(5) Sea A una matriz triangular superior $n\times n$ y b un vector columna $(n\times 1)$ que se obtienen al llevar un sistema de ecuaciones lineales a su forma triangular superior, por medio de operaciones elementales, tales que:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots 0 & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad a_{ij} = 0 \text{ si } j < i$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Supongo que $a_{ij} \neq 0$ cuando $i = j$; el sistema de ecuaciones sería de la forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \Rightarrow x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

Si despejamos para x_{n-1} en la fila $n-1$ tenemos que

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{(n-1)n}x_n}{a_{(n-1)(n-1)}};$$ como x_n es conocido $\Rightarrow x_{n-1}$ es conocido por sustitución

De modo que podemos obtener x_{n-2}, sustituyendo x_{n-1} y x_n en su respectiva ecuación. Nótese que, despejando para x_{n-2} en la fila $n-2$, se tiene:

$$x_{n-2} = \frac{b_{n-2} - a_{(n-2)(n-1)}x_{n-1} - a_{(n-2)(n)}x_n}{a_{(n-2)(n-2)}} = \frac{b_{n-2} - \sum_{j=n-1}^{n} a_{(n-2)j}x_j}{a_{(n-2)(n-2)}}$$

Por lo que, de forma general el despeje para cada x_i es:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}};$$ y su valor se puede encontrar haciendo la sustitución de cada x_j, $j \geq i+1$, cuyos valores son conocidos al llevar a cabo el mismo proceso para cada j, comenzando desde n y de forma regresiva