei langsamem Drehungen möglich, den Widerstand durch das Wasser vernachlässigt. Diese Gleichung besagt, dass die Winkelbeschleunigung proportional zu der vom Ruder ausgeübten Kraft  $f(t)$  ist.  $J$  ist das Trägheitsmoment des Schiffes bezüglich der genannten Drehachse. Die Kraft  $f(t)$  ist abhängig von der Winkelstellung  $u(t)$  des Ruders, wobei hier für kleine Ruderausschläge  $u(t)$  eine proportionale Abhängigkeit angenommen wird

$$f(t) = k_r u(t),$$

in der  $k_r$  ein Proportionalitätsfaktor ist. Damit erhält man für das Schiff als Regelstrecke die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{k_r J}{s^2}.$$

2. Proportionales Verhalten des Kapitäns kann durch

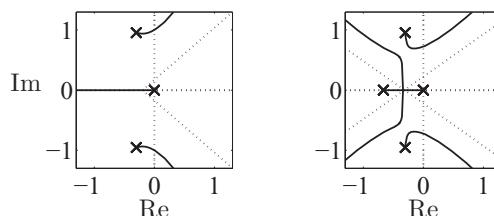
$$u(t) = -k_P y(t)$$

beschrieben werden. Der geschlossene Kreis besteht folglich aus einem  $I_2$ -Glied und einer P-Rückführung. Die offene Kette hat zwei Pole im Koordinatenursprung der komplexen Ebene und keine Nullstelle. Die Wurzelortskurve verläuft entlang der Imaginärachse. Folglich entsteht für beliebige Reglerverstärkungen ein rein imaginäres Polpaar für den Regelkreis. Der Kurs des Schiffes schlängelt sich sinusförmig um den vorgegebenen Kurs.

3. Es muss ein Regler eingesetzt werden, durch den die Wurzelortskurve in die linke komplexe Halbebene „verbogen“ wird. Dies kann durch Einführung einer Nullstelle in der linken Halbebene erfolgen. Der Kapitän muss also wie ein PD-Regler nicht nur auf die aktuelle Kursabweichung, sondern auch auf die Veränderung  $\dot{y}$  der Kursabweichung reagieren. Der Regelkreis hat dann zwei Pole mit negativem Realteil, so dass die Eigenbewegung abklingt, das Schiff also auf den vorgegebenen Kurs gesteuert wird.

### Aufgabe 10.9 Lageregelung hydraulischer Ruderstellsysteme

Für ein  $IT_2$ -Glied erhält man die im linken Teil der Abb. A.60 dargestellte Wurzelortskurve, die zeigt, dass der Regelkreis schon bei kleiner Reglerverstärkung instabil wird und die Dämpfung des Regelkreises schlechter als die der Regelstrecke ist. Die in der Abbildung eingetragenen Asymptoten zeigen, warum die Wurzelortskurve wie angegeben verlaufen.

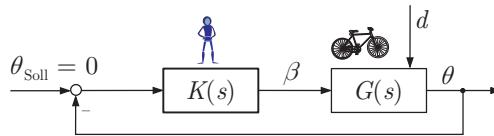


**Abb. A.60:** Wurzelortskurve des Hydraulikantriebs mit P-Regler (links) und mit  $PT_1$ -Regler (rechts)

Verwendet man eine  $PT_1$ -Rückführung, so ändert sich die Wurzelortskurve durch den neu eingeführten Pol, der auch die Asymptoten beeinflusst. Wie die rechte Abbildung zeigt, verbessert sich die Dämpfung des Regelkreises für kleine Reglerverstärkungen. Gleichzeitig erhöht sich die kritische Verstärkung, bei der der Regelkreis instabil wird. In dem gewählten Beispiel, bei dem die Zeitkonstante des  $PT_1$ -Gliedes auf  $T = 1,5$  s festgesetzt wurde, stieg die kritische Verstärkung von 0,6 auf 0,7. Natürlich wird man den Regelkreis nicht bei diesen kritischen Verstärkungen betreiben, aber der Spielraum für eine zweckmäßige Wahl der Reglerverstärkung steigt. Die größere Reglerverstärkung hat die gewünschte Wirkung auf die Laststeifigkeit, die indirekt proportional zur bleibenden Regelabweichung ist (vgl. Gl. (7.33) auf S. 362).

**Aufgabe 10.11 Stabilisierung eines Fahrrades**

1. Für den Balancievorgang wirkt das Fahrrad als Regelstrecke mit der Stellgröße  $\beta(t)$  und der Regelgröße  $\theta(t)$  (Abb. A.61). Die Störung  $d$  repräsentiert Kräfte, die das Fahrrad aus der Gleichgewichtslage  $\theta = 0$  bringen (Wind, Fahrbahnunebenheiten usw.).

**Abb. A.61:** Fahrrad als Regelstrecke

2. Das lineare Modell (10.37) führt auf die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\frac{mahv_0}{bJ_p}s + \frac{mhv_0^2}{bJ_p}}{s^2 - \frac{mgh}{J_p}} = k \frac{s - s_0}{(s - s_1)(s - s_2)} \quad (\text{A.69})$$

mit dem Parameter  $k$ , der Nullstelle  $s_0$  und den beiden Polen  $s_{1/2}$ :

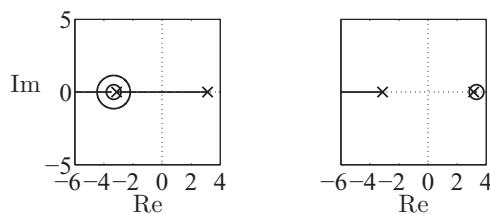
$$k = \frac{mahv_0}{bJ_p} \quad (\text{A.70})$$

$$s_0 = -\frac{v_0}{a} \quad (\text{A.71})$$

$$s_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{mgh}{J_p}}. \quad (\text{A.72})$$

Die Nullstelle ist negativ, die Regelstrecke also minimalphasig.

3. Wie die Wurzelortskurve im linken Teil von Abb. A.62 zeigt, ist der Regelkreis ab einer bestimmten Mindestverstärkung des Reglers stabil.

**Abb. A.62:** Wurzelortskurve für P-Regelung (links: Vorderradlenkung, rechts: Hinterradlenkung)

Aus der charakteristischen Gleichung  $1 + G(s)K(s) = 0$  des Regelkreises folgt unter Beachtung von  $s_1 = -s_2$  die Beziehung

$$s^2 + kk_P s + (-s_1^2 - kk_P s_0) = 0$$

und daraus als notwendige und hinreichende Stabilitätsbedingungen

$$\begin{aligned} kk_P &> 0 \\ -s_1^2 - kk_P s_0 &> 0 \end{aligned}$$

und nach Umrechnung

$$k_P > \frac{bg}{v_0^2}.$$

Man kann das Stabilitätskriterium auch von rechts nach links lesen: Wenn der Regler eine bestimmte Verstärkung  $k_P$  hat, dann ist das Fahrrad für Vorwärtsbewegungen mit der Geschwindigkeit

$$v_0 > \sqrt{\frac{bg}{k_P}}$$

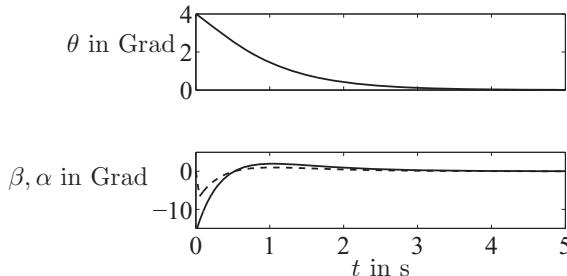
stabil. Die rechte Seite dieser Ungleichung gibt eine Mindestgeschwindigkeit an. Je größer  $k_P$  ist, desto kleiner ist diese Mindestgeschwindigkeit, für die das Fahrrad stabil fährt. Das entspricht der Erfahrung: Je größer die Geschwindigkeit ist, umso kleinere Lenkausschläge stabilisieren das Rad.

Für die in der Tabelle angegebenen Parameter erhält man

$$k_P > \frac{bg}{v_0^2} = 2,94.$$

Das heißt, wenn man den Lenkwinkel  $\beta$  mindestens 2,94 mal so groß wählt wie den aktuellen Neigungswinkel  $\theta$ , balanciert man das Fahrrad bei der angegebenen Geschwindigkeit  $v_0 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Abbildung A.63 zeigt das Verhalten des geschlossenen Kreises für die Reglerverstärkung

$$k_P = 4.$$



**Abb. A.63:** Verhalten des geregelten Fahrrades mit Vorderradlenkung

#### 4. Das lineare Modell mit dem veränderten Vorzeichen führt auf die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\frac{mahv_0}{bJ_p}s - \frac{mhv_0^2}{bJ_p}}{s^2 - \frac{mgh}{J_p}} = k \frac{s - s_0}{(s - s_1)(s - s_2)}, \quad (\text{A.73})$$

die sich nur im Zähler durch ein Minuszeichen von  $G(s)$  in Gl. (A.69) unterscheidet. Die Parameter  $s_1$  und  $s_2$  sind dieselben wie in Gl. (A.72), die Nullstelle heißt jetzt jedoch

$$s_0 = \frac{v_0}{a}. \quad (\text{A.74})$$

Die Regelstrecke hat eine positive Nullstelle, ist also ein nichtminimalphasiges System. Dies hat entscheidende Konsequenzen für die Stabilisierung des Fahrrades.

Die im rechten Teil von Abb. A.62 gezeichnete Wurzelortskurve zeigt, dass das System für keine Reglerverstärkung stabil ist. Dasselbe Ergebnis erhält man auch aus der charakteristischen Gleichung

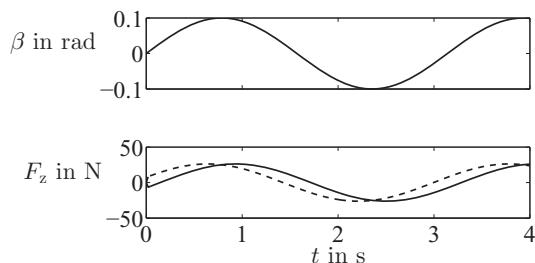
$$s^2 + kk_P s + (s_1 s_2 - kk_P s_0) = 0$$

und den daraus folgenden notwendigen und hinreichenden Stabilitätsbedingungen

$$\begin{aligned} kk_P &> 0 \\ s_1 s_2 - kk_P s_0 &> 0 . \end{aligned}$$

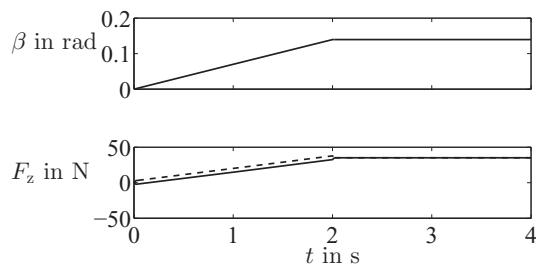
Da  $s_0$  positiv und  $s_1 s_2$  negativ ist, muss  $k_P$  negativ sein, um die zweite Bedingung zu erfüllen. Die erste Bedingung fordert aber positive Reglerverstärkungen. Für keinen Wert für  $k_P$  ist der Regelkreis stabil.

**Diskussion.** Die Unmöglichkeit, das Fahrrad mit einer proportionalen Regelung zu stabilisieren, ist auf die Nichtminimalphasigkeit der Regelstrecke zurückzuführen. Bei Vergrößerung des Lenkwinkels reagiert das Fahrrad zunächst mit einer Vergrößerung (und nicht wie bei Vorderradlenkung mit einer Verkleinerung) des Neigungswinkels  $\theta$ . Dies führt zu einer Vergrößerung der Regelabweichung und folglich zu einer weiteren Vergrößerung des Lenkwinkels. Das Fahrrad kippt um.



**Abb. A.64:** Lenkwinkel  $\beta$  und Kraftverlauf  $F_z$  bei Vorder- und Hinterradlenkung im Vergleich

Die Wirkung der Hinterradlenkung im Vergleich zur Vorderradlenkung ist in Abb. A.64 veranschaulicht. Verstellt man den Lenkwinkel sinusförmig, so erhält man die im unteren Teil der Abbildung gezeigten Kräfteverläufe. Der Kraftverlauf bei Hinterradlenkung eilt dem bei Vorderradlenkung nach, d. h., die für das Balancieren eingesetzte Kraft wirkt später. Tatsächlich wirkt sie bei einer Lenkwinkeländerung erst in die falsche Richtung. Dies ist in Abb. A.65 zu sehen, bei der ein rampenförmiger Verlauf des Lenkwinkels angenommen wurde.



**Abb. A.65:** Lenkwinkel  $\beta$  und Kraftverlauf  $F_z$  bei rampenförmiger Lenkwinkelveränderung



**Abb. A.66:** Experimentalfahrrad

Das in Abb. A.66 gezeigte Fahrrad ermöglicht Experimente mit der Vorderrad- und der Hinterradlenkung. Um den Nachlauf zu beseitigen, wurde das Vorderrad weiter nach vorn geschoben. Das Vorwärtsfahren soll lediglich zeigen, dass die am Fahrrad vorgenommenen Änderungen die bisherige Funktionsweise nicht beeinträchtigen. Beim Rückwärtsfahren, also der Verwendung des Fahrrades mit Hinterradlenkung, hat der Fahrer fast dieselbe Position wie beim Vorwärtsfahren. Die Lenkbewegung wird über zwei gekreuzte Seile auf die Gabel des drehbaren Rades übertragen.

### Aufgabe 10.12 Reglerentwurf für eine allpassholtige Regelstrecke

- Die charakteristische Gleichung des geschlossenen Kreises lautet

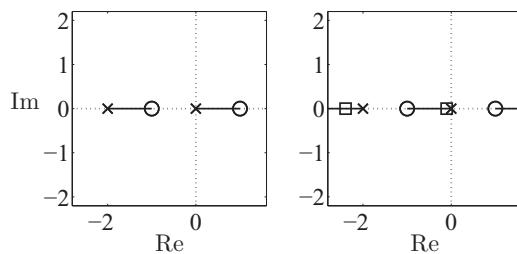
$$s^2(1 + k_P) + 2s - k_P = 0.$$

Der Regelkreis ist genau dann stabil, wenn alle Koeffizienten gleiches Vorzeichen haben, also

$$-1 < k_P < 0$$

gilt.

Der Grund dafür, dass die Reglerverstärkung negativ sein muss, liegt in der Tatsache, dass die statische Verstärkung der Regelstrecke negativ ist:  $k_s = -0,5$ . Regler und



**Abb. A.67:** Wurzelortskurve für positive Reglerverstärkung  $k_P$  (links) und für negative Reglerverstärkung  $k_P$  (rechts; Pole  $\square$  für  $k_P = 0,2$ )

Regelstrecke sind also bei negativem  $k_P$ , wie gewohnt, gegengekoppelt. Die „Höchstverstärkung“ stellt sicher, dass die beiden Pole des geschlossenen Kreises in der negativen Halbebene gehalten werden.

- Die Wurzelortskurve muss mit negativem Parameter  $k = k_P$  gezeichnet werden. Verwendet man zunächst, wie bei Wurzelortskurven üblich, positive Werte für  $k$ , so erhält man Abb. A.67 (links). Beide Äste der Wurzelortskurve beginnen in den Polen und wandern in die jeweils rechts von den Polen liegende Nullstelle. Es gibt keinen Wert für  $k_P$ , für den der Regelkreis stabil ist.

Für negative Werte von  $k_P$  gehören diejenigen Teile der reellen Achse zur Wurzelortskurve, bezüglich derer die Anzahl rechts liegender Pole und Nullstellen gerade ist. Beide Äste der Wurzelortskurve beginnen wieder in den Polen der offenen Kette und erreichen wieder die Nullstellen, jetzt jedoch die jeweils links liegende Nullstelle (Abb. A.67 (rechts)). Der im Pol bei  $-2$  beginnende Ast verlässt die reelle Achse bei  $-\infty$  und kommt von  $+\infty$  wieder in die komplexe Ebene. Für  $|k_P| < 1$  liegen beide Pole in der negativen komplexen Ebene. Der Regelkreis ist folglich stabil.

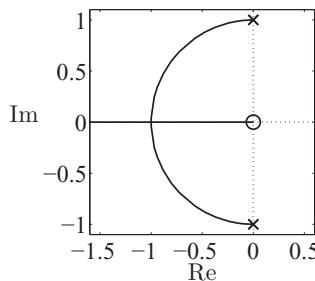
#### Aufgabe 10.14 Wurzelortskurve eines Schwingkreises

- Eine äquivalente Darstellung für das System (10.38) ist durch die Gleichungen

$$\text{Schwingkreis : } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = (0 \ 1) \mathbf{x}(t) \\ u(t) = -Ry(t) \end{cases}$$

gegeben.

- Aufgrund dieser Interpretation kann unter Verwendung der gegebenen Parameter der kritische Wert für  $R$  mit dem Programm A.2 bestimmt werden (auf Maßeinheiten achten!)



**Abb. A.68:** Wurzelortskurve zur Bestimmung des kritischen Widerstandes

**Programm A.2** Wurzelortskurve eines Schwingkreises (Aufgabe 10.14)

```

» C = 0.01;
» L = 100;
» A = [0 -1/L; 1/C 0];
» b = [0; 1/L];
» c = [0 1];
» d = 0;
» offenerKreis = ss(A, b, c, d);
» rlocus(offenerKreis);           ...erzeugt Abb. A.68
» rlocfind(offenerKreis)         Punkt auf Wurzelortskurve auswählen
ans =
    200.05

```

Die erhaltene Wurzelortskurve ist in Abb. A.68 dargestellt. Der kritische Wert für den Widerstand wird durch den Punkt bestimmt, an dem sich die beiden Äste der Wurzelortskurve treffen. Dieser Punkt entspricht einem Widerstand von  $R = 200 \Omega$ . Für größere Widerstandswerte sind die Eigenwerte der Systemmatrix reell.

**Diskussion.** Die Wurzelortskurve zeigt ferner das erwartete Ergebnis, dass für keinen Widerstandswert ein oder beide Eigenwerte positiven Realteil haben. Betrachtet man die Konstruktionsvorschriften für die Wurzelortskurve, so wird offensichtlich, dass der „offene Schwingkreis“ eine Nullstelle im Ursprung des Koordinatensystems oder auf der negativen reellen Achse haben muss, damit man dieses Ergebnis erhält. Wie die Abbildung zeigt, liegt die Nullstelle im Ursprung.

### Aufgabe 10.15 Dämpfung der Rollbewegung eines Schiffes

1. Abbildung A.69 zeigt das Blockschaltbild des Regelkreises. Im Schiff als Regelstrecke wirkt der Stabilisator als Stellglied, das ein Moment erzeugt, dass der Rollbewegung entgegen wirken soll. Der Stabilisator wird durch ein P-Glied mit dem Verstärkungsfaktor  $k_{\text{Stab}}$  dargestellt.

Die umrandeten Blöcke bilden gemeinsam ein schwingungsfähiges PT<sub>2</sub>-Glied. Dass dieses System als eine Reihenschaltung dargestellt wird, dessen dritter Block ein I-Glied ist, ergibt sich aus der Tatsache, dass nicht der Rollwinkel  $\varphi(t)$ , sondern die Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}(t)$  gemessen und zurückgeführt wird. Die Reihenschaltung von Stabilisator und Schiffskörper wird bei dieser Näherung folglich durch ein DT<sub>2</sub>-Glied beschrieben.

Die gemessene Rollgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}$  wird über einen proportionalen Regler  $k_P$  an den Stabilisator geführt, der ein der Stellgröße proportionales Moment auf den Schiffskörper erzeugt. Der zugehörige Proportionalitätsfaktor  $k_{\text{Stab}}$  wird zusammen mit der Reglerverstärkung zum Faktor  $k = k_{\text{Stab}} \cdot k_P$  zusammengefasst. Das von einer Welle oder einer Windböe erzeugte Moment wirkt additiv zu dem vom Stabilisator erzeugten Moment auf den Schiffskörper.

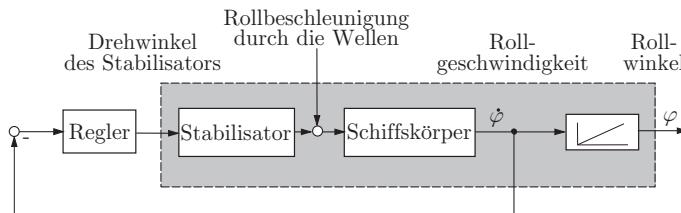


Abb. A.69: Blockschaltbild des Stabilisators

2. Die in Abb. A.69 gezeigte Reihenschaltung von Schiffskörper und I-Glied bilden ein PT<sub>2</sub>-Glied mit der Übertragungsfunktion (6.109)

$$G_{\text{Schiff}}(s) = \frac{k_s}{\frac{1}{\omega_0^2}s^2 + \frac{2d}{\omega_0}s + 1},$$

für das der Dämpfungsfaktor  $d = 0,1$  vorgegeben ist. Die Kreisfrequenz  $\omega_0$  kann man folgendermaßen aus der beobachteten Periodendauer ermitteln. Entsprechend Gl. (6.113) schwingt das PT<sub>2</sub>-Glied nach einer Anregung durch eine Welle mit der Frequenz  $f$ , für die

$$2\pi f = \omega_0 \sqrt{1 - d^2}$$

gilt. Die beobachtete Periodendauer von 6 Sekunden ist der Kehrwert der Frequenz  $f$ , so dass sich  $\omega_0$  aus

$$\omega_0 = \frac{\frac{2\pi}{6}}{\sqrt{1 - 0,1^2}} = 1,05 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

ergibt. Die statische Verstärkung  $k_s$  muss man an die Vorgabe anpassen, dass eine impulsförmige Welle ( $u(t) = \delta(t)$ ) einen maximalen Rollwinkel von 3° erzeugt.

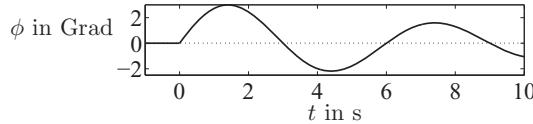
Zur Berechnung der Rollbewegung muss zunächst das Modell definiert werden:

```
> z = 3.3; % statische Verstärkung k_s
> omega = 1.05;
> T = 1/omega;
> d = 0.1;
> n = [T*T, 2*d*T, 1];
> Schiff = tf(z, n);
```

Die Rollbewegung nach einer impulsförmigen Anregung des Schiffes durch eine Welle zur Zeit  $t = 0$  kann man dann mit der Funktion `impulse` als Gewichtsfunktion des PT<sub>2</sub>-Gliedes berechnen:

```
» impulse(Schiff);
```

Wie man aus Abb. A.70 erkennt, ist  $k_s = 3,3$  eine geeignete Parameterwahl.



**Abb. A.70:** Rollbewegung des ungeregelten Schiffes bei impulsförmiger Anregung

3. Da der Regler nicht den Rollwinkel, sondern die Rollgeschwindigkeit zurückführt, zeichnet man die Wurzelortskurve für  $\hat{G}(s) = sG_{\text{Schiff}}(s)$  mit der Funktion `rlocus` und erhält Abb. A.71:

```
» z1 = z*[1 0];
» sschiff = tf(z1, n);
» rlocus(sschiff);
```

Die Reglerverstärkung  $k$  wählt man mit der Funktion `rlocfind` so aus, dass für die Pole

$$\cos \phi_d = d = 0,7$$

gilt, die Pole also auf Dämpfungsgeraden mit dem Winkel von  $45^\circ$  liegen. Dabei erhält man etwa  $k = 0,38$ :

```
» rlocfind(sschiff)
ans =
0.38
```

Wenn man den Parameter  $k_{\text{Stab}}$  des Stabilisators kennt, kann man aus diesem Wert für  $k$  die Reglerverstärkung  $k_P = \frac{k}{k_{\text{Stab}}}$  bestimmen.

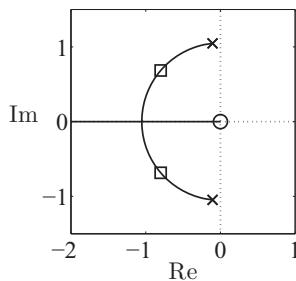
4. Für das Störverhalten des stabilisierten Schiffes muss man zunächst die Übertragungsfunktion

$$G_d(s) = \frac{G_{\text{Schiff}}(s)}{1 + k \cdot s \cdot G_{\text{Schiff}}(s)}$$

aufstellen

```
» kD = 0.38;
» nd = n + [0 kD*z 0];
» Gd = tf(z, nd);
```

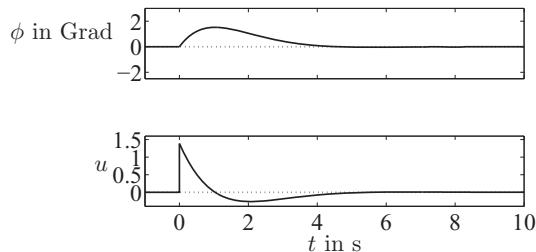
und kann mit dieser dann die in Abb. A.72 (oben) im gleichen Maßstab wie in Abb. A.70 gezeigte Gewichtsfunktion berechnen:



**Abb. A.71:** Wurzelortskurve des Stabilisatorregelkreises (Pole  $\square$  bei  $k = 0,35$ )

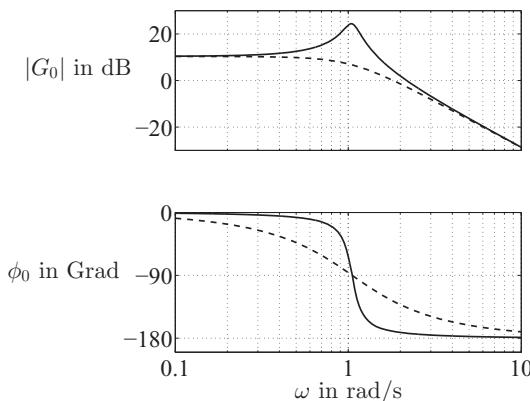
» impulse (Gd) ;

Wie gefordert bewegt sich das Schiff nach einer impulsförmigen Erregung durch eine Welle zur Zeit  $t = 0$  ohne Überschwingen in die senkrechte Position zurück. Die dafür vom Regler zusammen mit dem Stabilisator erzeugte Moment auf den Schiffskörper ist im unteren Teil der Abbildung zu sehen. Da der Regler die Rollbeschleunigung proportional zurückführt, hat das Moment bereits zur Eingriffszeit  $t = 0$  der Welle einen von null verschiedenen Wert.



**Abb. A.72:** Bewegung des stabilisierten Schiffs bei impulsförmiger Anregung

5. Abbildung A.73 zeigt einen Vergleich der Störübertragungsfunktionen des geregelten und des ungeregelten Schiffes. Die Resonanzüberhöhung wird durch den Stabilisator vollständig abgebaut. Die verwendeten MATLAB-Befehle sind im Programm A.3 zusammengestellt.
6. Durch eine impulsförmige Störung (z. B. eine Windbö) wird die Schwingung des Schiffes angeregt, aber die Störung hat keine bleibende Wirkung auf das Schiff. Nach dem Abklingen der Störwirkung kehrt das Schiff in die stabile, senkrechte Ruhelage zurück. Dort ist dann auch  $\dot{\phi} = 0$ , so dass der Regler keine Wirkung mehr hat.



**Abb. A.73:** Bodediagramm des ungeregelten (—) und des stabilisierten Schiffes (- - -)

**Diskussion.** Die Störübertragungsfunktion zeigt, dass das Schiff langsam Erregungen vollständig folgt. Dies ist aufgrund der verwendeten proportionalen Rückführung nicht verwunderlich. Dass man diese einfache Regelung verwendet, liegt an der Tatsache, dass die das Schiff maßgebend anregenden Wellen in einem Frequenzbereich oberhalb von  $\omega = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  liegen. Tieffrequente Wellen sind nicht so hoch, so dass sie bei großen Schiffen keine spürbare Rollbewegung auslösen. Wie man sieht, unterdrückt die Regelung den wichtigen Frequenzbereich wirksam. Dass nur wenige Teilnehmer an Kreuzfahrten seekrank werden, ist auf das hier (vereinfacht) beschriebene Wirkprinzip des Stabilisators zurückzuführen.

Die angegebenen Lösungsschritte dieser Regelungsaufgabe sind nicht nur für das hier betrachtete Schiff, sondern auch für größere Schiffe zweckmäßig. Wiederholen Sie die Modellbildung und den Reglerentwurf für Schiffe mit einer Rollperiode von 20 Sekunden.

Bei der praktischen Realisierung muss man darauf achten, dass die vom Stabilisator ausgehende Kraftwirkung von der Fahrgeschwindigkeit abhängt. Mit einem fest eingestellten Regler hat man deshalb bei höherer Geschwindigkeit eine größere Kreisverstärkung als bei kleinerer Geschwindigkeit. Um dieser Veränderung der Kreisverstärkung entgegen zu wirken, wird die Reglerverstärkung der Fahrgeschwindigkeit angepasst.

Bei sprungförmigen Störungen (z. B. andauernden Seitenwind) bewirkt die Rückführung der Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}$ , dass das Schiff stationär nicht in der senkrechten Lage, sondern in einer von der Störung bestimmten Lage  $\varphi \neq 0$  fährt. Man verhindert diese Regelabweichung nicht, weil dafür eine sehr hohe Energie notwendig wäre. Das Fahren in einer schrägen, aber ruhigen Lage ist für die Passagiere gut zu ertragen, weil die Seekrankheit nicht durch die Lage  $\varphi \neq 0$ , sondern durch die Bewegung ( $\dot{\varphi} \neq 0$ ) hervorgerufen wird.

#### Aufgabe 11.6 Dämpfung der Rollbewegung eines Flugzeugs

1. Die Regelstrecke hat  $I_2$ -Verhalten mit dem in Abb. A.74 angegebenen Bodediagramm. Impulsförmige Störungen  $0,1\delta(t)$  am Eingang der Regelstrecke können als rampenförmige Störungen  $0,2t$  am Streckenausgang dargestellt werden. Für diese Art von Störungen

**Programm A.3 Lösung der Aufgabe 10.15: Dämpfung der Rollbewegung eines Schiffes**

```

Festlegung von  $G_{\text{Schiff}}(s)$ 
» z = 3.3;
» omega = 1.05;
» T = 1/omega;
» d = 0.1;
» n = [T*T, 2*d*T, 1];
» Schiff = tf(z, n);

» impulse(Schiff);           ...erzeugt Abb. A.70
» bode(Schiff);             ...erzeugt durchgezogene Kurve in Abb. A.73

Zeichnen der Wurzelortskurve
» z1 = z*[1 0];
» sSchiff = tf(z1, n);
» rlocus(sSchiff);          ...erzeugt Abb. A.71
» rlocfind(sSchiff)         Punkt auf Wurzelortskurve auswählen
ans =
    0.38

Analyse des stabilisierten Schiffes
» kD = 0.38;
» nd = n + [0 kD*z 0];
» Gd = tf(z, nd);
» impulse(Gd);              ...erzeugt Abb. A.72
» bode(Gd);                 ...erzeugt gestrichelte Kurve in Abb. A.73

```

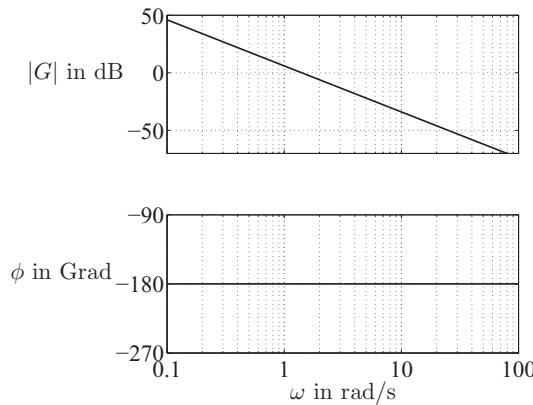
erfüllt die offene Kette mit P-Regler das Innere-Modell-Prinzip. Das heißt, das Innere-Modell-Prinzip schreibt keine bestimmte Reglerstruktur (z. B. I-Anteile) vor. Wenn der Regelkreis stabil ist, gibt es keine bleibende Regelabweichung.

- Um die Güteforderungen in Vorgaben für das Frequenzkennliniendiagramm der offenen Kette umzurechnen, wird zunächst aus Abb. 11.9 auf S. 525 für  $\Delta e \approx 0$  abgelesen, dass die Dämpfung  $d$  größer als 0,7 sein muss. Daraus erhält man für den Knickpunktabstand  $a = 4d^2 \geq 2$ .

Wenn man für die Vorgaben für  $e_m$  aus Abb. 11.9 (links) die Forderung  $\frac{T_\Sigma}{T} \approx 1$  abliest und beachtet, dass die auf den Ausgang transformierte Störung näherungsweise durch eine sprungförmige Störung, die über ein Verzögerungsglied mit der Zeitkonstanten  $T_\Sigma = 0,5 \text{ s}$  geführt wird, erzeugt werden kann, erhält man für die Schnittfrequenz

$$\omega_s = \frac{1}{2dT} = \frac{1}{1,4T} \approx 1,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

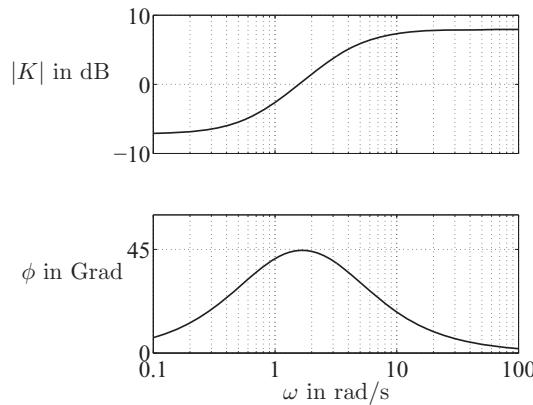
- Die Regelstrecke hat zwar die gewünschte Schnittfrequenz, nicht jedoch den Knickpunktabstand. Der zu verwendende Regler muss den Amplitudengang oberhalb der Schnitt-



**Abb. A.74:** Bodediagramm des Flugzeugs als Regelstrecke

frequenz flacher machen, was durch ein differenzierendes Korrekturglied nach Abb. A.75 geschehen kann:

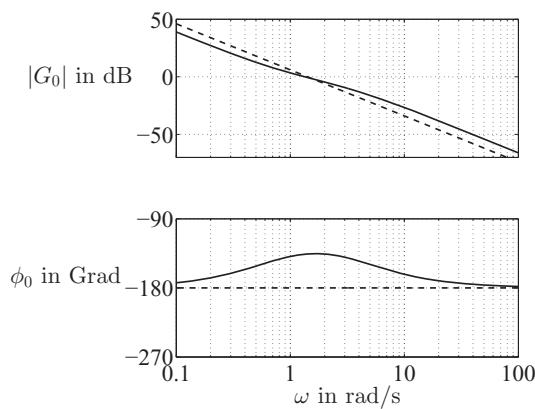
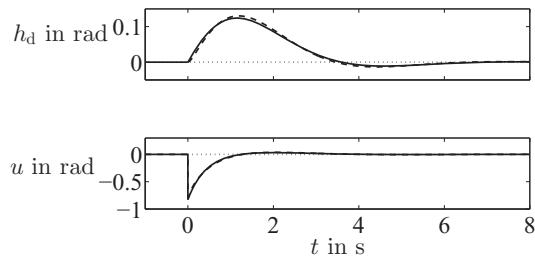
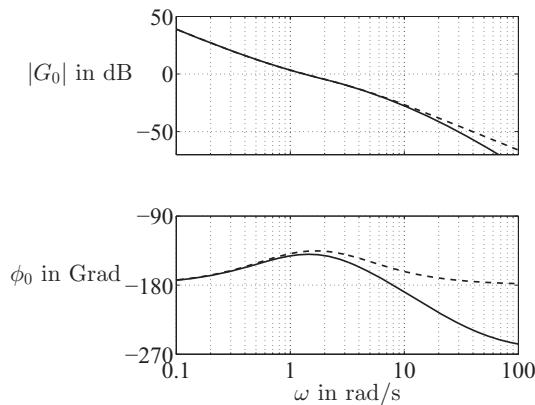
$$K(s) = 2,5 \frac{s + 0,7}{s + 4}.$$



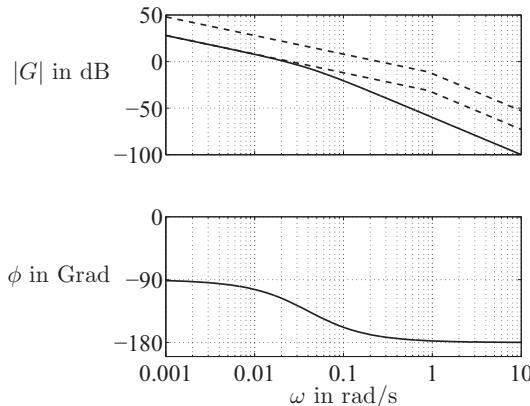
**Abb. A.75:** Bodediagramm des Reglers

Abbildung A.76 zeigt das Bodediagramm der offenen Kette. Der daraus entstehende Regelkreis ist stabil, denn er weist einen Phasenrand von etwa  $40^\circ$  auf.

Das Störverhalten des Regelkreises bei der betrachteten impulsförmigen Störung zur Zeit  $t = 0$  ist in Abb. A.77 als durchgezogene Linie dargestellt. Die Abbildung zeigt, dass der Regelkreis die gegebenen Güteforderungen näherungsweise erfüllt. Die Stellgröße wird zur Zeit  $t = 0$  sprungförmig der Störung angepasst, weil der verwendete Regler ein sprunghfähiges System ist.

**Abb. A.76:** Bodediagramm der offenen Kette**Abb. A.77:** Störverhalten des Flugregelkreises**Abb. A.78:** Bodediagramm der offenen Kette bei Berücksichtigung des Messgliedes

4. Das Stellglied verändert den Regelkreis nur geringfügig, weil die Zeitkonstante von 0,05 Sekunden sehr klein ist gegenüber den anderen auftretenden Zeitkonstanten. Abbildung A.78 zeigt das Bodediagramm der offenen Kette mit Messglied (durchgezogene Linie) im Vergleich zur offenen Kette ohne Messglied (gestrichelte Linie). Die Reaktion des Regelkreises auf Störungen ist nur geringfügig langsamer als ohne Messglied, wie die gestrichelte Kurve in Abb. A.77 zeigt. Auch mit Messglied sind die Güteforderungen erfüllt.



**Abb. A.79:** Bodediagramm der Regelstrecke und gewünschter Amplitudengang der offenen Kette

### Aufgabe 11.7 Entwurf einer Abstandsregelung für Fahrzeuge

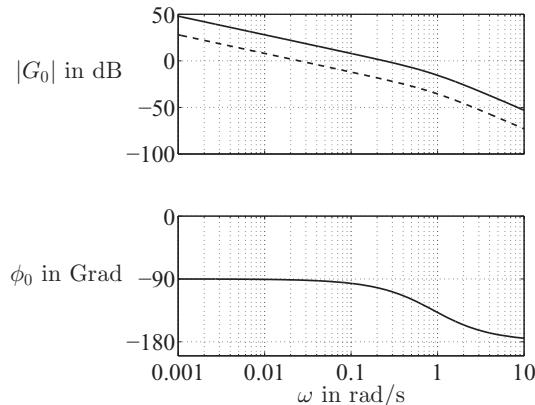
1. Da eine Erhöhung der Motorleistung eine Verkleinerung des Abstandes zur Folge hat, steht im Zähler der Übertragungsfunktion der Regelstrecke ein Minuszeichen. Deshalb muss auch der Regler mit einem negativen Vorzeichen versehen werden. Im Folgenden wird mit positivem Zähler von  $G(s)$  und ohne Minuszeichen vor  $K(s)$  gearbeitet. Abbildung A.79 zeigt das Frequenzkennliniendiagramm der Regelstrecke.

Die Forderung nach überschwingfreiem Einschwingen bedeutet entsprechend Abb. 11.3 auf S. 518, dass der Knickpunktabstand die Bedingung  $a \geq 3$  erfüllen muss. Aus der Vorgabe für die Einschwingzeit erhält man die Bedingung, dass die Schnittfrequenz bei  $\omega_s \approx 0,3$  liegen soll, denn für das überschwingfreie Verhalten kann man näherungsweise  $T_{5\%} \approx T_m$  setzen und Gl. (11.6) anwenden.

Der angestrebte Amplitudengang der offenen Kette ist in Abb. A.79 durch die obere gestrichelte Kurve eingetragen. Dieser Amplitudengang soll in zwei Schritten erhalten werden. Erstens wird die jetzt bei  $0,04$  liegende Knickfrequenz nach  $\omega_1 = 0,9$  verschoben, wofür ein differenzierendes Korrekturglied

$$K_1(s) = \frac{\frac{1}{0,04}s + 1}{\frac{1}{0,9}s + 1}$$

notwendig ist. Dabei entsteht die untere gestrichelte Kurve. Zweitens wird der Amplitudengang durch eine Proportionalverstärkung  $k_P = 10$  um 20 dB angehoben, so dass die Schnittfrequenz bei  $0,3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  und der Knickpunktabstand bei 3 liegt.

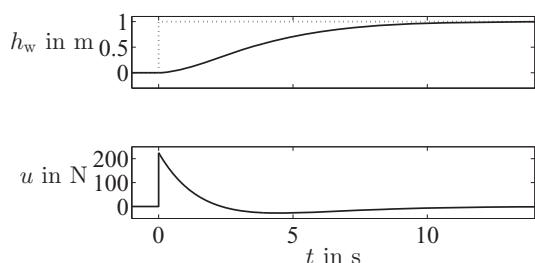


**Abb. A.80:** Bodediagramm der offenen Kette

Abbildung A.80 zeigt das Bodediagramm der offenen Kette, wobei der vor der Verstärkungserhöhung erreichte Amplitudengang gestrichelt dargestellt ist. Die Kurven stimmen bis auf den runden Verlauf in der Nähe der Knickfrequenz mit den in Abb. A.79 gezeichneten Geradenapproximationen überein. Die Phase liegt jetzt zwischen  $-90^\circ$  und  $-180^\circ$ , weil das Minuszeichen im Zähler durch das entsprechende Vorzeichen im Regler berücksichtigt wurde. Aufgrund dieser Tatsache muss an Stelle des Reglers  $k_P K_1(s)$  mit dem Regler

$$K(s) = -k_P K_1(s) = -10 \frac{25s + 1}{1,11s + 1}$$

gearbeitet werden.



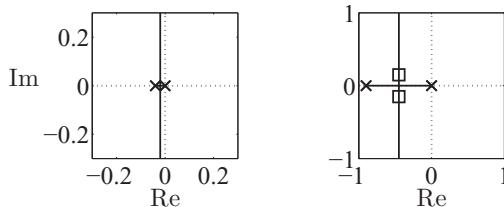
**Abb. A.81:** Führungsübergangsfunktion des Abstandsregelkreises

Abbildung A.81 zeigt die Führungsübergangsfunktion. Der Abstand wirdforderungsgemäß ohne Überschwingen in etwa 10 Sekunden auf den neuen Sollwert geführt. Die

Stellgröße folgt der Sollwertänderung zum Zeitpunkt  $t = 0$  sofort, weil der Regler ein sprungfähiges System ist.

Man könnte auch auf die Idee kommen und mit einem PD-Regler den Knick im Amplitudengang der Regelstrecke aufheben, so dass eine reine I-Kette übrig bleibt. Der geschlossene Regelkreis wäre dann ein  $PT_1$ -Glied, das natürlich kein Überschwingen erzeugt. Ein derartiger PD-Regler hätte die Übertragungsfunktion  $K(s) = \frac{1}{0,04}s + 1$ , was gerade dem Zählerpolynom des bisher betrachteten differenzierenden Korrekturgliedes entspricht würde. Da man bei der technischen Realisierung des PD-Regler wieder ein Nennerpolynom (also einen Verzögerungsanteil mit kleiner Zeitkonstante) einführen muss, kommt man aber wieder zur selben Lösung wie vorher.

2. Die bisher am Bodediagramm durchgeführten Überlegungen lassen sich im PN-Bild folgendermaßen durchführen. Aufgrund der Güteforderungen an das Führungsverhalten muss die Dämpfung in der Nähe von eins liegen, die Pole des geschlossenen Kreises also reell sein oder sehr kleine Imaginärteile besitzen. Die Beruhigungszeit von  $T_{5\%} = 10\text{ s}$  führt entsprechend Gl. (10.6) auf die Forderung  $\delta_e \approx 0,3$ .



**Abb. A.82:** Wurzelortskurve mit P-Regler bzw. differenzierendem Korrekturglied

Wie die linke Wurzelortskurve in Abb. A.82 zeigt, sind diese Güteforderungen durch einen P-Regler nicht erfüllbar. Man muss versuchen, den linken Pol gegen eine Nullstelle zu kürzen und einen weiter links liegenden Pol einzuführen, so dass sich auch der Schnittpunkt der Asymptoten mit der reellen Achse nach links verschiebt. Diese Wirkung hat die Verwendung des differenzierenden Korrekturgliedes  $K_1(s)$ .

Der rechte Teil von Abb. A.82 zeigt die Wurzelortskurve für  $\hat{G}_0(s) = G(s)K_1(s)$ . Der Schnittpunkt der Asymptoten mit der reellen Achse liegt jetzt bei  $-0,45$ . Die Pole können durch geeignete Wahl der Reglerverstärkung so ausgewählt werden, dass sie beide einen Realteil kleiner als  $-0,3$  und kleine Imaginärteile haben. Die beim Entwurf mit dem Frequenzkennliniendiagramm ausgewählte Verstärkung von  $k_P = 10$  legt die Pole an die in der Abbildung gezeigten Stellen, in denen sie ein näherungsweise überschwingfreies Verhalten erzeugen.

Hätte man die Regelungsaufgabe von vornherein mit dem Wurzelortskurvenverfahren gelöst, so hätte man entsprechend Gl. (10.5) auf S. 479 reelle Pole erzeugt, denn nur für diese verschwindet das Überschwingen vollständig. Aus dieser Formel geht aber auch hervor, dass für die hier erhaltene Pollage  $-0,45 \pm j0,15$  die Überschwingweite den Wert  $\Delta h \approx 0,0001$  hat und damit praktisch nicht sichtbar ist.

**Diskussion.** Das Innere-Modell-Prinzip schreibt für diese Regelungsaufgabe keine bestimmte Struktur für den Regler vor. Es kann mit einem proportional wirkenden Regler gearbeitet werden, da die Regelstrecke integrales Verhalten besitzt. Dies heißt jedoch nicht, dass zur Erfüllung der Dynamikforderungen an den Regelkreis keine dynamische Elemente in den Regler eingefügt werden müssen. Bei diesem Beispiel zeigen Bodediagramm und Wurzelortskurve, dass ein differenzierendes Korrekturglied verwendet werden muss, um die gewünschte Einschwingzeit zu erreichen. Der Regler hat damit weiterhin proportionales Verhalten.

Dass als Regler ein differenzierendes Korrekturglied verwendet werden muss, konnte man direkt aus dem Bodediagramm erkennen. Dieser Regler hat aber auch eine offensichtliche technische Interpretation. Er besitzt keinen integralen Anteil, da die Regelstrecke integrales Verhalten besitzt. Der über einen bestimmten Frequenzbereich wirkende differenzierende Anteil ist notwendig, um den Regelkreis schnell genug zu machen, so dass Störungen ohne Überschwingen abgebaut werden können. Die Wirkung dieses Anteils kann man sich anschaulich dadurch vergegenwärtigen, dass der Regler aus dem Fahrzeugabstand durch Differenziation die Relativgeschwindigkeit beider Fahrzeuge bestimmt. Reagiert der Regler bereits auf diese Geschwindigkeit (und nicht erst auf den sich durch diese Geschwindigkeit verändernden Abstand), so kann er die Regelabweichung schneller abbauen.

### Aufgabe 11.9 Regelung der Leerlaufdrehzahl eines Verbrennungsmotors

1. Abbildung A.83 zeigt das Blockschaltbild des Verbrennungsmotors mit den Übertragungsfunktionen

$$G_a(s) = \frac{k_a}{T_a s + 1}, \quad G_\omega(s) = \frac{1}{J s + \gamma} \quad \text{und} \quad G_m(s) = \frac{1}{T_m s + 1}.$$

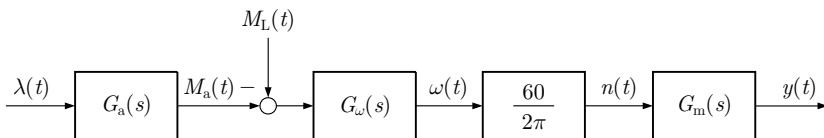


Abb. A.83: Blockschaltbild des Verbrennungsmotors

2. Die sprungförmige Störung  $M_L(t)$  mit der Amplitude  $\bar{d}$  wirkt über die Übertragungsfunktion

$$G_{y\text{d}}(s) = \frac{-\frac{60}{2\pi}}{(J s + \gamma)(T_m s + 1)} \approx \hat{G}_{y\text{d}}(s) = \frac{k_{y\text{d}}}{T_\Sigma s + 1}$$

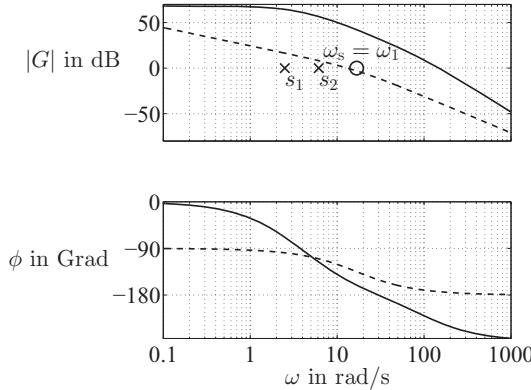
mit  $T_\Sigma = T_m + \frac{J}{\gamma} = 0,173 \text{ s}$  und  $k_{y\text{d}} = -\frac{60}{2\pi\gamma} = -22,2 \frac{1}{\text{Nm s}}$  auf die Regelgröße. Aus den Forderungen

$$e_m \stackrel{!}{\leq} \frac{80}{\bar{d}} \cdot \frac{2\pi\gamma}{60} = 0,3 \frac{1}{\text{min}} \quad \text{und} \quad \Delta e \stackrel{!}{\leq} \frac{20}{\bar{d}} \cdot \frac{2\pi\gamma}{60} = 0,075 \frac{1}{\text{min}}$$

folgt entsprechend Abb. 11.9 auf S. 525  $T_r \approx 2,9$  und  $d \approx 0,5$ , so dass die offene Kette die Kennwerte  $T = \frac{T_\Sigma}{T_r} = 0,0596 \text{ s}$ ,

$$\omega_s = \frac{1}{2dT} = 16,8 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \text{und} \quad \omega_1 = 4d^2\omega_s = 16,8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

besitzen muss. Da die Störung den Motor bremst, wurden die Kenngrößen betragsmäßig betrachtet.



**Abb. A.84:** Bodediagramm der Regelstrecke (—) und der gewünschten offenen Kette (---)

3. Abbildung A.84 zeigt das Bodediagramm der Regelstrecke und das Wunschverhalten der offenen Kette. Da  $\omega_s \ll \frac{1}{T_m}$  gilt, kann die Messverzögerung vernachlässigt und die Streckenübertragungsfunktion auf

$$G(s) \approx \hat{G}(s) = \frac{60}{2\pi} G_\omega(s) G_a(s) = \frac{\frac{60k_a}{2\pi\gamma}}{(T_a s + 1)(\frac{J}{\gamma}s + 1)}$$

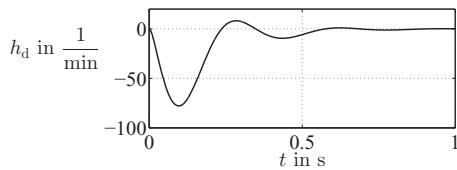
reduziert werden. Die Strecke hat zwei Pole bei  $s_1 = -\frac{1}{T_a} = -2,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  und  $s_2 = -\frac{\gamma}{J} = -6,14 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ . Um das gewünschte IT<sub>1</sub>-Verhalten der offenen Kette zu erzeugen, wird ein PI-Regler  $K_{PI}(s) = k_P \frac{T_a s + 1}{s}$ , dessen Nullstelle mit dem Pol  $s_1$  übereinstimmt, und ein Korrekturglied verwendet, das zwischen den Frequenzen  $s_2$  und  $\omega_1$  den Abfall der Amplitudenkurve auf  $-20 \frac{\text{dB}}{\text{Dek.}}$  begrenzt:

$$K(s) = \underbrace{k_P \frac{T_a s + 1}{s}}_{K_{PI}(s)} \cdot \frac{\frac{J}{\gamma}s + 1}{\frac{1}{\omega_1}s + 1}$$

Aus der Forderung  $|\hat{G}_0(j\omega_s)| = |\hat{G}(j\omega_s)K(j\omega_s)| = 1$  erhält man die Proportionalverstärkung des Reglers:

$$k_P = \frac{\omega_s \sqrt{\left(\frac{\omega_s}{\omega_1}\right)^2 + 1}}{\frac{60k_a}{2\pi\gamma}} = 0,0093.$$

Abbildung A.85 zeigt, dass der Regelkreis das gewünschte Verhalten besitzt.



**Abb. A.85:** Störverhalten des Leerlaufdrehzahlregelkreises bei Laständerung  
 $M_L(t) = \bar{d}\sigma(t)$

**Aufgabe 13.3 Modell des Regelkreises mit Hilfsregelgröße**

Aus Abb. 13.3 auf S. 578 erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned} Y(s) &= G_2(s) G_{y_{\text{Hd}}}(s) D(s) + G_2(s) G_1(s) U(s) \\ Y_{\text{H}}(s) &= G_{y_{\text{Hd}}}(s) D(s) + G_1(s) U(s) \\ U(s) &= K(s)(W(s) - Y(s)) - K_y(s) Y_{\text{H}}(s). \end{aligned}$$

Daraus folgen durch Einsetzen die Beziehungen

$$\begin{aligned} Y_{\text{H}} &= G_{y_{\text{Hd}}} D + G_1 K W - G_1 K Y - G_1 K_y Y_{\text{H}} \\ Y_{\text{H}} &= \frac{G_{y_{\text{Hd}}}}{1 + G_1 K_y} D + \frac{G_1 K}{1 + G_1 K_y} W - \frac{G_1 K}{1 + G_1 K_y} Y, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} U &= K W - K Y - K_y \left( \frac{G_{y_{\text{Hd}}}}{1 + G_1 K_y} D + \frac{G_1 K}{1 + G_1 K_y} W - \frac{G_1 K}{1 + G_1 K_y} Y \right) \\ &= \left( K - K_y \frac{G_1 K}{1 + G_1 K_y} \right) W - \left( K - K_y \frac{G_1 K}{1 + G_1 K_y} \right) Y - K_y \frac{G_{y_{\text{Hd}}}}{1 + G_1 K_y} D \\ &= \frac{K}{1 + G_1 K_y} W - \frac{K}{1 + G_1 K_y} Y - \frac{G_{y_{\text{Hd}}} K_y}{1 + G_1 K_y} D \end{aligned}$$

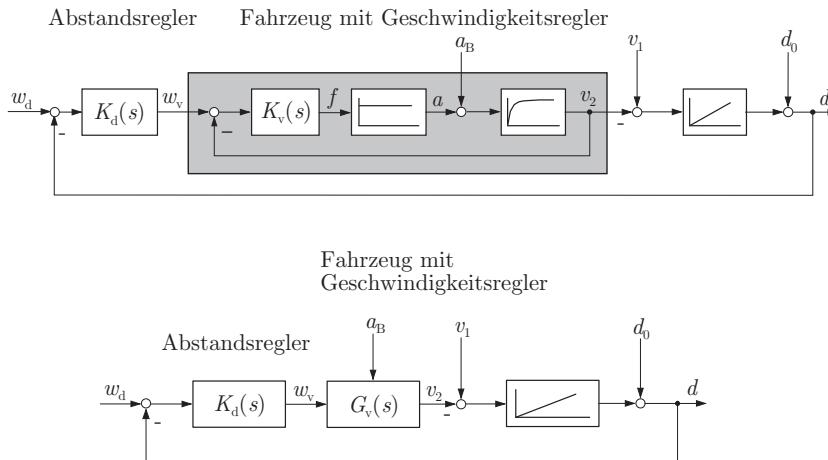
sowie

$$\begin{aligned} Y &= G_2 G_{y_{\text{Hd}}} D + G_2 G_1 \cdot \left( \frac{K}{1 + G_1 K_y} W - \frac{K}{1 + G_1 K_y} Y - \frac{G_{y_{\text{Hd}}} K_y}{1 + G_1 K_y} D \right) \\ Y \left( 1 + G_1 G_2 \frac{K}{1 + G_1 K_y} \right) &= \left( G_2 G_{y_{\text{Hd}}} - G_2 G_1 \frac{G_{y_{\text{Hd}}} K_y}{1 + G_1 K_y} \right) D + \\ &\quad + G_2 G_1 \left( \frac{K}{1 + G_1 K_y} \right) W \\ Y &= \frac{G_2 G_{y_{\text{Hd}}}}{1 + G_1 K_y + G_1 G_2 K} D + \frac{G_1 G_2 K}{1 + G_1 K_y + G_1 G_2 K} W. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen führen auf die in der Aufgabenstellung angegebenen Übertragungsfunktionen des Regelkreises.

**Aufgabe 13.6 Kaskadenregelung des Fahrzeugabstandes**

Abbildung A.86 zeigt die Kaskadenregelung. Der innere Regelkreis soll die Fahrzeuggeschwindigkeit  $v_2$  auf dem Sollwert  $w_v$  halten, der als konstante bzw. sich langsam ändernde Größe angenommen wird. Die sprungförmige Störung  $\bar{a}_B \sigma(t)$  durch die Hangabtriebskraft bleibt eine sprungförmige Störung, wenn man sie an den Ausgang der Regelstrecke des inneren Regelkreises transformiert. Die offene Kette muss deshalb I-Verhalten besitzen, wenn man eine bleibende Regelabweichung vermeiden will. Da die Regelstrecke proportionales Verhalten hat, muss der Regler  $K_v(s)$  einen I-Anteil  $\frac{1}{s}$  enthalten. Der Reglerentwurf besteht deshalb in der Wahl eines Geschwindigkeitsreglers  $K_v(s)$ , für den der Geschwindigkeitsregelkreis stabil ist und durch den die Geschwindigkeit ausreichend schnell dem Sollwert  $w_v$  angepasst wird.



**Abb. A.86:** Kaskadenregelung des Fahrzeugabstandes

Für die Abstandsregelung ist maßgebend, dass der innere Regelkreis zu einem proportionalen Übertragungsglied mit der Übertragungsfunktion  $G_v(s)$  zusammengefasst werden kann. Um einen Anfangsabstand  $d_0$  auszugleichen, der als impulsförmige Störung  $d_0 \delta(t)$  interpretiert werden kann, und um Sollwertfolge bezüglich der sprungförmigen Führungsgröße  $w_d$  zu erreichen, ist ein P-Regler ausreichend, weil die Regelstrecke I-Verhalten hat. Ein I-Anteil ist im Regler  $K_d(s)$  notwendig, um den Abstand trotz einer sprungförmigen Störung  $\bar{v}_1 \sigma(t)$ , die am Ausgang der Regelstrecke als rampenförmige Störung  $\bar{v}_1 t$  wirkt, auf dem Sollwert zu halten.

**Diskussion.** Der Vorteil der Kaskadenregelung gegenüber einer Abstandsregelung ohne unterlagerte Geschwindigkeitsregelung resultiert aus der Zerlegung der Regelungsaufgabe in zwei Teilaufgaben, die sich einfacher lösen lassen als die Gesamtaufgabe. Da auch die Geschwindigkeitsmessung keine technisch schwierigen Probleme aufwirft, ist es sehr zweckmäßig, zunächst in einem unterlagerten Regelkreis mit der relativ kurzen Ursache-Wirkungs-Kette von  $f$  zu  $v_2$  die Geschwindigkeit zu regeln und dann die Abstandsregelung unter Verwendung des Geschwindigkeitssollwertes  $w_v$  als Stellgröße zu realisieren.

Dieser ingenieurtechnisch offensichtliche Vorteil ist auch aus einem Vergleich der Komplexität der beiden Teilaufgaben mit der der Gesamtaufgabe erkennbar. Die Abstandsregelung ohne unterlagerte Geschwindigkeitsregelung führt auf eine I<sub>2</sub>-Kette (vgl. Aufg. 7.7 auf S. 645), die nur bei starker Phasenanhebung zu einem stabilen Regelkreis geschlossen werden kann. Demgegenüber muss beim Geschwindigkeitsregelkreis eine offene Kette mit I-Verhalten stabilisiert werden, was deutlich einfacher ist. Der Entwurf des äußeren Regelkreises erfordert dann lediglich die Wahl eines PI-Reglers für eine integral wirkende Regelstrecke. Insgesamt stecken in der Reihenschaltung von Abstandsregler und Geschwindigkeitsregler wieder zwei Integratoren. Das Gesamtsystem kann jedoch in zwei Schritten stabilisiert werden, was auch bedeutet, dass die für das Gesamtsystem notwendige Phasenanhebung in zwei Schritten vorgenommen wird.

#### Aufgabe A4.5 Entwurf der Kompensationsrückführung im Airbag-Sensor

**Lösungsweg.** Zur Lösung der Aufgabe kann das Kompensationsprinzip entweder als Regelkreis zur Störkompensation entsprechend Abb. A4.4 oder nach Umzeichnen des Blockschaltbildes als Regelkreis zur Sicherung der Sollwertfolge (A4.1) aufgefasst werden. Hier wird die zweite Methode beschrieben, weil bei dieser Darstellung die Aufgabe des Sensors, die Messgröße  $a_m(t)$  der aktuellen Beschleunigung  $a(t)$  anzupassen, besser sichtbar wird. Der umgezeichnete Regelkreis ist in Abb. A.87 zu sehen.

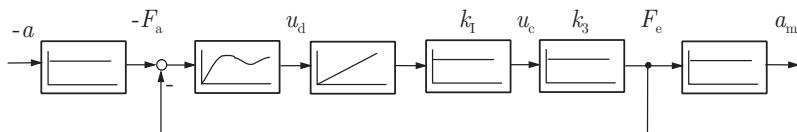


Abb. A.87: Umgezeichnetes Blockschaltbild des Sensors

Um dem Standardregelkreis möglichst nahe zu kommen, wurde die Mischstelle mit dem Minuszeichen verschoben und  $a$  und  $F_a$  durch  $-a$  bzw.  $-F_a$  ersetzt. Die Nichtlinearität wird durch ein P-Glied mit dem Verstärkungsfaktor  $k_3$  dargestellt. Dieses Glied würde im Rückführweg liegen, wenn man  $u_c$  als Regelgröße verwenden würde. Da ein solcher Block im Standardregelkreis nicht vorgesehen ist, wird statt dessen mit  $F_e$  als Regelgröße und  $-F_a$  als Führungsgröße gearbeitet. Aus  $F_e$  kann  $a_m$  entsprechend

$$a_m(t) = \frac{1}{m} F_e(t) \quad (\text{A.75})$$

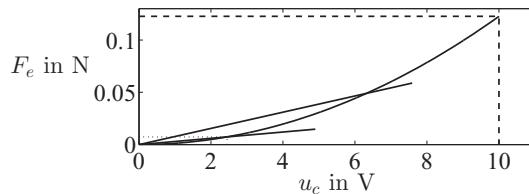
bestimmt werden. Der Vorwärtzweig in Abb. A.87 kann noch so umgeordnet werden, dass der durch den Integrator und das P-Glied mit der Verstärkung  $k_1$  dargestellte Regler wie üblich hinter der Mischstelle und die durch das Schwingungsglied und das P-Glied mit der Verstärkung  $k_3$  beschriebene Regelstrecke rechts davon liegt.

Die Aufgabe kann nun in folgenden Schritten gelöst werden:

1. Stellen Sie die Übertragungsfunktion für alle Elemente des Kompensationskreises auf.
2. Zeichnen Sie das Bodediagramm für die offene Kette (mit  $k_1 = 1$ ).

3. Bestimmen Sie aus den Anforderungen an die Dynamik des Kompensationskreises den erwünschten Amplitudengang der offenen Kette und daraus die Rückführverstärkung  $k_I$ .
4. Zeichnen Sie die Sensorausgangsgröße  $a_m(t)$  für  $a = 3g\sigma(t)$ , bewerten und korrigieren Sie gegebenenfalls Ihr Entwurfsergebnis.
5. Bestimmen Sie nun das lineare Näherungsmodell der Nichtlinearität, wenn die Beschleunigung an Stelle von  $3g$  den Wert  $20g$  besitzt.
6. Zeichnen Sie die Sensorausgangsgröße  $a_m(t)$  für  $a = 20g\sigma(t)$  unter Verwendung des neuen Näherungsmodells der Nichtlinearität, aber des alten Wertes für  $k_I$  und bewerten Sie das Ergebnis. Ist der Kompensationskreis robust in dem Sinne, dass die für  $a = 3g$  entworfene Rückführung auch für  $a = 20g$  eingesetzt werden kann?

Beachten Sie, dass für die Aufstellung des Lösungsweges keine Rechenschritte unternommen werden müssen, sondern der Lösungsweg direkt aus einer Betrachtung des Blockschaltbildes abgeleitet werden kann.



**Abb. A.88:** Linearisierung des nichtlinearen Zusammenhangs zwischen  $u_c$  und  $F_e$

**Lösung.** Im Folgenden wird die Zeit in Sekunden, die Masse in Kilogramm, der Weg in Metern, die Kraft in Newton und die Spannung in Volt angegeben.

1. Für die Pole des  $PT_2$ -Gliedes

$$G(s) = \frac{k_s}{T^2 s^2 + 2dT s + 1}$$

erhält man entsprechend Gl. (6.113)

$$s_{1/2} = -\omega_0 d \pm \omega_0 \sqrt{d^2 - 1} = -25000 \pm 43301j.$$

Die statische Verstärkung ergibt sich aus

$$k_s = \frac{1}{F_{50a}} = 81,55,$$

wobei  $F_{a50} = 50gm$  die Kraft bei einer Beschleunigung von  $50g$  ist. Damit gilt

$$G(s) = \frac{81,55}{4 \cdot 10^{-10} s^2 + 2 \cdot 10^{-5} s + 1}.$$

Den Proportionalitätsfaktor  $\alpha$  in der nichtlinearen Beziehung

$$F_e = \alpha u_c^2$$

erhält man aus dem Betriebsfall  $a_{\max} = 50g$ . Dabei wirkt auf die mittlere Elektrode die Kraft  $F_{a50}$ , die durch eine gleichgroße Kraft  $F_{e50}$  kompensiert werden muss. Dafür steht die Maximalspannung von  $u_{c\max} = 10$  zur Verfügung (Abb. A.88). Es gilt also

$$\alpha = \frac{50gm}{u_{c\max}^2} = 0,0012.$$

Die Nichtlinearität wird für den Betriebsfall  $a = 3g$  durch die lineare Beziehung

$$F_e = k_3 u_c$$

ersetzt. Für diesen Betriebsfall wird die Kompensationskraft

$$F_e = F_{e3} = 3gm$$

durch die Spannung

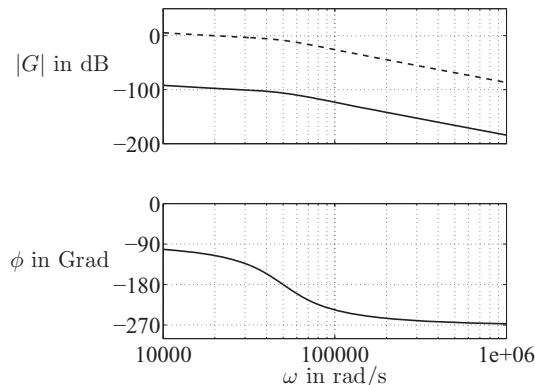
$$u_c = u_{c3} = \sqrt{\frac{F_{e3}}{\alpha}}$$

erzeugt, so dass man für den Verstärkungsfaktor  $k_3$

$$k_3 = \frac{F_{e3}}{u_{c3}} = \sqrt{3gm\alpha} = 0,003 \quad (\text{A.76})$$

erhält. Die quadratische Kennlinie wird also durch die untere lineare Kennlinie in Abb. A.88 ersetzt.

Der Proportionalitätsfaktor des P-Gliedes ganz links im Blockschaltbild ist  $m$ . Für den Block ganz rechts erhält man entsprechend Gl. (A.75) den Faktor  $\frac{1}{m}$ . Am E/A-Verhalten des Kompensationskreises ändert sich nichts, wenn man beide Blöcke weglässt und damit zum Standardregelkreis übergeht.



**Abb. A.89:** Frequenzkennlinien der offenen Kette

2. Die offene Kette ist durch

$$G_0(s) = G(s) k_I \frac{k_I}{s} = \frac{0,245k_I}{4 \cdot 10^{-10}s^3 + 2 \cdot 10^{-5}s^2 + s}$$

beschrieben, woraus man für  $k_I = 1$  die in Abb. A.89 mit den durchgezogenen Linien dargestellten Frequenzkennlinien erhält. Bei der Knickfrequenz  $\omega_0 = 5 \cdot 10^4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  verändert sich die Neigung des Amplitudenganges von  $-20 \text{ dB/Dekade}$  auf  $-60 \text{ dB/Dekade}$ .

3. Der Kompensationskreis muss bezüglich seines Führungsverhaltens entworfen werden. Der Sensor soll innerhalb von  $100\mu\text{s}$  eine Beschleunigung detektieren, die größer als  $3g$  ist. Diese Forderung kann dadurch realisiert werden, dass der Kreis für ein kleines Überschwingen ( $\Delta h \approx 10\%$ ) und die Überschwingzeit  $T_m \approx 10^{-4} \text{ s}$  entworfen wird. Entsprechend Abb. 11.3 bzw. Gl. (11.6) auf S. 519 muss der Einstellfaktor  $a$  größer als 1,5 sein und die Schnittfrequenz bei  $\omega_s \approx 3 \cdot 10^4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  liegen.

Um den Amplitudengang der offenen Kette an diese Vorgaben anzupassen, steht nur ein frei wählbarer Parameter  $k_I$  zur Verfügung. Daher kann man die Kenngrößen nicht genau, sondern nur näherungsweise erreichen. Verschiebt man den in Abb. A.89 mit der durchgezogenen Linie dargestellten Amplitudengang um 100 dB nach oben, so liegt die Schnittfrequenz bei  $\omega_s = 2 \cdot 10^4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ , während die Knickfrequenz bei  $5 \cdot 10^4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  bleibt. Der Abstand der Knickfrequenz von der Schnittfrequenz ist also größer, als es durch den Einstellfaktor von 1,5 vorgegeben ist. Der Amplitudengang hat oberhalb der Knickfrequenz jedoch nicht die gewünschte Neigung von  $-40 \text{ dB/Dekade}$ , sondern  $-60 \text{ dB/Dekade}$ .

Der entstehende Amplitudengang ist in Abb. A.89 durch die gestrichelte Linie gezeigt. Der Abstand beider Kurven entspricht

$$k_I = 75\,000 \approx 100 \text{ dB}.$$

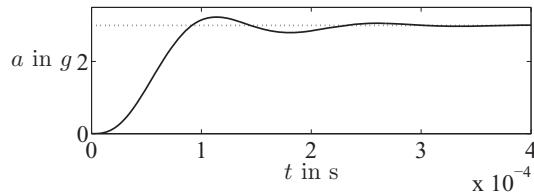


Abb. A.90: Messergebnis bei Beschleunigung  $3g$

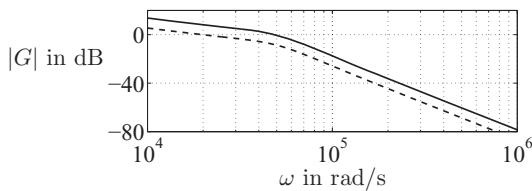
4. Abbildung A.90 zeigt die Ausgangsgröße des Sensors für die Führungsgröße  $a(t) = 3g\sigma(t)$ . Die Dynamik erfüllt die angegebenen Forderungen.  
 5. Linearisiert man die Nichtlinearität für  $a = 20g$ , so erhält man

$$F_e = k_{20} u_c$$

mit

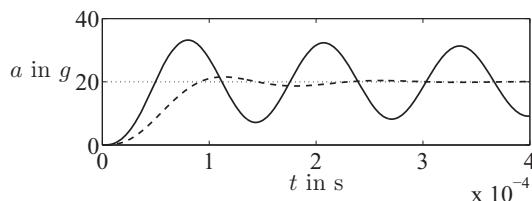
$$k_{20} = \sqrt{20g\alpha} = 0,0078$$

(vgl. Gl. (A.76)). Die nichtlineare Kennlinie wird jetzt also durch die obere der beiden in Abb. A.88 eingetragenen Geraden angenähert. Das betreffende P-Glied hat eine größere Verstärkung als das der ersten Näherung.



**Abb. A.91:** Verschiebung des Amplitudenganges der offenen Kette

6. Ersetzt man im Kompensationskreis den Faktor  $k_3$  durch  $k_{20}$ , so hat der offene Kreis eine höhere Verstärkung, die sich im Amplitudengang in einer Verschiebung nach oben bemerkbar macht. Dies ist in Abb. A.91 durch den Übergang vom gestrichelten zum durchgezogenen Amplitudengang veranschaulicht. Die Schnittfrequenz  $\omega_s$  wird vergrößert, was zu einem schnelleren Einschwingen des Kreises führt. Da der Phasengang durch die Verstärkungserhöhung nicht beeinflusst wird, wird der Phasenrand des Kreises erheblich reduziert, was zu einem erheblichen Schwingen führt. Dies kann man auch bei Betrachtung des Knickpunktabstandes erkennen. Wie Abb. A.91 zeigt, ist die Knickfrequenz jetzt kleiner als die Schnittfrequenz, also  $a < 1$ , was entsprechend Abb. 11.6 zu einer hohen Überschwingweite  $\Delta h$  führt.



**Abb. A.92:** Messergebnis bei  $a(t) = 20g\sigma(t)$

Die durchgezogene Linie in Abb. A.92 zeigt das Messergebnis. Als gestrichelte Linie ist im Vergleich dazu die auf den Endwert  $20g$  bezogene Kurve aus Abb. A.90 eingetragen. Dieses Verhalten würde man erhalten, wenn der Zusammenhang zwischen  $u_c$  und  $F_e$  linear wäre. Durch die Nichtlinearität erhält der Kompensationskreis aber eine wesentliche höhere Kreisverstärkung, die zu dem Schwingen führt.

Der Sensor ist robust gegenüber einer Veränderung des Arbeitspunktes in dem Sinne, dass er auch bei  $a = 20g$  das Überschreiten des Grenzwertes von  $3g$  innerhalb der vorgegebenen Zeit signalisiert. Möglichkeiten zur Verbesserung des Verhaltens bei hohen Beschleunigungen und damit der Robustheit liegen einerseits in der Verwendung der PI- an Stelle der I-Rückführung sowie andererseits in einer konstruktiven Veränderung des Sensors. Wenn man die Membran, die in der mikrosystemtechnischen Realisierung die mittlere Platte der Kapazität trägt, verändert, modifiziert man die Parameter der PT<sub>2</sub>-Approximation und kann dann ebenfalls eine größere Robustheit des linearen Kreises erreichen.

**Aufgabe A4.6 Positionierung eines Radioteleskops**

**Hinweise zur Modellbildung.** Die Modellierung der Elevationsbewegung erfolgt über den Drallsatz:

$$J_s \ddot{\Phi}(t) = u(t) - M_R(t) - M_A(t) + M_G(t).$$

$J_s$  ist das Trägheitsmoment der beiden Gewichte um den Schwerpunkt, der im Drehpunkt der Antenne liegt und wie folgt berechnet wird:

$$J_s = m_A l_A^2 + m_G l_G^2.$$

$\Phi$  ist der Elevationswinkel. Das Antriebsmoment  $u$  des Elevationsantriebs greift in  $\Phi$ -Richtung an.  $M_R$  ist das geschwindigkeitsproportionale Reibmoment

$$M_R(t) = k_R \dot{\Phi}(t).$$

$M_A$  und  $M_G$  sind die Momente, die durch die Gewichtskraft über die Hebel  $l_A$  und  $l_G$  auf den Drehpunkt wirken. Bei dem in Abb. A4.5 gezeigten Aufbau heben sich diese Momente auf:

$$m_A l_A = m_G l_G.$$

Mit der Drehwinkelgeschwindigkeit  $\omega = \dot{\Phi}$  ergibt sich aus dem Drallsatz die folgende Differentialgleichung für die Elevation:

$$J_s \dot{\omega}(t) + k_R \omega(t) = u(t).$$

**Hinweise zur Systemanalyse und zum Reglerentwurf.** Gehen Sie in folgenden Schritten vor:

1. Zeichnen Sie das Blockschaltbild der Regelstrecke. Welche Übertragungsglieder enthält die Regelstrecke? Welches Übertragungsverhalten hat die Regelstrecke?
2. Stellen Sie das Zustandsraummodell der Regelstrecke mit dem Zustandsvektor

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} \Phi(t) \\ \dot{\Phi}(t) \end{pmatrix}$$

auf.

3. Berechnen Sie zunächst das Übertragungsverhalten der Regelstrecke für impulsförmige Stellmomente  $u(t) = \delta(t)$  und stellen Sie den Verlauf von  $\Phi(t)$  in Grad dar. Beachten Sie die große Zeitkonstante des Systems.
4. Stellen Sie die Übertragungsfunktion der Regelstrecke  $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$  auf und geben Sie die Zahlenwerte der Parameter an.
5. Zeichnen Sie das Bodediagramm der Regelstrecke.
6. Zeichnen Sie das Blockschaltbild des geschlossenen Regelkreises. Nehmen Sie an, dass Windböen als impulsförmige Störgrößen wirken. Wo greift diese Störung an?
7. Welcher Regler muss gewählt werden, damit Sollwertfolge bei sprungförmigen Führungsgrößen erreicht wird?
8. Damit die maximale Winkelgeschwindigkeit nicht überschritten wird, muss die Überschwingzeit  $T_m$  ausreichend groß gewählt werden. Nehmen Sie  $\omega_{max} = \frac{10 \text{ Grad}}{\text{min}}$  an und ermitteln Sie  $T_m$  aus

$$\frac{1 \text{ rad}}{T_m} \approx \frac{10 \text{ Grad}}{\text{min}}.$$

9. Führen Sie den Reglerentwurf mit Hilfe des Frequenzkennliniendiagramms durch.
10. Simulieren Sie das Führungsverhalten für sprungförmige Führungsgrößen mit  $w(t) = \sigma(t)$  (im Bogenmaß) und stellen sie den Verlauf von  $\Phi(t)$  in Grad dar. Werden die Güteforderungen erfüllt?

# Anhang 2

## Kurze Einführung in MATLAB

### A2.1. Der MATLAB-Interpreter

MATLAB® ist ein Programm Paket für numerische Berechnungen, das insbesondere die Matrizenrechnung unterstützt. Es besteht aus einem MATLAB-Kern, der Algorithmen zur Durchführung wichtiger Matrizenoperationen wie beispielsweise Matrizenmultiplikation oder Eigenwertberechnung umfasst und außerdem über Funktionen für die grafische Aufbereitung der Ergebnisse verfügt. Für Regelungstechnische Anwendung gibt es als Ergänzung dazu die *Control System Toolbox*, in der viele Algorithmen für die Analyse dynamischer Systeme und den Reglerentwurf enthalten sind. Die im Folgenden behandelten Funktionen sind entweder im MATLAB-Kern oder in dieser Toolbox verfügbar. Die Syntax entspricht Release R2012a.

Um die hier beschriebenen Übungen durchführen zu können, reicht die in diesem Anhang gegebene Kurzbeschreibung von MATLAB aus. Wer „richtig“ programmieren will, sollte sich über den vollen Funktionsumfang von MATLAB anhand der Handbücher *MATLAB Reference Manual* und *MATLAB User Guide* informieren oder das Programmsystem z. B. mit dem Befehl `demo` am Rechner erkunden.

### A2.2 Die wichtigsten MATLAB-Befehle

**Aufruf.** Das Anklicken des MATLAB-Icons öffnet ein Fenster, den sogenannten *Workspace*, in dem man nach dem Prompt » die in MATLAB implementierten Funktionen aufrufen kann.

**Hilfen und Demos.** Alle Befehle haben eine On-line-Hilfe, die mit dem Befehl

```
» help <name>
```

aufgerufen wird, wobei für `<name>` ein Funktionsname oder der Name einer Toolbox steht. Darüberhinaus können Stichwortsuchen mit dem Befehl:

```
» lookfor <stichwort>
```

durchgeführt werden, wobei `<stichwort>` ein englischer Suchbegriff ist. Die Befehlsübersicht über die Regelungstechnischen Anwendungen der *Control System Toolbox* erhält man

mit

```
» help control
```

Eine kurze Übersicht über die *Control System Toolbox* erhält man nach dem Funktionsaufruf

```
» ctrldemo
```

MATLAB wird mit

```
» quit
```

beendet.

**Funktionsaufrufe.** MATLAB kennt im Wesentlichen nur einen Datentyp: Alle Variablen sind Matrizen, deren Elemente Fließkommazahlen doppelter Genauigkeit sind (möglicherweise komplexwertig). Skalare sind Matrizen der Dimension (1, 1). Es wird zwischen Zeilenvektoren ( $1, n$ ) und Spaltenvektoren ( $n, 1$ ) unterschieden.

Mit MATLAB führt man Berechnungen durch, indem man die Funktion `befehl` mit der Eingangsvariablen `einvar` aufruft und das Ergebnis einer Ausgabevariablen `ausvar` durch das Gleichheitszeichen zuordnet:

```
» ausvar=befehl(einvar)
```

Definiert man keine neue Ausgabevariable, so wird das Ergebnis in der Variable `ans` (für `answer`) gespeichert. Mehrere Eingabevariablen werden durch Kommas getrennt. Besteht das Ergebnis des Funktionsaufrufes aus mehreren Elementen, so sind die Ausgabevariablen in eckige (Matrix)-Klammern zu setzen:

```
» [aus1,aus2]=befehl(ein1,ein2,ein3)
```

Will man die Bildschirmausgabe der Ergebnisse unterdrücken (was insbesondere bei Zwischenresultaten in Form großer Matrizen sinnvoll ist), so wird der Funktionsaufruf mit einem Semikolon abgeschlossen:

```
» ausvar=befehl(einvar);
```

**Dateneingabe.** Matrizen werden interaktiv durch eckige Klammern umrahmt zeilenweise eingegeben. Jede Spalte wird durch einen Leerraum oder ein Komma, jede Zeile durch einen Zeilenvorschub (<Return>-Taste) oder ein Semikolon abgeschlossen. Die imaginäre Einheit `j` wird durch ein `i` oder `j` dargestellt (Vorsicht: `i` und `j` dürfen deshalb nicht als Variablennamen verwendet werden!).

Beispielsweise kann eine Matrix durch

```
» A=[ 2+0.1i 0  
      0         2-0.1i];
```

eingegeben werden. Als zweites Beispiel wird die Festlegung einer (4, 3)-Matrix A gezeigt, bei der auch auf einige elementare Funktionen und Konstanten zurückgegriffen wird

```
>> A=[ 2.4 5e-2 5+i ; 5 -7 8
      pi log(2) exp(1) ; sqrt(2), sin(3.1), cos(0)]
A=
    2.4000  0.0500  5.0000+1.000i
    5.0000  -7.0000  8.0000
    3.1416  0.6931  2.7183
    1.4142  0.0416  1.0000
```

Für größere Matrizen ist die interaktive Dateneingabe nicht geeignet. Mit einem beliebigen Editor legt man sich deshalb eine Datei an, in die die Elemente der Matrix zeilenweise geschrieben werden, wobei hier nur Zahlen und keine Funktionsaufrufe benutzt werden dürfen. Ist der Name einer solchen Datei z. B. B.dat, so sind nach der Ausführung des Befehls

```
>> load B.dat
```

der Matrix B die mit dem Editor eingegebenen Elemente zugeordnet.

Die Dimension einer Matrix A erhält man mit dem Befehl

```
>> size(A)
```

Das Ergebnis ist eine (1, 2)-Matrix, deren erstes Element die Zeilenanzahl und deren zweites Element die Spaltenanzahl angibt. Für die o. a. Matrix gilt

```
>> size(A)
ans=
    4      3
```

**Indizierung.** Auf die Elemente einer Matrix kann einzeln zugegriffen werden. Benötigt man beispielsweise das Element mit dem Index (2, 3) der Matrix A als Variable element, so gibt man

```
>> element=A(2,3)
```

ein.

**Spezielle Befehle.** Um spezielle Matrizen einfacher anlegen zu können, gibt es den Befehl

```
>> I = eye(n);
```

der eine ( $n, n$ )-Einheitsmatrix I anlegt, und die Befehle

```
>> O = zeros(n,m);
>> E = ones(n,m);
```

die eine ( $n, m$ )-Nullmatrix O bzw. eine ausschließlich mit Einsen gefüllte Matrix E anlegen.

Durch

```
» At=A' ;
```

wird die Matrix A transponiert bzw. die zu ihr konjugiert komplexe, transponierte Matrix gebildet. Auf diese Weise ist auch eine Umwandlung von Zeilen- in Spaltenvektoren und umgekehrt möglich.

Die wichtigsten Matrizenfunktionen dienen der Eigenwertberechnung

```
» eig(A)
```

der Berechnung der Inversen

```
» inv(A)
```

und der Berechnung des Rangs

```
» rank(A)
```

einer Matrix A. In den ersten beiden Fällen muss die Matrix selbstverständlich quadratisch sein. Mit der Funktion eig können außer den Eigenwerten auch die zugehörigen Eigenvektoren berechnet werden, wenn man den Funktionsaufruf

```
» [V, D]=eig(A) ;
```

verwendet. Dabei wird der Variablen V die Matrix mit den Eigenvektoren und der Variablen D eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten der Matrix A zugewiesen.

**Scripte.** Wenn man eine bestimmte Befehlsfolge häufig wiederholen will, wie es bei Analyse- und Entwurfsaufgaben üblich ist, so legt man sich zweckmäßigerweise eine Datei script.m mit einem beliebigen Namen script und der Erweiterung .m an. Dafür ruft man mit

```
» edit
```

den MATLAB-Editor auf und schreibt die verwendeten Befehle untereinander. Nachdem man die Datei im Arbeitsverzeichnis von MATLAB (das man gegebenenfalls mit

```
» cd Verzeichnis
```

in Verzeichnis verändert kann) gespeichert hat, kann man das Script mit

```
» script
```

aufrufen und die aufgeführte Befehlsfolge wird ausgeführt. Will man bestimmte Analyse- und Entwurfsschritte oder Parameter ändern, so muss man dies nur mit dem Editor in der Datei script tun und kann die Befehlsfolge von neuem starten.

**Grafische Ausgaben.** MATLAB vereinfacht die grafische Darstellung von Funktionen in vielfältiger Weise. Darauf kann hier nur kurz eingegangen werden. Viele Funktionen wie `step` oder `bode` führen zur grafischen Ausgabe der berechneten Funktionen. Sie können aber auch mit einer „linken Seite“ aufgerufen werden:

```
>> [Y, T]=step(System);
>> [Betrag, Phase, Frequenz] = bode(System);
```

Im ersten Fall sind `Y` und `T` zwei gleich lange Vektoren, in denen die Werte der Zeitpunkte und die zugehörigen Werte der Übergangsfunktion von `System` gespeichert sind. Im zweiten Fall sind in `Betrag`, `Phase` und `Frequenz` der Betrag und das Argument des Frequenzganges bzw. die Frequenz, bei der der Frequenzgang berechnet wurde, angegeben. Mit der Funktion

```
>> plot(T, Y)
```

kann die in `T` und `Y` gespeicherte Funktion  $y(t)$  grafisch dargestellt werden. Für das Bodediagramm wird durch die Aufrufe

```
>> subplot(2, 1, 1)
>> semilogx(Frequenz, 20*log(Betrag(:)));
>> subplot(2, 1, 2)
>> semilogx(Frequenz, Phase(:));
```

das Bodediagramm gezeichnet. Dabei bewirken die `subplot`-Aufrufe, dass das Bild in 2 Teile (1. Argument) aufgeteilt wird, die in 1 Spalte (2. Argument) angeordnet sind und zunächst das erste dieser Teilbilder beschrieben wird (3. Argument). Mit der Funktion `semilogx` wird ein Diagramm gezeichnet, bei der die  $x$ -Achse logarithmisch geteilt ist.

Eine Veränderung des Massstabs grafischer Darstellungen erreicht man mit der Funktion

```
>> axis([xmin xmax ymin ymax]);
```

wobei die den Variablen `xmin`, `xmax`, `ymin` bzw. `ymax` zugewiesenen Zahlenwerte die Grenzen der darzustellenden Bereiche der  $x$ - bzw.  $y$ -Achse bezeichnen.

## A2.3 Modellformen und Analysemethoden

### A2.3.1 Analyse linearer Systeme im Zeitbereich

Das Zustandsraummodell

$$\text{System : } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y(t) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}(t) + du(t) \end{cases}$$

wird durch die Matrix  $\mathbf{A}$ , die Vektoren  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$  und den Skalar  $d$  festgelegt. Bei den nachfolgenden MATLAB-Aufrufen werden Variable mit denselben Namen  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  und  $d$  verwendet.

Die Definition des Systems in Zustandsraumdarstellung erfolgt durch

```
>> System = ss(A, b, c, d);
```

wobei `System` ein beliebig wählbarer Name für das betrachtete System ist, beispielsweise `Strecke` oder `Regler`.

Folgende Funktionen werden häufig benötigt:

```
>> [A, b, c, d] = ssdata(System)
```

Auslesen des Zustandsraummodells eines Systems; man erhält auch dann ein Zustandsraummodell, wenn `System` durch eine Übertragungsfunktion definiert wurde (vgl. Abschn. 13.3)

```
>> printsy(A, b, c, d)
```

Ausgabe des Zustandsraummodells auf dem Bildschirm

```
>> eig(A)
```

Berechnung der Eigenwerte bzw. der Eigenfrequenzen und Dämpfungsfaktoren

```
>> damp(A)
```

Da die Ausgaben auf dem Bildschirm ausreichend kommentiert sind, lernt man die Wirkung der Befehle am besten dadurch kennen, dass man sie an einem Beispiel ausprobiert.

### A2.3.2 Analyse linearer Systeme im Frequenzbereich

Kontinuierliche Systeme

$$\text{System : } Y(s) = G(s) U(s)$$

werden im Frequenzbereich durch die gebrochen rationale Übertragungsfunktion  $G(s)$  beschrieben, die in Zähler- und Nennerpolynom zerlegt werden kann:

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)}.$$

Polynome werden in MATLAB durch Vektoren dargestellt, die die Polynomkoeffizienten in Richtung fallender Exponenten enthalten, beispielsweise

$$n = [1 \ 3 \ 0 \ 1] \quad \text{für} \quad N(s) = s^4 + 3s^3 + 1.$$

Dementsprechend wird  $G(s)$  durch ein Paar  $z, n$  von Polynomen beschrieben und ein System in Frequenzbereichsdarstellung durch

```
System = tf(z, n);
```

definiert.

Folgende Funktionen geben die Übertragungsfunktion aus:

- |                                             |                                                                                                                                                                                                                 |
|---------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| » <code>[z, n] = tfdata(System, 'v')</code> | Auslesen der Übertragungsfunktion eines Systems <code>System</code> ; man erhält auch dann eine Übertragungsfunktion, wenn <code>System</code> durch ein Zustandsraummodell definiert wurde (vgl. Abschn. 13.3) |
| » <code>printsys(z, n);</code>              | Ausgabe der Übertragungsfunktion auf dem Bildschirm                                                                                                                                                             |

Da Totzeitsysteme keine gebrochen rationale Übertragungsfunktion haben, können diese Systeme nicht ohne eigenen Programmieraufwand mit MATLAB behandelt werden. Man kann jedoch mit der Funktion

```
» [z, n] = pade(Tt, n);
```

die Padé-Approximation  $n$ -ter Ordnung für das Totzeitglied  $G(s) = \exp(-sT_t)$  berechnen, wenn der Variablen `Tt` zuvor der Wert der Totzeit zugewiesen wurde. Um keine numerischen Probleme zu bekommen, wählt man `n` nicht größer als fünf. Die totzeitfreie Approximation  $n$ -ter Ordnung von `System` erhält man mit dem Funktionsaufruf

```
» SystemApprox = pade(System, n);
```

### A2.3.3 Weitere Analysefunktionen

Die folgenden Funktionen sind für Zeitbereichs- und Frequenzbereichsmodelle sehr ähnlich:

- |                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|--------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| » <code>dcgain(System)</code>              | Berechnung von<br>$k_s = -c^T A^{-1} b + d$ bzw. $k_s = G(0)$<br>(auch für instabile Systeme, für die $k_s$ nicht die Bedeutung der statischen Verstärkung hat!)                                                                                                           |
| » <code>tzero(System)</code>               | Berechnung der Nullstellen eines Systems                                                                                                                                                                                                                                   |
| » <code>minSystem = minreal(System)</code> | Bestimmung der minimalen Realisierung eines Systems <code>System</code> , die man aus der Frequenzbereichsdarstellung durch Kürzen von Linearfaktoren im Zähler- und Nennerpolynom erhält, die aber auch aus dem Zustandsraummodell bestimmt werden kann (vgl. Kap. II-3). |

» pzmap (System)	Grafische Darstellung des PN-Bildes
» step (System)	Berechnung der Übergangsfunktion und grafische Ausgabe auf dem Bildschirm
» impulse (System)	Berechnung der Gewichtsfunktion und grafische Ausgabe auf dem Bildschirm
» initial (System, $x_0$ )	Berechnung der Eigenbewegung des Systems mit Anfangszustand $x_0$
» lsim (System, $u$ , $t$ , $x_0$ )	Berechnung der Ausgangsgröße für eine beliebig vorgegebene Eingangsgröße; $u$ und $t$ sind zwei Zeilenvektoren gleicher Länge, in denen der Wert der Eingangsgröße $u(t)$ und der zugehörige Zeitpunkt $t$ stehen.
» quiver (X, Y, U, V)	Grafische Darstellung des Vektorfeldes, wobei jeder Geschwindigkeitsvektor in den in X und Y angegebenen Koordinaten beginnt und die in U und V angegebene Richtung hat
» bode (System)	Berechnung des Bodediagramms und grafische Darstellung auf dem Bildschirm
» nyquist (System)	Berechnung der Ortskurve und grafische Darstellung auf dem Bildschirm
» margin (System)	Berechnung des Amplitudenrandes und des Phasenrandes eines Systems, grafische Ausgabe des Bodediagramms und Markierung der Stabilitätsränder
» rlocus (offeneKette)	Berechnung der Wurzelortskurve der offenen Kette und grafische Darstellung
» rlocfind (offeneKette)	Auswahl eines Punktes der Wurzelortskurve der offenen Kette, die auf dem Bildschirm dargestellt wird

### A2.3.4 Transformationen zwischen unterschiedlichen Modellformen

Die folgenden Funktionen dienen der Überführung eines Zustandsraummodells mit verschwindendem Anfangszustand  $x_0 = 0$  in eine Übertragungsfunktion oder umgekehrt bzw. der Überführung des Zustandsraummodells in eine kanonische Normalform.

```
» [z, n] = tfdata(System)
```

Auslesen der Übertragungsfunktion mit Zählerpolynom  $z$  und Nennerpolynom  $n$  bzw. Berechnung der Übertragungsfunktion  $G(s)$

$$G(s) = c^T (sI - A)^{-1} b + d$$

aus dem Zustandsraummodell (je nach Definition von System)

```
» [A, b, c, d] = ssdata(System)
```

Auslesen des Zustandsraummodells bzw. Berechnung des Zustandsraummodells in Regelnormalform, das die gegebene Übertragungsfunktion besitzt (je nach Definition von System)

```
» kanonSystem = ss2ss(System, inv(T))
```

Berechnung des transformierten Zustandsraummodells (5.26) – (5.30), wobei die Transformationsmatrix  $T$  wie in Gl. (5.25) verwendet wird.

```
» [kanonSystem, Tinv] = canon(System, 'modal')
```

Berechnung der kanonischen Normalform (5.52) des Zustandsraummodells; wird die Typangabe 'companion' verwendet, so entsteht die Beobachtungnormalform

### A2.3.5 Zusammenfassung von Übertragungsgliedern

Für die drei Standardfälle einer Zusammenschaltung zweier Übertragungsglieder gibt es Funktionen, die aus den Übertragungsfunktionen bzw. den Zustandsraummodellen der beiden Elemente das Modell der Zusammenschaltung berechnen.

Reihenschaltung:

```
» Reihenschaltung = series(System1, System2)
```

Parallelschaltung:

```
» Parallelschaltung = parallel(System1, System2)
```

Rückführschaltung:

```
» Rueckfuehrschaltung  
= feedback(Vorwaertszweig, Rueckwaertszweig, -1)
```

Bei der Rückführschaltung wird von einer negativen Rückkopplung ausgegangen (-1 kann weggelassen werden) oder es muss durch +1 die positive Rückkopplung angegeben werden.

## A2.4 Zusammenstellung der Programme

<b>Programm 5.1</b>	Systemanalyse im Zeitbereich (Beispiel 5.14: Analyse einer Raumtemperaturregelung) .....	223
<b>Programm 6.1</b>	Systemanalyse im Frequenzbereich (Beispiel 6.11: Analyse einer Raumtemperaturregelung) .....	340
<b>Programm 10.1</b>	Reglerentwurf mit Hilfe der Wurzelortskurve (Beispiel 10.4: Stabilisierung des invertierten Pendels) ..	509
<b>Programm 11.1</b>	Reglerentwurf mit dem Frequenzkennlinienverfahren (Beispiel 11.2: Geschwindigkeitsregelung eines Gleichstrommotors) .....	542
<b>Programm A.1</b>	Lösung der Aufgabe 8.19: Stabilitätseigenschaften von Drehrohrofen und Klinkerkühler .....	658
<b>Programm A.2</b>	Lösung der Aufgabe 10.14: Wurzelortskurve eines Schwingkreises .....	670
<b>Programm A.3</b>	Lösung der Aufgabe 10.15: Stabilisierung der Rollbewegung eines Schiffes .....	675

# Anhang 3

## Aufgaben zur Prüfungsvorbereitung

Dieser Anhang enthält Aufgaben, für deren Lösung der gesamte Stoff dieses Buches verwendet werden muss und die sich deshalb für die Prüfungsvorbereitung eignen.

### **Aufgabe A3.1** *Grundbegriffe der Regelungstechnik*

Ordnen Sie folgende Begriffe den Modellierungs-, Analyse- und Entwurfsverfahren der Regelungstechnik zu und erläutern Sie ihre Bedeutung:

Anstiegszeit, Bandbreite, Eigenvorgang, Empfindlichkeitsfunktion, Folgeregelung, Gleichgewichtszustand, kanonische Zustandsvariablen, Knickpunktabstand, Kreisverstärkung, Linearität, Nulldynamik, Resonanzfrequenz, statisches Verhalten, stationäres Verhalten, Stabilitätsgrenze, Übergangsmatrix □

### **Aufgabe A3.2** *Dynamik linearer Systeme*

Welche Bedeutung haben Nullstellen, Pole, Eigenwerte, relativer Grad, Zeitkonstanten und Grenzfrequenz für das Systemverhalten? Wie berechnet man diese Größen aus den Zeitbereichs- und Frequenzbereichsmodellen linearer Systeme? □

### **Aufgabe A3.3** *Modelle dynamischer Systeme*

In der Regelungstechnik werden sowohl Modelle für das Zeitverhalten dynamischer Systeme als auch Frequenzbereichsbeschreibungen eingesetzt. Einige von ihnen erfassen nur das E/A-Verhalten.

1. Stellen Sie diese Modelle einschließlich der Voraussetzungen zusammen, unter denen diese Modelle verwendet werden können.
2. Kennzeichnen Sie, durch welche Transformationen bzw. unter welchen zusätzlichen Annahmen Sie von einer Modellform zu einer anderen kommen können. □

**Aufgabe A3.4 Wichtige Eigenschaften von Übertragungsgliedern**

1. Wie können Übertragungsglieder klassifiziert werden? Geben Sie für alle Klassen technische Beispiele an.
2. Wie lauten Zustandsraummodell und Übertragungsfunktion dieser Übertragungsglieder in ihrer einfachsten Form?
3. Welche Eigenschaften besitzen diese Übertragungsglieder? Zeichnen Sie qualitativ die Übergangsfunktion, die Gewichtsfunktion, das PN-Bild, die Ortskurve und das Bode-diagramm der wichtigsten Übertragungsglieder auf.
4. Kennzeichnen Sie in den Diagrammen, wo Sie wichtige Kenngrößen wie statische Verstärkung, Summenzeitkonstante, Dämpfung usw. ablesen können bzw. wie Sie Aussagen über die Sprungfähigkeit, Minimalphasigkeit und Stabilität erhalten.
5. Welches Übergangsverhalten und welches stationäre Verhalten haben diese Übertragungsglieder? □

**Aufgabe A3.5 Stabilität dynamischer Systeme**

1. Welche Stabilitätsdefinitionen kennen Sie? Welcher Zusammenhang besteht zwischen diesen Eigenschaften?
2. Mit welchen Modellen können Sie diese Eigenschaften untersuchen?
3. Mit welchen Kriterien können Sie diese Stabilitätseigenschaften für die Regelstrecke bzw. für den Regelkreis überprüfen? □

**Aufgabe A3.6 Stabilität von Regelkreisen**

Das Verhalten vieler Regelstrecken lässt sich in guter Näherung durch  $PT_2$ - bzw.  $PT_tT_1$ -Glieder beschreiben. Diese Näherungen haben nicht nur den Vorteil, dass die Modelle eine kleine dynamische Ordnung und wenige festzulegende Parameter besitzen. Die Stabilitäts-eigenschaften der mit diesen Regelstreckenmodellen entstehenden Regelkreise sind überschaubar.

1. Wird ein P-Regler verwendet, so ist der Regelkreis mit  $PT_2$ -Strecke für beliebige (positive) Reglerverstärkungen stabil. Für die  $PT_tT_1$ -Strecke gibt es eine obere Schranke  $k_{krit}$ , so dass die Stabilität für  $k < k_{krit}$  gesichert ist. Wie können Sie diese Aussagen anhand des charakteristischen Polynoms des geschlossenen Kreises, anhand des Bodediagramms und der Ortskurve der offenen Kette bzw. mit Hilfe der Wurzelortskurve beweisen?
2. Die angegebenen Aussagen gelten nur, solange man die Regelstrecke tatsächlich als  $PT_2$ - bzw.  $PT_tT_1$ -Glied auffassen kann. Zeigen Sie, dass die entstehenden Regelkreise robust gegenüber Approximationsfehlern sind, d. h., dass man trotz kleiner Approximationsfehler von der Stabilität des vereinfachten Modells des Regelkreises auf die Stabilität des realen Regelkreises schließen kann. Woran erkennen Sie Grenzen für die Robustheit? Begründen Sie, warum es eine obere Schranke  $\bar{k}_{krit}$  für die Reglerverstärkung gibt, so dass der reale Regelkreis für  $k > \bar{k}_{krit}$  instabil sein kann.

3. Wie verändern sich alle vorherigen Betrachtungen, wenn an Stelle eines P- ein I-Regler verwendet wird?

**Aufgabe A3.7 Vorsteuerung und Rückführsteuerung**

1. Vergleichen Sie die Eigenschaften von Steuerungen in der offenen Wirkungskette und Steuerungen im geschlossenen Wirkungskreis. Wo werden diese Arten der Steuerung in technischen Anwendungen eingesetzt?
2. Wie entwirft man Vorsteuerungen?

**Aufgabe A3.8 Modelle und Eigenschaften von Regelkreisen**

1. Wie kann man die folgenden Kenngrößen von Regelkreisen berechnen:  
Führungsübertragungsfunktion, Störübergangsfunktion, bleibende Regelabweichung, Kreisverstärkung, Stabilitätsrand, Pole, Empfindlichkeit?
2. Was besagt das Innere-Modell-Prinzip und wie kann man es für sprungförmige Störsignale erfüllen?

**Aufgabe A3.9 Auswahl der Reglerstruktur**

Die Reglerstruktur wird anhand struktureller Eigenschaften der Regelstrecke festgelegt. Stellen Sie die Regeln für die Wahl der Reglerstruktur zusammen, wenn folgende Forderungen erfüllt werden sollen:

- Der Regelkreis soll stabil bzw. I-stabil sein.
- Der Regelkreis soll die Eigenschaft der Sollwertfolge besitzen.
- Das Messrauschen soll ausreichend unterdrückt werden.
- Der Regelkreis soll robust gegenüber Unsicherheiten des Regelstreckenmodells sein.
- Das Führungsverhalten und das Störverhalten sollen gegebene Dynamikforderungen erfüllen.

Klassifizieren Sie die Regelungsaufgaben in Abhängigkeit davon, welche dieser Forderungen von besonderer Bedeutung sind, und stellen Sie die für die einzelnen Klassen von Regelungsaufgaben zutreffenden Forderungen an die Reglerstruktur zusammen. Welche Beschränkungen ergibt sich für die Wahl der Reglerparameter aufgrund des Gleichgewichts-theorems?

**Aufgabe A3.10 Reglerentwurf**

1. Welche Entwurfsverfahren für einschleifige Regelkreise kennen Sie?
2. Vergleichen Sie die Annahmen, von denen die einzelnen Verfahren ausgehen, und geben Sie an, für welche Anwendungsfälle sich diese Verfahren deshalb besonders gut eignen.
3. Schreiben Sie das Vorgehen beim Entwurf für die einzelnen Verfahren in Form eines Programmablaufplanes auf. Wo treten Iterationsschleifen auf? Wann werden diese Schleifen durchlaufen und welche Veränderungen gegenüber vorhergehenden Entwurfsschritten finden in ihnen statt? □

## Anhang 4

# Projektaufgaben

Die in diesem Anhang zusammengestellten Projektaufgaben betreffen den gesamten Lösungsweg von Regelungsaufgaben beginnend bei der Modellbildung über die Analyse der Regelstrecke bis zum Reglerentwurf. Sie eignen sich für vorlesungsbegleitende Übungen, bei denen die Studenten die in der Vorlesung erläuterten Methoden unter Verwendung von MATLAB an praxisnahen Beispielen erproben. Die Projektaufgaben lassen erkennen, wie sich die einzelnen Verfahren unter den für die unterschiedlichen Anwendungsbeispiele charakteristischen Randbedingungen, Regelstreckeneigenschaften und Güteforderungen anwenden lassen, und es wird offensichtlich, welche von mehreren möglichen Vorgehensweisen die für das betrachtete Beispiel günstigste ist.

Die Projektaufgaben haben steigenden Schwierigkeitsgrad. Für die erste Aufgabe sind die wichtigsten Lösungsschritte in diesem Buch im Zusammenhang mit Beispielen und Übungsaufgaben erläutert und müssen lediglich nachvollzogen werden. Für die zweite Aufgabe wird der Lösungsweg in der Aufgabenstellung vorgegeben, für die folgenden muss der Lösungsweg selbst geplant werden.

Ähnlich verhält es sich mit der Aufbereitung der Aufgabenstellung. Bei der ersten Aufgabe sind die Güteforderungen so vorgegeben, wie sie für die Anwendung der Entwurfsverfahren gebraucht werden, bei den weiteren Aufgaben müssen die aus praktischer Sicht formulierten Forderungen erst in diese Form gebracht werden. Die Aufgabentexte spiegeln die in der Praxis häufig auftretende Situation wider, dass einerseits überflüssige Informationen vorliegen, andererseits fehlende Angaben durch sinnvolle Annahmen ergänzt werden müssen.

Bei der Bearbeitung der Projektaufgaben sollen die Leser selbst entscheiden, welche Lösungsschritte sie im Einzelnen gehen wollen. Die folgenden Hinweise dienen lediglich als Anregung:

- Beginnen Sie mit einem Blockschaltbild für die zu entwerfende Regelung.
- Planen Sie den Lösungsweg und lösen Sie die Teilaufgaben anschließend in den zuvor festgelegten Schritten. Modifizieren Sie Ihren Lösungsweg, wenn dies die Analyseergebnisse erforderlich machen.
- Analysieren Sie die Regelstrecke und bewerten Sie die Regelungsaufgabe und die zu erwartende Regelgüte anhand der Stabilitätseigenschaften, der statischen

Verstärkung, der Pole und Nullstellen sowie der Ortskurve und des Frequenzkennliniendiagramms der Regelstrecke.

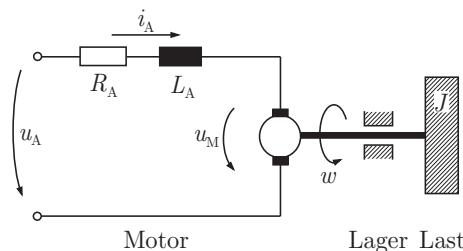
- Transformieren Sie das Regelstreckenmodell in Abhängigkeit von der betrachteten Analyseaufgabe gegebenenfalls in eine Normalform.
- Entscheiden Sie, ob die Güte der Regelung im Wesentlichen durch das Führungsverhalten oder das Störverhalten bestimmt wird.
- Vergleichen Sie die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises mit denen der Regelstrecke. Kann der Regelkreis wesentlich schneller gemacht werden als die Regelstrecke?
- Sehen Sie sich bei der Bewertung der Regelgüte nicht nur den Verlauf der Regelgröße, sondern auch den Verlauf der Stellgröße an und bewerten Sie diesen in Bezug auf Stellgrößenbeschränkungen.
- Untersuchen Sie den erhaltenen Regelkreis auch unter der Wirkung von Messstörungen<sup>2</sup>.

Die in den Aufgabenstellungen angegebenen linearen Modelle beschreiben die Regelstrecken in der Umgebung eines Arbeitspunktes. Berücksichtigen Sie bei der Analyse des Regelkreises Nichtlinearitäten wie z. B. Stellgrößenbeschränkungen.

#### Aufgabe A4.1 Drehzahlregelung eines Gleichstrommotors



Für den in Abb. A4.1 gezeigten Gleichstrommotor soll eine Drehzahlregelung entworfen werden, die als Stellgröße die Spannung  $u_A$  verwendet. Einer sprungförmigen Änderung des Drehzahlsollwertes soll die Drehzahl innerhalb von einer Sekunde folgen, wobei das Überschwingen höchstens 20 Prozent betragen darf.



**Abb. A4.1:** Gleichstrommotor

Der Motor hat folgende Parameter:

$$R_A = 15 \Omega \quad L_A = 200 \text{ mH}$$

$$J = 0,3 \frac{\text{Nm}^2}{\text{rad}} \quad k_T = 4 \frac{\text{Nm}}{\text{A}}$$

$$k_M = 4 \frac{\text{Vs}}{\text{rad}} \quad k_L = 0,2 \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$$

<sup>2</sup> Die MATLAB-Funktion `randn(n)` erzeugt eine  $(n, n)$ -Matrix mit normalverteilten Zufallszahlen (Mittelwert 0, Standardabweichung 1)

Untersuchen Sie auch die Robustheit des Reglers bezüglich einer Veränderung des Trägheitsmoments  $J$ .  $\square$

#### Aufgabe A4.2 Stabilität einer Flugregelung



Als Beispiel für eine Flugregelung wurde in Aufgabe 11.6 die Regelung der Rollbewegung betrachtet, wobei als vereinfachtes Regelstreckenmodell die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{k}{I_{xx}s^2}$$

verwendet wurde (Beispielparameter:  $\frac{k}{I_{xx}} = 2$ ). Bei dieser Regelung ist der Ausschlag des Querruders die Stellgröße  $u$  und der Rollwinkel die Regelgröße  $y$ . Die Regelstrecke ist offensichtlich instabil.

Man könnte auf die Idee kommen, dass man die Rollbewegung am besten dadurch stabilisiert, dass man den Ruderausschlag  $u$  umso größer macht, je größer der Rollwinkel  $y$  ist, also eine P-Regelung einsetzt. Begründen Sie in den folgenden Schritten, warum dieses Regelungsprinzip nicht funktioniert und entwerfen Sie einen Regler, mit dem die Rollbewegung stabilisiert werden kann.

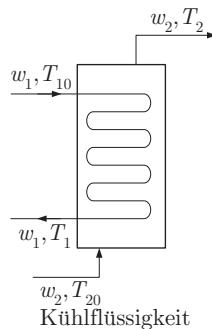
1. Stellen Sie das Reglertypgesetz auf.
2. Untersuchen Sie die Stabilität des Regelkreises in Abhängigkeit von der Reglerverstärkung mit dem Hurwitzkriterium, dem Nyquistkriterium, anhand des Bodediagramms und anhand der Wurzelortskurve.
3. Bei schnellen Änderungen der Stellgröße muss man berücksichtigen, dass das Querruder durch ein hydraulisches Ruderstellsystem in die durch den Regler vorgeschriebene Winkelstellung gebracht wird (vgl. Aufgabe 10.9). Zur Vereinfachung der Betrachtungen wird dieses Stellglied durch ein PT<sub>1</sub>-Glied mit der Zeitkonstante  $T_1$  approximiert. Wie verändert das Stellglied das Bodediagramm der offenen Kette bzw. die Wurzelortskurve und wie wirkt es sich auf die Stabilität des Regelkreises aus? Untersuchen Sie diese Frage in Abhängigkeit von der Zeitkonstanten  $T_1$ .
4. Welchen Regler müssen Sie einsetzen, damit der Regelkreis mit und ohne verzögern-dem Stellglied stabil ist?
5. Bewerten Sie die Regelgüte anhand von Simulationsuntersuchungen und untersuchen Sie die Robustheit bezüglich einer Veränderung des Trägheitsmoments  $I_{xx}$ , die aus einer unterschiedlichen Beladung des Flugzeugs resultiert.  $\square$

#### Aufgabe A4.3 Temperaturregelung eines Wärmeübertragers



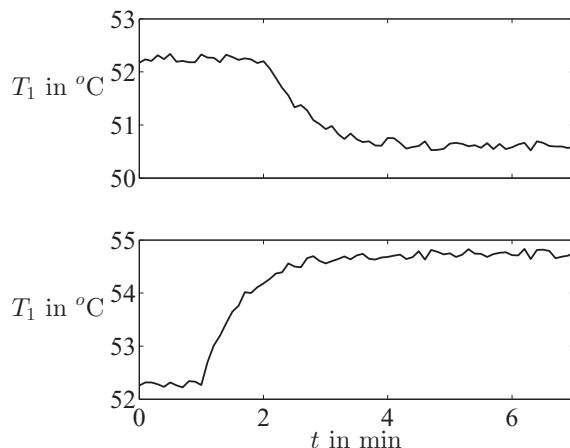
Bei Wärmeübertragnern wird die mit dem Massenstrom  $w_1$  und der Temperatur  $T_{10}$  einströmende Flüssigkeit durch eine Kühlflüssigkeit auf die Temperatur  $T_1$  abgekühlt, wobei sich die Kühlflüssigkeit mit dem Massenstrom  $w_2$  von der Temperatur  $T_{20}$  auf die Temperatur  $T_2$  erwärmt (Abb. A4.2).

Im stationären Zustand stellt sich bei den Eintrittstemperaturen  $T_{10} = 85^\circ\text{C}$  und  $T_{20} = 20^\circ\text{C}$  der Arbeitspunkt  $\bar{T}_1 = 52,25^\circ\text{C}$  und  $\bar{T}_2 = 41,83^\circ\text{C}$  ein. Um die Eigenschaften des Wärmeübertragers zu ermitteln, werden zwei Experimente durchgeführt, deren Ergebnisse in Abb. A4.3 gezeigt werden. Im ersten Experiment wird zur Zeit  $t = 2\text{ min}$  der Zufluss



**Abb. A4.2:** Wärmeübertrager

der Kühlflüssigkeit vom Arbeitspunktwert  $w_2 = 3 \frac{\text{kg}}{\text{min}}$  um  $0,5 \frac{\text{kg}}{\text{min}}$  verändert. Die dabei gemessene Temperaturverlauf  $T_1$  ist im oberen Teil der Abbildung zu sehen. Im zweiten Experiment wird die Temperatur  $T_{10}$  von  $85^\circ\text{C}$  auf  $90^\circ\text{C}$  erhöht, wobei die im unteren Teil der Abbildung gezeigte Kurve erhalten wird.



**Abb. A4.3:** Ergebnisse der zwei Experimente mit dem Wärmeübertragers

Es soll eine Regelung entworfen werden, die die Temperatur  $T_1$  auf einem vorgegebenen Sollwert hält. Bei Sollwertänderung soll der neue Sollwert ohne Überschwingen erreicht werden. Bei einer angenommenen sprungförmigen Änderung der Temperatur  $T_{10}$  um 10 Kelvin soll die Temperatur  $T_1$  ohne Überschwingen ( $\Delta e = 0$ ) zum Sollwert zurückkehren. □

**Aufgabe A4.4 Regelung einer Verladebrücke**

Mit der im Beispiel 5.1 beschriebenen Verladebrücke soll eine Last von der Position  $s_0$  in die Position  $s_e$  gebracht werden. Entwerfen Sie eine Regelung, mit der diese Aufgabe erfüllt wird. Erweitern Sie die Regelung um eine Trajektorienplanung und eine Vorsteuerung und vergleichen Sie die mit beiden Steuerungsstrukturen erreichten Ergebnisse. Der Positionswechsel der Last soll so durchgeführt werden, dass die Last ohne bzw. mit nur geringem Überschwingen die vorgegebene Endposition erreicht.

Das Modell aus Beispiel 5.1 berücksichtigt keine Reibung. Was ändert sich am Modell und an der Regelung, wenn für die Laufkatze eine geschwindigkeitsproportionale Reibung angesetzt wird?

**Aufgabe A4.5\* Entwurf der Kompensationsrückführung im Airbag-Sensor**

Der heute in vielen Autos eingebaute Airbag soll auslösen, wenn die Bremsbeschleunigung die dreifache Erdbeschleunigung überschreitet ( $a \geq 3g$ ). Der dafür notwendige Beschleunigungssensor besteht aus einem kapazitiven Sensor sowie einer Kompensationsschaltung, die im Mittelpunkt der folgenden Betrachtungen steht.

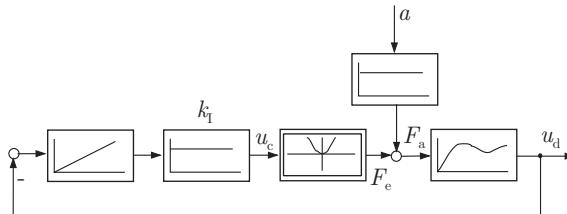
Der Sensor besteht im Prinzip aus drei Elektroden, die man sich vereinfacht als drei parallel angeordnete Platten vorstellen kann, von denen die mittlere elastisch gelagert ist und die Masse  $m$  hat. Zwischen jeweils zwei benachbarten Platten bestehen Kapazitäten, die zunächst gleich groß sind. Durch eine Beschleunigung  $a$  des Sensors wird die mittlere Platte gegenüber den beiden äußeren durch die Kraft  $F_a = ma$  verschoben, wodurch sich die eine Kapazität vergrößert und die andere verkleinert. Diese Kapazitätsänderung wird in einer Brückenschaltung gemessen, wobei die dafür verwendete Wechselspannung eine so hohe Frequenz hat, dass sie die Kapazitätsänderung detektiert, ohne die Elektroden zu bewegen. Für die folgenden Betrachtungen ist nur wichtig, dass die durch Demodulation gewonnene Gleichspannung  $u_d$  der Kapazitätsänderung (näherungsweise) proportional ist.

Die Spannung  $u_d$  wird nicht direkt als Messsignal verarbeitet. Statt dessen wird ein Kompensationskreis aufgebaut, durch den an die vergrößerte Kapazität eine so hohe Gleichspannung  $u_c$  angelegt wird, dass die durch diese Spannung erzeugte elektrostatische Kraft  $F_e$  die mittlere Platte in ihre Ausgangsstellung zurückzieht. Im Gleichgewichtszustand muss also

$$F_e = -F_a = -ma \quad (\text{A4.1})$$

gelten. Aufgrund des Kompensationsprinzips ist das Messergebnis unabhängig von den elastischen Eigenschaften der Elektroden. Diese Eigenschaften beeinflussen nur die Dynamik des Sensors, insbesondere die Zeit, die der Sensor braucht, um den richtigen Messwert anzuzeigen. Diese Dynamik muss beim Entwurf des Kompensationskreises berücksichtigt werden, denn es wird für den Airbagsensor gefordert, dass er eine Beschleunigung, die größer als  $3g$  ist, nach spätestens  $100 \mu\text{s}$  anzeigt. Um das Auslösen des Airbags bei kleinen Beschleunigungen zu vermeiden, darf der Messwert während des Übergangsvorganges seinen Endwert nicht wesentlich überschreiten.

Der Kompensationskreis kann als Regelkreis aufgefasst werden (Abb. A4.4). Die Summe  $F_a + F_e$  der Kräfte, die von der Beschleunigung bzw. von der an die Elektroden angelegten Spannung erzeugt werden, bewegen die mittlere Elektrode, verstimmen eine Brückenschaltung und führen schließlich zur demodulierten Spannung  $u_d(t)$ . Diese Wirkungskette kann vereinfachend durch ein  $\text{PT}_2$ -Glied mit der Grenzfrequenz  $\omega_0 = 50\text{kHz}$  und der Dämpfung  $d = 0,5$  dargestellt werden. Die Verstärkung dieses Übertragungsgliedes ist so



**Abb. A4.4:** Kompensationskreis des Airbag-Sensors

groß, dass bei maximaler Beschleunigung  $a_{\max} = 50g$  ohne Kompensationsrückführung die demodulierte Spannung den statischen Endwert 10 V hat.

Stellgröße für die Kompensation ist die Spannung  $u_c(t)$  an den Elektroden. Die Relation zwischen der an die vergrößerte Kapazität angelegten Spannung  $u_c(t)$  und der dadurch auf die Elektroden wirkende Kraft  $F_e(t)$  ist nichtlinear, denn es gilt

$$F_e(t) = \alpha u_c(t)^2,$$

wobei  $\alpha$  ein Proportionalitätsfaktor ist, der von der Geometrie der Elektroden und dem Dielektrikum abhängt.  $\alpha$  kann berechnet werden, weil bekannt ist, dass der Sensor bis zur Beschleunigung  $a_{\max}$  verwendet wird, wobei die maximale Spannung  $u_{c\max} = 10$  V auftritt. Für die Bemessung der Rückführverstärkung wird die Nichtlinearität durch ein lineares statisches Übertragungsglied ersetzt, dessen Verstärkung aus der quadratischen Beziehung für den Betriebsfall  $a = 3g$  bestimmt wird. Wenn der Sensor richtig eingebaut ist, treten nur positive Positionsverschiebungen und folglich nur positive Spannungen auf.

Da die demodulierte Spannung  $u_d(t)$  durch die Rückführung auf null gehalten werden soll, wirkt die Beschleunigung als Störung auf den Kreis. Die Rückführung muss einen integralen Anteil aufweisen, damit das Kompensationsprinzip verwirklicht werden kann. Es wird hier mit einer reinen I-Rückführung  $\frac{k_1}{s}$  gearbeitet, die in Abb. A4.4 durch den Integrator und das P-Glied mit der Verstärkung  $k_1$  dargestellt ist. Zu bestimmen ist der Verstärkungsfaktor  $k_1$ .

Das Messergebnis  $a_m(t)$  für die Beschleunigung erhält man aus der Spannung  $u_c(t)$ , die proportional zu  $a_m(t)$  ist.

Die heute verwendeten Beschleunigungssensoren werden in Mikrosystemtechnik hergestellt, wobei der kapazitive Sensor mit der den Kompensationskreis realisierenden Schaltung auf einem Chip zusammengefasst sind. Die Masse der auf einer Membran beweglich angeordneten Elektrode beträgt nur etwa 0,25g und die durch die Bewegung der Elektrode hervorgerufene Kapazitätsänderung liegt in der Größenordnung von 0,01 pF.

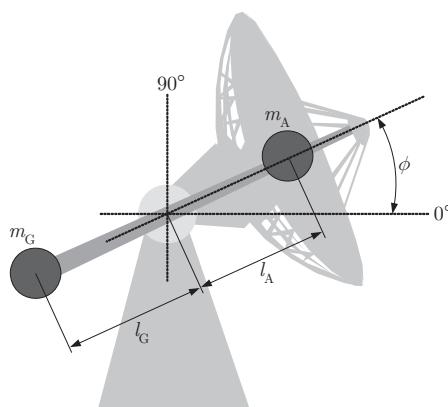
Bestimmen Sie  $k_1$  für den Betriebspunkt  $a(t) = 3g\sigma(t)$  und überprüfen Sie das Entwurfsergebnis für  $a(t) = 20g\sigma(t)$ , wobei Sie die Nichtlinearität dabei für den jeweiligen Arbeitspunkt linearisieren.

**Hinweise.** In der angegebenen regelungstechnischen Interpretation wirkt die Beschleunigung als Störung. Man kann den Kreis aber auch so umzeichnen, dass das Ziel (A4.1) der Kompensation als Forderung nach Sollwertfolge erscheint.

Das hier für den Airbag-Sensor beschriebene Kompensationsprinzip wurde in den fünfziger Jahren für kapazitive Membranmanometer zur Messung sehr kleiner Druckdifferenzen entwickelt [10], wobei das Kompensationsprinzip zunächst durch manuelle Einstellung verwirklicht wurde. Die selbsttätige Membranrückstellung ist in [34] beschrieben. Die in dieser Aufgabe verwendeten Parameter gelten für die heute in Mikrosystemtechnik hergestellten Airbag-Sensoren. □

**Aufgabe A4.6\*** Positionierung eines Radioteleskops

Im Bundesstaat Maharashtra im Westen Indiens sind 30 Radioteleskope über eine Distanz von 25 km aufgebaut. Die Teleskope werden als Giant Metre Radio Teleskope (GMRT) bezeichnet. Sie dienen zur Vermessung von Himmelskörpern mit elektromagnetischer Strahlung mit Wellenlängen im Meterbereich. Durch die Baugröße der Antennen können langwellige Strahlungen mit einer hohen Empfindlichkeit empfangen werden. Bei einer Winkelabweichung von bis zu 2 Grad von der optimalen Ausrichtung zum Messobjekt können mit jedem der Teleskope noch gute Messergebnisse erzielt werden. Die 30 Teleskope sind baugleich und haben einen Antennendurchmesser von 45 m mit einer Brennweite von 18,5 m.



**Abb. A4.5:** Elevation der Antenne

Die Teleskope müssen bei der Vermessung von Himmelskörpern nachgeführt werden, indem sie um die vertikale Achse (Azimut-Achse) und um die horizontale Achse (Elevation-Achse) gedreht werden. Die Ausrichtung soll mit Hilfe einer Positionsregelung erfolgen, die den Elevations- und Azimutwinkel entsprechend einer Sollwertvorgabe möglichst exakt nachführt. Um die Haltekraft bei der Elevation der Antenne zu reduzieren, ist ein Gegengewicht so montiert, dass es das Gewicht der Antenne und des Empfängers im Gleichgewicht hält.

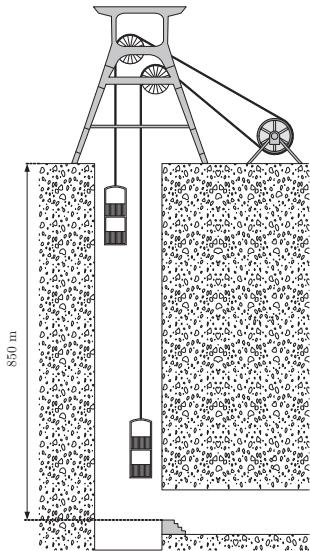
In dieser Aufgabe soll die Positionsregelung für die Elevation entworfen werden. Für die Modellbildung können die Antenne und das Gegengewicht als Punktmassen  $m_A$  und  $m_G$  betrachtet werden, die im Abstand  $l_A$  bzw.  $l_G$  vom Drehpunkt der Antenne angeordnet sind. Die Anordnung ist in Abb. A4.5 dargestellt. Die Tabelle fasst die wichtigsten Parameter zusammen.

Parameter	Bedeutung	Wert
$m_A$	Gewicht der Antenne und des Empfängers	80 t
$m_G$	Gegengewicht	40 t
$l_A$	Hebelarm des Antennengewichts	3 m
$l_G$	Hebelarm des Gegengewichts	6 m
$k_R$	Reibungsbeiwert der Elevationsbewegung	0,1 Nms

Die Regelung soll folgende Forderungen erfüllen. Es muss Sollwertfolge erreicht werden und bei sprungförmigen Änderungen des Sollwertes von  $w(t) = \sigma(t)$  ( $w$  in rad) darf

das Überschwingen maximal  $\Delta h = 2\%$  betragen. Die Drehwinkelgeschwindigkeit  $\omega$  darf den Maximalwert von  $\omega_{\max} = \frac{20^\circ}{\text{min}}$  nicht überschreiten.  $\square$

#### Aufgabe A4.7 Steuerung einer Schachtförderung im Steinkohlebergbau



**Abb. A4.6:** Förderung im Schacht 2 des Bergwerkes Lohberg

Die Förderung im Steinkohlenbergwerk Lohberg (stillgelegt 2005) brachte mit einem Förderkorb auf vier Tragböden bis zu 45 Kumpel gleichzeitig in 90 Sekunden in eine Tiefe von 850 m (Abb. A4.6). Die Leistung des Antriebs ist so dimensioniert, dass die Förderung auch dann innerhalb von 10 Sekunden auf die Endgeschwindigkeit beschleunigt werden kann, wenn ein Förderkorb besetzt und der andere leer ist. Zur Vereinfachung wird angenommen, dass das Seil eine von der Beladung der Körbe unabhängige Länge besitzt und keine Reibung in der Umlenkrolle auftritt. Wenn sich der Förderkorb der Endposition  $s_E = 850 \text{ m}$  nähert (vgl. unten eingetragener Anschlag), so soll ein rechtzeitig zugeschalteter Regler den Fahrkorb ohne Überschwingen in die gewünschte Endposition bringen. Wie muss der Regler dimensioniert sein und wann muss er zugeschaltet werden? Da stets nur die Kumpel aus einer der vier Tragböden der Förderkörbe aussteigen können, müssen die Förderkörbe dreimal angehoben werden, bis alle Mitfahrer ausgestiegen sind. Kann hierfür dieselbe Positionsregelung eingesetzt werden, wenn man für den Komfort der Mitfahrer fordert, dass der Ruck  $\frac{d^3 s}{dt^3}$  sehr klein sein soll? Wie kann man den Regler modifizieren, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist?  $\square$

## Anhang 5

### Verzeichnis der wichtigsten Formelzeichen

Dieses Verzeichnis enthält die wichtigsten Formelzeichen und Symbole. Die Wahl der Formelzeichen hält sich an folgende Konventionen: Kleine kursive Buchstaben bezeichnen Skalare, z. B.  $x, a, t$ . Vektoren sind durch kleine halbfette Buchstaben, z. B.  $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}$ , und Matrizen durch halbfette Großbuchstaben, z. B.  $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{X}$ , dargestellt. Entsprechend dieser Festlegung werden die Elemente der Matrizen und Vektoren durch kursive Kleinbuchstaben, die gegebenenfalls mit Indizes versehen sind, symbolisiert, beispielsweise  $x_1, x_2, x_i$  für Elemente des Vektors  $\boldsymbol{x}$  und  $a_{12}, a_{ij}$  für Elemente der Matrix  $\boldsymbol{A}$ . Mengen sind durch kalligrafische Buchstaben dargestellt, z. B.  $\mathcal{Q}, \mathcal{P}$ .

---

$\mathbf{A}$	Systemmatrix	Gl. (4.45)
$a_i$	Koeffizienten der Differentialgleichung, des charakteristischen Polynoms, des Nennerpolynoms der Übertragungsfunktion	Gl. (4.3)
$\mathbf{B}, \mathbf{b}$	Eingangsmatrix, Eingangsvektor	Gl. (4.45)
$b_i$	Koeffizienten der Differentialgleichung, des Zählerpolynoms der Übertragungsfunktion	Gl. (4.3)
$\mathbf{C}, \mathbf{c}^T$	Ausgabematrix, Ausgabevektor	Gl. (4.45)
$\mathbf{D}, d$	Durchgangsmatrix, Durchgriff (skalar)	Gl. (4.45)
$d$	Dämpfungsfaktor bei PT <sub>2</sub> -Gliedern	Gl. (6.107)
$d(t), \mathbf{d}(t)$	Störgröße (skalar, vektoriell)	
$e(t), \mathbf{e}(t)$	Regelabweichung (skalar, vektoriell)	
$F(s)$	Rückführdifferenzfunktion	Gl. (8.27)
$g(t)$	Gewichtsfunktion	Gl. (5.119)
$G(s)$	Übertragungsfunktion	Abschn. 6.5
$\hat{G}(s), \delta G(s)$	Näherungsmodell, Modellfehler	Abschn. 8.6
$\bar{G}(s)$	Fehlerschranke	Abschn. 8.6
$G_0$	Übertragungsfunktion der offenen Kette	Gl. (7.9)

$G_d, G_w$	Störübertragungsfunktion, Führungsfunktion	Führungsübertragungsfunktion	Gln. (7.5), (7.4)
$h(t)$	Übergangsfunktion		Gl. (5.113)
$\mathbf{I}$	Einheitsmatrix		
$j$	imaginäre Einheit $j = \sqrt{-1}$		
$k$	Verstärkungsfaktor		
$k_s$	statische Verstärkung		Gl. (5.116)
$K(s)$	Übertragungsfunktion eines Reglers		
$m$	Anzahl der Eingangsgrößen (bei Mehrgrößensystemen)		Gl. (4.48)
$n$	dynamische Ordnung eines Systems; Grad des Nennerpolynoms von $G(s)$		
$N(s)$	Nennerpolynom einer Übertragungsfunktion		
$\mathbf{O}, \mathbf{0}$	Nullmatrix, Nullvektor		
$q$	Grad der höchsten Ableitung der Eingangsgröße in der Differentialgleichung; Grad des Zählerpolynoms von $G(s)$		
$r$	relativer Grad; Anzahl der Ausgangsgrößen (bei Mehrgrößensystemen)		Gl. (4.5) bzw. Gl. (4.48)
$s$	komplexe Frequenz		Kap. 6
$s_i, s_{0i}$	Pole, Nullstellen dynamischer Systeme		
$t$	Zeitvariable		
$\mathbf{T}$	Transformationsmatrix		Abschn. 5.3
$T, T_\Sigma$	Zeitkonstante, Summenzeitkonstante		
$u(t), \mathbf{u}(t)$	Eingangsgröße, Stellgröße (skalar, vektoriell)		
$\mathbf{V}$	Modalmatrix (Matrix der Eigenvektoren)		
$\mathbf{v}_i$	Eigenvektor zum $i$ -ten Eigenwert		
$w(t), w(t)$	Führungsgröße		
$\mathbf{x}(t), x_i(t)$	Zustand, Zustandsvariable		
$y(t), \mathbf{y}(t)$	Ausgangsgröße, Regelgröße (skalar, vektoriell)		
$y_s(t), y_{\ddot{u}}(t)$	stationäres Verhalten, Übergangsverhalten		Abschn. 5.5.2
$Z(s)$	Zählerpolynom einer Übertragungsfunktion		
$\delta(t)$	Diracimpuls		Gl. (5.117)
$\delta G(s), \delta \mathbf{A}$	Modellunbestimmtheiten		Abschn. 8.6
$\lambda$	Eigenwert (der Matrix $\mathbf{A}$ )		
$\Sigma, \Sigma_R$	Bezeichnung für Systeme, Regelstrecke usw.		
$\sigma(t)$	Sprungfunktion		Gl. (5.110)
$\phi$	Argument der Übertragungsfunktion, des Frequenzganges		
$\Phi_R$	Phasenrand		Abschn. 8.5.5
$\omega$	Frequenz		
$\omega_s$	Schnittfrequenz (im Bodediagramm)		
$\omega_{gr}$	Grenzfrequenz, Parameter des $PT_1$ -Gliedes		Gl. (6.106)
$\omega_0$	Parameter des $PT_2$ -Gliedes		Gl. (6.109)

## Anhang 6

### Korrespondenztabelle der Laplacetransformation

Die folgende Tabelle enthält die Korrespondenzen für die einseitige Laplacetransformation (6.46) kausaler Signale:

Nr.	Funktion $f(t)$ mit $f(t) = 0$ für $t < 0$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1	$\delta(t)$	1
2	1	$\frac{1}{s}$
3	$t$	$\frac{1}{s^2}$
4	$\frac{t^2}{2}$	$\frac{1}{s^3}$
5	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$
6	$e^{-\delta t}$	$\frac{1}{s + \delta}$

Nr.	Funktion $f(t)$ mit $f(t) = 0$ für $t < 0$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
7	$\frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{Ts + 1}$
8	$t e^{-\delta t}$	$\frac{1}{(s + \delta)^2}$
9	$1 - e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{s(Ts + 1)}$
10	$1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}$	$\frac{1}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$
11	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
12	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
13	$e^{-\delta t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s + \delta)^2 + \omega^2}$
14	$e^{-\delta t} \cos \omega t$	$\frac{s + \delta}{(s + \delta)^2 + \omega^2}$
15	$1 - \frac{1}{\sqrt{1 - d^2}} e^{-\frac{dt}{T}} \sin(\sqrt{1 - d^2} \frac{t}{T} + \arccos d)$	$\frac{1}{s(T^2 s^2 + 2dTs + 1)}$

# Anhang 7

## Fachwörter deutsch – englisch

In diesem Anhang sind die wichtigsten englischen und deutschen regelungstechnischen Begriffe einander gegenübergestellt, wobei gleichzeitig auf die Seite verwiesen wird, auf der der deutsche Begriff erklärt ist. Damit soll dem Leser der Zugriff auf die sehr umfangreiche englischsprachige Literatur erleichtert werden.

adaptive Regelung, 584	<i>adaptive control</i>	Bodediagramm, 244	<i>Bode plot</i>
Allpass, 317	<i>all-pass</i>	charakteristische Gleichung, 137	<i>characteristic equation</i>
Amplitude, 226	<i>magnitude</i>	charakteristisches Polynom, 137	<i>characteristic polynomial</i>
Amplitudengang, 244	<i>magnitude plot</i>	Dämpfung, 293	<i>damping</i>
Amplitudenrand, 447	<i>gain margin</i>	Dämpfungsfaktor, 195	<i>damping coefficient, damping constant</i>
Anfangszustand, 73	<i>initial state</i>	Deskriptorsystem, 90	<i>descriptor system</i>
Anstiegszeit, 215	<i>rise time</i>	dezentrale Regelung, 25	<i>decentralised control</i>
Ausgabegleichung, 72	<i>output equation</i>	Differentialgleichung, 57	<i>differential equation</i>
Ausgangsrückführung, 466	<i>output feedback</i>	digitales vernetztes Regelungssystem, 442	<i>networked control system</i>
Ausgangsvektor, 78	<i>output vector</i>	Dynamikforderung, 347	<i>speed-of-response specification</i>
Bandbreite, 291	<i>bandwidth</i>	dynamisches System, 2	<i>dynamical system</i>
Begleitmatrix, 82	<i>companion matrix</i>	D-Regler, 399	<i>derivative controller</i>
Beobachtungsnormalf orm, 158	<i>observer canonical form</i>	Eigenbewegung, 122	<i>zero-input response, natural response</i>
Beruhigungszeit, 348	<i>settling time</i>	Eigenvorgang, 149	<i>mode</i>
bleibende Regelabweichung, 361	<i>steady-state error</i>	Eingangsvektor, 78	<i>input vector</i>
Blockschaltbild, 42	<i>block diagram</i>		

eingeschwungener Zustand, 181	<i>steady state</i>	Gewichtsfunktion, 171	<i>impulse response</i>
einschleifige Regelung, 4	<i>single-loop feedback system</i>	Gleichgewichtstheorem, 374	<i>Bode's sensitivity integral</i>
Einstellfaktor, 517	<i>tuning factor</i>	Gleichgewichtszustand, 408	<i>equilibrium state</i>
Empfindlichkeit, 380	<i>sensitivity</i>	Grenzfrequenz, 291	<i>cut-off frequency</i>
Empfindlichkeitsfunktion, 353	<i>sensitivity function</i>	Güteforderung, 345	<i>performance specification</i>
Entwurf, 463	<i>design</i>	Gütfunktional, 466	<i>performance index</i>
erzwungene Bewegung, 122	<i>zero-state response, forced response</i>	Hurwitzkriterium, 420	<i>Hurwitz criterion</i>
E/A-Beschreibung, 130	<i>input-output description, external description</i>	Hurwitzmatrix, 421	<i>Hurwitz matrix</i>
E/A-Stabilität, 414	<i>input-output stability</i>	Inneres-Modell-Prinzip, 364	<i>Internal Model Principle</i>
E/A-Verhalten, 128	<i>input-output performance, input-output behaviour</i>	Integrator, 403	<i>integrator</i>
Faltungsintegral, 176	<i>convolution integral</i>	Integrierglied, 199	<i>Type I system</i>
fehlertolerante Steuerung, 585	<i>fault-tolerant control</i>	interne Dynamik, 165	<i>internal dynamics</i>
Folgeregelung, 350	<i>servocontrol</i>	I-Regler, 399	<i>integral controller</i>
Fouriertransformation, 236	<i>Fourier transform</i>	kanonische Normalform, 135	<i>canonical form</i>
freie Bewegung, 122	<i>free motion</i>	Kaskadenregelung, 579	<i>cascade control</i>
Frequenzbereich, 248	<i>frequency domain</i>	Kausalität, 178	<i>causality</i>
Frequenzgang, 238	<i>frequency response</i>	Knickfrequenz, 291	<i>break point</i>
Führungsgröße, 4	<i>command signal, reference signal</i>	komplementäre Empfindlichkeitsfunktion, 354	<i>complementary sensitivity function</i>
Führungsübergangsfunktion, 352	<i>command step response</i>	Korrekturglied (phasenanhobend), 401	<i>lead compensator</i>
Führungsverhalten, 352	<i>command response</i>	Korrekturglied (phasenabsenkend), 401	<i>lag compensator</i>
Fundamentalmatrix, 126	<i>fundamental matrix, state-transition matrix</i>	Kreisverstärkung, 353	<i>loop gain</i>
Fuzzyregelung, 16	<i>fuzzy control</i>	Laplacetransformation, 246	<i>Laplace transform</i>
Gegenkopplung, 424	<i>negative feedback</i>	Linearisierung, 105	<i>linearisation</i>
		Matrixexponentialfunktion, 125	<i>matrix exponential</i>

Mehrgrößenregelung, 24	<i>multivariable control</i>	Proportionalglied, 193	<i>Type-0 system</i>
Messglied, 6	<i>sensor</i>	Prozess, 2	<i>process</i>
Messrauschen, 5	<i>measurement noise</i>	Prozessregelung, 21	<i>process control</i>
minimalphasiges System, 320	<i>minimumphase system</i>	PT <sub>1</sub> -Glied, 194	<i>first-order lag element</i>
Modellunsicherheiten, 449	<i>model uncertainties</i>	P-Regler, 399	<i>proportional controller</i>
Modellvereinfachung, 206	<i>model aggregation, model simplification</i>	rechnergestützter Entwurf, 467	<i>computer-aided design</i>
Nachstellzeit, 399	<i>reset time</i>	Regelabweichung, 6	<i>control error</i>
Nicholsdiagramm, 472	<i>Nichols plot</i>	Regelgröße, 4	<i>variable to be controlled, controlled variable, plant output</i>
nicht sprungfähiges System, 85	<i>strictly proper system</i>	Regelkreis, 5	<i>closed-loop system, control system</i>
Nulldynamik, 165	<i>zero dynamics</i>	Regelstrecke, 4	<i>plant, controlled system</i>
Nullstelle, 268	<i>zero</i>	Regelung, 3	<i>feedback control</i>
Nyquistkriterium, 432	<i>Nyquist criterion</i>	Regelungsnormalform, 84	<i>controller canonical form</i>
Nyquistkurve, 429	<i>Nyquist contour</i>	Regelungstechnik, 1	<i>control engineering</i>
offene Kette, 352	<i>open-loop system</i>	Regler, 4	<i>controller, regulator</i>
Ortskurve, 243	<i>Nyquist plot, polar plot</i>	Reglereinstellung, 465	<i>controller tuning</i>
Parallelschaltung, 283	<i>parallel connection</i>	Reglerentwurf, 18	<i>controller design</i>
Partialbruchzerlegung, 276	<i>partial fraction expansion</i>	Reglergesetz, 6	<i>control law</i>
Phasengang, 240	<i>phase plot, Bode phase plot</i>	Reglerverstärkung, 370	<i>feedback gain</i>
Phasenporträt, 76	<i>phase portrait</i>	Reihenschaltung, 282	<i>series connection, chain structure</i>
Phasenrand, 445	<i>phase margin</i>	Rekonfiguration, 585	<i>reconfiguration, reconfigurable control</i>
PID-Regler, 398	<i>proportional-plus-integral-plus-derivative (PID) controller, three term controller</i>	relativer Grad, 58	<i>relative degree</i>
PN-Bild, 268	<i>pole-zero map, pole-zero diagram</i>	Resonanzfrequenz, 348	<i>resonance frequency</i>
Pol, 268	<i>pole</i>	Resonanzüberhöhung, 302	<i>resonant peak</i>
Polüberschuss, 268	<i>pole-zero excess</i>	robuster Regler, 584	<i>robust controller</i>
prädiktive Regelung, 563	<i>predictive control</i>	Robustheit, 10	<i>robustness</i>

Rückführdifferenzfunktion, 423	<i>return difference function</i>	System, 2	<i>system</i>
Rückkopplung, 11	<i>feedback</i>	Systemmatrix, 73	<i>system matrix</i>
Rückkopplungsschaltung, 283	<i>feedback connection</i>	Totzeit, 113	<i>dead time, time delay</i>
Ruhelage, 408	<i>equilibrium state</i>	Totzeitglied, 203	<i>time delay element, transport lag element</i>
Schnittfrequenz, 516	<i>crossover frequency</i>	Trajektorie, 76	<i>trajectory</i>
Signal, 39	<i>signal</i>	Übergangsfunktion, 169	<i>step response</i>
Signalflussgraph, 52	<i>signal-flow graph</i>	Übergangsmatrix, 126	<i>state transition matrix</i>
Sollwert, 4	<i>set-point, desired value</i>	Übergangsverhalten, 180	<i>transient response</i>
Sollwertfolge, 346	<i>asymptotic regulation, asymptotic tracking, setpoint following</i>	Überschwingweite, 348	<i>peak overshoot</i>
Sprungantwort, 169	<i>step response</i>	Überschwingzeit, 519	<i>peak time</i>
sprungfähiges System, 85	<i>biproper system; system with feedthrough</i>	Übertragungsfunktion, 255	<i>transfer function</i>
Sprungfunktion, 169	<i>step function</i>	Übertragungsglied, 43	<i>transfer element</i>
Stabilisierung, 375	<i>stabilisation</i>	Verhalten, 179	<i>performance, behaviour</i>
Stabilität, 407	<i>stability</i>	Verzögerung, 194	<i>delay</i>
Standardregelkreis, 351	<i>standard control loop</i>	Verstärkung, 370	<i>gain</i>
statische Verstärkung, 170	<i>DC gain, static reinforcement</i>	Vorfilter, 385	<i>prefilter</i>
Stellglied, 5	<i>actuator</i>	Vorsteuerung, 9	<i>feedforward control</i>
Stellgröße, 4	<i>control signal, actuating signal, plant input</i>	Wurzelort, 484	<i>root locus</i>
Steuermatrix, 78	<i>input matrix</i>	Zeitbereich, 248	<i>time domain</i>
Steuerung, 2	<i>control</i>	Zeitkonstante, 272	<i>time constant</i>
Steuerung im geschlossenen Wirkungskreis, 11	<i>feedback control</i>	Zeitkonstantenform der Übertragungsfunktion, 273	<i>Bode form of the transfer function</i>
Steuerung in der offenen Wirkungskette, 11	<i>feedforward control</i>	Zustand, 75	<i>state, state vector</i>
Störgröße, 4	<i>disturbance</i>	Zustandsgleichung, 72	<i>state equation</i>
Störunterdrückung, 350	<i>disturbance rejection, disturbance attenuation</i>	Zustandsraum, 76	<i>state space</i>
		Zustandsstabilität, 409	<i>internal stability, Lyapunov stability</i>
		Zustandsvariable, 75	<i>state variable</i>

# Sachwortverzeichnis

- adaptive Regelung, 584  
adaptiver Regler, 584  
adjungierte Matrix, 263  
Ähnlichkeitssatz, 253  
algebraische Schleife, 98  
Allpass, 317  
Amplitude, 226  
Amplitudendichte, 234  
Amplitudendichtespektrum, 234  
Amplitudengang, 240, 244  
Geradenapproximation d. A., 289, 300,  
    310  
Amplitudenkennlinie, 244  
Amplitudenrand, 447  
Amplitudenspektrum, 232  
Amplitudenüberhöhung, 348  
Analyse, 17  
Anfangszustand, 73  
Anstiegszeit, 215, 348  
asymptotische Stabilität, 409  
Ausgabegleichung, 72  
Ausgangsgröße, 55  
Ausgangsrückführung, 466  
Ausgangssignal, 55  
Ausgangsvektor, 78  
autonomes System, 73
- Bahnkurve, 76  
Bandbreite, 291, 307, 348  
BARKHAUSEN, H., 424  
Begleitmatrix, 82, 154  
**Beispiele**, XVII, 19  
Beispiel  
    Abfüllautomat, 32  
    Abstandsregelung von Fahrzeugen, 366,  
        538, 581  
    Airbagsensor, 709  
    Backofen, 38
- Badewanne, 204  
Blutzuckerregelung, 34  
Budgetverteilung in Unternehmen, 329  
Chauffeur als Regler, 33, 458  
Dampfmaschine, 8, 366  
digital vernetztes System, 442  
Eisenbahn, 132  
Fahrrad, 505  
Fahrzeug, 29, 51, 110, 131, 205, 330, 398  
Feder-Masse-Dämpfer-System, 185, 191  
Feder-Masse-Schwinger, 60, 80, 83, 94,  
    241, 314  
Feder-Masse-System, 95  
Flugregelung, 30, 151, 316, 329, 537, 707  
Flussgebiet der Werra, 47  
Frequenz-Übergabeleistungsregelung, 26,  
    364  
Gleichstrommotor, 140, 209, 330, 340,  
    451, 456, 495, 538, 541, 706  
Herzschriftmacher, 9  
Hörsaal, 205  
invertiertes Pendel, 421, 498, 508  
Körpertemperaturregelung beim  
    Menschen, 576  
künstliche Beatmung, 52  
Klinkerkühler, 43, 459  
Knotenspannungsregelung, 533, 581  
Kochtopf, 205  
Kraftwerksregelung, 422  
Lagerhaltung, 49, 51  
Lautsprecheranlage, 443  
Lautstärkeregler, 33  
nichtminimalphasiges Reaktorsystem, 326  
Operationsverstärkerschaltung, 285  
Parallelschwingkreis, 274  
Pendel, 112  
Radioteleskop, 711  
Raumflugkörper, 447

- Raumtemperaturregelung, 19, 37, 577  
RC-Glied, 104, 124, 137, 179, 203, 263, 316, 329  
Reihenschwingkreis, 58, 65, 71, 77, 80, 88, 92, 143, 157, 166, 192, 396, 510  
RL-Glied, 68  
Ruderstellsystem, 504  
Rührkesselreaktor, 22, 65, 112, 132, 334, 393, 398, 565, 569, 577  
Schachtförderung, 712  
Schiffsregelung, 504, 510  
Schwingungsdämpfer, 341  
Spannungs-Blindleistungsregelung, 26  
Stellventil, 205  
Stufenreaktion, 204  
Talsperrenregelung, 365  
Tank-System, 78, 105, 124, 222, 271  
Temperaturregelung, 7, 10, 21, 219, 338, 469, 549, 577  
Thermostatventil, 368, 458  
UASB-Reaktor, 45  
Verbrennungsmotor, 542  
Verladebrücke, 7, 128, 274, 314, 495, 709  
Wärmeübertrager, 707  
Wasserkraftwerk, 321  
Wirkstoffkonzentration im Blut, 198  
BELL, A. G., 245  
Beobachtbarkeit, 168  
Beobachternormalform, *siehe* Beobachtungsnormalform  
Beobachtungsmatrix, 78  
Beobachtungsnormalform, 158  
Beruhigungszeit, 348, 480  
Bewegung, *siehe* Verhalten  
  erzwungene B., 122  
  freie B., 122  
Bewegungsgleichung, 122, 126  
  B. in kanonischer Darstellung, 148  
Bildbereich, 248  
Bildfunktion, 247  
bleibende Regelabweichung, 347, 361, 521  
Blockschaltbild, 40–42, 284  
*Bode integral*, 374  
BODE, H. W., 244  
Bodediagramm, 244  
charakteristische Gleichung, 268  
  c. G. eines Regelkreises, 423  
  c. G. eines Systems, 137  
charakteristisches Polynom, 137, 263, 268, 418, 428  
CHEN, C.-T., 461  
D-Glied, 94, 200, 264, 307  
D-Regler, 399  
Dämpfung, 293, 476  
Dämpfungsfaktor, 195  
Dämpfungssatz, 253  
Deskriptorsystem, 90, 264  
dezentrale Regelung, 25, 583  
Dezibel, 245  
Differentialgleichung, 57  
  Lösung der D., 120  
Differenzgrad, *siehe* relativer Grad  
Differenziation, 68  
Differenziationsatz, 253  
Differenzierglied, 68, 94, *siehe* D-Glied  
Differenzordnung, *siehe* relativer Grad  
digital vernetztes Regelungssystem, 442  
Diracimpuls, 171, 249  
dirichletsche Bedingung, 228, 234, 246  
Distribution, 171  
Dominanzmaß, 207  
dominierendes Polpaar, 476  
Druckstoßverhalten, 323  
DT<sub>1</sub>-Glied, 201  
Dualität, 160  
Durchgangsmatrix, 78  
Dynamikforderung, 347  
dynamische Ordnung, 168  
dynamisches System, 2, 39, 178  
E/A-Beschreibung, 130, 240, 256  
E/A-Dynamik, 161, 163  
E/A-Normalform, 161  
E/A-Stabilität, 414  
E/A-Verhalten, 128, 176  
Eigenbewegung, 122  
Eigenfrequenz, 293, 476  
Eigenvorgang, 149  
Eigenwert, 168  
Eingang  
  versteckter E., 164  
Eingangs-Ausgangs-Verhalten, *siehe* E/A-Verhalten  
Eingangsgröße, 55  
Eingangssignal, 55  
Eingangsvektor, 78

- eingeschwungener Zustand, 181  
Einhüllende, 251  
Einheitsimpuls, 171  
einschleifige Regelung, 4  
Einschwingvorgang, 180  
Einschwingzeit, 348, 519  
Einstellfaktor, 517  
Einstellregel, 465  
Empfindlichkeit, 380  
Empfindlichkeitsfunktion, 353, 373, 381  
  komplementäre E., 455  
Energiennetz  
  intelligentes E., 27  
Entwurf, *siehe* Reglerentwurf, rechnergestützter Entwurf  
erzwungene Bewegung, 122  
EVANS, W. R., 511  
Exponentialfunktion, 249  
  
Faddeevalgorithmus, 262  
Faltungintegral, 176  
Faltungssatz, 254  
  fehlertolerante Regelung, 585  
  fehlertolerante Steuerung, 585  
Festwertregelung, 14, 350, 369  
Filter, 258  
Folgeregelung, 14, 350, 369  
Fourierintegral, 234  
Fourierkoeffizient, 228  
Fourierreihe, 228  
  Exponentialdarstellung der F., 229  
Fourierrücktransformation, 236  
Fouriertheorem, 227  
Fouriertransformation, 236  
Fouriertransformierte, 234, 247  
freie Bewegung, 122  
Frequenz, 232  
Frequenzbereich, 227, 248  
Frequenzgang, 238, 240, 256, 266  
  experimentelle Bestimmung des F., 240  
  Interpretation des F., 239  
Frequenzkennliniendiagramm, 244  
Frequenzkennlinienverfahren, 513  
Frobeniusmatrix, 82  
Führungsgröße, 4  
Führungsgrößengenerator, 359  
Führungsübergangsfunktion, 356  
Führungsübertragungsfunktion, 352  
Führungsverhalten, 352  
  
Fundamentalmatrix, 126  
Funktion  
  stabile F., 234  
Funktionalmatrix, 107  
Fuzzyregelung, 16  
  
*Gain/phase theorem*, 342  
Gebäudeautomatisierung, 19  
Gegenkopplung, 8, 424  
  G. bei I-Reglern, 425  
Gegenkopplungsbereich, 374  
gestörtes System, 73  
Gewichtsfunktion, 168, 171  
  G. in kanonischer Darstellung, 172  
Gleichgewichtstheorem, 374  
Gleichgewichtszustand, 168, 396, 408  
  stabil G., 409  
Grenzfrequenz, 291, 307  
Grenzwertsatz, 255  
Güteforderung, 345  
Gütfunktional, 466  
  
*H*<sub>2</sub>-Optimierung, 554  
HEAVISIDE, O., 169  
Heavisidefunktion, 169  
HERTZ, H. R., 232  
*high gain feedback*, 502  
Hilfsregelgröße, 577  
Hilfsstellgröße, 581  
Hochpass, 307  
Homöostase, 33  
HOROWITZ, I. M., 472, 511  
HSU, C.-H., 461  
Hsu-Chen-Theorem, 428  
HURWITZ, A., 419, 461  
Hurwitzdeterminante, 419  
Hurwitzkriterium, 420  
Hurwitzmatrix, 421  
Hurwitzpolynom, 420  
  
I-Glied, 199, 305  
I-Regler, 399, 400  
I-Stabilität, 427  
Identifikation, 41, 56  
IMC-Regelung, 551  
Impulsantwort, *siehe* Gewichtsfunktion  
Inneres-Modell-Prinzip, 364, 548  
Integralformel von Cauchy, 266  
Integrationssatz, 254

- Integrator, 403  
 Integratorkette, 83, 85  
 Integrierglied, *siehe* I-Glied  
*Internal Model Control*, *siehe* IMC-Regelung  
 interne Dynamik, 161, 165, 168, 389  
 Invarianz, 168
  - I. gegenüber Zustandstransformation, 168
  - I. gegenüber Störung, 575, 578
  - statische I., 575
 ISE-Kriterium, 555  
 IT<sub>1</sub>-Glied, 199, 214, 305  
 Jacobimatrix, 107  
 Jordannormalform, 147  
 KALMAN, R. E., 116  
 kanonische Normalform, 135  
 kanonische Zustandsvariable, 139  
 Kaskadenregelung, 579  
 Kausalität, 67, 178  
 Kennfunktion, 169  
 Kennwertermittlung
  - K. für PT<sub>1</sub>-Glied, 212
  - K. für PT<sub>1</sub>T<sub>t</sub>-Glied, 216
  - K. für PT<sub>2</sub>-Glied, 214
 Knickfrequenz, 291  
 Knickpunktabstand, 517  
 Kolonnenstabilität, 538  
 Kompartimentmodell, 198  
 Kompensationsregler, 545  
 komplementäre Empfindlichkeitsfunktion, 354, 455, 559  
 kompositionale Modellbildung, 53  
 Konvergenzabszisse, 248  
 koordinateninvariante Eigenschaften, 168  
 Kopplung, 51  
 koprim, 269  
 Korrekturglied, 401, 497, 528
  - phasenabsenkendes K., 401
  - phasenanhebendes K., 401
 Korrespondenztabelle, 248, 715  
 Kreisfrequenz, 232  
 Kreisverstärkung, 353  
 kritischer Punkt, 432  
 KÜPFMÜLLER, K., 461  
 Laplaceintegral, 247  
 Laplacerücktransformation, 249  
 Laplacetransformation, 246  
 Eigenschaften der L., 252  
 Interpretation der L., 250  
 lineares System, 65  
 Linearisierung, 105  
 Linearität, 65, 131  
 LJAPUNOW, A. M., 409, 461  
*loopshaping*, 465, 527  
 Matrix
  - adjungierte M., 263
 Matrixexponentialfunktion, 125  
 MAXWELL, J. C., 18  
 Mechatronik, 30  
 Medizintechnik, 34  
 Mehrgrößenregelung, 4, 24, 466, 582  
 Mehrgrößensystem, 78  
 Messglied, 6  
 Messrauschen, 5  
 minimalphasiges System, 320  
 Minimalrealisierung, 84  
 Mitkopplungsbereich, 374  
 Mode, 149  
*model matching*, 545  
 Modellaggregation, *siehe* Modellvereinfachung  
 Modellannahme, 40, 100  
 modellbasierte Regelung, 547, 552  
 modellbasierte Verfahren, 16  
 Modellbildung, 17, 39, 55
  - Identifikation, 41
  - theoretische M., 41, 56, 89
 Modellrückkopplung, 552  
 Modellunbestimmtheit, 348, 349, 449  
 Modellunsicherheit, *siehe* Modellunbestimmtheit  
 Modellvalidierung, 41  
 Modellvereinfachung, 206, 224, 349  
 MSR-Schema, 49  
 Nachlaufregelung, 350  
 Nachrichtentechnik, 259  
 Nachstellzeit, 399  
*Networked control system*, 442  
 Nicholsdiagramm, 472  
 nichtlineare Kennlinie
  - Linearisierung der n. K., 109, 688
 nichtlinearer Regler, 585  
 nichtminimalphasiges System, 320, 390
  - n. Regelkreis, 372

- Normalform des Zustandsraummodells, 135  
Normaxiom, 409  
Nulldynamik, 165, 188  
Nullstelle, 168, 182, 223, 268  
    Berechnung, 185, 188  
    Interpretation der N., 270  
    N. des Regelkreises, 365  
NYQUIST, H., 427, 461  
Nyquistkriterium, 432  
Nyquistkurve, 429, 439  
  
offene Kette, 9, 352  
Operationsverstärker, 285, 404  
Ordnungsreduktion, *siehe* Modellvereinfachung  
Originalbereich, 248  
Originalfunktion, 247, 248  
Ortskurve, 243  
  
P-Glied, 193  
P-Regler, 399, 400  
Padéapproximation, 336, 341  
Padéentwicklung, 333  
Parallelschaltung, 96, 283  
Parameteroptimierung, 466  
Parametrierung aller stabilisierenden Regler, 554  
parsevalsches Theorem, 555  
Partialbruchzerlegung, 276  
PD-Regler, 400, 497  
Pendelgleichung, 112  
perfekte Regelung, 368  
Phase, 226  
Phasengang, 240, 244  
Phasenkennlinie, *siehe* Phasengang  
Phasenporträt, 76  
Phasenrand, 445  
Phasenrandkriterium, 445  
Phasenraum, 76  
Phasenspektrum, 232  
Phasenverschiebung, 239  
PI-Regler, 400, 562  
PID-Regler, 398, 497  
PN-Bild, 268, 475, 488  
Pol, 268  
    Interpretation der P., 269  
Pol-Nullstellen-Bild, 268  
Polpaar  
    dominierendes P., 476  
Polstelle, *siehe* Pol  
Polüberschuss, 268, *siehe* relativer Grad  
    P. als Maß der Verzögerung, 288, 313  
positives System, 439  
prädiktive Regelung, 563, 571  
Prädiktor, 563  
Primärregelung, 26  
Proportionalglied, *siehe* P-Glied, 289  
Prozess, 2  
Prozessanalyse, 56  
Prozessregelung, 21  
PT<sub>1</sub>-Glied, 194, 210, 279, 289  
PT<sub>1</sub>T<sub>t</sub>-Glied, 203, 216  
PT<sub>2</sub>-Glied, 195, 214, 264, 293, 434, 476  
PT<sub>n</sub>-Glied, 194  
  
Raumtemperaturregelung, 19, 577  
Realisierung  
    minimale R., 100  
rechnergestützter Entwurf, 467  
Regelabweichung, 6  
    bleibende R., 361, 521  
Regeldifferenz, 4  
Regeleinrichtung, *siehe* Regler  
Regelfaktor, 373  
Regelgröße, 4  
Regelkreis, 5  
    erweiterte Struktur des R., 5  
    Freiheitsgrade des R., 11, 355  
    Grundstruktur des R., 4, 351, 465  
Regelkreisentwurf, 346  
Regelkreisstruktur, 463  
Regelstrecke, 4  
    R. mit Ausgleich, 403  
Regelung, 3  
    adaptive R., 584  
    dezentrale R., 583  
    digital vernetzte R., 442  
    fehlertolerante R., 585  
    Mehrgrößenregelung, 466  
    modellbasierte R., 547, 552  
    nichtlineare R., 585  
    perfekte R., 368  
    R. mit hoher Kreisverstärkung, 502  
    rekonfigurierbare R., 585  
    vermaschte R., 573  
Regelung mit zwei Freiheitsgraden, 11, 386  
Regelungsaufgabe, 4  
Regelungnormalform, 84, 154

- Regelungstechnik, 1  
 Regelungsziel, 4, 345  
 Regler, 4, *siehe* I-Regler, P-Regler,  
     PI-Regler, PID-Regler  
     adaptiver R., 584  
     dezentraler R., 583  
     nichtlinearer R., 585  
     prädiktiver R., 571  
     robuster R., 584  
 Reglereinstellung, 465  
 Reglerentwurf, 18, 385, 463, *siehe*  
     rechnergestützter Entwurf  
 Reglergesetz, 6, 67, 345, 497, 548, 583  
 Reglerparameter, 385, 463, 484, 550, 584  
 Reglerstruktur, 402, 463  
 Reglersynthese, 385  
 Reglertypen, 398  
 Reglerverstärkung, 370  
 Reihenschaltung, 96, 282  
 Rekonfiguration, 585  
 rekonfigurierbare Regelung, 585  
 relativer Grad, 58, 85, 156, 168, 261, 268,  
     288, 313, 558  
 Relativgrad, *siehe* relativer Grad  
 Residuensatz, 430  
 Resonanz, 183  
 Resonanzfrequenz, 302, 348  
 Resonanzüberhöhung, 302  
 Robotersteuerung, 27  
 robuster Regler, 584  
 Robustheit, 10, 24, 364, 449, 502  
 Robustheitsforderung, 348  
 ROUTH, E. J., 461  
 Rückführdifferenzfunktion, 423  
 Rückführschaltung, 97  
 Rückkopplung, 11  
 Rückkopplungsschaltung, *siehe* Rückführ-  
     schaltung, 283  
 Ruhelage, 408  
  
*s*-Bereich, 248  
 Schnittfrequenz, 445, 516  
 SCHWARZE, G., 224  
 Schwingungsdämpfer, 341  
 Sekundärregelung, 27  
 Selbsterregungsbedingung, 424  
 Servoregelung, 391  
 Signal, 39  
     kausales S., 56  
     stabiles S., 127, 234, 412  
 Signalfußgraph, 52  
 Signalverzweigung, 43  
 Smart grid, 27  
 SMITH, O. J. M., 570  
 Smithprädiktor, 563, 579  
 Solltrajektorie, 386  
 Sollwert, 4  
 Sollwertfolge, 346  
 Spektraldichte, 234  
 Sprungantwort, *siehe* Übergangsfunktion  
 Sprungfunktion, 169  
 Störunterdrückung, 350  
 Stabilisator (Schiff), 510  
 Stabilisierbarkeit, 168  
 Stabilisierung, 10, 375  
 Stabilität, 127, 168, 407  
     asymptotische S., 409  
     E/A-Stabilität, 414  
     exponentielle S., 412  
     I-Stabilität, 427  
     innere S., 426  
     Ljapunowstabilität, 409  
     robuste S., 449  
     Zustandsstabilität, 409  
 Stabilitätsgrenze, 438  
 Standardregelkreis, 351  
 stationäre Genauigkeit  
     s. G. des Regelkreises, 347  
     s. G. eines Modells, 207  
 stationäres Verhalten, 181, 259  
 statische Verstärkung, 103, 168, 170, 287,  
     353, 367, 484, 576  
 Stellglied, 5  
 Stellgröße, 4  
 Stellgrößenbeschränkung, 369  
 Steuerbarkeit, 168  
 Steuereinrichtung, 9  
 Steuermatrix, 78  
 Steuerstrecke, 9  
 Steuerung, 2  
     diskrete S., 11  
     S. im geschlossenen Wirkungskreis, 3, 10  
     S. in der offenen Wirkungskette, 9  
 Steuerungsnormalform, *siehe* Regelungsnor-  
     malform  
 Stoßfunktion, 171  
 Störgröße, 4

- Störgrößenaufschaltung, 574  
Störgrößengenerator, 358  
Störgrößenregelung, 350  
Störkompensation, 10, 346  
Störübergangsfunktion, 356  
Störübertragungsfunktion, 352  
Störverhalten, 521  
Strecke, *siehe* Regelstrecke  
STREJC, V., 224  
Struktur dynamischer Systeme, 41  
Strukturbild, 42  
Summationsstelle, 43  
Summenzeitkonstante, 211, 273  
Superpositionsprinzip, 65  
SYLVESTER, J. J., 134  
Sylvesterformel, 134  
System, 2, 39  
autonomes S., 73  
differenziell flaches S., 405  
dynamisches S., 39  
gestört S., 73  
lineares S., 65  
minimalphasiges S., 320  
nicht sprungfähiges S., 85  
nichtminimalphasiges S., 320  
positives S., 439  
sprungfähiges S., 85, 170, 243, 265, 287  
technisch realisierbares S., 69  
ungestört S., 73  
zeitvariables S., 114  
Systembiologie, 34  
Systemmatrix, 73, 78  
Systemordnung, 73
- Tank-System, 175  
Temperaturregelung, 469, 549, 577  
Tiefpass, 291  
Totzeit, 113  
Totzeitglied, 203, 214, 253, 331  
    Approximation von T., 333  
Totzeitsystem, 113, 261, 441, 521  
Trajektorie, 76  
Trajektorienplanung, 386  
transformierte Zustandsgleichung, 136  
Transitionsmatrix, *siehe* Übergangsmatrix  
Transitionszeit, 392
- Übergangsfunktion, 168, 169  
Übergangsmatrix, 126, 133, 281
- Übergangsverhalten, 180, 259  
Überlagerungssatz, 253  
Überschwingweite, 348, 478  
Überschwingzeit, 348, 478, 519  
Übertragungsfunktion, 255  
    Ü. in kanonischer Darstellung, 260  
    Exponentialform der Ü., 256  
    Interpretation der Ü., 256  
    Pol-Nullstellen-Form der Ü., 268  
    Polynomform der Ü., 267  
    positiv reelle Ü., 316  
    Produktform der Ü., 273  
    Zeitkonstantenform der Ü., 273  
Übertragungsglied, 43  
Übertragungsverhalten, 130, 169  
Unempfindlichkeitsbereich, 374  
ungestörtes System, 73
- Vektorfeld, 77  
Vektornorm, 409  
Verhalten, 119, 179  
    E/A-Verhalten, 128  
    stationäres V., 180  
    transientes V., 180  
    Übergangsverhalten, 180  
vermaschte Regelung, 573  
vernetzte Regelung, 442  
Verschiebeprinzip, 70  
Verschiebungssatz, 253  
Verstärkung, *siehe* statische Verstärkung,  
    Kreisverstärkung  
versteckter Eingang, 164  
Verzögerungsglied, 194  
Verzugszeit, 215  
Vorfilter, 385  
Vorhalteglied, 201  
Vorhaltezeit, 399  
Vorsteuerung, 9, 11  
Vorsteuerungsentwurf, 387  
    inversionsbasierter V., 390
- WATT, J., 8  
WESTCOTT, J. H., 374  
Wirkungsrichtung, 42  
Wirkungsschema, 42  
Wortmodell, 40  
Wurzelort, 484  
Wurzelortskurve, 484  
    Amplitudenbedingung der W., 487

- Asymptoten der W., 489  
Phasenbedingung der W., 487  
Symmetrie der W., 488  
Wurzelortskurvenverfahren, 496
- YOULA, D. C., 554, 571  
Youlaparametrierung, 554
- Zeit-Bandbreiten-Produkt, 292  
Zeitbereich, 248  
Zeitkonstante, 272  
Zustand, 75  
Zustandsäquivalenz, 136  
Zustandsgleichung, 72  
Lösung der Z., 125  
transformierte Z., 136
- Zustandsgröße, 75  
Zustandskurve, 76  
Zustandsraum, 76  
Zustandsraummodell, 70  
lineares Z., 72  
nichtlineares Z., 106  
Z. in Beobachtungsnormalform, 158  
Z. in E/A-Normalform, 161  
Z. in kanonischer Normalform, 135  
Z. in Regelungsnormalform, 84, 154  
Zustandsrückführung, 466  
Zustandsstabilität, 409  
Zustandsvariable, 75  
kanonische Z., 139  
Zustandsvektor, 75, 78