Teoría

Ecuación Lineal

Definición: Una ecuación lineal con n incógnitas $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ es una igualdad de la forma:

**$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$

en la que todos y cada uno de los a_i como también b son constantes conocidas y tanto ellas como los x_i pertenecen a algún cuerpo de números que en general y en nuestro curso, será el cuerpo de los números reales, aunque también puede ser el cuerpo de los complejos. Los a_i se denominan coeficientes, b se denomina término independiente y los $x_i$incógnitas o variables. La ecuación será lineal cuando todas y cada una de las variables x_i tengan exponente 1.

Resolver una ecuación lineal, significa encontrar los valores de las incógnitas x_i de modo que reemplazados en la ecuación, la igualdad sea **verdadera**.

Si $n \geqslant 2$, para encontrar la solución, será necesario expresar una de las variables en función de las restantes. En consecuencia, habrá $n-1$ incógnitas que podrán tomar cualquier valor. A este tipo de variables las denominamos **variables libres** o **independientes**, el valor de la variable restante que se expresa en función de las variables libres, dependerá del valor que tomen éstas últimas, motivo por el cual la denominamos **variables dependientes**.

Sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas

Definimos a un sistema (I) de m ecuaciones lineales con n incógnitas al conjunto finito de m ecuaciones que se escriben de la forma:
Resolver un sistema de ecuaciones lineales como el (I) significa encontrar los valores de las variables $x_i, i = 1, 2, ..., n$, de manera que, al reemplazarlos en todas y cada una de las m ecuaciones de (I), estas se conviertan en igualdades verdaderas. En otras palabras, encontrar la solución de (I) es hallar valores $x_i = c_i, i = 1, 2, ..., n$, de manera que la n-upla de números $(c_1, c_2, c_3, ..., c_n)$ sea solución de todas y cada una de las m ecuaciones de (I). Es decir, la
n-upla de números $(c_1, c_2, c_3, ..., c_n)$ es solución del sistema (I) si al reemplazar

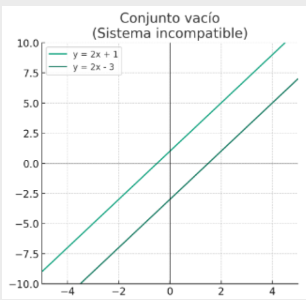
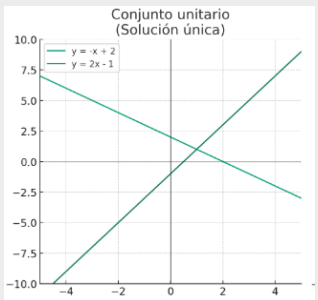
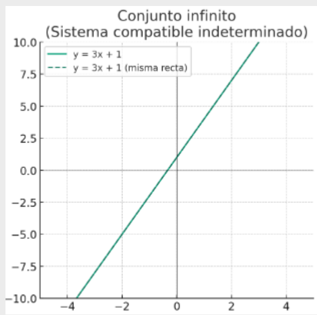
en todas y cada una de las ecuaciones los valores $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \ldots, x_n = c_n$ las igualdades son todas verdaderas.

Al conjunto de todas las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales lo denominamos **conjunto solución** del sistema.

Clasificación de los sistemas

- Compatible/consistente determinado: El sistema tiene solución única (no existen variables libres).
- Compatible/consistente indeterminado: El sistema tiene infinitas soluciones (existen variables libres).
- Incompatible/inconsistente: El sistema no tiene solución, por lo menos una de las ecuaciones del sistema presenta una igualdad falsa.
- Homogéneo: Si todas las ecuaciones del sistema son iguales a cero (0). Un sistema homogéneo siempre es compatible. Puede tener:
  - Infinitas soluciones: $ax = b$, donde $a = 0$ y $b = 0$.
  - Única solución: es aquel en el que todos los términos constantes (los términos que no tienen variables) de cada ecuación son iguales a cero. *Solución trivial*.
- No homogéneo: Si al menos uno de los términos independientes de una ecuación es distinto de cero.

El conjunto solución de ecuaciones lineales será:

Tipo	**Conjunto vacío: denotado por $\varnothing$, cuando el sistema es incompatible Representación gráfica en $\mathbb{R}^2$**	**Conjunto unitario: solución única, si y solo si el sistema es compatible determinado.**	**Conjunto infinito: Si el sistema de ecuaciones lineales es compatible indeterminado**
Representación gráfica en $\mathbb{R}^2$			

Se dice que dos sistemas lineales son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto solución.

Un método apropiado para resolver sistemas de ecuaciones lineales será transformarlo en otros sistemas equivalentes, pero donde la solución sea *fácilmente determinable*. Existen operaciones que no cambian el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales, es decir, permiten obtener sistemas equivalentes. Dichas operaciones se denominan operaciones elementales entre ecuaciones y, si trabajamos con matrices, las operaciones toman el nombre de **operaciones elementales entre filas.**

Operaciones elementales entre filas

1. Intercambiar dos filas
2. Multiplicar una fila por una constante no nula.
3. Sumarle a una fila un múltiplo no nulo de otra.

Tipos de matrices

Matrices equivalentes por filas	Matriz escalonada	Matriz escalonada reducida por filas
Decimos que B es equivalente por filas a A o que A y B son equivalentes por filas, si B se puede obtener de A, mediante operaciones elementales en las filas de A.	Denominamos así a toda matriz que cumple: -Las filas nulas (si las hay) se ubican al final. -En cada fila, el primer elemento distinto de cero (pívot) de cada fila no nula, está a la derecha del primer elemento diferente de cero de las filas anteriores	Decimos que una matriz A esta en la forma escalonada reducida por filas si cumple: - Es una matriz escalonada. - Los pivotes de cada fila tienen valor 1. - Los elementos por encima de los pivotes son nulos (ceros).

Método de Gauss

El método de gauss consiste en una generalización del método de eliminación, para ello, utiliza un algoritmo que trabaja solo con los coeficientes de las variables y el termino independiente en cada una de las ecuaciones. Luego, se considera cada una de las ecuaciones como una fila de números constituidos por los coeficientes de las variables ordenadas y el termino independiente y al conjunto de esas filas ordenadas las denominamos matriz de los coeficientes (filas que contienen solo los coeficientes) y **matriz ampliada** (filas a las que se agrega el termino independiente). Por ejemplo, sea el sistema:

$$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 5x+4y=6 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ Es su matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ Es su matriz ampliada

Entonces, para continuar con el método, se trabajará a partir de la matriz **ampliada** del sistema. El procedimiento a seguir es el siguiente:

1. **Verificar el pivote**: Se comprueba que el coeficiente de la primera variable (pivote) en la primera fila sea distinto de cero.
   - Si es distinto de cero, se copia directamente la primera fila.
   - Si es igual a cero, se intercambia la fila por otra que tenga un elemento no nulo en esa misma posición.
2. **Eliminar los valores debajo del pivote**: Se transforman en cero todos los elementos ubicados debajo del pivote en la misma columna.
3. **Actualizar el resto de los elementos:** Para cada uno de los elementos restantes en las filas inferiores, se aplica la siguiente operación:
   - Se multiplica "en cruz": el pivote por el elemento correspondiente de la fila actual, y luego el primer elemento de esa fila por el elemento correspondiente de la fila del pivote.
   - Restando ambos productos, se obtiene el nuevo valor del elemento.

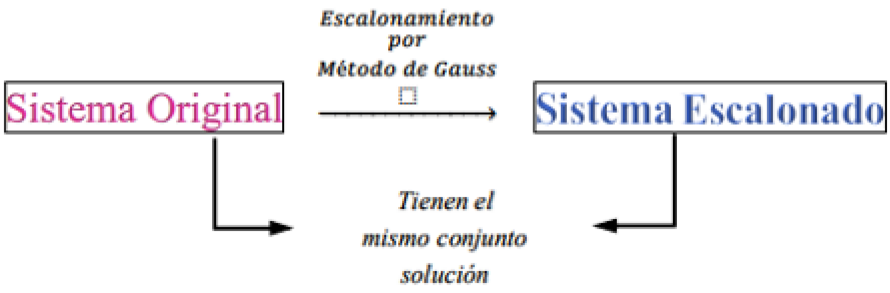
Este procedimiento se repite recursivamente en las submatrices que se van formando, ignorando en cada paso la fila y columna ya trabajadas. En cada submatriz, se selecciona un nuevo pivote y se repite el proceso hasta escalonar toda la matriz (excepto la última fila).

Una vez finalizado el proceso de escalonamiento, se obtiene una matriz escalonada equivalente al sistema original. La **solución del sistema** puede determinarse por sustitución regresiva, es decir:

- Se despeja la última incógnita a partir de la última ecuación.
- Luego, se sustituyen sus valores hacia arriba en las ecuaciones anteriores.

La solución obtenida (en caso de existir) será también solución del sistema original, ya que ambos sistemas son equivalentes.

Los pasos anteriormente mencionados deben procurar que, excepto en la primera ecuación, cada fila tenga una variable menos que la anterior. Una vez que se obtiene la forma escalonada del sistema lineal, se procede a determinar sus soluciones. En síntesis, es un método de eliminación que escalona el sistema aplicando operaciones elementales por filas, con el fin de obtener un sistema equivalente en forma escalonada, cuya resolución resulte más cómoda.



Así, el proceso de resolución de un sistema de ecuaciones lineales utilizando el algoritmo de Gauss puede resumirse en los siguientes pasos:

1. Escribir la matriz ampliada del sistema.
2. Aplicar el algoritmo de Gauss para escalonar la matriz ampliada y obtener un sistema escalonado equivalente.
3. **Analizar el sistema escalonado:**

- Si al menos una de sus ecuaciones representa una inconsistencia (una igualdad siempre falsa), entonces el sistema es **inconsistente**, es decir, **no tiene solución**.
- En caso contrario, el sistema es consistente, es decir, tiene al menos **una** solución.

1. Determinar el tipo de solución:
   - Se calcula la diferencia $N = n - r$, donde:
     - n: número de incógnitas del sistema original,
     - r: número de ecuaciones no nulas del sistema escalonado,
     - N: número de variables libres.
     Entonces:
     - Si $r = n \Rightarrow N = 0$: no hay variables libres, **el sistema tiene solución única**.
     - Si $r < n \Rightarrow N > 0$: hay variables libres, **el sistema tiene infinitas soluciones**.

Observación: Nunca puede ocurrir que, luego del proceso de escalonamiento, se cumpla que $r > n$, es decir, $N < 0$. Si nos encontramos con esa situación, es porque aún no hemos terminado el proceso de escalonamiento, es decir, el sistema todavía no está correctamente escalonado.

Método Gauss-Jordan

Este método consiste en realizar un doble escalonamiento. Luego de haberse aplicado el proceso de escalonamiento de Gauss, a la matriz ampliada del sistema, se aplica nuevamente el proceso pero ahora en **forma inversa**, es decir partiendo de la última ecuación y eliminando sucesivamente las variables en las ecuaciones que se encuentran por arriba de la última. Esto permitirá obtener una matriz de forma que sus filas sólo contengan una constante no nula que es 1, por lo que la respectiva ecuación en el sistema escalonado equivalente solo contiene una de las incógnitas en su primer miembro, de tal forma que ya quedan determinadas -despejadas-. esto es, luego de terminado el proceso, la matriz de coeficientes del sistema se ha trasformado en la **matriz identidad**.

$$\text{Sistema} \Rightarrow \underset{\text{Matriz ampliada}}{(A/B)} \quad \begin{array}{c}\text{Proceso de Gauss}\\ \text{Operaciones elementales entre filas}\end{array} \quad \Rightarrow \underset{\text{Matriz ampliada escalonada}}{(A'/B')} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c}\text{Proceso de Jordan}\\ \text{Operaciones elementales entre filas}\end{array} \quad \Rightarrow \underset{\text{Matriz ampliada escalonada reducida por filas}}{(I/B')}$$

Sistema de Ecuaciones Lineales con Parámetros

Se denominan sistemas de ecuaciones lineales paramétricos a aquellos en los que al menos un coeficiente o un término independiente **depende de un parámetro**. Debido a esto, el sistema no representa una única situación, sino una familia de sistemas, donde cada valor que tome el parámetro genera un sistema distinto, con su propio conjunto solución.

En otras palabras, resolver un sistema con parámetros implica analizar para qué valores del parámetro:

el sistema es incompatible (no tiene solución), es compatible determinado (tiene una única solución), o es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones).

Por lo tanto, el objetivo es encontrar el conjunto de valores del parámetro que permita distinguir:

- entre sistemas consistentes (con solución) e inconsistentes (sin solución), y, dentro de los consistentes, cuáles tienen una única solución y cuáles tienen infinitas soluciones. Esto se logra analizando el sistema escalonado resultante luego de aplicar el método de Gauss, considerando que la naturaleza del sistema depende de cómo afectan los valores del parámetro a las condiciones de existencia y unicidad de solución.

Importante:

- **No se debe tomar un parámetro como pivote** durante el escalonamiento, ya que podría anularse dependiendo del valor que tome. Si no hay otra opción, se deben establecer condiciones para que ese parámetro **no sea nulo**.

- El intercambio de filas es una herramienta útil para evitar que el parámetro quede como pivote.

En resumen, resolver un sistema con parámetros implica comprender y aplicar: el concepto de solución de un sistema y las condiciones necesarias y suficientes para que un sistema sea:

- Incompatible.
- Compatible determinado.
- Compatible indeterminado.