4. $\int_a^b \frac{f'''(\xi)}{4!}(x-a)(x-b)\left(x-\frac{(a+b)}{2}\right)dx$

$= \frac{f'''(\xi)}{4!}\int_a^b (x^2-ax-bx+ab)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx$

$= \frac{f'''(\xi)}{4!}\int_a^b \left(x^3-ax^2-bx^2+abx-\frac{a}{2}x^2-\frac{b}{2}x^2+\frac{a^2}{2}x+\frac{ab}{2}x+\frac{ab}{2}x+\frac{b^2}{2}x\right.$
$\left.-\frac{a^2b}{2}-\frac{b^2a}{2}\right)dx$

$= \frac{f'''(\xi)}{4!}\int_a^b x^3-\frac{3}{2}ax^2-\frac{3}{2}bx^2+2abx+\frac{a^2+b^2}{2}x-\frac{ab(a+b)}{2}\,dx$

$= \frac{f'''(\xi)}{4!}\int_a^b x^3-\frac{3}{2}(a+b)x^2+\left(\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2+ab\right)x-\frac{ab(a+b)}{2}\,dx$

$= \frac{f'''(\xi)}{4!}\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}(a+b)x^3+\frac{1}{2}\left(\frac{(a+b)^2}{2}+ab\right)x^2-\frac{ab(a+b)}{2}x\Big|_a^b\right]$

$= \frac{f'''(\xi)}{4!}\left[\frac{1}{2}x\left(\frac{1}{2}x^3-(a+b)x^2+\left(\frac{(a+b)^2}{2}+ab\right)x-ab(a+b)\right)\Big|_a^b\right]$

$$= \frac{f'''(\xi)}{4!}\left[\frac{1}{2}x\left(\frac{1}{2}x^3+(a+b)x\left(\frac{(a+b)-2x}{2}\right)\right)+ab(x-a-b)\Big|_a^b\right]$$

$$= \frac{f'''(\xi)}{4!\cdot 2}\Big[b\left(\frac{1}{2}b^3+(a+b)b\left(\frac{a+b-2b}{2}\right)+ab(b-a-b)\right)$$

$$-a\left(\frac{1}{2}a^3+(a+b)a\left(\frac{a+b-2a}{2}\right)+ab(a-a-b)\right)\Big]$$

$$= \frac{f'''(\xi)}{4!\cdot 2}\Big[b\left(\frac{1}{2}b^3+\frac{(a+b)(a-b)}{2}b-a^2b\right)$$

$$-a\left(\frac{1}{2}a^3+\frac{(b+a)(b-a)}{2}a-ab^2\right)\Big]$$

$$= \frac{f'''(\xi)}{4!\,2}\left[b^2\left(\frac{1}{2}b^2 + \frac{a^2-b^2}{2} - a^2\right) - a^2\left(\frac{1}{2}a^2 + \frac{b^2-a^2}{2} - b^2\right)\right]$$

$$= \frac{f'''(\xi)}{4!\,2}\left[b^2\left(-\frac{a^2}{2}\right) - a^2\left(-\frac{1}{2}b^2\right)\right]$$

$$= \frac{f'''(\xi)}{4!\,2}\left[\frac{-b^2a^2}{2} + \frac{b^2a^2}{2}\right] = 0$$ iuff!