



Redes Neurais Artificiais

AULA 08 – Funções de Base Radial (RBF) – Aspectos de Treinamento/Aplicabilidade –

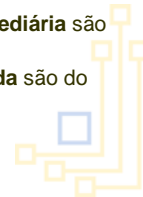
Prof. Ivan Nunes da Silva



1. Redes Funções de Base Radial

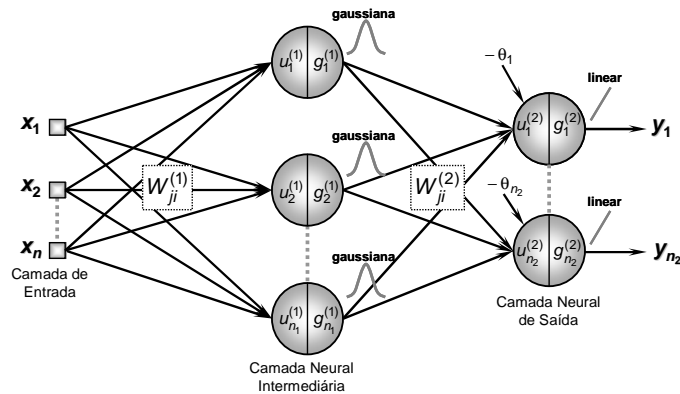
Aspectos de arquitetura

- As redes denominadas Funções de Base Radial, convencionalmente conhecidas como **RBF** (*Radial Basis Function*), são de arquitetura **feedforward** de camadas múltiplas.
- A **RBF** podem ser também empregadas em quase todos os tipos de problemas tratados pelo PMC, ou sejam:
 - Problemas envolvendo aproximação funcional.
 - Problemas envolvendo classificação de padrões.
 - Problemas envolvendo sistemas variantes no tempo.
- Diferentemente das redes PMC, as quais podem ser compostas de **VÁRIAS** camadas intermediárias, a estrutura típica da **RBF** é composta por apenas **UMA** dessas camadas:
 - As funções de ativação dos neurônios da **camada intermediária** são do tipo **GAUSSIANA**.
 - As funções de ativação dos neurônios da **camada de saída** são do tipo **LINEAR**.
- O treinamento da **RBF** é também executada de forma **SUPERVISIONADA**.



1. Redes Funções de Base Radial

Diagrama de configuração típica



- Síntese do fluxo de informações na estrutura da rede **RBF**:
 1. Inicia-se na camada de entrada;
 2. Percorre, em seguida, a **ÚNICA** camada intermediária (neurônios com funções de ativação gaussiana);
 3. Finaliza-se na camada neural de saída (neurônios com funções de ativação linear).

2. Processo de Treinamento da RBF

Aspectos do algoritmo de treinamento

- O princípio de funcionamento das redes **RBF** é também **SIMILAR** àquele do PMC, em que cada uma de suas entradas, representando os sinais advindos da aplicação, será então propagada pela referida camada intermediária, em direção à camada de saída.
- Entretanto, diferentemente do PMC, a estratégia de treinamento da **RBF** é constituída de **DUAS FASES** ou estágios bem distintos entre si.
- **Primeiro Estágio** → Ajustes dos pesos dos neurônios da camada intermediária:
 - Adota um método de aprendizagem **AUTO-ORGANIZADO** (não-supervisionado), que é dependente apenas das características dos dados de entrada.
 - Este ajuste está diretamente relacionado com a **ALOCACÃO** das funções de ativação de base radial.
- **Segundo Estágio** → Ajustes dos pesos dos neurônios da camada de saída:
 - Utiliza um critério de aprendizagem similar àquele usado na última camada do PMC, ou seja, a **REGRA DELTA GENERALIZADA**.

3. Treinamento da RBF / 1º Estágio

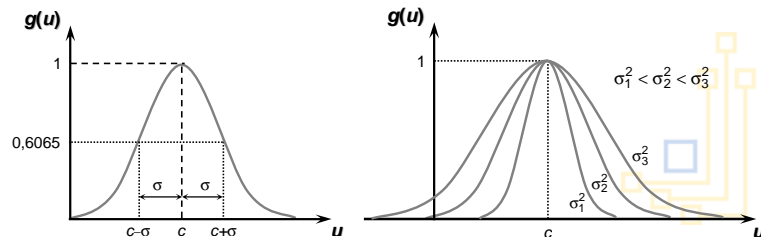
Primeiro estágio de treinamento (I)

Ajustes dos neurônios da camada intermediária (ATIVAÇÃO)

- Conforme mencionado, os neurônios pertencentes à camada intermediária da RBF possuem funções de ativação do tipo base radiais, sendo que a função **GAUSSIANA** é uma das mais usadas.
- A expressão que define uma função de ativação do tipo gaussiana é representada por:

$$g(u) = e^{-\frac{(u-c)^2}{2\sigma^2}}$$

onde c define o **CENTRO** da gaussiana e σ^2 denota a **VARIÂNCIA** (em que σ equivale ao desvio padrão), a qual indica o quão disperso está o potencial de ativação $\{u\}$ em relação ao seu centro $\{c\}$.



5

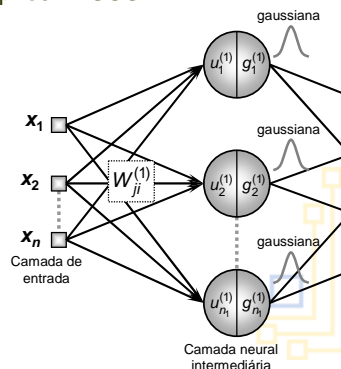
3. Treinamento da RBF / 1º Estágio

Primeiro estágio de treinamento (II)

Ajustes dos neurônios da camada intermediária (RESPOSTA)

- Considerando-se a expressão da gaussiana, os **PARÂMETROS LIVRES** a serem ajustados seriam então o centro c e a variância σ^2 .
- De fato, levando-se em conta o diagrama da **RBF**, juntamente com a configuração dos seus neurônios escondidos, o centro c está diretamente associado aos seus próprios **PESOS**.
- Nesta situação, a **ENTRADA** $u_j^{(1)}$ de cada um deles será o próprio vetor de entrada \mathbf{x} , a qual representa os n sinais externos.
- Conseqüentemente, a **SAÍDA** de cada neurônio j desta camada é dada por:

$$g_j^{(1)}(u_j^{(1)}) = g_j^{(1)}(\mathbf{x}) = e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - w_{ji}^{(1)})^2}{2\sigma_j^2}}$$



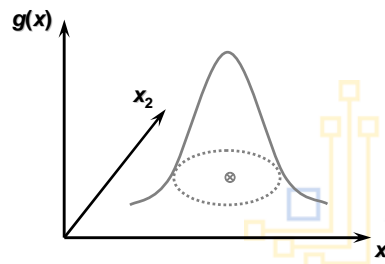
6

3. Treinamento da RBF / 1ª Estágio

Primeiro estágio de treinamento (III)

Ajustes dos neurônios da camada intermediária (CAMPO)

- Para propósitos de ilustração, a figura seguinte mostra uma função de ativação gaussiana em relação a **DOIS SINAIS** de entrada x_1 e x_2 , os quais compõem uma amostra \mathbf{x} .
- Observa-se aqui que quanto mais próxima esteja uma determinada amostra (padrão) do **CENTRO DA GAUSSIANA**, mais significativa será o valor produzido pelo campo receptivo radial da função de ativação, a qual tenderá para o valor 1.
- Em tal condição, o neurônio produzirá respostas similares para todos aqueles padrões que estejam a uma mesma **DISTÂNCIA RADIAL** do centro da gaussiana.
- Assim, para a **RBF**, as fronteiras delimitadoras são então definidas por **CAMPOS RECEPTIVOS HIPERESFÉRICOS**.



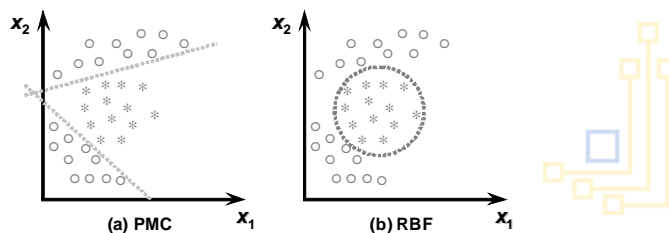
7

3. Treinamento da RBF / 1ª Estágio

Primeiro estágio de treinamento (IV)

Ajustes dos neurônios da camada intermediária (PMC x RBF)

- Em se tratando de problemas de classificação de padrões, o **PMC** computa as fronteiras de delimitação de classes por intermédio de uma **COMBINAÇÃO DE HIPERPLANOS**.
- Já na **RBF**, com funções de ativação do tipo **GAUSSIANA**, as fronteiras delimitadoras são definidas por **CAMPOS RECEPTIVOS HIPERESFÉRICOS**.
- Neste caso, considerando somente duas entradas $\{x_1 \text{ e } x_2\}$, a fronteira de separabilidade do **PMC** será formada de segmentos de **RETA**, ao passo que na **RBF** esta seria delimitada por um campo receptivo que pode ser representado por uma **CIRCUNFERÊNCIA**.



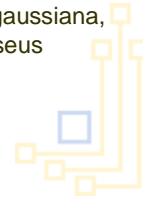
8

3. Treinamento da RBF / 1ª Estágio

Primeiro estágio de treinamento (V)

Ajustes dos neurônios da camada intermediária (K-MEANS)

- Em suma, o principal objetivo dos neurônios da camada intermediária é **POSICIONAR** os centros de suas gaussianas de forma mais apropriada possível.
- Um dos métodos mais bem utilizado para esta finalidade é denominado de **K-MEANS** (*k*-médias), cujo propósito é posicionar os centros de *k*-gaussianas em regiões que as amostras de entrada tenderão a se agrupar.
- Vale aqui ressaltar que o valor do parâmetro **K** é igual ao **NÚMERO DE NEURÔNIOS** da camada intermediária.
- De fato, a função de ativação de cada um deles é uma gaussiana, sendo que os centros delas serão representados pelos seus respectivos **VETORES DE PESO**.



9

3. Treinamento da RBF / 1ª Estágio

Primeiro estágio de treinamento (VI)

- <1> Obter o conjunto de amostras de treinamento $\{x^{(k)}\}$;
- <2> Iniciar o vetor de pesos de cada neurônio da camada intermediária com os valores das n_1 primeiras amostras de treinamento;
- <3> Repetir as instruções:
- <3.1> Para todas as amostras de treinamento $\{x^{(k)}\}$, fazer:
 - <3.1.1> Calcular as distâncias euclidianas entre $x^{(k)}$ e $w_j^{(1)}$, considerando-se cada *j*-ésimo neurônio por vez;
 - <3.1.2> Selecionar o neurônio *j*, que contenha a menor distância, com o intuito de agrupar a referida amostra junto ao centro mais próximo;
 - <3.1.3> Atribuir a amostra $x^{(k)}$ ao grupo $\Omega^{(j)}$;
 - <3.2> Para todos $w_j^{(1)}$, onde $j = 1, \dots, n_1$, fazer:
 - <3.2.1> Ajustar $w_j^{(1)}$ de acordo com as amostras em $\Omega^{(j)}$:

$$w_j^{(1)} = \frac{1}{m^{(j)}} \sum_{x^{(k)} \in \Omega^{(j)}} x^{(k)}$$
 { $m^{(j)}$ é o no. de amostras em $\Omega^{(j)}$ }
- Até que: não haja mudanças nos grupos $\Omega^{(j)}$ entre as iterações;
- <4> Para todos $w_j^{(1)}$, onde $j = 1, \dots, n_1$, fazer:
- <4.1> Calcular a variância de cada uma das funções de ativação gaussianas pelo critério da distância quadrática média:

$$\sigma_j^2 = \frac{1}{m^{(j)}} \sum_{x^{(k)} \in \Omega^{(j)}} \sum_{i=1}^n (x_i^{(k)} - w_j^{(1)})^2$$

**Algoritmo
K-MEANS
(1ª Estágio)**



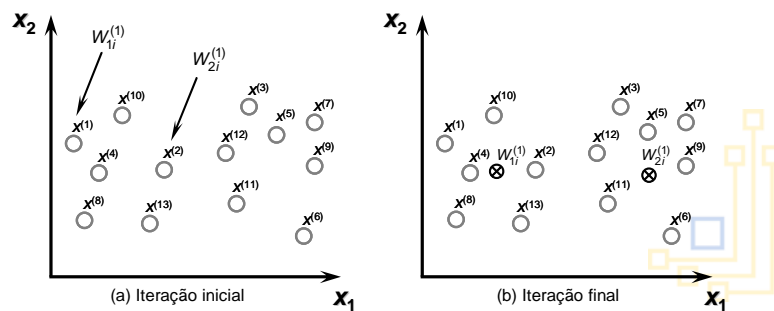
10

3. Treinamento da RBF / 1ª Estágio

Primeiro estágio de treinamento (VII)

Ajustes dos neurônios da camada intermediária (Ex/Amostras)

- Como exemplo do primeiro estágio de treinamento da **RBF** e do método de agrupamento (clustering) **K-MEANS**, considera-se um problema aplicativo constituído de duas entradas x_1 e x_2 , com amostras de treinamento representadas na figura seguinte.
- Para este exemplo ilustrativo, a **RBF** será composta de apenas dois neurônios em sua camada intermediária ($n_1 = 2$).



11

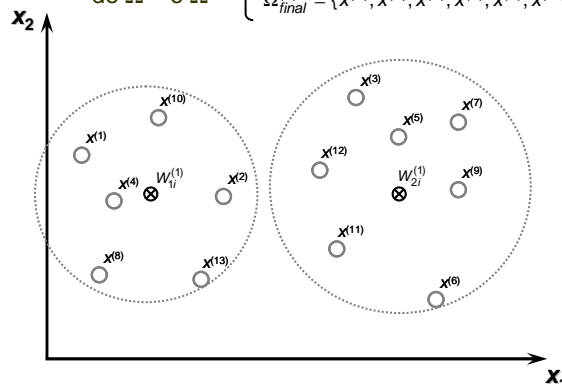
3. Treinamento da RBF / 1ª Estágio

Primeiro estágio de treinamento (VIII)

Ajustes dos neurônios da camada intermediária (Convergência)

$$\text{Configuração Inicial de } \Omega^{(1)} \text{ e } \Omega^{(2)} \left\{ \begin{array}{l} \Omega_{inicial}^{(1)} = \{x^{(1)}, x^{(4)}, x^{(8)}, x^{(10)}\} \\ \Omega_{inicial}^{(2)} = \{x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(5)}, x^{(6)}, x^{(7)}, x^{(9)}, x^{(11)}, x^{(12)}, x^{(13)}\} \end{array} \right.$$

$$\text{Configuração Final de } \Omega^{(1)} \text{ e } \Omega^{(2)} \left\{ \begin{array}{l} \Omega_{final}^{(1)} = \{x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(4)}, x^{(8)}, x^{(10)}, x^{(13)}\} \\ \Omega_{final}^{(2)} = \{x^{(3)}, x^{(5)}, x^{(6)}, x^{(7)}, x^{(9)}, x^{(11)}, x^{(12)}\} \end{array} \right.$$



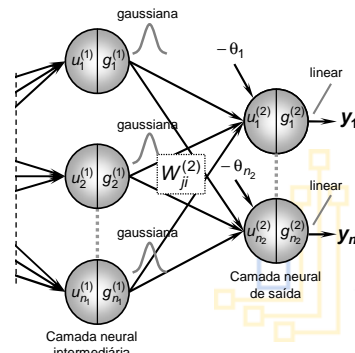
12

4. Treinamento da RBF / 2º Estágio

Segundo estágio de treinamento (I)

- A aplicação dos passos de ajuste referentes aos pesos dos neurônios da **CAMADA DE SAÍDA** deve ser executada, em seqüência, somente após a finalização do primeiro estágio de treinamento.
- Assim, o 2º estágio de treinamento é efetivado utilizando os mesmos procedimentos usados para a camada de saída do **PMC**.
- Diferentemente do primeiro estágio de treinamento da **RBF**, este 2º estágio utiliza um processo de aprendizado **SUPERVISIONADO**.
- O conjunto de treinamento para os neurônios de saída será então constituído por **PAIRES** de entrada e saída desejada.
- As entradas desta camada são as **RESPOSTAS** dadas pelas funções de ativação gaussianas dos neurônios da camada intermediária, ou seja:

$$u_j^{(2)} = \sum_{i=1}^{n_1} \underbrace{w_{ji}^{(2)}}_{\text{parcela (i)}} \cdot \underbrace{g_i^{(1)}(u_i^{(1)})}_{\text{parcela (ii)}} - \theta_j$$



13

4. Treinamento da RBF / 2º Estágio

Segundo estágio de treinamento (II)

Início {Algoritmo RBF – Segundo Estágio de Treinamento}

- <1> Obter o conjunto original de amostras de treinamento $\{x^{(k)}\}$;
- <2> Obter o vetor de saída desejada $\{d^{(k)}\}$ para cada amostra;
- <3> Iniciar $w_{ji}^{(2)}$ com valores aleatórios pequenos;
- <4> Especificar taxa de aprendizagem $\{\eta\}$ e precisão requerida $\{\varepsilon\}$;
- <5> Para todas as amostras $\{x^{(k)}\}$, fazer:
 - <5.1> Obter os valores de $g_j^{(1)}$ em relação à $x^{(k)}$; {conforme (6.2)}
 - <5.2> Assumir $z^{(k)} = [g_1^{(1)} \ g_2^{(1)} \dots \ g_{n_1}^{(1)}]^T$; {pseudo-amostras}
- <6> Iniciar o contador de número de épocas {época $\leftarrow 0$ };
- <7> Repetir as instruções:
 - <7.1> $E_M^{anterior} \leftarrow E_M$; {conforme (5.8)}
 - <7.2> Para todos os pares de treinamento $\{z^{(k)}, d^{(k)}\}$, fazer:
 - Ajustar $w_{ji}^{(2)}$ e θ_j aplicando os mesmos passos usados na camada de saída do PMC (Subseção 5.3.1)
 - <7.3> $E_M^{atual} \leftarrow E_M$; {conforme (5.8)}
 - <7.4> época \leftarrow época + 1;

Até que: $|E_M^{atual} - E_M^{anterior}| \leq \varepsilon$

Fim {Algoritmo RBF – Segundo Estágio de Treinamento}

14

4. Treinamento da RBF / 2º Estágio

Segundo estágio de treinamento (III)

- Após a finalização dos estágios de treinamento da **RBF**, esta estará então apta para estimar as saídas do processo que foi mapeado, frente agora às novas amostras que serão apresentadas.

Início {Algoritmo RBF – Fase de Operação}

- <1> Apresentar uma amostra $\{x\}$;
- <2> Assumir os parâmetros $W_{ji}^{(1)}$, σ_j^2 , $W_{ji}^{(2)}$ e θ_j já ajustados durante os estágios de treinamento;
- <3> Executar as seguintes instruções:
 - <3.1> Obter $g_j^{(1)}$; {conforme (6.2)}
 - <3.2> Obter $u_j^{(2)}$; {conforme (6.3)}
 - <3.3> Obter y_j ; {conforme (6.4)}
- <4> Disponibilizar as saídas da rede mediante os valores contidos em y_j .

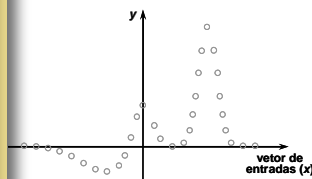
Fim {Algoritmo RBF – Fase de Operação}

15

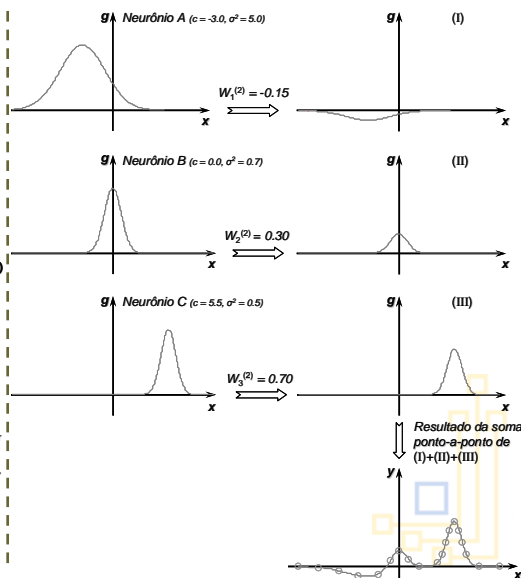
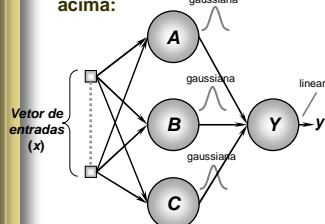
5. Aplicabilidade da RBF

Problemas de aproximação universal

- Conjunto de amostras relacionando entradas/saídas referente ao processo (função) a ser mapeado.



- RBF aplicada para mapear a função representada pelas amostras de treinamento acima:

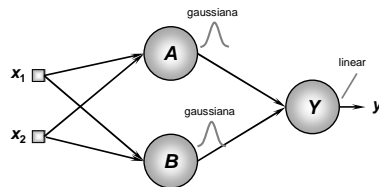


16

5. Aplicabilidade do RBF

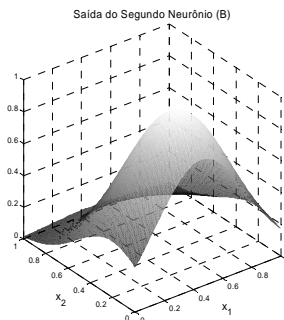
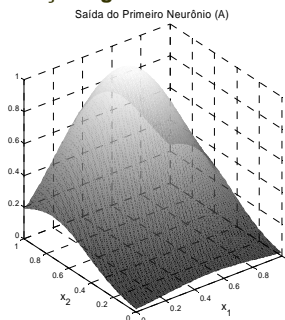
Problemas de classificação de padrões (I)

● Configuração topológica de uma RBF



- A figura abaixo ilustram duas eventuais configurações (iniciais) para os neurônios **A** e **B** da camada intermediária.

● Funções gaussianas associadas aos neurônios **A** e **B**

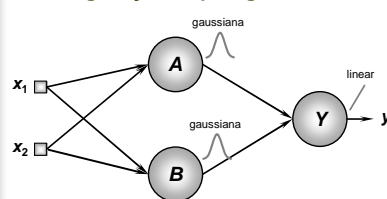


17

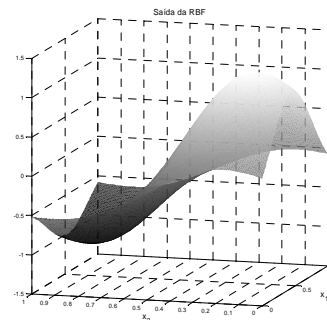
5. Aplicabilidade do RBF

Problemas de classificação de padrões (II)

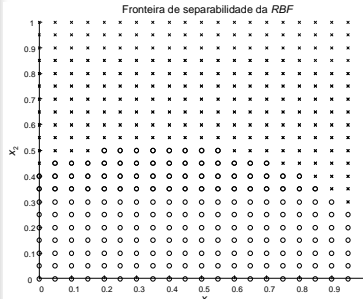
● Configuração Topológica da RBF



● Saída do Neurônio Y



● Fronteira de Separabilidade da RBF



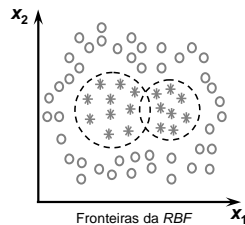
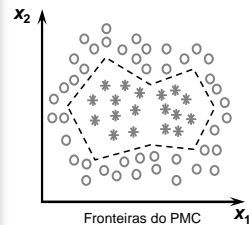
- A figura acima mostra a saída do neurônio **Y**, mostrando que o neurônio **A** inverteu a sua função gaussiana.
- A figura ao lado ilustra as fronteiras de delimitadas pela **RBF**, quando executa-se a interseção da superfície ilustrada acima (saída do neurônio **Y**) próximo ao plano $y = 0$.

18

5. Aplicabilidade do RBF

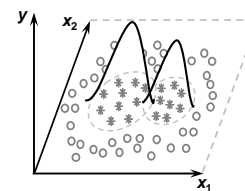
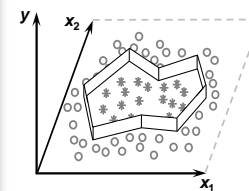
Problemas de classificação de padrões (III)

● Configuração Topológica da RBF



- Para o **PMC**, depreende-se que a sua camada intermediária poderia ser constituída por 8 neurônios.
- Para a **RBF**, a sua camada intermediária seria composta por somente 2 neurônios, os quais são caracterizados pelas circunferências que delimitam as fronteiras.

● Fronteira de Separabilidade da RBF



- A figura ao lado ilustra, de forma tridimensional, as possíveis regiões de separabilidade, baseadas nos resultados da figura dada acima.

19

Fim da Apresentação



20