Uma abordagem mecânico-estatística de dois tópicos de interesse em finanças, economia e sociologia.

Rafael S. Calsaverini

25 de Abril de 2013

1. Parte 1: Teoria de dependência estatística, Cópulas e teoria de informação
2. Parte 2: Um modelo para emergência de autoridade em sociedades humanas

Parte 1: Teoria de dependência estatística, Cópulas e teoria de informação

Parte 1: Teoria de dependência estatística, Cópulas e teoria de informação

- Artigo R. S. Calsaverini and R. Vicente. An information-theoretic approach to statistical dependence: Copula information.*Europhys. Lett.* 88 68003, 2009.
- URL: http://iopscience.iop.org/0295-5075/88/6/68003?ejredirect=migration
- Repositório git da tese: http://github.com/rcalsaverini/Thesis

Dependência estatística

- Independência estatística: $P(x, y) = P(x)P(y)$, ou:

$$P(x|y) = P(x)$$

- Dependência completa: $P(x|y) = \delta(x - F(y))$
- Definição informal: quanta informação uma variável oferece sobre o valor de outra.
- Como medir dependência?
- É possível separar informação idiossincrática sobre cada variável da informação a respeito de sua dependência?

Correlação

- Módulo usualmente empregado como medida de dependência estatística.

$$|\mathrm{Corr}(X, Y)| = \left| \frac{E[XY] - E[X]E[Y]}{\sigma[X]\sigma[Y]} \right|$$

- Correlação é problemática:
  - $\mathrm{Corr}(X, Y) \neq \mathrm{Corr}(f(X), g(Y))$, em geral;
  - $\mathrm{Corr}(X, Y) = 0$ não implica que X e Y sejam independentes;
  - $\mathrm{Corr}(X, Y) = 1$ não implica que X e Y tenham dependência perfeita.

Medidas de dependência

- Desideratos para uma boa medida de dependência [1]
  - $M[X, Y]$ é um funcional da distribuição conjunta;
  - $M[X, Y] = M[Y, X]$;
  - $M[X, Y]$ é mínimo $\Leftrightarrow$ X e Y independentes;
  - $M[X, Y]$ é máximo $\Leftrightarrow$ $P(X|Y) = \delta(X - f(Y))$;
  - $M[X, Y] = M[g(X), f(Y)]$ $\forall g, f$ monotônicas
  - Se $X, Y \sim \mathrm{Normal}(\sigma_X, \sigma_Y, \rho)$, então $M[X, Y] = f(\rho)$

[1] A. Renyi. *Acta. Math. Acad. Sci. Hungar.*, 10:441–451, 1959;

Medida de dependência

- Exemplos:
  - τ de Kendall

    $$\tau = \mathrm{Prob}\left[(X - X')(Y - Y') > 0\right] - \mathrm{Prob}\left[(X - X')(Y - Y') < 0\right]$$

  - ρ de Spearman.

    $$\rho = \mathrm{Corr}(\mathrm{rank}(X), \mathrm{rank}(Y))$$

Informação Mútua

- Definição

$$I(X,Y) = \int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\; p(x,y) \log \frac{p(x,y)}{p(x)p(y)}$$

1. "Distância" [2] entre a distribuição conjunta e a variedade de distribuições fatoráveis
2. Valor esperado da divergência KL entre $p(x)$ e $p(x|Y=y)$
3. Valor esperado da redução na entropia de X ao se obter o valor de Y

- Para qualquer distribuição: $I(X,Y) \geq -\frac{1}{2}\log(1-\mathrm{Corr}(X,Y)^2)$

[2] divergência de Kullback-Leibler: $\int p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)}\, \mathrm{d}x$

Cópulas - Teorema de Sklar

Para toda distribuição cumulativa conjunta contínua de duas variáveis $F_{X,Y}(x,y)$, com distribuições cumulativas $F_X(x)$ e $F_Y(y)$, existe uma função cópula única $C(u,v)$ tal que: $F_{X,Y}(x,y) = C(F_X(x), F_Y(y))$

- Exemplos
  - Arquimedianas: $C(u,v) = \psi^{-1}(\psi(u) + \psi(v))$
  - Normal: $N_\rho(u,v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \mathrm{d}u \mathrm{d}v \; e^{-\frac{u^2+v^2-2uv\rho}{2(1-\rho^2)}}$
- Densidade de cópula:
  - $c(u,v) = \frac{\partial^2 C}{\partial u \partial v}$
  - $p_{XY}(x,y) = c(F_X(x), F_Y(y)) p_X(x) p_Y(y)$

Medidas de dependência revisitadas

- Desideratos para uma boa medida de dependência:
  - $M[X, Y]$ é um funcional da cópula, e não depende das distribuições marginais;
  - $M[X, Y]$ é mínimo se $C(u, v) = uv$;
  - $M[X, Y]$ é máximo se $C(u, v) = \max(0, u + v - 1)$ ou $C(u, v) = \min(u, v)$, chamadas cópulas de Frechet-Hoeffding;
  - Se $C(u, v) = N_\rho(u, v)$, então $M[X, Y] = f(\rho)$
- As exigências de (Renyi, 1959) são consequencia imediata das exigências acima.

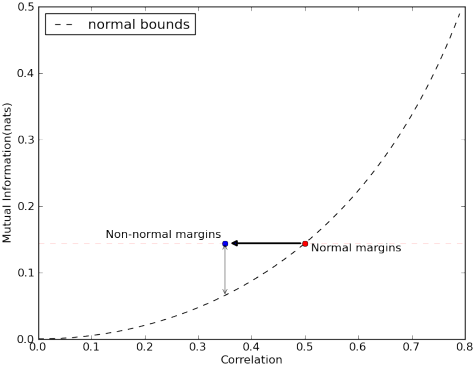
Medidas de dependência e cópulas

- τ de Kendall: $\tau = 4\int_0^1\int_0^1 C(u,v)\mathrm{d}C(u,v) - 1$
- ρ de Spearman: $\rho_S = 12\int_0^1\int_0^1 [C(u,v) - uv]\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$
- Informação Mútua:
  - Entropia da cópula:

$$I(X,Y) = \int\int \mathrm{d}u\mathrm{d}v\; c(u,v)\log c(u,v) = -S[c] \geq 0$$

  - para a cópula normal: $I(X,Y) = -\frac{1}{2}\log(1-\rho^2)$
  - Decomposição: $H[X,Y] = H[X] + H[Y] + H[\mathrm{copula}]$
  - Cópula gaussiana maximiza entropia para dada correlação linear.

Problemas com a Correlação



- $\mathrm{Corr}(X, Y)$ depende explicitamente das distribuições marginais
- $\mathrm{Corr}(X, Y)$ vs. ρ: correlação não é um bom estimador do parâmetro ρ.
- $\mathrm{Corr}(X, Y)$ pode subestimar grosseiramente a dependência.

Cópulas esféricas e elipticas

- Distribuição esféricas e elípticas:
  - Distribuição $p(\vec{x})$ é esférica se $E\left[e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right] = \psi\left(|k|^2/2\right)$
  - Distribuição $p(\vec{y})$ é elíptica se $E\left[e^{i\vec{k}\cdot\vec{y}}\right] = \psi\left(\frac{1}{2}\vec{k}\Sigma^T\vec{k}\right)$
  - $\vec{X} \sim$ distribuição esférica $\Rightarrow \vec{Y} = A\vec{X} \sim$ distribuição elíptica,
- Proposição: Se $C(u, v|\Sigma)$ é cópula elíptica derivada da cópula esférica $C(u, v)$, então:

$$I[C(u, v|\Sigma)] = I_0(\Sigma) + I[C(u, v)]$$

onde $I_0(\Sigma) = -\frac{1}{2}\log\Sigma$ é a informação mútua de uma cópula normal com matriz de correlação Σ.

Excesso de Informação Mútua - teste de normalidade na dependência

- Parte gaussiana da dependência é associada a dependência linear.
- $I[X, Y] \geq -\frac{1}{2} \log(1 - \rho^2)$ para distribuições elípticas.
- τ de Kendall para distribuições elípticas $\rho = \sin\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)$
- Algoritmo de Kraskov-Stogbauer-Grassberger [3]

[3] Kraskov et al. Phys. Rev. E, 69:066138, 2004

Excesso de Informação Mútua - teste de normalidade na dependência

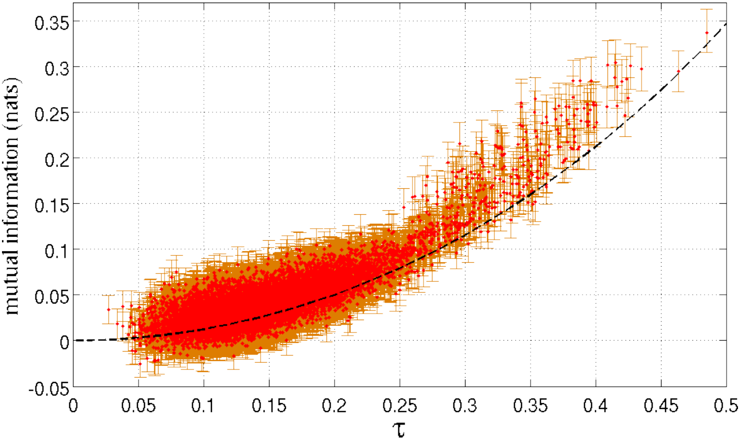


Figura: Informação mútua vs. τ para pares de séries temporais de log-retornos de abertura vs. fechamento para ações que compões o S&P500. Intervalos de confiança de 90% via bootstrap.

Excesso de Informação Mútua - teste de normalidade na dependência

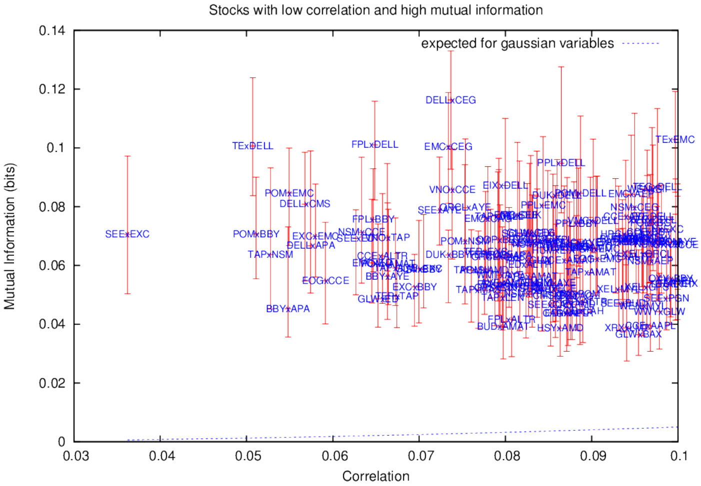


Figura: Seleção de pares de ações com baixa correlação e grande excesso de informação mútua.

Excesso de Informação Mútua - teste de normalidade na dependência

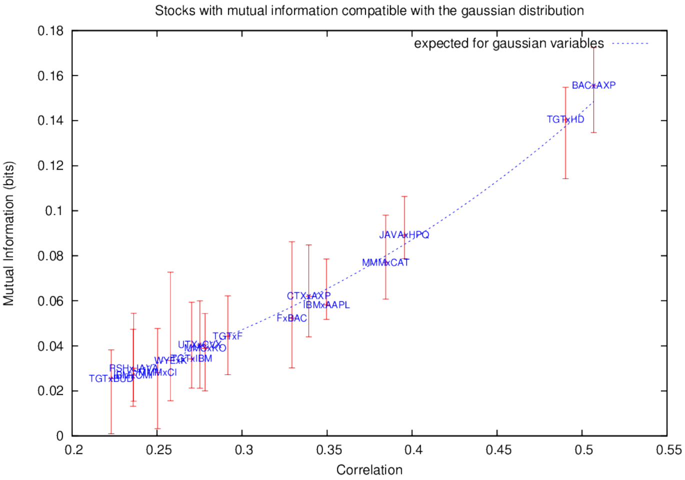


Figura: Seleção de pares de ações compatíveis com uma cópula normal.

Cópula t - ajuste

- Método de “moment matching” via τ de Kendall e informação mútua
- Distribuição t de Student $\rightarrow$ Cópula t

$$p_t(x, y \mid \rho, \nu) = \frac{\Gamma(1+\frac{\nu}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\pi\nu\sqrt{1-\rho^2}}\left[1 + \frac{x^2+y^2-2\rho xy}{(1-\rho^2)\nu}\right]^{-(1+\frac{\nu}{2})}$$

- fat tails, tail dependency, $t(\rho, \nu) \rightarrow \mathrm{Normal}(\rho)$ quando $\nu \rightarrow \infty$
- Cópula t:

$$C_T(u, v|\nu, \rho) = \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(v)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \; p_t(x, y \mid \rho, \nu)$$

Cópula t - ajuste

- Se $\vec{x} \sim t(\rho, \nu)$, então $I(x_1, x_2, \ldots, x_n) = nH_1(\nu) - H_n(\nu)$
- $H_n(\nu)$ pode ser calculada usando um truque similar ao truque de réplicas $\log(x) = \lim_{a\to\infty} \frac{\partial}{\partial a}(x^a)$
- Informação mútua:
  $I(\nu) = 2\log\left(\sqrt{\frac{\nu}{2\pi}}B\left(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) - \frac{2+\nu}{\nu} + (1+\nu)\left[\psi\left(\frac{\nu+1}{2}\right) - \psi\left(\frac{\nu}{2}\right)\right]$
- Ajuste:
  - ρ é ajustado medindo τ
  - ν é ajustado medindo $I(X, Y)$
- Simulação:
  - excesso de informação mútua com relação à distribuição normal vs. ν
  - I_{excess} independe de ρ

Cópula t - ajuste

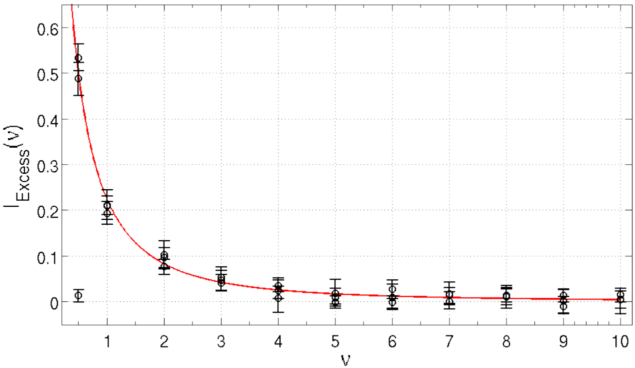


Figura: Cada círculo corresponde a uma amostragem de 20 valores sampleados de uma distribuição t para vários valores de ν e ρ conhecidos. Intervalo de confiança de 90% via bootstrap.

Considerações finais

- Decomposição da dependência entre parte linear e não linear
- Teste de normalidade *da dependência*
- Ajuste de cópulas empíricas a dados experimentais
- Detecção de dependência não-trivial em séries temporais financeiras
- Problemas com inferência de dependência baseada apenas correlação

Parte 2: Um modelo para emergência de autoridade em sociedades humanas

Comportamento social igualitário vs. hierárquico

- Organização social - igualitária vs. autoritária
  - Grandes primatas (Chimpanzés, Bonobos, Gorilas)
  - Diversidade de comportamentos social humano
  - Origem da diversidade: ecológica vs. cultural.

Evidências empíricas

- Evolução do comportamento social humano ("u-shaped evolution")[4]:

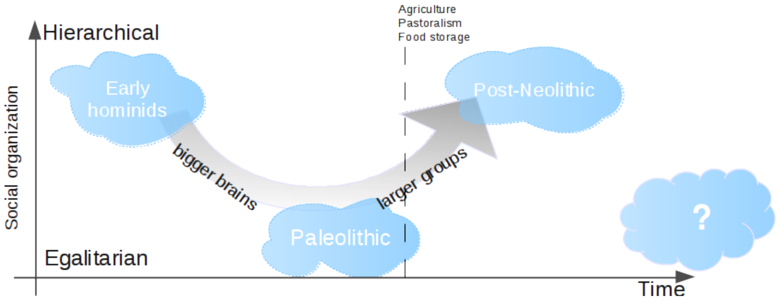


Figura: Evolução do comportamento social humano

[4] Knauft et al. Current Anthropology, 32:391–428, 1991.; Joyce Marcus. Annu. Rev. Anthropol, 37:25166, 2008

Evidências empíricas

- Ancestrais hierárquicos, paleolítico igualitário, neolítico hierárquico
- Humanos modernos - relação entre tamanho de grupo e formas de organização social[5].
- Hipótese do cérebro social
  - Capacidade cognitiva vs. tamanho de grupo. Número de Dunbar ˜ 150.
  - Pressão seletiva sobre capacidade cognitiva social[6].

---

[5] Currie et al. Nature, 467(7317):801–804, Oct. 2010

[6] T Sawaguchi and H Kudo. Primates, 31:283–90, 1990; Robin Dunbar. Journal of Human Evolution, 20:469–93, 1992

Evidências empíricas

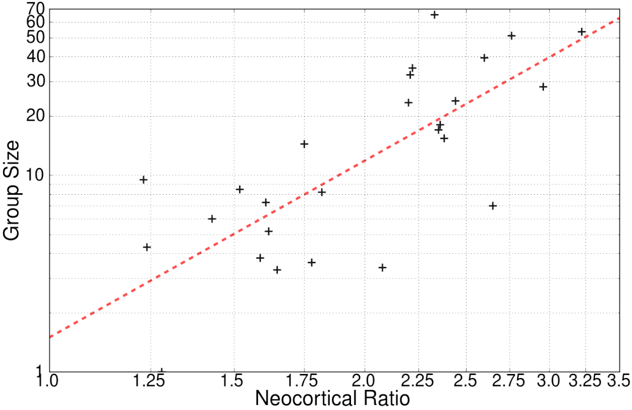


Figura: Razão neocortical vs. tamanho típico de grupo para diferentes espécies de primatas. Adaptado de (Dunbar, 1992)

Evidências empíricas

- Reverse dominance theory[7]
  - Manutenção de estruturas igualitárias em grupos de individuos com comportamento de dominância.
  - Reversão da dominância: candidatos a líder tem mecanismos de ascenção limitados por outros membros do grupo.
  - Observado em estudos de agrupamentos humanos de caçadores-coletores.

---

[7] Boehm et al. Current Anthropology, 34 (3):227–254, 1993; Boehm. Hierarchy in the Forest: The Evolution of Egalitarian Behavior. Harvard University Press, 2001.

Modelo baseado em agentes

- Grupo de *n* agentes com capacidade cognitiva limitada.
- Mapa mental das relações sociais do grupo, codificado em um grafo.
  - Aresta conectada: relação conhecida. Aresta ausente: relação desconhecida.
- Agente aprende nova informação através de observação e aprendizado social.
- Aprendizado e manutenção de informação social é custoso (limitação cognitiva).
- Agente deve balancear custos:
  - Custo cognitivo de obter, armazenar e processar informação social: $C_c \propto n_e$
  - Custo Social de cometer erros de julgamento em situações sociais: $C_s \propto \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i<j} L_{ij}$

Agentes isolados

- Variáveis dinâmicas do agente k:

$$M_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ e } j \text{ estão ligados no grafo de } k \\ \\ 0 & \text{outro caso} \end{cases}$$

- Custo total do agente k: $C(M^k, \alpha) = \frac{n_{\text{edges}}(M^k)}{n(n-1)/2} + \alpha \bar{L}(M^k)$
- Modelo de máxima entropia (vínculo: grafo conexo):

$$P(M|\alpha, \beta) = \frac{q(M^k)}{Z(\alpha, \beta)} e^{-\beta C(M^k, \alpha)}$$

- Interpretação dos parâmetros
  - α - importância relativa entre os custos, proxy para capacidade cognitiva.
  - β - intensidade de flutuações, pressão para otimização do custo total

Minimização do custo ($\beta \to \infty$)

- $\alpha \gg 1$:

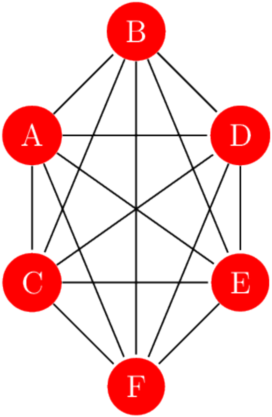


Figura: Grafo totalmente conectado

- $\alpha \ll 1$:

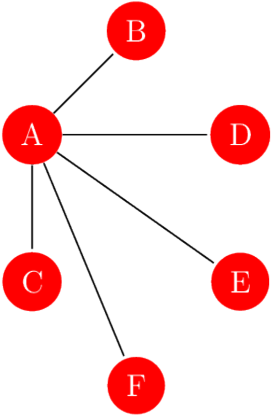
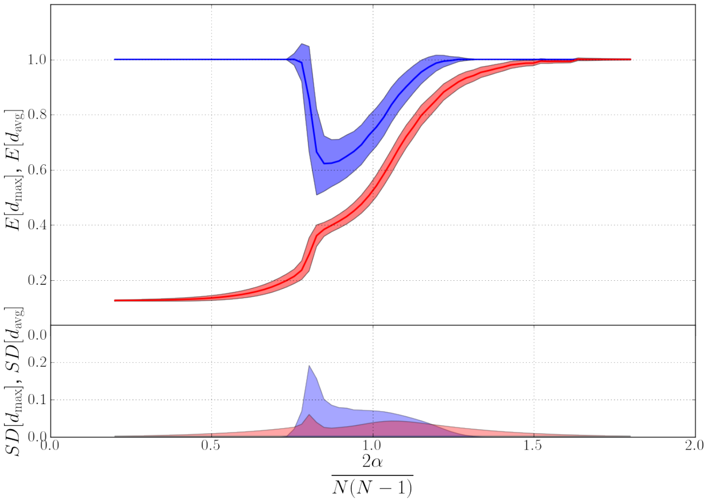
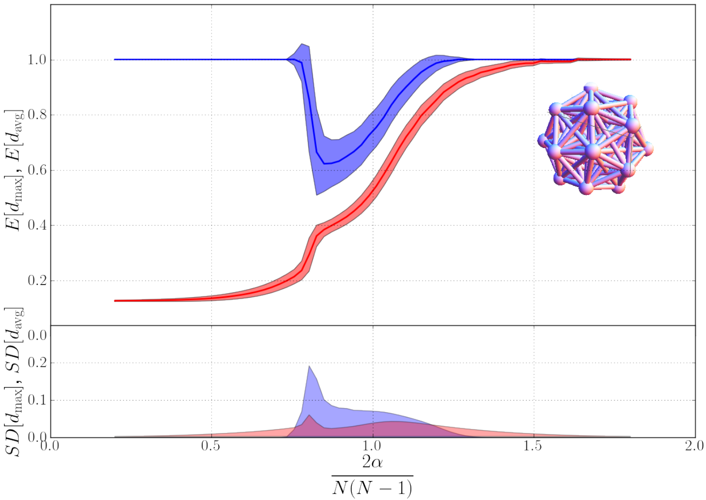


Figura: Grafo estrela

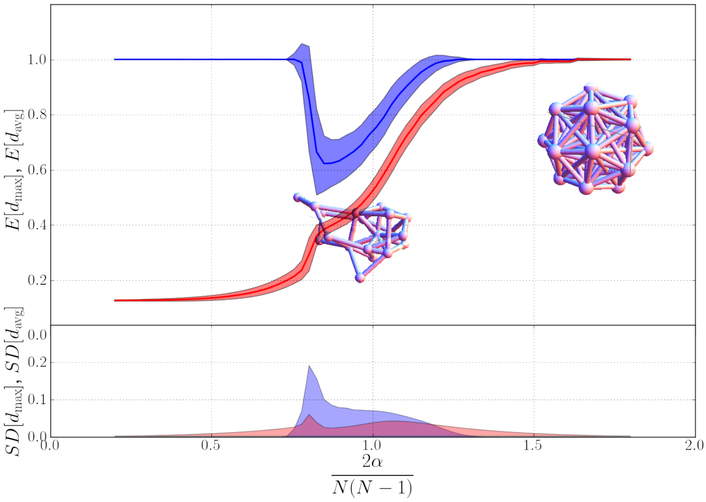
Simulações - corte do diagrama de fases



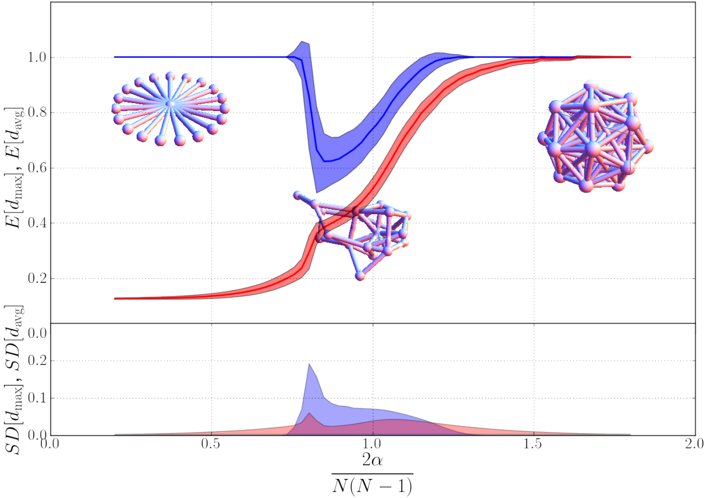
Simulações - corte do diagrama de fases



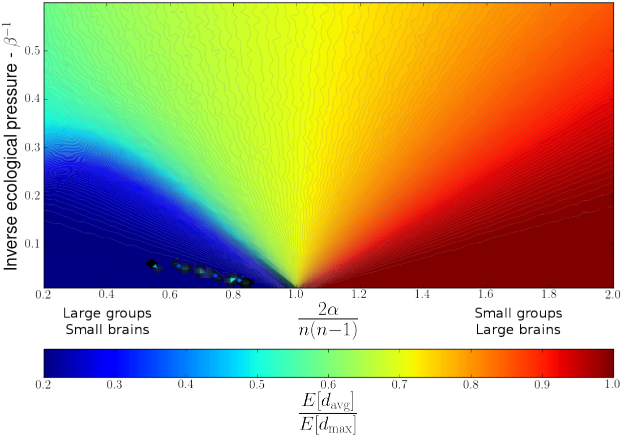
Simulações - corte do diagrama de fases



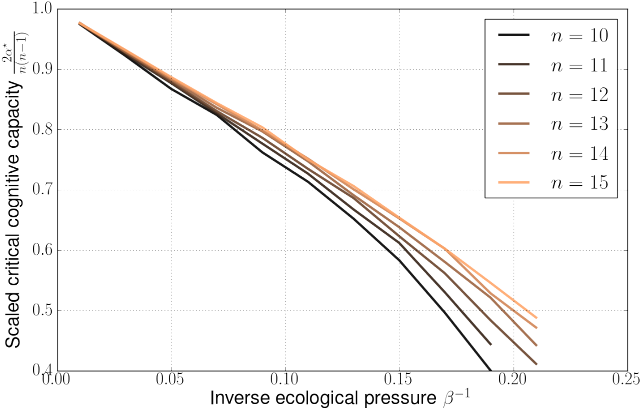
Simulações - corte do diagrama de fases



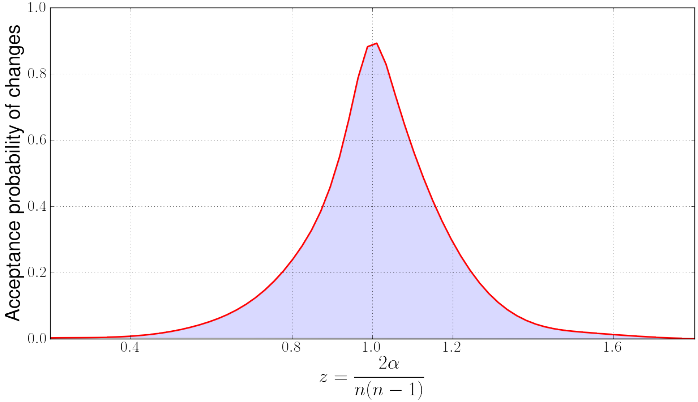
Simulações - diagrama de fases



Simulações - α crítico vs. β



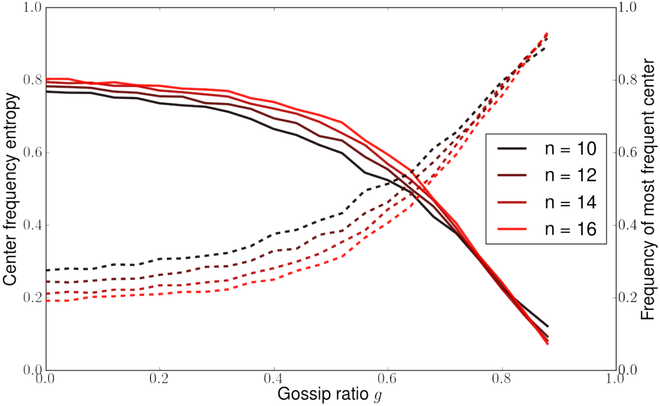
Simulações - taxa de aceitação do Monte Carlo



Agentes em interação

- Agentes podem interagir através de “fofoca”
- A simulação inclui agora n grafos com $n(n-1)/2$ arestas cada
- A cada passo de Monte Carlo:
  - com probabilidade $1-g$, há proposta de troca aleatória de uma aresta,
  - com probabilidade g, é proposta a mesma aresta do grafo de outro agente,
  - a alteração proposta é aceita com probabilidade $e^{-\beta\Delta H}$
- Equivale a introduzir um termo de interação $M_{ij}^k M_{ij}^l$ no custo total

Simulações - muitos agentes



Sumário e Interpretação

- Parâmetros de controle: α, β e *g*
  - α grande: Situação social simétrica + reverse dominance theory, sistema igualitário
  - α intemediário: Grandes flutuações, situação social fluida, concentração de centralidade, dominância temporária, *primus inter pares*
  - α pequeno, *g* grande: Quebra de simetria, todos os grafos centrados no mesmo agente, sistema hierárquico

Conclusões

- Foi construído um modelo de agentes para tentar elucidar o problema da diversidade do comportamento social humano.
- O modelo apresenta três parâmetros, associados (1) à capacidade cognitiva da espécie, (2) às pressões ecológicas e sociais por eficiência na minimização de custos e (3) ao nível de comunicação entre os agentes a respeito de relações sociais.
- Três fases de interesse emergem nesse modelo que, à luz de outras evidências, podem ser interpretadas como formas distintas de organização social - uma igualitária, uma socialmente fluida, com constantes flutuações, e uma hierárquica.

Conclusões

- A existência de limitações cognitivas é suficiente, no modelo, para causar uma quebra de simetria que está na raiz da fase hierárquica.
- O modelo corrobora informações empíricas:
  - a respeito da relação entre número de agentes e forma de organização social (Currie et al, Kennet & Winterhalder);
  - a respeito da relação entre pressões ecológicas e sociais nas formas de organização social (Earle, Summers).
- A comparação com dados empíricos etnográficos é útil na avaliação da utilidade analítica desse modelo.

Bibliografia

- A. Renyi. On measures of dependence. *Acta. Math. Acad. Sci. Hungar.* , 10:441–451, 1959.
- Alexander Kraskov, Harald Stögbauer, and Peter Grassberger. Estimating mutual information. *Phys. Rev. E*, 69:066138, 2004.
- Bruce M. Knauft et al. Violence and sociality in human evolution. *Current Anthropology*, 32:391–428, 1991.
- Joyce Marcus. The archeological evidence for social evolution. *Annu. Rev. Anthropol.*, 37:25166, 2008.
- Thomas E. Currie et al. Rise and fall of political complexity in island south-east asia and the pacific. Nature, 467(7317):801–804, Oct. 2010.
- T Sawaguchi and H Kudo. Neocortical development and social structure in primates. *Primates*, pages 283–90, 1990

Bibliografia

- Robin Dunbar. Neocortex size as a constraint on group size in primates. *Journal of Human Evolution*, 20:469–93, 1992.
- Christopher Boehm et al. Egalitarian behavior and reverse dominance hierarchy [and comments and reply]. *Current Anthropology*, 34(3):pp. 227–254, 1993. ISSN 00113204.
- C Boehm. *Hierarchy in the Forest: The Evolution of Egalitarian Behavior*. Harvard University Press, 2001. ISBN 9780674006911.
- Douglas J. Kennett and Bruce Winterhalder. *Islands of Inquiry: Colonisation, seafaring and the archaeology of maritime landscapes, chapter Demographic expansion, despotism and the colonisation of East and South Polynesia*, pages 87–96. In Clark et al. [40], 2008.

Bibliografia

- T.K. Earle. *How Chiefs Come to Power: The Political Economy in Prehistory*. Antropology. Political science. Stanford University Press, 1997
- K. Summers. The evolutionary ecology of despotism. *Evolution and Human Behavior*, 26(1):106–135, 2005.