Sea $f(x)$ un polin interp de grado n de la forma:

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \dots a_n x^n$

para un conjunto Ω con $n+1$ puntos

Sup que $\exists\, g(x)$ de grado n, de la forma

$g(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n$ tal que se satisface en el mismo conjunto Ω, es decir

$(x_i, f(x_i)) = (x_i, g(x_i))$

Si en los dos polinomios, los evaluamos para cada $x_i \in \Omega$ y los igualamos a $f(x_i)$ o $g(x_i)$ respect, podemos armar un sistema de ecuaciones lineal con una matriz de "Vandermonde":

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ \vdots \\ g(x_n) \end{bmatrix}$$

dado que $x_i \neq x_j, \forall i,j : i \neq j$ y recurriendo a la definición del determinante de la matriz de Vandermonde:

$$\det(A) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

Podemos afirmar que $x_j - x_i \neq 0, \forall i,j$

$\Rightarrow \det(A) \neq 0$

$\Rightarrow$ El sistema tiene una única solución

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Como acabamos de comprobar que $f(x)$ y $g(x)$ tienen los mismos coeficientes

$$\Rightarrow \underline{f(x) = g(x)}$$