

FOTÓNICA Y FIBRAS ÓPTICAS

TRABAJO 1

Rafael Ángel Casalins Hernández

Universidad Nacional de Colombia, Medellín – Antioquia, Colombia

e-mail: rcasalins@unal.edu.co

I. INTRODUCCIÓN

En este documento se pretende analizar la propagación de la luz a través de una guía de onda plana simetría con las siguientes características:

$$n_{co} = 1.5$$

$$n_{cl} = 1.0$$

$$h = 1\mu m$$

$$\lambda_0 = 1\mu m$$

Para ellos se analizará cómo se propagan los campos eléctricos y magnéticos en los modos TE y TM, a través de un análisis geométrico y, también, uno ondulatorio.

II. RESUMEN DE LA TEORÍA

Los modos en los que se puede propagar la luz en una guía de onda hacen alusión a las direcciones permitidas que puede tomar la luz para poder atravesar la totalidad de la guía de onda por reflexión total interna. Dado que el campo eléctrico y magnético poseen propiedades diferentes, por estar sujetos a leyes distintas (plasmado en las leyes de Maxwell), experimentan reflexión total interna en ángulos diferentes, por lo que se debe hacer la distinción entre modos TE (Transverse Electric, siendo el campo eléctrico perpendicular al plano xz) y modos TM (Transverse Magnetic, con el campo magnético perpendicular al plano xz). Para conocer las características de estos modos se puede hacer un análisis geométrico o un análisis ondulatorio, independientemente de cuál se use el resultado será el mismo.

A. Análisis geométrico

1) *Modos TE*: Viendo a la luz como rayos que están siendo refractados por el medio donde están incidiendo, si le suministramos luz en todas las direcciones posibles a una guía de onda, solo podrán propagarse a través de la guía de onda aquellos rayos que cumplan, la condición de reflexión total interna:

$$\theta_c = \sin^{-1} \left[\frac{n_i}{n_t} \sin(\theta_i) \right] \quad (1)$$

Que genera una diferencia de fase en función de los índices de refracción y el ángulo de incidencia:

$$\phi_{TE} = 2 \tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{n_i^2 \sin^2(\theta_i) - n_c^2}}{n_i \cos(\theta_i)} \right] \quad (2)$$

Las trayectorias deseadas para la propagación de la luz

dentro de la guía de onda son las que se muestran en la Fig. 1.

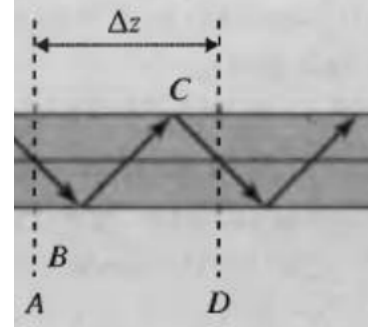


Fig. 1. Trayectoria en zigzag de frente onda

Dado que la trayectoria deseada es aquella donde la luz se refleje en zigzag, es decir, una vez realice dos reflexiones totales internas vuelva a su fase original, para así tener la misma condición inicial y vuelva nuevamente a estar en capacidad de sufrir reflexión total interna de forma recursiva, entonces la diferencia de fase entre los puntos A y D mostrados en la Fig. 1 debe ser múltiplo de 2π . Además, añadiendo la diferencia de fase del trayecto de A hasta D, la diferencia de fase total estaría dada por la siguiente ecuación:

$$\Delta\phi = 2\Delta\phi - 2hk\cos(\theta) = -2m\pi \quad (3)$$

Con estas condiciones puestas y tomando como n_{co} el índice de refracción de núcleo y n_{cl} el índice de refracción del recubrimiento, los modos TE se podrían encontrar como solución de la siguiente ecuación trascendental:

$$hk_0 n_{co} \cos(\theta_m) = m\pi + 2 \tan^{-1} \left(\frac{[n_i^2 \sin^2(\theta_m) - n_{cl}^2]^{1/2}}{n_{co} \cos(\theta_m)} \right) \quad (4)$$

2) *Modos TM*: Un tratamiento similar se realiza con los modos TM en el análisis geométrico, sin embargo, la diferencia de fase para el campo magnético en reflexión total interna difiere un poco, como lo muestra la ecuación (5).

$$\phi_{TE} = 2 \tan^{-1} \left[\frac{n_i^2 \sqrt{n_i^2 \sin^2(\theta_i) - n_c^2}}{n_c^2 n_i \cos(\theta_i)} \right] \quad (5)$$

Por tanto, en esta ocasión la ecuación de dispersión quedaría con la siguiente estructura:

$$hk_0 n_{co} \cos(\theta_m) = m\pi + 2 \tan^{-1} \left(\frac{n_{co}^2 [n_{co}^2 \sin^2(\theta_m) - n_{cl}^2]^{1/2}}{n_{cl}^2 n_{co} \cos(\theta_m)} \right) \quad (6)$$

B. Análisis ondulatorio

1) *Modos TE*: En el análisis ondulatorio se parte de que la onda confinada en la guía de onda es monocromática:

$$\vec{E}(r,t) = \vec{E}(r) \exp^{j\omega t} \quad (7)$$

Y con ella se resuelve la ecuación de Helmholtz, teniendo en cuenta que la variación de índice refracción solo ocurre en la dirección del eje x:

$$\frac{d^2 \vec{E}(x)}{dx^2} + (n_i^2 k_0^2 - \beta^2) \vec{E}(x) = 0 \quad (8)$$

Luego, teniendo en cuenta que en los modos TE el campo eléctrico es perpendicular al plano xz:

$$\vec{E}_x = \vec{E}_z = 0 \quad (9)$$

$$\vec{E}_y \neq 0 \quad (10)$$

Por lo que la ecuación de Helmholtz quedaría:

$$\frac{d^2 \vec{E}_y(x)}{dx^2} + (n_i^2 k_0^2 - \beta^2) \vec{E}_y(x) = 0 \quad (11)$$

Que da como resultado para:

$$\vec{E}_y(x) = \begin{cases} A \exp^{-\alpha_x(x-h)} & \text{si } x > h \\ B \cos(k_x x) + C \sin(k_x x) & \text{si } 0 \leq x \leq h \\ D \exp^{\alpha_x x} & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (12)$$

Tal que:

$$\alpha_x = \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_2^2} \quad (13)$$

$$k_x = \sqrt{k_0^2 n_1^2 - \beta^2} \quad (14)$$

Finalmente con las condiciones de frontera para que $E_y(x)$ se continúe en las interfaces:

$$1. \quad E_{y2} = E_{y1}|_{x=h} \quad \frac{\delta E_{y2}}{\delta x} = \frac{\delta E_{y1}}{\delta x}|_{x=h} \quad (15)$$

El campo eléctrico en modos TE quedaría con una sola constante:

$$\vec{E}_y(x) = \begin{cases} D \left[\cos(k_x h + \frac{\alpha_x}{k_x} \sin(k_x h)) \right] \exp^{-\alpha_x(x-h)} & x > h \\ D \left[\cos(k_x x) + \frac{\alpha_x}{k_x} \sin(k_x x) \right] & 0 \leq x \leq h \\ D \exp^{\alpha_x x} & x < 0 \end{cases} \quad (16)$$

Donde la constante de propagación puede calcularse a través de la siguiente ecuación trascendental, resultante del proceso encontrar las constantes del campo:

$$\tan(k_x h) = \frac{2\alpha_x}{k_x \left(1 - \frac{\alpha_x^2}{k_x^2} \right)} \quad (17)$$

2) *Modos TM*: Un análisis similar se puede usar para encontrar el campo magnético perpendicular al xz, pero difiriendo en las condiciones de frontera y, por tanto, en la estructura final del campo:

$$H_{y2} = H_{y1}|_{x=h} \quad \frac{n_{co}^2}{n_{cl}^2} \frac{\delta H_{y2}}{\delta x} = \frac{\delta H_{y1}}{\delta x}|_{x=h} \quad (18)$$

Por lo que la ecuación trascendental en esta ocasión sería:

$$\tan(k_x h) = \frac{2\alpha_x \frac{n_{co}^2}{n_{cl}^2}}{k_x \left(1 - \frac{n_{co}^4}{n_{cl}^4} \frac{\alpha_x^2}{k_x^2} \right)} \quad (19)$$

Y el campo magnético H_y :

$$H_y(x) = \begin{cases} D \left[\cos(k_x h + \frac{n_{co}^2 \alpha_x}{n_{cl}^2 k_x} \sin(k_x h)) \right] \exp^{-\alpha_x(x-h)} & x > h \\ D \left[\cos(k_x x) + \frac{n_{co}^2 \alpha_x}{n_{cl}^2 k_x} \sin(k_x x) \right] & 0 \leq x \leq h \\ D \exp^{\alpha_x x} & x < 0 \end{cases} \quad (20)$$

III. METODOLOGÍA

Para poder conocer los modos TE y TM que se pueden propagar a través de la guía onda mencionada, se realizó primeramente un análisis geométrico y también uno ondulatorio, resolviendo la ecuación trascendental de distintas pero siempre usando el método numérico de Newton.

A. Análisis geométrico

1) *Modos TE*: Para resolver la ecuación trascendental (4), se hizo uso de la frecuencia normalizada y el índice de guía de onda normalizado para simplificar la ecuación y conocer de forma mas intuitiva el dominio de la función:

$$V = hk_0 \sqrt{n_{co}^2 - n_{cl}^2} \quad (21)$$

$$b = \frac{n_{ef}^2 - n_{cl}^2}{n_{co}^2 - n_{cl}^2} \quad (22)$$

Por lo que la ecuación resultante es:

$$V(1-b)^{1/2} - m\pi - 2 \tan^{-1} \left[\left(\frac{b}{1-b} \right)^{1/2} \right] = 0 \quad (23)$$

Para poder conocer donde se ubican las raíces la ecuación y el numero de ellos se graficaron las funciones involucradas en ella:

$$S(b) = V(1-b)^{1/2} \quad (24)$$

$$R(b) = m\pi + 2\tan^{-1} \left[\left(\frac{b}{1-b} \right)^{1/2} \right] \quad (25)$$

Lo que mostró que solo existen 3 modos TE; el fundamenta, 1 y 2; como se puede apreciar en la Fig. 2.

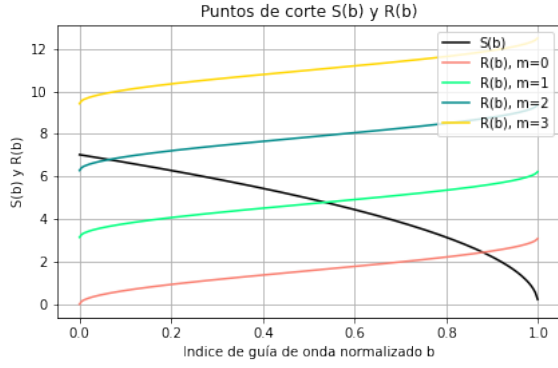


Fig. 2. Puntos de corte S(b) y R(b)

Posteriormente se aplicó el método de Newton para encontrar las raíces de cada modo, y con ellas, el índice de refracción efectiva, la constante de propagación y el ángulo correspondiente a cada modo.

2) *Modos TM*: En el caso de la ecuación trascendental (6) no se hizo de la frecuencia normalizada ni el índice de onda normalizado, sino que se halló el ángulo correspondiente a cada modo directamente de la ecuación trascendental original.

De la misma forma, se graficaron las dos funciones en la compuesta la ecuación para conocer el intervalo donde se encuentran los ceros:

$$F(\theta_m) = hk_0 n_{co} \cos(\theta_m) \quad (26)$$

$$G(\theta_m) = m\pi + 2\tan^{-1} \left(\frac{n_{co}^2 [n_{co}^2 \sin^2(\theta_m) - n_{cl}^2]^{1/2}}{n_{cl}^2 n_{co} \cos(\theta_m)} \right) \quad (27)$$

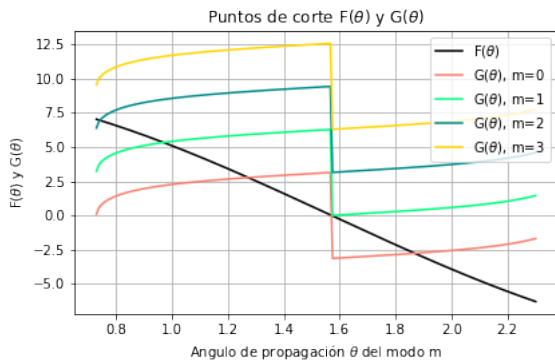


Fig. 3. Puntos de corte F( ) y G( )

En la gráfica resultante pareciera que el modo fundamental tuviera 3 puntos de corte, el primero dos y el segundo uno.

Sin embargo, las líneas verticales son en realidad puntos de discontinuidad de la función, es decir, el limite de la función cuando tiene a ese punto toma un valor diferente por la derecha y por la izquierda, pero el algoritmo une los puntos, por tanto, el modo fundamental tiene dos raíces y el primero y el segundo una. Si bien el modo fundamental tiene dos raíces, ambas raíces son el mismo ángulo en diferentes cuadrantes, por lo que solo se propagará en una dirección.

Por último se aplicó el método de Newton para encontrar los ceros correspondientes.

B. Análisis ondulatorio

1) *Modos TE*: Para encontrar los modos TE a través del metodo ondulatorio se us  la ecuación de dispersión (17), se graficarán las funciones involucradas, se hallaron las constantes de propagación por el metodo de Newton y, con ellas, el índice de refracción efectivo y el ángulo correspondiente a cada modo.

$$J(\beta) = \tan[(k_0^2 n_{co}^2 - \beta^2)^{1/2} h] \quad (28)$$

$$L(\beta) = \frac{2(\beta^2 - k_0^2 n_{cl}^2)^{1/2}}{(k_0^2 n_{co}^2 - \beta^2)^{1/2} \left(1 - \frac{\beta^2 - k_0^2 n_{cl}^2}{k_0^2 n_{co}^2 - \beta^2} \right)} \quad (29)$$

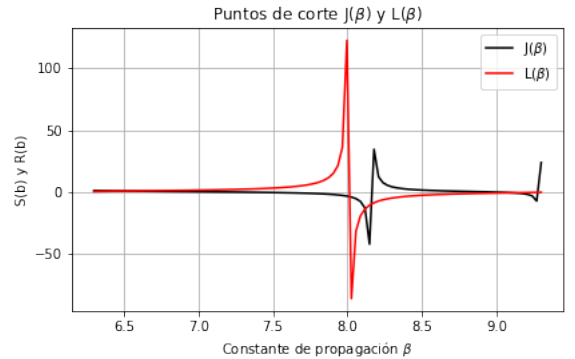


Fig. 4. Puntos de corte J( ) y L( )

2) *Modos TM*: Para los modos TM se realizó exactamente el mismo procedimiento que para los modos TE, pero con la ecuación de dispersión (19)

$$Q(\beta) = \tan(k_x h) \quad (30)$$

$$W(\beta) = \frac{2\alpha_x \frac{n_{co}^2}{n_{cl}^2}}{k_x \left(1 - \frac{n_{co}^4}{n_{cl}^4} \frac{\alpha_x^2}{k_x^2} \right)} \quad (31)$$

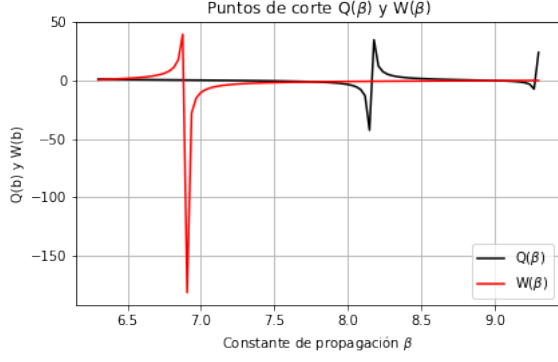


Fig. 5. Puntos de corte $Q(\beta)$ y $W(\beta)$

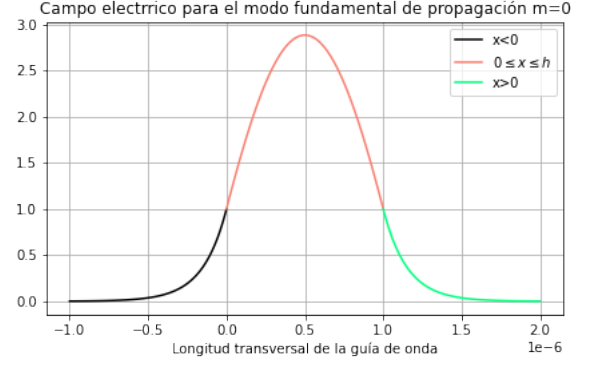


Fig. 6. Campo electrico para el modo fundamental de propagación $m=0$

IV. RESULTADOS

A. Modos TE

Los modos TE encontrados por el método geométrico fueron iguales a los encontrados por el método ondulatorio y se resumen en la siguiente tabla:

TABLE I
Modos TE

Modo	Angulo	$\beta \times 10^6$	n_{eff}
0	75.033682°	9.105069	1.449117
1	59.491495°	8.119953	1.292331
2	43.860369°	6.530459	1.039355

B. Modos TM

De la misma, por el método geométrico y ondulatorio se encontraron los mismos TM, esbozados en la siguiente tabla:

TABLE II
Modos TM

Modo	Angulo	$\beta \times 10^6$	n_{eff}
0	72.937111°	9.009930	1.433975
1	55.572800°	7.773983	1.237268
2	42.537806°	6.371871	1.014115

C. Campos TE y TM

Con las características de los modos, mostradas en las tablas anteriores, se pueden modelar los campos eléctricos E_y y magnéticos H_y de cada modo usando las ecuaciones (16) y (20) respectivamente, tomando la constante $D=1$, para conocer la morfología del campo.

Primer modo (impar):

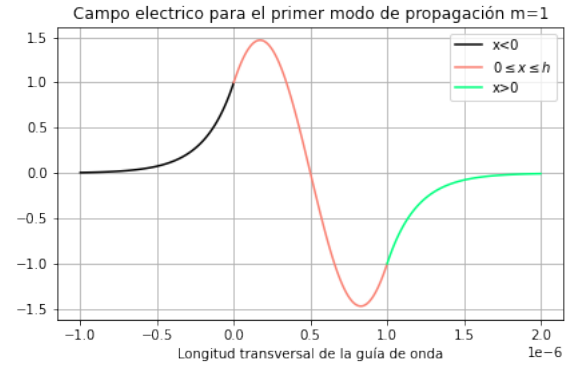


Fig. 7. Campo electrico para el primer modo de propagación $m=1$

Segundo modo (par):

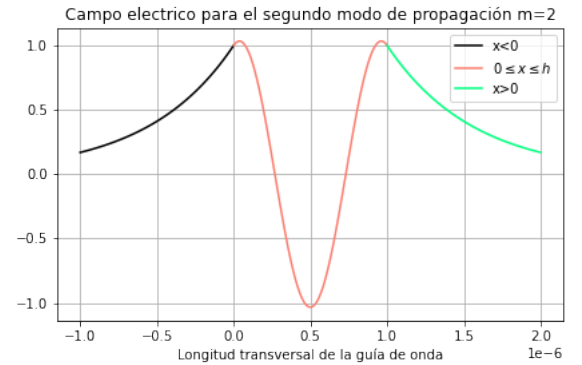


Fig. 8. Campo electrico para el segundo modo de propagación $m=1$

1) Campo E_y de modos TE: Modo fundamental (par):

2) Campo H_y de modos TM: Modo fundamental (par):

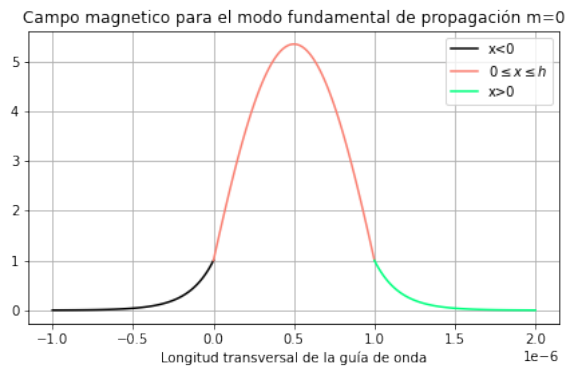


Fig. 9. Campo magnetico para el modo fundamental de propagación $m=0$

Primer modo (impar):

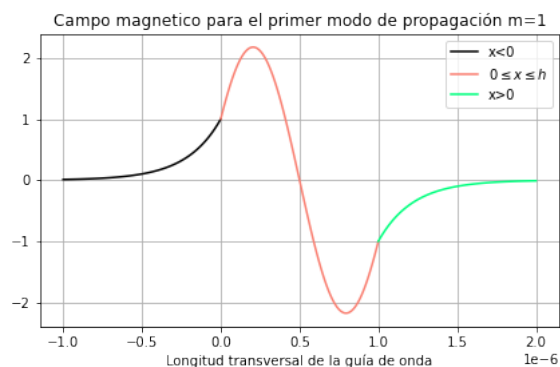


Fig. 10. Campo magnetico para el primer modo de propagación $m=1$

Segundo modo (par):

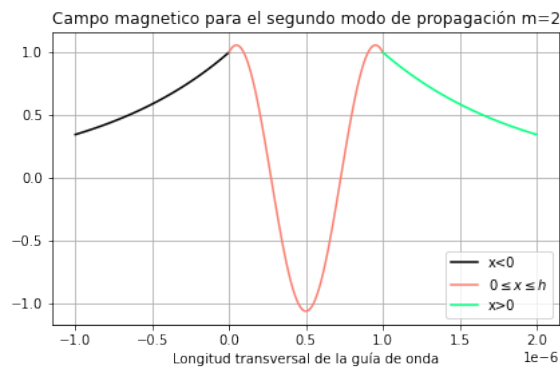


Fig. 11. Campo magnetico para el segundo modo de propagación $m=2$

V. CONCLUSIONES

- Los parámetros que caracterizan cada modo de propagación se pueden hallar de distintas formas, sin embargo, a la hora de encontrar los ceros resulta mucho mas fácil trabajar con funciones normalizadas, porque se tiene una idea mas intuitiva de su dominio.
- La diferencia morfológica y numérica entre el campo H_y y E_y es realmente baja, sin embargo por la naturaleza del campo y por esta pequeña diferencia, podría ser de interés tecnológico su diferenciación.

- Dado que en la guía de onda suministrada para el desarrollo de ese escrito solo posee 3 modos TE y 3 TM, las perdidas energéticas al ser iluminada por luz en todas las direcciones serían enormes.

VI. ANEXOS

Los anexos se presentan en la siguiente pagina

Trabajo_uno_PDF

April 17, 2022

1 Trabajo 1 - Fotónica y fibras ópticas

```
[1]: import numpy as np
from Zeros import *
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
```

1.1 Metodo de rayos

1.1.1 Modos TE:

Resolver la ecuación trascendental:

$$hk_0 n_{co} \cos(\theta_m) = m\pi + 2 \tan^{-1} \left(\frac{[n_{co}^2 \sin^2(\theta_m) - n_{cl}^2]^{1/2}}{n_{co} \cos(\theta_m)} \right)$$

Con los siguientes parametros:

$$n_{co} = 1.5$$

$$n_{cl} = 1.0$$

$$h = 1\mu m$$

$$\lambda_0 = 1\mu m$$

Obtenemos que la siguiente ecuación trascendental:

$$V(1-b)^{1/2} = m\pi + 2 \tan^{-1} \left[\left(\frac{b}{1-b} \right)^{1/2} \right]$$

Para resolver la ecuación trascendental anterior, se hallaran los ceros de la siguiente función:

$$V(1-b)^{1/2} - m\pi - 2 \tan^{-1} \left[\left(\frac{b}{1-b} \right)^{1/2} \right] = 0$$

Para conocer graficamente los intervalos donde se encuentran las raices mencionadas se observara la intersección de las siguientes dos funciones:

$$S(b) = V(1 - b)^{1/2}$$

$$R(b) = m\pi + 2\tan^{-1} \left[\left(\frac{b}{1-b} \right)^{1/2} \right]$$

```
[2]: def S(b, V):
      s_operation = V*np.sqrt((1-b))
      return s_operation

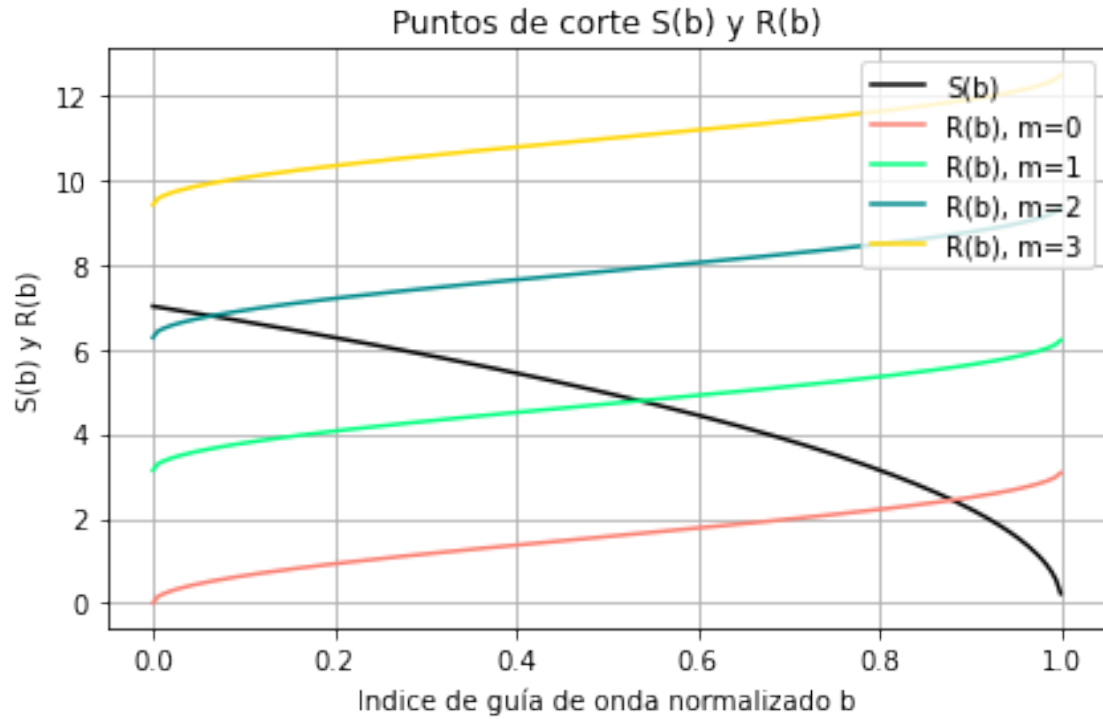
      def R(b,m):
          r_operation = m*np.pi+2*np.arctan(np.sqrt(b/(1-b)))
          return r_operation
```

Teniendo los parametros suministrados:

```
[3]: h, ko, nco, ncl = 10 ** -6, (2*np.pi)/(10 ** -6), 1.5, 1
      v = h*ko*np.sqrt((nco ** 2)-(ncl ** 2))
```

Las intersecciones posibles entre $S(b)$ y $R(b)$ son las que se muestran en la siguiente grafica, es decir, solamente en los modos 0, 1 y 2:

```
[4]: x = np.linspace(0,0.999,200)
      fig, ax = plt.subplots()
      ax.plot(x,S(x,v), label='S(b)', color='black')
      ax.plot(x,R(x,0), label='R(b), m=0', color='#FA8072')
      ax.plot(x,R(x,1), label='R(b), m=1', color='#00FF7F')
      ax.plot(x,R(x,2), label='R(b), m=2', color='#008B8B')
      ax.plot(x,R(x,3), label='R(b), m=3', color='#FFD700')
      ax.set(xlabel='Indice de guía de onda normalizado b', ylabel='S(b) y R(b)',
             title='Puntos de corte S(b) y R(b)')
      ax.grid()
      plt.legend(loc='upper right')
      fig.tight_layout()
      plt.savefig('Puntos de corte S(b) y R(b).png')
      plt.show()
```



Aplicando el metodo de Newton para encontrar las raices 0, 1 y 2:

```
[5]: def tras(b,V,m):
      g = V*np.sqrt((1-b)) - (m*np.pi+2*np.arctan(np.sqrt(b/(1-b))))
      return g
```

```
[6]: def m_0(b):
      g = tras(b,v,0)
      return g

      def m_1(b):
          g = tras(b,v,1)
          return g

      def m_2(b):
          g = tras(b,v,2)
          return g

      def m_3(b):
          g = tras(b,v,3)
          return g
```

```
[7]: m_00, m_01, m_02 = Newton(m_0, 0.5), Newton(m_1, 0.5), Newton(m_2, 0.5)
      print('Raiz m=0: ', m_00, ',raiz m=1: ', m_01, 'y raiz m=2: ', m_02)
```


Raiz m=0: 0.8799514025795133 ,raiz m=1: 0.5360949519999546 y raiz m=2: 0.0642068778129875

Comprobando la inexistencia de la raiz m=3:

Newton(m_3, 0.8)

Encontrando el angulo, indice de refracción efectivo y la constante de propagación del modo m:

```
[8]: def param(b):
    angulo = np.arcsin(np.sqrt((b*((nco ** 2) - (ncl ** 2)) + (ncl ** 2)) /
    ↪(nco ** 2)))
    indice_refectivo = nco * np.sin(angulo)
    c_propagacion = ko * nco * np.sin(angulo)
    return angulo, indice_refectivo, c_propagacion

ang_00, in_re_00, c_prop_00 = param(m_00)
ang_01, in_re_01, c_prop_01 = param(m_01)
ang_02, in_re_02, c_prop_02 = param(m_02)

df = pd.DataFrame()
df['Modo'] = [0 ,1 ,2]
df['Angulo'] = [np.degrees(ang_00), np.degrees(ang_01), np.degrees(ang_02)]
df['Indice de refracción efectivo'] = [in_re_00, in_re_01, in_re_02]
df['Constante de propagación'] = [c_prop_00, c_prop_01, c_prop_02]
df
```

```
[8]:      Modo      Angulo  Indice de refracción efectivo  Constante de propagación
0      0  75.033682                1.449117                9.105069e+06
1      1  59.491495                1.292331                8.119953e+06
2      2  43.860369                1.039355                6.530459e+06
```

1.1.2 Modos TM:

Resolver la ecuación trascendental:

$$hk_0 n_{co} \cos(\theta_m) = m\pi + 2 \tan^{-1} \left(\frac{n_{co}^2 [n_{co}^2 \sin^2(\theta_m) - n_{cl}^2]^{1/2}}{n_{cl}^2 n_{co} \cos(\theta_m)} \right)$$

Para resolver esta ecuación trascendental se hallan los ceros de la siguiente función:

$$hk_0 n_{co} \cos(\theta_m) - m\pi - 2 \tan^{-1} \left(\frac{n_{co}^2 [n_{co}^2 \sin^2(\theta_m) - n_{cl}^2]^{1/2}}{n_{cl}^2 n_{co} \cos(\theta_m)} \right) = 0$$

Para conocer graficamente los intervalos donde se encuentran las raices mencionadas se observara la intersección de las siguientes dos funciones:

$$F(\theta_m) = hk_0 n_{co} \cos(\theta_m)$$

$$G(\theta_m) = m\pi + 2\tan^{-1} \left(\frac{n_{co}^2 [n_{co}^2 \sin^2(\theta_m) - n_{cl}^2]^{1/2}}{n_{cl}^2 n_{co} \cos(\theta_m)} \right)$$

```
[9]: np.sin(1.570796)
```

```
[9]: 0.99999999999999466
```

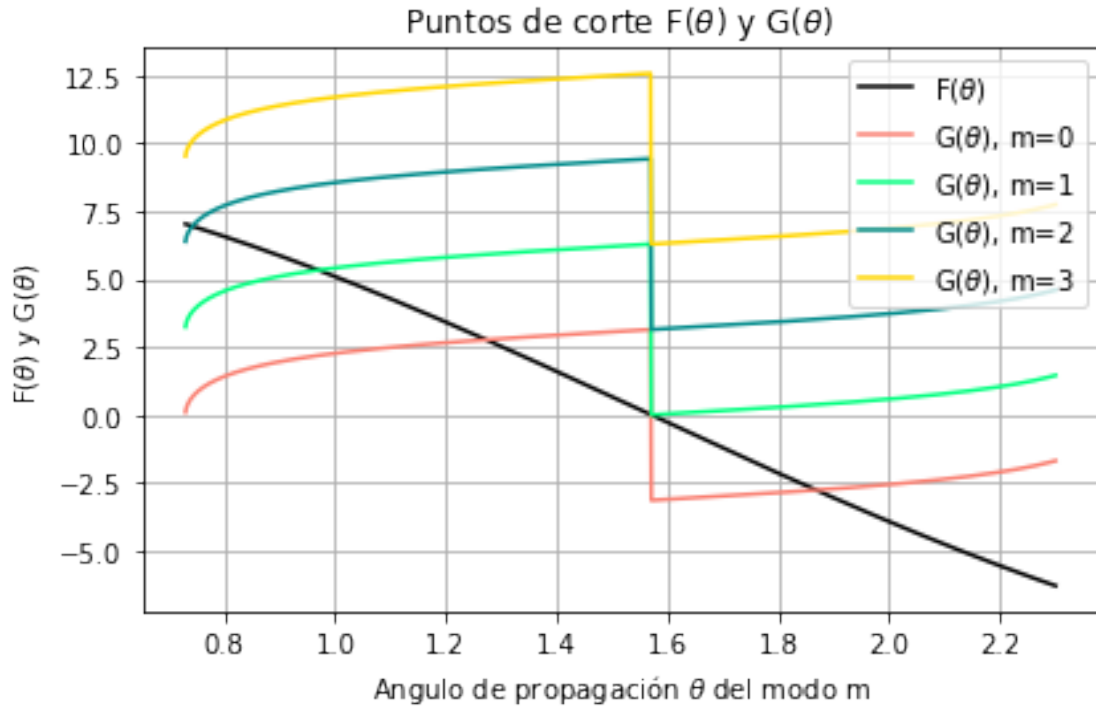
```
[10]: def F(theta):
        f_operation = h*ko*nco*np.cos(theta)
        return f_operation
```

```
[11]: def G(theta, m):
        g_operation = m*np.pi + 2*np.arctan(((nco**2) * (((nco**2)*(np.
        ↪ sin(theta)**2) - (ncl**2))*(1/2)))) / ((ncl**2)*nco*np.cos(theta)))
        return g_operation
```

Las intersecciones posibles entre $S(b)$ y $R(b)$ son las que se muestran en la siguiente grafica, es decir, solamente en los modos 0, 1 y 2:

```
[12]: xx = np.linspace(0.73,np.pi/2+0.73,1000)
fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(xx,F(xx), label= r'F($\theta$)', color='black')
ax.plot(xx,G(xx,0), label= r'G($\theta$), m=0', color='#FA8072')
ax.plot(xx,G(xx,1), label= r'G($\theta$), m=1', color='#00FF7F')
ax.plot(xx,G(xx,2), label= r'G($\theta$), m=2', color='#008B8B')
ax.plot(xx,G(xx,3), label= r'G($\theta$), m=3', color='#FFD700')

ax.set(xlabel=r'Angulo de propagación $\theta$ del modo m',
        ↪ ylabel=r'F($\theta$) y G($\theta$)',
        title=r'Puntos de corte F($\theta$) y G($\theta$)')
ax.grid()
plt.legend(loc='upper right')
fig.tight_layout()
plt.savefig(r'Puntos de corte F($\theta$) y G($\theta$)')
plt.show()
```



Como se puede observar, solo existen propagación en los modos 0, 1 y 2. Parece, según la grafica, que para el primer modo existen 3 soluciones, para el segundo 2 y para el tercero 1; sin embargo, la función en las líneas verticales no es continua, la línea trazada aparece por la unión de los dos valores que toman las graficas en $\pi/2$.

Ahora encontrando las dos soluciones del modo fundamental:

```
[13]: def TM_zeros(theta, m):
      TM_zeros_operation = F(theta) - G(theta,m)
      return TM_zeros_operation
```

```
[14]: def m_0_TM(theta):
      r = TM_zeros(theta,0)
      return r
```

```
[15]: m_TM_00 = Newton(m_0_TM, 1.8), Newton(m_0_TM, 1.2)
      m_TM_00
```

```
[15]: (1.8685999239388174, 1.2729927296509758)
```

Procediendo de la misma forma para el modo de orden 1:

```
[16]: def m_1_TM(theta):
      r = TM_zeros(theta,1)
      return r
```

```
[17]: m_TM_01 = Newton(m_1_TM, 1.8)
      m_TM_01
```

```
[17]: 0.9699283387496284
```

Por último para m=2:

```
[18]: def m_2_TM(theta):
      r = TM_zeros(theta,2)
      return r
```

```
[19]: m_TM_02 = Newton(m_2_TM, 0.73)
      m_TM_02
```

```
[19]: 0.7424247755766693
```

Reportando los angulos en grados en conjunto con el indice de refracción efectivo y la constante propagación:

```
[20]: def param_TM(theta):
      angulo = np.degrees(theta)
      indice_refectivo = nco * np.sin(theta)
      c_propagacion = ko * nco * np.sin(theta)
      return angulo, indice_refectivo, c_propagacion
```

```
[21]: param_TM(m_TM_00[1]), param_TM(m_TM_01), param_TM(m_TM_02)

ang_00_TM, in_re_00_TM, c_prop_00_TM = param_TM(m_TM_00[1])
ang_01_TM, in_re_01_TM, c_prop_01_TM = param_TM(m_TM_01)
ang_02_TM, in_re_02_TM, c_prop_02_TM = param_TM(m_TM_02)

df_TM = pd.DataFrame()
df_TM['Modo'] = [0, 1, 2]
df_TM['Angulo'] = [ang_00_TM, ang_01_TM, ang_02_TM]
df_TM['Indice de refracción efectivo'] = [in_re_00_TM, in_re_01_TM, in_re_02_TM]
df_TM['Constante de propagación'] = [c_prop_00_TM, c_prop_01_TM, c_prop_02_TM]
df_TM
```

```
[21]:      Modo      Angulo  Indice de refracción efectivo  Constante de propagación
0      0  72.937111                1.433975                9.009930e+06
1      1  55.572800                1.237268                7.773983e+06
2      2  42.537806                1.014115                6.371871e+06
```

1.2 Metodo Ondulatorio

1.2.1 Modos TE

Para encontrar el angulo, indice de refracción efectivo y constante propagación de modos TE a través del metodo ondulatorio, se usa la siguiente ecuación trascendental:

$$\tan(k_x h) = \frac{2\alpha_x}{k_x \left(1 - \frac{\alpha_x^2}{k_x^2}\right)}$$

Tal que:

$$\alpha_x = (\beta^2 - k_0^2 n_{cl}^2)^{1/2}$$

$$k_x = (k_0^2 n_{co}^2 - \beta^2)^{1/2}$$

Entonces la ecuación trascendental quedaría con la siguiente estructura:

$$\tan[(k_0^2 n_{co}^2 - \beta^2)^{1/2} h] = \frac{2(\beta^2 - k_0^2 n_{cl}^2)^{1/2}}{(k_0^2 n_{co}^2 - \beta^2)^{1/2} \left(1 - \frac{\beta^2 - k_0^2 n_{cl}^2}{k_0^2 n_{co}^2 - \beta^2}\right)}$$

Por tanto, la ecuación a la que hay que encontrarle sus raíces es:

$$\tan[(k_0^2 n_{co}^2 - \beta^2)^{1/2} h] - \frac{2(\beta^2 - k_0^2 n_{cl}^2)^{1/2}}{(k_0^2 n_{co}^2 - \beta^2)^{1/2} \left(1 - \frac{\beta^2 - k_0^2 n_{cl}^2}{k_0^2 n_{co}^2 - \beta^2}\right)} = 0$$

Graficando la función racional y tangente para observar su intersección y, gracias a esto, suministrar el punto cercano al cero para el metodo numerico de con este:

$$J(\beta) = \tan[(k_0^2 n_{co}^2 - \beta^2)^{1/2} h]$$

$$L(\beta) = \frac{2(\beta^2 - k_0^2 n_{cl}^2)^{1/2}}{(k_0^2 n_{co}^2 - \beta^2)^{1/2} \left(1 - \frac{\beta^2 - k_0^2 n_{cl}^2}{k_0^2 n_{co}^2 - \beta^2}\right)}$$

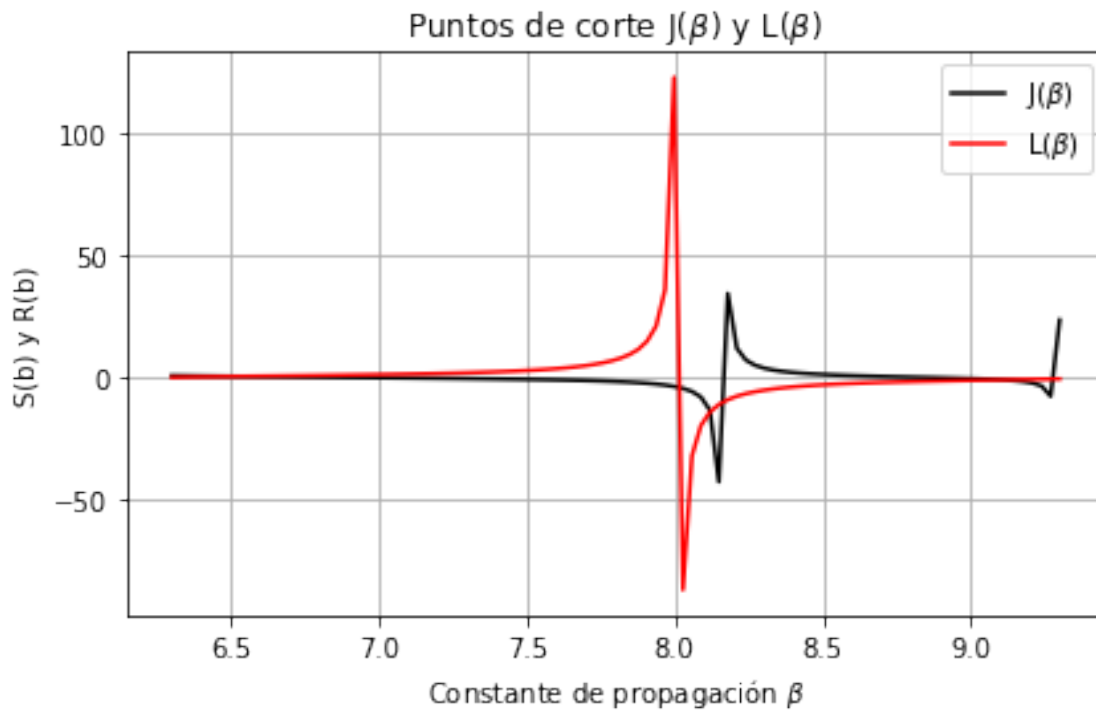
```
[22]: def J(beta):
        j_operation = np.tan(h * (((ko**2)*(nco**2)-((beta * (10 ** 6))**2)) **
        ↪(1/2)))
        return j_operation
```

```
[23]: def L(beta):
        ax = np.sqrt(((beta * (10 ** 6))**2) - (ko**2)*(ncl**2))
        kx = np.sqrt(-((beta * (10 ** 6))**2) + (ko**2)*(nco**2))
        l_operation = (2*ax)/(kx * (1 - (ax**2)/(kx**2)))
        return l_operation
```

```
[24]: (((6.3 * (10 ** 6))**2)-(ko**2)*(ncl**2), (ko**2)*(nco**2)-((9.3 * (10 ** 6))**2))
```

```
[24]: (211582395642.5625, 2336439609804.2344)
```

```
[25]: xxx = np.linspace(6.3,9.3,100)
fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(xxx,J(xxx), label=r'J($\beta$)', color='black')
ax.plot(xxx,L(xxx), label=r'L($\beta$)', color='red')
ax.set(xlabel=r'Constante de propagación $\beta$', ylabel='S(b) y R(b)',
       title=r'Puntos de corte J($\beta$) y L($\beta$)')
ax.grid()
plt.legend(loc='upper right')
fig.tight_layout()
plt.savefig('Puntos de corte J(beta) y L(beta).png')
plt.show()
```



Ahora, aplicando el metodo de Newton para encontrar las raices:

```
[26]: def JL(beta):
      jl_operation = (J(beta) - L(beta))
      return jl_operation
```

```
[27]: Newton(JL,6.4), Newton(JL,8.1), Newton(JL,9)
```

```
[27]: (6.530459403719585, 8.119953392271565, 9.10506885106174)
```

Así la constante propagación, el índice de refracción efectivo y el ángulo en el que se propaga cada modo serían:

```
[28]: def param_TE_wave(prop):
        angulo = np.degrees(np.arcsin((prop * (10**6))/(ko*nco)))
        ang = np.arcsin((prop * (10**6))/(ko*nco))
        in_re = nco*np.sin(ang)
        return angulo, in_re
```

```
[29]: ang_00_TE_wave, in_re_00_TE_wave = param_TE_wave(Newton(JL,9))
        ang_01_TE_wave, in_re_01_TE_wave = param_TE_wave(Newton(JL,8.1))
        ang_02_TE_wave, in_re_02_TE_wave = param_TE_wave(Newton(JL,6.4))

        df_TE_wave = pd.DataFrame()
        df_TE_wave['Modo'] = [0 ,1 ,2]
        df_TE_wave['Angulo'] = [ang_00_TE_wave, ang_01_TE_wave,ang_02_TE_wave]
        df_TE_wave['Indice de refracción efectivo'] = [in_re_00_TE_wave,
        ↪in_re_01_TE_wave, in_re_02_TE_wave]
        df_TE_wave['Constante de propagación x 10^6'] = [Newton(JL,9), Newton(JL,8.1),
        ↪Newton(JL,6.4)]
        df_TE_wave
```

```
[29]:      Modo      Angulo  Indice de refracción efectivo \
0      0  75.033682      1.449117
1      1  59.491495      1.292331
2      2  43.860369      1.039355

      Constante de propagación x 10^6
0      9.105069
1      8.119953
2      6.530459
```

1.2.2 Modos TM

Los modos TM se pueden encontrar con el metodo ondulatorio a través de la siguiente ecuación:

$$\tan(k_x h) = \frac{2\alpha_x \frac{n_{co}^2}{n_{cl}^2}}{k_x \left(1 - \frac{n_{co}^4}{n_{cl}^4} \frac{\alpha_x^2}{k_x^2}\right)}$$

Las raices se encontrarían de la siguiente función:

$$\tan(k_x h) - \frac{2\alpha_x \frac{n_{co}^2}{n_{cl}^2}}{k_x \left(1 - \frac{n_{co}^4}{n_{cl}^4} \frac{\alpha_x^2}{k_x^2}\right)} = 0$$

Graficando la función racional y tangente para observar su intersección y, gracias a esto, suministrar el punto cercano al cero para que el metodo numerico de con este:

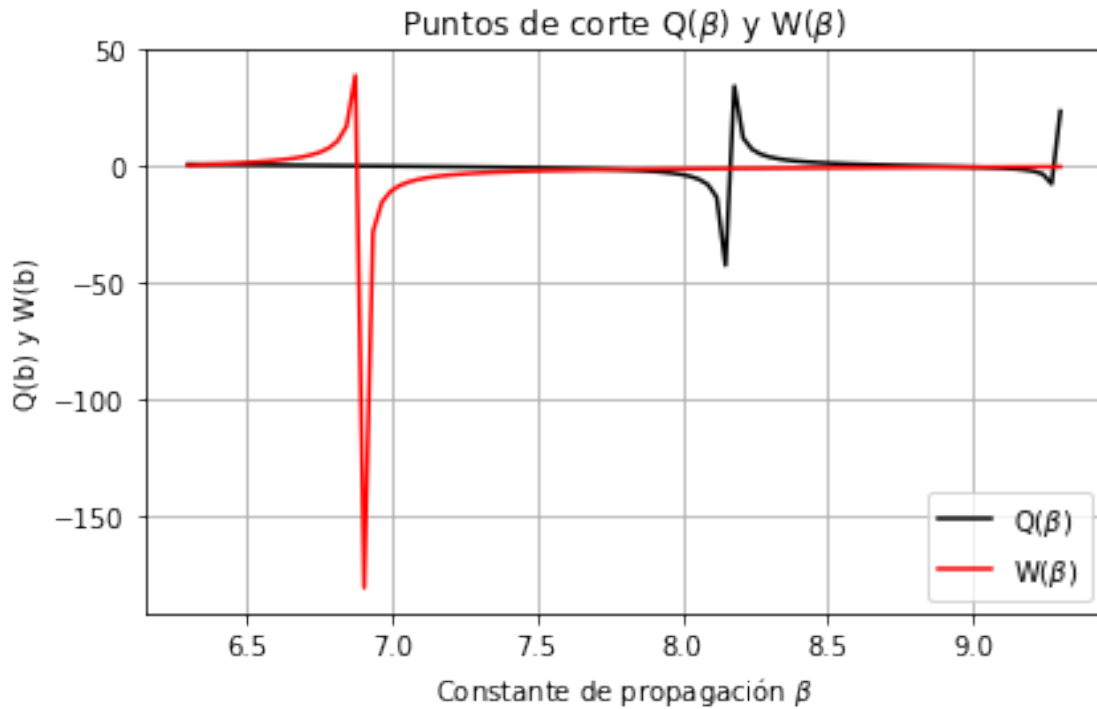
$$Q(\beta) = \tan(k_x h)$$

$$W(\beta) = \frac{2\alpha_x \frac{n_{co}^2}{n_{cl}^2}}{k_x \left(1 - \frac{n_{co}^4}{n_{cl}^4} \frac{\alpha_x^2}{k_x^2}\right)}$$

```
[30]: def Q(beta):
    ax = np.sqrt(((beta * (10 ** 6))**2) - (ko**2)*(ncl**2))
    kx = np.sqrt(-((beta * (10 ** 6))**2) + (ko**2)*(nco**2))
    q_operation = np.tan(kx*h)
    return q_operation

[31]: def W(beta):
    ax = np.sqrt(((beta * (10 ** 6))**2) - (ko**2)*(ncl**2))
    kx = np.sqrt(-((beta * (10 ** 6))**2) + (ko**2)*(nco**2))
    w_operation = (2*ax*((nco**2) / (ncl**2))) / (kx*(1 - ((nco**4) /
↪ (ncl**4))*((ax**2) / (kx**2))))
    return w_operation

[32]: xxxx = np.linspace(6.3,9.3,100)
fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(xxxx,Q(xxxx), label=r'Q($\beta$)', color='black')
ax.plot(xxxx,W(xxxx), label=r'W($\beta$)', color='red')
ax.set(xlabel=r'Constante de propagación $\beta$', ylabel='Q(b) y W(b)',
       title=r'Puntos de corte Q($\beta$) y W($\beta$)')
ax.grid()
plt.legend(loc='lower right')
fig.tight_layout()
plt.savefig('Puntos de corte Q(beta) y W(beta).png')
plt.show()
```

Ahora, aplicando el metodo de Newton para encontrar las raices:

```
[33]: def QW(beta):
        qw_operation = (Q(beta) - W(beta))
        return qw_operation
```

```
[34]: Newton(QW,6.4), Newton(QW,8.1), Newton(QW,9)
```

```
[34]: (6.371871350804092, 7.773982872837435, 9.009930013154761)
```

Así la constante propagación, el indice de refracción efectivo y el angulo en el que se propaga cada modo serían:

```
[35]: def param_TM_wave(prop):
        angulo = np.degrees(np.arcsin((prop * (10**6))/(ko*nco)))
        ang = np.arcsin((prop * (10**6))/(ko*nco))
        in_re = nco*np.sin(ang)
        return angulo, in_re
```

```
[36]: ang_00_TM_wave, in_re_00_TM_wave = param_TM_wave(Newton(QW,9))
        ang_01_TM_wave, in_re_01_TM_wave = param_TM_wave(Newton(QW,8.1))
        ang_02_TM_wave, in_re_02_TM_wave = param_TM_wave(Newton(QW,6.4))

        df_TM_wave = pd.DataFrame()
```

```

df_TM_wave['Modo'] = [0 ,1 ,2]
df_TM_wave['Angulo'] = [ang_00_TM_wave, ang_01_TM_wave,ang_02_TM_wave]
df_TM_wave['Indice de refracción efectivo'] = [in_re_00_TM_wave,
↳in_re_01_TM_wave, in_re_02_TM_wave]
df_TM_wave['Constante de propagación x 10^6'] = [Newton(QW,9), Newton(QW,8.1),
↳Newton(QW,6.4)]
df_TM_wave

```

```

[36]:      Modo      Angulo  Indice de refracción efectivo \
0      0  72.937111      1.433975
1      1  55.572800      1.237268
2      2  42.537806      1.014115

      Constante de propagación x 10^6
0      9.009930
1      7.773983
2      6.371871

```

1.3 Campo electrico y magnetico para los modos TE y TM

1.3.1 Campo electrico

```

[37]: def Field_TE_01(beta, x):
      ax = np.sqrt(((beta * (10 ** 6))**2) - (ko**2)*(ncl**2))
      kx = np.sqrt(-((beta * (10 ** 6))**2) + (ko**2)*(nco**2))
      fte = (np.cos(kx*h)+(ax/kx)*np.sin(kx*h))*np.exp(-ax*(x-h))
      return fte

def Field_TE_02(beta, x):
      ax = np.sqrt(((beta * (10 ** 6))**2) - (ko**2)*(ncl**2))
      kx = np.sqrt(-((beta * (10 ** 6))**2) + (ko**2)*(nco**2))
      fte = np.cos(kx*x)+(ax/kx)*np.sin(kx*x)
      return fte

def Field_TE_03(beta, x):
      ax = np.sqrt(((beta * (10 ** 6))**2) - (ko**2)*(ncl**2))
      kx = np.sqrt(-((beta * (10 ** 6))**2) + (ko**2)*(nco**2))
      fte = np.exp(ax*x)
      return fte

```

Para el modo fundamental:

```

[45]: qq = np.linspace(-1*(10 ** -6),0*(10 ** -6),100)
      ww = np.linspace(0*(10 ** -6),1*(10 ** -6),100)
      ee = np.linspace(1*(10 ** -6),2*(10 ** -6),100)
      fig, ax = plt.subplots()
      ax.plot(qq,Field_TE_03(Newton(JL,9), qq), label= 'x<0', color='black')

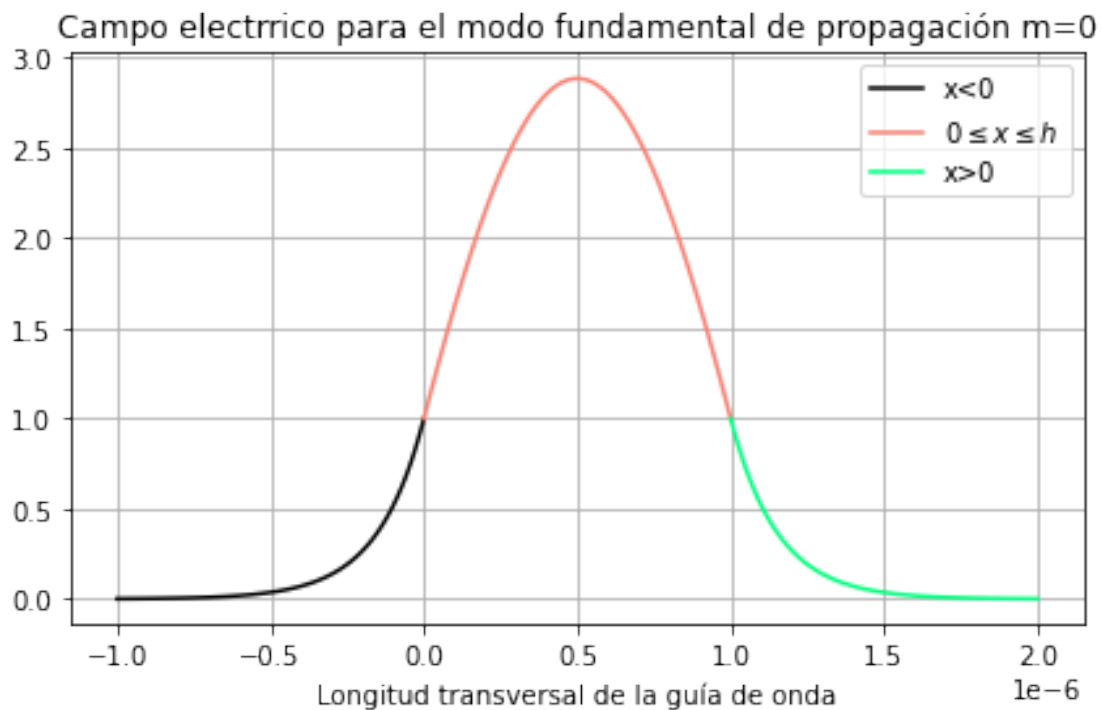
```

```

ax.plot(ww,Field_TE_02(Newton(JL,9), ww), label= r'$0\leq{x}\leq{h}$',
        color='#FA8072')
ax.plot(ee,Field_TE_01(Newton(JL,9), ee), label= 'x>0', color='#00FF7F')

ax.set(xlabel='Longitud transversal de la guía de onda', ylabel='',
        title='Campo electrrrico para el modo fundamental de propagación m=0')
ax.grid()
plt.legend(loc='upper right')
fig.tight_layout()
plt.savefig('Campo electrrrico para el modo fundamental de propagación m=0.png')
plt.show()

```



Para el primer modo:

```

[46]: rr = np.linspace(-1*(10 ** -6),0*(10 ** -6),100)
      tt = np.linspace(0*(10 ** -6),1*(10 ** -6),100)
      yy = np.linspace(1*(10 ** -6),2*(10 ** -6),100)
      fig, ax = plt.subplots()
      ax.plot(rr,Field_TE_03(Newton(JL,8.1), rr), label= 'x<0', color='black')
      ax.plot(tt,Field_TE_02(Newton(JL,8.1), tt), label= r'$0\leq{x}\leq{h}$',
              color='#FA8072')
      ax.plot(yy,Field_TE_01(Newton(JL,8.1), yy), label= 'x>0', color='#00FF7F')

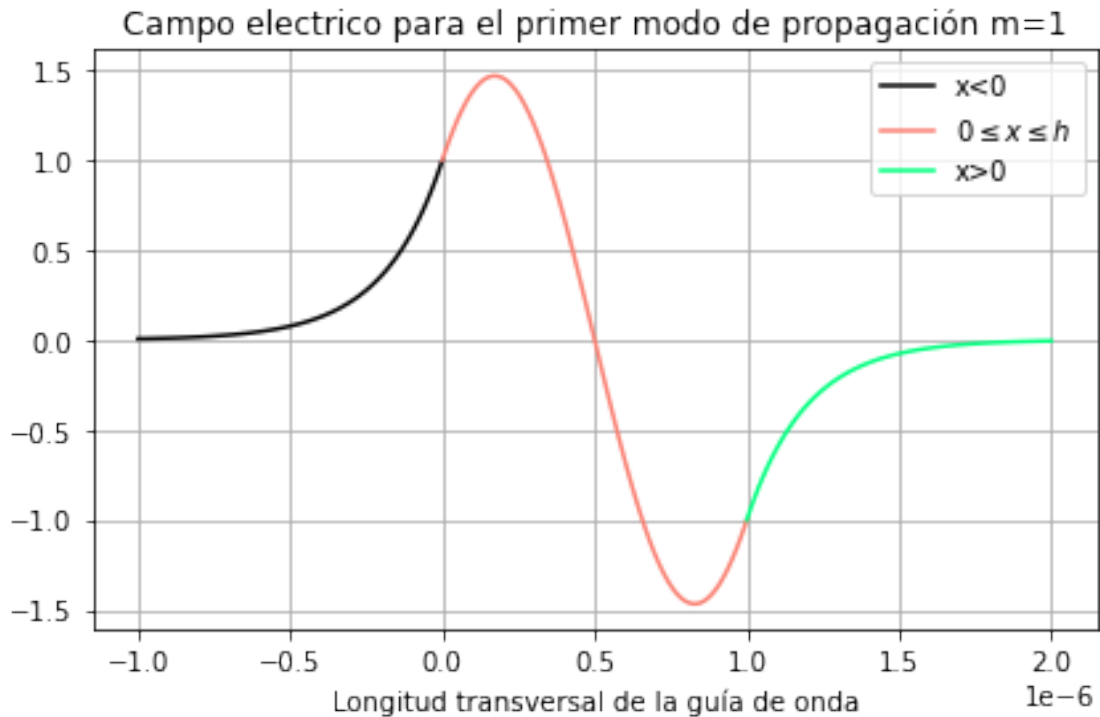
      ax.set(xlabel='Longitud transversal de la guía de onda', ylabel='',

```

```

        title='Campo electrico para el primer modo de propagación m=1')
ax.grid()
plt.legend(loc='upper right')
fig.tight_layout()
plt.savefig('Campo electrico para el primer modo de propagación m=1.png')
plt.show()

```



Para el segundo modo:

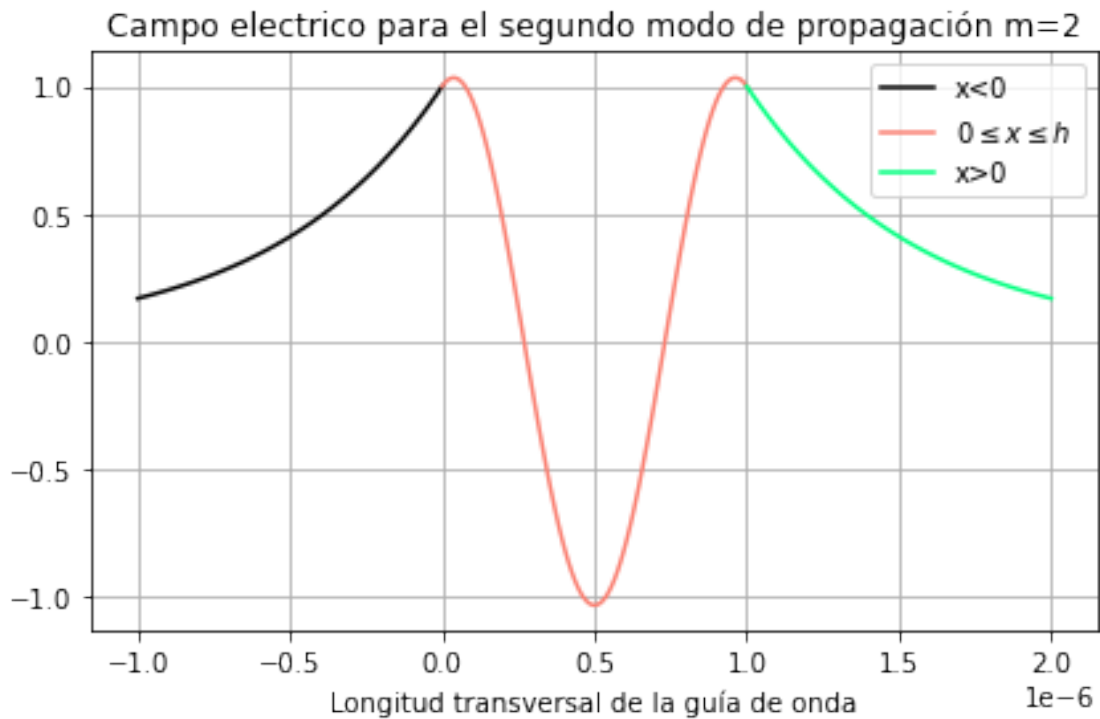
```

[47]: uu = np.linspace(-1*(10 ** -6),0*(10 ** -6),100)
      ii = np.linspace(0*(10 ** -6),1*(10 ** -6),100)
      oo = np.linspace(1*(10 ** -6),2*(10 ** -6),100)
      fig, ax = plt.subplots()
      ax.plot(uu,Field_TE_03(Newton(JL,6.4), uu), label= 'x<0', color='black')
      ax.plot(ii,Field_TE_02(Newton(JL,6.4), ii), label= r'$0\leq x\leq h$',
        ↪color='#FA8072')
      ax.plot(oo,Field_TE_01(Newton(JL,6.4), oo), label= 'x>0', color='#00FF7F')

      ax.set(xlabel='Longitud transversal de la guía de onda', ylabel='',
        title='Campo electrico para el segundo modo de propagación m=2')
      ax.grid()
      plt.legend(loc='upper right')
      fig.tight_layout()

```

```
plt.savefig('Campo electrico para el segundo modo de propagación m=2.png')
plt.show()
```



1.4 Campo magnetico

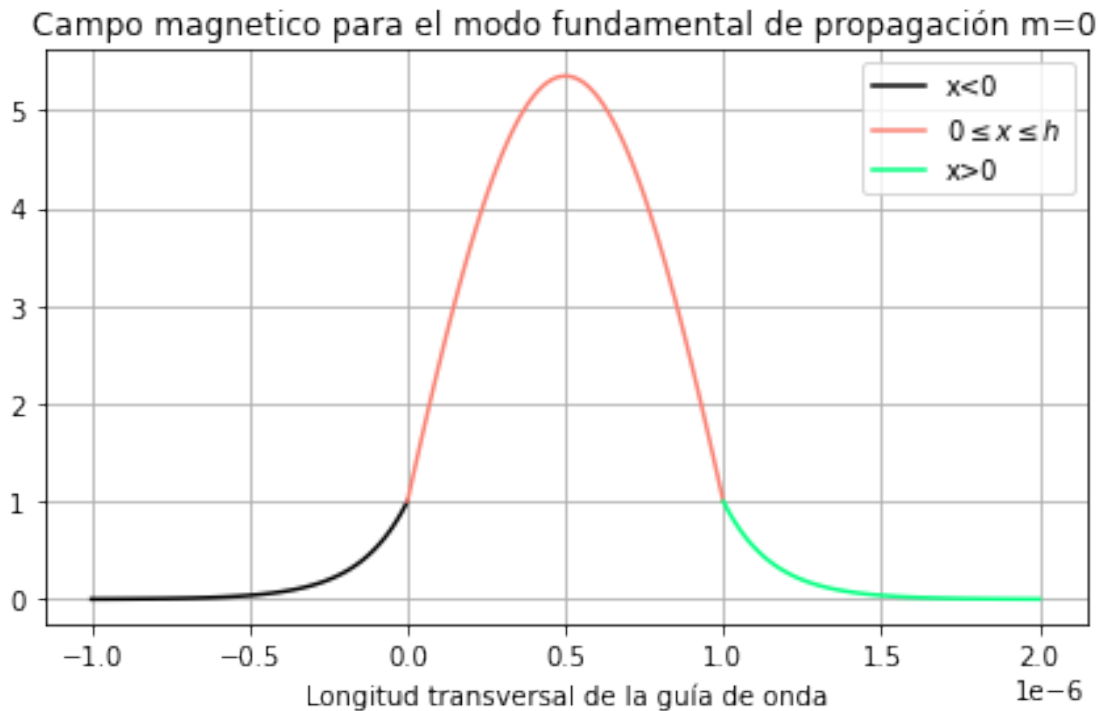
```
[41]: def Field_TM_01(beta, x):
    ax = np.sqrt(((beta * (10 ** 6))**2) - (ko**2)*(ncl**2))
    kx = np.sqrt(-((beta * (10 ** 6))**2) + (ko**2)*(nco**2))
    fte = (np.cos(kx*h)+((nco**2) / (ncl**2))*(ax/kx)*np.sin(kx*h))*np.
    ↪exp(-ax*(x-h))
    return fte

def Field_TM_02(beta, x):
    ax = np.sqrt(((beta * (10 ** 6))**2) - (ko**2)*(ncl**2))
    kx = np.sqrt(-((beta * (10 ** 6))**2) + (ko**2)*(nco**2))
    fte = np.cos(kx*x)+((nco**2) / (ncl**2))*(ax/kx)*np.sin(kx*x)
    return fte

def Field_TM_03(beta, x):
    ax = np.sqrt(((beta * (10 ** 6))**2) - (ko**2)*(ncl**2))
    kx = np.sqrt(-((beta * (10 ** 6))**2) + (ko**2)*(nco**2))
    fte = np.exp(ax*x)
    return fte
```

```
[48]: aa = np.linspace(-1*(10 ** -6),0*(10 ** -6),100)
ss = np.linspace(0*(10 ** -6),1*(10 ** -6),100)
dd = np.linspace(1*(10 ** -6),2*(10 ** -6),100)
fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(aa,Field_TM_03(Newton(QW,9), aa), label= 'x<0', color='black')
ax.plot(ss,Field_TM_02(Newton(QW,9), ss), label= r'$0\leq{x}\leq{h}$',
        color='#FA8072')
ax.plot(dd,Field_TM_01(Newton(QW,9), dd), label= 'x>0', color='#00FF7F')

ax.set(xlabel='Longitud transversal de la guía de onda', ylabel='',
       title='Campo magnetico para el modo fundamental de propagación m=0')
ax.grid()
plt.legend(loc='upper right')
fig.tight_layout()
plt.savefig('Campo magnetico para el modo fundamental de propagación m=0.png')
plt.show()
```



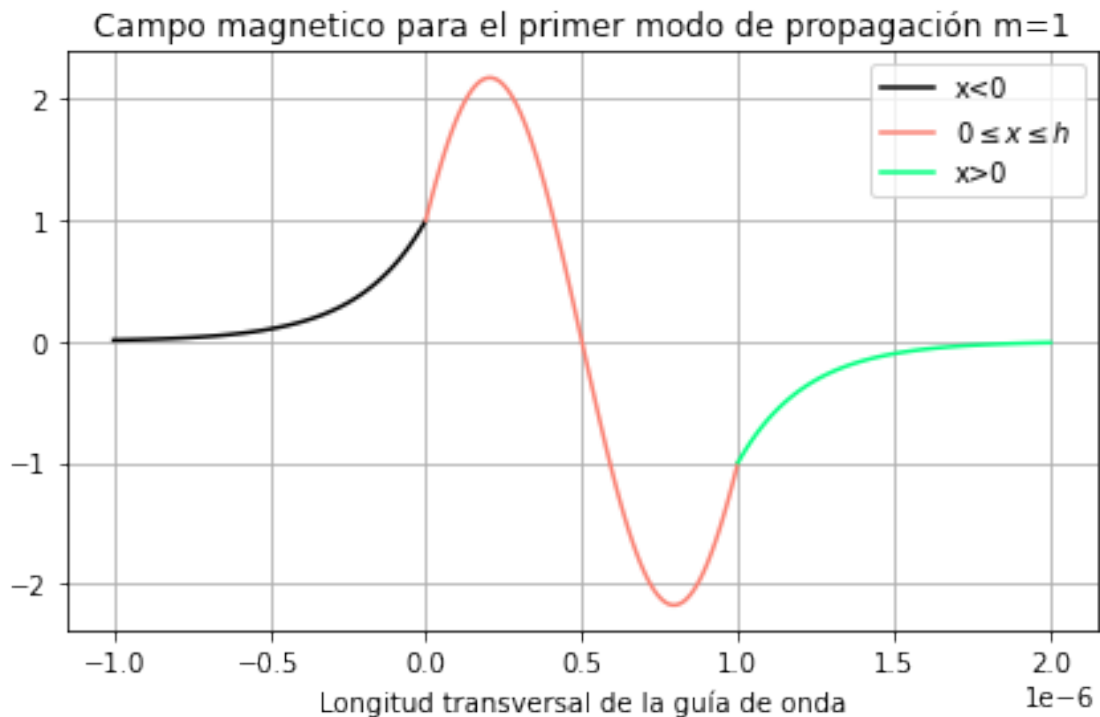
```
[49]: ff = np.linspace(-1*(10 ** -6),0*(10 ** -6),100)
gg = np.linspace(0*(10 ** -6),1*(10 ** -6),100)
hh = np.linspace(1*(10 ** -6),2*(10 ** -6),100)
fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(ff,Field_TM_03(Newton(QW,8.1), ff), label= 'x<0', color='black')
```

```

ax.plot(gg,Field_TM_02(Newton(QW,8.1), gg), label= r'$0\leq x\leq h$',
        color='#FA8072')
ax.plot(hh,Field_TM_01(Newton(QW,8.1), hh), label= 'x>0', color='#00FF7F')

ax.set(xlabel='Longitud transversal de la guía de onda', ylabel='',
        title='Campo magnetico para el primer modo de propagación m=1')
ax.grid()
plt.legend(loc='upper right')
fig.tight_layout()
plt.savefig('Campo magnetico para el primer modo de propagación m=1.png')
plt.show()

```



```

[51]: uu = np.linspace(-1*(10 ** -6),0*(10 ** -6),100)
      ii = np.linspace(0*(10 ** -6),1*(10 ** -6),100)
      oo = np.linspace(1*(10 ** -6),2*(10 ** -6),100)
      fig, ax = plt.subplots()
      ax.plot(uu,Field_TM_03(Newton(QW,6.4), uu), label= 'x<0', color='black')
      ax.plot(ii,Field_TM_02(Newton(QW,6.4), ii), label= r'$0\leq x\leq h$',
        color='#FA8072')
      ax.plot(oo,Field_TM_01(Newton(QW,6.4), oo), label= 'x>0', color='#00FF7F')

      ax.set(xlabel='Longitud transversal de la guía de onda', ylabel='',
        title='Campo magnetico para el segundo modo de propagación m=2')

```

```

ax.grid()
plt.legend(loc='lower right')
fig.tight_layout()
plt.savefig('Campo magnetico para el segundo modo de propagación m=2.png')
plt.show()

```

