確率と統計　第 11 回

統計的推測の感覚をつかむ

6 月 29 日

Table of contents

推定と誤差

推定は必ず誤差を伴う.

推定と誤差

推定は必ず誤差を伴う．例えば，市民全体の中でのある候補者の支持率 p を 100 人を抽出した街頭アンケートで調査するとき，その推定値 $\hat{p}$ は 2 つの要因によって変動する:

推定と誤差

推定は必ず誤差を伴う. 例えば, 市民全体の中でのある候補者の支持率 p を 100 人を抽出した街頭アンケートで調査するとき, その推定値 $\hat{p}$ は 2 つの要因によって変動する:

(a) 標本ごとの推定値のばらつき (標本誤差).

推定と誤差

推定は必ず誤差を伴う. 例えば, 市民全体の中でのある候補者の支持率 p を 100 人を抽出した街頭アンケートで調査するとき, その推定値 $\hat{p}$ は 2 つの要因によって変動する:

(a) 標本ごとの推定値のばらつき (標本誤差).
(b) データ収集時の不備 (偏り).

推定の変動性

推定の変動性

太陽光エネルギーの利用拡大を支持するアメリカ合衆国の成人の比率を $p = 0.88$ とする.

推定の変動性

太陽光エネルギーの利用拡大を支持するアメリカ合衆国の成人の比率を $p = 0.88$ とする.この母集団から無作為に 1000 人の標本抽出を行い支持の標本比率 $\hat{p}$ を計算する操作を繰り返す.

推定の変動性

太陽光エネルギーの利用拡大を支持するアメリカ合衆国の成人の比率を $p = 0.88$ とする.この母集団から無作為に 1000 人の標本抽出を行い支持の標本比率 $\hat{p}$ を計算する操作を繰り返す.

このときの $\hat{p}$ の分布を標本分布といい, その平均的な変動である標準偏差を標準誤差 (SE) という.

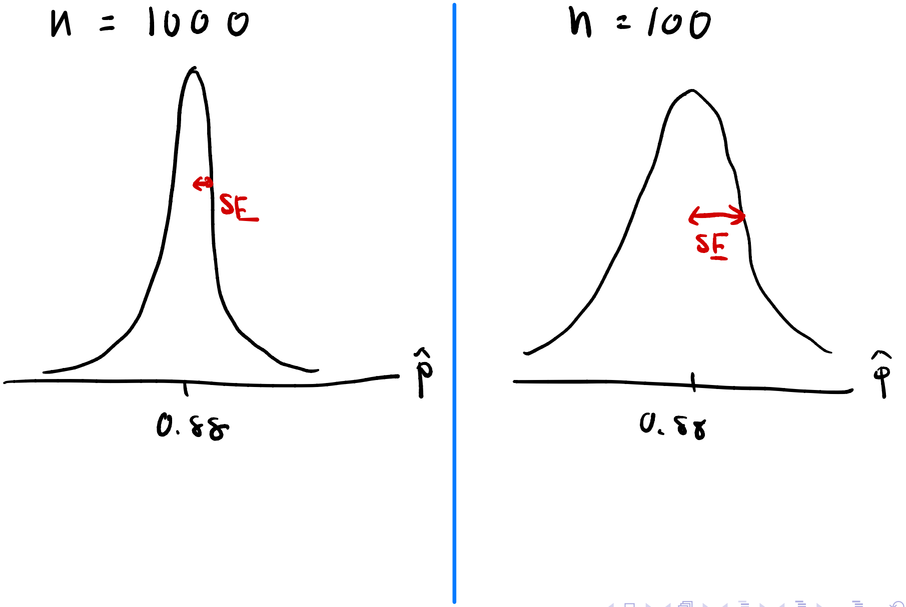
推定の変動性

太陽光エネルギーの利用拡大を支持するアメリカ合衆国の成人の比率を $p = 0.88$ とする. この母集団から無作為に 1000 人の標本抽出を行い支持の標本比率 $\hat{p}$ を計算する操作を繰り返す.

このときの $\hat{p}$ の分布を標本分布といい, その平均的な変動である標準偏差を標準誤差 (SE) という.

上記の例では $\hat{p}$ の値のヒストグラムは次の図のようになる.

サンプルサイズによる変動性の差



中心極限定理とその適用条件

中心極限定理とその適用条件

標本比率 $\hat{p}$ の分布は以下の条件 (a) と (b) を満たすとき,

標準偏差

$$\text{平均}\mu = p, \quad \cancel{\text{分散}}SE = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

の正規分布 $N(\mu, SE)$ で近似できる:

中心極限定理とその適用条件

標本比率 $\hat{p}$ の分布は以下の条件 (a) と (b) を満たすとき,

標準偏差

$$\text{平均}\mu = p, \quad \cancel{\text{分散}}SE = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

の正規分布 $N(\mu, SE)$ で近似できる:

(a) 観測値は独立で, 標本サイズ n が十分に大きい.

中心極限定理とその適用条件

標本比率 $\hat{p}$ の分布は以下の条件 (a) と (b) を満たすとき,

標準偏差.

$$\text{平均}\mu = p, \quad \cancel{\text{分散}} SE = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

の正規分布 $N(\mu, SE)$ で近似できる:

(a) 観測値は独立で, 標本サイズ n が十分に大きい.

(b) 成功・失敗条件 $np \geq 10$ かつ $n(1-p) \geq 10$.

例題

(a) 母比率が $p = 0.8$ で標本サイズが $n = 500$ のとき, 標本比率 $\hat{p}$ が従う分布を求めよ.

(b) 標本サイズが $n = 100$ のときはどうか.

代入原理

代入原理

上記の例題では母比率 p の値を使って標本比率 $\hat{p}$ の標準誤差 $SE = \sqrt{p(1-p)/n}$ を求めたが, 現実の問題で母比率 p が与えられることはない.

代入原理

上記の例題では母比率 p の値を使って標本比率 $\hat{p}$ の標準誤差 $SE = \sqrt{p(1-p)/n}$ を求めたが, 現実の問題で母比率 p が与えられることはない.

そこで, p の代わりに $\hat{p}$ を使って成功・失敗条件を確認し, $SE = \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}$ として標準誤差を計算する.

95%信頼区間を求める

95%信頼区間を求める

ある政策に賛成か反対かを調査する.

95%信頼区間を求める

ある政策に賛成か反対かを調査する.市民全体から 50 人を無作為に抽出し, そのうちの賛成の比率が $\hat{p} = 0.7$ だったとする.

95%信頼区間を求める

ある政策に賛成か反対かを調査する. 市民全体から 50 人を無作為に抽出し, そのうちの賛成の比率が $\hat{p} = 0.7$ だったとする. このときの賛成率 p の95%信頼区間 (95%の割合で p がその間に入る区間) を求める.

95%信頼区間を求める

ある政策に賛成か反対かを調査する.市民全体から 50 人を無作為に抽出し, そのうちの賛成の比率が $\hat{p} = 0.7$ だったとする.このときの賛成率 p の95%信頼区間 (95%の割合で p がその間に入る区間) を求める.

独立性は満たされるとして, 成功・失敗条件をチェックする:

95%信頼区間を求める

ある政策に賛成か反対かを調査する.市民全体から 50 人を無作為に抽出し, そのうちの賛成の比率が $\hat{p} = 0.7$ だったとする.このときの賛成率 p の95%信頼区間 (95%の割合で p がその間に入る区間) を求める.

独立性は満たされるとして, 成功・失敗条件をチェックする:

$$50 \times 0.7 \geq 10 \text{ かつ} 50 \times (1 - 0.7) \geq 10.$$

95%信頼区間を求める

ある政策に賛成か反対かを調査する.市民全体から 50 人を無作為に抽出し, そのうちの賛成の比率が $\hat{p} = 0.7$ だったとする.このときの賛成率 p の95%信頼区間 (95%の割合で p がその間に入る区間) を求める.

独立性は満たされるとして, 成功・失敗条件をチェックする:

$$50 \times 0.7 \geq 10 \text{ かつ} 50 \times (1 - 0.7) \geq 10.$$

ゆえに標本比率 $\hat{p}$ は正規分布に従う.

95%信頼区間を求める

さらに標本比率 $\hat{p}$ が従う正規分布の標準偏差は $SE = \sqrt{0.7 \times (1 - 0.7)/50} = 0.065.$

95%信頼区間を求める

さらに標本比率 $\hat{p}$ が従う正規分布の標準偏差は
$SE = \sqrt{0.7 \times (1 - 0.7)/50} = 0.065.$

一般に正規分布では値の 95%が

$$\text{平均値} \pm 1.96 \times \text{標準偏差}$$

の範囲に入るので,

95%信頼区間を求める

さらに標本比率 $\hat{p}$ が従う正規分布の標準偏差は
$SE = \sqrt{0.7 \times (1 - 0.7)/50} = 0.065.$

一般に正規分布では値の 95%が

$$平均値 \pm 1.96 \times 標準偏差$$

の範囲に入るので,母比率 p の点推定 $\hat{p}$ を使って, p の 95%信頼区間は

$$\hat{p} \pm 1.96 \times SE,$$

つまり $0.7 \pm 1.96 \times 0.065$ となる.

95%信頼区間を求める

さらに標本比率 $\hat{p}$ が従う正規分布の標準偏差は $SE = \sqrt{0.7 \times (1-0.7)/50} = 0.065.$

一般に正規分布では値の 95%が

$$平均値 \pm 1.96 \times 標準偏差$$

の範囲に入るので,母比率 p の点推定 $\hat{p}$ を使って, p の 95%信頼区間は

$$\hat{p} \pm 1.96 \times SE,$$

つまり $0.7 \pm 1.96 \times 0.065$ となる.この信頼区間は,「賛成率が 0.57 と 0.83 の間であることには 95%の信頼性がある」と解釈される.