

Mecánica de Fluidos

Grau de Tecnologies Industrials - ESEIAAT

Robert Castilla

Dpt. de Mecànica de Fluids

Curso 2023-24

Contents

1	Introducción. Propiedades básicas de los fluidos	1
1.1	Definición de fluido	1
1.2	Hipótesis del medio continuo	2
1.3	Propiedades de los fluidos	3
1.4	Fuerzas sobre fluidos	6
1.4.1	Fuerzas de superficie	6
1.4.2	Fuerzas másicas	8
1.4.3	Fuerzas lineales (tensión superficial)	8
2	Hidrostática	11
2.1	Ecuación fundamental de la fluidostática	11
2.2	Presión atmosférica	12
2.3	Fuerza de un fluido estático sobre una superficie	15
2.3.1	Cálculo de la fuerza	15
2.3.2	Coordenadas del punto de aplicación	15
2.3.3	Fuerza sobre una superficie curva totalmente sumergida	17

Chapter 1

Introducción. Propiedades básicas de los fluidos

1.1 Definición de fluido

Definición corta:

Material incapaz de resistir esfuerzos tangenciales

- *esfuerzo* : Fuerza por unidad de superficie
- *tangencial* : ni compresión ni dilatación

Simplificación: **los fluidos son materiales muy fácilmente deformables.**

Pero la separación entre sólidos y fluidos no está clara. Hay materiales que se resisten a una clasificación sencilla. P.e. : pinturas, pastas, polímeros, etc ... Serán analizados en detalle en el tema de **Reología**.

A nivel molecular, la diferencia entre líquidos y gases tiene relación con la magnitud de la fuerza entre moléculas.

En d_0 , se produce un equilibrio estable.

Para la mayoría de las moléculas, d_0 es del orden de $3 - 4 \cdot 10^{-10}$ metros.

Para líquidos, la distancia entre moléculas es, aproximadamente, d_0 . P.e., para el agua:

$$\rho \approx 1000 \text{ Kg/m}^3$$

$$\text{Peso molecular} \approx 0.018 \text{ Kg/mol} \Rightarrow m = 3.0 \cdot 10^{-26} \text{ Kg/molecula}$$

$$V_m = \frac{3.0 \cdot 10^{-26} \text{ Kg/molecula}}{1000 \text{ Kg/m}^3} = 3.0 \cdot 10^{-29} \text{ m}^3$$

$$V_m = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow R \approx 1.9 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

Para los gases, la distancia es mucho mayor (Ejercicio: calcular d_0 para el aire).

Así, las fuerzas entre las moléculas de un gas son atractivas y muy débiles. Estas moléculas flotan por el espacio sin prácticamente ninguna interacción excepto las colisiones.

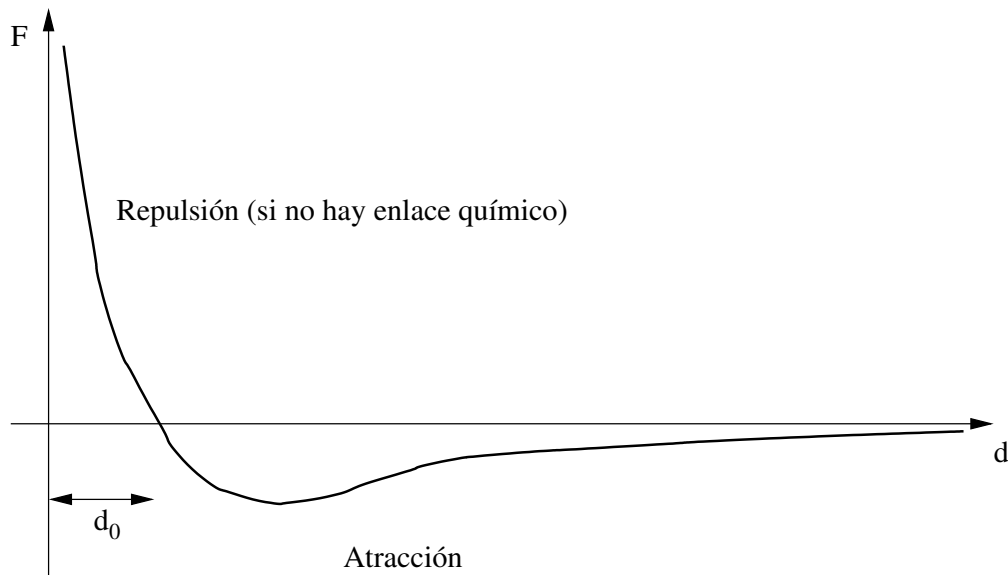


Figure 1.1: Fuerzas intermoleculares

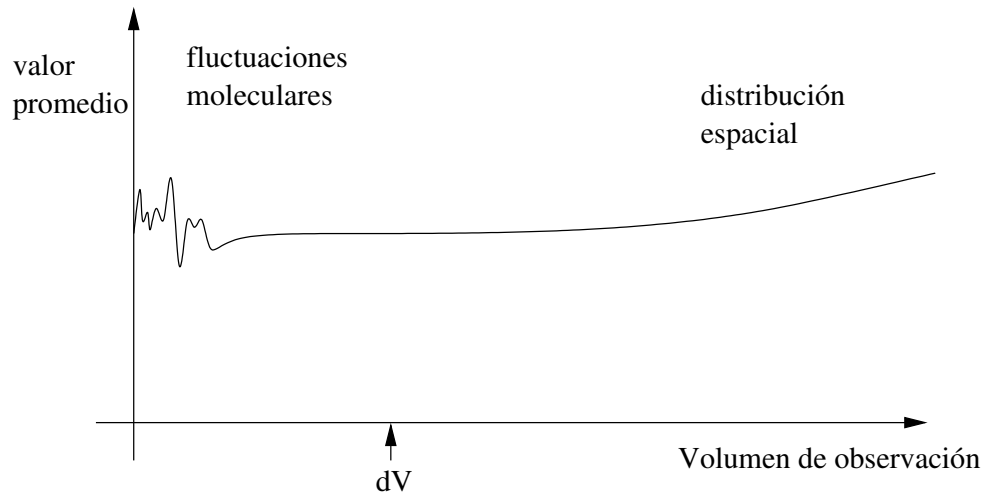
1.2 Hipótesis del medio continuo

Todos los materiales están formados por moléculas. Las propiedades del material no están distribuidas uniformemente. Si la escala de observación es lo bastante pequeña, la composición molecular del material debe tenerse en cuenta (hablamos entonces de *Mecánica Estadística*).

Sin embargo, en *Mecánica de Fluidos*, se habla normalmente de la densidad, la temperatura, la velocidad, como una **distribución uniforme de estas propiedades**, sin considerar la naturaleza discreta de la materia. Es normal hablar de "diferenciales de volumen". Sin embargo, estos diferenciales no son los mismos que los usados en Cálculo Infinitesimal. Son volúmenes finitos, pero

- lo suficientemente grandes como para albergar un número enorme de moléculas, de forma que las fluctuaciones en las propiedades se anulen entre sí, y
- lo suficientemente pequeños como para que la propiedad pueda ser considerada *local*.

Batchelor [?] lo describe muy bien con una figura parecida a esta:



1.3 Propiedades de los fluidos

- Propiedades mecánicas

- densidad - volumen específico

$$\rho = \frac{m}{V} \quad ; \quad [\rho] = \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$$

$$v = \frac{1}{\rho} = \frac{V}{m} \quad ; \quad [v] = \frac{\text{m}^3}{\text{Kg}}$$

- Módulo de elasticidad (isotérmico)

$$\beta_T = -v \left(\frac{dp}{dv} \right)_T = \rho \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_T \quad ; \quad [\beta_T] = \text{Pa}$$

Dado que, para un gas ideal a temperatura constante, $\rho \propto p$, tenemos que $\beta_T = p$. Para una variación de presión Δp , la variación relativa de densidad se puede calcular mediante

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\Delta p}{\beta_T}$$

Criterio de compresibilidad : Todos los fluidos son compresibles, en mayor o menor grado. Es importante saber en qué condiciones un fluido podrá ser considerado compresible y cuándo no. Supongamos que es considerado compresible si $\frac{\Delta \rho}{\rho} \leq 0.01$. Entonces,

$$\frac{\Delta p}{\beta_T} \lesssim 0.01.$$

Como veremos más adelante, se puede relacionar Δp con la velocidad de flujo,

$$\Delta p \sim \frac{1}{2} \rho u^2,$$

de forma que un fluido con velocidad u se puede considerar incompresible si

$$\frac{\rho u^2}{\beta_T} \lesssim 0.02.$$

Como ejemplo, consideremos el aire a presión atmosférica, $\beta_T = p = 10^5 \text{ Pa}$, $\rho \approx 1.2 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$.

$$u^2 \lesssim \frac{0.02 \beta_T}{\rho} = \frac{0.02 \cdot 10^5}{1.2} = 1.66 \cdot 10^3 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

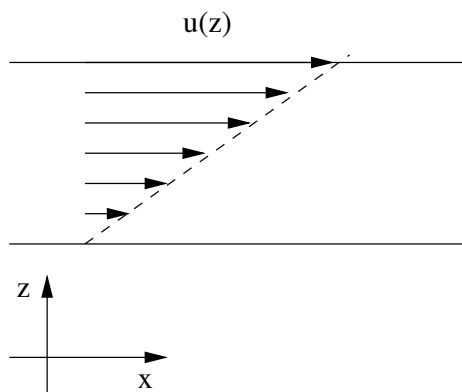
$$\Rightarrow u \approx 40 \text{ m/s}$$

Ejercicio

Para el agua, a 20°C y presión atmosférica, $\beta_T \approx 2.2 \times 10^9 \text{ Pa}$ y $\rho \approx 1000 \text{ Kg/m}^3$. Calcular para qué orden de magnitud de velocidad de flujo el agua debe empezar a considerarse compresible.

– Viscosidad

Si un fluido fluye en la dirección x , de forma ordenada, por capas, aumentando la velocidad en la dirección z , como muestra la figura,



se produce un intercambio de cantidad de movimiento entre capas que tiende a frenar las más rápidas y acelerar las más lentas. Es decir, se produce un *esfuerzo tangencial*. En muchos casos, éste esfuerzo es proporcional al gradiente de velocidades, y a la constante de proporcionalidad se le denomina *viscosidad dinámica*, μ .

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial z} \quad ; \quad [\mu] = \text{Pa} \cdot \text{s}$$

La *viscosidad cinemática* se define como

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad ; \quad [\nu] = \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

Ampliaremos el concepto de viscosidad en el tema siguiente.

• **Propiedades termodinámicas**

entalpía

$$h = u + \frac{p}{\rho} = u + pv \quad ; \quad [h] = [u] = \frac{\text{J}}{\text{Kg}},$$

calor específico

$$c_v = \left(\frac{\partial q}{\partial T} \right)_v = \frac{\partial u}{\partial T} \quad \text{a volumen constante}$$

$$c_p = \left(\frac{\partial q}{\partial T} \right)_p = \frac{\partial h}{\partial T} \quad \text{a presión constante}$$

$$[c_p] = [c_v] = \frac{\text{J}}{\text{Kg} \cdot \text{K}}$$

La relación entre ambos coeficientes es:

$$c_p = c_v + \frac{\partial pv}{\partial T}$$

Para un gas perfecto,

$$pv = R'T \Rightarrow \frac{\partial pv}{\partial T} = R'$$

$$\Rightarrow c_p = c_v + R'$$

, donde $R' = \frac{R}{M}$.

El cociente entre los dos coeficientes se denomina *exponente adiabático*,

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}.$$

coeficiente de expansión térmica

Normalmente, $\uparrow T \Rightarrow \uparrow v (\Rightarrow \downarrow \rho)$.

$$\alpha = \frac{1}{v} \frac{dv}{dT} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT} \quad ; \quad [\alpha] = \text{K}^{-1}$$

Para agua en condiciones normales, $\alpha \approx 1.5 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$.

Consideremos un gas perfecto, a presión constante,

$$\alpha_p = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p,$$

como $\rho = \frac{p}{R'T}$,

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = -\frac{p}{R'T^2} \quad \Rightarrow \quad \alpha_p = \frac{1}{T}$$

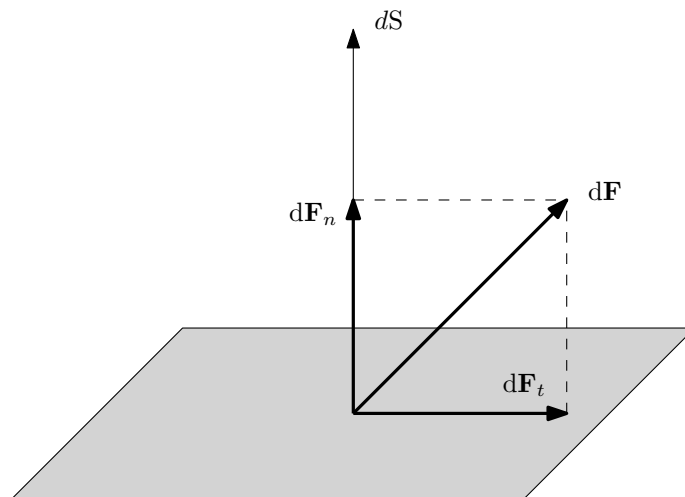
1.4 Fuerzas sobre fluidos

1.4.1 Fuerzas de superficie

Actúan sobre el contorno de un volumen determinado de fluido.

Se crean por contacto bien del mismo fluido, un fluido diferente o un sólido.

Dada una superficie $\delta \vec{S}$, y una fuerza superficial $\delta \vec{F}$ actuando sobre ella, ésta se puede descomponer en una componente normal y una componente tangencial.



Definición de tensión o esfuerzo:

esfuerzo normal :

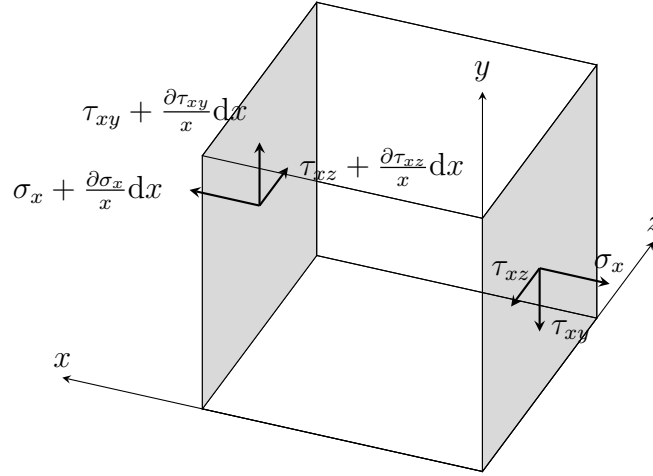
$$\sigma = \lim_{\delta \vec{S} \rightarrow 0} \frac{\delta \vec{F}_n}{\delta \vec{S}}$$

esfuerzo tangencial :

$$\tau = \lim_{\delta \vec{S} \rightarrow 0} \frac{\delta \vec{F}_t}{\delta \vec{S}}$$

σ_i : esfuerzo normal aplicado sobre una superficie normal al eje i (y, por lo tanto, paralelo al eje i)

τ_{ij} : esfuerzo tangencial aplicado sobre una superficie normal al eje i , y en la dirección del eje j



Sobre el volumen dV actúa una fuerza, debida a los esfuerzos superficiales cuya componente x es

$$\begin{aligned} dF_x = & -\sigma_x dydz + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz - \tau_{yx} dx dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) dx dz \\ & - \tau_{zx} dx dy + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dx dy dz \end{aligned}$$

De la misma forma:

$$\begin{aligned} dF_y = & \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dx dy dz \\ dF_z = & \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dx dy dz \end{aligned}$$

La fuerza por unidad de volumen, debida a los esfuerzos superficiales es entonces

$$\begin{aligned} \vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dV} = & \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \vec{i} \\ & + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \vec{j} \\ & + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) \vec{k} \end{aligned}$$

que se expresa de forma abreviada como

$$\vec{f} = \vec{\nabla} \vec{\tau},$$

donde $\vec{\tau}$ es el **tensor de tensiones** (stress tensor)

$$\vec{\tau} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

1.4.2 Fuerzas másicas

Actúan a distancia

Son debidas a campos de fuerza (gravitacional, electromagnético, ...)

Fluido eléctricamente cargado : plasma

- Electrodinámica
- Magnetohidrodinámica

Caso más común: sólo campo gravitacional

$$\vec{f}_g = \rho \vec{g}$$

1.4.3 Fuerzas lineales (tensión superficial)

En la interfase de separación entre dos líquidos reside una cantidad de energía, correspondiente a la interacción entre moléculas muy próximas a la superficie de separación

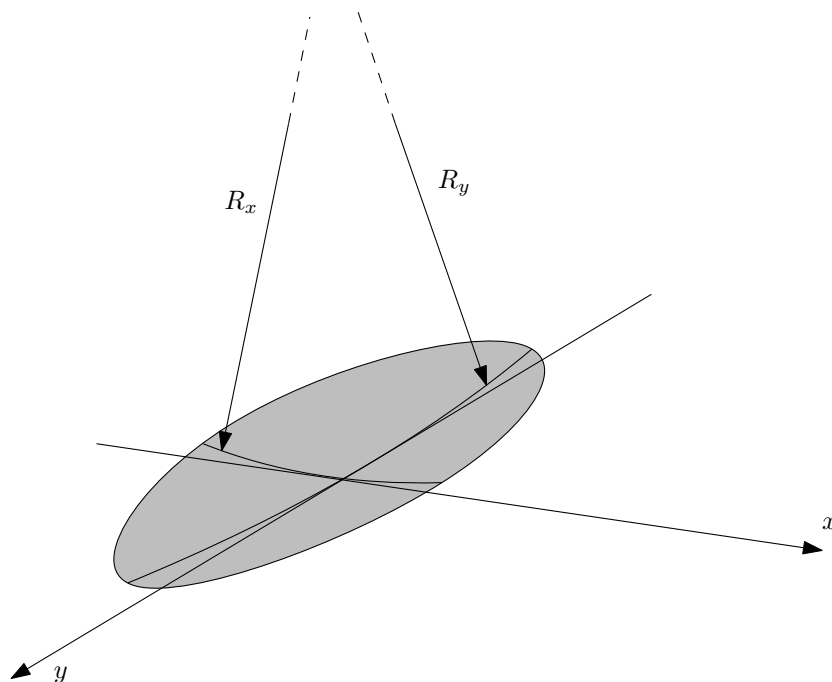
Esta energía es proporcional al área de la interfase.

$$E_s = \sigma S$$

El parámetro σ recibe el nombre de **tensión superficial** y tiene unidades de fuerza por unidad de longitud. Esta fuerza es tangente a la superficie, y normal a la línea de aplicación.

El valor de σ depende de la naturaleza de los materiales que separa la interfase y de su estado termodinámico.

P.e. para la interfase entre agua y aire a 20°C , $\sigma = 72.8 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$



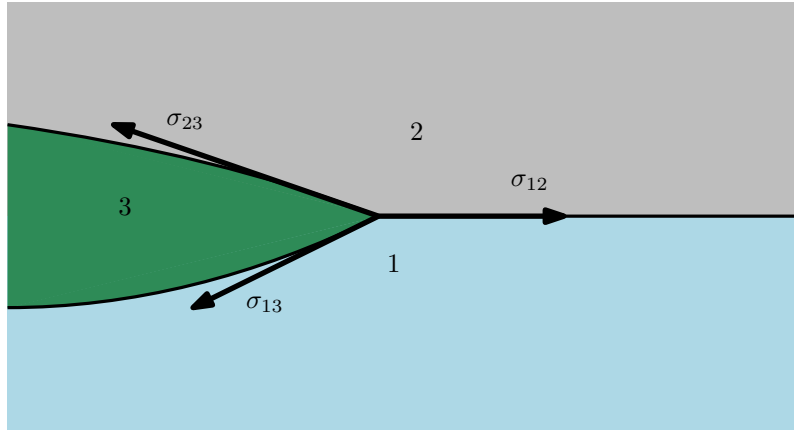
Se puede demostrar (ver [?]) que la tensión provocada en la superficie es equivalente a una diferencia de presión, como indica la **ley de Young-Laplace**

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} \right)$$

Si los dos radios de curvatura son iguales, $R_x = R_y = R$) (casquete esférico), esta expresión se reduce a

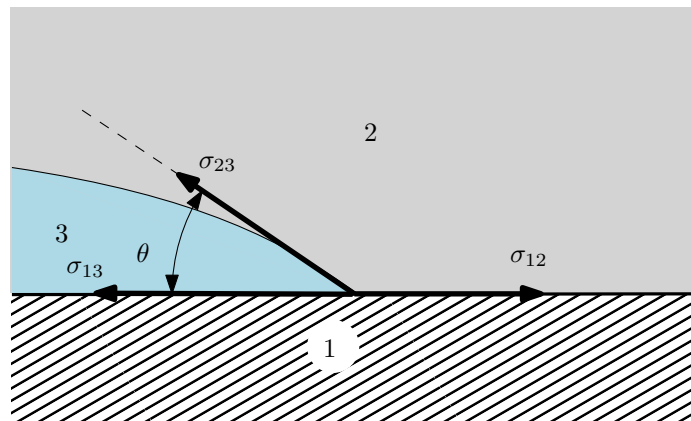
$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R} \quad (1.1)$$

Consideramos el caso de tres fluidos (p.e. una gota de aceite en una superficie de agua)



Si el módulo de una de las tensiones es mayor que la suma de los módulos de las otras dos, este sistema nunca puede llegar al equilibrio, y el fluido se expandirá de forma indefinida hasta llegar al equilibrio, o tener un grosor de tamaño molecular.

Si uno de los materiales es un sólido,



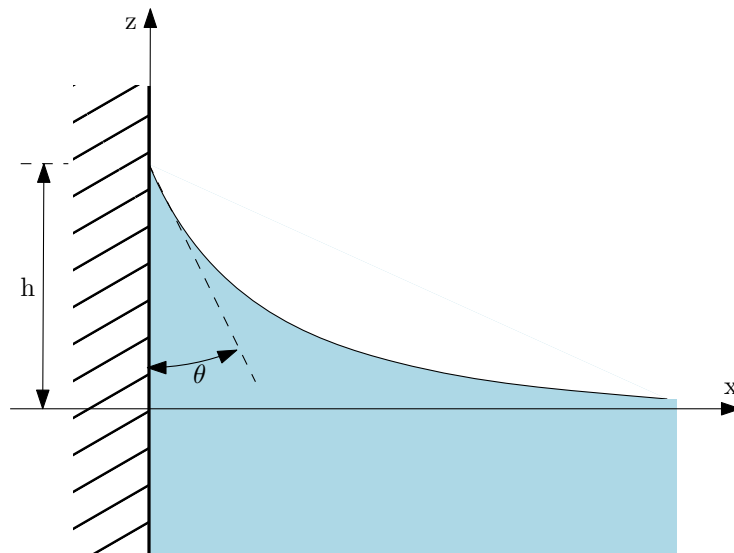
se llega al equilibrio para

$$\sigma_{12} = \sigma_{31} + \sigma_{23} \cos \theta$$

Se considera que cuanto menor es θ , más "moja" el fluido sobre la superficie del sólido.

Ejemplo:

Líquido en contacto con pared plana vertical



Forma de la interfase: $z = \zeta(x)$

En un cierto punto de la interfase, la tensión superficial tiene que ser tal que compense la presión de la columna de fluido. Como veremos más adelante, esta es $\rho g z$, de forma que

$$\rho g z = \sigma \frac{1}{R_1}$$

$$\rho g \zeta = \sigma \frac{\zeta''}{(1 + \zeta'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Integrando se obtiene

$$\frac{1}{2} \frac{\rho g}{\sigma} \zeta^2 + \frac{1}{(1 + \zeta'^2)^{\frac{1}{2}}} = K$$

Muy lejos de la pared, se cumple que $\zeta = \zeta' = 0$, de forma que $K = 1$

Por otro lado, en $x = 0$, se tiene (ver figura) $\zeta = h$ y $\zeta' = -\frac{1}{\tan \theta}$, de forma que

$$h = d \sqrt{2(1 - \sin \theta)}$$

donde $d^2 = \frac{\sigma}{\rho g}$.

Chapter 2

Hidrostática

2.1 Ecuación fundamental de la fluidostática

Fluido en reposo: No hay esfuerzos tangenciales, y la única fuerza superficial es la presión.

Equilibrio estático:

$$\vec{f}_m - \vec{\nabla}p = 0 \quad (2.1)$$

Según el calculo diferencial,

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi) = 0 \quad \forall \phi \text{ escalar}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{f}_m = 0.$$

$\Rightarrow \vec{f}_m$ ha de ser un *campo conservativo*.

$$dp = \vec{f}_m \cdot d\vec{r}$$

Integrando sobre un determinado camino,

$$p(\vec{r}) = p(\vec{r}_0) + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{f}_m \cdot d\vec{r}$$

Nos permite calcular la presión en cualquier punto \vec{r} conociendo el valor en un punto de referencia \vec{r}_0 y el campo de fuerzas \vec{f}_m .

Si \vec{f}_m es conservativo

$$\vec{f}_m = -\rho \vec{\nabla}U$$

y, entonces,

$$\vec{\nabla}p = -\rho \vec{\nabla}U$$

Si ρ varia de forma arbitraria, no existen soluciones para la ecuación , y no es posible llegar al equilibrio, \rightarrow [corrientes convectivas](#)

La ecuación sólo admite soluciones cuando ρ es únicamente función de la presión, o bien es constante (fluido incompresible).

$$p + \rho U = cte$$

→ Principio de Pascal

Hidrostatica en el campo de la gravedad

$$\vec{f}_m = \rho \vec{g},$$

con

$$\vec{g} = -g\vec{k} \quad \text{donde } g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

y

$$U = gz$$

Superficies isobáricas (superficies de igual presión), incluida la superficie libre de los líquidos, horizontales.

$$\vec{\nabla} p = -\rho g \vec{k} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \end{cases}$$

La presión es únicamente función de la coordenada z .

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dz} &= -\rho g \Rightarrow p_2 - p_1 \\ &= - \int_{z_1}^{z_2} \rho g dz \end{aligned}$$

Actividad 1:

- ¿A cuántos metros de columna de agua corresponden la presión atmosférica?
- Si el aire fuese incompresible, con la densidad que tiene a nivel del mar, ¿cuál debería ser la altura de la atmósfera para tener la misma presión?

2.2 Presión atmosférica

La presión atmosférica disminuye con la altura. Dado que el aire es un gas, su densidad disminuye, en general, cuando disminuye la presión, por lo que también es menor cuando aumentamos la altura.

Necesitamos información sobre la variación de ρ con z , o bien con p .

Opción: aire gas ideal

$$\rho = \frac{pM}{RT} \quad \text{con } M = 28.9 \text{ g/mol.}$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} dz \quad (2.2)$$

Sin considerar la variación de g con la altura:

- **Atmósfera isoterma:**

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = - \int_0^z \frac{Mg}{RT} dz$$

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{Mg}{RT} z = -\frac{\rho_0 g}{p_0} z$$

$$\Rightarrow \boxed{p = p_0 \exp \left(-\frac{\rho_0 g}{p_0} z \right) = p_0 \exp \left(-\frac{z}{\alpha} \right)} \quad (2.3)$$

donde

$$\alpha = \frac{p_0}{\rho_0 g}$$

Valores normales:

$$\left. \begin{array}{l} \rho_0 = 1.292 \text{ Kg/m}^3 \\ g = 9.80665 \text{ m/s}^2 \\ p_0 = 760 \text{ mmHg} = 101328 \text{ Pa} \end{array} \right\} \rightarrow \alpha = 7997.35 \text{ m} \approx 8000 \text{ m}$$

- **Atmósfera adiabática:**

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \quad \text{con} \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1.4 \quad \text{para aire}$$

$$dp = -g\rho dz = -\rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} g dz$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{p^{\frac{1}{\gamma}}} = -\frac{\rho_0}{p_0^{\frac{1}{\gamma}}} g dz$$

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p^{\frac{1}{\gamma}}} = \int_0^z -\frac{\rho_0}{p_0^{\frac{1}{\gamma}}} g dz = -\frac{\rho_0}{p_0^{\frac{1}{\gamma}}} g z$$

$$\Rightarrow \frac{1}{-\frac{1}{\gamma} + 1} p^{-\frac{1}{\gamma} + 1} \Big|_{p_0}^p = -\frac{\rho_0}{p_0^{\frac{1}{\gamma}}} g z$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{\gamma}{\gamma-1} \left[p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] &= -\frac{\rho_0}{p_0^{\frac{1}{\gamma}}} g z \\
\Rightarrow p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} &= \frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{\rho_0}{p_0^{\frac{1}{\gamma}}} g z \\
\Rightarrow \boxed{\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1 + \frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{z}{\alpha}} & \quad (2.4)
\end{aligned}$$

- [Atmósfera estándar:](#)

En realidad, la temperatura media de la atmósfera disminuye de forma casi lineal con la altura

$$T = T_0 - Bz$$

hasta una altura aproximada de 11000 metros (región conocida como *troposfera*). Los valores de T_0 (la temperatura a nivel del mar) y B (*gradiente térmico*) varían no sólo según el día sino también a lo largo del mismo día. Los valores estándar usados por convenio son

$$\begin{aligned}
T_0 &= 15^\circ C = 288.16K \\
B &= 0.0065K/m
\end{aligned}$$

Actividad 2:

Integrar la ecuación (2.2) con esta distribución de temperatura para obtener

$$p = p_0 \left(1 - \frac{Bz}{T_0} \right)^{\frac{Mg}{RB}} \quad (2.5)$$

El valor del exponente para aire es

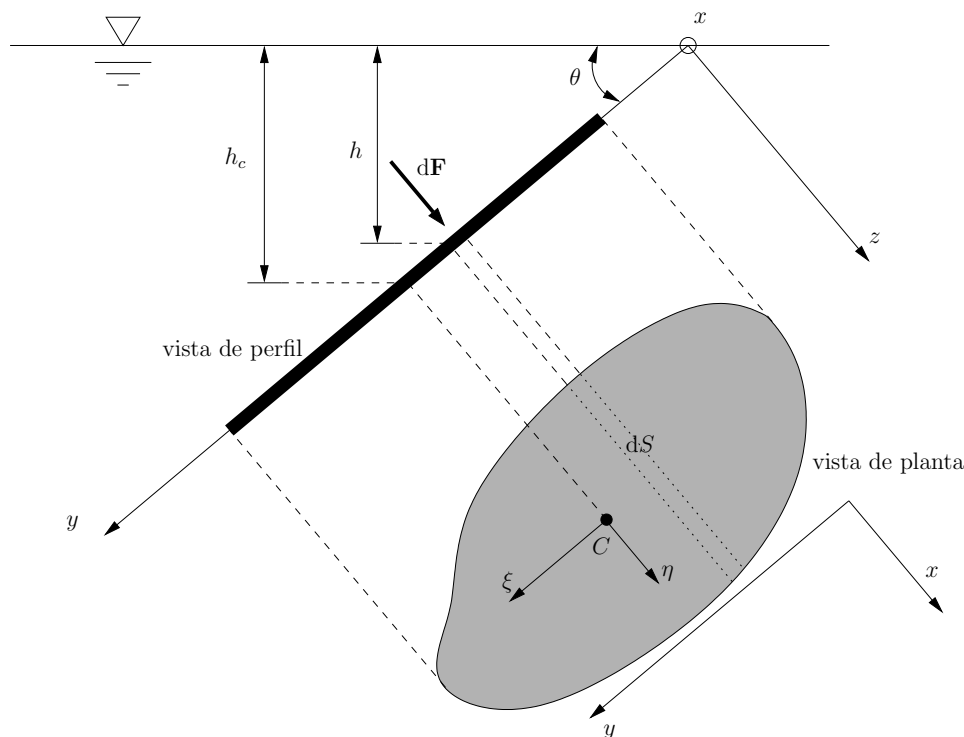
$$\frac{Mg}{RB} = 5.26$$

Después de la troposfera, la temperatura se mantiene constante hasta unos 20000 metros para empezar a aumentar de forma gradual.

Hay que tener siempre en cuenta que esta atmósfera estándar es un valor promediado.

2.3 Fuerza de un fluido estático sobre una superficie

2.3.1 Cálculo de la fuerza



$$F = \int_S dF = \int_S (p_0 + \rho g h) dS = \int_S (p_0 + \rho g y \sin \theta) dS$$

$$\Rightarrow F = p_0 S + \rho g \sin \theta \int_S y dS$$

$\int_S y dS$: momento de primer orden de la superficie S respecto el eje $x \rightarrow$ coordenada y_C del centroide C de la forma

$$y_C S = \int_S y dS \Rightarrow F = (p_0 + \rho g y_C \sin \theta) S = (p_0 + \rho g h_C) S$$

La fuerza ejercida sobre una superficie totalmente sumergida se puede calcular **imaginando** que la presión que actúa es constante en toda la superficie e igual al valor en el centroide.

2.3.2 Coordenadas del punto de aplicación

Momento de la fuerza \vec{F} respecto el eje x :

$$y_{cp} F = \int_S y dF = \int_S y (p_0 + \rho g y \sin \theta) dS = p_0 \int_S y dS + \rho g \sin \theta \int_S y^2 dS$$

$$\Rightarrow y_{cp} F = \int_S y dF = p_0 y_C S + \rho g \sin \theta I_{xx}$$

donde I_{xx} es el momento de segundo orden de la superficie S respecto el eje x .

Nuevo sistema de coordenadas (ξ, η, ζ) , paralelo a (x, y, z) pero con origen en el centroide C .

$$I_{xx} = I_{\xi\xi} + y_C^2 S \quad (\text{T. de Steiner})$$

$$\Rightarrow y_{cp} = y_C + \frac{I_{\xi\xi}}{\left(y_C + \frac{p_0}{\rho g \sin \theta}\right) S}$$

Para x_{cp} :

$$\int_S x dF = \int_S x(p_0 + \rho g y \sin \theta) dS = p_0 \int_S x dS + \rho g \sin \theta \int_S xy dS$$

$$\Rightarrow \int_S x dF = p_0 x_C S + \rho g \sin \theta I_{xy}$$

$$I_{xy} = I_{\xi\eta} + x_C y_C S \quad (\text{T. de Steiner})$$

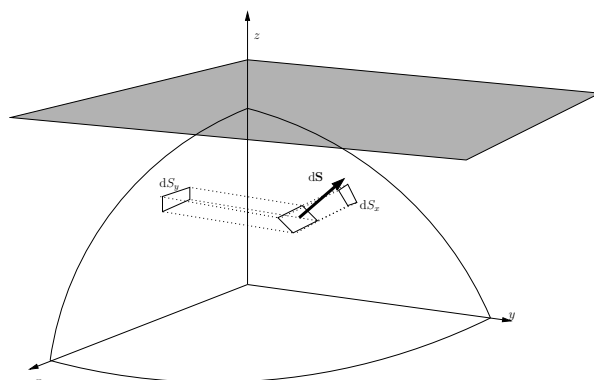
$$\Rightarrow x_{cp} = x_C + \frac{I_{\xi\eta}}{\left(y_C + \frac{p_0}{\rho g \sin \theta}\right) S}$$

Normalmente, p_0 (en general, la presión atmosférica) actúa por igual en las dos caras de la superficie,

$$\begin{aligned} F &= \rho g h_C S \\ x_{cp} &= x_C + \frac{I_{\xi\eta}}{y_C S} \\ y_{cp} &= y_C + \frac{I_{\xi\xi}}{y_C S} \end{aligned}$$

Dado que $I_{\xi\xi}$ es, por definición, una cantidad siempre positiva, el centro de presiones se encuentra siempre por debajo del centroide.

2.3.3 Fuerza sobre una superficie curva totalmente sumergida



$$F_x = - \int_S (p_0 + \rho g h) dS_x$$

$$F_y = - \int_S (p_0 + \rho g h) dS_y$$

Si proyectamos la superficie S sobre los planos $x = 0$ y $y = 0$, obtenemos S_x y S_y , y podemos calcular F_x y F_y , así como sus puntos de aplicación.

F_z resulta ser igual al peso total de fluido que se encuentra *por encima* de la superficie curva. La línea de acción de F_z pasa por el centro de gravedad de la columna de fluido que hay sobre la superficie.

Las expresiones anteriores son válidas únicamente para fluidos con densidad constante. Si el fluido está estratificado, de forma que hay un *gradiente de densidad*, positivo hacia la dirección vertical negativa, los cálculos se complican.

Actividad 3:

Calcula la fuerza y el momento que hace un embalse de agua de 50 metros de profundidad y 200 metros de ancho sobre la pared, vertical, de la presa.

