確率と統計　第 4 回

確率の考え方

5 月 11 日

Table of contents

エスパー X の誕生

エスパー X の誕生

不思議な夢から目覚めた朝, 突然 X の透視能力が覚醒した.

エスパー X の誕生

不思議な夢から目覚めた朝, 突然 X の透視能力が覚醒した.そこで力を検証するために友人を喫茶店に呼び出し, コインの表と裏を当てるとても古典的な実験を行った.

エスパー X の誕生

不思議な夢から目覚めた朝, 突然 X の透視能力が覚醒した.そこで力を検証するために友人を喫茶店に呼び出し, コインの表と裏を当てるとても古典的な実験を行った. その結果 100 回中 70 回言い当てた.

エスパー X の誕生

不思議な夢から目覚めた朝, 突然 X の透視能力が覚醒した.そこで力を検証するために友人を喫茶店に呼び出し, コインの表と裏を当てるとても古典的な実験を行った. その結果 100 回中 70 回言い当てた.

X は本当に透視能力を身につけたと判断できるか?

仮説検定の考え方

仮説検定の考え方

帰無仮説: X は透視能力は身につけていない.

p 対立仮説: X は透視能力を身につけた.

帰無仮説を仮定する. するとコインの表裏を当てる確率は半々のはず.

帰無仮説を仮定する．するとコインの表裏を当てる確率は半々のはず．この時，言い当てる回数を K とすると，

帰無仮説を仮定する．するとコインの表裏を当てる確率は半々のはず．この時，言い当てる回数を K とすると，その Z 変換

$$Z = \frac{K - 100 \cdot 0.5}{\sqrt{100 \cdot 0.5 \cdot 0.5}}$$

の分布はほぼ中心 0 分散 1 の正規分布に従うことが知られている．

この正規分布から 70 回以上言い当てる確率は 0.032%以下であることがわかる.

この正規分布から 70 回以上言い当てる確率は 0.032%以下であることがわかる.

つまり, 帰無仮説が正しいとすると確率 0.032% 以下のありえない出来事が起こったことになる.

この正規分布から 70 回以上言い当てる確率は 0.032%以下であることがわかる.

つまり, 帰無仮説が正しいとすると確率 0.032% 以下のありえない出来事が起こったことになる.

このことから, 無帰仮説は正しくなく, 対立仮説が正しいと考えるのが妥当. (結論: X は本当にエスパーにめざめたと判断できる.)

標本空間と事象

標本空間と事象

1 つの試行を考える.

標本空間と事象

1 つの試行を考える.

定義

可能な結果全部からなる集合を**標本空間**と呼び, Ω と書く.

標本空間と事象

1 つの試行を考える.

定義

可能な結果全部からなる集合を**標本空間**と呼び,
Ω と書く.

定義

起こり得る事柄を**事象**という. 事象は標本空間
Ω の部分集合で表される.

サイコロの例

サイコロの例

2 個のサイコロを振る試行を考える.

サイコロの例

2 個のサイコロを振る試行を考える．結果全部からなる標本空間は

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),\dots,(6,6)\}$$

で，$6 \times 6 = 36$ 個の標本点からなる．

サイコロの例

2 個のサイコロを振る試行を考える．結果全部からなる標本空間は

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),\dots,(6,6)\}$$

で, $6 \times 6 = 36$ 個の標本点からなる.和が 4 になる事象 A は

$$A = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}.$$

事象の演算

事象の演算

和事象　$A \cup B$　(A または B)

事象の演算

和事象	$A \cup B$	(A または B)
積事象	$A \cap B$	(A かつ B)

事象の演算

和事象	$A \cup B$	(A または B)
積事象	$A \cap B$	(A かつ B)
補事象	A^c	(A でない)

事象の演算

和事象　$A \cup B$　(A または B)

積事象　$A \cap B$　(A かつ B)

補事象　A^c　(A でない)

排反事象　$A \cap B = \emptyset$　(A と B が同時に起こることはない)

事象の演算

和事象　$A \cup B$　(A または B)

積事象　$A \cap B$　(A かつ B)

補事象　A^c　(A でない)

排反事象　$A \cap B = \emptyset$　(A と B が同時に起こることはない)

分配法則

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

事象の演算

和事象　$A \cup B$　(A または B)

積事象　$A \cap B$　(A かつ B)

補事象　A^c　(A でない)

排反事象　$A \cap B = \emptyset$　(A と B が同時に起こることはない)

分配法則

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

ド・モルガンの法則

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

確率の定義

確率の定義

確率とは事象の起こりやすさを表す数値で, 事象 A の起こる確率を $P(A)$ とかく.

ラプラスの定義

ラプラスの定義

標本空間 Ω のすべての標本点は同程度に確からしいとする.

ラプラスの定義

標本空間 Ω のすべての標本点は同程度に確からしいとする.標本空間 Ω の点の総数を N, 事象 A の含む点の総数を R とするとき, 事象 A が起こる確率を

ラプラスの定義

標本空間 Ω のすべての標本点は同程度に確からしいとする.標本空間 Ω の点の総数を N, 事象 A の含む点の総数を R とするとき, 事象 A が起こる確率を

$$P(A) = \frac{R}{N}$$

と割合で定義する.

頻度による確率の定義

頻度による確率の定義

試行の回数を n, そのうち事象 A が起こった回数を n_A とする.

頻度による確率の定義

試行の回数を n, そのうち事象 A が起こった回数を n_A とする. n をどんどん大きくをした時の n_A/n が収束する値を事象 A が起こる確率 $P(A)$ と定義する.

確率が満たす性質

確率が満たす性質

(a) すべての事象 A について $0 \leqq P(A) \leqq 1$.

確率が満たす性質

(a) すべての事象 A について $0 \leqq P(A) \leqq 1$.

(b) 標本空間 Ω について $P(\Omega) = 1$.

確率が満たす性質

(a) すべての事象 A について $0 \leqq P(A) \leqq 1$.

(b) 標本空間 Ω について $P(\Omega) = 1$.

(c) 互いに排反な事象 $A_1, A_2, \dots$ にたいして

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots.$$

確率が満たす性質

(a) すべての事象 A について $0 \leqq P(A) \leqq 1$.
(b) 標本空間 Ω について $P(\Omega) = 1$.
(c) 互いに排反な事象 $A_1, A_2, \ldots$ にたいして

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots.$$

逆にこの性質を満たす P を確率と定義するとき，この性質を**確率の公理**という．

加法定理

加法定理

事象 A と B について，

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

加法定理

事象 A と B について,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

とくに A と B が排反 $(A \cap B = \emptyset)$ であれば,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

条件付き確率

条件付き確率

事象 A が起こったとわかっている場合に事象 B が起こる確率を,

条件付き確率

事象 A が起こったとわかっている場合に事象 B が起こる確率を, 事象 A を条件とする事象 B の条件付き確率といい, $P(B|A)$ と書く.

条件付き確率

事象 A が起こったとわかっている場合に事象 B が起こる確率を, **事象 A を条件とする事象 B の条件付き確率**といい, $P(B|A)$ と書く. $P(B|A)$ は

$$P(B|A) := \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

で定義される.

条件付き確率の性質

条件付き確率の性質

(a) $P(A|A) = 1.$

条件付き確率の性質

(a) $P(A|A) = 1.$

(b) $B_1, B_2, \ldots$ が排反のとき,
$P(B_1 \cup B_2 \cup \ldots |A) = P(B_1|A) + P(B_2|A) + \ldots$

条件付き確率の性質

(a) $P(A|A) = 1.$

(b) $B_1, B_2, \ldots$ が排反のとき,
$P(B_1 \cup B_2 \cup \ldots |A) = P(B_1|A) + P(B_2|A) + \ldots$

事象の独立性

事象の独立性

事象 A と B が

$$P(B|A) = P(B)$$

を満たすとき, 事象 A と B は独立であるという.

事象の独立性

事象 A と B が

$$P(B|A) = P(B)$$

を満たすとき, 事象 A と B は独立であるという.

この条件は $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ と同値.

主観確率

主観確率

はじめにみた確率の定義では誰が計算しても確率は同じ値をとるはずであり, 客観的に決定される.

主観確率

はじめにみた確率の定義では誰が計算しても確率は同じ値をとるはずであり，客観的に決定される．

一方で観測者の持つ情報によって確率は変化するものとする主観的な立場に立つ確率を**主観確率**という．

ベイズの定理

ベイズの定理

結果から原因を推定したい.

ベイズの定理

結果から原因を推定したい.このとき以下のベイズの定理をつかう:

ベイズの定理

結果から原因を推定したい.このとき以下のベイズの定理をつかう:

事象 A を結果とする.

ベイズの定理

結果から原因を推定したい.このとき以下のベイズの定理をつかう:

事象 A を結果とする.
事象 $H_1, H_2, \ldots, H_k$ を k 通りの原因とする.

ベイズの定理

結果から原因を推定したい.このとき以下のベイズの定理をつかう:

事象 A を結果とする.
事象 $H_1, H_2, \ldots, H_k$ を k 通りの原因とする.
事象 $H_1, H_2, \ldots, H_k$ は互いに排反で, 標本空間は $\Omega = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_k$ を満たすとする.

ベイズの定理

結果から原因を推定したい.このとき以下のベイズの定理をつかう:

事象 A を結果とする.
事象 $H_1, H_2, \ldots, H_k$ を k 通りの原因とする.
事象 $H_1, H_2, \ldots, H_k$ は互いに排反で, 標本空間は $\Omega = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_k$ を満たすとする.

以上の仮定の下で, 次が成り立つ:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(H_j)P(A|H_j)}.$$

ベイズの定理

結果から原因を推定したい.このとき以下のベイズの定理をつかう:

事象 A を結果とする.
事象 $H_1, H_2, \ldots, H_k$ を k 通りの原因とする.
事象 $H_1, H_2, \ldots, H_k$ は互いに排反で, 標本空間は $\Omega = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_k$ を満たすとする.

以上の仮定の下で, 次が成り立つ:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(H_j)P(A|H_j)}.$$

ここで, $P(H_i)$ を事前確率, $P(H_i|A)$ を事後確率という.