

ORIGAMI ET MATHÉMATIQUES

LAMPERT Virgile
BULLE Raphaël

Sous la direction de Madame A.-M. Aebischer et de Madame J. Deridder.

3 novembre 2014

Table des matières

1 Bases de l'origami mathématique et de la construction à la règle et au compas.	4
1.1 Axiomes et formalisme de l'origami.	4
1.1.1 Les 7 axiomes.	4
1.1.2 Formalisme de l'origami.	13
2 Outils concernant la construction à règle et au compas.	15
2.1 Aspects géométriques.	16
2.2 Aspects algébriques.	23
2.2.1 Rappels.	23
2.2.2 Théorème de Wantzel.	26
2.3 Exemples de constructions impossibles.	32
2.3.1 Trisection de l'angle.	32
2.3.2 Duplication du cube.	33
3 Comparaison entre la construction par origami et à la règle et au compas.	35
3.1 Les cinq premiers axiomes de l'origami.	35
3.2 Résolution d'équations de degré 3 par origami.	40
3.3 Exemples de constructions réalisables uniquement par origami.	42
3.3.1 Trisection de l'angle.	42
3.3.2 Duplication du cube.	45
4 Pliage des polygones et polyèdres réguliers.	47
4.1 Définitions.	47
4.1.1 Polygones.	47
4.1.2 Polyèdres.	48
4.1.3 Origami modulaire.	50

4.2	Construction des polygones réguliers.	51
4.2.1	Théorie sur la construction des polygones.	51
4.2.2	Méthode du noeud et méthode pour doubler le nombre de côtés.	53
4.3	Montage des polyèdres réguliers.	59
4.3.1	Les bases.	59
4.4	Montage des polyèdres.	64
5	Atelier polyèdres et présentation Origami et Mathématiques.	67
5.1	Atelier polyèdres et origami modulaire.	67
5.2	Présentation Origami et Mathématiques.	67
5.2.1	Déroulement de l'atelier.	67
5.2.2	Script de l'atelier.	72
5.2.3	Bilan de l'atelier.	72

Introduction

L'origami (de *oru*, "plier" et *kami*, "papier") est l'art du pliage du papier. Le mot vient du japonais et aurait été emprunté au chinois. Cet art est l'un des plus anciens arts populaires. Il fait partie des arts du papier et se serait rapidement développé vers 1200 au sein de rituels bouddhistes et aurait ainsi eu un grand succès. En 1978, en France apparaît le *Mouvement français des plieurs de papier*, créé par Jean-Claude Correia. Parmis les origamistes français, Didier Boursin poursuit un travail éducatif mélangeant l'origami et l'apprentissage des mathématiques. L'origami est un sujet d'étude pour les mathématiciens, notamment en ce qui concerne le domaine de la géométrie. Comme nous le verrons l'origami permet un grand nombre de constructions géométriques et peut être ainsi source de divers exercices de géométrie. Un domaine des mathématiques où l'origami est très présente est la géométrie différentielle. Ses applications techniques sont variées : déploiement des panneaux solaires embarqués à bord des satellites, déploiement des micro-sondes injectées dans le corps humain, le pliage des airbags etc.

L'origami a l'avantage de présenter les mathématiques et la géométrie sous un angle concret et ludique tout en conservant des aspects théoriques profonds. C'est pourquoi nous avons choisi de faire des présentations de vulgarisation de l'origami mathématique.

Dans ce mémoire nous présenterons essentiellement les outils mathématiques qui sont à la base de la construction par l'origami. De plus, nous comparerons la construction par l'origami à la construction à la règle et au compas qui est un domaine largement décrit par les mathématiques modernes.

Chapitre 1

Bases de l'origami mathématique et de la construction à la règle et au compas.

1.1 Axiomes et formalisme de l'origami.

1.1.1 Les 7 axiomes.

Les axiomes les plus connus de l'origami mathématique sont ceux découverts en 1991 par le mathématicien Humiaki Huzita et complétés en 2001 par Koshiro Hatori. Ils sont au nombre de 7, les six premiers venant de Huzita et le septième de Hatori, ils sont connus sous le nom d'*axiomes d'Huzita-Hatori*. Voici la liste ainsi que la description de chacun d'eux :

Axiome 1. *Un unique pli passe par deux points distincts.*

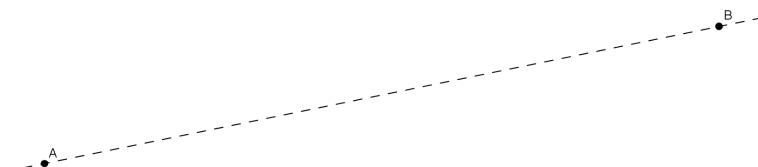


FIGURE 1.1 – Axiome 1.

Cet axiome revient à construire l'unique droite passant par deux points distincts.

Axiome 2. *Un unique pli amène un point A sur un point B.*

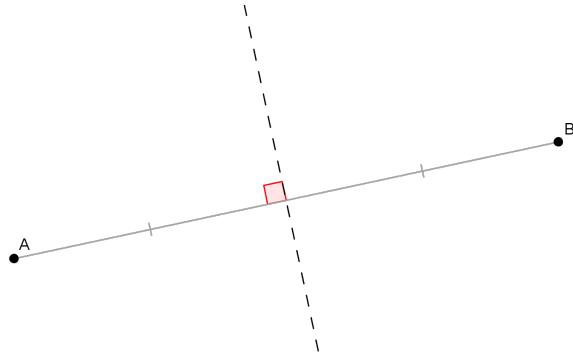


FIGURE 1.2 – Axiome 2.

Cet axiome revient à construire la médiatrice du segment $[AB]$.

Axiome 3. *Un pli superpose deux droites distinctes.*

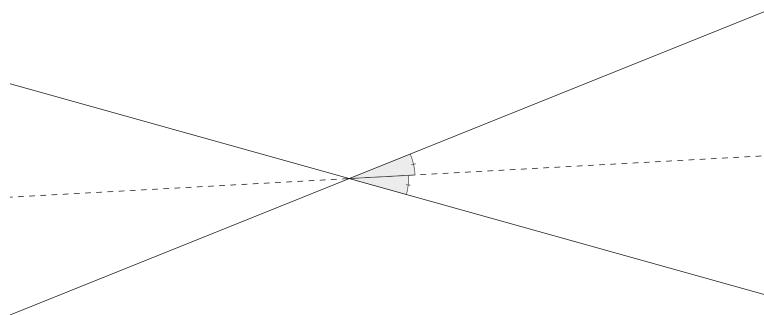


FIGURE 1.3 – Axiome 3.

Cela revient à construire la bissectrice à un des angles formé par les deux droites.

Axiome 4. *Un unique pli passe par un point et est orthogonal à une droite.*

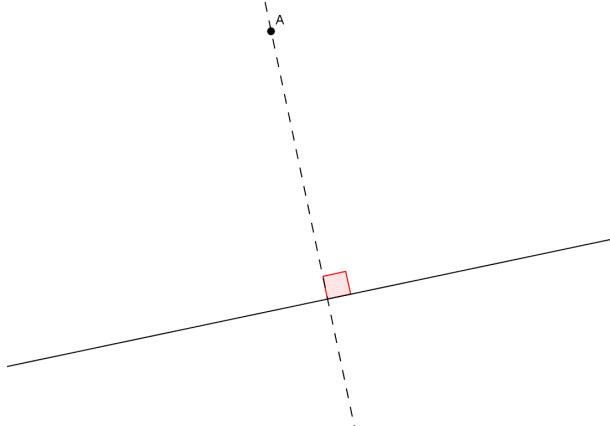


FIGURE 1.4 – Axiome 4.

Cet axiome revient à construire la perpendiculaire à une droite passant par un point.

Axiome 5. *Soient une droite d et deux points A et B , un pli passe par B et envoie A sur d .*

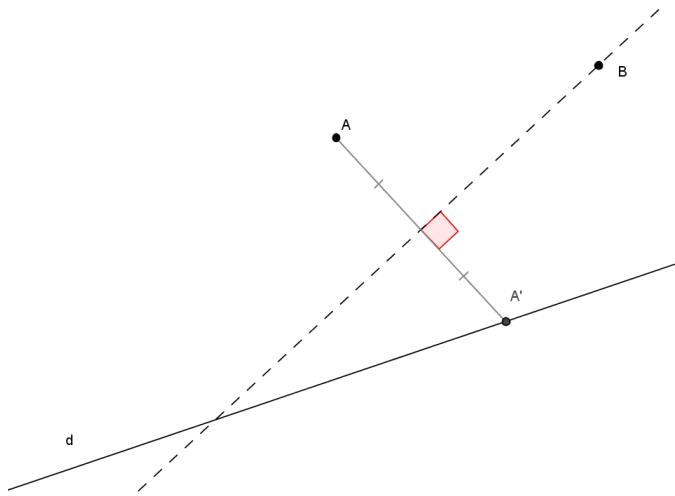


FIGURE 1.5 – Axiome 5.

Cet axiome consiste en fait à construire l'intersection d'une droite et d'un cercle. En effet, le fait de plier la feuille pour envoyer le point A sur un autre point quelconque, revient à construire un axe de symétrie. Or, lorsque l'on fixe deux points A et B , l'ensemble des points A' , symétriques de A par une symétrie d'axe une droite passant par B est en fait un cercle \mathcal{C} de centre B et de rayon AB . En envoyant le point A sur la droite d à l'aide d'un axe de symétrie passant par B on construit bien l'intersection du cercle \mathcal{C} et de la droite d .

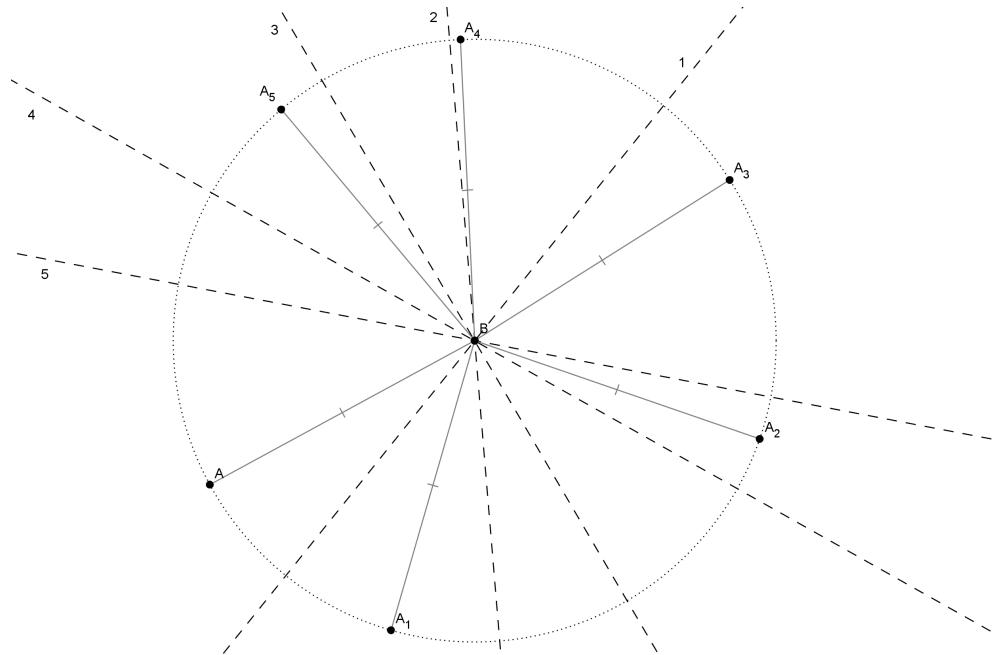


FIGURE 1.6 – L'ensemble des points symétriques de A par les symétries d'axe passant par B forment un cercle.

Plus rigoureusement :

Démonstration. Posons l'ensemble \mathcal{E} tel que :

$$\mathcal{E} = \{A' \in \mathcal{P}, s(A) = A'\},$$

où s est une symétrie axiale d'axe une droite passant par B .

Ainsi défini, \mathcal{E} est l'ensemble des symétriques du point A par toutes les symétries d'axe passant par B . Notons maintenant \mathcal{C} le cercle de centre B et de rayon AB . On a bien entendu :

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P} \text{ tq } MB = AB\}.$$

Montrons alors que :

$$\mathcal{E} = \mathcal{C}.$$

Soit $A' \in \mathcal{E}$, comme A' est le symétrique de A par rapport à une droite passant par B , tous les points de cette droite sont à égale distance de A et A' , en particulier le point B . Donc $A'B = AB$, c'est à dire $A' \in \mathcal{C}$. Donc :

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{C}.$$

Maintenant, soit $A'' \in \mathcal{C}$, on peut alors considérer la droite d , bissectrice de l'angle $A\hat{B}A''$. On considère alors la symétrie axiale s , d'axe d . On a que d passe par le point B et $s(A) = A''$, c'est à dire $A'' \in \mathcal{E}$. Donc :

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{E}.$$

Donc :

$$\mathcal{C} = \mathcal{E}.$$

On a montré que l'ensemble \mathcal{E} des symétriques de A est le cercle \mathcal{C} de centre B et de rayon AB . \square

On peut donc en déduire que l'axiome 5 possède 0 (si le rayon du cercle est plus petit que la distance entre B et la droite d), 1 (si d est tangente au cercle) ou 2 solutions.

Remarque : On rappelle que la distance entre une droite d et un point M est donnée par la distance entre M et le point de d le plus proche de M , c'est à dire le point d'intersection entre la droite d et sa perpendiculaire passant par M .

Axiome 6. Soient deux droites d et l et deux points A et B , un pli amène A sur d et B sur l .

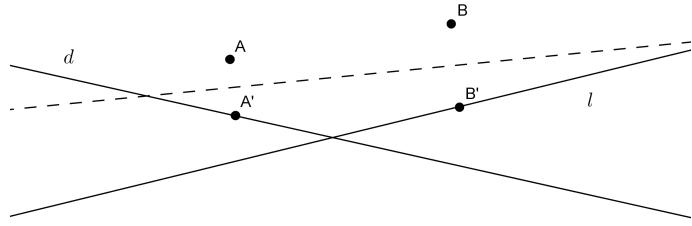


FIGURE 1.7 – Axiome 6.

Cet axiome (pouvant paraître un peu plus inhabituel que les précédents) s’explique en comprenant tout d’abord les plis que l’on construit en envoyant un point sur une droite. On doit tout d’abord définir géométriquement la parabole et son enveloppe ainsi :

Définition 1. Dans le plan on considère d une droite et F un point n’appartenant pas à d . On appelle parabole de directrice d et de foyer F l’ensemble des points M du plan à égale distance de la droite d et du point F .

Définition 2. L’ensemble des droites tangentes à la courbe d’une parabole est appelé l’enveloppe d’une parabole.

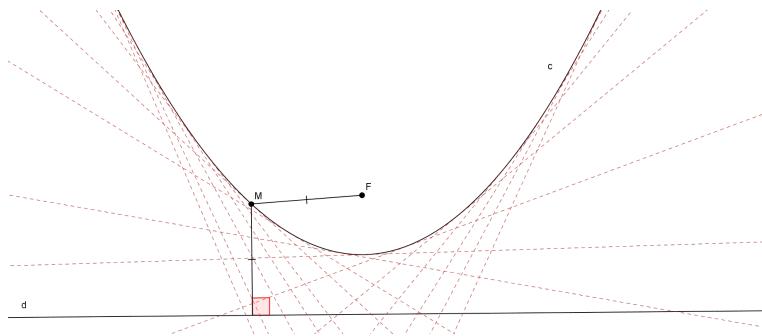


FIGURE 1.8 – Parabole c de directrice d et de foyer F avec une partie de son enveloppe (les droites en pointillés rouges).

Lorsque l'on plie la feuille de manière à envoyer un point A sur une droite d , le pli obtenu forme en fait une tangente à la parabole de directrice d et de foyer A .

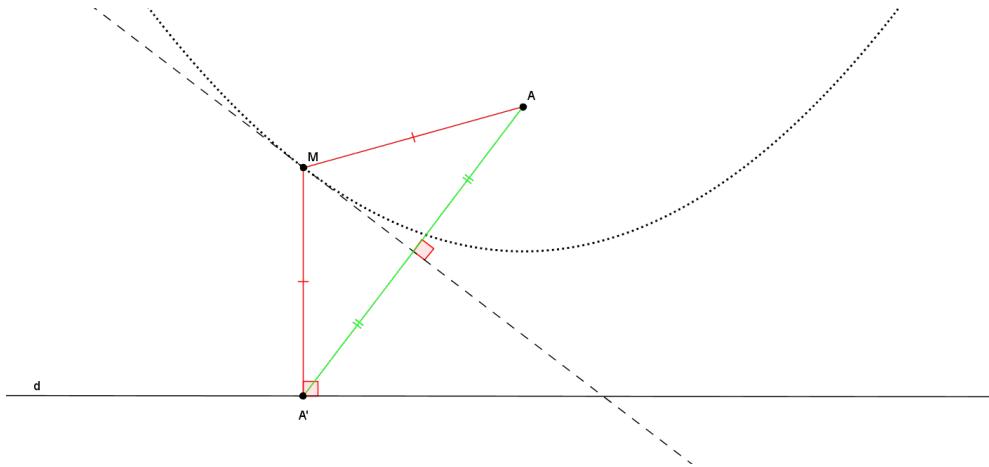


FIGURE 1.9 – Le pli envoyant A sur A' forme la tangente à la parabole au point M .

En effet,

Démonstration. Soient d une droite et A un point n'appartenant pas à d . En pliant la feuille pour envoyer A sur un point A' de d , on construit la médiatrice au segment $[AA']$. Tous les points de la médiatrice sont alors à égale distance des points A et A' . En particulier le point M (unique) se trouvant sur la médiatrice ainsi que sur une perpendiculaire à la droite d . Le point M est alors à la même distance de la droite d et du point A . Il est donc sur la parabole de directrice d et de foyer A . Donc la droite formée par le pli est bien la tangente à la parabole au point M . \square

Maintenant que l'on sait ce que signifie le fait d'envoyer un point sur une droite grâce au pliage, revenons à l'axiome 6. L'axiome 6 consiste à envoyer grâce à un unique pli, respectivement deux points A et B distincts sur deux droites d et l distinctes. Il est donc facile de se rendre compte que cet axiome permet de construire une tangente commune à deux paraboles (de directrices respectives d et l et foyers respectifs A et B).

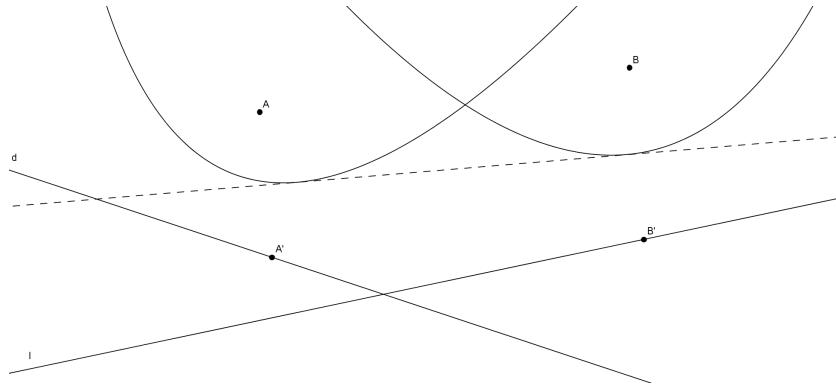


FIGURE 1.10 – Le pli constitue bien une tangente commune aux deux paraboles.

Axiome 7. Soient un point A et deux droites d et l , un pli amène A sur d et est perpendiculaire à l .

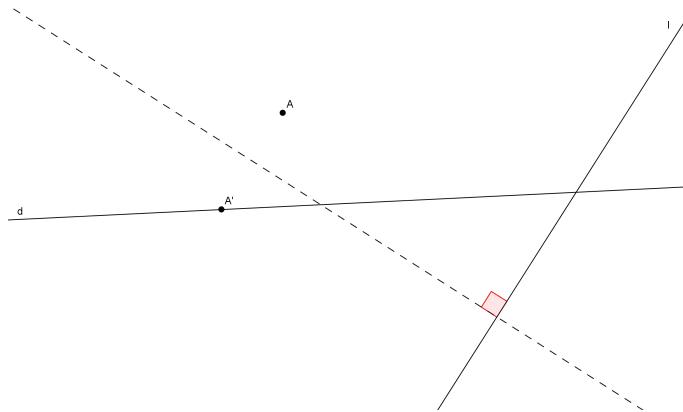


FIGURE 1.11 – Axiome 7.

Comme on l'a vu pour l'axiome 6, le fait d'envoyer un point sur une droite revient à construire la tangente à une parabole. Dans ce dernier axiome, on souhaite en plus que ce pli soit perpendiculaire à une seconde droite donnée. Ceci revient donc à construire l'unique tangente à la parabole de directrice d et de foyer A qui soit perpendiculaire à une droite donnée.

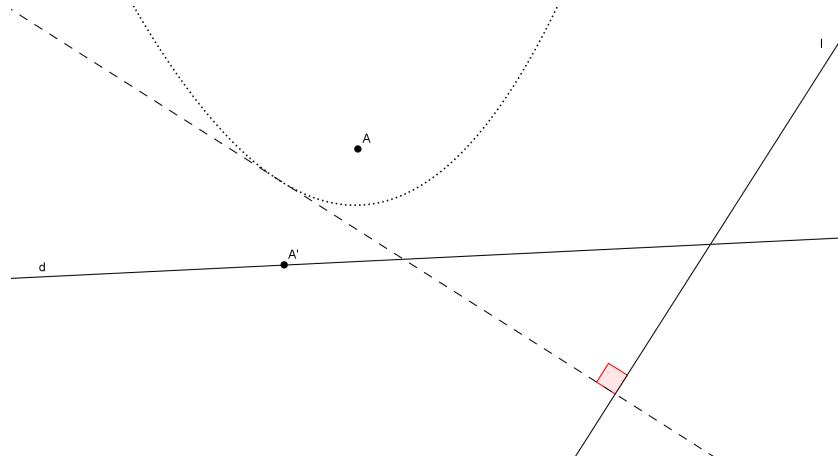


FIGURE 1.12 – Le pli obtenu forme une droite tangente à la parabole et perpendiculaire à la droite l .

Remarques :

1. L’axiome 7 peut ne pas posséder de solution, par exemple lorsque l’on prend une droite parallèle à la directrice de la parabole.
2. L’axiome 7 est un peu particulier dans le sens où il est possible de le réaliser à partir des axiomes 4 et 2. En effet, l’axiome 7 consiste à envoyer un point A sur une droite d selon un pli perpendiculaire à une droite l . L’axiome 4 nous permet de construire une parallèle l' à la droite l passant par A , notons A' le point d’intersection de l' et d . Alors l’axiome 2 nous permet de construire la médiatrice au segment $[AA']$ qui sera alors perpendiculaire à la droite l et qui constituera la droite que l’on plie grâce à l’axiome 7.

Voici donc un résumé concernant les axiomes, leurs résultats, leurs contraintes et le nombre de solutions (on pose P et P' deux points, D et D' deux droites) :

Axiome	Résultat	Contrainte	Solutions
1	Droite (PP')	$P \neq P'$	1
2	Médiatrice de $[PP']$	$P \neq P'$	1
3	Bissectrice de D et D'	$D \neq D'$	2
4	Perpendiculaire à D passant par P		1
5	Inter. cercle $C(P, PP')$ et droite D	$P \neq P'$	0, 1, 2
6	Tangente commune aux paraboles P, D et P', D'	$P \neq P',$ $\{P, P'\} \not\subset D \cap D'$ et ($P \notin D$ ou $P' \notin D'$ ou $D \cap D' \neq \emptyset$)	0, 1, 2 3
7	Tangente à une parabole perpendiculaire à une droite / projection de P sur D parallèlement à D'	$\neg(P \in D \text{ et } D // D')$	0, 1

Remarque : L'origamiste et mathématicien Robert J. Lang a donné la preuve du fait que cette liste d'axiome est complète pour la construction géométrique par origami, c'est à dire que toute construction par l'origami est réalisable à l'aide de ces seuls 7 axiomes.

1.1.2 Formalisme de l'origami.

Pour pouvoir élaborer de manière rigoureuse des raisonnements mathématiques et étudier les constructions réalisées grâce à l'origami, il nous faut fixer précisément les opérations autorisées. Comme l'étude de l'origami en mathématiques est relativement récente, ce formalisme n'est pas encore rigoureusement défini et est susceptibles de variantes. Ici, nous différencierons deux principaux types de pliages, le premier que nous appellerons *pli simple* et le second, *pli complexe*. Le pli complexe ne sera pas défini ici puisque nous étudierons (à une exception près qui sera alors précisée) uniquement des plis simples.

Définition 3. *Un pli simple consiste à plier la feuille, marquer le pli puis déplier.*

Ainsi, nous pouvons constater que les 7 axiomes décrit précédemment font partie des plis simples et ainsi toute construction utilisant ces axiomes sera composée uniquement de plis simples. Dès lors, nous avons que toute construction par origami pourra être réalisée uniquement à l'aide de plis simples.

En outre, voici quelques règles de base que les constructions par l'origami devront respecter :

1. Les constructions se baseront sur des objets considérés comme déjà construits.
2. Tout pli obtenu par les 7 axiomes à partir d'éléments déjà construits sera considéré comme construit.
3. L'intersection de deux droites construites sera considérée comme un point construit.[IRE 12]

Définition 4 (Paterne). *Nous appellerons "paterne" d'une construction par origami, l'ensemble des droites la constituant.*

Remarque : Le paterne correspond en fait au marques laissées par les plis une fois la feuille dépliée.

Voyons maintenant les bases de la construction à la règle et au compas.

Chapitre 2

Outils concernant la construction à règle et au compas.

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser au problème de la construction à la règle et au compas. Ce problème consiste à déterminer quelles longueurs nous pouvons construire à l'aide d'une règle non graduée et d'un compas.

L'histoire de la construction à la règle et au compas remonte à la Grèce antique avec Euclide (300 av. J.C.). En effet, Euclide fonde sa géométrie sur une liste d'axiomes assurant, entre autre, la possibilité de tracer une unique droite entre deux points du plan et de tracer un cercle de centre donné et passant par un point. Cette géométrie baptisée *Géométrie Euclidienne* est donc la géométrie des droites et des cercles, c'est à dire de la règle et du compas. Ainsi, Euclide pensait que l'on pouvait construire n'importe quel nombre à l'aide de ces deux instruments. Cette intuition va alors remettre en question la définition de "nombre". En effet, les Grecs pensaient que toutes les grandeurs étaient rationnelles (quotient de deux entiers naturels), or le nombre $\sqrt{2}$ qui est constructible à la règle et au compas (comme longueur de la diagonale d'un carré de longueur de côté 1), ne peut pourtant pas s'exprimer comme quotient de deux entiers naturels (et pour cause, $\sqrt{2}$ n'étant pas rationnel). En outre, l'intuition d'Euclide fera naître également un certain nombre de problèmes antiques célèbres comme le problème de la duplication du cube, le problème de la trisection de l'angle ainsi que celui de la quadrature du cercle. Ce n'est que bien plus tard, après le développement de l'algèbre et de la théorie de Galois que ces impossibilités seront mises en évidence et que le mathématicien français Pierre-Laurent Wantzel (1814-1848) énoncera une

condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre réel soit constructible à la règle et au compas.

2.1 Aspects géométriques.

On considère deux points distincts A et B du plan \mathcal{P} . On veut décrire les points du plan que l'on peut construire à l'aide d'une règle et d'un compas.

Définition 5. *Toute famille \mathcal{A} de points du plan \mathcal{P} obtenue à partir de A et B par une succession de constructions n'utilisant qu'une règle et un compas s'appelle une Construction à la Règle et au Compas Absolue (CRCA). Le segment $[AB]$ définit le segment unité.*

Remarque : Lorsque l'on réalise une construction en se basant sur des points qui ne sont pas forcément constructibles à la règle et au compas, on dit que cette construction est une Construction à la Règle et au Compas Relative (CRCR).

Définition 6. *Une figure \mathcal{F} du plan \mathcal{P} est une ensemble fini de points de \mathcal{P} . \mathcal{F} est dite CRCA si \mathcal{F} est contenue dans une construction CRCA. Une construction CRCA est une famille de points :*

$\mathcal{A}_0 = \{A, B\} \subset \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \dots \subset \mathcal{A}_n$, telle que : $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i \cup \{C_i\}$ où C_i est un point de \mathcal{P} obtenu :

- Soit par l'intersection de deux droites distinctes passant par des points de \mathcal{A}_i .
- Soit comme faisant partie de l'intersection de deux cercles centrés sur des points de \mathcal{A}_i et passant par un point de \mathcal{A}_i
- Soit par l'intersection d'un cercle et d'une droite définis à partir des points de \mathcal{A}_i .

Proposition 1. Si $A = (0, 0)$ et $B = (1, 0)$ alors tous les points (p, q) avec $(p, q) \in \mathbb{Q}^2$ sont CRCA.

Démonstration. Soit $A = (0, 0)$ et $B = (1, 0)$. Il est évident que l'on peut obtenir tous les points de la forme $(n, 0)$ avec $n \in \mathbb{Z}$ en tracant tout d'abord la droite (AB) puis en reportant successivement la longueur AB à l'aide du compas sur la droite :

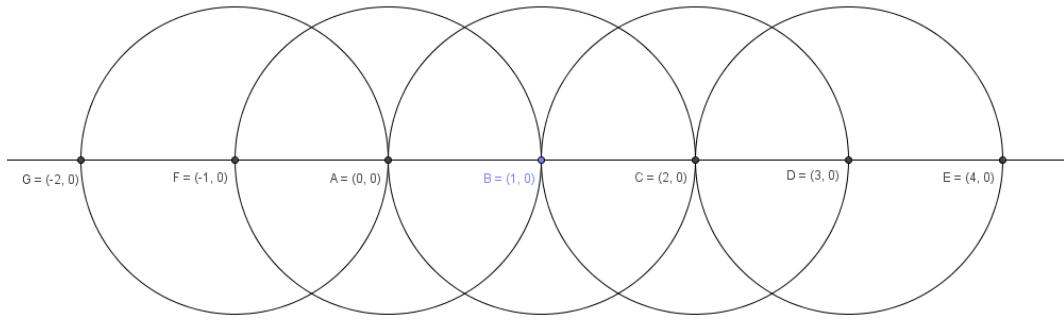


FIGURE 2.1 – Construction de \mathbb{Z} .

Ensuite, en traçant les perpendiculaires à la droite (AB) passant respectivement par tous les points construits précédemment, on obtient que l'ensemble \mathbb{Z}^2 est constructible comme sur la figure ci-dessous :

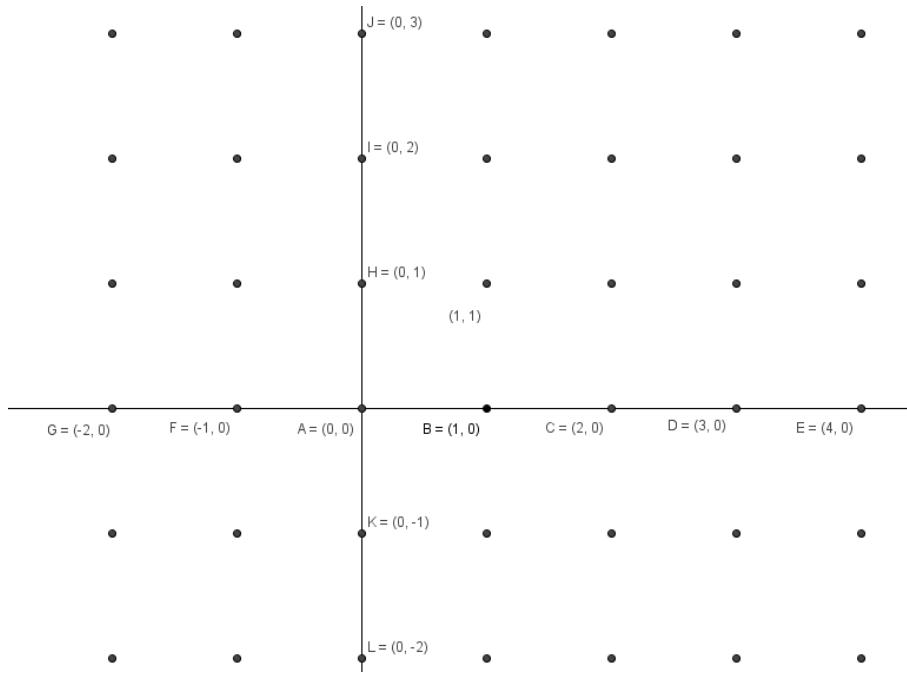


FIGURE 2.2 – Construction de \mathbb{Z}^2 .

On peut alors maintenant tracer les droites d'équation $y = qx$ avec $q \in \mathbb{Z}$ et en interseptant avec la droite d'équation $y = 1$, obtenir les points de la forme $(1/q, 1)$. Il est ensuite facile de construire les points de la forme $(1/q, 0)$. Puis en reportant le segment entre A et $(1/q, 0)$ sur la droite (AB) on obtient tous les points de la forme $(p/q, 0)$ avec $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$.

Finalement, en faisant de même sur l'axe des ordonnées, on peut obtenir tous les points de \mathbb{Q}^2 . □

Définition 7. Un réel α est CRCA si le point $(\alpha, 0)$ est CRCA.

Proposition 2. L'ensemble $\mathcal{C} = \{\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \text{ CRCA}\}$ est un sous-groupe additif, stable par multiplication et si un réel non nul α est CRCA, alors $1/\alpha$ est également CRCA.

Rappels :

1. Par définition, un groupe additif est un couple (G, \bullet) formé d'un ensemble G et d'une opération \bullet (appelée aussi *loi de composition*) qui à deux éléments $a, b \in G$ associe l'élément noté $a \bullet b$. De plus, cette loi vérifie les conditions suivantes :
 - * **Loi de composition interne.** La loi \bullet est une loi de composition interne c'est à dire : $\forall a, b \in G, a \bullet b \in G$.
 - * **Associativité.** La loi \bullet est associative : $\forall a, b, c \in G, (a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$.
 - * **Elément neutre.** Il existe un élément de G , noté e tel que $\forall a \in G, e \bullet a = a \bullet e = a$. Cet élément e est unique et est appellé *élément neutre du groupe* (G, \bullet) .
 - * **Symétrie.** La loi \bullet est symétrique : $\forall a \in G, \exists b \in G$ tel que $a \bullet b = b \bullet a = e$. L'élément b est alors appellé *symétrique* ou *opposé* de a .
 - * **Commutativité.** La loi \bullet est commutative, c'est à dire : $\forall a, b \in G, a \bullet b = b \bullet a$. La loi \bullet est habituellement notée $+$, l'élément neutre e noté 0 et l'opposé d'un élément a noté $-a$.
2. Soit $(G, +)$ un groupe additif, soit H un sous-ensemble de G , $H \neq \emptyset$. Alors $(H, +)$ est un sous-groupe additif de $(G, +)$ si et seulement si pour tous x, y dans H , $x - y$ est aussi dans H .

Démonstration de la proposition 2. L'ensemble \mathcal{C} est non vide puisque $0 \in \mathcal{C}$ (le point $(0, 0)$ est constructible par définition).

Montrons que l'ensemble \mathcal{C} est un sous-groupe additif :
 Soient α et β deux réels CRCA, on a bien que $\alpha - \beta$ est CRCA. Donc \mathcal{C} est un sous-groupe additif.

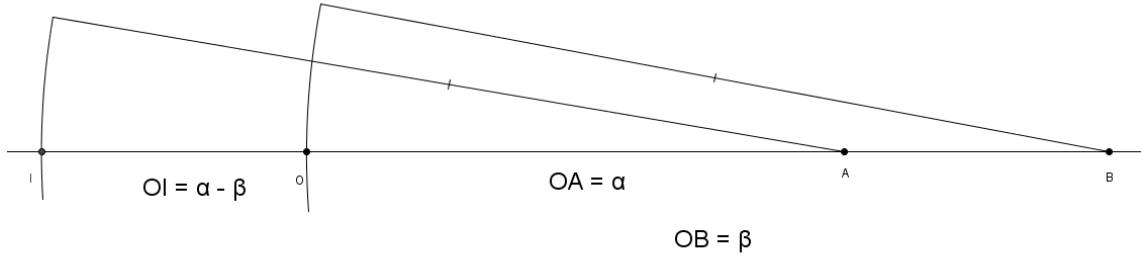


FIGURE 2.3 – \mathcal{C} est un sous-groupe additif.

Montrons que tout élément non nul de \mathcal{C} est inversible :
Soit α un réel CRCA non nul. On a la construction suivante :

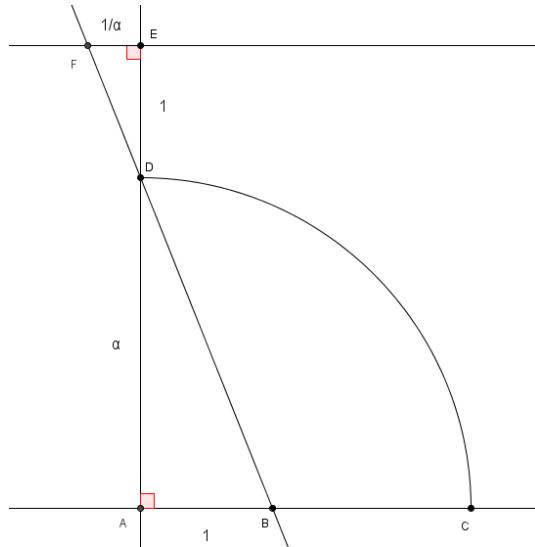


FIGURE 2.4 – Construction de $\frac{1}{\alpha}$ avec $\alpha \neq 0$

Par le théorème de Thalès on a :

$$\frac{EF}{AB} = \frac{ED}{AD}.$$

Or $AB = 1$, $ED = 1$ et $AD = \alpha$ donc :

$$EF = \frac{1}{\alpha}.$$

Donc tout élément non nul de \mathcal{C} est inversible.

Montrons que \mathcal{C} est stable par multiplication :
Soient α, β deux réels CRCA. On a la construction suivante :

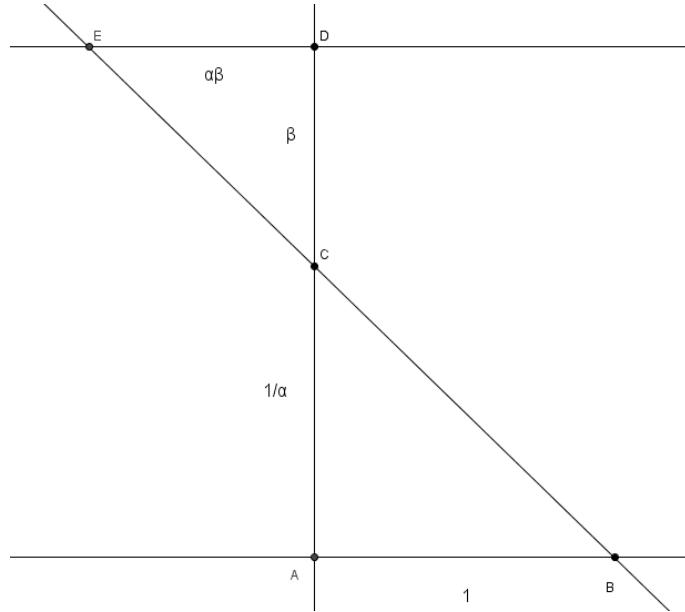


FIGURE 2.5 – Construction de $\alpha\beta$.

Par le théorème de Thalès on a :

$$\frac{ED}{AB} = \frac{DC}{CA}.$$

Or $AB = 1$, $DC = \beta$ et $CA = \frac{1}{\alpha}$ donc :

$$ED = \alpha\beta.$$

Donc l'ensemble \mathcal{C} est stable par multiplication.

□

Proposition 3. Si $\alpha \in \mathbb{R}^+$ est CRCA, alors $\sqrt{\alpha}$ l'est également.

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$ CRCA. On a la construction suivante :

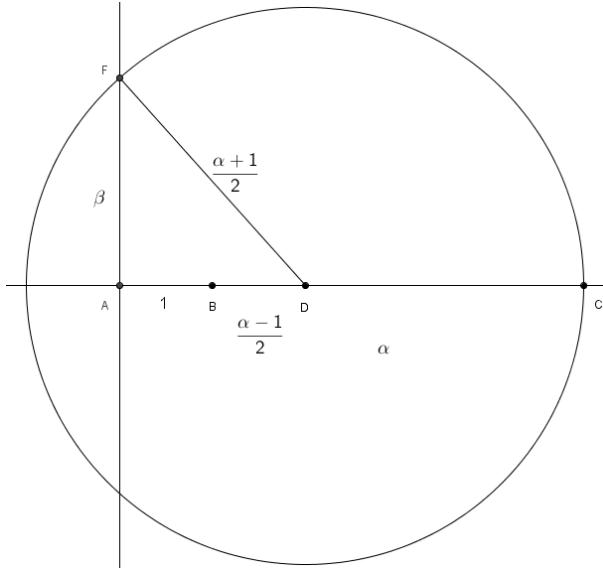


FIGURE 2.6 – Construction de $\sqrt{\alpha}$.

On a : $AD = \frac{\alpha-1}{2}$, $AC = \alpha$, $AF = \beta$ et comme :

$$\alpha - \frac{\alpha-1}{2} = \frac{\alpha+1}{2}.$$

On a également $FD = \frac{\alpha+1}{2}$. Et par le théorème de Pythagore :

$$FD^2 = AF^2 + AD^2.$$

D'où,

$$\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^2 = \frac{\alpha^2 + 1 + 2\alpha}{4} = \left(\frac{\alpha-1}{2}\right)^2 + \beta^2,$$

d'où,

$$\beta^2 = \alpha,$$

ie :

$$\beta = \sqrt{\alpha}.$$

□

Définition 8. Un angle θ est CRCA si il existe une figure CRCA contenant les points $\{A, B, C\}$ tels que $\widehat{ABC} = \theta$.

Proposition 4. Si un angle θ est CRCA, alors $\frac{\theta}{2}$ est également CRCA.

Démonstration. Trivial, cela revient à construire une bissectrice.

□

Remarques :

1. Il a été prouvé que la règle n'est pas essentielle dans la construction à la règle et au compas. En effet, le théorème de Mohr-Mascheroni démontré par Georg Mohr 1672 et par Lorenzo Mascheroni en 1797, affirme que si une figure est constructible à la règle et au compas alors elle est constructible au compas seul (excepté le tracé effectif des droites).
2. D'autre part, le théorème de Poncelet-Steiner (démontré en 1833 par Jakob Steiner d'après les idées de Jean-Victor Poncelet) nous dit que tout point constructible à la règle et au compas peut être construit à la règle seule à condition que soit tracé dans le plan un cercle et son centre.

2.2 Aspects algébriques.

Voyons maintenant les aspects algébriques du problème de la construction à la règle et au compas. Nous allons tout d'abord formaliser mathématiquement ce que signifie "être constructible" pour un nombre réel puis, nous verrons le théorème de Wantzel qui donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre réel α soit constructible à la règle et au compas. Avant de démontrer ce théorème nous allons faire quelques rappels concernant l'algèbre et la théorie des corps.

2.2.1 Rappels.

Définition 9 (Corps). Un corps K est un anneau commutatif unitaire, intègre, dont tous les éléments non nuls sont inversibles et tel que $0_K \neq 1_K$.

Définition 10 (Sous-corps). Soient K et K' deux corps tels que $K' \subseteq K$, on dit que K' est un sous-corps de K si le corps K' est un sous-anneau unitaire de K . (Si de plus, $K' \neq K$, alors K' est un sous-corps propre de K .)

Remarque : Un sous-corps est donc un sous-groupe additif, stable par multiplication et dont tous les éléments non nuls sont inversibles.

Ainsi, dans la proposition 2 on a montré que l'ensemble \mathcal{C} des réels CRCA est un sous-groupe additif, stable par multiplication et dont tous les éléments non nuls sont inversibles, c'est à dire \mathcal{C} est en fait un sous-corps de \mathbb{R} .

Définition 11 (Espace vectoriel). *Soit K un corps. Un espace vectoriel sur K , ou K -espace vectoriel, est un ensemble E dont les éléments sont appellés vecteurs, muni de deux lois :*

- une loi interne $+$: $E^2 \rightarrow E$, appellée addition.
- une loi de composition externe \cdot : $K \times E \rightarrow E$, appellée multiplication scalaire.

Ces deux lois vérifient les propriétés suivantes :

1. $(E, +)$ est un groupe additif.
2. La loi \cdot vérifie les conditions suivantes, pour tous vecteurs u, v de E et tous scalaires λ, μ de K :
 - Elle est distributive à droite par rapport à la loi $+$ de E et à gauche par rapport à l'addition sur le corps K , c'est à dire :

$$\lambda \cdot (u + v) = (\lambda \cdot u) + (\lambda \cdot v),$$

$$(\lambda + \mu) \cdot u = (\lambda \cdot u) + (\mu \cdot u).$$

- Elle vérifie une associativité mixte par rapport à la multiplication de K , c'est à dire :

$$(\lambda\mu) \cdot u = \lambda \cdot (\mu \cdot u).$$

- L'élément neutre multiplicatif de K , noté 1, est un neutre à gauche pour la loi \cdot , c'est à dire :

$$1 \cdot u = u.$$

Définition 12 (Sous-espace vectoriel). *Soit F une partie de E . L'ensemble F est un sous-espace vectoriel de E lorsque :*

- Le groupe $(F, +)$ est un sous-groupe additif de $(E, +)$,
- l'ensemble F est stable par multiplication par un scalaire.

Une caractérisation équivalente d'un sous-espace vectoriel est la suivante : F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $0_E \in F$ (où 0_E est l'élément neutre de $(E, +)$) et F est stable par combinaisons linéaires.

Définition 13 (Indépendance et dépendance linéaire). *Soit K un corps et E un K -espace vectoriel. Soit I un sous-ensemble quelconque (fini ou non) de \mathbb{N} et $(v_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E . On dit que la famille $(v_i)_{i \in I}$ est libre (ou que les v_i sont linéairement indépendants) si :*

$$\forall (a_i)_i \in K^{(I)}, \sum_{i \in I} a_i v_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in I, a_i = 0.$$

où un élément de $K^{(I)}$ est une famille indexée par I de scalaires tous nuls sauf un nombre fini.

Une famille de vecteurs de E qui ne vérifie pas la propriété précédente est dite linéairement dépendante ou liée.

Définition 14 (Extension de corps). *Etant donné un corps K , on appelle extension de K tout corps L contenant un sous-corps isomorphe à K . On note cette extension L/K .*

Définition 15. *Si K/k et L/K sont deux extensions de corps alors K/k est une sous-extension de L/k et L/K est une extension relative de L/k .*

Définition 16 (Extension engendrée par une partie). *Soient K/k une extension de corps et A une partie de K . On note $k(A)$ l'intersection des sous-extensions de K/k contenant A . Le corps $k(A)$ est appelé sous-extension de K/k engendrée par A .*

Définition 17 (Degré d'une extension). *Soit K/k une extension de corps. Le degré de K/k noté $[K : k]$ est par définition la dimension du k -espace vectoriel K . $[K : k] \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$.*

Remarques :

1. $[K : k] = 1 \Rightarrow K = k$.
2. Si $A = \emptyset$ alors $k(A) = k$. Si $A = K$ alors $k(A) = K$.

Définition 18 (Elément algébrique). Soit a un élément d'une extension L d'un corps K . On dit que a est algébrique sur K si il existe un polynôme P , non nul, dans $K[X]$ tel que $P(a) = 0$.

Un élément qui n'est pas algébrique est dit transcendant.

Définition 19 (Polynôme minimal). Soit a un élément algébrique sur un corps K . Alors il existe un unique polynôme irréductible unitaire dans $K[X]$ qui s'annule en a . Ce polynôme est appellé polynôme minimal de a .

Définition 20 (Degré d'un élément algébrique). Soit a un élément algébrique sur un corps K . Alors le degré de a sur K est le degré de l'extension $K(a)/K$, $[K(a) : K]$. C'est aussi le degré du polynôme minimal de a .

Théorème 1 (Théorème de transitivité du degré). Soient L/K et K/k deux extensions alors $[L : k] = [L : K][K : k]$ avec la convention :
 $\infty \in \{[L : K]; [K : k]\} \Leftrightarrow [L : k] = \infty$.

2.2.2 Théorème de Wantzel.

Définition 21. Soit \mathcal{E} un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 . On dit qu'un point $P \in \mathbb{R}^2$ est constructible (à la règle et au compas) à partir de \mathcal{E} si on peut obtenir P à partir des points de \mathcal{E} et à l'aide d'une des trois opérations suivantes :

- prendre l'intersection de deux droites (non parallèles) passant chacune par deux points distincts déjà construits.
- prendre l'un des points de l'intersection d'une droite passant par deux points distincts déjà construits et d'un cercle de rayon joignant deux points distincts déjà construits.
- prendre l'un des points de l'intersection de deux cercles de rayons joignant chacun deux points distincts déjà construits.

Remarques :

1. Cette définition est la version algébrique de la définition 6.
2. Comme pour la définition 7, si E est un sous-ensemble de \mathbb{R} contenant 0 et 1, on dit qu'un réel α est constructible à partir de E si le point $(\alpha; 0)$ est constructible à partir de $E \times \{0\}$ au sens de la définition ci-dessus.

Théorème 2. *Soit E un sous-ensemble de \mathbb{R} contenant 0 et 1. L'ensemble \mathcal{C}_E des réels constructibles à partir de E est un sous-corps de \mathbb{R} , tel que si $\alpha \in \mathcal{C}_E$, alors $\sqrt{|\alpha|} \in \mathcal{C}_E$.*

Démonstration. La preuve de ce théorème est identique aux preuves des propositions 2 et 3.

□

Remarque : On a montré dans la partie concernant l'aspect géométrique des constructions à la règle et au compas qu'à partir de deux points (l'origine $(0; 0)$ et le point $(1; 0)$) nous étions capables de construire l'ensemble \mathbb{Q}^2 tout entier. Donc être constructible à partir de 0 et 1 est la même chose qu'être constructible à partir de \mathbb{Q} . On dit alors tout simplement "être constructible".

Théorème 3 (Théorème de Wantzel). *Soit L un sous-corps de \mathbb{C} . Un complexe a est constructible à partir de L si et seulement si il existe une suite finie d'extensions :*

$$L = L_0 \subseteq L_1 \subseteq \cdots \subseteq L_n \subseteq \mathbb{C},$$

telles que :

- L_{i+1} est une extension quadratique de L_i (i.e. $[L_{i+1} : L_i] = 2$).
- le réel a appartient à L_n .

Démonstration. On se donne (O, I, J) un repère orthonormé du plan, en posant $O = (0; 0)$, $I = (1; 0)$, $J = (0; 1)$. On montre le théorème de Wantzel avec comme corps de base $L = \mathbb{Q}$, sachant que la démonstration reste la même si l'on part d'un corps L quelconque. Montrons tout d'abord le sens direct. On suppose a constructible, a est l'abscisse d'un point constructible

M de l'axe OI .

Soit $M_1, M_2, \dots, M_n = M$ la suite des points successivement construits pour obtenir M . On peut supposer que $M_1 = O$ et $M_2 = I$. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$ on a $M_i = (x_i; y_i)$ (coordonnées dans le repère (O, I, J)). On a donc : $M_1 = (0; 0)$, $M_2 = (1; 0)$ et $M_n = (a; 0)$.

Posons :

$$\begin{aligned} K_1 &= \mathbb{Q}(x_1, y_1) \\ K_2 &= \mathbb{Q}(x_1, y_1, x_2, y_2) \\ &\vdots \\ K_i &= \mathbb{Q}(x_1, y_1, \dots, x_i, y_i) \\ &\vdots \\ K_n &= \mathbb{Q}(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \end{aligned}$$

On a $K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_i \subset K_{i+1} \subset K_n$ avec $K_1 = K_2 = \mathbb{Q}$ et $a = x_n \in K_n$. Montrons par récurrence sur n que pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $K_{i+1} = K_i$ ou $[K_{i+1} : K_i] = 2$.

Le résultat est évident pour $i = 1$ puisque $K_1 = K_2 = \mathbb{Q}$. Supposons donc $i \geq 2$. Il y a trois cas possibles pour la construction du point M_{i+1} :

1. M_{i+1} est l'intersection de deux droites passant par les points M_1, \dots, M_i construits précédemment,
2. M_{i+1} est l'intersection d'une droite et d'un cercle définis par les points M_1, \dots, M_i ,
3. M_{i+1} est l'intersection de deux cercles définis par les points M_1, \dots, M_i .

On a maintenant le lemme suivant :

Lemme 1. 1. Si D est une droite de \mathcal{P} passant par les points distincts $A = (a_1; a_2)$ et $B = (b_1; b_2)$ alors D a une équation de la forme :

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0,$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}(a_1, a_2, b_1, b_2)$.

2. Soient $A = (a_1; a_2)$, $B = (b_1; b_2)$, $C = (c_1; c_2)$ des points de \mathcal{P} , alors le cercle de centre A et de rayon BC a une équation de la forme :

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0,$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2)$.

Démonstration du lemme.

1. Si $a_1 = b_1$, D a pour équation : $x - a_1 = 0$.
- Si $a_1 \neq b_1$, D a pour équation : $y - a_2 = (x - a_1) \left(\frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} \right)$ que l'on peut mettre sous la forme : $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}(a_1, a_2, b_1, b_2)$.
2. Le cercle de centre A et de rayon BC a pour équation : $(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = (c_1 - b_1)^2 + (c_2 - b_2)^2$ qui se met également sous la forme $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2)$.

Fin de la preuve du lemme.

Donc d'après ce lemme les droites et les cercles définis à partir des points M_1, \dots, M_i ont des équations à coefficients dans $K_i = \mathbb{Q}(x_1, y_1, \dots, x_i, y_i)$.

1. Si M_{i+1} est l'intersection de deux droites, alors ses coordonnées x_{i+1} et y_{i+1} sont solutions d'un système de la forme :

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0 \end{cases}$$

avec $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma' \in K_i$.

Il est facile de résoudre ce système et de constater qu'alors x_{i+1} et y_{i+1} sont dans K_i , d'où :

$$K_{i+1} = K_i(x_{i+1}, y_{i+1}) = K_i.$$

2. Si M_{i+1} est l'intersection d'une droite et d'un cercle alors ses coordonnées x_{i+1} et y_{i+1} sont solutions d'un système de la forme :

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \\ x^2 + y^2 - 2\alpha' x - 2\beta' y + \gamma' = 0 \end{cases}$$

avec $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma' \in K_i$.

- Si $\beta \neq 0$, on a $y = -1/\beta(\alpha x + \gamma)$. En remplaçant y dans la seconde équation, on obtient une équation polynomiale de degré 2 en x à coefficients dans K_i . x_{i+1} est racine de cette équation. Maintenant,
 - * si $x_{i+1} \in K_i$ alors $y_{i+1} = -1/\beta(\alpha x_{i+1} + \gamma) \in K_i$ et donc $K_{i+1} = K_i$.
 - * si $x_{i+1} \notin K_i$ alors x_{i+1} est algébrique sur K_i et de degré 2. On a donc : $K_{i+1} = K_i(x_{i+1}, y_{i+1}) = K_i(x_{i+1})$ et $[K_{i+1} : K_i] = 2$.

- Si $\beta = 0$, alors $\alpha \neq 0$, on procède alors de la même manière, en exprimant x en fonction de y à l'aide de la première équation et en remplaçant dans la seconde.
3. Si M_{i+1} est à l'intersection de deux cercles, x_{i+1} et y_{i+1} sont alors solutions d'un système de la forme :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0 \\ x^2 + y^2 - 2\alpha' x - 2\beta' y + \gamma' = 0 \end{cases}$$

avec $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma' \in K_i$.

Ce système est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0 \\ 2(\alpha - \alpha')x + 2(\beta - \beta')y - (\gamma - \gamma') = 0 \end{cases}$$

et ainsi on se ramène au cas précédent.

Nous avons donc bien montré que soit $K_{i+1} = K_i$, soit $[K_{i+1} : K_i] = 2$. Ainsi nous avons construit une suite de sous-corps de \mathbb{C} :

$$K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_n$$

telle que $K_1 = \mathbb{Q}, a \in K_n$ et pour $1 \leq i \leq n-1, K_{i+1} = K_i$ ou $[K_{i+1} : K_i] = 2$.

Il est possible de rendre cette suite strictement croissante en en retirant les corps superflus. On obtient alors une suite :

$$L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset L_p$$

avec $L_1 = \mathbb{Q}, a \in L_p$ et pour $1 \leq j \leq p-1, [L_{j+1} : L_j] = 2$.

Réiproquement, supposons que : $L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset L_p$ soit une suite de sous-corps de \mathbb{R} vérifiant les conditions du théorème. Montrons par récurrence sur $j, 1 \leq j \leq p$ que $L_j \subset \mathcal{C}$. Ainsi on aura bien que a est un nombre constructible.

$L_1 \subset \mathcal{C}$ car $L_1 = \mathbb{Q}$ et on sait que $\mathbb{Q} \subset \mathcal{C}$. Supposons que $L_j \subset \mathcal{C}$ et montrons que $L_{j+1} \subset \mathcal{C}$. Soit $a \in L_{j+1}$, montrons que $a \in \mathcal{C}$. Comme $[L_{j+1} : L_j] = 2$, la famille $1, a, a^2$ est liée sur L_j , donc il existe $\alpha, \beta, \gamma \in L_j$ non tous nuls tels que :

$$\alpha a^2 + \beta a + \gamma = 0.$$

Donc :

- si $\alpha = 0$ alors $a = \frac{-\gamma}{\beta} \in L_j \subset \mathcal{C}$,
- si $\alpha \neq 0$ alors $a = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ et $a \in \mathcal{C}$, car \mathcal{C} est un corps stable par racine carrée (c'est le théorème 2 avec $E = \mathbb{Q}$).

D'où le résultat.[MAT 12][CAR]

□

Définition 22 (Tour d'extensions quadratiques). *On appelle tour d'extensions quadratiques une suite finie d'extensions de corps :*

$$L = L_0 \subseteq L_1 \subseteq \cdots \subseteq L_n \subseteq \mathbb{C},$$

telle que pour $1 \leq j \leq p-1$, $[L_{j+1} : L_j] = 2$.

Remarque : Ainsi on peut reformuler le théorème de Wantzel ainsi :

Un nombre complexe est constructible si et seulement si il appartient à une tour d'extensions quadratiques.

Intéressons nous maintenant à une conséquence de ce théorème permettant de caractériser facilement les nombres constructibles :

Conséquence 1 (Conséquence du Théorème de Wantzel.). *Tout nombre constructible est algébrique sur \mathbb{Q} et son degré est une puissance de 2.*

Démonstration. Si $a \in \mathbb{R}$ est constructible alors d'après le théorème précédent, il existe une suite de sous-corps de \mathbb{R} , $L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset L_p$ telle que $L_1 = \mathbb{Q}$, $a \in L_p$ et pour $1 \leq j \leq p-1$, $[L_{j+1} : L_j] = 2$. D'après le théorème 1 sur la transitivité du degré, on a :

$$[L_p : \mathbb{Q}] = [L_p : L_{p-1}][L_{p-1} : L_{p-2}] \dots [L_2 : \mathbb{Q}] = 2^{p-1}.$$

On a d'autre part : $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(a) \subset L_p$ d'où :

$$2^{p-1} = [L_p : \mathbb{Q}] = [L_p : \mathbb{Q}(a)][\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}].$$

On déduit de cela que $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}]$ est un diviseur de 2^{p-1} , donc une puissance de 2 que nous noterons 2^q .

Ceci montre que a est algébrique sur \mathbb{Q} , de plus d'après la définition 20 le degré de a sur \mathbb{Q} est $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}] = 2^q$.

□

Cette conséquence est très utile pour montrer qu'un nombre réel n'est pas constructible.[ESC]

2.3 Exemples de constructions impossibles.

Nous allons voir deux exemples célèbres de constructions impossibles à la règle et au compas : la trisection de l'angle, consistant à partager un angle quelconque en trois angles égaux et la duplication du cube, consistant à construire à partir d'un cube, un autre cube ayant le double du volume du premier. Ces deux problèmes font partie des *trois grands problèmes de l'Antiquité* qui comptaient en plus des deux cités précédemment, la quadrature du cercle, soit construire un carré dont l'aire est égale à celle d'un disque donné. Ces grands problèmes n'ont été résolus (tous par la négative) que très tardivement grâce au développement de l'algèbre moderne avec la théorie des corps et la théorie de Galois.

Dans la suite, nous nous placerons dans le plan \mathcal{P} muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (avec $O = (0, 0)$; $I = (1, 0)$; $J = (0, 1)$).

2.3.1 Trisection de l'angle.

Beaucoup de mathématiciens ont cherché, en vain, une méthode géométrique pour partager un angle quelconque en trois à l'aide de la règle et du compas. Archimète (env. 287 à 212 av. J.-C.) proposa une méthode par ajustement à l'aide d'un compas et d'une règle munie de deux graduations. Nicomède (env. 280 à 210 av. J.-C.) lui, utilisa une courbe auxiliaire, la conchoïde de droite pour obtenir la solution.

Diviser un angle θ en 3 angles égaux revient à construire le point de coordonnées $(\cos \frac{\theta}{3}, \sin \frac{\theta}{3})$. Il nous faut donc montrer que, par exemple $\alpha = \cos \frac{\theta}{3}$ n'est pas toujours constructible. D'après la conséquence 1 (la conséquence du théorème de Wantzel) il nous suffit de montrer qu'il est algébrique sur \mathbb{Q} et que son degré n'est pas une puissance de 2.

Tout d'abord nous avons la formule suivante :

Lemme 2 (Formule de Viète).

$$\cos 3x = 4(\cos x)^3 - 3 \cos x.$$

Démonstration. :

$$\begin{aligned}
4(\cos(\theta))^3 - 3\cos(\theta) &= 4 \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^3 - 3 \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right) \\
&= \frac{e^{i3\theta} + 3e^{2i\theta-i\theta} + 3e^{i\theta-2i\theta} + e^{-3i\theta}}{2} - 3 \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right) \\
&= \frac{e^{i3\theta} + e^{-i3\theta}}{2} + 3(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) - 3(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \\
&= \cos(3\theta)
\end{aligned}$$

□

D'où :

$$\cos x = 4 \left(\cos \frac{x}{3} \right)^3 - 3 \cos \frac{x}{3}.$$

Donc $\alpha = \cos \frac{\theta}{3}$ est racine du polynôme $P(X) = 4X^3 - 3X - \cos \theta$. Il nous reste à montrer qu'il existe des angles θ tels que ce polynôme est irréductible sur \mathbb{Q} . On prend par exemple l'angle : $\theta = \frac{2\pi}{3}$. On a alors le polynôme $P(X) = 4X^3 - 3X - \cos(\frac{2\pi}{3}) = 4X^3 - 3X + \frac{1}{2}$ qui admet $\cos(\theta)$ pour racine. On rappelle le critère des racines :

Proposition 5. *Un polynôme P de $\mathbb{Q}[X]$ est irréductible sur \mathbb{Q} si il est de degré 2 ou 3 et qu'il n'a pas de racines dans \mathbb{Q} .*

On vérifie facilement que le polynôme P n'a pas de racine dans \mathbb{Q} et comme il est de degré 3 alors il est irréductible. On a donc que α est de degré 3 sur \mathbb{Q} et par la conséquence du théorème de Wantzel α n'est pas constructible.

2.3.2 Duplication du cube.

Ce problème à pour origine une légende rapportée par Eratosthène (env. 276 à 196 av. J.-C.) dans le *Platonicien*. Alors que la peste régnait à Delos (une petite île des Cyclades en Grèce), l'oracle d'Appollon déclara que celui-ci désirait un autel cubique double du précédent. Les architectes Déliens allèrent chercher conseil auprès de Platon qui leur répondit que le dieu n'avait certainement pas besoin d'un autel double, mais qu'il leur faisait le

reproche de négliger la géométrie.

Donnons nous un cube de côté c . Le problème de la duplication du cube peut se ramener au problème de construire une segment de longueur égale à $\sqrt[3]{2}c$. En effet, un cube de longueur de côté $\sqrt[3]{2}c$ aura un volume de $(\sqrt[3]{2}c)^3 = 2c^3$, soit bien le double du volume du premier cube.

Construire à la règle et au compas un segment de longueur égale à $\sqrt[3]{2}c$ à partir d'un segment de longueur c revient à construire un point de coordonnées $(\sqrt[3]{2}, 0)$. Il nous faut donc montrer que $\beta = \sqrt[3]{2}$ n'est pas constructible à l'aide de la conséquence 1.

Le polynôme $Q(X) = X^3 - 2$ admet β pour racine. On rappelle le critère d'Eisenstein :

Proposition 6 (Critère d'Eisenstein). *Soit $P(X) = a_nX^n + \dots + a_1X + a_0$ un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$. Si il existe p un nombre premier, tel que :*

- p ne divise pas a_0 ,
- p divise a_0, a_1, \dots, a_{n-1} ,
- p^2 ne divise pas a_0 .

Alors on dit que le polynôme P est d'Eisenstein en p et il est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Ainsi, Q est d'Eisenstein en 2 et est donc irréductible sur \mathbb{Q} . D'où Q est le polynôme minimal de β et donc β est algébrique de degré 3. Comme 3 n'est pas une puissance de 2 alors par la conséquence 1, β n'est pas constructible.[ESC]

Les deux problèmes de la duplication du cube et de la trisection de l'angle sont donc impossibles à réaliser à la règle et au compas. Nous verrons cependant dans le prochain chapitre qu'il est possible de les réaliser à l'aide de l'origami.

Chapitre 3

Comparaison entre la construction par origami et à la règle et au compas.

L'origami permet de construire un plus grand nombre de figures que la règle et le compas. Nous allons voir dans ce chapitre qu'en ne s'autorisant qu'un nombre réduit d'axiomes de l'origami nous pourrons construire exactement les figures constructibles à la règle et au compas. Nous verrons ensuite en quoi la totalité des axiomes de l'origami permettent de dépasser la règle et le compas.

3.1 Les cinq premiers axiomes de l'origami.

La règle et le compas permettent de construire respectivement des droites et des cercles. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2 concernant les constructions à la règle et au compas, construire un point à l'aide de ces deux instruments revient à considérer l'intersection de droites ou/et de cercles. Il est donc naturel de considérer comme des "axiomes" les trois caractérisations suivantes :

Définition 23. *Un point A du plan \mathcal{P} est constructible à la règle et au compas si :*

- A est l’intersection de deux droites distinctes passant par des points CRCA,
- ou bien A est l’intersection d’une droite passant par des points CRCA et d’un cercle de centre CRCA et passant par un point CRCA,
- ou bien A est l’intersection de deux cercles de centres respectifs CRCA et passant chacun par des points CRCA.

Il est possible d’établir une équivalence entre les constructions possibles grâce aux cinq premiers axiomes de l’origami et les constructions possibles à la règle et au compas :

Proposition 7. *Les cinq premiers axiomes de l’origami permettent de construire exactement les figures constructibles à l’aide d’une règle et d’un compas. De plus, les 7 axiomes de l’origami permettent de construire plus de figures que la règle et le compas.*

Pour cela il suffit de réaliser les cinq premiers axiomes de l’origami à l’aide de la règle et du compas et, réciproquement de réaliser les trois axiomes de la règle et du compas grâce à l’origami (bien entendu sans utiliser le sixième axiome).

Remarque : Avant de débuter la démonstration, il est important de noter qu’en théorie les droites et les cercles considérés ne sont pas toujours tracés. Il est facile de tracer une droite grâce à la règle et le compas ou grâce à l’origami, c’est pourquoi lorsque l’on a deux points A et B distincts dans le plan, on peut parler de la droite (AB) et la tracer. Cependant, cela n’est plus vrai, par exemple, lorsque l’on parle de cercle en origami. En effet, il est impossible de plier un cercle, donc dans ce cas le cercle de centre B et de rayon AB sera représenté uniquement par les points A et B.

Notation 1. *Dans la suite un cercle de centre A et de rayon AB sera noté :
 $\overset{\circ}{AB}$.*

Démonstration. Vérifions tout d'abord que les cinq premiers axiomes de l'origami sont réalisables à l'aide d'une règle et d'un compas :

- Axiome 1 : trivial.
- Axiome 2 : évident, il suffit de construire la médiatrice d'un segment.
- Axiome 3 : il suffit de construire la bissectrice d'un angle.
- Axiome 4 : également trivial, cela revient à construire la perpendiculaire à une droite passant par un point.
- Axiome 5 : il faut pour cela tracer le cercle de centre B et de rayon AB , on appelle alors A' l'intersection de ce cercle avec la droite d . Le pli obtenu est alors la bissectrice de l'angle $\widehat{ABA'}$ (ou également la médiatrice du segment $[AA']$).

Réciproquement, montrons que les trois axiomes de la règle et du compas sont réalisables à l'aide de l'origami :

Intersection de deux droites : si l'on dispose de quatre points A, B, C et D du plan, le premier axiome de l'origami nous permet de plier les droites (AB) et (CD) . Maintenant, en supposant que ces deux droites ne sont pas parallèles, l'intersection des deux plis correspond bien à l'intersection des droites.

Intersection d'une droite et d'un cercle : si l'on dispose de quatre points distincts A, B, C et D du plan, on peut tout d'abord plier la droite (AB) . Ensuite, l'axiome 5 nous permet de construire l'intersection de la droite (AB) et du cercle $\overset{\circ}{CD}$ en envoyant le point D sur la droite (AB) par un pli passant par C . Bien évidemment cela n'est pas toujours possible, en fonction de la position du cercle l'intersection peut être vide ou contenir un ou deux points.

Intersection de deux cercles : On dispose de quatre points distincts A, B, C et D du plan. Ces quatre points définissent les cercles $\overset{\circ}{AB}$ et $\overset{\circ}{CD}$. Cette construction va nous permettre de plier l'axe radical aux deux cercles. Bien entendu si la distance $AB + CD$ est strictement inférieure à la distance AC , l'intersection des deux cercles est vide. Dans le cas contraire l'intersection recherchée sera en fait l'intersection entre l'axe radical et un des deux cercles qui est constructible par origami par l'axiome 5.

Plions tout d'abord la droite (AC) joignant les deux centres. Ensuite

plions un des deux cercles en deux suivant son diamètre, par exemple le cercle $\overset{\circ}{CD}$, de façon à obtenir une droite d différente de (AC) et qui ne lui est pas non plus orthogonale. Ensuite nous allons plier une parallèle à la droite d passant par A .

Remarque : Si nous disposons d'une droite d , pour plier sa parallèle d' passant par un point A , il suffit de plier une perpendiculaire l à d et de plier une nouvelle perpendiculaire à l passant par A . Ainsi nous aurons bien :

$$d \perp l, l \perp d' \Rightarrow d // d'.$$

Appelons d' la parallèle à d passant par A . Ensuite, nous devons déterminer les intersections respectives entre d' et $\overset{\circ}{AB}$ et entre d et $\overset{\circ}{CD}$. Pour cela nous utiliserons l'axiome 5 qui nous permet de construire l'intersection d'un cercle et d'une droite. Nommons respectivement E et F ces intersections. Plions alors la droite (EF) . De même que précédemment, nous construisons G , le second point d'intersection entre le cercle $\overset{\circ}{CD}$ et la droite (EF) . Plions maintenant k , la médiatrice du segment $[EG]$ puis k' la perpendiculaire à d' passant par E . Notons H le point d'intersection entre k et k' . La construction obtenue doit donc ressembler à ceci :

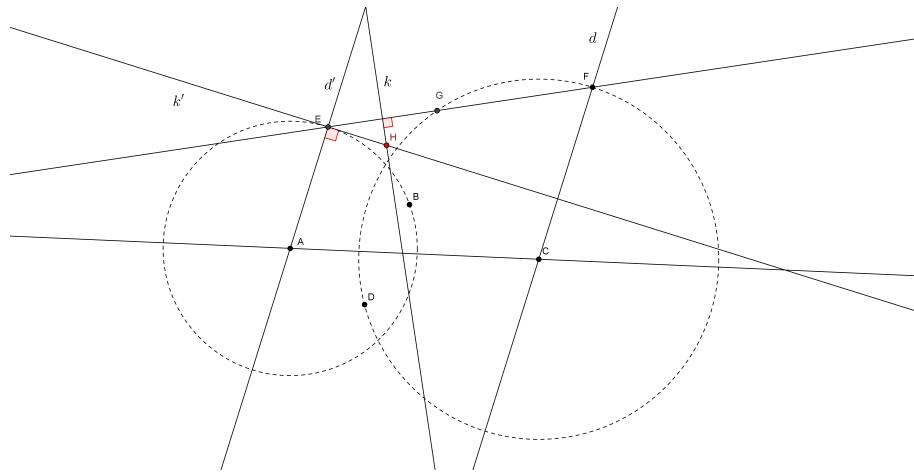


FIGURE 3.1 – Construction de l'axe radical.

Ensuite, il reste à recommencer le procédé affin d'obtenir un second point H' . Alors la droite (HH') est l'axe radical des cercles $\overset{\circ}{AB}$ et $\overset{\circ}{CD}$. Il suffit donc de construire les points d'intersection entre (HH') et l'un des deux cercles pour obtenir les points d'intersection des deux cercles.

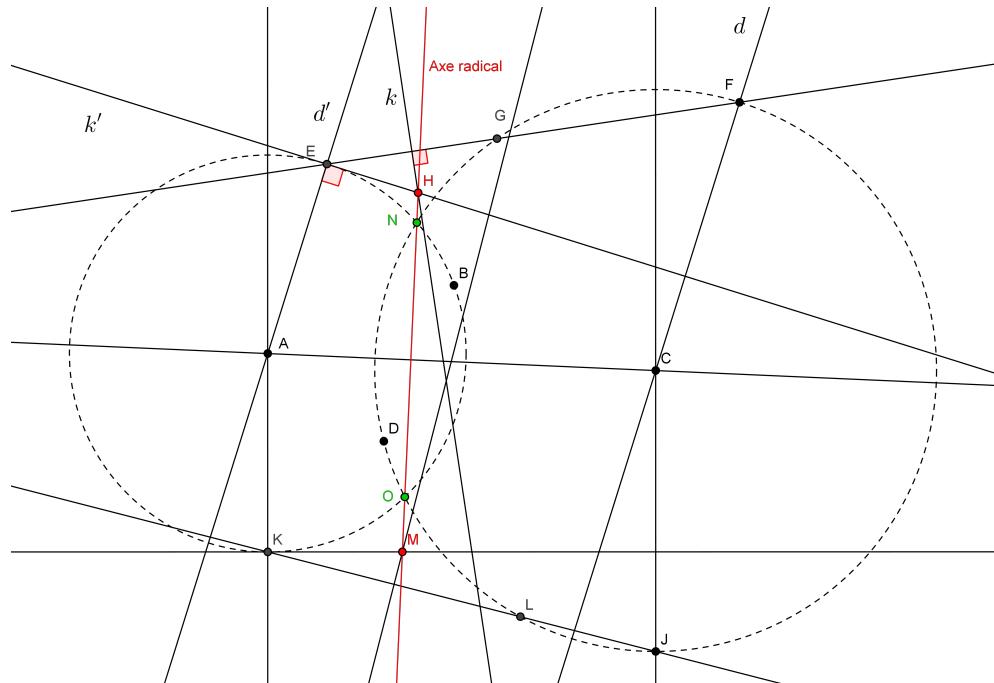


FIGURE 3.2 – Construction de l'axe radical.

Nous avons ainsi montré que les 5 premiers axiomes l'origami sont équivalents aux axiomes de la règle et du compas. Pour compléter cette preuve, nous devrons en plus montrer que les axiomes 6 et 7 de l'origami ne sont pas constructibles à l'aide de la règle et du compas. Nous verrons la fin de cette preuve à l'issue de ce chapitre.

□

Regardons maintenant la résolution d'équations de degré 3 par l'origami.

3.2 Résolution d'équations de degré 3 par origami.

Nous allons montrer que toute équation de degré 3, à coefficients réels est résoluble par origami, c'est-à-dire que les solutions (réelles) de ces équations sont constructibles par pliage.

Proposition 8. *Toute équation de degré 3, de la forme $t^3 + pt^2 + qt + r = 0$ est résoluble par origami.*

Démonstration. Plaçons nous dans le plan \mathcal{P} muni d'un repère orthonormé (O, I, J) avec $O = (0, 0), I = (1, 0), J = (0, 1)$.

Soit l'équation $t^3 + pt^2 + qt + r = 0$, avec p, q et r réels. Donnons nous deux points A de coordonnées (a, c) et B de coordonnées (b, d) avec a, b, c, d non nuls. Effectuons le pli (l'axiome 6 de Huzita nous le permet) qui envoie A sur (OI) en U et B sur (OJ) en V . Soit t le coefficient directeur de la droite (AU) et (BV) (ces droites sont évidemment parallèles). Soit M et N les milieux respectifs de $[AU]$ et $[BV]$.

Posons : $U = (x, 0)$ et $V = (0, y)$ et exprimons x et y en fonction des coordonnées des points A et B .

Comme t est le coefficient directeur de la droite (AU) , on a d'une part :

$$\begin{aligned} t &= \frac{c}{a-x}, \\ -x+a &= \frac{c}{t}, \\ -x &= \frac{c}{t} - a, \\ x &= a - \frac{c}{t}. \end{aligned}$$

Et d'autre part :

$$\begin{aligned} t &= \frac{d-y}{b}, \\ tb &= d-y, \\ y &= d-tb. \end{aligned}$$

D'où :

$$M = \frac{1}{2}(a - \frac{c}{t} + a, c) = (a - \frac{c}{2t}, \frac{c}{2}),$$

et,

$$N = \frac{1}{2}(b, 2d - tb) = (\frac{1}{2}b, d - \frac{tb}{2}).$$

Donc comme t est le coefficient de la droite (AU) et que (MN) lui est perpendiculaire, le coefficient directeur de (MN) est donc égal à $-\frac{1}{t}$ et on a :

$$-\frac{1}{t} = \frac{\frac{c}{2} - d + \frac{tb}{2}}{a - \frac{c}{2t} - \frac{1}{2}b},$$

$$\frac{1}{t} = \frac{-\frac{c}{2} + d - \frac{tb}{2}}{a - \frac{c}{2t} - \frac{1}{2}b},$$

$$t = \frac{a - \frac{c}{2t} - \frac{1}{2}b}{\frac{-c}{2} + d - \frac{tb}{2}},$$

$$\frac{2t^2}{2} = \frac{2at - c - bt}{2d - c - tb},$$

$$t^2(2d - c - td) = 2at - c - bt,$$

$$2dt^2 - ct^2 - t^3d = 2at - c - bt,$$

$$0 = dt^3 + (c - 2d)t^2 + (2a - b)t - c.$$

Nous pouvons identifier cette équation à une équation générale de degré 3, pour cela il suffit de poser $a = \frac{q+1}{2}$, $b = 1$, $c = -r$, $d = \frac{-p+r}{2}$. Enfin, la solution t de cette équation est la pente de la droite (AU) qui est facilement constructible par pliages.[IRE 12]

□

Remarque : Il est également possible de résoudre toutes les équations de degré 4 par origami. Grâce à la méthode mise au point par Ludovico Ferrari (1522-1565), appellée *Méthode de Ferrari*, consistant à se ramener à une équation de degré 3 appellée *résolvante*.

De ce qui précède nous pouvons alors déduire la proposition suivante :

Proposition 9. *Soit K l'ensemble des nombres constructibles par l'origami et k le corps des nombres constructibles à la règle et au compas. Alors on a :*

1. *Si $\alpha \in K$ alors $\sqrt[3]{\alpha} \in K$.*
2. *K est un corps.*
3. *$k \subset K$ et $k \neq K$.*

Démonstration. Tous les points de cette proposition ont déjà été montrés précédemment :

1. La proposition 8 montre en particulier que la racine cubique d'un nombre constructible par origami est également constructible.
2. La preuve est donnée par les propositions 2 et 7, puisque l'ensemble des nombres constructibles à la règle et au compas est un corps et que les 5 premiers axiomes de l'origami permettent de réaliser les constructions à la règle et au compas, on a que K est également un corps.
3. C'est une conséquence de la proposition 7.

□

3.3 Exemples de constructions réalisables uniquement par origami.

Dans le chapitre précédent nous avions constatés que la trisection de l'angle et la duplication du cube sont deux problèmes impossibles à réaliser à la règle et au compas. Cependant, comme nous venons de le voir, l'origami offre plus de possibilités que la règle et le compas. Nous allons donc voir qu'il est possible de résoudre les problèmes de la trisection de l'angle et la duplication du cube grâce à l'origami et détailler des méthodes pour réaliser les constructions.

3.3.1 Trisection de l'angle.

Comme nous l'avons dans le chapitre 2.3.1 trisecter un angle θ revient à construire un point de coordonnées $(\cos \frac{\theta}{3}, \sin \frac{\theta}{3})$. Pour montrer l'impossibilité de la construction nous avions choisi de montrer que le nombre $\alpha = \cos \frac{\theta}{3}$ n'était pas toujours constructible à la règle et au compas.

Pour montrer pourquoi le point $(\cos \frac{\theta}{3}, \sin \frac{\theta}{3})$ est constructible par l'origami, nous allons devoir montrer que les nombres $\alpha = \cos \frac{\theta}{3}$ et $\beta = \sin \frac{\theta}{3}$ sont constructibles par origami.

Tout d'abord, nous avons vu précédemment que α avait pour polynôme caractéristique le polynôme $P(X) = 4X^3 - 3X - \cos \theta$. Nous avons également

vu que l'origami permettait de résoudre les équations de degré 3, ainsi on sait que l'on peut construire par origami la (les) racine(s) du polynôme P . On peut donc construire α par origami.

Voyons maintenant pour $\beta = \sin \frac{\theta}{3}$. On a la formule suivante :

Lemme 3.

$$-4(\sin \theta)^3 + 3 \sin \theta = \sin 3\theta.$$

Démonstration. D'après la formule de Viète (lemme 2) on a :

$$4(\cos \theta)^3 - 3 \cos \theta = \cos 3\theta.$$

En dérivant les deux cotés de l'égalité on obtient :

$$4(\cos \theta)^2 \sin \theta - \sin \theta = \sin 3\theta.$$

Maintenant comme $(\cos x)^2 = 1 - (\sin x)^2$, en remplaçant le cosinus on a :

$$-4(\sin \theta)^3 + 3 \sin \theta = \sin 3\theta.$$

□

On a donc :

$$-4 \left(\sin \frac{\theta}{3} \right)^3 + 3 \sin \frac{\theta}{3} = \sin \theta.$$

Et donc le polynôme : $Q(X) = -4X^3 + 3X - \sin \theta$ admet β pour racine. Alors, comme pour α il est possible de construire la (les) racine(s) de ce polynôme par origami et donc de construire β .

On peut donc théoriquement réaliser la trisection d'un angle quelconque par origami.

Voyons maintenant une méthode pratique :

Nous réaliserons cette construction sur une feuille A4 (bien que les dimensions de la feuille n'aient aucune importance ici).

Dans un premier temps nous allons construire l'angle à trisecter. Pour cela on plie une droite d passant par le coin inférieur gauche de la feuille, que nous appellerons le point A . L'angle que nous partagerons en trois sera alors

l'angle α formé par la droite d et la droite formée par le bord inférieur de la feuille, que nous appellerons h_0 .

Ensuite, par pliage nous déterminerons deux bandes horizontales de même largeur (arbitraire) et délimitées par deux parallèles à h_0 que nous nommerons h_1 (pour la droite la plus proche de h_0) et h_2 . On appelle B le point d'intersection entre la droite h_2 et le bord gauche de la feuille. Maintenant nous devons plier la feuille selon une droite p et de manière à envoyer les points A et B respectivement sur les droites h_1 et d (ce pli correspond à l'axiome 6 de l'origami). Nous appellerons alors A' et B' les deux nouveaux points obtenus respectivement sur h_1 et d . La droite (AA') forme alors avec la droite h_0 un angle de mesure égale à $\frac{\alpha}{3}$.

Le paterne de cette construction doit ressembler à ceci :

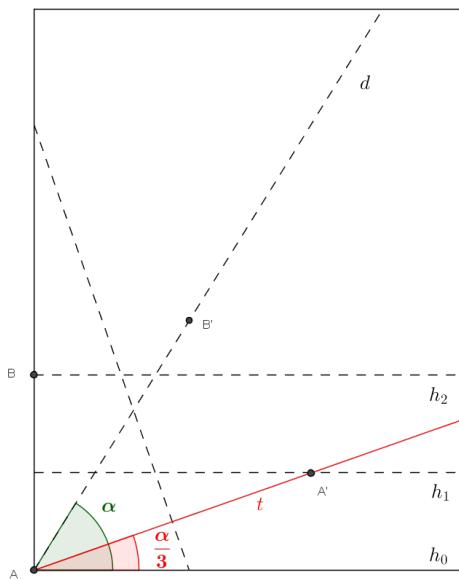


FIGURE 3.3 – Trisection de l'angle par origami

Montrons maintenant que l'angle obtenu a bien une valeur égale au tiers de la valeur de l'angle α :

Démonstration. : Par symétrie par rapport à la droite p , le milieu P du segment $[AB]$ est envoyé sur le milieu P' de $[A'B']$. D'autre part, par symétrie axiale d'axe h_1 le triangle $AA'B$ est isocèle en A' . Donc le triangle $A'AB'$,

symétrique de $AA'B$ par rapport à la droite p est également isocèle (en A). Donc, les triangles $AA'P'$ et $P'B'A$ sont tous deux rectangles en P' et symétriques par rapport à (AP') . Ils sont donc isométriques.

D'autre part soit H le projeté orthogonal de A' sur h_0 . Puisque les triangles $HA'A$ et $PA'A$ sont isométriques comme moitiés du rectangle $HA'PA$ et que les triangles $PA'A$ et $AA'P'$ sont aussi isométriques par symétrie d'axe p , il en résulte que les trois triangles $HA'A$, $AA'P'$ et $P'B'A$ sont isométriques. Donc les angles $\widehat{HAA'}$, $\widehat{A'AP'}$ et $\widehat{AP'B'}$ sont égaux et valent bien le tiers de l'angle α .

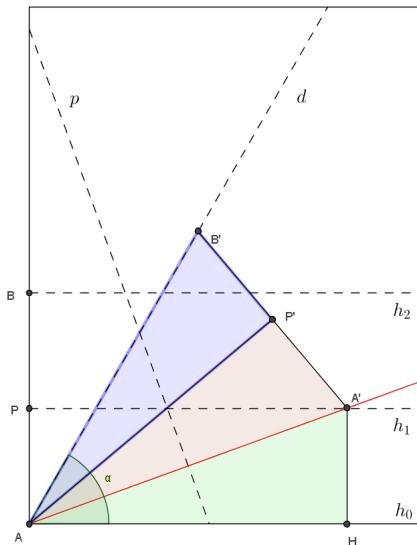


FIGURE 3.4 – Preuve de la trisection de l'angle.

□

3.3.2 Duplication du cube.

Comme nous l'avons vu précédemment, le problème de la duplication du cube se ramène à la construction d'un point de coordonnées $(\sqrt[3]{2}, 0)$. Il s'agit donc de montrer que le nombre $\gamma = \sqrt[3]{2}$ est constructible par origami. Nous avons également vu que le polynôme $Q(X) = X^3 - 2$ était le polynôme caractéristique de γ . Comme Q est de degré 3, ses racines sont constructibles par origami. Donc $\gamma = \sqrt[3]{2}$ est constructible.

Le nombre γ vérifie l'équation : $t^3 - 2 = 0$ où t est alors la racine cubique de 2.

Plaçons nous dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) et donnons nous les points $A = (\frac{1}{2}, 2)$ et $B = (1, 1)$. On plie alors selon l'axiome 6, de sorte à envoyer le point A sur l'axe (OI) en un point A' et le point B sur l'axe (OJ) en un point B' . Ainsi, t est le coefficient directeur de la droite $(B'B)$. Nous pouvons alors reporter la longueur t sur l'axe (OJ) , pour cela il suffit de construire le projeté orthogonal V de B sur l'axe (OJ) (en pliant la perpendiculaire à cet axe passant par B par exemple). Nous avons alors : $B'V = t$.

Ainsi comme nous venons de le voir, la duplication du cube nécessite l'utilisation de l'axiome 6. De ceci nous pouvons déduire la fin de la preuve de la proposition 7 :

Fin de la preuve de la proposition 7. Supposons que les 7 axiomes de l'origami soient réalisable à la règle et au compas. Alors comme l'axiome 6 permet de construire le nombre $\gamma = \sqrt[3]{2}$ on aurait donc que γ est constructible à la règle et au compas. Or cela entre en contradiction avec le théorème 3. Donc les 7 axiomes de l'origami dépassent la règle et le compas. \square

Nous allons maintenant appliquer les possibilités théoriques de l'origami à la construction des polygones et des polyèdres réguliers.

Chapitre 4

Pliage des polygones et polyèdres réguliers.

4.1 Définitions.

Nous avons tout d'abord deux définitions générales valables peu importe la dimension :

Définition 24 (Convexité). *Une figure géométrique est dite convexe lorsque pour tous points A et B appartenant à la surface (ou le volume) délimitée par la figure, le segment [AB] appartient à la surface (ou le volume) délimitée par la figure.*

Définition 25 (Enveloppe convexe). *L'enveloppe convexe d'une figure géométrique est la plus petite figure géométrique (au sens de l'aire ou du volume) convexe la contenant.*

4.1.1 Polygones.

Les nombreuses propriétés des polygones réguliers font que ceux-ci ont été largement étudiés de l'Antiquité jusqu'à nos jours. Voici quelques définitions :

Définition 26. *Un polygone est une figure géométrique plane composée d'une suite cyclique de segments consécutifs.*

Définition 27 (Polygone régulier). *Un polygone régulier est un polygone équilatéral (tous ses côtés ont la même longueur) et dont tous les angles ont la même mesure.*

Définition 28 (Polygone étoilé). *Un polygone est dit étoilé lorsque aucun de ses côtés n'appartient à son enveloppe convexe.*

Remarque : Un polygone régulier est soit convexe, soit étoilé.

4.1.2 Polyèdres.

Les polyèdres sont les équivalents en dimension trois des polygones. Nous donnons ici quelques définitions sur les polyèdres :

Définition 29. *Un polyèdre est une figure géométrique en trois dimensions ayant des faces planes polygonales qui se rencontrent selon des segments de droites que l'on appelle des arêtes. On appelle également sommet, la figure plane formée par l'intersection des faces du polyèdre.*

Définition 30 (Polyèdre régulier). *Un polyèdre est dit régulier s'il est constitué de faces toutes identiques et régulières (formées de polygones réguliers), et que tous ses sommets sont identiques (i.e. il y a un même nombre d'arêtes qui convergent à chaque sommet). Ils sont au nombre de neuf dont les cinq premiers sont convexes.*

Les 5 premiers polyèdres réguliers convexes étaient connus dès l'Antiquité et ont beaucoup inspiré la philosophie de Platon (427-347 av. J.C.) c'est pourquoi ils sont connus sous le nom de *Solides de Platon*. Les solides de Platon sont les suivants :

- Le tétraèdre (ou pyramide triangulaire). Ses 4 faces sont des triangles équilatéraux.
- L'hexaèdre (ou cube) constitué de 6 faces carrées.
- L'octaèdre constitué de 8 faces triangulaires équilatérales.
- Le dodécaèdre dont les 12 faces sont des pentagones.

- L’icosaèdre dont les 20 faces sont des triangles équilatéraux.

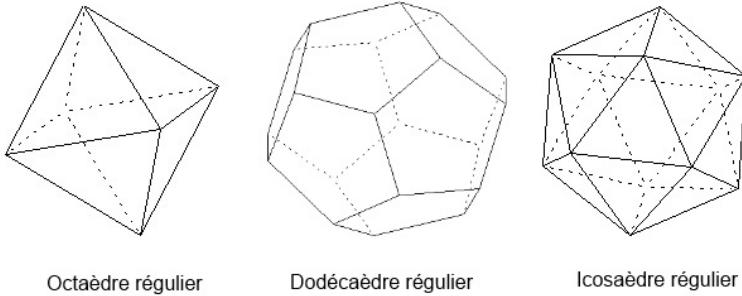


FIGURE 4.1 – L’octaèdre, le dodécaèdre et l’icosaèdre.

Définition 31. *Un polyèdre régulier est dit étoilé lorsqu'il est régulier mais qu'il ne fait pas partie des cinq solides de Platon.*

Les quatre polyèdres réguliers restant sont connus sous le nom de *Solides de Kepler-Poinsot*. En voici la liste :

- Le petit dodécaèdre étoilé, dont les 12 faces sont des pentagrammes et les 12 sommets des pentagones.
- Le grand dodécaèdre étoilé, dont les 12 faces sont des pentagrammes et les 20 sommets des triangles.
- Le grand dodécaèdre, dont les 12 faces sont des pentagones et les 12 sommets des pentagrammes.
- Le grand icosaèdre, dont les 20 faces sont des triangles et les 12 sommets des pentagrammes.

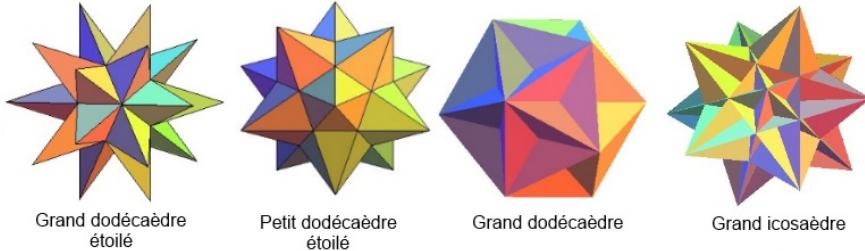


FIGURE 4.2 – Les polyèdres étoilés.

Parmis ces 4 polyèdres, les *Solides de Kepler* ont été découverts en 1619 par Johannes Kepler (1571-1630) à partir du dodécaèdre convexe. Kepler constata qu'en étendant les arêtes ou les faces du dodécaèdre jusqu'à ce qu'elles se rencontrent à nouveau, il pouvait obtenir des polyèdres étoilés. Il se trouve que ces polyèdres étoilés, le petit dodécaèdre étoilé et le grand dodécaèdre étoilé vérifiaient également les conditions des polyèdres réguliers. Les *Solides de Poinsot*, le grand dodécaèdre et le grand icosaèdre, furent découverts en 1809 par Louis Poinsot (1777-1859). Poinsot ne savait alors pas qu'il venait de découvrir tous les polyèdres réguliers.

C'est trois ans plus tard qu'Augustin Cauchy démontra que la liste des polyèdres réguliers était complète. Environ cinquante ans plus tard en 1858, le mathématicien Joseph Bertrand (1822-1900) en donnait une preuve plus élégante en utilisant un procédé de facettage sur les solides de Platon. Enfin en 1859, ces solides reçurent leurs noms par le mathématicien Arthur Cayley (1821-1895).[MAT 12]

4.1.3 Origami modulaire.

A l'instar des polygones et des polyèdres, l'origami modulaire est l'équivalent de l'origami mais en trois dimensions. L'origami n'autorise à la base que le pliage d'une feuille de papier. L'origami modulaire en revanche, permet en plus du pliage l'assemblage de diverses constructions (la plupart du temps toutes identiques) obtenues par origami. Cela permet ainsi de construire des figures plus complexes en trois dimensions.

Définition 32. *On appelle module le pliage servant de base à l'origami modulaire. C'est l'assemblages des modules qui permettra d'obtenir la construction finale.*

Remarque : Dans la suite, nous verrons que seulement trois différentes sortes de modules sont nécessaires à la construction des polyèdres réguliers.

4.2 Construction des polygones réguliers.

4.2.1 Théorie sur la construction des polygones.

En 1801 puis en 1837, les mathématiciens Carl Friedrich Gauss et Pierre-Laurent Wantzel ont démontrés respectivement la condition suffisante puis nécessaire à la constructibilité des polygones réguliers à la règle et au compas. Aujourd’hui ces résultats constituent le théorème de Gauss-Wantzel caractérisant les polygones constructibles à la règle et au compas.

Définition 33 (Racine $n^{\text{ième}}$ de l’unité.). *Un nombre complexe ψ est une racine $n^{\text{ème}}$ de l’unité si il existe un entier naturel n tel que :*

$$\psi^n = 1.$$

ψ s’écrit alors :

$$\psi = e^{\frac{2ki\pi}{n}},$$

avec k et n premiers entre eux.

Définition 34 (Indicatrice d’Euler). *L’indicatrice d’Euler est une fonction notée ϕ allant de l’ensemble des entiers naturels strictement positifs dans lui-même et qui à n associe le nombre d’entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à n et premiers avec n . Si la décomposition en facteurs premiers de n est la suivante :*

$$n = \prod_{i=1}^r p_i^{k_i},$$

alors,

$$\phi(n) = \prod_{i=1}^r (p_i - 1)p_i^{k_i - 1}.$$

Maintenant, lorsque l'on se donne dans le plan un polygone régulier à n côtés alors à une similitude près on peut identifier ses n sommets aux n racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité. Ainsi, construire un polygone régulier à n côtés revient à construire les n racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité.

Théorème 4 (Théorème de Gauss-Wantzel.). *Un polygone à n côtés est constructible à la règle et au compas si et seulement si n est le produit d'une puissance de 2 et d'un nombre fini de nombres premiers de Fermat distincts.*

Remarque : Un nombre n est dit *de Fermat* si il est de la forme :

$$n = 2^k + 1,$$

où k est un entier naturel.

De plus, si n est premier alors k est une puissance de 2.

Démonstration. Soit ψ une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité. On admet que le degré de l'extension $\mathbb{Q}(\psi)$ est égal à $\phi(n)$. D'après le théorème 3, ψ est constructible si son degré est une puissance de 2. Or, si la décomposition en facteurs premiers de n est :

$$n = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}.$$

On a :

$$\phi(n) = \prod_{i=1}^r (p_i - 1)p_i^{\alpha_i - 1}.$$

Il faut alors trouver une condition nécessaire et suffisante pour que le terme : $A = (p_j - 1)p_j^{\alpha_j - 1}, j \in \{1, \dots, r\}$ soit une puissance de 2 puis de l'appliquer à tous les termes du produit. Il y a alors deux cas possibles, soit p_j est égal à 2 et A est une puissance de 2 pour tout α , soit p_j est un nombre premier égal à $2^k + 1$ et $\alpha = 1$. Dans ce second cas, par la remarque précédente on a que k est une puissance de 2.

Donc $\phi(n)$ est une puissance de 2 si et seulement si n est de la forme :

$$n = 2^k \prod_i F_i,$$

où les F_i sont des nombres premiers de Fermat distincts.

□

Ainsi, on a montré que tous les polygones réguliers ne sont pas constructibles à la règle et au compas.

Exemples :

1. Le pentagone est constructible à la règle et au compas, en effet : $5 = 2^0 \times (2^2 + 1)$.
2. En revanche l'heptagone n'est pas constructible à la règle et au compas.

En revanche, nous allons maintenant voir que tous les polygones réguliers sont constructibles par origami.

4.2.2 Méthode du noeud et méthode pour doubler le nombre de côtés.

Nous allons voir ici une méthode générale pour plier les polygones réguliers ayant un nombre impair de côtés puis une méthode pour doubler le nombre de côtés et ainsi pouvoir construire n'importe quel polygone régulier.

Méthode du noeud.

La méthode du noeud permet à partir d'une bande de papier bien plus longue que large. Ensuite il suffit de faire un noeud sans tordre la bande de papier puis serrer le noeud tout en l'aplatissant. Ainsi, le pliage doit ressembler à ceci :

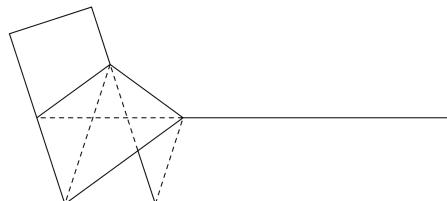


FIGURE 4.3 – Pliage d'un pentagone régulier.

Preuve de la régularité du pentagone. On rappelle tout d'abord plusieurs propriétés :

1. Deux angles opposés par un sommet sont égaux.
2. Si une droite rencontre deux droites parallèles, les angles alternes intérieurs sont égaux.
3. Si un parallélogramme a ses 4 cotés égaux alors c'est un losange. Les diagonales sont alors les bissectrices des angles auxquels elles se rapportent.
4. Si un parallélogramme a ses hauteurs égales alors c'est un losange.

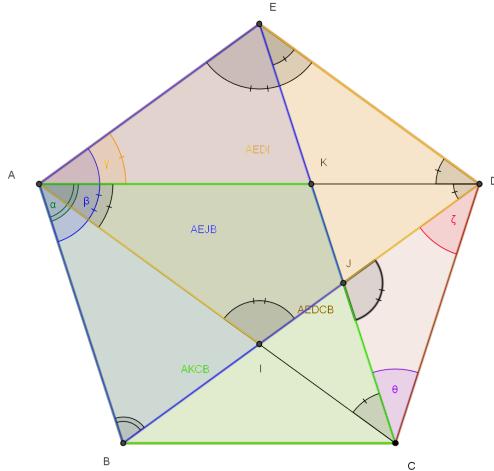


FIGURE 4.4 – Pentagone obtenu et ses angles remarquables.

Lorsqu'on déplie la bande on remarque que les angles α et β sont supplémentaires car $\alpha + \beta = \pi$. La bande est de largeur constante, donc les segments $[AB]$ et $[EC]$ ainsi que $[AE]$ et $[BD]$ sont parallèles deux à deux.

Montrer que $AEDCB$ est régulier revient à montrer que les triangles AED , EDC , BCD et ABC sont isocèles. (Ensuite par transitivité on aura que les cinq cotés et les cinq angles du pentagone seront égaux.) Montrons tout d'abord que les quadrilatères $AEDI$, $AEJB$ et $AKCB$ sont des losanges isométriques :

Soit I l'intersection entre $[AC]$ et $[BD]$ alors $AEDI$ est un parallélogramme car ses cotés opposés sont parallèles deux à deux.

Or la bande de papier est de largeur constante : donc la hauteur issue de $[AE]$ et celle issue de $[AI]$ sont de même longueur donc $AEDI$ est un losange : donc $AE = ED$. Et $\gamma = \beta - \alpha$ car les diagonales des losanges sont les bissectrices des angles auxquels elles se rapportent. On a aussi $\alpha = 2\gamma$ et comme la valeur d'un angle plat est π , $\beta = 3\gamma$)

Soit J l'intersection entre $[EC]$ et $[BD]$ alors $AEJB$ est un parallélogramme car ses cotés opposés sont parallèles deux à deux. La largeur de la bande de papier est constante donc les hauteurs issues de $[AB]$ et $[BJ]$ sont égales donc $AEJB$ est un losange et $AE = AB$. Soit K l'intersection entre $[AD]$ et $[EC]$ alors $AKCB$ est un parallélogramme car ses cotés opposés sont parallèles deux à deux. La largeur de la bande de papier est constante donc les hauteurs issues de $[AK]$ et $[AB]$ sont égales donc $AKCB$ est un losange et $AB = BC$. On a donc montré que les quadrilatères $AEDI$, $AEJB$ et $AKCB$ sont des losanges et sont isométriques.

Montrons maintenant que les triangles EDC , DCB , CBA et BAE sont isocèles et isométriques :

Par les propriétés des angles opposés et des angles alternes internes on déduit les égalités d'angles suivantes : $\widehat{EDA} = \widehat{DAC}$ et $\widehat{EAD} = \widehat{ADB} = \widehat{DBC}$, comme la somme des angles d'un triangle vaut π on a donc $\widehat{ABD} = \alpha = 2\gamma$ et $\widehat{AID} = 3\gamma = \widehat{AED}$. Donc $\widehat{ABC} = 3\gamma$. On a donc bien $\widehat{DEA} = \widehat{EAB} = \widehat{ABC}$.

Le triangle DAC est isocèle en A car $[DA]$ et $[AC]$ sont deux diagonales issues d'angles de même mesure (2γ) dans les losanges $AKCB$ et $AEDI$ qui sont isométriques. Les angles \widehat{ADC} et \widehat{ACD} sont donc égaux. Notons $\widehat{ECD} = \theta$ et $\widehat{BDC} = \zeta$ on a donc $\theta + \gamma = \zeta + \gamma$ donc $\theta = \zeta$ donc $\theta = \gamma$ car la somme des mesures des angles du triangle CJD vaut $\pi = 5\gamma$. De même la somme des mesures des angles du triangle EDC vaut 5γ d'où $\widehat{CED} = \gamma$. EDC est isocèle en D donc $ED = DC$. On a bien $\widehat{EDC} = \widehat{DCB}$. Donc les triangles EDC , DCB , CBA et BAE sont isocèles et isométriques.

Donc $ABCDE$ a tous ses côtés égaux et ses angles égaux : c'est donc un pentagone régulier.

Remarques :

1. Nous déduisons de la preuve que les angles du pentagones sont tous égaux à $\frac{3\pi}{5}$.
2. Nous pouvons déduire de la première remarque que $\beta = \pi$. Ainsi si nous nous placons dans le triangle EJD alors sa hauteur issue de E est de longueur l , égale à la largeur de la bande de papier. On en déduit donc : $\sin(2\pi/5) = l/ED$ d'où $ED = AB = BC = CD = EA = l/\sin(2\pi/5)$

□

Ainsi nous obtenons bien un pentagone régulier. Maintenant si on fait une boucle supplémentaire, on opte pour un polygone de deux côtés plus grand soit un heptagone régulier. Ainsi de suite, par une récurrence immédiate on montre que l'on obtient les polygones possédant $3 + 2k$ côtés $k \in \mathbb{N}$ où k est le nombre de boucles effectuées lors du pliage.

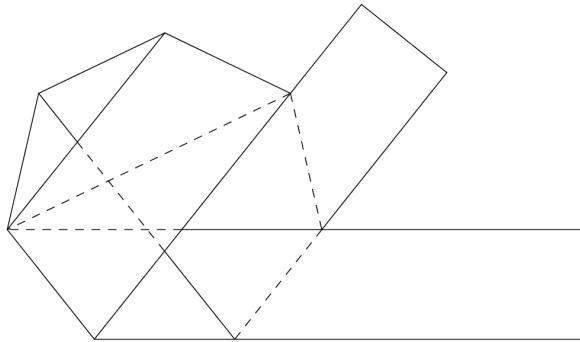


FIGURE 4.5 – Pliage d'un heptagone régulier.

Ainsi, par cette méthode il est théoriquement possible de plier tous les polygones réguliers ayant un nombre k de côtés avec k impair.

Remarque : Le cas $k = 0$ correspond au pliage d'un triangle équilatéral. Il est possible de le réaliser en pliant un "noeud" ayant 0 boucles, voici à quoi doit ressembler la construction :

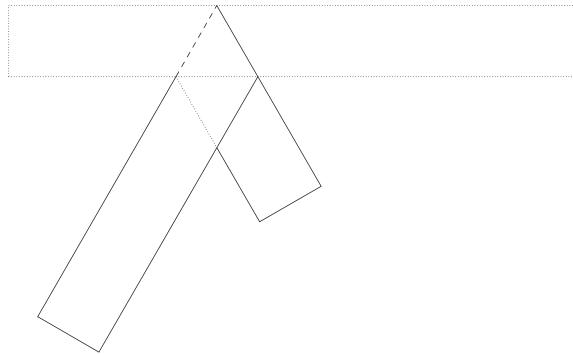


FIGURE 4.6 – Pliage d'un triangle équilatéral.

Dans ce cas là il est facile de vérifier que le triangle obtenu est bien équilatéral (grâce en particulier aux angles alternes-internes).

Remarque : Cette méthode est un exemple de pli complexe. En effet, ici nous n'utilisons aucun des 7 axiomes de l'origami. Le formalisme des plis complexes n'étant pas encore très bien défini, il peut être délicat de fournir des preuves rigoureuses en les utilisant.

Méthode pour doubler le nombre de côtés.

La méthode que nous allons présenter ci-dessous est une méthode générale pour, à partir d'un polygone régulier ayant un certain nombre de côtés, plier un polygone ayant le double de côtés. Nous verrons deux cas, lorsque le polygone de base à un nombre pair de côtés puis lorsqu'il a un nombre impair de côtés.

Nombre pair de côtés :

On suppose construit un polygone ayant un nombre pair de côtés. Nous devons d'abord plier une diagonale d (droite passant par deux sommets opposés) puis une médiatrice m (droite passant par les milieux de deux côtés opposés). Plions maintenant une bissectrice b aux droites d et m . Une fois le polygone replié selon la droite b , il ne nous reste pour qu'à replier les sommets de sorte à obtenir un polygone ayant le double de côtés.

Exemple : Doublons le nombre de côtés d'un carré de sorte à obtenir un octogone régulier.

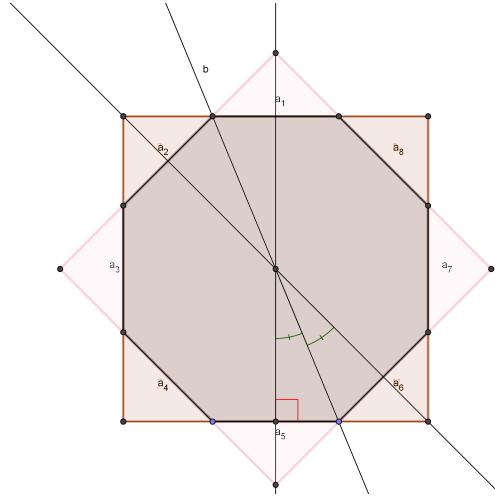


FIGURE 4.7 – Pliage d'un octogone régulier.

Montrons que l'octogone obtenu est bien régulier :

On nomme b la bissectrice que nous venons de construire. C'est l'axe de la symétrie s telle que :

$$\begin{aligned}s(a_1) &= a_2 \\ s(a_3) &= a_8 \\ s(a_4) &= a_7 \\ s(a_5) &= a_6\end{aligned}$$

En pliant une autre bissectrice b' définissant une autre symétrie s' on a alors :

$$\begin{aligned}s'(a_1) &= a_8 \\ s'(a_2) &= a_7 \\ s'(a_3) &= a_6 \\ s'(a_4) &= a_5\end{aligned}$$

D'où :

$$a_1 = a_8 = a_3 = a_6 = a_5 = a_4 = a_7 = a_2$$

Nous pouvons alors raisonner de la même manière sur les angles de l'octogone et en déduire que celui-ci est bien régulier.

Puis par récurrence on peut montrer ce résultat à partir de n'importe quel polygone ayant un nombre pair de côtés.

Nombre impair de côtés :

La méthode pour doubler le nombre de côtés à partir d'un polygone ayant un nombre impair de côtés est similaire à celle vue précédemment, sauf qu'au lieu de plier une médiatrice et une diagonale, il faut plier deux hauteurs (droites passant par un sommet et le milieu du côté opposé). Également par une preuve identique, on montre que les polygones obtenus sont réguliers.

4.3 Montage des polyèdres réguliers.

4.3.1 Les bases.

Seulement trois modules de base différents sont nécessaires au montage des polyèdres : la base triangulaire, la base carrée et la base pentagonale. Nous allons voir ici comment réaliser ces différentes bases.

La base triangulaire.

La base triangulaire permet de monter les polyèdres réguliers suivants :

- Le tétraèdre.
- L'octaèdre.
- L'icosaèdre.
- Le petit dodécaèdre étoilé.
- Le grand dodécaèdre étoilé.
- Le grand dodécaèdre.

Avant de plier ce module, nous devons déterminer les dimensions de la feuille que nous devrons utiliser, c'est à dire calculer le rapport entre la longueur et la largeur. Voici le paterne obtenu lorsque l'on plie la base triangulaire :

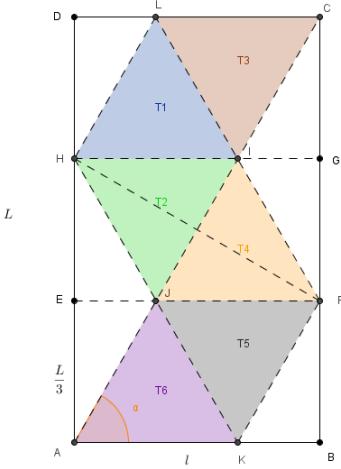


FIGURE 4.8 – Paterne de la base triangulaire.

Dans cette figure, il faut que les triangles T_i ($i \in \{1, \dots, 6\}$) soient isométriques (tous identiques) et équilatéraux. On suppose donc que la feuille est pliée de façon à ce que tous ces triangles soient isométriques et équilatéraux. On a alors :

$$\alpha = \frac{\pi}{3} = \arctan\left(\frac{L}{l}\right),$$

i.e.

$$\frac{L}{l} = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right),$$

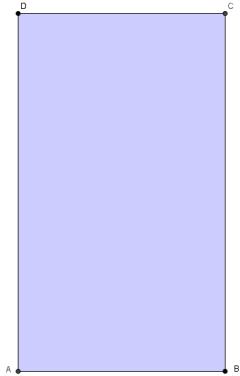
i.e.

$$\frac{L}{l} = \sqrt{3},$$

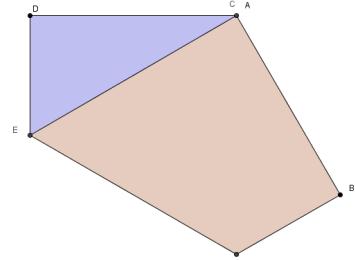
i.e.

$$L = \sqrt{3}l.$$

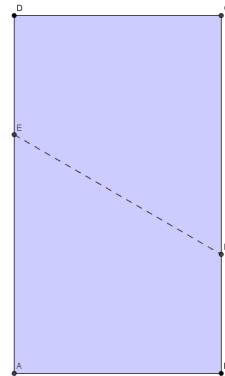
Donc le rapport entre la longueur et la largeur de la feuille est de $\sqrt{3}$.
Voyons maintenant la méthode pour plier la base triangulaire :



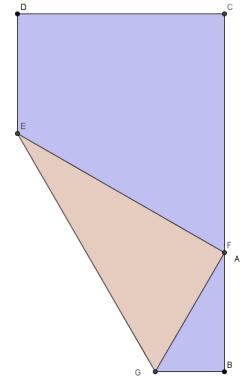
0.



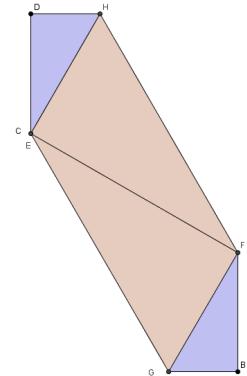
1. Envoyer le point A sur le point C



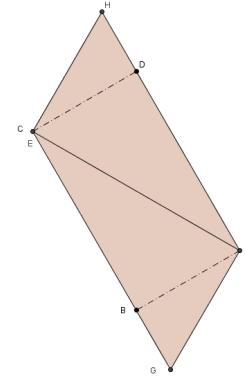
2. Déplier



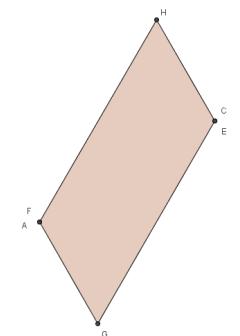
3. Envoyer le point A sur le point F en prenant soin d'aligner les segments [EA] et [EF]



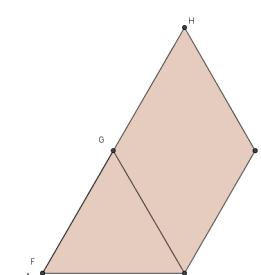
4. Faire de même en envoyant C sur E.



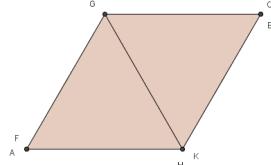
5. Replier les triangles DHE et GFB sous les triangles HCF et GAE



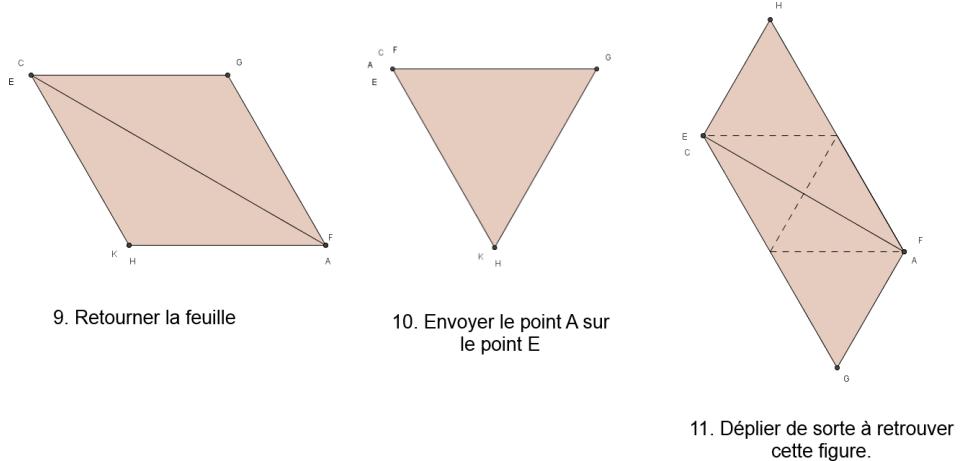
6. Retourner la feuille



7. Replier le segment [AG] sur le segment [AH]



8. Envoyer le point H sur le point K



La base carrée.

La base carrée permet de monter le cube (hexaèdre régulier) et le grand icosaèdre.

Comme pour le module triangulaire, nous devons tout d'abord déterminer les dimensions de la feuille avec laquelle nous allons plier le module carré. Le paterne obtenu lorsque l'on plie ce module est le suivant :

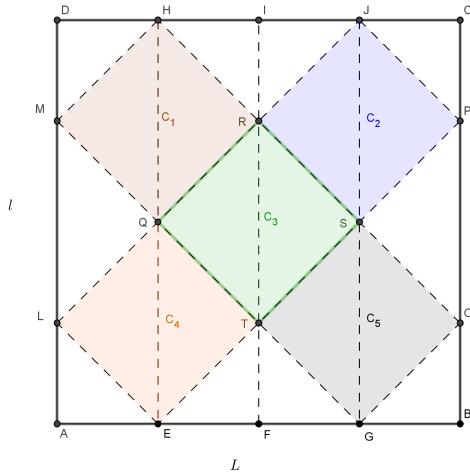
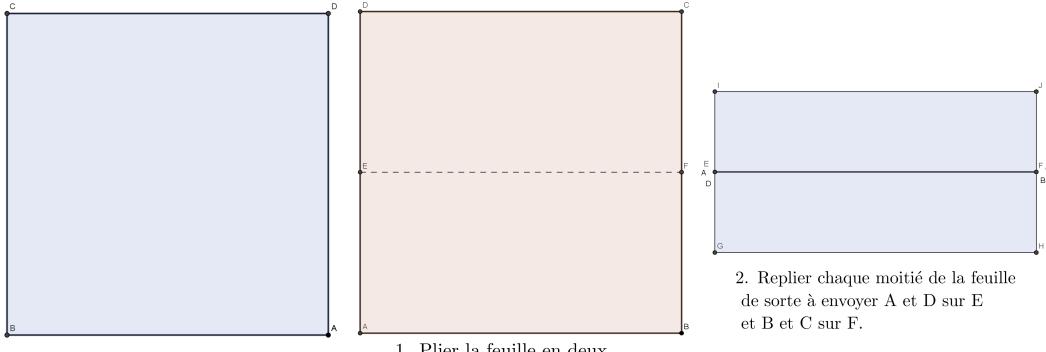


FIGURE 4.9 – Paterne de la base carrée.

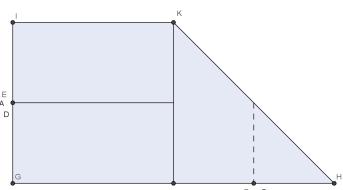
Les quadrillatères $C_i, i \in \{1, \dots, 5\}$ qui apparaissent dans ce paterne sont en fait des carrés (et correspondent en fait à une face du cube). Ces carrés sont isométriques (par différentes symétries) par conséquent leurs diagonales sont toutes égales. De cela on déduit facilement que $l = L$. Donc la feuille à utiliser pour ce pliage doit être carrée.

Voyons maintenant la méthode pour plier la base carrée :

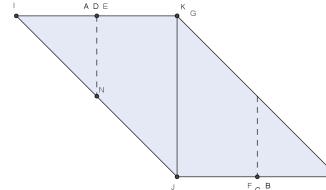


1. Plier la feuille en deux, déplier et retourner la feuille.

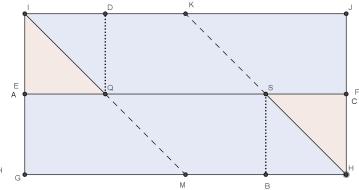
2. Replier chaque moitié de la feuille de sorte à envoyer A et D sur E et B et C sur F.



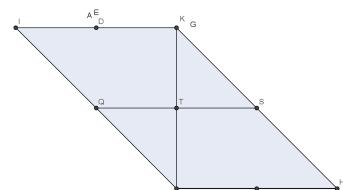
3. Envoyer le segment HJ sur le segment HG



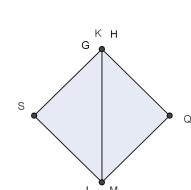
4. De même, envoyer le segment IG sur IK en prenant soin d'aligner les segments JK et JG.



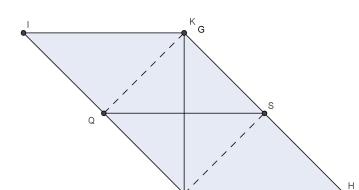
5. Déplier les deux derniers plis, puis retourner les triangles QID et BHS à l'intérieur.



6. Replier le triangle KHJ sous GHSA et le triangle GMI sous QCJI.



7. Retourner la feuille, puis envoyer H sur K et I sur J.



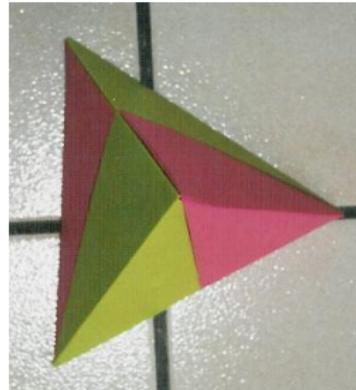
8. Déplier les deux derniers plis, puis retourner la feuille.

La base pentagonale.

Le module pentagonal permet de monter le dodécaèdre régulier. Ce module est en fait le même pliage que pour le pentagone régulier que nous avons vu précédemment au chapitre 4.2.2.

4.4 Montage des polyèdres.

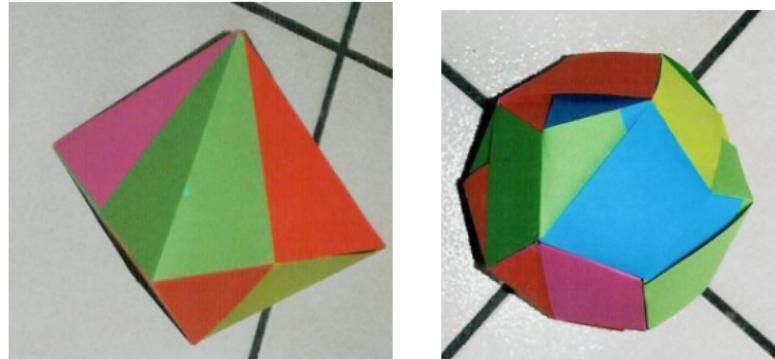
Voici les photos des polyèdres une fois assemblés ainsi que le nombre de modules nécessaires à leur réalisation :



**Le tétraèdre : constitué de
2 modules triangulaires
dont un symétrique**



**Le cube : constitué de
6 modules carrés**



L'octogone : constitué de
4 modules rectangulaires

Le dodécaèdre : constitué
de 12 modules
pentagonaux



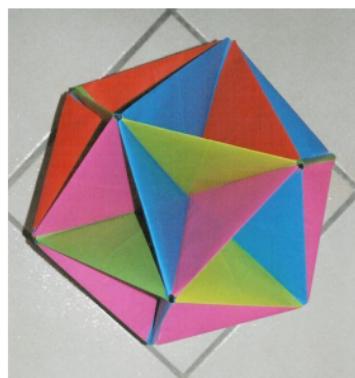
L'icosaèdre : constitué
de 5 modules triangulaires
et 5 modules triangulaires
symétriques



Le petit dodécaèdre étoilé :
constitué de 30 modules
triangulaires



Le grand dodécaèdre étoilé :
constitué de 30 modules
carrés



Le grand dodécaèdre :
constitué de 30 modules
triangulaires



Le grand icosaèdre :
constitué de 120 modules
carrés

Chapitre 5

Atelier polyèdres et présentation Origami et Mathématiques.

5.1 Atelier polyèdres et origami modulaire.

Nous allons présenter ici quelques idées à réaliser lors d'un atelier sur les polyèdres et l'origami modulaire :

- Chercher l'intrus parmi des polyèdres : placer au milieu de polyèdres réguliers un polyèdre qui ne l'est pas, par exemple un hexaèdre non régulier.
- Retrouver les noms des polyèdres réguliers : associer à chaque polyèdre une étiquette sur laquelle est écrit son nom.
- Pliage de modules de base.
- Assemblage de quelques solides de Platon : faire assembler à partir des modules des polyèdres simples comme le tétraèdre ou le cube.
- Retrouver quelles formes ont les faces des solides de Kepler-Poinsot, ainsi que les sommets.

5.2 Présentation Origami et Mathématiques.

5.2.1 Déroulement de l'atelier.

L'atelier débutera par une courte introduction sur l'histoire de l'origami et son lien avec les mathématiques. Ensuite plusieurs problèmes de pliage seront proposés au public. Nous le laisserons réfléchir quelques instants sur

le pliage avant de leur présenter la solution et éventuellement une démonstration simple.

Quatre pliages différents seront proposés :

1. Le pliage d'un triangle isocèle sur une feuille A4. Ce problème consiste à plier un triangle isocèle d'aire maximale à partir d'une feuille de format A4. Ce premier pliage, assez simple permettrait de familiariser le public au pliage géométrique. Les gens pourraient également comparer leurs différents pliages afin de trouver le triangle à l'aire maximale. L'aire maximale pour ces triangles sera de la moitié de l'aire de la feuille. Voici deux résultats possibles :

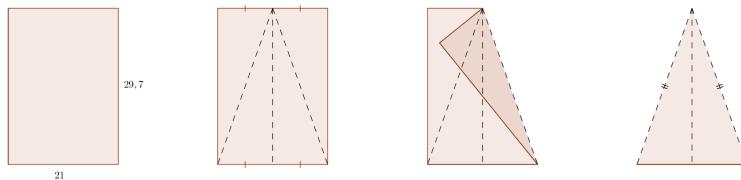


FIGURE 5.1 – Une solution au pliage.

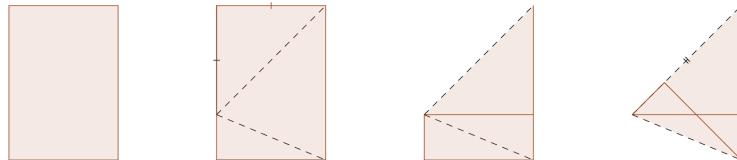
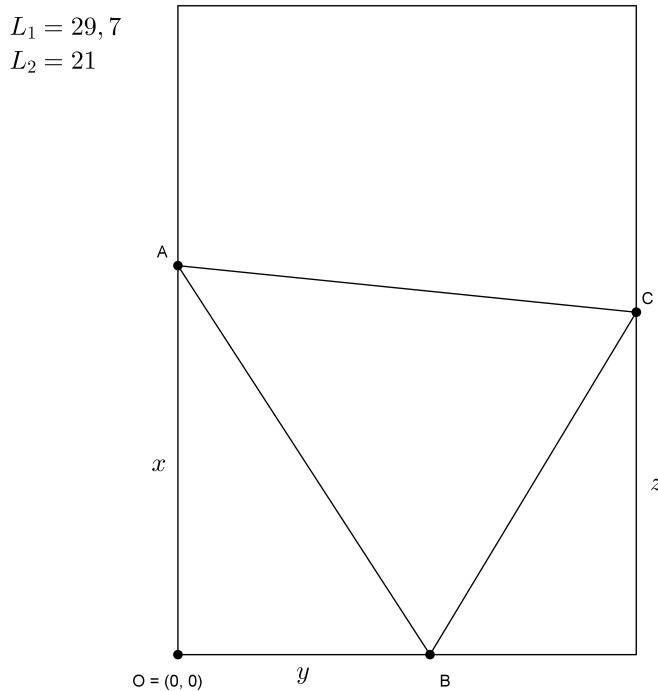


FIGURE 5.2 – Une autre solution, moins évidente.

On vérifie facilement que ces deux triangles sont bien isocèles et d'aire la moitié de l'aire de la feuille. Montrons alors que l'aire maximale d'un triangle quelconque inscrit dans une feuille A4 est égale à la moitié de l'aire de la feuille :

Démonstration. : Nous travaillerons sur tous les triangles et non pas les triangles isocèles seulement. Il est évident que les triangles les plus grands sont ceux dont les 3 sommets sont sur une extrémité de la feuille.

Il n'y a donc plus que deux possiblités soit les 3 sommets sont sur 3 cotés de la feuille A4, soit 2 sommets sont sur deux sommets de la feuille et le 3^{ème} point est sur un côté.



On pose L_1 la longueur de la feuille et L_2 la largeur. L'aire \mathcal{A} du triangle ABC est égale à :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= 1/2(\vec{CA} \wedge \vec{CB}) \\ &= 1/2(-y, x) \wedge (L_2 - y, z) \\ &= 1/2(x(L_2 - y) + zy)\end{aligned}$$

Maximisons cette formule :

Pour tout y on a $L_2 - y \geq 0$ donc $x(L_2 - y) + zy$ est maximal pour $x = L_1$.

Pour tout y, z on a $yz \geq 0$ donc yz est maximal pour $z = L_1$.

On a donc :

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2}(L_1(L_2 - y) + L_1y) \\ &= \frac{1}{2}L_1L_2\end{aligned}$$

□

Nous avons donc montré que l'aire maximale d'un triangle quelconque inscrit dans une feuille A4 est égale à la moitié de l'aire de la feuille. De plus, les seuls triangles à réaliser cette aire maximale sont ceux dont deux des sommets se trouvent sur un même côté de la feuille.

2. Le pliage de l'enveloppe d'une parabole. Ce problème consiste à représenter une parabole à l'aide d'un ensemble de plis. Cet exercice permettrait de montrer que les possibilités du pliage ne sont pas réduites à la construction de droites mais que l'on peut aussi approcher des courbes. Pour ce faire, il suffit de placer un point A sur une feuille et d'envoyer ce point sur différents points d'une droite donnée (un bord de la feuille par exemple), les plis ainsi obtenus constitueront l'enveloppe d'une parabole.

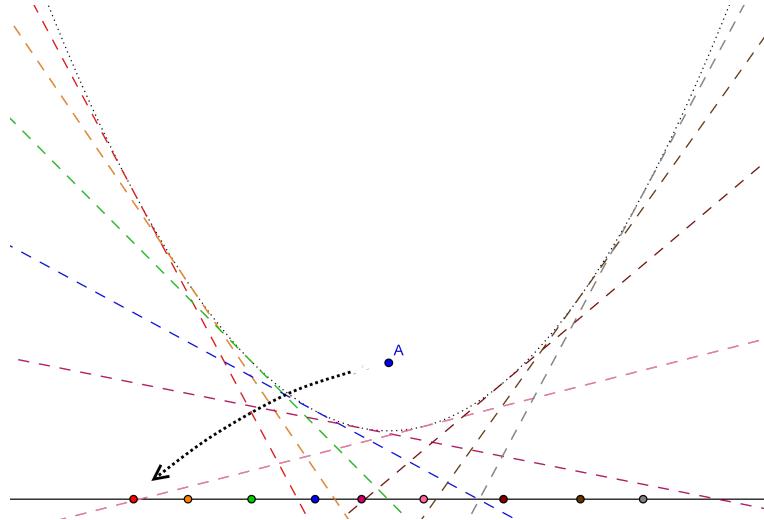


FIGURE 5.3 – Chaque pli envoie A sur un des points de la droite, on voit ainsi apparaître l'enveloppe de la parabole.

3. Le pliage d'un triangle équilatéral à partir d'un disque. On aura à notre disposition un disque de papier dans lequel nous devrons plier un triangle équilatéral. La solution consiste à plier le disque en deux selon les droites (AA') et (ED) et ensuite replier le point A' sur le centre O

du disque. Les points B et C ainsi obtenus forment avec A un triangle équilatéral. La petite démonstration, ci dessous, pour vérifier que le triangle obtenu est bien équilatéral pourra être présentée.

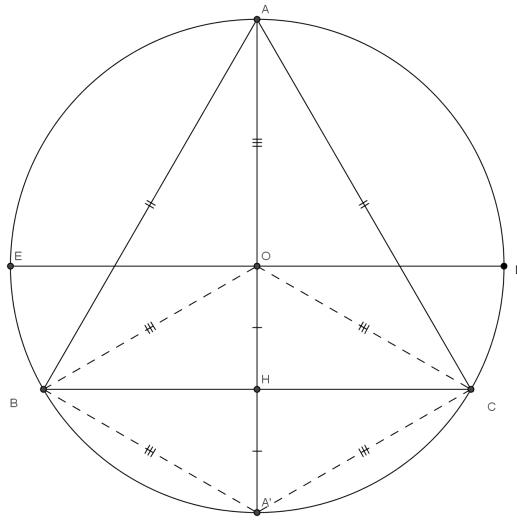


FIGURE 5.4 – Le triangle ABC obtenu est bien équilatéral.

Démonstration. Par symétrie, les triangles BOA' et OCA' sont équilatéraux. On en déduit que les angles $\widehat{BOA'}$ et $\widehat{A'OC}$ font tous les deux 60 degrés. Donc l'angle \widehat{BOC} vaut 120 degrés. Comme (AA') est la bissectrice de l'angle \widehat{BOC} , les angles \widehat{BOA} et \widehat{AOC} valent tous deux 120 degrés. Ensuite comme les triangles BOC , BOA et AOC sont tous trois isocèles on a que les angles \widehat{OAC} , \widehat{ACO} , \widehat{BCO} , \widehat{CBO} , \widehat{OBA} et \widehat{BAO} font tous 30 degrés. Et donc les trois angles \widehat{BCA} , \widehat{CAB} et \widehat{ABC} font 60 degrés. Donc le triangle ABC est équilatéral. \square

4. Le pliage d'un pentagone à partir d'une bande de papier. La solution consiste à faire un noeud simple avec cette bande de papier et l'aplatir tout en le serrant.

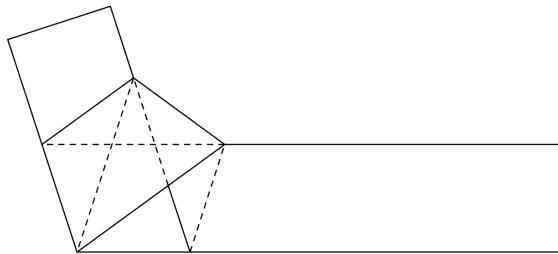


FIGURE 5.5 – Pliage du pentagone à l'aide de la méthode du noeud.

A la fin de la présentation, on comparera l'origami à la construction à la règle et au compas notamment en parlant du pliage d'un heptagone (impossible à réaliser à la règle et au compas) et de la trisection de l'angle. Finalement, on évoquera brièvement la démonstration de l'impossibilité de la trisection de l'angle.

En plus des constructions proposées lors de l'atelier, le public pourra (à l'issue de la présentation) plier une grenouille ou une cravate en papier en suivant des patrons proposés.

5.2.2 Script de l'atelier.

Voir document Word annexe.

5.2.3 Bilan de l'atelier.

Ce bilan a pour but de revenir sur la présentation et d'en tirer des conclusions par rapport au déroulement de la séance et aux réactions du public.

Pliage d'un triangle isocèle.

Ce premier pliage a permis au public de se familiariser avec l'origami. Le problème était clair et la plupart des gens ont réussi à trouver une solution. Le seul problème rencontré était que nous ne connaissions pas la preuve du

fait que l'aire maximale d'un tel triangle est bien la moitié de l'aire de la feuille A4 et par conséquent nous n'avions pas d'explication convaincante à donner au public. (Depuis nous avons trouvé la preuve.)

Pliage d'une parabole.

Cet exercice a posé plusieurs problèmes : tout d'abord le public avait du mal à comprendre ce que l'on attendait de lui. L'énoncé "plier une forme arrondie" était trop vague. Certaines personnes ne comprenaient pas le fait "d'approcher" une courbe à l'aide de pliages. La solution pour plier une parabole pouvait également paraître obscure pour quelques personnes. Cependant on a constaté que la plupart des gens proposaient des solutions intéressantes (exemple : le pli en éventail, les plis successifs etc.). Pour une prochaine présentation on pourrait soit proposer cet exercice en 3ème (après le triangle équilatéral dans un disque) ou juste le remplacer par quelque chose de plus compréhensible comme la trisection de l'angle.

Pliage d'un triangle équilatéral à partir d'un disque.

Ce pliage était réussi dans l'ensemble, les gens comprenaient bien le résultat attendu. Beaucoup de gens proposaient des solutions intéressantes (comme le pliage "empirique" du triangle en ajustant les cotés au fur et à mesure du pliage). L'explication du pliage ainsi que la preuve que le triangle obtenu est bien équilatéral étaient claires et comprises.

Pliage d'un pentagone régulier.

Cet exercice était le moins accessible puisqu'il est très difficile de plier un pentagone à partir d'une bande de papier sans connaître l'astuce du noeud. Par conséquent les gens ne trouvaient jamais de solution convenables. Il aurrait peut être fallu donner l'indice du noeud avant de donner la solution. Comme les gens n'avaient pas d'idées de solution nous devions la donner assez rapidement, ce qui était arrangeant puisque l'on manquait de temps à ce moment là de la présentation. Le gros problème avec cet exercice c'est que nous ne nous étions pas rendu compte que la longueur des côtés du pentagone ne correspondait pas à la largeur de la bande de papier (ce qui nous a été signalé par certaines personnes du public). Par conséquent nous ne pouvions

pas prouver ni expliquer le fait que le pentagone obtenu est bien régulier. La preuve a depuis été trouvée. Il aurrait également fallut que nous présentions le pliage d'un heptagone (figure que l'on ne peut obtenir à la règle et au compas).

Conclusion de la présentation.

Finalement, par manque de temps nous n'avons pas pu aborder le sujet de la trisection de l'angle. Nous nous sommes contentés de parler brièvement du pliage d'un heptagone régulier, qui n'est pas réalisable à la règle et au compas ainsi que du théorème de Gauss-Wantzel sans entrer dans les détails. Nous pu justifier alors la possibilité de construire un pentagone mais pas un heptagone à la règle et au compas.

Bilan sur le déroulement général

Nous avons essayé de parler à claire et intelligible voix. Le public, en particulier les enfants n'ont été dans l'ensemble pas trop dissipés et semblaient intéressés . Il ne nous semble pas qu'il y ait eu des moments de flottements (de notre point de vue). Le soucis principal semble avoir été l'incompréhension du deuxième exercice et l'erreur sur la longueur du côté du pentagone.

Conclusion

La présentation d'Origami et Mathématiques nous a permis de nous familiariser avec le travail de vulgarisation scientifique en mathématiques. L'enjeu était de réussir à faire comprendre à un public non spécialiste les mathématiques se cachant derrière l'origami à travers certaines constructions géométriques.

D'autre part cela nous a permis de découvrir et d'étudier une branche des mathématiques que nous ne connaissions pas. Il est intéressant de comparer les constructions par origami à celles à la règle et au compas, puisque nous avions déjà eu un aperçu de ces dernières lors de notre cursus universitaire. D'autre part cela soulève de nouvelles questions : quelles sont les limites de la construction par origami ? Existe-t-il des équations permettant de formaliser les plis complexes comme ceux de la méthode des noeuds ?

Finalement, l'origami mathématique s'est révélé être un sujet bien plus dense que nous l'avions présenté tout en restant très concret et accessible au plus grand nombre.

Bibliographie

Ouvrages :

- [IRE] IREM Caen *Nouvelles pratiques en géométrie*
- [CAR] *Théorie des corps la règle et le compas* Hermann.
- [ESC] *Théorie de Galois* Dunod.

Sites Internet :

- [FOU 12] <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~morales/Morales-pliages-livre-extrait.pdf>
- [MAT 12] <http://www.math.ens.fr/~debarre/Algebre2.pdf>
- [IRE 12] http://irem.u-strasbg.fr/php/publi/ouvert//articles/42_Justin.pdf
- [MAT 12] <http://www.mathcurve.com>
- [WIK 12] <http://fr.wikipedia.org/>