Mecánica de Fluidos

Grau de Tecnologies Industrials - ESEIAAT

Robert Castilla
Dpt. de Mecànica de Fluids

Curso 2023-24

Contents

Chapter 1

Introducción. Propiedades básicas de los fluidos

1.1 Definición de fluido

Definición corta:

$\boxed{\textbf{Material incapaz de resistir esfuerzos tangenciales}}$

- *esfuerzo* : Fuerza por unidad de superficie
- *tangencial* : ni compresión ni dilatación

Simplificación: **los fluidos son materiales muy fácilmente deformables.**

Pero la separación entre sólidos y fluidos no está clara. Hay materiales que se resiten a una clasificación sencilla. P.e. : pinturas, pastas, polímeros, etc ... Serán analizados en detalle en el tema de **Reología.**

A nivel molecular, la diferencia entre líquidos y gases tiene relación con la magnitud de la fuerza entre moléculas.

En d_0, se produce un equilibrio estable.

Para la mayoria de las moléculas, d_0 es del orden de $3 - 4 \cdot 10^{-10}$ metros.

Para líquidos, la distancia entre moléculas es, aproximadamente, d_0. P.e., para el agua:

$$\rho \approx 1000\,\mathrm{Kg/m^3}$$

$$\text{Peso molecular} \approx 0.018\,\mathrm{Kg/mol} \Rightarrow m = 3.0 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{Kg/molecula}$$

$$V_m = \frac{3.0 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{Kg/molecula}}{1000\,\mathrm{Kg/m^3}} = 3.0 \cdot 10^{-29}\,\mathrm{m^3}$$

$$V_m = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow R \approx 1.9 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$$

Para los gases, la distancia es mucho mayor (Ejercicio: calcular d para el aire).

Así, las fuerzas entre las moléculas de un gas son atractivas y muy débiles. Estas moléculas flotan por el espacio sin prácticamente ninguna interacción excepto las colisiones.

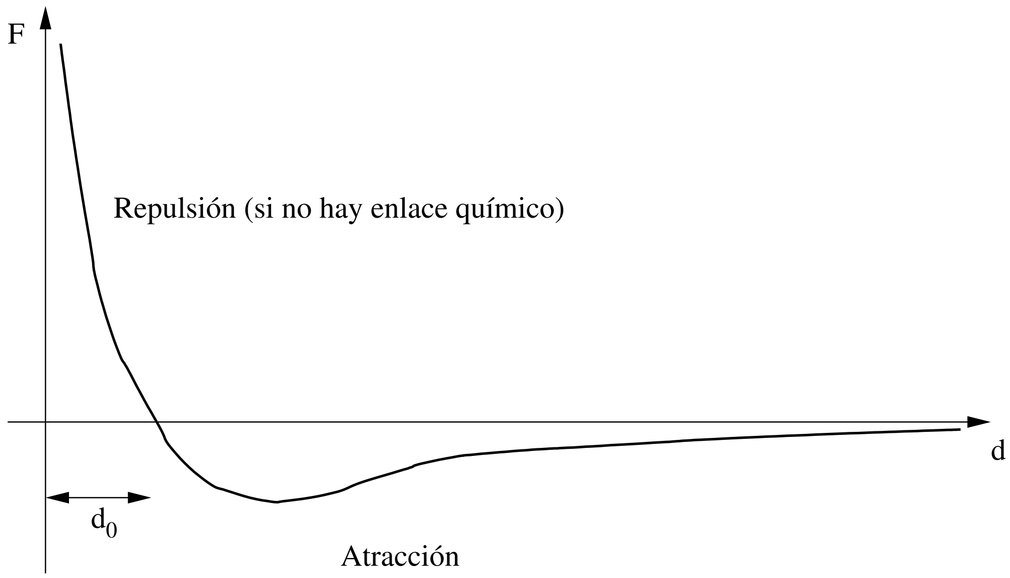


Figure 1.1: Fuerzas intermoleculares

1.2 Hipótesis del medio continuo

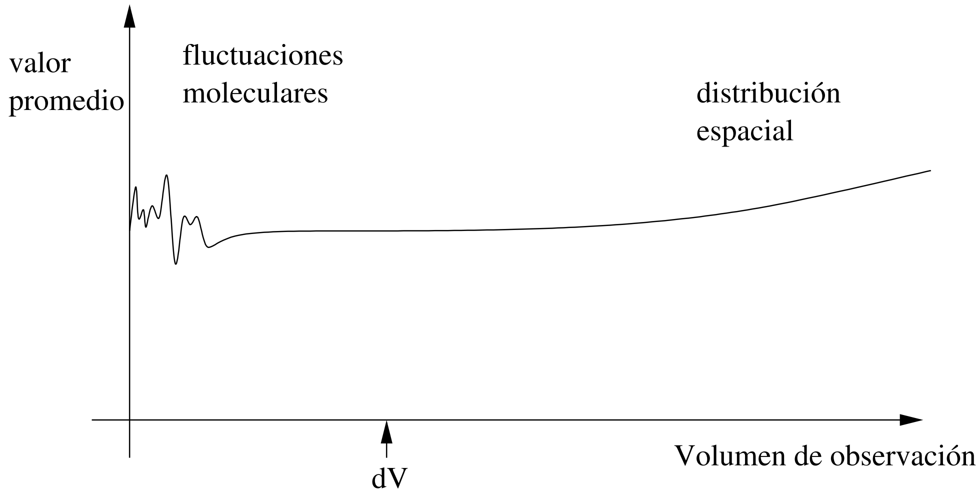
Todos los materiales están formados por moléculas. Las propiedades del material no estan distribuidas uniformemente. Si la escala de observación es lo bastante pequeña, la composición molecular del material debe tenerse en cuenta (hablamos entonces de *Mecánica Estadística*).

Sin embargo, en *Mecánica de Fluidos*, se habla normalmente de la densidad, la temperatura, la velocidad, como una distribución uniforme de estas propiedades, sin considerar la naturaleza discreta de la materia. Es normal hablar de "diferenciales de volumen". Sin embargo, estos diferenciales no son los mismos que los usados en Cálculo Infinitesimal. Son volumenes finitos, pero

- lo suficientemente grandes como para albergar un número enorme de moléculas, de forma que las fluctuaciones en las propiedades se anulen entre sí, y

- lo suficientemente pequeños como para que la propiedad pueda ser considerada *local.*

Batchelor [?] lo describe muy bien con una figura parecida a esta:



1.3 Propiedades de los fluidos

- **Propiedades mecánicas**
  - densidad - volumen específico

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad ; \qquad [\rho] = \frac{\mathrm{Kg}}{\mathrm{m}^3}$$

$$v = \frac{1}{\rho} = \frac{V}{m} \qquad ; \qquad [v] = \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{Kg}}$$

  - Módulo de elasticidad (isotérmico)

$$\beta_T = -v\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}v}\right)_T = \rho\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}\right)_T \qquad ; \qquad [\beta_T] = \mathrm{Pa}$$

Dado que, *para un gas ideal a temperatura constante*, $\rho \propto p$, tenemos que $\beta_T = p$. Para una variación de presión Δp, la variación relativa de densidad se puede calcular mediante

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta p}{\beta_T}$$

Criterio de compresibilidad : Todos los fluidos son compresibles, en mayor o menor grado. Es importante saber en qué condiciones un fluido podrá ser considerado compresible y cuándo no. Supongamos que es considerado compresible si $\frac{\Delta\rho}{\rho} \leq 0.01$. Entonces,

$$\frac{\Delta p}{\beta_T} \lessapprox 0.01.$$

Como veremos más adelante, se puede relacionar Δp con la velocidad de flujo,

$$\Delta p \sim \frac{1}{2}\rho u^2,$$

de forma que un fluido con velocidad u se puede considerar incompresible si

$$\frac{\rho u^2}{\beta_T} \lessapprox 0.02.$$

Como ejemplo, consideremos el aire a presión atmosférica, $\beta_T = p = 10^5\,\mathrm{Pa}$, $\rho \approx 1.2\,\frac{\mathrm{Kg}}{\mathrm{m}^3}$.

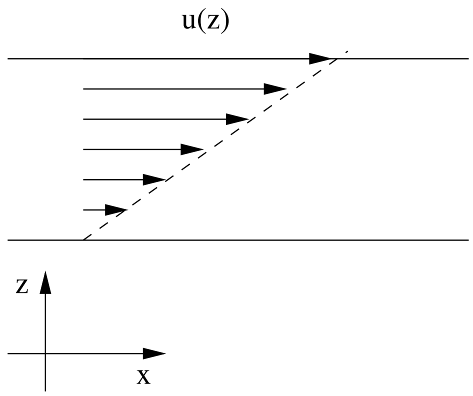
$$u^2 \lessapprox \frac{0.02\beta_T}{\rho} = \frac{0.02 \cdot 10^5}{1.2} = 1.66 \cdot 10^3 \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$$
$$\Rightarrow u \approx 40\,\mathrm{m/s}$$

Ejercicio

Para el agua, a $20°C$ y presión atmosférica, $\beta_T \approx 2.2 \times 10^9\,\mathrm{Pa}$ y $\rho \approx 1000\,\mathrm{Kg/m}^3$. Calcular para qué orden de magnitud de velocidad de flujo el agua debe empezar a considerarse compresible.

– Viscosidad

Si un fluido fluye en la dirección x, de forma ordenada, por capas, aumentando la velocidad en la dirección z, como muestra la figura,



se produce un intercambio de cantidad de movimiento entre capas que tiende a frenar las más rápidas y acelerar las más lentas. Es decir, se produce un *esfuerzo tangencial*. En muchos casos, éste esfuerzo es proporcional al gradiente de velocidades, y a la constante de proporcionalidad se le denomina *viscosidad dinámica*, μ. Ésta es la conocida como **Ley de Newton de la viscosidad**.

$$\tau = \mu\frac{\partial u}{\partial z} \quad ; \quad [\mu] = \mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s} \tag{1.1}$$

La *viscosidad cinemática* se define como

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \qquad ; \qquad [\nu] = \frac{\mathrm{m}^2}{s}$$

Ampliaremos el concepto de viscosidad en el tema siguiente.

- **Propiedades termodinámicas**

entalpía

$$h = u + \frac{p}{\rho} = u + pv \qquad ; \qquad [h] = [u] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{Kg}},$$

calor específico

$$c_v = \left(\frac{\partial q}{\partial T}\right)_v = \frac{\partial u}{\partial T} \quad \text{a volumen constante}$$
$$c_p = \left(\frac{\partial q}{\partial T}\right)_p = \frac{\partial h}{\partial T} \quad \text{a presión constante}$$

$$[c_p] = [c_v] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{Kg} \cdot \mathrm{K}}$$

La relación entre ambos coeficientes es:

$$c_p = c_v + \frac{\partial pv}{\partial T}$$

Para un gas perfecto,

$$pv = R'T \Rightarrow \frac{\partial pv}{\partial T} = R'$$
$$\Rightarrow c_p = c_v + R'$$

, donde $R' = \frac{R}{M}$.

El cociente entre los dos coeficientes se denomina *exponente adiabático*,

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}.$$

coeficiente de expansión térmica

Normalmente, $\uparrow T \Rightarrow \uparrow v$ $(\Rightarrow \downarrow \rho)$.

$$\alpha = \frac{1}{v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}T} = -\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}T} \qquad ; \qquad [\alpha] = \mathrm{K}^{-1}$$

Para agua en condiciones normales, $\alpha \approx 1.5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{K}^{-1}$.

Consideremos un gas perfecto, a presión constante,

$$\alpha_p = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p ,$$

como $\rho = \frac{p}{R'T}$,

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p = -\frac{p}{R'T^2} \qquad \Rightarrow \alpha_p = \frac{1}{T}$$

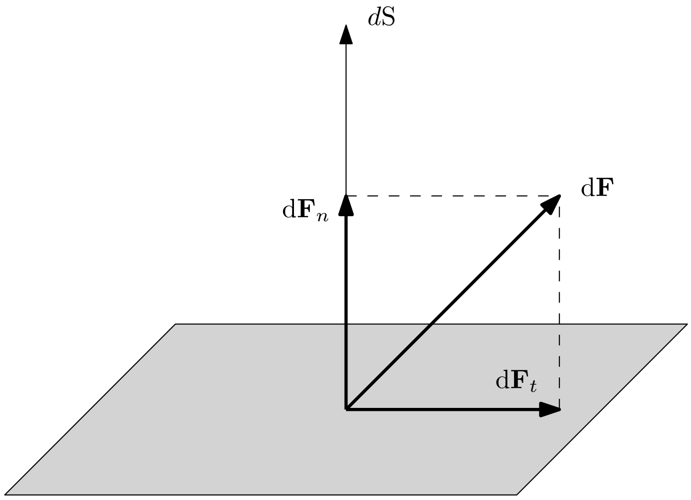
1.4 Fuerzas sobre fluidos

1.4.1 Fuerzas de superficie

Actúan sobre el contorno de un volumen determinado de fluido.

Se crean por contacto bien del mismo fluido, un fluido diferente o un sólido.

Dada una superficie $\delta\vec{S}$, y una fuerza superficial $\delta\vec{F}$ actuando sobre ella, ésta se puede descomponer en una componente normal y una componente tangencial.



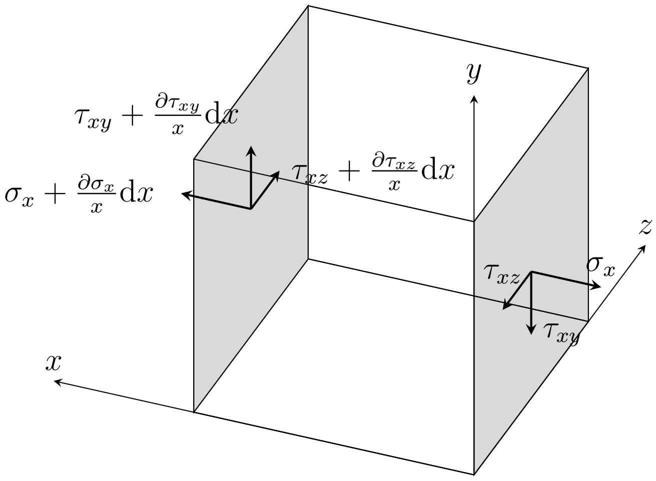
Definición de tensión o esfuerzo:

esfuerzo normal : $$\sigma = \lim_{\delta\vec{S}\to 0} \frac{\delta\vec{F}_n}{\delta\vec{S}}$$

esfuerzo tangencial : $$\tau = \lim_{\delta\vec{S}\to 0} \frac{\delta\vec{F}_t}{\delta\vec{S}}$$

σ_i **:** esfuerzo normal aplicado sobre una superficie normal al eje i (y, por lo tanto, paralelo al eje i)

τ_{ij} **:** esfuerzo tangencial aplicado sobre una superficie normal al eje i, y en la dirección del eje j



Sobre el volumen $\mathrm{d}V$ actúa una fuerza, debida a los esfuerzos superficiales cuya componente x es

$$\begin{aligned}\mathrm{d}F_x = -\sigma_x \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \tau_{yx}\mathrm{d}x\mathrm{d}z + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z \\ - \tau_{zx}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad (1.2)\end{aligned}$$

De la misma forma:

$$\mathrm{d}F_y = \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad (1.3)$$

$$\mathrm{d}F_z = \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad (1.4)$$

La fuerza por unidad de volumen, debida a los esfuerzos superficiales es entonces

$$\begin{aligned}\vec{f} = \frac{\mathrm{d}\vec{F}}{\mathrm{d}V} = &\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)\vec{\imath} \\ &+ \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right)\vec{\jmath} \\ &+ \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}\right)\vec{k}\end{aligned}$$

que se expresa de forma abreviada como

$$\vec{f} = \vec{\nabla}\vec{\vec{\tau}} \quad (1.5)$$

donde $\vec{\vec{\tau}}$ es el tensor de tensiones (stress tensor)

$$\vec{\vec{\tau}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

1.4.2 Fuerzas másicas

Actúan a distancia

Son debidas a campos de fuerza (gravitacional, electromagnético, ...)
Fluido eléctricamente cargado : plasma

- Electrohidrodinámica
- Magnetohidrodinámica

Caso más común: sólo campo gravitacional

$$\vec{f}_g = \rho \vec{g}$$

1.4.3 Fuerzas lineales (tensión superficial)

En la interfase de separación entre dos líquidos reside una cantidad de energía, correspondiente a la interacción entre moleculas muy próximas a la superficie de separación

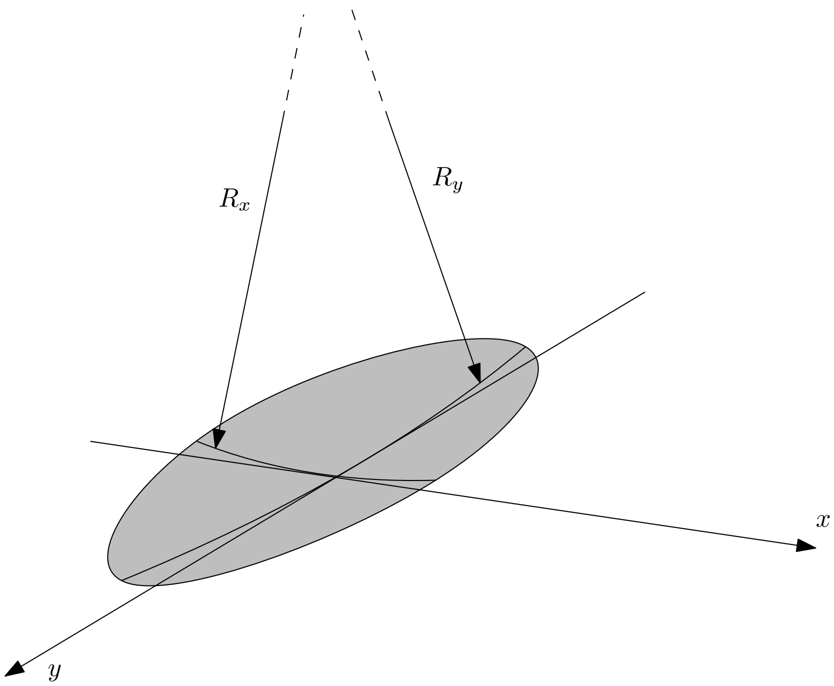
Esta energía es proporcional al área de la interfase.

$$E_s = \sigma S \tag{1.7}$$

El parámetro σ recibe el nombre de tensión superficial y tiene unidades de fuerza por unidad de longitud. Esta fuerza es tangente a la superficie, y normal a la línea de aplicación.

El valor de σ depende de la naturaleza de los materiales que separa la interfase y de su estado termodinámico.

P.e. para la interfase entre agua y aire a $20°C$, $\sigma = 72.8 \cdot 10^{-3}$ N/m



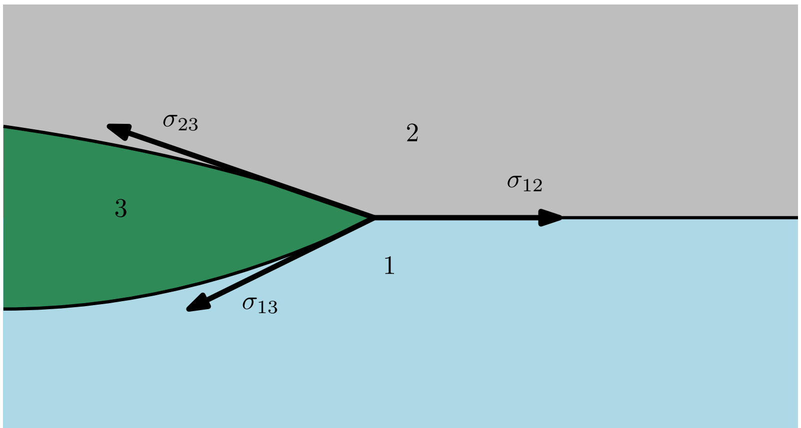
Se puede demostrar (ver [**?**]) que la tensión provocada en la superfice es equivalente a una diferencia de presión, como indica la **ley de Young-Laplace**

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} \right) \tag{1.8}$$

Si los dos radios de curvatura son iguales, ($R_x = R_y = R$, casquete esférico), esta expresión se reduce a

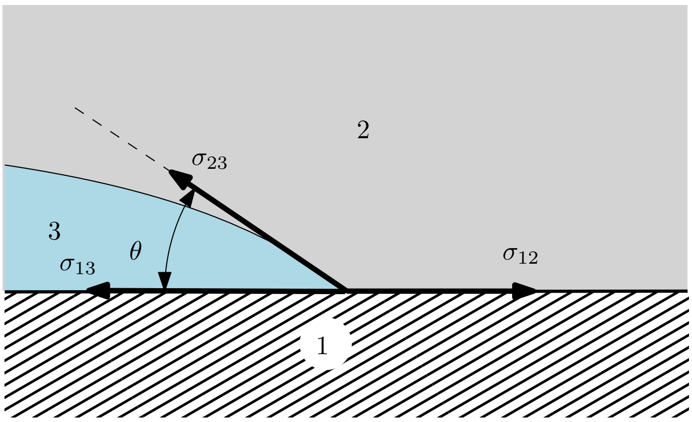
$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R} \tag{1.9}$$

Consideramos el caso de tres fluidos (p.e. una gota de aceite en una superficie de agua)



Si el módulo de una de las tensiones es mayor que la suma de los módulos de las otras dos, este sistema nunca puede llegar al equilibrio, y el fluido se expandirá de forma indefinida hasta llegar al equilibrio, o tener un grosor de tamaño molecular.

Si uno de los materiales es un sólido,



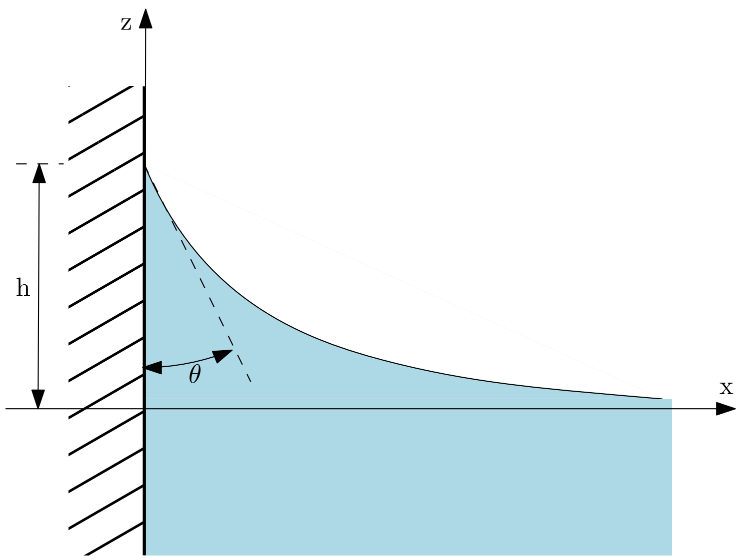
se llega al equilibrio para

$$\sigma_{12} = \sigma_{31} + \sigma_{23} \cos \theta$$

Se considera que cuanto menor es θ, más "moja" el fluido sobre la superficie del sólido.

Ejemplo:

Líquido en contacto con pared plana vertical



Forma de la interficie: $z = \zeta(x)$

En un cierto punto de la interficie, la tensión superficial tiene que ser tal que compense la presión de la columna de fluido. Como veremos más adelante, esta es $\rho g z$, de forma que

$$\rho g z = \sigma \frac{1}{R_1}$$

$$\rho g \zeta = \sigma \frac{\zeta''}{(1+\zeta'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Integrando se obtiene

$$\frac{1}{2}\frac{\rho g}{\sigma}\zeta^2 + \frac{1}{(1+\zeta'^2)^{\frac{1}{2}}} = K$$

Muy lejos de la pared, se cumple que $\zeta = \zeta' = 0$, de forma que $K = 1$

Por otro lado, en $x = 0$, se tiene (ver figura) $\zeta = h$ y $\zeta' = -\frac{1}{\tan\theta}$, de forma que

$$h = d\sqrt{2\,(1-\sin\theta)}$$

donde $d^2 = \frac{\sigma}{\rho g}$.

Chapter 2

Hidrostática

2.1 Ecuación fundamental de la fluidostática

Fluido en reposo: No hay esfuerzos tangenciales, y la única fuerza superficial es la presión.

Equilibrio estático:

$$\vec{f}_m - \vec{\nabla} p = 0 \tag{2.1}$$

Según el calculo diferencial,

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \phi \right) = 0 \quad \forall \phi \text{ escalar}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{f}_m = 0.$$

$\Rightarrow \vec{f}_m$ ha de ser un *campo conservativo.*

$$\mathrm{d}p = \vec{f}_m \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

Integrando sobre un determinado camino,

$$p\left(\vec{r}\right) = p\left(\vec{r}_0\right) + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{f}_m \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

Nos permite calcular la presión en cualquier punto $\vec{r}$ conociendo el valor en un punto de referencia $\vec{r}_0$ y el campo de fuerzas $\vec{f}_m$.

Si $\vec{f}_m$ es conservativo

$$\vec{f}_m = -\rho \vec{\nabla} U$$

y, entonces,

$$\vec{\nabla} p = -\rho \vec{\nabla} U$$

Si ρ varia de forma arbitraria, no existen soluciones para la ecuación , y no es posible llegar al equilibrio, $\rightarrow$ corrientes convectivas

La ecuación sólo admite soluciones cuando ρ es únicamente función de la presión, o bien es constante (fluido incompresible).

$$p + \rho U = cte$$

→ Principio de Pascal

Hidrostática en el campo de la gravedad

$$\vec{f}_m = \rho \vec{g},$$

con

$$\vec{g} = -g\vec{k} \qquad \text{donde } g = 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

y

$$U = gz$$

Superficies isobáricas (superficies de igual presión), incluida la superficie libre de los líquidos, horizontales.

$$\vec{\nabla} p = -\rho g \vec{k} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \end{cases}$$

La presión es únicamente función de la coordenada z.

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\rho\, g \Rightarrow p_2 - p_1$$

$$= -\int_{z_1}^{z_2} \rho\, g\, \mathrm{d}z$$

Actividad 1:

- ¿A cuántos metros de columna de agua corresponden la presión atmosférica?
- Si el aire fuese incompresible, con la densidad que tiene a nivel del mar, ¿cuál debería ser la altura de la atmósfera para tener la misma presión?

2.2 Presión atmosférica

La presión atmosférica disminuye con la altura. Dado que el aire es un gas, su densidad disminuye, en general, cuando disminuye la presión, por lo que también es menor cuando aumentamos la altura.

Necesitamos información sobre la variación de ρ con z, o bien con p.

Opción: aire gas ideal

$$\rho = \frac{pM}{RT} \qquad \text{con } M = 28.9\,\mathrm{g/mol}.$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{Mg}{RT}\mathrm{d}z \tag{2.2}$$

Sin considerar la variación de g con la altura:

- Atmósfera isoterma:

$$\int_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}p}{p} = -\int_0^z \frac{Mg}{RT}\mathrm{d}z$$

$$\ln\frac{p}{p_0} = -\frac{Mg}{RT}z = -\frac{\rho_0 g}{p_0}z$$

$$\Rightarrow \boxed{p = p_0 \exp\left(-\frac{\rho_0 g}{p_0}z\right) = p_0 \exp\left(-\frac{z}{\alpha}\right)} \tag{2.3}$$

  donde

$$\alpha = \frac{p_0}{\rho_0 g}$$

Valores normales:

$$\left.\begin{aligned} \rho_0 &= 1.292\,\mathrm{Kg/m^3} \\ g &= 9.80665\,\mathrm{m/s^2} \\ p_0 &= 760\,\mathrm{mmHg} = 101328\,\mathrm{Pa} \end{aligned}\right\} \rightarrow \alpha = 7997.35\,\mathrm{m} \approx 8000\,\mathrm{m}$$

- Atmósfera adiabática:

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \qquad \text{con} \qquad \gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1.4 \qquad \text{para aire}$$

$$\mathrm{d}p = -g\rho\mathrm{d}z = -\rho_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} g\mathrm{d}z$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}p}{p^{\frac{1}{\gamma}}} = -\frac{\rho_0}{p_0^{\frac{1}{\gamma}}}g\mathrm{d}z$$

$$\int_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}p}{p^{\frac{1}{\gamma}}} = \int_0^z -\frac{\rho_0}{p_0^{\frac{1}{\gamma}}}g\mathrm{d}z = -\frac{\rho_0}{p_0^{\frac{1}{\gamma}}}gz$$

$$\Rightarrow \frac{1}{-\frac{1}{\gamma}+1}\, p^{-\frac{1}{\gamma}+1}\Big]_{p_0}^{p} = -\frac{\rho_0}{p_0^{\frac{1}{\gamma}}}gz$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma}{\gamma-1}\left[p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right] = -\frac{\rho_0}{p_0^{\frac{1}{\gamma}}} gz$$

$$\Rightarrow p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{1-\gamma}{\gamma}\frac{\rho_0}{p_0^{\frac{1}{\gamma}}} gz$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1 + \frac{1-\gamma}{\gamma}\frac{z}{\alpha}} \tag{2.4}$$

- Atmósfera estándar:

En realidad, la temperatura media de la atmósfera disminuye de forma casi lineal con la altura

$$T = T_0 - Bz$$

hasta una altura aproximada de 11000 metros (región conocida como *troposfera*). Los valores de T_0 (la temperatura a nivel del mar) y B (*gradiente térmico*) varían no sólo según el día sino también a lo largo del mismo día. Los valores estándar usados por convenio son

$$\begin{aligned} T_0 &= 15°C = 288.16\text{K} \\ B &= 0.0065\text{K/m} \end{aligned}$$

Actividad 2:

Integrar la ecuación (2.2) con esta distribución de temperatura para obtener

$$p = p_0 \left(1 - \frac{Bz}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{RB}} \tag{2.5}$$

El valor del exponente para aire es

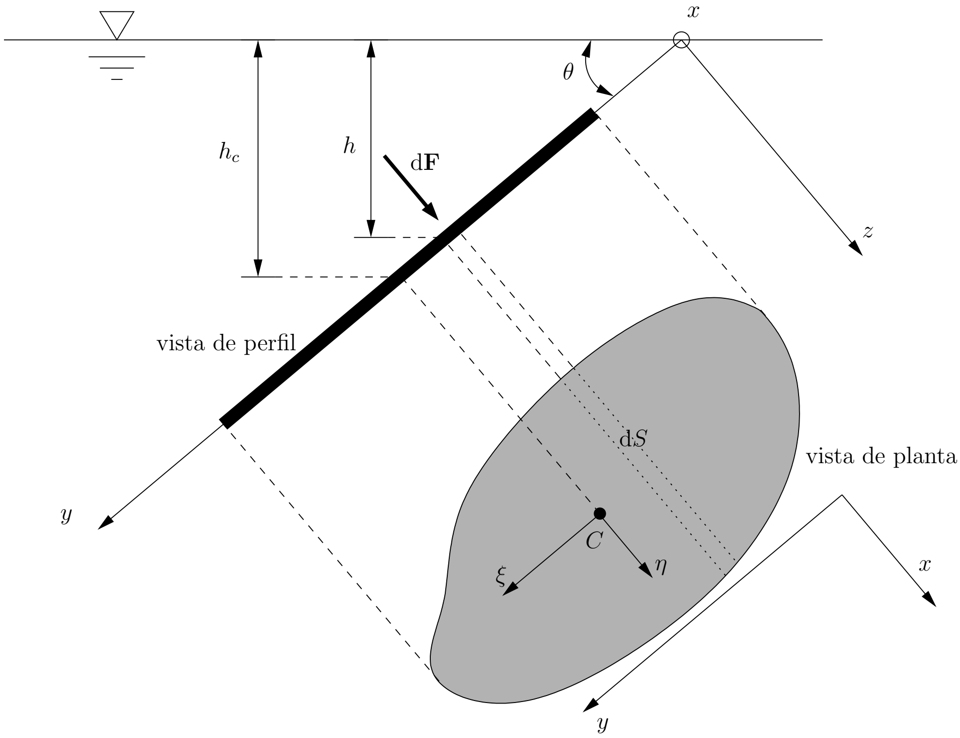
$$\frac{Mg}{RB} = 5.26$$

Después de la troposfera, la temperatura se mantiene constante hasta unos 20000 metros para empezar a aumentar de forma gradual.

Hay que tener siempre en cuenta que esta atmósfera estándar es un valor promediado.

2.3 Fuerza de un fluido estático sobre una superficie

2.3.1 Cálculo de la fuerza



$$F = \int_S \mathrm{d}F = \int_S (p_0 + \rho\, g\, h)\mathrm{d}S == \int_S (p_0 + \rho\, g\, y\, \sin\theta)\mathrm{d}S$$

$$\Rightarrow\ F = p_0\, S + \rho\, g\, \sin\theta \int_S y\mathrm{d}S$$

$\int_S y\mathbf{d}S$: momento de primer orden de la superficie S respecto el eje $x \to$ coordenada y_C del centroide C de la forma

$$y_C\, S = \int_S y\mathrm{d}S\ \Rightarrow\ F = (p_0 + \rho\, g\, y_C\, \sin\theta)S = (p_0 + \rho\, g\, h_C)S$$

La fuerza ejercida sobre una superficie totalmente sumergida se puede calcular **imaginando** que la presión que actúa es constante en toda la superficie e igual al valor en el centroide.

2.3.2 Coordenadas del punto de aplicación

Momento de la fuerza $\vec{F}$ respecto el eje x:

$$y_{cp}F = \int_S y\mathrm{d}F = \int_S y(p_0 + \rho\, g\, y\, \sin\theta)\mathrm{d}S = p_0 \int_S y\mathrm{d}S + \rho\, g\, \sin\theta \int_S y^2\mathrm{d}S$$

$$\Rightarrow y_{cp}F = \int_S y\mathrm{d}F = p_0\, y_C\, S + \rho\, g\, \sin\theta I_{xx}$$

donde I_{xx} es el momento de segundo orden de la superficie S respecto el eje x.

Nuevo sistema de coordenadas (ξ, η, ζ), paralelo a (x, y, z) pero con origen en el centroide C.

$$I_{xx} = I_{\xi\xi} + y_C^2\, S \qquad \text{(T. de Steiner)}$$

$$\Rightarrow y_{cp} = y_C + \frac{I_{\xi\xi}}{\left(y_C + \frac{p_0}{\rho\, g\, \sin\theta}\right) S}$$

Para x_{cp}:

$$\int_S x\mathrm{d}F = \int_S x(p_0 + \rho\, g\, y\, \sin\theta)\mathrm{d}S = p_0 \int_S x\mathrm{d}S + \rho\, g\, \sin\theta \int_S xy\mathrm{d}S$$

$$\Rightarrow \int_S x\mathrm{d}F = p_0\, x_C\, S + \rho\, g\, \sin\theta I_{xy}$$

$$I_{xy} = I_{\xi\eta} + x_C\, y_C\, S \qquad \text{(T. de Steiner)}$$

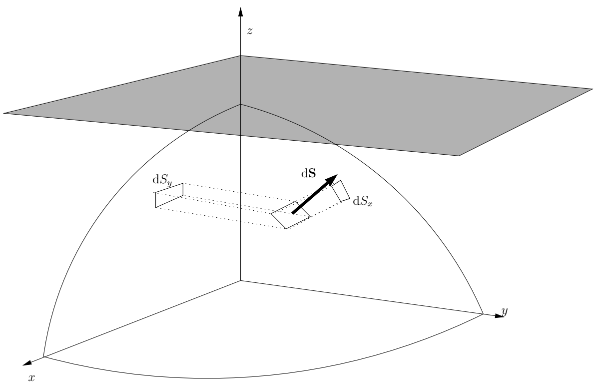
$$\Rightarrow x_{cp} = x_C + \frac{I_{\xi\eta}}{\left(y_C + \frac{p_0}{\rho\, g\, \sin\theta}\right) S}$$

Normalmente, p_0 (en general, la presión atmosférica) actúa por igual en las dos caras de la superficie,

$$F = \rho\, g\, h_C\, S$$
$$x_{cp} = x_C + \frac{I_{\xi\eta}}{y_C\, S}$$
$$y_{cp} = y_C + \frac{I_{\xi\xi}}{y_C\, S}$$

Dado que $I_{\xi\xi}$ es, por definición, una cantidad siempre positiva, el centro de presiones se encuentra siempre por debajo del centroide.

2.3.3 Fuerza sobre una superficie curva totalmente sumergida



$$F_x = -\int_S (p_0 + \rho\, g\, h)\mathrm{d}S_x$$
$$F_y = -\int_S (p_0 + \rho\, g\, h)\mathrm{d}S_y$$

Si proyectamos la superficie S sobre los planos $x = 0$ y $y = 0$, obtenemos S_x y S_y, y podemos calcular F_x y F_y, así como sus puntos de aplicación.

F_z resulta ser igual al peso total de fluido que se encuentra *por encima* de la superficie curva. La linea de acción de F_z pasa por el centro de gravedad de la columna de fluido que hay sobre la superficie.

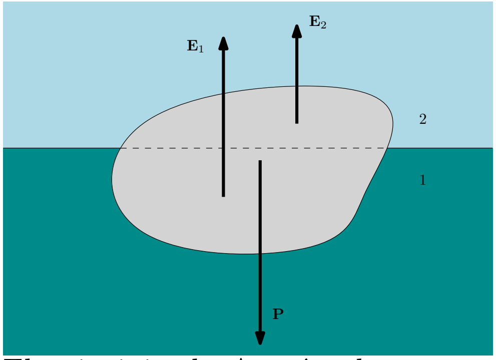
Las expresiones anteriores son válidas únicamente para fluidos con densidad constante. Si el fluido está estratificado, de forma que hay un *gradiente de densidad*, positivo hacia la dirección vertical negativa, los cálculos se complican.

Actividad 3:

Calcula la fuerza, y su punto de aplicación, que hace un embalse de agua de 50 metros de profundidad y 200 metros de ancho sobre la pared, vertical, de la presa.

2.4 Principio de Arquímedes

Todo cuerpo sumergido, completa o parcialmente, en un fluido experimenta un empuje dirigido verticalmente hacia arriba, con magnitud igual al peso del fluido desalojado y cuya linea de acción pasa por el centro de gravedad del fluido desalojado



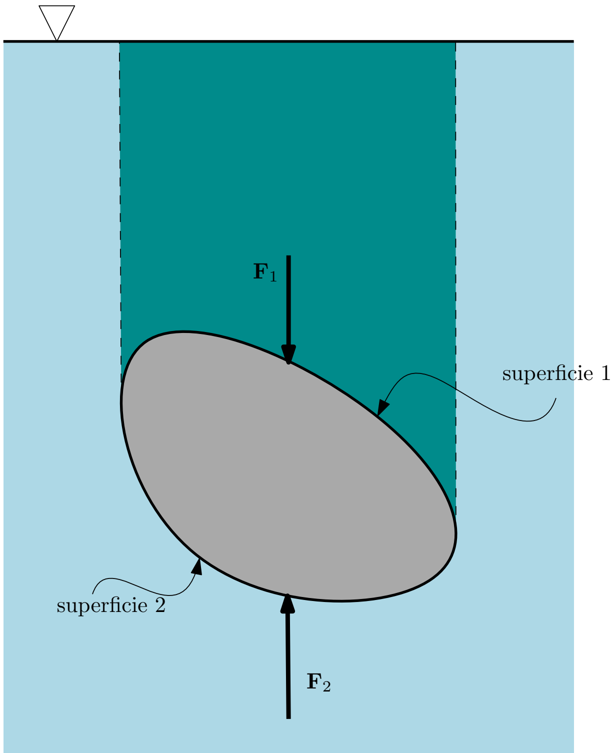
Las lineas de acción de las fuerzas de empuje y el peso no tienen porqué coincidir, y, en este caso, se producen pares de fuerzas.

carena volumen del fluido desalojado

centro de carena o centro de empuje
centro de gravedad del fluido desalojado

El principio de Arquímedes no es, en realidad, un principio. Se puede deducir en cualquier caso simplemente calculando la integral de la presión sobre la superficie que limita el cuerpo.

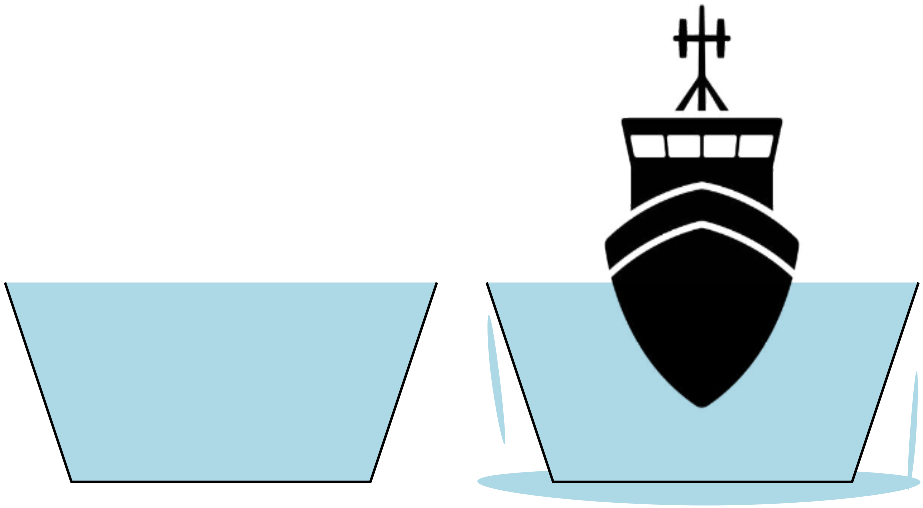
También se puede obervar que es la resta del peso de la columna de fluido sobre la superficie superior y sobre la superficie inferior.



2.5 Segunda ley de Arquímedes

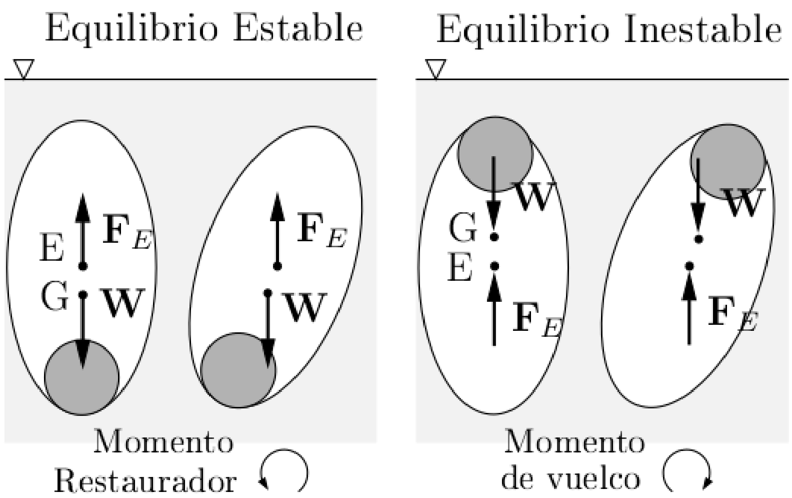
La segunda ley de Arquímedes dice que *un cuerpo que flota desaloja su propio peso de fluido*.

Se puede comprender observando que en la figura, el recipiente con solo fluido y el que tiene fluido y cuerpo flotando, **deben pesar lo mismo**. Pregunta: ¿Cómo sabemos que pesan lo mismo?



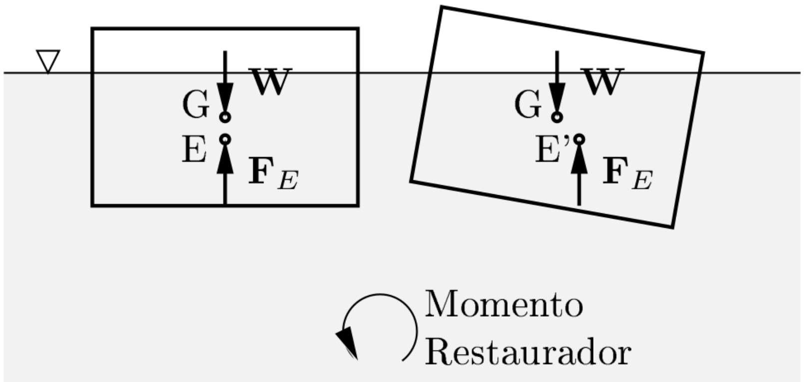
2.6 Estabilidad

Para un cuerpo sumergido, el centro de gravedad puede ser diferente del centro de empuje, y esto produce un momento que puede ser restaurador (equilibrio estable) o de vuelco (equilibrio inestable)

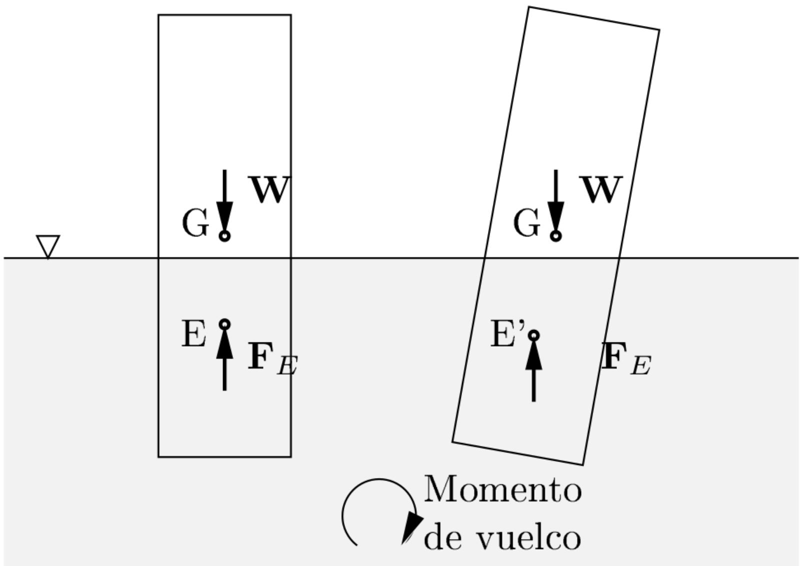


Para un cuerpo flotante, es más complicado, ya que la posición del centro de empuje varía

Equilibrio estable



Equilibrio inestable



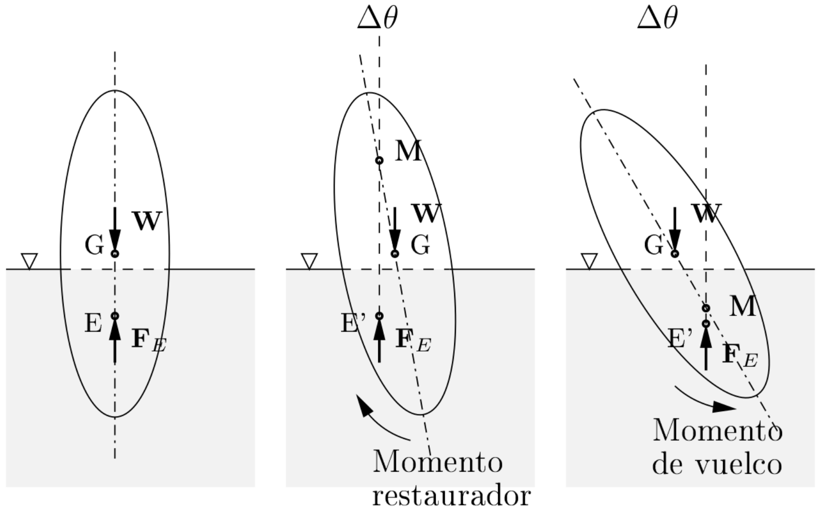
Pasos para calcular la estabilidad de un cuerpo flotante, consideremos un cuerpo simétrico:

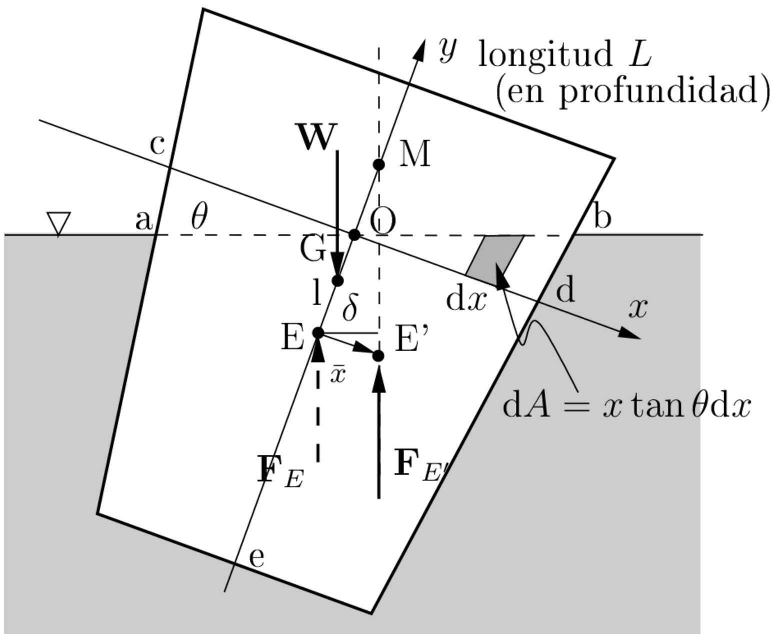
1.- Se calcula posición de equilibrio inicial, mediante las fuerzas $\vec{F}_E$ y $\vec{W}$, y sus puntos de aplicación, E y G. Como el cuerpo estan en equilibrio, estas fuerza se alinean con el eje de simetria.

2.- Se realiza una pequeña perturbación $\Delta\theta$. El centro de empuje se desplaza a una nueva posición E'. La vertical sobre E' corta el eje de simetria en un punto M, denominado **metacentro**. Si el ángulo $\Delta\theta$ es pequeño, el metacentro no dependerá de él.

3.- Se calcula la **altura metacéntrica**, que es la distancia de M a G. Si M está por encima de G, la altura metacéntrica es positiva, y la posición es *estable*. Si está por debajo, la altura metacéntrica es negativa, y la posición es *inestable*.

La altua metacéntrica es una característica de la sección transversal del cuerpo y su distribución de masa.





La posición del nuevo centro de empuje se calcula con la estimación del centro de masas:

$$
\begin{aligned}
\overline{x} V_{aObdea} &= \int_{Obd} x \mathrm{d}V - \int_{cOa} x \mathrm{d}V \\
&= \int_{Obd} x L \mathrm{d}A - \int_{cOa} x L \mathrm{d}A \\
&= \int_{Obd} x L (x \tan\theta \mathrm{d}x) - \int_{cOa} x L (-x \tan\theta \mathrm{d}x) \\
&= \tan\theta \int x^2 2L \mathrm{d}x = \tan\theta \int x^2 \mathrm{d}A \\
&= \tan\theta I_0
\end{aligned}
$$

La altura metacéntrica es

$$
\overline{MG} = \overline{ME} - \overline{GE} = \frac{\overline{x}}{\tan\theta} - \overline{GE} = \frac{I_0}{V_{\text{sumergido}}} - \overline{GE} = \frac{\rho g I_0}{W} - \overline{GE} \tag{2.6}
$$

Si $\overline{MG}$ es positiva, el equilibrio es estable (para pequeñas perturbaciones). Si $\overline{GE}$ es negativa, el equilibrio es estable siempre

Chapter 3

Cinemática de fluidos

3.1 Descripción Euleriana y Lagrangiana

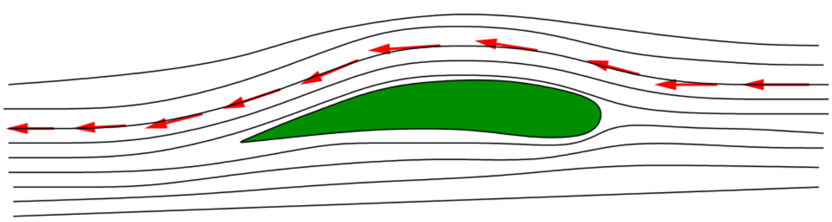
Dos formas de identificación de las magnitudes (p. e., la velocidad)

1. **Euleriana**:
   Segun la posición y el instante.
   $$\vec{u}(\vec{x}, t) \tag{3.1}$$

2. **Lagrangiana**:
   Según la partí cula y el instante. La partí cula queda identificada (marcada) mediante un vector $\vec{a}$ que puede ser, por ejemplo, la posición que tiene la partí cula en un instante de referencia t_0
   $$\vec{u}(\vec{a}, t; t_0) \tag{3.2}$$

3.2 Lineas de corriente, trayectorias y lineas de traza

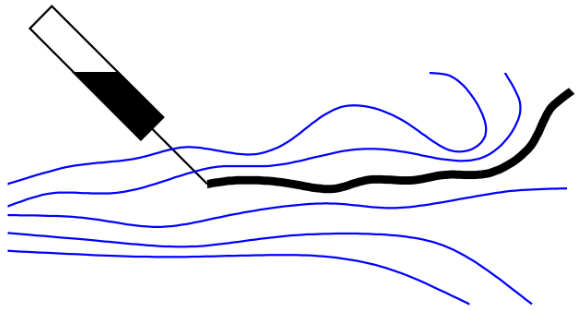
- Lineas de corriente:
  Para un instante dado t_0, és la tangente a los vectores de velocidad.



Són solución de la ecuación (en 2D)

$$\frac{\mathrm{d}x}{u(\vec{x}, t = t_0)} = \frac{\mathrm{d}y}{v(\vec{x}, t = t_0)} \tag{3.3}$$

- Trayectoria:
  Para una cierta partícula de fluido, puntos que ocupa en un cierto intervalo de tiempo.
- Lineas de traza:
  Partículas de fluido que, en un cierto instante anterior, pasaron por un determinado punto.



Si el flujo es estacionario (no depende del tiempo), linea de corriente, trayectoria y linea de traza coinciden para un determinado punto.

Actividad 1:

Dado el campo de velocidades bidimensional $\vec{u} = (x+t)\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$, encontrad las expresiones para:
a) la linea de corriente que pasa por $(1,1)$ para $t=0$
b) la trayectoria de la partícula que está en $(1,1)$ para $t=0$
c) la línea de traza, para $t=0$, de todas las partículas que pasaron por $(1,1)$

3.3 Derivada sustancial

La partícula P, en el instante t se encuentra en $\vec{x}$ con una velocidad $\vec{u}$. La aceleración de P **no** és $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$, ya que aunque $\vec{u}$ sea estacionario, P puede estar moviéndose a un punto en que $\vec{u}$ és diferente.

En un instante $t+\delta t$, P estará en $\vec{x}+\delta\vec{x} = \vec{x}+\vec{u}\delta t$, de forma que la variación de velocidad será

$$\delta\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}+\vec{u}\delta t, t+\delta t) - \vec{u}(\vec{x},t)$$

Desarrollando en serie de Taylor hasta primer orden, obtenemos

$$\delta\vec{u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\delta t + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\delta t + O(\delta t^2),$$

de forma que la aceleración és

$$\vec{a}(\vec{x},t) = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}$$

De forma general, consideremos cualquier magnitud f, asociada a una propiedad del fluido (puede ser un escalar como la temperatura, o densidad, o la velocidad angular).

- Derivada local:
$$\frac{\partial f}{\partial t}$$
- Derivada convectiva:
$$(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{f} = \left(u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}\right) f = u_i\frac{\partial f}{\partial x_i}$$
- Derivada sustancial o total:
$$\frac{\mathrm{D}f}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{f} = \frac{\partial f}{\partial t} + u_i\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

3.4 Circulación, Flujo y Vorticidad

- **Circulación**

$$\Gamma = \oint_L \vec{u}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

  L es cualquier contorno cerrado.

Si este contorno está constituido siempre por las mismas partí culas (es decir, es una línea material), se puede demostrar ([**?**]) que
$$\frac{\mathrm{D}\Gamma}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\oint_L \vec{u}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

- **Flujo**
  Sea F una magnitud extensiva propiedad del fluido y f esta misma magnitud por unidad de volumen. El flujo de f a través de la superficie S es
$$\Phi = \int_S f\vec{u}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

Si f es un escalar, $f\vec{u}$ es el vector flujo de f.

Si f es un vector $\left(\vec{f}\right)$, $\vec{f}\vec{u}$ es el tensor flujo de f.

Ejemplo:
$$f = 1 \rightarrow \begin{cases} \vec{u} & \text{vector flujo volumétrico} \\ Q = \int_S \vec{u}\cdot \mathrm{d}\vec{S} & \text{flujo volumétrico, o caudal} \end{cases}$$
$$f = \rho \rightarrow \begin{cases} \rho\vec{u} & \text{vector flujo másico} \\ \dot{m} = \int_S \rho\vec{u}\cdot \mathrm{d}\vec{S} & \text{flujo másico, o gasto} \end{cases}$$

- **Vorticidad**

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u} \quad \text{En componentes:} \quad \omega_k = -\varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Es el doble de la velocidad local de rotación del elemento de fluido. Por definición de vorticidad, se cumple que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} = 0$$

y el flujo a través de una superficie S cerrada es siempre nulo

$$\oint_S \vec{\omega} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

- Si la superficie es abierta, este flujo está relacionado con la circulación sobre la línea que limita la superficie a través del Teorema de Stokes

$$\int_S \vec{\omega} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{u}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_L \vec{u} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

3.5 Movimiento relativo en el entorno de un punto

Sea $\vec{u}$ la velocidad del fluido en un punto $\vec{r}$. En un punto $\vec{r} + \delta\vec{r}$, la velocidad será $\vec{u} + \delta\vec{u}$, con

$$\delta\vec{u} = \vec{\nabla}\vec{u} \cdot \delta\vec{r}; \;\; \delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta r_j$$

El tensor divergencia de velocidad, $\vec{\nabla}\vec{u}$, puede descomponerse como la suma de un tensor simétrico,$\left(\vec{\nabla}\vec{u}\right)^S$ y un tensor antisimétrico $\left(\vec{\nabla}\vec{u}\right)^A$, con

$$\left(\vec{\nabla}\vec{u}\right)^S = \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\vec{u} + \left(\vec{\nabla}\vec{u}\right)^T\right)$$
$$\left(\vec{\nabla}\vec{u}\right)^A = \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\vec{u} - \left(\vec{\nabla}\vec{u}\right)^T\right)$$

Cada uno de estos tensores contribuye a $\delta\vec{u}$ de una forma diferente

$$\delta\vec{u} = \delta\vec{u}^S + \delta\vec{u}^A = \left(\vec{\nabla}\vec{u}\right)^S \cdot \delta\vec{r} + \left(\vec{\nabla}\vec{u}\right)^A \cdot \delta\vec{r}$$

$\delta\vec{u}^S = \left(\vec{\nabla}\vec{u}\right)^S \cdot \delta\vec{r}$ representa un movimiento de deformación pura. Siempre es posible escoger los ejes del sistema de referencia de forma que $\left(\vec{\nabla}\vec{u}\right)^S$ sea diagonal. Entonces los tres valores de la diagonal son las velocidades de estiramiento en la dirección de los ejes principales. Si el fluido es incompresible el volumen del elemento de fluido se mantiene constante y la suma de la diagonal, que es un invariante respecto del cambio de sistema de coordenadas, es nula

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

$\delta \vec{v}^A = \left(\vec{\nabla} \vec{u}\right)^A \cdot \delta \vec{r}$ representa un movimiento de rotación pura.

$$\delta u_i^A = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \delta r_j = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \omega_k \delta r_j$$

La velocidad angular de rotación es $\frac{1}{2}\vec{\omega} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \times \vec{u})$.

Chapter 4

Ecuaciones fundamentales de la Dinámica de los Fluidos

4.1 Introducción

La Mecánica de los fluidos viene determinada por 3 leyes básicas[1]

- El principio de conservación de la masa. La masa de un sistema fluido se mantiene constante independientemente de su posición o forma.
- La ley de conservación de la cantidad de movimiento. La variación de la cantidad de movimiento de un sistema fluido es igual a la suma total de la fuerzas externas que actúan sobre él.
- La ley de conservación de la energía. Es, básicamente, la Primera Ley de la Termodinámica. La variación de la energía de un sistema fluido (energía interna + energía cinética) es igual al trabajo realizado por todos las fuerzas externas más el calor recibido por conducción y/o radiación.

A estos principios hay que añadir las leyes constitutivas, como la ley de viscosidad de Newton, o la ley de los gases perfectos.

4.2 Formulación integral y diferencial

Existen dos enfoques para los problemas de Mecánica de Fluidos:

- Formulación diferencial. Se consideran volumenes elementales de fluido y las ecuaciones que gobiernan su comportamiento. Para resolver los problemas con este planteamiento es necesario conocer las condiciones iniciales en todo el dominio y las condiciones de contorno en todos los límites del mismo.

[1] Algunos autores, como [**?**] toman en consideración también la Segunda Ley de la Termodinámica

- Formulación integral. Se trabaja directamente sobre volumenes de fluido macroscópicos, denominados volúmenes de control. Las ecuaciones son promediadas en el volumen de control y sobre su frontera, denominada superficie de control.

Para la mayoría de los problemas de Ingeniería (o, por lo menos, para una primera aproximación) es suficiente con la formulación integral[2].

4.2.1 Sistema y volumen de control

Un sistema de control posee una cantidad definida de materia. Su volumen, y, por lo tanto, su densidad, así como otras magnitudes físicas pueden cambiar, pero no la cantidad de masa. En mecánica de sólidos se suele emplear el sistema de control como enfoque de trabajo.

En Mecánica de Fluidos, es conveniente usar el enfoque de volúmen de control, que se establece en el espacio, sin relación con una cierta cantidad de materia. Este volumen puede ser estático o no, y puede cambiar tanto de posición como de tamaño.

La diferencia entre sistema y volumen de control se puede relacionar con la diferencia entre los puntos de vista Lagrangiano y Euleriano, ya que un sistema de control siempre sigue el movimiento de las partículas que lo componen.

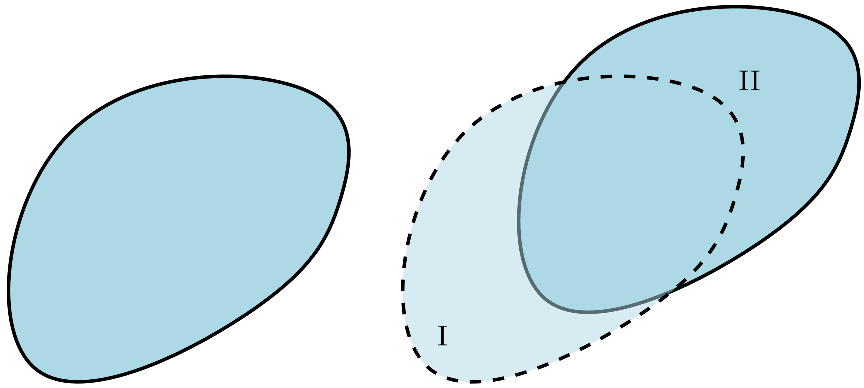
4.2.2 El teorema de arrastre de Reynolds

Dado que las ecuaciones de mecánica y termodinámica se refieren a sistemas de control, es necesario deducirlas para el caso en que las aplicamos sobre volúmenes de control.

Consideremos un volumen de control y un sistema de control que, en un instante determinado t, coinciden en el espacio. El volumen de control VC está estacionario, mientras que el sistema de control V se mueve con el flujo.

En el instante $t + \delta t$ el sistema de control se encuentra en una posición ligeramente desplazada respecto al volumen. Incluso puede que haya cambiado su volumen, si el flujo es compresible

[2]La formulación diferencial es más general, y permite determinar detalles del flujo. Es posible extraer los resultados de la formulación integral a partir de los de la diferencial, pero no al contrario.



t $\qquad$ $t + \delta t$

Consideremos una cierta magnitud extensiva F, y f la misma por unidad de masa, de forma que

$$F = \int_V \rho f \, \mathrm{d}V \tag{4.1}$$

Consideremos la notación:

F_t	:	el valor de F para el sistema de control en el instante t
F_{t^+}	:	el valor de F para el sistema de control en el instante $t + \delta t$
F'_t	:	el valor de F para el volumen de control en el instante t
F'_{t^+}	:	el valor de F para el volumen de control en el instante $t + \delta t$
F_s	:	Cantidad de F que abandona el volumen de control en el intervalo Δt (a través de I)
F_e	:	Cantidad de F que entra en el volumen de control en el intervalo Δt (a través de II)

Evidentemente,

$$F_t = F'_t$$

Las variaciones de F en el sistema de control y en el volumen de control son, respectivamente,

$$\begin{aligned} \delta F &= F_{t^+} - F_t \\ \delta F' &= F'_{t^+} - F'_t \end{aligned}$$

y, por otro lado,

$$F_{t^+} = F'_{t^+} + F_s - F_e,$$

de forma que

$$\delta F = \delta F' + F_s - F_e$$

Dividiendo por δt y haciendo el límite $\delta t \to 0$, obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}F'}{\mathrm{d}t} + \lim_{\delta t \to 0} \frac{F_s - F_e}{\delta t}$$

Por definición, el último término es el flujo de F a través de la frontera de VC, que, como hemos definido en temas anteriores,

$$\lim_{\delta t \to 0} \frac{F_s - F_e}{\delta t} = \Phi_F = \oint_{SC} \rho f \vec{u}_r \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}F'}{\mathrm{d}t} + \oint_{SC} \rho f \vec{u}_r \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{VC} \rho f \,\mathrm{d}V + \oint_{SC} \rho f \vec{u}_r \cdot \mathrm{d}\vec{S}} \tag{4.2}$$

,donde $\vec{u}_r$ es la velocidad del flujo relativa a la Superficie de Control.

Otra forma de expresarlo es, usando el Teorema de Leibniz [**?**, Sección 3.6]

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \int_{VC} \frac{\partial \rho f}{\partial t} \mathrm{d}V + \oint_{SC} \rho f \vec{u} \cdot \mathrm{d}\vec{S}} \tag{4.3}$$

,donde $\vec{u}$ es ahora la velocidad absoluta. Si el VC no se mueve ni se deforma, $\vec{u} = \vec{u}_r$.

Se puede usar el Teorema de la Divergencia para transformar la integral de superficie en una integral de volumen, de forma que

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \int_{VC} \frac{\partial \rho f}{\partial t} \mathrm{d}V + \int_{VC} \vec{\nabla} \cdot (\rho f \vec{u}) \,\mathrm{d}V$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \int_{VC} \left[\frac{\partial \rho f}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho f \vec{u}) \right] \mathrm{d}V$$

4.3 Ecuación integral de conservación de la masa

En este caso, $F = m$ y $f = 1$. Por definición de sistema físico, $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 0$, de forma que

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}V + \oint_{SC} \rho \vec{u} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}V = -\oint_{SC} \rho \vec{u} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}$$

Interpretación física: **En un Volumen de Control, la variación local de la masa únicamente puede ser debida a un flujo de masa a través del contorno.**

Simplicaciones de la ecuación integral de conservación de la masa

- Si el flujo es estacionario en el interior del VC, entonces $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ y

$$\oint_{SC} \rho \vec{u} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

- Si el flujo es incompresible, entonces la densidad es constante en todo el VC, de forma que

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, \mathrm{d}V = -\rho \oint_{SC} \vec{u} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

- Si se cumplen las dos condiciones y el flujo es incompresible y estacionario,

$$\oint_{SC} \vec{u} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

4.3.1 Definición de velocidad media

Consideremos como caso simple un fluido incompresible circulando por una tubería. La sección de la tubería es S, y el flujo se puede considerar en todos los puntos axial, de forma que el caudal se calcula con

$$Q = \int_S u \mathrm{d}S$$

La velocidad media se define como la velocidad uniforme que debería tener el flujo para que el caudal fuese el mismo, $Q = \overline{u}S$. De aqui,

$$\overline{u} = \frac{1}{S} \int_S u \mathrm{d}S$$

Un documento muy interesante para estudiar la forma integral de la conservación de la masa, es el publicado en 2001 por el prof. Sonin, del MIT, disponible aqui.

4.4 Ecuación diferencial de conservación de la masa

Aplicando el Teorema de la Divergencia a la forma integral, para un Volumen de Control estacionario, se obtiene

$$\int_{VC} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u})\right] \mathrm{d}V = 0$$

Como esto debe cumplirse para cualquier VC, obtenemos la forma diferencial de la conservación de la masa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

En forma de componentes:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0$$

4.4.1 Líneas de corriente

Para un fluido incompresible:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$$

$$\text{Flujo 2D} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Consideremos una función $\psi(x, y)$ que cumple

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad ; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Entonces la ecuación de continuidad se cumple de forma exacta, ya que

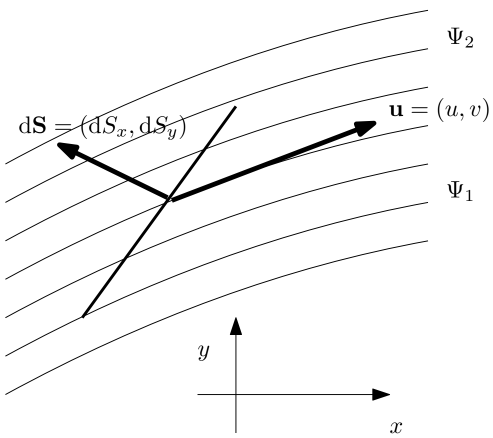
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) \equiv 0$$

$\psi(x, y)$ es la función de corriente.
Las líneas $\psi(x, y) = \psi_i = \text{cte}$ son las líneas de corriente y cumplen que

$$\mathrm{d}\psi = 0 \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \psi}{\partial y}\mathrm{d}y = 0$$

$$\Rightarrow -v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{u} = \frac{\mathrm{d}y}{v}$$

es decir, son *tangentes a* $\vec{u}$ en todos los puntos
Interpretación física:
Flujo bidimensional. Para una profundidad unidad:



$$
\begin{aligned}
dQ &= \vec{u} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
&= \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}S_x \\ \mathrm{d}S_y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial y} & -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}y \\ -\mathrm{d}x \end{pmatrix} (\times 1) \\
&= \frac{\partial \psi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \psi}{\partial x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}\psi \\
\Rightarrow Q &= \psi_2 - \psi_1
\end{aligned}
$$

Actividad 1:

$$\vec{u}(x, y) = u(x, y)\,\vec{\imath} + v(x, y)\,\vec{\jmath}$$

con $u(x, y) = a(x^2 - y^2)$. ¿Como tiene que ser de forma general $v(x, y)$ para que el flujo sea incompresible?

Calcular la función de corriente y dibujar las lineas de corriente para el caso más simple.