



Redes Neurais Artificiais

AULA 09 – Redes Recorrentes de Hopfield – Funcionamento e Memórias Associativas –

Prof. Ivan Nunes da Silva



1. Redes Recorrentes de Hopfield

Aspectos de arquitetura

- Conforme as aulas anteriores, as redes neurais artificiais consideradas **recorrentes** são aquelas em que as saídas de uma camada neural podem ser realimentadas às suas entradas.
- O melhor exemplo de rede recorrente são aquelas que foram idealizadas por Hopfield (1982), as quais são mais comumente conhecidas como **redes de Hopfield**.
- Tal arquitetura de rede neural artificial, com **realimentação global**, possui as seguintes características:
 - Comportamento tipicamente dinâmico;
 - Capacidade de memorizar relacionamentos;
 - Possibilidade de armazenamento de informações;
 - Facilidade de implementação em hardware analógico.



1. Redes Recorrentes de Hopfield

Contexto histórico

- Os trabalhos desenvolvidos por Hopfield também contribuíram para desencadear na época um **interesse renovado**, e ainda bem crescente, por redes neurais artificiais.
- Essas investigações colaboraram para o **renascimento** de importantes pesquisas na área e que estavam, de certo modo, estagnadas desde a publicação do livro **Perceptron** por Minsky & Papert (1969).
- As propostas de Hopfield formulavam sobre os **elos existentes** entre as arquiteturas neurais recorrentes frente aos sistemas dinâmicos e à física estatística.
- Em decorrência, elas impulsionaram a **curiosidade** de diversas outras áreas do conhecimento.

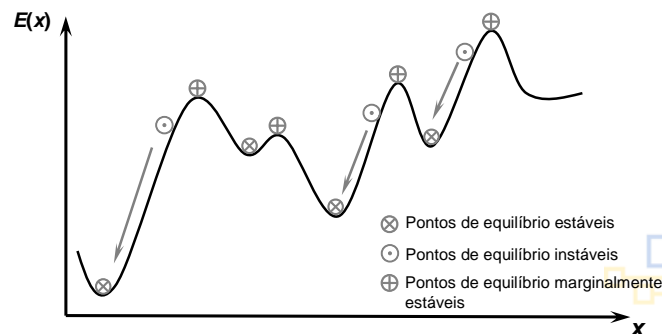


3

1. Redes Recorrentes de Hopfield

Função de energia da rede

- O grande trunfo de Hopfield foi mostrar que redes recorrentes de uma única camada podiam ser caracterizadas por uma **função de energia** relacionada aos estados de seu comportamento dinâmico.
- Tais arquiteturas foram também batizadas como modelos “**vidro de spin**” (*Ising model*), fazendo-se analogia ao ferromagnetismo.
- A **minimização** da função de energia $\{E(x)\}$ levaria a saída da rede para **pontos de equilíbrio estáveis**, sendo que estes seriam a solução desejada frente a um problema em específico.

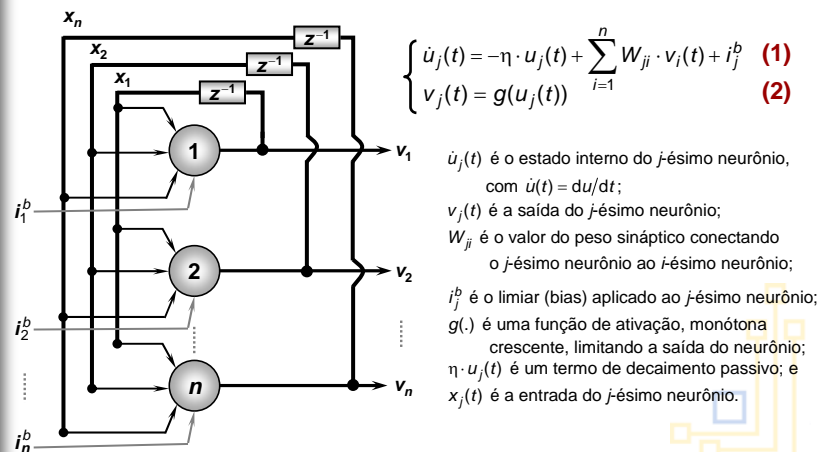


4

2. Princípio de Funcionamento

Aspectos de arquitetura

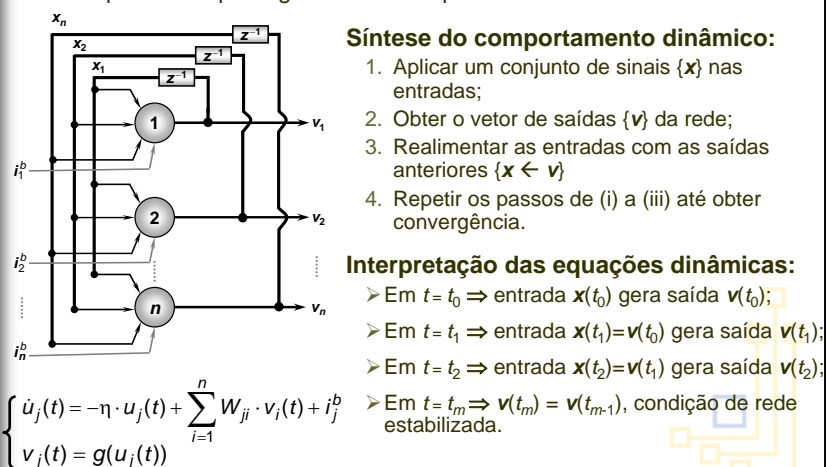
- A rede de Hopfield é constituída de uma **única camada**, em que todos os neurônios são **completamente interligados**, isto é, todas as saídas da rede realimentam todas as suas entradas.



2. Princípio de Funcionamento

Comportamento dinâmico

- Elucidando ainda mais os passos envolvidos com a **dinâmica da rede de Hopfield**, tem-se também as interpretações seguintes para as expressões que regem o seu comportamento.



2. Princípio de Funcionamento

Versão em tempo discreto

- Na maioria das aplicações práticas, em que se implementaram as redes de Hopfield por meio de algoritmos computacionais iterativos, utiliza-se a sua versão em **tempo discreto**, ou seja:

$$\begin{cases} u_j(k) = \sum_{i=1}^n W_{ji} \cdot v_i(k-1) + i_j^b, & \text{com } j = 1, \dots, n \end{cases} \quad (3)$$

$$v_j(k) = g(u_j(k)) \quad (4)$$

- Assim como no caso contínuo, dado qualquer conjunto de condições iniciais $\mathbf{x}^{(0)}$, deve-se impor **restrições apropriadas** sobre a matriz de pesos \mathbf{W} , a fim de se garantir estabilidade (convergência para pontos de equilíbrio estáveis).
- Essas seqüências de iterações sucessivas produzem mudanças (cada vez menores) nas saídas da rede, até que os seus valores se tornem constantes (**estáveis**).
- A versão em tempo discreto também sempre convergirá para aqueles pontos que correspondem à **solução do problema**.

7

3. Estabilidade da Rede de Hopfield

Aspectos introdutórios

- Dependendo de como os parâmetros da rede são escolhidos, esta deve funcionar como um **sistema estável**, ou então como um **oscilador**, ou ainda como um **sistema totalmente caótico**.
- A maioria das aplicações que envolvem o uso da rede de Hopfield requer que a mesma se comporte como um **sistema estável**, com múltiplos pontos de equilíbrio também estáveis.
- Para analisar a estabilidade e evolução da rede de Hopfield, há a necessidade de definir uma **Função de Energia** ou Função de Lyapunov que está associada com sua dinâmica.
- Em outras palavras, tem-se que provar que o **sistema dissipa energia** com o passar do tempo, em consideração às certas condições que lhe são impostas, até alcançar um estágio de mínima energia livre.
- Para isso, deve-se mostrar que suas **derivadas temporais** são sempre menores ou iguais que zero, conforme o "**Segundo Método de Lyapunov**", também conhecido como "Método Direto".

8

3. Estabilidade da Rede de Hopfield

Condições para garantia de estabilidade (I)

- Uma função de Lyapunov para a rede de Hopfield, cujos neurônios são alterados de forma assíncrona (um por vez), é definida por:

$$E(t) = -\frac{1}{2} \mathbf{v}(t)^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(t)^T \cdot \mathbf{i}^b \quad (5)$$

- A partir de (5), obtém-se a expressão para suas derivadas temporais, i.e.:

$$\dot{E}(t) = \frac{dE(t)}{dt} = (\nabla_{\mathbf{v}} E(t))^T \cdot \dot{\mathbf{v}}(t) \quad (6)$$

- Impondo a primeira condição, de que a matriz de pesos seja simétrica $\{\mathbf{W} = \mathbf{W}^T\}$, obtém-se a seguinte relação de (6) com (5):

$$\nabla_{\mathbf{v}} E(t) = -\mathbf{W} \cdot \mathbf{v}(t) - \mathbf{i}^b \quad (7)$$

- Examinando a expressão (1), assumindo que o termo de decaimento passivo seja nulo, conclui-se que:

$$\nabla_{\mathbf{v}} E(t) = -\dot{\mathbf{u}}(t) \quad (8)$$

- Logo, substituindo (8) em (6), tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{E}(t) &= -\dot{\mathbf{u}}(t)^T \cdot \dot{\mathbf{v}}(t) \\ &= -\sum_{j=1}^n \dot{u}_j(t) \cdot \dot{v}_j(t) = -\sum_{j=1}^n \dot{u}_j(t) \cdot \frac{\partial v_j(t)}{\partial u_j(t)} \cdot \frac{\partial u_j(t)}{\partial t} \\ &= -\sum_{j=1}^n \underbrace{(\dot{u}_j(t))^2}_{\text{parcela (i)}} \cdot \underbrace{\frac{\partial v_j(t)}{\partial u_j(t)}}_{\text{parcela (ii)}} \quad (9) \end{aligned}$$

$$\dot{u}_j(t) = -\eta \cdot u_j(t) + \sum_{i=1}^n w_{ji} \cdot v_i(t) + i_j^b \quad (1)$$

9

3. Estabilidade da Rede de Hopfield

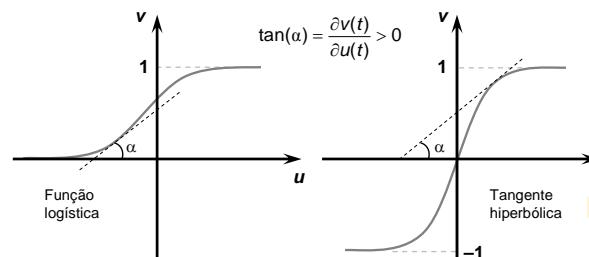
Condições para garantia de estabilidade (II)

- Para concluir a demonstração, basta-se então mostrar que as derivadas temporais da expressão (9) são sempre **menores ou iguais que zero**.

$$\dot{E}(t) = -\sum_{j=1}^n \underbrace{(\dot{u}_j(t))^2}_{\text{parcela (i)}} \cdot \underbrace{\frac{\partial v_j(t)}{\partial u_j(t)}}_{\text{parcela (ii)}}$$

- Como o sinal da referida expressão já é negativo, resta-se então mostrar que tanto a parcela (i) como a parcela (ii) produzirá sinais sempre positivos.

- A parcela (i) sempre fornece resultado positivo, independentemente do valor de seu argumento, pois está elevada ao quadrado.
- A parcela (ii) será também sempre positivo, desde que se utilize funções de ativação monótonas crescentes, tais como a função logística e a tangente hiperbólica.

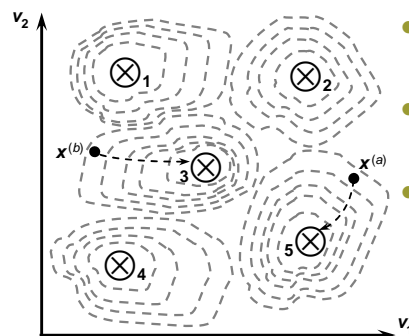


10

3. Estabilidade da Rede de Hopfield

Condições para garantia de estabilidade (III)

- Portanto, têm-se assim as **duas condições essenciais** para que o comportamento dinâmico da rede de Hopfield seja estável, isto é:
 - 1) A matriz de pesos $\{W\}$ deve ser simétrica;
 - 2) A função de ativação $\{g(\cdot)\}$ deve ser monótona crescente.
- Em suma, desde que as duas condições acima sejam satisfeitas, dado então qualquer conjunto de condições iniciais $x(0)$, a rede sempre convergirá para um **ponto de equilíbrio estável**.



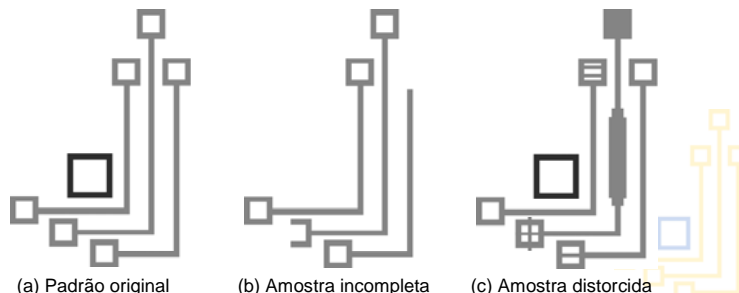
- A figura ao lado mostra um conjunto de pontos de equilíbrio e seus recíprocos campos de atração.
- Assume-se aqui que a rede é constituída de dois neurônios, cujas saídas são dadas por v_1 e v_2 .
- Os 5 pontos de equilíbrio (atratores) representados seriam então aqueles que produziram os menores valores para a função de energia, ou seja, são os estados que minimizam a função de energia da rede.

11

4. Memórias Associativas

Conceitos introdutórios

- Uma das aplicações mais difundidas das redes de Hopfield diz respeito às **memórias associativas binárias**, também denominadas de memórias endereçáveis pelo conteúdo.
- A finalidade embutida por trás de uma memória associativa está em **recuperar** (restaurar) corretamente um padrão que foi previamente armazenado em sua estrutura, a partir de uma amostra parcial (incompleta) ou ruidosa (distorcida) do mesmo.
- Para tal propósito, pode-se também utilizar aqui uma rede de Hopfield.



12

4. Memórias Associativas

Método do produto externo

- Para as memórias associativas, assim como em outras aplicações de Hopfield, o desafio está em definir apropriadamente os seus **parâmetros livres** (\mathbf{W} e \mathbf{I}^b) a fim de minimizar a função de energia correspondente.
- Para tanto, dois métodos clássicos têm sido adotados com frequência, i.e., o **método do produto externo** e o método da matriz pseudo-inversa.

Método do Produto Externo

- A inspiração deste método, proposto pelo próprio Hopfield, advém da aplicação do método de aprendizagem de **Hebb**.
- Assim, dada uma quantidade p de padrões $\{\mathbf{z}\}$ a serem armazenados na memória, constituídos por n elementos cada um, os parâmetros livres da rede de Hopfield são definidos por:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^p \mathbf{z}^{(k)} \cdot (\mathbf{z}^{(k)})^T \quad (10) ; \quad \mathbf{I}^b = \mathbf{0} \quad (11)$$

- No caso das memórias associativas, a diagonal da matriz de pesos \mathbf{W} deve ter valores nulos (indicação de ausência de auto-realimentação). Para tanto, reescrevendo a expressão (10), tem-se:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^p \underbrace{\mathbf{z}^{(k)} \cdot (\mathbf{z}^{(k)})^T}_{(i)} - \underbrace{\frac{p}{n} \cdot \mathbf{I}}_{(ii)}$$

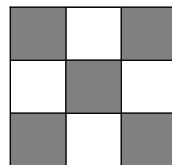
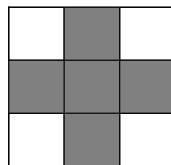
- A parcela (i) realiza o produto externo entre os elementos de cada um dos padrões a ser armazenados.
- A parcela (ii) simplesmente neutraliza os elementos da diagonal principal ($W_{kk} = 0$).

13

4. Memórias Associativas

Exemplo ilustrativo

- Como exemplo do processo de montagem da matriz \mathbf{W} , considera-se dois padrões a serem introduzidos numa memória associativa, i.e.:



- As imagens a ser armazenadas são definidas em grids de dimensão 3x3.
- As quadriculas (pixels) escuras são representadas pelo valor 1, ao passo que quadriculas brancas pelo valor -1.
- Tais atribuições correspondem aos valores de saída da função de ativação sinal.

- Nesta condição, os vetores $\mathbf{z}^{(1)}$ e $\mathbf{z}^{(2)}$ são constituídos pela concatenação das linhas que compõem cada um de seus grids.

$$\mathbf{z}^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & +1 & -1 \end{bmatrix}^T$$

1ª linha 2ª linha 3ª linha

$$\mathbf{z}^{(2)} = \begin{bmatrix} +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 \end{bmatrix}^T$$

1ª linha 2ª linha 3ª linha

- Aplicando-se a expressão abaixo, com $p = 2$ e $n = 9$, obtém-se a referida matriz de pesos da rede de Hopfield, i.e.

$$\mathbf{W} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^p \underbrace{\mathbf{z}^{(k)} \cdot (\mathbf{z}^{(k)})^T}_{(i)} - \underbrace{\frac{p}{n} \cdot \mathbf{I}}_{(ii)}$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & -0.22 & 0.22 & -0.22 & 0 & -0.22 & 0.22 & -0.22 & 0.22 \\ -0.22 & 0 & -0.22 & 0.22 & 0 & 0.22 & -0.22 & 0.22 & -0.22 \\ 0.22 & -0.22 & 0 & -0.22 & 0 & -0.22 & 0.22 & -0.22 & 0.22 \\ -0.22 & 0.22 & -0.22 & 0 & 0 & 0.22 & -0.22 & 0.22 & -0.22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.22 & 0.22 & -0.22 & 0.22 & 0 & 0 & -0.22 & 0.22 & -0.22 \\ 0.22 & -0.22 & 0.22 & -0.22 & 0 & -0.22 & 0 & -0.22 & 0.22 \\ -0.22 & 0.22 & -0.22 & 0.22 & 0 & 0.22 & -0.22 & 0.22 & -0.22 \\ 0.22 & -0.22 & 0.22 & -0.22 & 0 & -0.22 & 0.22 & -0.22 & 0 \end{bmatrix}$$

14

4. Memórias Associativas

Capacidade de armazenamento

- Baseado em inúmeros experimentos, Hopfield descreveu que a capacidade de armazenamento $\{C^{Hopf}\}$ de padrões das memórias associativas, objetivando uma recuperação de padrões relativamente com **poucos erros**, é dada por:
$$C^{Hopf} = 0,15 \cdot n$$
- Alguns resultados mais precisos (análises de probabilidade) revelam que a capacidade máxima de armazenamento $\{C^{Max}\}$, considerando uma recuperação **quase sem erros**, seria definida por:
$$C^{Max} = \frac{n}{2 \cdot \ln(n)}$$
- Para a recuperação com **100% de acertos**, a capacidade de armazenamento $\{C^{100\%}\}$ é especificada por:
$$C^{100\%} = \frac{n}{4 \cdot \ln(n)}$$
- Para efeitos comparativos, a tabela abaixo mostra as capacidades de armazenamento da rede de Hopfield para diversos valores de n .

Dimensão	C^{Hopf}	C^{Max}	$C^{100\%}$
$n = 20$	3,0	3,3	1,7
$n = 50$	7,5	6,4	3,2
$n = 100$	15,0	10,9	5,5
$n = 500$	75,0	40,2	20,1
$n = 1000$	150,0	72,4	36,2



15

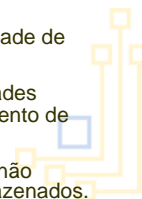
4. Memórias Associativas

Análise da capacidade de armazenamento

Dimensão	C^{Hopf}	C^{Max}	$C^{100\%}$
$n = 20$	3,0	3,3	1,7
$n = 50$	7,5	6,4	3,2
$n = 100$	15,0	10,9	5,5
$n = 500$	75,0	40,2	20,1
$n = 1000$	150,0	72,4	36,2

Análise da Tabela

- Quando a precisão requerida durante a recuperação deixar de ser um **fator tão imperativo**, pode-se então armazenar muito mais padrões na memória associativa, conforme os valores refletidos por C^{Hopf} .
- Quando a precisão da recuperação se torna **muito elevada**, a quantidade máxima de padrões a serem armazenados $\{C^{Max}\}$ decai substancialmente com o aumento de suas dimensões.
- Quando se espera **100% de acertos** na recuperação, a capacidade de armazenamento $\{C^{100\%}\}$ atinge seus valores mínimos.
- Quando a capacidade de armazenamento despreza as quantidades recomendadas pelas equações anteriores, há então o aparecimento de **estados espúrios**.
 - Embora sejam pontos de equilíbrio estáveis, tais estados não corresponderão a nenhum dos padrões previamente armazenados.



16

5. Projeto de Redes de Hopfield

Aspectos de desenvolvimento

- Diferentemente das arquiteturas de RNA apresentadas anteriormente, tem-se que os parâmetros livres (\mathbf{W} e \mathbf{i}^b) da rede de Hopfield, são obtidos de **maneira explícita** em grande parte de suas aplicações.
- Quando \mathbf{W} e \mathbf{i}^b são obtidos de maneira explícita, implica-se aqui na dispensa de algoritmos de treinamento.
- De fato, a maioria dos problemas tratados pela rede de Hopfield é derivada da especificação de uma **função de energia**, a qual é representativa de seu comportamento dinâmico.
- Quanto **mais conhecimento** se tenha da área temática que envolve um problema em específico, mais subsídios estarão então disponíveis para se projetar adequadamente as respectivas funções de energia.
- A função de energia do problema a ser mapeado deve ser sempre escrita na forma dada por:

$$E(t) = -\frac{1}{2} \mathbf{v}(t)^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(t)^T \cdot \mathbf{i}^b$$

17

5. Projeto de Redes de Hopfield

Algoritmo de convergência

- As instruções (em pseudocódigo) descrevendo a operação da rede de Hopfield discreta, representada pelas expressões (3) e (4), são fornecidas na seqüência.

Início {Algoritmo Hopfield – Operação em Tempo Discreto}

```

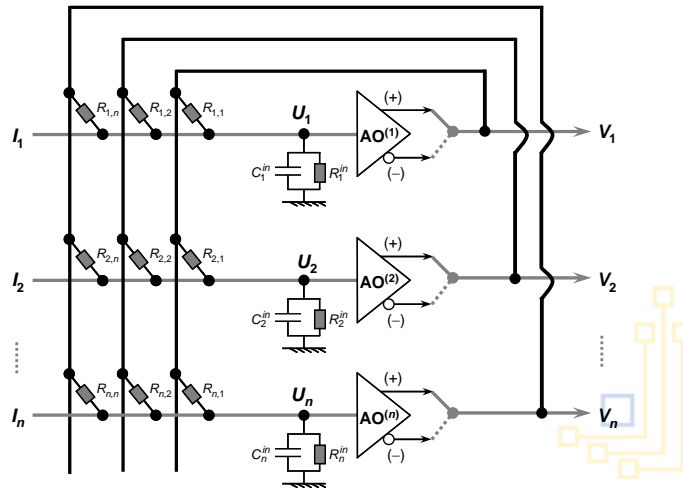
<1> Especificar a matriz de pesos  $\mathbf{W}$  e o vetor de limiares  $\mathbf{i}^b$ ;
<2> Apresentar vetor inicial de entradas  $\{\mathbf{x}^{(0)}\}$ ;
<3>  $\mathbf{v}^{atual} \leftarrow \mathbf{x}^{(0)}$ ;
<4> Repetir as instruções:
    {
        <4.1>  $\mathbf{v}^{anterior} \leftarrow \mathbf{v}^{atual}$ ;
        <4.2>  $\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{W} \cdot \mathbf{v}^{anterior} + \mathbf{i}^b$ ; {conforme (3)}
        <4.3>  $\mathbf{v}^{atual} \leftarrow g(\mathbf{u})$ ; {conforme (4)}
    }
    Até que:  $\mathbf{v}^{atual} \cong \mathbf{v}^{anterior}$ 
<5>  $\mathbf{v}^{final} \leftarrow \mathbf{v}^{atual}$  { $\mathbf{v}^{final}$  representa um ponto de equilíbrio}
Fim { Algoritmo Hopfield – Operação em Tempo Discreto}
    
```

18

5. Projeto de Redes de Hopfield

Implementação em hardware

- A facilidade de implementação em hardware é também uma das atrações da rede de Hopfield, em que os neurônios são modelados por AO's.



19

Fim da Apresentação



20