

# Torque magnético

Rafael Casas\* and Juan Felipe Camelo\*\*

Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.

(Dated: 16 de febrero de 2024)

## I. INTRODUCCIÓN

Uno de los hitos más importantes en la comprensión del momento magnético fue el descubrimiento de Hans Christian Ørsted de la relación entre electricidad y magnetismo en 1820. Él observó que la corriente eléctrica en el cable era desviada por una aguja magnética cercana, mostrando la conexión entre estos dos. Años después, en el siglo XIX, fue James Clerk Maxwell quien formuló las ecuaciones del electromagnetismo, combinando las teorías del magnetismo y la electricidad en un marco matemático unificado. Sus ecuaciones predijeron la existencia de ondas electromagnéticas. En 1895, Wilhelm Conrad Roentgen descubrió los rayos X, lo que abrió nuevas puertas al estudio de la radiación electromagnética y sentó las bases para técnicas de diagnóstico médico como la radiografía. El estudio más directo del momento magnético y el par magnético comenzó con el trabajo pionero de científicos como Pierre Curie y Pierre Weiss a finales del siglo XIX y principios del XX. [3]

En términos generales, el momento magnético se presenta como una propiedad que caracteriza las propiedades magnéticas de un material. Su función principal radica en proporcionar una comprensión de la manera en que dicho material interactúa con campos magnéticos externos, a la vez que describe el campo magnético generado por imanes. Utilizamos la notación  $\vec{\mu}$  para representar el momento magnético, un vector que encapsula las interacciones mencionadas anteriormente. Este vector no solo refleja la magnitud del momento magnético, sino también su orientación, desempeñando un papel crucial en la comprensión de los fenómenos magnéticos en diversos contextos científicos y tecnológicos[2].

En una perspectiva más detallada, el momento magnético se origina a partir del movimiento de cargas eléctricas dentro de un material, como los electrones en átomos o las corrientes eléctricas en circuitos[3]. Este fenómeno intrínseco confiere al material su capacidad para responder a campos magnéticos externos. El vector  $\vec{\mu}$ , que representa el momento magnético, no solo

encapsula la magnitud de esta propiedad, sino también su dirección, indicando la orientación del material en el campo magnético[1].

Cuando un material con momento magnético se expone a un campo magnético externo, surge el concepto de torque magnético ( $\tau$ ). Este torque ejerce una fuerza que busca alinear el momento magnético del material con la dirección del campo magnético externo. La magnitud del torque magnético se calcula mediante la fórmula  $\tau = \vec{\mu} \times \vec{B}$ , donde  $\vec{B}$  representa el campo magnético externo[3]. Este proceso de alineación es fundamental en la comprensión de fenómenos como la magnetización de materiales y tiene aplicaciones prácticas en tecnologías que van desde la resonancia magnética hasta la fabricación de dispositivos electromagnéticos. Así, el estudio del momento magnético y el torque magnético es esencial para entender cómo los materiales responden y se comportan en entornos magnéticos[4].

Para campos magnéticos uniformes podemos usar la siguiente expresión1, donde la fuerza neta es cero.

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \quad (1)$$

Esto lo podemos comprobar tomando una fuerza  $\vec{F}$ , tal que:

$$\vec{\tau} = A\vec{F} \sin(\theta)\hat{x}$$

Sabemos que la fuerza magnética está dada por:

$$\vec{F} = I\vec{B}\hat{n}$$

Luego podemos reemplazar para obtener:

$$\vec{\tau} = AI\vec{B}\hat{n} \sin(\theta)\hat{x}$$

Pero sabemos que:

$$\vec{\mu} = IA\hat{n}$$

Entonces:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \sin(\theta)\hat{x}$$

Y esta es la definición del producto cruz, luego:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

\* Correo institucional: r.casas@uniandes.edu.co

\*\* Correo institucional: j.camelob@uniandes.edu.co

Si, por el contrario, el campo magnético no es uniforme, tenemos la siguiente ecuación 2.

$$\vec{F} = (\vec{\mu} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \quad (2)$$

Esta ecuación la podemos demostrar de la siguiente forma:

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

$$\nabla U = \nabla(-\vec{\mu} \cdot \vec{B})$$

$$F = \nabla(\vec{\mu} \cdot \vec{B})$$

$$F = (\vec{\mu} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$$

Aparte de la anterior forma de definir el momento magnético, este se puede representar como un bucle de corriente, que sirve para modelar  $\vec{\mu}$  y es una representación equivalente. Para este modelo podemos modelar un bucle circular con área A, corriente  $\vec{\mu}$ , y vector normal  $\hat{n}$  del área[3]. Con lo cual podemos expresar  $\vec{\mu}$  de la siguiente forma.

$$\vec{\mu} = IA\hat{n} \quad (3)$$

Adicionalmente, podemos hablar un poco sobre el experimento que se desarrollara. Vamos a usar un arreglo de dos bobinas de radio r con N vueltas y separadas por una distancia d. Las bobinas las modelaremos como el par de bobinas puede representarse como un par de aros de corriente con un radio equivalente de  $r = 0,109m$  y una distancia entre aros de  $d = 0,138m$ . Y sabiendo que el número de vueltas en cada bobina es de 195. Con esto podemos calcular el campo magnético para cualquier punto z sobre el eje de simetría de las bobinas. Sabemos que este campo viene dado por:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 N I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

Pero como son dos bobinas debemos multiplicar por dos, luego:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 N I a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

Una vez con la ecuación podemos reemplazar los valores conocidos, de  $a = 0.109m$ ,  $z = \frac{0,138}{2}m = 0,069m$ ,  $N = 195$ ,  $I = 1A$  y  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}T \cdot m \cdot A^{-1}$ , luego:

$$\vec{B} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}T \cdot m \cdot A^{-1})195(1A)(0,109m)^2}{((0,069m)^2 + (0,109m)^2)^{3/2}}$$

$$\therefore \vec{B} = 1,356 \times 10^{-3} \frac{T}{A}$$

Además, para ver como cambia el campo a lo largo del eje z, podemos derivarlo con respecto a la misma. Entonces:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial z} = -\frac{3\mu_0 N I a^2 z}{(z^2 + a^2)^{5/2}}$$

Y una vez con los valores conocidos podemos calcularlo de la forma:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial z} = -\frac{3(4\pi \times 10^{-7}T \cdot m \cdot A^{-1})195(1A)(0,109m)^2(0,069)}{((0,069m)^2 + (0,109m)^2)^{5/2}}$$

$$\therefore \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} = 1,68 \times 10^{-2} \frac{T}{A \cdot m}$$

Ahora podemos seguir con otras consideraciones para entender mejor el momento magnético. Tengamos un campo magnético constante en  $\hat{z}$ , en este se encuentra un imán cuyo momento magnético está a un ángulo  $\theta$  de  $\hat{z}$ , por simplicidad imaginemos que este ángulo es suficientemente pequeño tal que  $\sin \theta = \theta$ . Entonces, podemos encontrar las ecuaciones de movimiento de la siguiente forma.

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

Donde hacemos la aproximación que.

$$\tau = \mu B \sin \theta = \mu B \theta$$

Con lo cual podemos usar la segunda ley de newton.

$$\Sigma \tau = \mu B \theta = I \alpha$$

$$\frac{\mu B}{I} \theta - \alpha = 0$$

Como podemos ver, esta ecuación diferencial tomó la forma de un movimiento armónico simple. Con esto en mente hacemos los siguientes remplazos.

$$\omega^2 = \frac{\mu B}{I}$$

$$\alpha = \ddot{\theta}$$

$$\omega^2 \theta - \ddot{\theta} = 0$$

Esta es una ecuación diferencial conocida y sabemos que su solución general está dada de la forma.

$$\theta = C_1 e^{wt} + C_2 t e^{wt} \quad (4)$$

Que es la ecuación de movimiento que buscábamos.

Ahora investiguemos la situación que se da cuando el imán está rotando tal que su momento magnético y su momento de inercia estén alineados. Además, dicho imán se encuentra sobre un campo magnético constante con dirección  $\hat{z}$ , este está puesto tal que el ángulo entre su momento magnético y el campo sea 0. Con lo anterior en mente, podemos encontrar ecuaciones de movimiento que describan este escenario. Recordemos que.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \Sigma\tau$$

Como el único torque es aquel que sale como consecuencia del campo magnético, tenemos que.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \mu B \sin \theta$$

Por la naturaleza del sistema, este solo tendrá un movimiento de precesión. Por lo cual podemos tomar  $\alpha$  como el ángulo de precesión, con lo cual obtenemos la siguiente ecuación.

$$d\alpha = \frac{d\vec{L}}{L \sin \theta}$$

Reorganizando nuestras ecuaciones tenemos que.

$$d\vec{L} = \mu B \sin \theta dt$$

$$d\vec{L} = \mu \alpha L \sin \theta$$

Igualando tenemos.

$$\mu B \sin \theta dt = \mu \alpha L \sin \theta$$

$$\mu B = L \frac{d\alpha}{dt}$$

$$\frac{\mu B}{L} = \frac{d\alpha}{dt}$$

Sea  $\Omega$  la frecuencia angular de precesión, entonces.

$$\Omega = \frac{d\alpha}{dt}$$

Con lo cual obtenemos una ecuación de movimiento, (5) que nos define la frecuencia de precesión del imán dentro del campo magnético dado su momento magnético, su momento angular y el campo magnético.

$$\Omega = \frac{\mu B}{L} \quad (5)$$

## II. OBJETIVOS

- Medir el momento magnético de un sistema utilizando diferentes métodos dinámicos.
- Entender el fenómeno de resonancia magnética nuclear.
- Evidenciar el fenómeno de precesión del vector de momento angular debido a un torque causado por un campo magnético.
- Calcular la fuerza experimentada en un dipolo magnético debido a un campo magnético no uniforme.

## III. MONTAJE EXPERIMENTAL



Figura 1. Esta es una vista general del montaje experimental que usaremos, este será explicado a profundidad más adelante. Aún así, vale la pena aclarar qué es cada unidad; a la izquierda está el estroboscopio 4, en el centro la unidad de control 3 y a la derecha la unidad principal2.

De forma general, el montaje incluye una unidad central equipada con un conjunto de bobinas, en esta unidad pondremos la bola de resina y una torre de plástico que contiene un resorte en su interior, como se muestra en la Figura 22. Además de esta unidad, se dispone de la unidad de control, encargada de regular el suministro de aire a la unidad principal y permitiendo el control del campo magnético generado por las bobinas, según se ilustra en la Figura 33. Por último, se hará uso de un estroboscopio externo que sustituirá al estroboscopio integrado en la unidad principal, este lo podemos ver en la Figura 44.



Figura 2. Esta es la unidad principal, aquí encontramos las bobinas, la bola de resina y la torre con el resorte tal y como vemos en la imagen.



Figura 3. Esta es la unidad de control con la cual regularmos el suministro de aire a la unidad principal, también nos permite controlar el campo que generan las bobinas. Puntualmente, esta unidad también podemos cambiar la dirección del campo y apagar/prender el gradiente del mismo.



Figura 4. Este es el estroboscopio que usaremos durante el experimento, desde este modulo podemos cambiar su frecuencia.

**Actividad 1:** En la primera sección estudiaremos los torques que produce el campo, para esto podemos organizar el montaje tal y como muestra la figura 5 5.

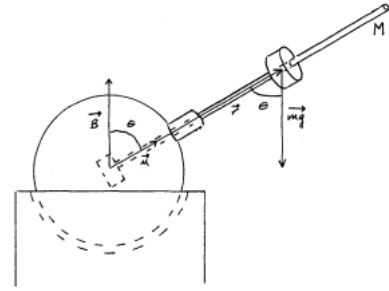


Figura 5. Este diagrama muestra como deberían estar organizados nuestros elementos y las fuerzas principales que están actuando sobre nuestros elementos.

Realizando suma de torques podemos llegar a la siguiente relación. Con parametros  $B$  (campo magentico),  $\mu$  (momento magentico),  $m$  (masa),  $r$  (distancia desde el eje de rotación hasta la ubicación de la pesa),  $M$  (masa de la varilla) y  $d$  (distancia desde el eje de giro hasta el centro de masa de la varilla). la varilla

$$\mu B = rmg + dMg \quad (6)$$

Con esto en mente, podemos empezar a realizar el experimento. Primero, es necesario tomar los datos parámetros que estamos utilizando; el radio de la bola, la masa de la pesa, la longitud de la manija negra. Ahora debemos comprobar que la dirección del campo apunte verticalmente, el gradiente del mismo esté apagado y que la unidad principal esté nivelada.

Habiendo hecho las anteriores vinificaciones, colocamos la masa en la varilla y medimos  $r$ . Ahora aumentamos la fuente de aire, simultáneamente llevamos la corriente a 2A y rotamos la bola tal que la varilla esté a  $90^\circ$  (estabilizar bola). En este paso es necesario que registremos la corriente cuando consigamos equilibrio, con esta corriente nos será posible calcular  $B$ .

Ahora podemos proceder realizar el mismo procedimiento después de cambiar la posición de la masa, con lo cual deberíamos obtener nuevos valores de  $r$  y  $B$ , esto se debería repetir 7 veces. Con los anteriores datos nos debería ser posible realizar una regresión lineal de una gráfica de  $rmg$  contra  $B$ , con lo cual deberíamos poder obtener el momento magnético  $\mu$ .

**Actividad 2:** En esta sección estudiaremos empíricamente las ecuaciones de movimiento que discutimos previamente<sup>4</sup>. Para esto recordemos un par de ecuaciones.

$$\omega^2 = \frac{\mu B}{I} \quad (7)$$

Para nuestro experimento  $I$  representa el momento de inercia de la bola y puede ser expresado de la siguiente

forma.

$$I = \frac{2}{5}MR^2 \quad (8)$$

Y el periodo puede ser expresado así.

$$T^2 = \frac{4\pi^2 I}{\mu B} \quad (9)$$

Antes de comenzar hay un par de consideraciones que deberíamos hacer. Primero, nuestro campo magnético debería apuntar hacia arriba y el gradiente debe estar apagado. Con estas condiciones deberíamos medir masa y el radio de la bola. Ahora podemos prender el aire desde la unidad de control y colocar la bola en la unidad principal.

Nuestra toma de datos comienza eligiendo una corriente entre 1A a 1.5A, después podemos rotar la bola tal que la manija tenga un pequeños desplzamiento contra la vertical. Cuando soltemos la bola esta comenzará a oscilar, cuando esto ocurra debemos anotar la corriente, calcular el campo y contabilizar el tiempo que le toma a la bola hacer 20 oscilaciones, con lo cual después calcularemos el periodo. En procedimiento anterior debe repetirse 10 veces, con lo cual debemso poder hacer una regresión para la grafica de  $T^2$  vs  $1/B$ . Partiendo de nuestra regresión deberíamos poder calcular el momento magnetico  $\mu$  y compararlo con nuestros resultados de la sección 1.

**Actividad 3:** De acuerdo con el punto 4 del ejercicio 1, se determinó que la configuración del experimento induce un tipo de movimiento conocido como precesión. En este contexto, el torque ejercido por el campo magnético es perpendicular al momento angular impartido a la bola mediante una rotación, y por ende, al momento magnético. La frecuencia de precesión obtenida a partir de los cálculos es representada por la ecuación (5), donde  $L_s$  denota el momento angular generado por el giro de la bola.

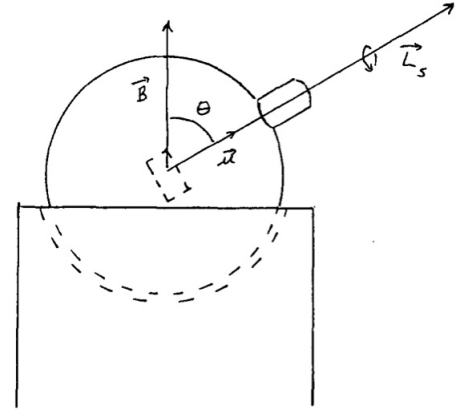


Figura 6. Este diagrama muestra como deberían estar organizados nuestros elementos y las fuerzas principales que están actuando sobre nuestros elementos.

Primero, con el flujo de aire activado y la corriente establecida en 0A, empezamos a girar la bola alrededor del eje definido por la manija negra. Sugerimos que el eje de rotación no esté alineado verticalmente para facilitar la observación del fenómeno de precesión. Y para asegurar la orientación del momento angular en el eje determinado por la manija negra, ajustamos la rotación haciendo que la manija negra hiciera contacto con la uña del dedo hasta alcanzar la posición deseada, como se ilustra en la figura 6.

Una vez perfeccionamos la técnica para girar la bola con el momento angular dirigido en la dirección deseada, medimos la frecuencia de rotación de la bola sobre el eje definido por la manija negra. Para esto, observamos que la manija negra cuenta con un punto blanco en su extremo. Encendimos el estroboscopio y colocamos una frecuencia entre 4Hz y 6Hz, apuntamos nuestra luz hacia la unidad principal, hacia el punto blanco en la manija negra. Y giramos la bola como en el numeral 1 y observamos cómo se veía el punto blanco bajo la luz del estroboscopio. Cuando el punto blanco parecía estático, significaba que la frecuencia de rotación correspondía a la frecuencia del estroboscopio. De ahí, aumentamos la corriente a 1A y tomamos el período de precesión de la bola. Luego, llevamos la corriente a 0A, y volvimos a girar la bola como en el numeral 1, sin cambiar la frecuencia del estroboscopio. Y esperamos a que el punto blanco apareciera estático y aumentamos la corriente a un valor de 1.5A, registrando el período de precesión. Repetimos este procedimiento hasta llegar a una corriente de 4A. Por último, con la corriente y el período de precesión, calculamos el campo magnético y la frecuencia de precesión respectivamente. Para después realizar una gráfica de  $\Omega$  vs  $B$  y usando una regresión lineal calculamos el valor del momento magnético

$\mu$  junto con la incertidumbre. Comparamos los resultados con los anteriores.

#### Actividad 4:

En este experimento, observamos el fenómeno de resonancia magnética utilizando el sistema de imanes acoplado a una base de madera, como se muestra en la figura 7.

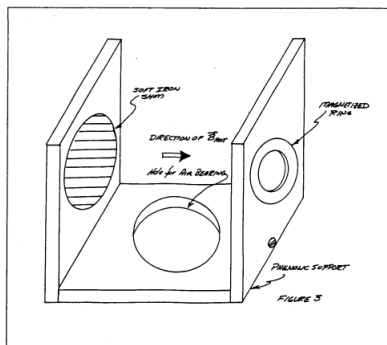


Figura 7. Imanes acoplados a base de madera para el experimento de resonancia magnética

Para que ocurra la resonancia magnética, el objeto en cuestión debe poseer momento angular  $\vec{L}$  y momento magnético  $\vec{\mu}$ . En nuestro caso, la bola de resina. Como se estudió en la actividad anterior, si dicho objeto se somete a un campo magnético constante, se obtiene precesión alrededor del eje definido por la dirección del campo magnético B. Además de este campo constante, se aplicará un campo magnético rotatorio en dirección perpendicular al campo magnético constante.

Empezamos por acoplar el elemento mostrado en la figura 7 en la unidad principal. Luego, con el aire encendido y el gradiente de campo magnético apagado, giramos la bola de resina de manera que su momento angular de espín apunte en el eje definido por la manija negra, como en la actividad anterior. Aumentamos la corriente hasta aproximadamente 2A y observamos el proceso de precesión. Después, giramos los imanes en la base de madera a la frecuencia de precesión (de Larmor) para que la manija negra sea perpendicular al campo magnético generado por los imanes de la base de madera, como se muestra en la figura 8.

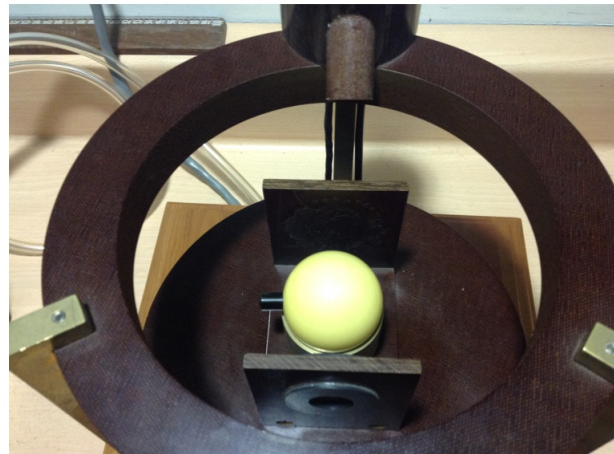


Figura 8. Imanes acoplados a base de madera para el experimento de resonancia magnética

Por último, giramos los imanes en dirección opuesta a la precesión con la frecuencia de Larmor. También los giramos en la misma dirección que la precesión pero a una frecuencia diferente a la de Larmor. Y anotamos y discutimos qué sucede en cada caso.

#### Ejercicio 2:

1. Los campos eléctricos y magnéticos externos pueden afectar la dirección y la intensidad del campo magnético aplicado en el experimento, lo que a su vez podría alterar la precesión de la bola de resina. Por ejemplo, el campo magnético terrestre podría introducir una componente adicional en la dirección del campo magnético aplicado, afectando así la precesión. Por otro lado, la fricción entre la bola de resina y la base puede generar torque que podría afectar la precesión de la bola. Por último, si el campo magnético no es uniforme, puede causar variaciones en la intensidad del campo magnético a lo largo de la trayectoria de la precesión de la bola. Esto podría conducir a una precesión no uniforme o a errores en las mediciones de la frecuencia de precesión.
2. En el mejor de los casos, se debería realizar el experimento en un entorno controlado, lejos de fuentes de campos eléctricos y magnéticos externos. Además, se pueden utilizar blindajes magnéticos para reducir el impacto de campos externos no deseados, como el terrestre. Además, se podrían utilizar materiales con baja fricción, para reducir la misma entre la bola y la base. Por último, se deberían utilizar imanes de alta calidad y diseñados cuidadosamente para que el campo magnético sea lo más uniforme posible. Además, se pueden realizar mediciones en diferentes puntos del campo

magnético para evaluar su uniformidad y corregir cualquier variación detectada.

#### IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS

#### V. CONCLUSIONES

- 
- [1] Castner, T. G. and Känzig, W. (1957). The electronic structure of v-centers. *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, 3(3):178–195.
  - [2] Delbecq, C. J., Smaller, B., and Yuster, P. H. (1958). Optical absorption of  $\text{Cl}_2^-$  molecule-ions in irradiated potassium chloride. *Phys. Rev.*, 111:1235–1240.
  - [3] Jackson, J. D. (1999). *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, New York.
  - [4] Slichter, C. P. (1978). Electron spin resonance. In *Principles of Magnetic Resonance*, pages 294–338. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.

#### APÉNDICE DE CÁLCULO DE ERRORES