

Rayos X

Rafael Casas* and Juan Felipe Camelo**

Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.

(Dated: 16 de febrero de 2024)

En este experimento con rayos X en el cobre, se estudió el espectro característico, identificando líneas K_α y K_β con correcciones en la calibración. Se obtuvieron valores ajustados a la teoría, demostrando exactitud. Se evaluó la atenuación de rayos X en placas de aluminio, observando una relación no lineal, sugiriendo posibles errores en la toma de datos, especialmente para longitudes de onda mayores. Se midió el cambio en la longitud de onda debido al efecto Compton y se analizó el cambio de intensidad del espectro en función del voltaje y corriente del ánodo. Se identificó un máximo de intensidad a 35KV y se determinaron valores de K_α y K_β mediante regresiones lineales. En la última parte, se verificó la ley de desplazamiento de Duane-Hunt, observando la ley pero con significativo ruido. El intento de calcular la constante de Planck resultó en un valor alejado de la realidad, atribuido al ruido experimental. Se sugiere una toma de datos más extensiva o métodos para minimizar el ruido para obtener valores más precisos.

I. INTRODUCCIÓN

Los rayos X son una forma de radiación electromagnética descubierta a finales del siglo XIX por Wilhelm Conrad Röntgen, este descubrimiento impulsó numerosas investigaciones a principios del siglo XX, que a su vez llevaron a los descubrimientos de la difracción de los rayos X causada por cristales, que fue fundamental para la espectrografía de rayos X [3].

Físicamente, los rayos X se producen como consecuencia de desacelerar partículas eléctricamente cargada con metales. El efecto anteriormente mencionado se puede reproducir utilizando una diferencia de potencial, U_A , entre un cátodo y ánodo, con la cual se logra acelerar un electrón para que así impacte contra el ánodo. Puntualmente, los rayos X se producen ya sea cuando se frena bruscamente dicho electrón con el material del ánodo, y los rayos X emitidos en este proceso se conocen como radiación de frenado o *Bremsstrahlung* y producen un espectro continuo. O el otro proceso es cuando el electrón tiene suficiente energía para desprender un electrón interno del material, con lo cual un electrón externo baja de nivel de energía y produce rayos X en el proceso. Y a estos se les llaman *Rayos X característicos* [4].

Los rayos X emitidos se producen con diferentes intensidades, para diferentes voltajes aceleradores como función de la longitud de onda para un blanco. Si la diferencia de potencial U_A aplicada al tubo se incrementa, la longitud de onda mínima se reduce de

acuerdo a la expresión (1).

$$\lambda_{min} = \frac{12,40}{U_A}(\text{\AA}) \quad (1)$$

Primero, es beneficioso hablar de la ley de Moseley, anunciada en 1913, dicha ley muestra la relación que existe entre el número atómico de diversos materiales y la longitud de onda de los rayos X que emiten. Moseley llegó a este descubrimiento midiendo las frecuencias que surgen de las transiciones electrónicas de átomos pesados, con lo cual se obtuvo la siguiente ecuación (2).

$$\sqrt{\nu} = C(Z - \sigma) \quad (2)$$

Donde ν es la frecuencia del rayo X, Z es el número atómico y donde tanto σ como C son constantes que fundamentalmente dependen del material que se está estudiando.

El espectro de rayos X del cobre (Cu) muestra dos líneas características de alta intensidad: K_α y K_β . Estas líneas son el resultado de transiciones electrónicas específicas dentro del átomo de cobre cuando los electrones incidentes interactúan con el material del ánodo. La línea K_α es un doblete con una diferencia de energía de aproximadamente 20 eV entre sus componentes, $K_{\alpha 1}$ y $K_{\alpha 2}$, con longitudes de onda respectivas de 1.54056 Å y 1.54439 Å. La línea K_β tiene una longitud de onda de aproximadamente 0.71 Å. Estas líneas son particularmente prominentes en el espectro de rayos X del cobre debido a su intensidad y son características del material del ánodo utilizado. [1]

Finalmente, es prudente hablar del efecto Compton. Descubierta a principios del siglo XX, el efecto Compton explica el cambio en la energía y dirección de los fotones al interactuar con electrones. El descubrimiento del efecto Compton se dio por las observaciones

* Correo institucional: r.casas@uniandes.edu.co

** Correo institucional: j.camelob@uniandes.edu.co

de A. H. COMPTON, en las cuales se dio cuenta de que se daba un cambio de longitud de onda en los rayos X tras ser dispersados por electrones atómicos. Este cambio de longitud de onda está dado por el ángulo de dispersión del fotón y lo podemos expresar de la siguiente forma (3) [2].

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos(\theta)) \quad (3)$$

Donde $\Delta\lambda$ es la diferencia de longitud de onda antes y después de la dispersión, θ el ángulo de dispersión, m_e la masa de un electrón, c la velocidad de la luz y h la constante de Planck. Esta formula también se puede reescribir de la siguiente forma (4).

$$\Delta\lambda = \lambda_c(1 - \cos(\theta)) \quad (4)$$

Donde nuestro término λ_c agrupa nuestros términos constantes en una cantidad física conocida como la longitud de onda de Compton. Más aún, esta medida caracteriza la escala de longitud a la cual se manifiestan los efectos cuánticos en la dispersión de fotones por electrones.

Por otro lado, pasa que los rayos X pueden perder energía al interactuar con materiales. Este fenómeno es resultado directo de que los rayos X puedan efectos fotoeléctricos o efectos Compton, con lo cual pierden energía. Por lo anterior, la intensidad de los rayos X se representa de la siguiente forma(5), donde el término μ representa un coeficiente de absorción lineal, es la longitud de onda y Z el número atómico [2].

$$I = I_0 e^{-\mu(\lambda, Z)d} \quad (5)$$

Similarmente, existe una ecuación que nos ayuda a relacionar la absorción de radiación primaria μ con el número atómico Z (6). Vale la pena aclarar que aquí encontraremos un parámetro K , que es una constante que depende de la longitud de onda y la longitud de onda característica para atravesar un cascarón dado K [2].

$$\frac{\mu}{\rho} = K(\lambda^3 Z^3) \quad (6)$$

II. OBJETIVOS

- Estudiar la producción de rayos X para diferentes materiales y condiciones de producción

- Medir el espectro característico de rayos X para Cu usando diferentes cristales como analizadores.
- Verificar experimentalmente la ley de desplazamiento de Duane-Hunt y calcular la constante de Planck h .
- Medir la atenuación de Rayos X cuando inciden sobre placas metálicas y obtener los coeficientes de absorción de cada material.
- Calcular el cambio en longitud de onda de un fotón de Rayos X debido al efecto Compton.
- Medir el cambio de intensidad del espectro característico en función de voltaje y corriente del ánodo.

III. MONTAJE EXPERIMENTAL

Antes de comenzar a desarrollar el experimento, es de suma importancia entender los elementos que se usarán en su desarrollo y el desarrollo del mismo. Los materiales que necesitaremos son: Unidad de Rayos X básica 35kV(Phywe), cristales de LiF y KBr, tubo contador con cable BNC y filtros, computador, tubo desmontable de rayos X de cobre y un set de láminas metálicas de diferentes materiales y grosores.

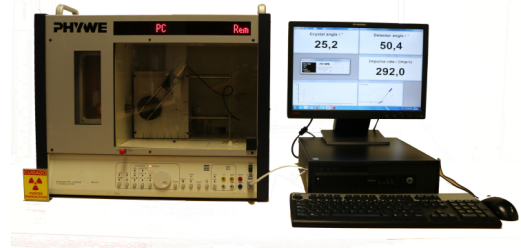


Figura 1. En la imagen podemos ver la unidad de Rayos X básica a la izquierda y a la derecha el computador que usaremos para ayudarnos en la colecta de datos.



Figura 2. En la imagen podemos ver los botones que tiene la unidad de Rayos X, con los cuales vamos a controlar la toma de datos en el experimento, por lo cual es conveniente tenerlos en mente. En la siguiente tabla se explicará su función.

Botón	Función
1	Rueda controladora
2	Botón de enter
3	Selector HV o corriente I
4	Selector Timer y Gate
5	Selector manual o automático del goniómetro.
5.1	Selector de movimiento (arriba-abajo) de contador, cristal y modo acoplado.
5.2	Selector ángulo inicial, ángulo final y paso angular.
6	Botón encendido alto voltaje HV
7	Botón iniciar/frenar medición
8	Reinicia medición, tubo y cristal a posición inicial.
9	Activa/desactiva parlante por detección en el contador.
10.1	Selector salida voltaje análogo.
10.2	Salida voltaje angular de cristal/tubo contador.
10.3	Salida voltaje proporcional a número de conteos.
11	Input voltaje (hasta 500V) área experimental.
12	Switch de luz
13	Conector PC/RS232, alumbra LED al estar conectado.
14	Conexión control total desde PC, reiniciar para salir. LED conexión con PC

Cuadro I. Descripción de botones y funciones.

Tras inspeccionar los cristales, tubos y láminas que tenemos a nuestra disposición para el experimento, prosigue hacer la calibración de la unidad de Rayos X.

Calibración de la unidad de rayos X:

Primero instalamos el tubo de rayos X con ánodo de cobre e insertamos en el orificio de salida del haz el diafragma tubular con el diámetro más ancho. Ahora ponemos el diafragma al contador de GM. Después, montamos el cristal de LiF sobre la base giratoria y cerramos la puerta. Ahora, podemos utilizar el botón 3 y la rueda 1 del panel de control de la unidad de rayos X para llevar el voltaje a 35kV y la corriente a 1mA. Seleccionamos el modo acoplado y giramos la rueda hasta 22,6° (el máximo de intensidad para la combinación de cristal y fuente de Cu). Ahora podemos prender la unidad y cambiamos del modo acoplado al modo cristal o tubo Geiger-Muller, alternando modos y cambiando el ángulo en incrementos de 0,1° buscando el máximo de intensidad. Ahora debemos

registrar el ángulo y su desviación con respecto al valor teórico (22.6°), es posible que se necesite hacer un ajuste a nuestros datos con este desfase si no podemos arreglarlo. Para el siguiente paso debemos apagar el alto voltaje y correr la perilla del ángulo que corresponde a nuestro error, de esta forma al prenderlo debería haberse arreglado. Este proceso de calibración debería repetirse cada vez que cambiemos el cristal.

Procedimiento Rayos X característicos del Cobre:

Empezamos por tomar el diafragma de diámetro más grande en la salida del tubo de Rayos X, y cerrar y asegurar la puerta. Una vez con el diafragma asegurado, conectamos la unidad de Rayos con el computador por medio de la salida 13, en la Fig. 2. Con todo ya conectado, encendemos la unidad de Rayos X y abrimos el programa *Measure* y elegimos la opción correspondiente para Rayos X. Ahí mismo en la sección de menú, seleccionamos Archivo/Nueva medida/. Y en el cuadro de dialogo del programa introducimos las siguientes condiciones II: Con las condiciones puestas,

Tipo de medida : espectro	Corriente de emisión : 1 mA
Datos en X : ángulo del cristal	Tiempo de integración : 3s
Tensión constante : 35kV	Modo rotación : acoplado 2:1
Cristal : LiF	Ángulo de inicio : 3°
Absorbedor : sin absorbedor	Ángulo de parada : 55°
Filtro : sin filtro	Incremento del ángulo : 0,1°

Cuadro II. Condiciones

seleccionamos continuar y enseguida guardar el Espectro de rayos X. No guardamos la imagen y exportamos los datos para luego realizar la gráfica respectiva. Usamos la ley de Bragg para realizar la gráfica de intensidad vs longitud de onda. Para luego realizar un ajuste para todos los picos, compare entre un ajuste a una Lorentizana y un perfil Voigt. Del espectro obtenido para el cristal de LiF, calculamos las energías del espectro característico correspondientes para cada uno de los ordenes ($n = 1$ y $n = 2$) de difracción. El parámetro de red para el LiF es $d = 2,014 \times 10^{-10}m$ con estructura cristalina (110). Repetimos las mediciones usando el cristal de KBr, cuya estructura cristalina es (100) y tiene parámetro de red $d = 3,290 \times 10^{-10}m$. En este caso el ángulo máximo lo puede cambiar a 60° y cambiamos el tipo de cristal en el programa, el resto de parámetros permanece invariante. Reportamos los valores que obtuvimos para cada cristal y reportamos el promedio y desviación para la línea K_{α} y K_{β} .

Procedimiento Absorción de rayos X:

Empezamos por instalar el tubo de rayos X con ánodo de cobre e insertar en el orificio de salida del haz el diafragma más grande. Después montamos el cristal de

LiF sobre la base giratoria. Cerramos la puerta y la aseguramos. E introducimos en el cuadro de dialogo del programa las condiciones III:

Tipo de medida : espectro	Corriente de emisión : 1 mA
Datos en X : ángulo del cristal	Tiempo de integración : 50s o mayor
Tensión constante : 30kV	Modo rotación : acoplado 2:1
Cristal : LiF	Ángulo de inicio : 6°
Absorbedor : sin absorbedor	Ángulo de parada : 16°
Filtro : sin filtro	Incremento del ángulo : 1°

Cuadro III. Condiciones

Y se recomienda nunca exponer el tubo contador a la radiación primaria por un largo tiempo. Siempre usar un tiempo de 50 segundos o mas grande tal que el número de pulsos sea siempre mayor que 1000. A una pequeña cantidad de pulsos la radiación del ambiente puede afectar, esta radiación se puede determinar si el voltaje $U_a = 0V$. Y determinamos la atenuación de cada material, haciendo un barrido sin material y luego con material, incrementando el espesor del material. Realizamos las mediciones para Al y Zn. Y para cada longitud de onda (ángulo de incidencia), realizamos una gráfica semi-logarítmica entre la intensidad (normalizada) y el espesor del material que medimos. Y mediante una regresión, la cantidad μ para todas las longitudes de onda que midió. Una vez con los datos realizamos una gráfica entre (μ/ρ) y λ^3 , siendo ρ la densidad de masa del material usado. Y comparamos las gráficas de coeficiente de atenuación para el Aluminio y el Zinc e indicamos como se ve la dependencia del número atómico.

Para bajas intensidades la radiación del ambiente puede afectar el experimento, y por eso se debe medir primero el ambiente aplicando un voltaje $U_a = 0kV$. En altas tazas de conteos realizamos una corrección teniendo en cuenta el tiempo muerto del contador Geiger dado por (7).

$$N^* = \frac{N^*}{1 - \tau N^*} \quad (7)$$

con $\tau = 90\mu s$.

Procedimiento Dependencia de la intensidad del voltaje y corriente del ánodo:

Empezamos por seleccionar un rango de medición entre $19^\circ - 24^\circ$ con el fin de observar el espectro característico. Y con un tiempo de integración de 2s y una resolución de $0,1^\circ$ realizamos las mediciones con los siguientes rangos de voltaje y corriente:

- Con corriente constante de 1mA, variamos la corriente entre 35kV y 11kV en pasos de 2-3kV por medición

- Con voltaje constante de 35kV, variamos la corriente entre 1mA y 0.1mA en pasos de 0.1mA.

Una vez tomamos los datos, graficamos y analizamos los datos para corriente constante y voltaje constante en función de λ en dos gráficas separadas. Donde la intensidad I debe seguir la relación dada por la ecuación (8):

$$I = bI_A(U_A - U_K)^{3/2} \quad (8)$$

donde b es una constante, I_A es la corriente en el ánodo, U_A es el voltaje en el ánodo y U_K es el potencial de ionización del orbital K, que para el caso del Cobre vale $U_K = 9,979keV$. Despues realizamos una gráfica para la intensidad de K_α y K_β en función de U_A y otra en función de $(U_A - U_K)^{3/2}$ para ver cual se ajustaba mejor. Y por último determinamos si es posible calcular la constante b , a partir de las gráficas.

rocedimiento Ley de Duane-Hunt:

En esta actividad usamos el diafragma/colimador de 2mm, el cristal de LiF y el tubo de rayos X de Cu. Con un tiempo de exposición de 2s, una corriente I_A de 1mA y la resolución angular de $0,1^\circ$. Empezamos por registrar el espectro continuo en un rango de $10^\circ - 21^\circ$, para diferentes valores de alto voltaje entre 35kV y 13kV con pasos de 2kV. Y a partir de eso encontramos la longitud de onda mínima a la cual se empieza a producir *Bermsstrahlung*. Con los datos, realizamos una gráfica de λ_{min} en función de $1/U_A$, y obtuvimos el valor de la pendiente y lo comparamos con lo que obtuvimos en la ecuación (1).

Una vez con eso, usando la relación (9)

$$eU_A = \frac{hc}{\lambda_{min}} \quad (9)$$

obtuvimos el valor de h usando una regresión lineal a los datos que obtuvimos previamente.

IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS

Actividad 1:

En la gráfica 3 podemos evidenciar el espectro de rayos X característico del cobre, donde se observan claramente los picos de intensidad K_α y K_β .

Vale la pena aclarar que el aparato que se usó en el experimento tenía un desfase de -2.2° , por lo que encontramos K_α en 20.4° en vez de 22.6° . Sin embargo, tras hacerle este corrimiento de $+2.2^\circ$ a todos nuestros datos, los valores que conseguimos se ajustan bastante bien a la teoría. También vale la pena recordar que en nuestros datos los dos picos que vemos entre 20° y 30°

son K_α y K_β , siendo el pico más pequeño K_β . Puntualmente, K_β obtuvimos un valor de 1795 Imp/s lo encontramos en 18.1° y K_α obtuvimos un valor de 7939 Imp/s lo encontramos en 20.4° .

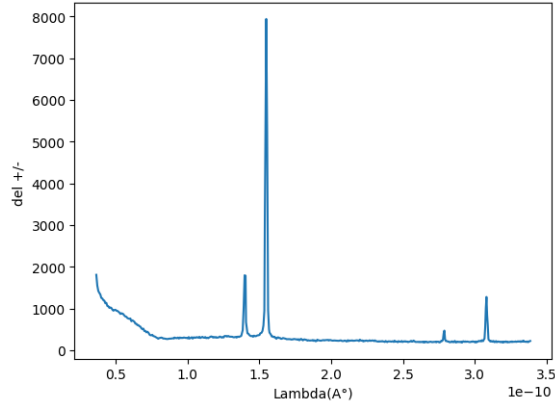


Figura 3. Esta gráfica muestra la relación entre la longitud de onda de los Rayos X y la intensidad detectada por el contador en R(30kV)/Imp/s.

Una vez teniendo los valores de los picos podemos encontrar sus longitudes de onda y compararla con los valores esperados, con el fin de error. Obteniendo la tabla IV.

	λ_{teo} (Å)	λ_{exp} (Å)	E_{teo} (eV)	E_{exp} (eV)
K_α	1.54	1.54 ± 0.37	0,267	$0,267 \pm 0,064$
K_β	1.39	1.39 ± 0.38	0,296	$0,296 \pm 0,081$

Cuadro IV. Comparación de valores de longitudes de onda con los valores reales, calculando los errores de los λ con la ecuación (13). Y los valores de energía calculados con la ecuación (11), y sus errores con la ecuación (14).

Actividad 2:

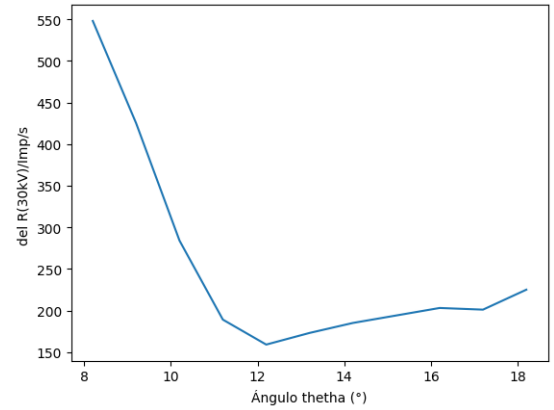


Figura 4. Esta gráfica muestra la relación entre el ángulo del cristal en grados ($^\circ$) y la intensidad detectada por el contador en R(30kV)/Imp/s. (Recordemos que este es nuestro caso de control I_0 para cuando no tenemos lámina de aluminio frenando los electrones).

La gráfica anterior 4 muestra un barrido de control que se hizo para mirar la relación entre la intensidad medida y el ángulo del cristal cuando no hay una barrera del aluminio en el camino del electrón. Esta intensidad es importante porque va a ser usada más adelante para calcular el coeficiente de absorción lineal del cobre (μ), explicaremos como conseguiremos μ más adelante. Además de esto, podemos comentar brevemente las tendencias de la gráfica, vemos como de 8° a 11° la gráfica muestra como la intensidad baja linealmente con respecto al ángulo, esta bajada es de esperarse dado que en 0° el detector se satura (por lo cual hay un pico) y baja a medida que el ángulo del cristal se vuelve más perpendicular al detector. De aquí, vemos como la intensidad llega a un mínimo al rededor de los 12° (con un valor de 160 R(30kV)/Imp/s). De los 12° en adelante la intensidad parece subir de manera lineal en función del ángulo (con una pendiente mucho menor empinada que la que vimos cuando bajaba al principio), este aumento podría darse por el simple hecho que uno de nuestros picos (K_β) se encuentra en 18.1° y está comenzando el aumento correspondiente.

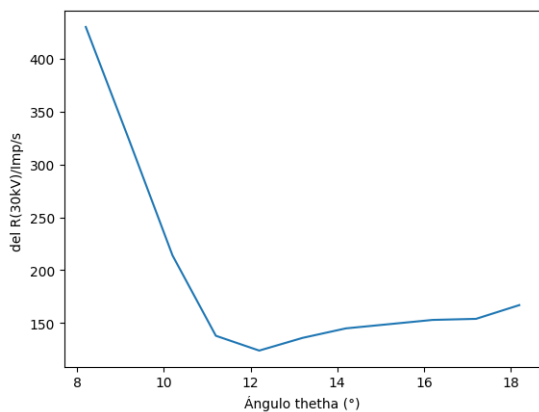


Figura 5. Esta gráfica muestra la relación entre el ángulo del cristal en grados (°) y la intensidad detectada por el contador en R(30kV)/Imp/s, cuando se ve enfrentado a una lámina de aluminio de 0,02mm.

Similar a la figura 4, la gráfica 5 muestra un barrido de que se hizo para mirar la relación entre la intensidad medida y el ángulo del cristal, esta vez se hizo con una barrera del aluminio de 0.002mm. La intensidad que encontramos en esta gráfica se usará para el coeficiente de absorción lineal del cobre (μ) a una dada longitud de onda (que obtendremos usando la ley de Bragg). Similar a la gráfica anterior, vemos que la intensidad baja de forma lineal contra el ángulo, esta vez hasta al rededor de 140 R(30kV)/Imp/s, alcanzando un mínimo de más o menos 70 R(30kV)/Imp/s a los 12° y luego sube de forma más o menos lineal.

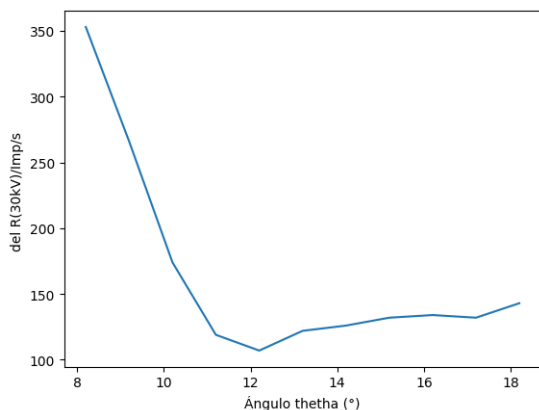


Figura 6. Esta gráfica muestra la relación entre el ángulo del cristal en grados (°) y la intensidad detectada por el contador en R(30kV)/Imp/s, cuando se ve enfrentado a una lámina de aluminio de 0,04mm.

Similar a la figura 4, la gráfica 6 gráfica muestra un barrido de que se hizo para mirar la relación entre la intensidad medida y el ángulo del cristal, esta vez se hizo con una barrera del aluminio de 0.004mm. La in-

tensidad que encontramos en esta gráfica se usará para el coeficiente de absorción lineal del cobre (μ) a una dada longitud de onda (que obtendremos usando la ley de Bragg). Similar a la gráfica anterior, vemos que la intensidad baja de forma lineal contra el ángulo, esta vez hasta al rededor de 140 R(30kV)/Imp/s, alcanzando un mínimo de más o menos 120 R(30kV)/Imp/s a los 12° y luego sube de forma más o menos lineal.

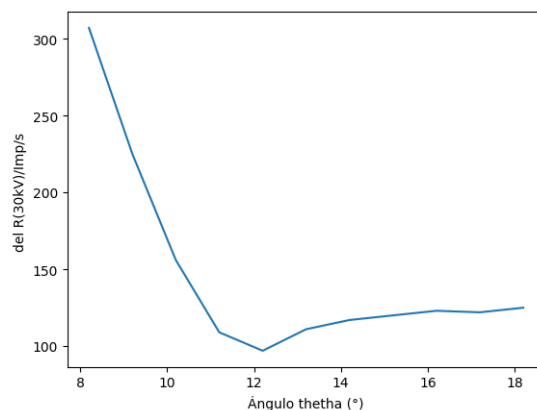


Figura 7. Esta gráfica muestra la relación entre el ángulo del cristal en grados (°) y la intensidad detectada por el contador en R(30kV)/Imp/s, cuando se ve enfrentado a una lámina de aluminio de 0,06mm.

La gráfica 7 muestra un barrido de que se hizo para mirar la relación entre la intensidad medida y el ángulo del cristal, esta vez se hizo con una barrera del aluminio de 0.006mm. La intensidad que encontramos en esta gráfica se usará para el coeficiente de absorción lineal del cobre (μ) a una dada longitud de onda (que obtendremos usando la ley de Bragg). Similar a la gráfica anterior, vemos que la intensidad baja de forma lineal contra el ángulo, esta vez hasta al rededor de 130 R(30kV)/Imp/s, alcanzando un mínimo de más o menos 110 R(30kV)/Imp/s a los 12° y luego sube de forma más o menos lineal.

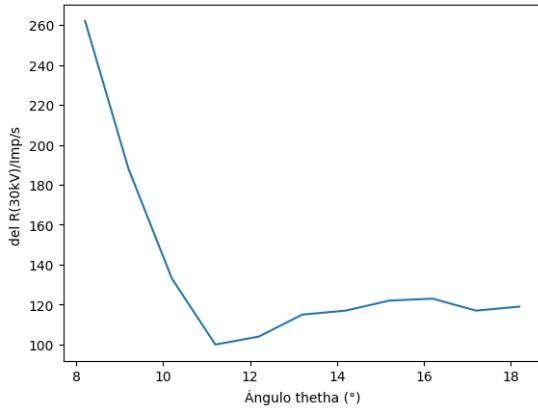


Figura 8. Esta gráfica muestra la relación entre el ángulo del cristal en grados (°) y la intensidad detectada por el contador en R(30kV)/Imp/s, cuando se ve enfrentado a una lámina de aluminio de 0,08mm.

La gráfica 8 muestra un barrido de que se hizo para mirar la relación entre la intensidad medida y el ángulo del cristal, esta vez se hizo con una barrera del aluminio de 0.008mm. La intensidad que encontramos en esta gráfica se usará para el coeficiente de absorción lineal del cobre (μ) a una dada longitud de onda (que obtendremos usando la ley de Bragg). Similar a la gráfica anterior, vemos que la intensidad baja de forma lineal contra el ángulo, esta vez hasta al rededor de 110 R(30kV)/Imp/s, alcanzando un mínimo de más o menos 90 R(30kV)/Imp/s a los 12° y luego sube de forma más o menos lineal.

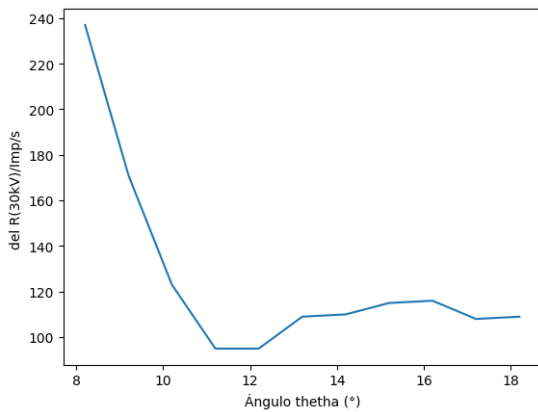


Figura 9. Esta gráfica muestra la relación entre el ángulo del cristal en grados (°) y la intensidad detectada por el contador en R(30kV)/Imp/s, cuando se ve enfrentado a una lámina de aluminio de 0,1mm.

La gráfica 9 muestra un barrido de que se hizo para mirar la relación entre la intensidad medida y el ángulo del cristal, esta vez se hizo con una barrera del aluminio de 0.010mm. La intensidad que encontramos

en esta gráfica se usará para el coeficiente de absorción lineal del cobre (μ) a una dada longitud de onda (que obtendremos usando la ley de Bragg). En esta grafica podemos ver como alcanzamos un mínimo a las 11° en vez de 12° (en las otras gráficas llegábamos a un mínimo a los 12°) de al rededor de 100 R(30kV)/Imp/s, después vemos que la intensidad sube hasta las 16° a una intensidad de al rededor de 120 R(30kV)/Imp/s, después baja un poco, terminando al rededor de 115 R(30kV)/Imp/s a los 18°.

Pese a las gráficas que sacamos el análisis que hicimos, el objetivo de esta sección no es comparar intensidad contra ángulo, lo que queremos ver la como cambia la intensidad en función del grosor del material, para esto usamos la siguiente fórmula.

$$I = I_0 e^{-\mu d}$$

Donde I_0 es la intensidad base que sacamos de nuestro barrido de los ángulos cuando no hay barrera de aluminio. Para hacer un correcto análisis reordenamos la fórmula de la siguiente forma.

$$\ln \frac{I}{I_0} = -\mu d$$

Con lo cual podemos graficar nuestros datos usando las intensidades obtenidas en función del grosor del aluminio para cada ángulo medido, para ver correctamente la relación las graficaremos en una escala semilogarítmica y hacemos una regresión lineal.

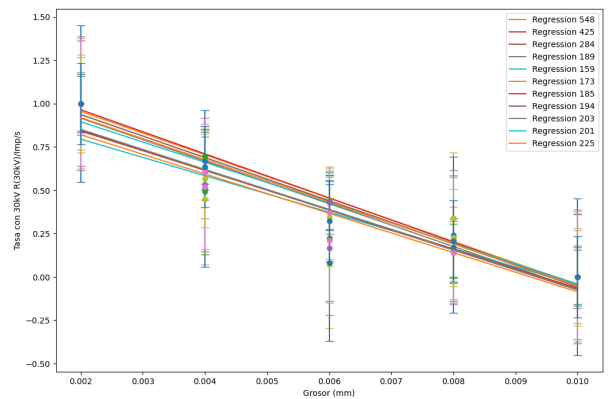


Figura 10. Esta gráfica muestra la relación entre la intensidad medida (normalizada) en R(30kV)/Imp/s y el grosor de la barrera de aluminio en mm, para todos los ángulos de medición (14°-22°). Además, la gráfica tiene barras de error en y, que representan el error de 0.1 asociado a las medidas.

Cuadro V. Esta tabla muestra nuestros resultados para diferentes ángulos y sus correspondientes coeficientes de absorción lineal calculado, vale la pena aclarar que en si la gráfica de la cual se extraen estos datos únicamente esta teniendo en cuenta el grosor de la barrera y la intensidad medida para diferentes ángulos, por lo cual el ángulo es más una etiqueta que un dato de real importancia en nuestros datos.

Ángulo ± 0.1 (°)	$\mu \pm 0.01$
$6,0 \pm 0,1$	$125,02 \pm 0,01$
$7,0 \pm 0,1$	$127,28 \pm 0,01$
$8,0 \pm 0,1$	$124,26 \pm 0,01$
$9,0 \pm 0,1$	$123,29 \pm 0,01$
$10,0 \pm 0,1$	$105,34 \pm 0,01$
$11,0 \pm 0,1$	$113,35 \pm 0,01$
$12,0 \pm 0,1$	$113,41 \pm 0,01$
$13,0 \pm 0,1$	$115,21 \pm 0,01$
$14,0 \pm 0,1$	$115,47 \pm 0,01$
$15,0 \pm 0,1$	$117,00 \pm 0,01$
$16,0 \pm 0,1$	$121,53 \pm 0,01$

Esta gráfica relaciona intensidad y grosor de la barrera de aluminio, para poder encontrar μ hacemos una regresión lineal y sacamos la pendiente, esto está en acuerdo con la ecuación 6.3. De aquí sacamos que m (la pendiente asociada a la regresión lineal) debería ser $-\mu$, que representa el coeficiente de absorción lineal para diferentes longitudes de onda. Ya con estos datos podemos intentar de encontrar qué patrón siguen estos coeficientes, para lograr esto podemos hacer un scatter plot e intentamos interpolar los datos.

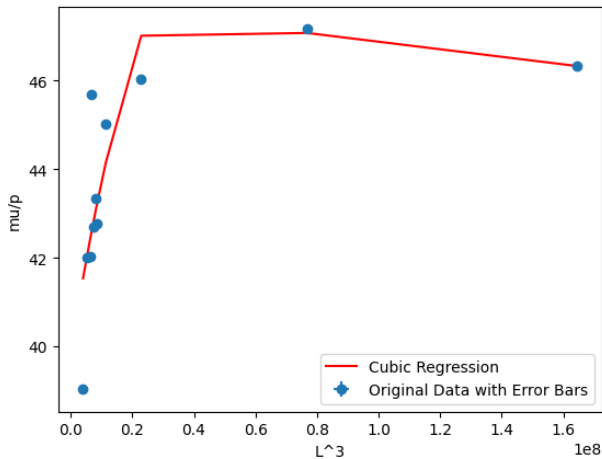


Figura 11. Esta gráfica muestra la relación entre el cociente del coeficiente de absorción lineal y la densidad de la barrera (en este caso aluminio), contra la longitud de onda al cubo de los rayos X asociados a la medición (que obtenemos a través de la ley de Bragg). Vale la pena recalcar que las barras de error ya están incluidas en el gráfico, pero son muy pequeñas comparadas a la magnitud de los datos.

El objetivo de esta sección no es más que hacer una comprobación de nuestros datos, dado que el ajuste que consigamos para nuestros datos no tiene significancia física. Aun así, sabemos que esta relación debería ser lineal. No obstante, como vemos en la gráfica, los puntos evidentemente no siguen una tendencia lineal y, en cambio, se ajustan más a una cúbica. Para mostrar esto se intentó hacer una interpolación de grado 3, sin embargo, por la baja cantidad de datos la interpolación no resultó en una curva suave, aun así podemos artificialmente crear datos sobre la curva que parametrizamos para darnos una idea de cómo podría ser la tendencia que encontramos.

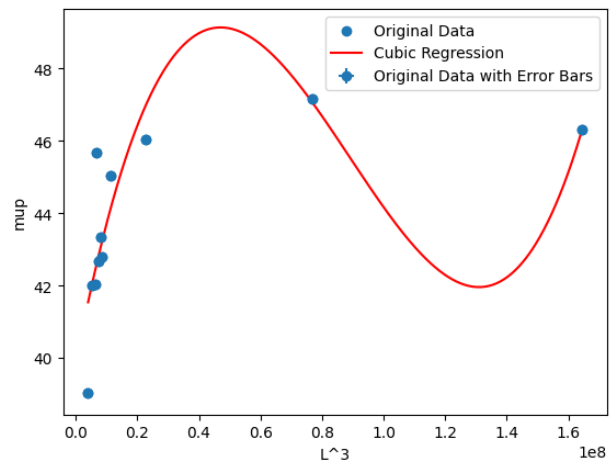


Figura 12. Esta gráfica muestra la relación entre el cociente del coeficiente de absorción lineal y la densidad de la barrera (en este caso aluminio), contra la longitud de onda al cubo de los rayos X asociados a la medición (que obtenemos a través de la ley de Bragg). Vale la pena recalcar que las barras de error ya están incluidas en el gráfico, pero son muy pequeñas comparadas a la magnitud de los datos. En esta gráfica generamos datos adicionales sobre la interpolación haciendo un set de 1000 datos en el rango de X de la gráfica y después haciendo un fit a nuestros nuevos datos con los coeficientes de la interpolación.

De esta gráfica se puede ver como un ajuste cúbico, en efecto es lo que mejor encapsula nuestros resultados. Aun así, el método que usamos para generar una curva suave puede promover un overfitting de los datos, dado que va a haber un bias alto hacia los datos que tenemos, por lo cual nuestra función puede no ser un buen modelo para predecir esta relación para más valores de λ^3 . Sin embargo, con el propósito de verificar el grado de la relación de nuestros datos, este método es apropiado.

A forma de conclusión de esta sección, podemos decir que de forma general nuestros datos no se ajustaron correctamente a lo que esperábamos. La

relación que se espera de la teoría sería una lineal; sin embargo, obtuvimos una cúbica. Creemos que este error puede ser por errores de calibración del aparato de medición que usamos o incluso puede ser que a ciertas longitudes de onda, el ruido de nuestros datos sea de magnitud comparable a nuestros datos, por lo cual hay datos anómalos. Además, es de interés ver que si no fuese por nuestros últimos dos datos, sería razonable modelar nuestros datos con una regresión lineal, lo cual se ajustaría a la teoría, por lo cual es probable que nuestra forma de toma de datos no sea la mejor para longitudes de onda más grandes.

Actividad 3:

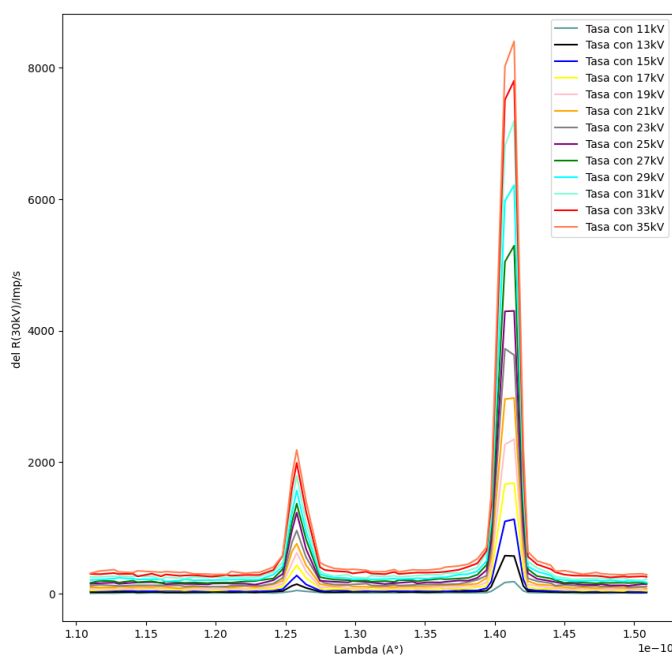


Figura 13. Esta gráfica muestra la relación entre la longitud de onda de los rayos X (\AA) y la intensidad detectada por el contador en $R(30kV)/\text{Imp/s}$. Con una corriente constante de 1mA , haciendo un barrido entre 35kV y 11kV , a pasos de 2kv , y en un rango de ángulos desde 16° a 22° . En este caso cambiando el diafragma/colimador a uno de 2mm .

La gráfica 13 muestra un barrido de voltajes y sus correspondientes valores de intensidad a una corriente constante de 1mA . En la gráfica se puede observar claramente, como era de esperarse, que a medida que se aumenta el voltaje, aumenta la intensidad máxima que se detecta, llegando a un máximo definitivo en un voltaje de 35kV . Además, se puede ver de forma clara los picos K_α y K_β , de rayos X característicos del cobre, llegando a sus valores de 8402 Imp/s y 2186 Imp/s , respectivamente. Podemos repetir el mismo procedimiento para calcular los valores de K_α y K_β para el rango de

voltajes de 11kV a 35kV y graficarlo en función de $\frac{1}{U_A}$, donde U_A es el voltaje en el ánodo. Obteniendo la gráfica 14.

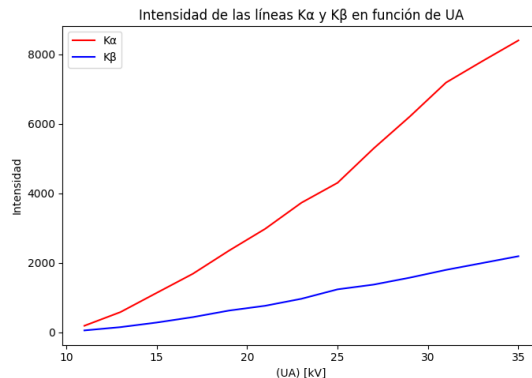


Figura 14. Esta gráfica muestra la relación entre los valores para los picos de intensidad K_α y K_β y los valores de voltaje U_A necesarios para obtener cada pico. Con una corriente constante de 1mA , haciendo un barrido entre 35kV y 11kV , a pasos de 2kv , y en un rango de ángulos desde 16° a 22° . En este caso cambiando el diafragma/colimador a uno de 2mm .

Y repetimos el mismo procedimiento pero esta vez lo graficamos en función de $(U_A - U_K)^{3/2}$, donde U_K es el potencial de ionización del orbital K. Obteniendo la gráfica 15.

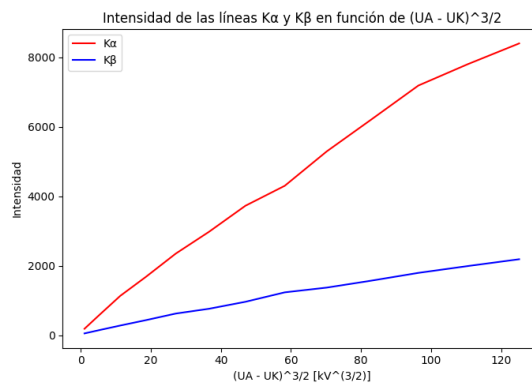


Figura 15. Esta gráfica muestra la relación entre los valores para los picos de intensidad K_α y K_β y los valores de voltaje $(U_A - U_K)^{3/2}$ necesarios para obtener cada pico. Con una corriente constante de 1mA , haciendo un barrido entre 35kV y 11kV , a pasos de 2kv , y en un rango de ángulos desde 16° a 22° . En este caso cambiando el diafragma/colimador a uno de 2mm .

Aplicando una regresión lineal en cada una de las gráficas, pudimos obtener un valor aproximado de las ecuaciones de las rectas que rigen K_α y K_β y con sus pendientes pudimos hacer un cálculo del valor de la

constante b. Obteniendo las gráficas 16, 17.

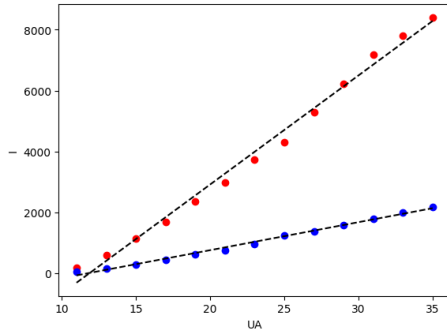


Figura 16. Esta gráfica muestra la regresión lineal hecha entre la relación entre los valores para los picos de intensidad K_α y K_β y los valores de voltaje U_A necesarios para obtener cada pico. Con una corriente constante de 1mA, haciendo un barrido entre 35kV y 11kV, a pasos de 2kv, y en un rango de ángulos desde 16° a 22° . En este caso cambiando el diafragma/colimador a uno de 2mm.

En la cuál terminamos obteniendo un valor para las pendientes de K_α y K_β de $m_\alpha = 358,46 \pm 0,00037(Imps/s/mA)$ y $m_\beta = 92,019 \pm 0,00037(Imps/s/mA)$, respectivamente.

Y repetimos lo mismo para la gráfica 15.

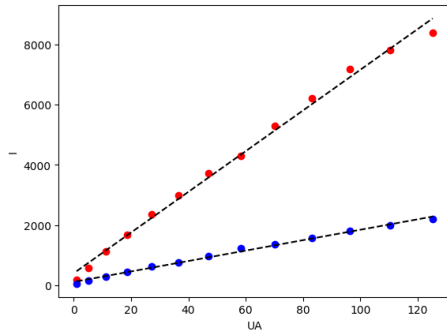


Figura 17. Esta gráfica muestra la regresión lineal hecha entre la relación entre los valores para los picos de intensidad K_α y K_β y los valores de voltaje $(U_A - U_K)^{3/2}$ necesarios para obtener cada pico. Con una corriente constante de 1mA, haciendo un barrido entre 35kV y 11kV, a pasos de 2kv, y en un rango de ángulos desde 16° a 22° . En este caso cambiando el diafragma/colimador a uno de 2mm.

En la cuál terminamos obteniendo un valor para las pendientes de K_α y K_β de $m_\alpha = 67,68 \pm 6,9 \times 10^{-5}(Imps/s/mA)$ y $m_\beta = 17,34 \pm 6,9 \times 10^{-5}(Imps/s/mA)$, respectivamente.

Por otro lado, podemos graficar la relación entre la longitud de onda de los rayos X (\AA) y la intensidad

detectada por el contador, a un voltaje constante de 35kV, haciendo un barrido entre 0.1mA y 1mA.

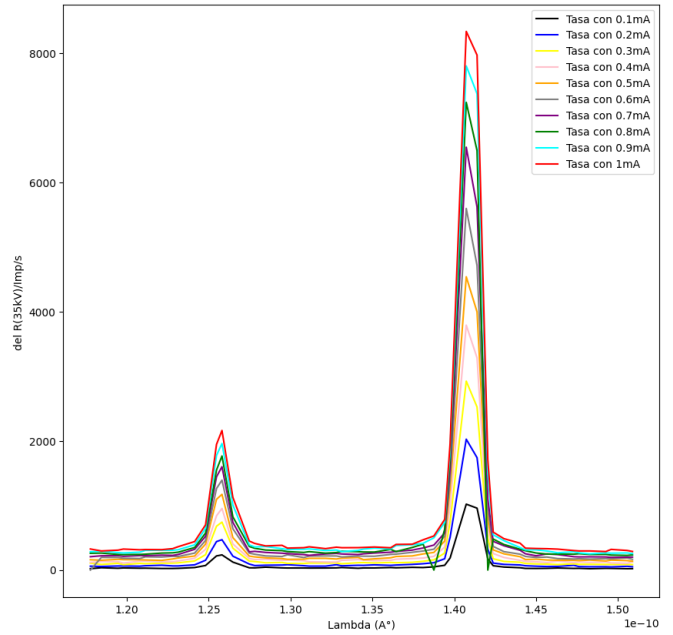


Figura 18. Esta gráfica muestra la relación entre a longitud de onda de los rayos X (\AA) y la intensidad detectada por el contador en $R(30kV)/Imp/s$. Con un voltaje constante de 35kV, haciendo un barrido entre 1mA y 0.1mA, a pasos de 0.1mA, y en un rango de ángulos desde 17° a 22° . En este caso cambiando el diafragma/colimador a uno de 2mm.

La gráfica 18 muestra un barrido de corrientes y sus correspondientes valores de intensidad a un voltaje constante de 35kV. En la gráfica se puede observar que a medida que aumenta la corriente, suben los valores de intensidad. Una vez con las gráficas, podemos obtener los valores de los picos K_α y K_β , para cada uno de los valores de corriente. Y una vez con los valores, gráficarlos en contra de las corrientes. Obteniendo la gráfica 19.

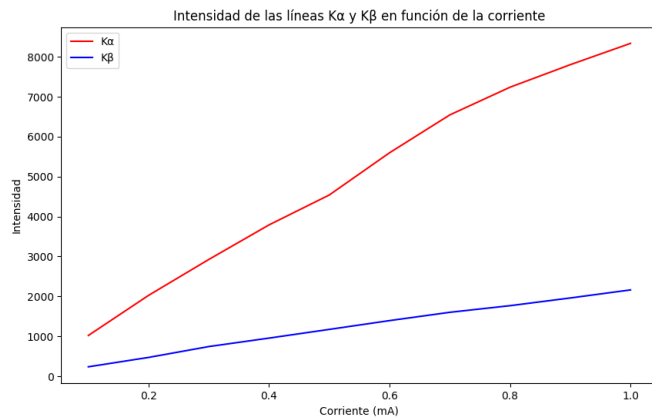


Figura 19. Esta gráfica muestra la relación entre la longitud de onda de los rayos X (\AA) y la intensidad detectada por el contador en $R(30\text{kV})/\text{Imp/s}$. Con una corriente constante de 1mA, haciendo un barrido entre 35kV y 11kV, a pasos de 2kv, y en un rango de ángulos desde 16° a 22° . En este caso cambiando el diafragma/colimador a uno de 2mm.

Aplicando una regresión lineal en la gráfica, pudimos obtener un valor aproximado de las ecuaciones de las rectas que rigen K_α y K_β y con sus pendientes pudimos hacer un cálculo del valor de la constante b. Obteniendo la gráfica 20.

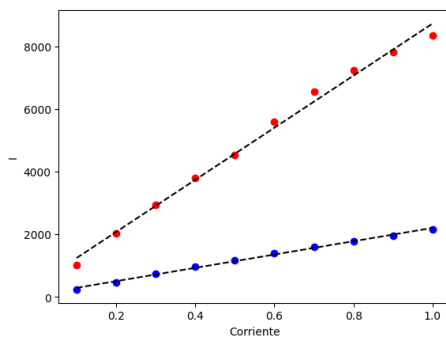


Figura 20. Esta gráfica muestra la regresión lineal hecha entre la relación entre los valores para los picos de intensidad K_α y K_β y los valores de corrientes (mA) necesarios para obtener cada pico. Con un voltaje constante de 35kV, haciendo un barrido entre 0.1mA y 1mA, a pasos de 0.1mA, y en un rango de ángulos desde 16° a 22° . En este caso cambiando el diafragma/colimador a uno de 2mm.

Con la gráfica podemos calcular su pendiente con el fin de calcular el valor de la constante b dada por la relación (10)

$$I = bI_A(U_A - U_K)^{3/2} \quad (10)$$

A partir de la gráfica 20 podemos obtener un valor de la pendiente de la regresión de K_α obteniendo un valor de $m_\alpha = 8313,45 \pm 0,011(\text{Imp/s/mA})$.

Y un valor de la pendiente de la regresión de K_β de $m_\beta = 2123,3 \pm 0,01(\text{Imp/s/mA})$.

Una vez con estos valores, para cada una de las gráficas podemos despejar b, en las ecuaciones, despejar U_A únicamente en la ecuación (10) es muy complicado sin transformar también la I, luego lo haremos solo para los otros dos casos. Obteniendo (15), (16) en cada una y obtener su valor llegando a que b_α y b_β son igual a:

$$b_\alpha = 67,68$$

$$b_\beta = 17,34$$

$$b_\alpha = 66,42$$

$$b_\beta = 16,96$$

Para las gráficas 17 y 20 respectivamente. Podríamos decir que los resultados se asemejan mucho los unos a los otros por lo que ambas gráficas podrían funcionar para calcular el valor de b.

Actividad 4:

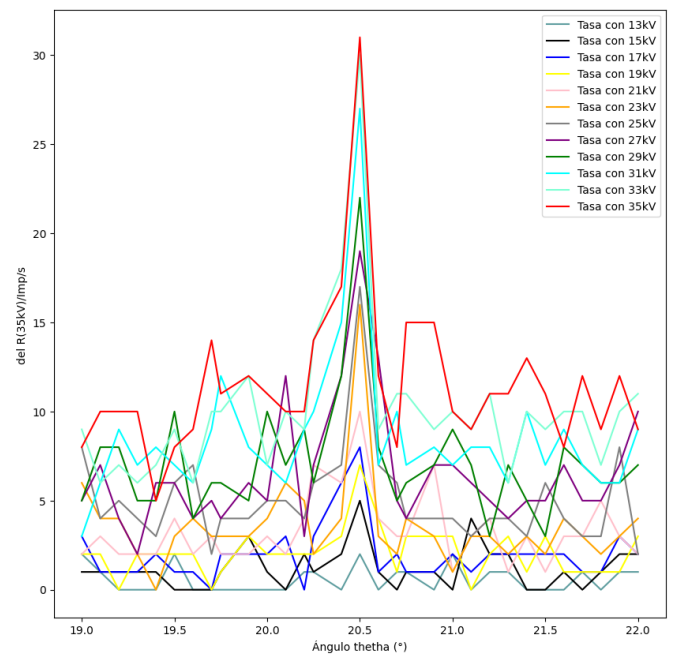


Figura 21. Esta gráfica muestra la relación entre el ángulo del cristal en grados ($^\circ$) y la intensidad detectada por el contador en $R(30\text{kV})/\text{Imp/s}$. Haciendo un barrido entre 35kV y 13kV, a pasos de 2kv, y en un rango de ángulos desde 19° a 22° . En este caso cambiando el diafragma/colimador al que de menor diámetro, usamos un cristal LiF y seguimos usando el tubo de rayos X de Cu. Para esta sección usamos un tiempo de exposición de 2s, una corriente de 1mA y una resolución angular de 0.1° .

Para esta sección buscamos estudiar el fenómeno de Bremsstrahlung, que es la radiación que se produce

como consecuencia de frenar partículas cargadas de baja masa, en nuestro caso electrones. De la gráfica que obtenemos al estudiar la relación del ángulo del cristal y la intensidad para diferentes tasas (de 13KV a 35KV), vemos como hay un pico al rededor de los 20.5° para las diferentes tasas. Además, podemos ver como a mayor tasa, el pico se vuelve más prominente y se diferencia más este valor de interés del ruido de los datos. Además, también es de importancia mencionar como para tasas menores a 19KV es realmente difícil diferenciar el pico del ruido, por lo cual estos resultados no son demasiado significativos. Sin embargo, con el resto de las tasas (≥ 19) podemos ver como es evidente que Bremsstrahlung pasa al rededor de los 20.5° , esto lo sabemos porque este pico indica que se produjo algún tipo de radiación (en nuestro caso sabemos que son rayos X) por el frenado de los electrones, que es precisamente lo que esperábamos encontrar. Finalmente, tiene sentido que a menor tasa este pico sea menos evidente, por un lado, porque la radiación que ocurra se confunde con la radiación ambiente y segundo porque con una menor tasa debería pasar que sea menos probable que un electrón choque con suficiente energía para producir Bremsstrahlung.

Con lo anterior en mente, y sabiendo que en nuestros datos podemos ver Bremsstrahlung, podemos usar la longitud de onda mínima a la cual vemos dicho fenómeno para intentar llegar a la constante de Plank experimentalmente. Para esto recordemos que.

$$E = eU = \frac{hc}{\lambda} \quad (11)$$

$$U\lambda = \frac{hc}{e}$$

$$\lambda = \frac{hc}{eU}$$

De acá vemos que si encontramos la longitud de onda mínima para Bremsstrahlung y la relacionamos a $1/U$, tendremos una pendiente de $m = \frac{hc}{e}$, con lo cual podemos encontrar h de la siguiente forma.

$$h = m \frac{e}{c} \quad (12)$$

Con el anterior procedimiento en mente, primero vamos a graficar λ_{mnimo} contra $\frac{1}{U}$. Con estos datos, nos es posible hacer una regresión lineal, con lo cual obtendremos m.

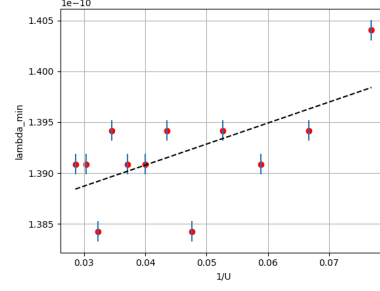


Figura 22. Esta gráfica muestra la relación entre longitud de onda mínima (λ_{min}) y el inverso intensidad detectada por el contador en R(30kV)/Imp/s. Haciendo un barrido entre 35kV y 13kV, a pasos de 2kV, y en un rango de ángulos desde 19° a 22° . En este caso los puntos que vemos en el gráfico corresponden a los valores mínimos de λ a los cuales detectamos Bremsstrahlung. Para esta sección usamos un tiempo de exposición de 2s, una corriente de 1mA, una resolución angular de 0.1° y el colimador de menor diámetro.

A pesar de que fue posible hacer una regresión lineal, vale la pena aclarar que por la muy alta cantidad de ruido en nuestros datos, los valores mínimos de λ no son fáciles de discernir, por lo cual puede haber un error asociado a la toma de datos. Esto también se puede ver en la figura 22, donde, a pesar de que fue posible hacer una regresión lineal, evidentemente los puntos no siguen una tendencia fuerte y en cambio parecen oscilar al rededor de los valores esperados (consecuencia del ruido). Dado más tiempo esto podría ser mitigado tomando más datos, así volviendo menos relevante el error asociado al ruido o reduciendo el ruido de alguna forma, sin embargo, este podría ser el objetivo de una futura toma de datos, dado que por limitaciones de tiempo no se pueden poner en práctica estas mejoras. No obstante, con nuestra regresión lineal obtenemos una pendiente de:

$$m = 20,68 * 10^{-12} \pm 1,965 * 10^{-12}$$

Con este resultado podemos calcular h, con lo cual obtenemos un resultado de:

$$h = 11,03 * 10^{-36} \pm 1,048 * 10^{-36}$$

Con esto podemos ver que en efecto nos fue posible encontrar el valor de h de forma experimental y en teoría es enteramente posible conseguir este valor con muy buena exactitud, sin embargo nuestros resultados no son satisfactorios. El valor de h que esperábamos era de al rededor de $h = 6,6310^{-34}$, que se encuentre a más de tres sigmas de nuestro resultado, por lo cual nuestro experimento fue inconcluso y tuvo un error demasiado grande como para realmente ser relevante. A forma de reflexión podemos decir que el experimento fue un ejercicio con el cual verificamos que se puede encontrar h

experimentalmente, pero con nuestros datos es imposible concluir más que esto. Con lo anterior en mente, es prudente discutir el porqué de nuestros resultados, como ya hemos mencionado, el ruido que hubo en nuestra toma de datos era de la misma magnitud que muchos de nuestros datos, por lo cual es probable que las longitudes de onda mínima reportadas no sean las apropiadas, por lo cual los datos que usamos en nuestro análisis pueden ser erróneos, con lo cual es natural que hayamos llegado a un valor de h incorrecto.

V. CONCLUSIONES

A lo largo de esta practica logramos estudiar la producción de rayos X para el cobre en diferentes condiciones de producción asociadas al mismo. Similarmente, logramos medir el espectro característico de rayos X para Cu, con lo cual pudimos evidenciar sus líneas K_α y K_β . Puntualmente, encontramos picos en 18.1° y 20.4° , que son K_β y K_α respectivamente. No obstante, en la calibración encontramos que nuestro equipo tenía un desfase de -2.2° , por lo cual, los valores reales que encontramos fueron K_β a 20.3° con una intensidad medida de 1795 Imp/s y K_α a 22.6° con una intensidad medida de 7939 Imp/s, valores que se ajustan bastante bien a la teoría y muestran buena exactitud en los resultados.

Así mismo, conseguimos medir la atenuación de Rayos X cuando inciden sobre placas de aluminio de diferentes grosores y así obtener el coeficientes de absorción del aluminio. En esta sección buscábamos hacer más una comprobación que cualquier otra cosa, al graficar nuestros valores de μ , esperábamos lograr ver una relación lineal, sin embargo, parece seguir una función cúbica, esto no se ajusta a la teoría y creemos que puede ser un error ya sea en el equipamiento o en la forma de tomar datos. Como logramos ver en el experimento, los primeros datos si parecieran seguir una tendencia lineal, sin embargo, a mayores longitudes de onda estos datos se salen de lo esperado, por esto mismo creemos que puede haber problemas en como tomamos datos para

longitudes de onda muy grandes, con lo cual se explicaría el error que vemos.

Más aún, calculamos el cambio en longitud de onda de un fotón de Rayos X debido al efecto Compton.

También, medimos el cambio de intensidad del espectro característico en función de voltaje y corriente del ánodo. Inicialmente, medimos a una corriente constante de 1mA un barrido de voltajes de 11 a 35 kV, con el fin de poder comprobar que la intensidad de los picos K_α y K_β se ajustaba la ecuación (10), con el fin de poder calcular la constante b . Repetimos el mismo procedimiento pero esta vez dejando un voltaje constante de 35kV y haciendo un barrido de corrientes de 0.1 a 1mA. Obteniendo finalmente unos valores para b_α y de b_β de 66.42 y 16.96, respectivamente

Finalmente, intentamos verificar la ley de desplazamiento de Duane-Hunt y calcular la constante de Planck. En esta sección logramos ver exitosamente la ley de desplazamiento de Duane-Hunt, haciendo un barrido a diferentes tensiones, variando en angulo de incidencia de los rayos X sobre el cristal medimos diferentes intensidades, con las cuales comprobamos la generación de rayos X por bremsstrahlung, donde se producen rayos X por el brusco frenamiento de partículas cargadas (en nuestro caso electrones). Esta observación fue el resultado de lograr ver un claro pico de intensidad al hacer el barrido de ángulos (encontrado a los 20.5°), no obstante, nuestra toma de datos tuvo una significativa cantidad de ruido, por lo cual más cálculos o conclusiones tendrán un gran error asociado. Aún así proseguimos con el calculo experimental de h , para esto usamos las longitudes de onda mínima alas cuales empezábamos a ver bremsstrahlung y el inverso de la tensión, sin embargo, fue imposible llegar a un valor cercano al teórico. Nuestros resultados nos llevaron a calcular un valor de $h = 11,03 * 10^{-36} \pm 1,048 * 10^{-36}$, que se aleja considerablemente de la realidad. Creemos que nuestros resultados son consecuencia directa de la alta cantidad de ruido en el experimento, si se desea encontrar un valor más exacto, creemos que es necesario hacer una toma de datos más extensiva para mitigar el efecto del ruido o encontrar una forma de minimizar el ruido que hay en el experimento.

-
- [1] Deutsch, M., Hölzer, G., Härtwig, J., Wolf, J., Fritsch, M., and Förster, E. (1995). $K\alpha$ and $k\beta$ x-ray emission spectra of copper. *Phys. Rev. A*, 51:283–296.
 - [2] HyperPhysics (Year you accessed the page). X-ray characteristics. Accessed on Month Day, Year.
 - [3] Nüsslin, F. (2020). Wilhelm conrad röntgen: The scientist and his discovery. *Physica Medica*, 79:65–68. 125 Years of X-Rays.
 - [4] Stumm von Bordwehr, R. (1989). A history of x-ray absorption fine structure. *Ann. Phys. Fr.*, 14(4):377–465.

APÉNDICE DE CÁLCULO DE ERRORES

Parte 2 Para el cálculo de tasa vs grosor, donde grosor es una cantidad conocida y no medida. Con pendiente m (coeficiente de absorción lineal), tasa V y grosor g :

$$\sigma m = \sqrt{\frac{\delta m}{\delta V}^2 \sigma_V^2 + \frac{\delta m}{\delta g}^2 \sigma_g^2}$$

$$\sigma_m = \sqrt{\left(\frac{\delta m}{\delta V}\right)^2} \sigma_V$$

$$\sigma_m = \frac{\delta m}{\delta V} \sigma_V$$

$$\sigma_m = 50$$

Para el cálculo de $\lambda = 2d \sin \theta$

$$\sigma_\lambda = \sqrt{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \theta}\right)^2} \sigma_\theta$$

$$\sigma_\lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \sigma_\theta$$

$$\sigma_\lambda = 2d \cos \theta * 0,1 \quad (13)$$

Para el cálculo de $E = \frac{hc}{\lambda}$

$$\sigma_E = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial \lambda}\right)^2} \sigma_\lambda$$

$$\sigma_E = \frac{\partial E}{\partial \lambda} \sigma_\lambda$$

$$\sigma_E = \frac{hc}{\lambda^2} \sigma_\lambda \quad (14)$$

$$m = b * I_A \Rightarrow b = \frac{m}{I_A}$$

$$\therefore b_\alpha = \frac{67,68}{1} = 67,68 \quad (15)$$

$$\therefore b_\beta = \frac{17,34}{1} = 17,34$$

$$m = b * (U_A - U_K)^{3/2} \Rightarrow b = \frac{m}{(U_A - U_K)^{3/2}}$$

$$\therefore b_\alpha = \frac{8313,45}{(35 - 9,979)^{3/2}} = 66,42 \quad (16)$$

$$\therefore b_\beta = \frac{2123,3}{(35 - 9,979)^{3/2}} = 16,96$$