

# Mecánica de Fluidos

Grau de Tecnologies Industrials - ESEIAAT

**Robert Castilla**

Dpt. de Mecànica de Fluids

Curso 2023-24



# Contents

<b>1</b>	<b>Introducción. Propiedades básicas de los fluidos</b>	<b>1</b>
1.1	Definición de fluido . . . . .	1
1.2	Hipótesis del medio continuo . . . . .	2
1.3	Propiedades de los fluidos . . . . .	3
1.4	Fuerzas sobre fluidos . . . . .	6
1.4.1	Fuerzas de superficie . . . . .	6
1.4.2	Fuerzas másicas . . . . .	8
1.4.3	Fuerzas lineales (tensión superficial) . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Hidrostática</b>	<b>11</b>
2.1	Ecuación fundamental de la fluidostática . . . . .	11
2.2	Presión atmosférica . . . . .	12
2.3	Fuerza de un fluido estático sobre una superficie . . . . .	15
2.3.1	Cálculo de la fuerza . . . . .	15
2.3.2	Coordenadas del punto de aplicación . . . . .	15
2.3.3	Fuerza sobre una superficie curva totalmente sumergida . . . . .	17
2.4	Principio de Arquímedes . . . . .	17
2.5	Segunda ley de Arquímedes . . . . .	18
2.6	Estabilidad . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Cinemática de fluidos</b>	<b>23</b>
3.1	Descripción Euleriana y Lagrangiana . . . . .	23
3.2	Lineas de corriente, trayectorias y líneas de traza . . . . .	23
3.3	Derivada sustancial . . . . .	24
3.4	Circulación, Flujo y Vorticidad . . . . .	25
3.5	Movimiento relativo en el entorno de un punto . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Ecuaciones de la Dinámica</b>	<b>29</b>
4.1	Introducción . . . . .	29
4.2	Formulación integral y diferencial . . . . .	29
4.2.1	Sistema y volumen de control . . . . .	30
4.2.2	El teorema de arrastre de Reynolds . . . . .	30
4.3	Ecuación integral de conservación de la masa . . . . .	32

4.3.1	Definición de velocidad media . . . . .	33
4.4	Ecuación diferencial de conservación de la masa . . . . .	33
4.4.1	Líneas de corriente . . . . .	34
4.5	Ecuación integral de la conservación de la cantidad de movimiento . . . . .	35
4.6	Cálculo de fuerzas en un $VC$ . . . . .	36
4.6.1	Sistema de Referencia No Inercial . . . . .	38
4.6.2	Factor de corrección de flujo de cantidad de movimiento . . . . .	38
4.7	Ecuación diferencial de la conservación de la cantidad de movimiento . . . . .	39
4.8	El tensor de tensiones para fluidos newtonianos. La ecuación de Navier-Stokes . . . . .	40
4.9	Ecuación integral de la conservación del momento cinético . . . . .	42
4.10	Cálculo de momentos en un $VC$ . . . . .	43
4.10.1	Ejemplo 1: . . . . .	43
4.11	Las turbomáquinas hidráulicas . . . . .	46
4.11.1	La conservación del momento cinético y las turbomáquinas hidráulicas . . . . .	46
4.11.2	El triángulo de velocidades y la ecuación de Euler . . . . .	47
4.12	Ecuación integral de la conservación de la energía . . . . .	49
4.12.1	Análisis del trabajo . . . . .	49
4.12.2	Ecuación de Bernoulli . . . . .	50
4.13	Ecuación diferencial de la conservación de la energía . . . . .	51
4.14	Derivación de la Ecuación de Bernoulli a partir de la Ecuación de Euler . . . . .	53
4.15	Presión estática, dinámica y de remanso . . . . .	54
4.15.1	Tubo de Venturi . . . . .	55
4.15.2	Diafragma . . . . .	55
4.15.3	Vaciado de un depósito . . . . .	56

# Chapter 1

## Introducción. Propiedades básicas de los fluidos

### 1.1 Definición de fluido

Definición corta:

**Material incapaz de resistir esfuerzos tangenciales**

- *esfuerzo* : Fuerza por unidad de superficie
- *tangencial* : ni compresión ni dilatación

Simplificación: **los fluidos son materiales muy fácilmente deformables.**

Pero la separación entre sólidos y fluidos no está clara. Hay materiales que se resisten a una clasificación sencilla. P.e. : pinturas, pastas, polímeros, etc ... Serán analizados en detalle en el tema de **Reología**.

A nivel molecular, la diferencia entre líquidos y gases tiene relación con la magnitud de la fuerza entre moléculas.

En  $d_0$ , se produce un equilibrio estable.

Para la mayoría de las moléculas,  $d_0$  es del orden de  $3 - 4 \cdot 10^{-10}$  metros.

Para líquidos, la distancia entre moléculas es, aproximadamente,  $d_0$ . P.e., para el agua:

$$\rho \approx 1000 \text{ Kg/m}^3$$

$$\text{Peso molecular} \approx 0.018 \text{ Kg/mol} \Rightarrow m = 3.0 \cdot 10^{-26} \text{ Kg/molecula}$$

$$V_m = \frac{3.0 \cdot 10^{-26} \text{ Kg/molecula}}{1000 \text{ Kg/m}^3} = 3.0 \cdot 10^{-29} \text{ m}^3$$

$$V_m = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow R \approx 1.9 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

Para los gases, la distancia es mucho mayor (Ejercicio: calcular  $d$  para el aire).

Así, las fuerzas entre las moléculas de un gas son atractivas y muy débiles. Estas moléculas flotan por el espacio sin prácticamente ninguna interacción excepto las colisiones.

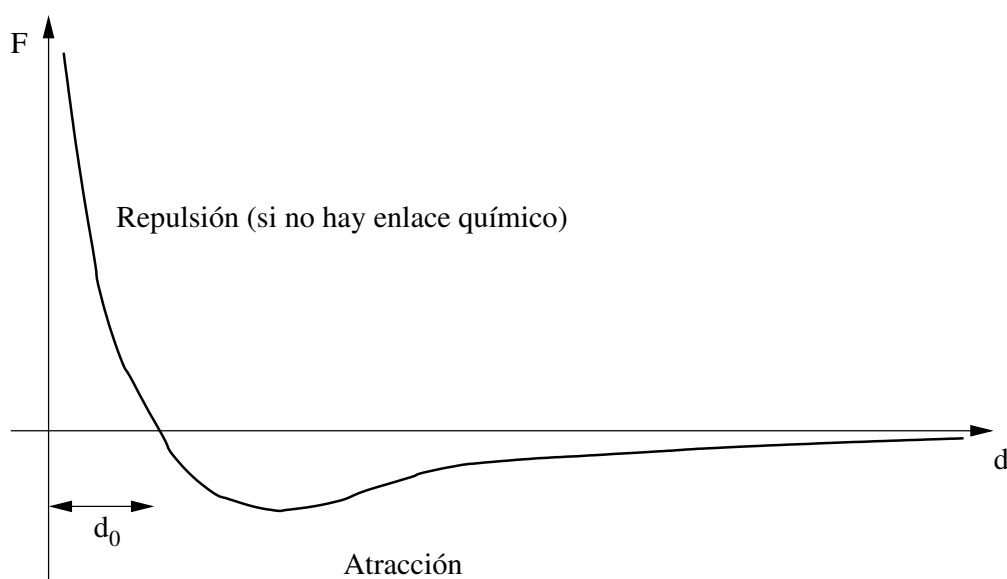


Figure 1.1: Fuerzas intermoleculares

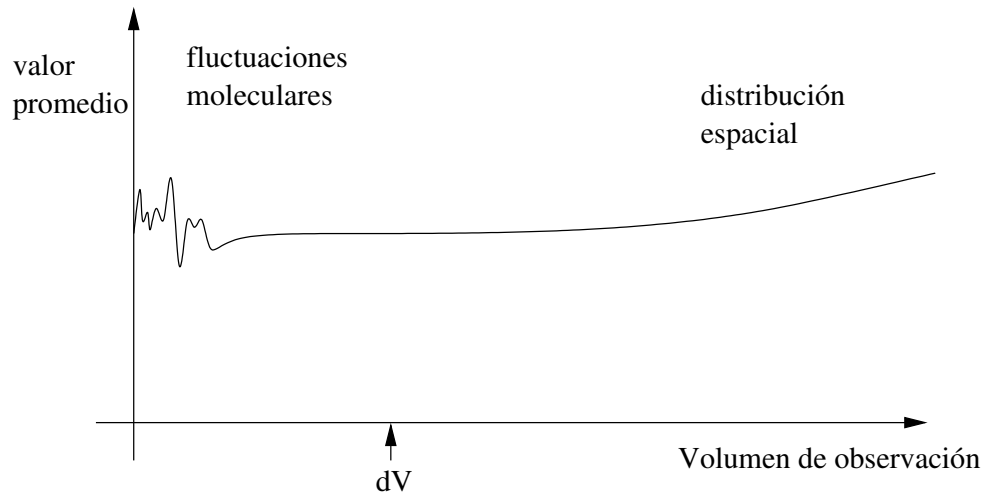
## 1.2 Hipótesis del medio continuo

Todos los materiales están formados por moléculas. Las propiedades del material no están distribuidas uniformemente. Si la escala de observación es lo bastante pequeña, la composición molecular del material debe tenerse en cuenta (hablamos entonces de *Mecánica Estadística*).

Sin embargo, en *Mecánica de Fluidos*, se habla normalmente de la densidad, la temperatura, la velocidad, como una **distribución uniforme de estas propiedades**, sin considerar la naturaleza discreta de la materia. Es normal hablar de "diferenciales de volumen". Sin embargo, estos diferenciales no son los mismos que los usados en Cálculo Infinitesimal. Son volúmenes finitos, pero

- lo suficientemente grandes como para albergar un número enorme de moléculas, de forma que las fluctuaciones en las propiedades se anulen entre sí, y
- lo suficientemente pequeños como para que la propiedad pueda ser considerada *local*.

Batchelor [?] lo describe muy bien con una figura parecida a esta:



### 1.3 Propiedades de los fluidos

- Propiedades mecánicas

- densidad - volumen específico

$$\rho = \frac{m}{V} \quad ; \quad [\rho] = \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$$

$$v = \frac{1}{\rho} = \frac{V}{m} \quad ; \quad [v] = \frac{\text{m}^3}{\text{Kg}}$$

- Módulo de elasticidad (isotérmico)

$$\beta_T = -v \left( \frac{dp}{dv} \right)_T = \rho \left( \frac{dp}{d\rho} \right)_T \quad ; \quad [\beta_T] = \text{Pa}$$

Dado que, para un gas ideal a temperatura constante,  $\rho \propto p$ , tenemos que  $\beta_T = p$ . Para una variación de presión  $\Delta p$ , la variación relativa de densidad se puede calcular mediante

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\Delta p}{\beta_T}$$

**Criterio de compresibilidad :** Todos los fluidos son compresibles, en mayor o menor grado. Es importante saber en qué condiciones un fluido podrá ser considerado compresible y cuándo no. Supongamos que es considerado compresible si  $\frac{\Delta \rho}{\rho} \leq 0.01$ . Entonces,

$$\frac{\Delta p}{\beta_T} \lesssim 0.01.$$

Como veremos más adelante, se puede relacionar  $\Delta p$  con la velocidad de flujo,

$$\Delta p \sim \frac{1}{2} \rho u^2,$$

de forma que un fluido con velocidad  $u$  se puede considerar incompresible si

$$\frac{\rho u^2}{\beta_T} \lesssim 0.02.$$

Como ejemplo, consideremos el aire a presión atmosférica,  $\beta_T = p = 10^5$  Pa,  $\rho \approx 1.2 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$ .

$$u^2 \lesssim \frac{0.02 \beta_T}{\rho} = \frac{0.02 \cdot 10^5}{1.2} = 1.66 \cdot 10^3 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

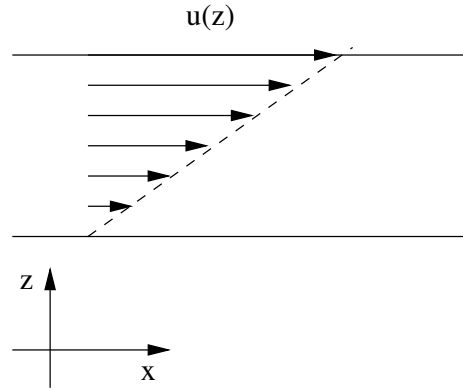
$$\Rightarrow u \approx 40 \text{ m/s}$$

### Ejercicio

Para el agua, a  $20^\circ\text{C}$  y presión atmosférica,  $\beta_T \approx 2.2 \times 10^9$  Pa y  $\rho \approx 1000 \text{ Kg/m}^3$ . Calcular para qué orden de magnitud de velocidad de flujo el agua debe empezar a considerarse compresible.

#### – Viscosidad

Si un fluido fluye en la dirección  $x$ , de forma ordenada, por capas, aumentando la velocidad en la dirección  $z$ , como muestra la figura,



se produce un intercambio de cantidad de movimiento entre capas que tiende a frenar las más rápidas y acelerar las más lentas. Es decir, se produce un *esfuerzo tangencial*. En muchos casos, éste esfuerzo es proporcional al gradiente de velocidades, y a la constante de proporcionalidad se le denomina *viscosidad dinámica*,  $\mu$ . Ésta es la conocida como **Ley de Newton de la viscosidad**.

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial z} \quad ; \quad [\mu] = \text{Pa} \cdot \text{s} \quad (1.1)$$



La *viscosidad cinemática* se define como

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad ; \quad [\nu] = \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

Ampliaremos el concepto de viscosidad en el tema siguiente.

• **Propiedades termodinámicas**

*entalpía*

$$h = u + \frac{p}{\rho} = u + pv \quad ; \quad [h] = [u] = \frac{\text{J}}{\text{Kg}},$$

*calor específico*

$$c_v = \left( \frac{\partial q}{\partial T} \right)_v = \frac{\partial u}{\partial T} \quad \text{a volumen constante}$$

$$c_p = \left( \frac{\partial q}{\partial T} \right)_p = \frac{\partial h}{\partial T} \quad \text{a presión constante}$$

$$[c_p] = [c_v] = \frac{\text{J}}{\text{Kg} \cdot \text{K}}$$

La relación entre ambos coeficientes es:

$$c_p = c_v + \frac{\partial pv}{\partial T}$$

Para un gas perfecto,

$$pv = R'T \Rightarrow \frac{\partial pv}{\partial T} = R'$$

$$\Rightarrow c_p = c_v + R'$$

, donde  $R' = \frac{R}{M}$ .

El cociente entre los dos coeficientes se denomina *exponente adiabático*,

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}.$$

*coeficiente de expansión térmica*

Normalmente,  $\uparrow T \Rightarrow \uparrow v (\Rightarrow \downarrow \rho)$ .

$$\alpha = \frac{1}{v} \frac{dv}{dT} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT} \quad ; \quad [\alpha] = \text{K}^{-1}$$

Para agua en condiciones normales,  $\alpha \approx 1.5 \cdot 10^{-4} \text{K}^{-1}$ .

Consideremos un gas perfecto, a presión constante,

$$\alpha_p = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p,$$

como  $\rho = \frac{p}{R'T}$ ,

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = -\frac{p}{R'T^2} \quad \Rightarrow \quad \alpha_p = \frac{1}{T}$$

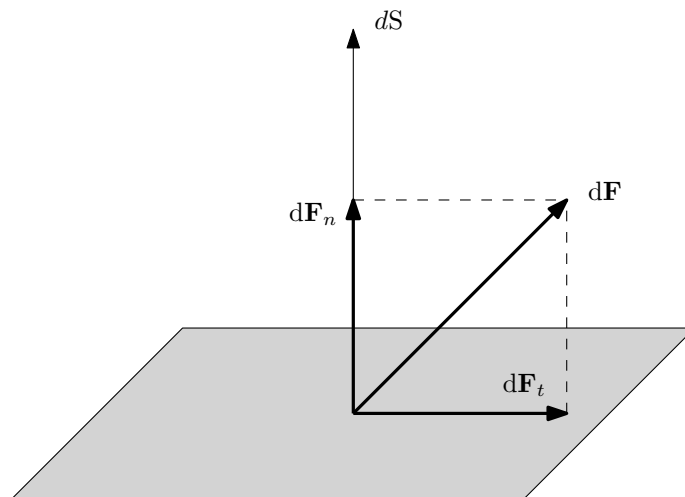
## 1.4 Fuerzas sobre fluidos

### 1.4.1 Fuerzas de superficie

Actúan sobre el contorno de un volumen determinado de fluido.

Se crean por contacto bien del mismo fluido, un fluido diferente o un sólido.

Dada una superficie  $\delta \vec{S}$ , y una fuerza superficial  $\delta \vec{F}$  actuando sobre ella, ésta se puede descomponer en una componente normal y una componente tangencial.



Definición de tensión o esfuerzo:

esfuerzo normal :

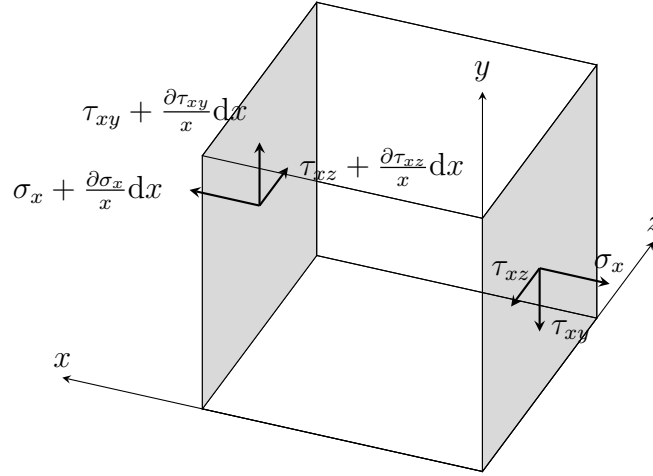
$$\sigma = \lim_{\delta \vec{S} \rightarrow 0} \frac{\delta \vec{F}_n}{\delta \vec{S}}$$

esfuerzo tangencial :

$$\tau = \lim_{\delta \vec{S} \rightarrow 0} \frac{\delta \vec{F}_t}{\delta \vec{S}}$$

$\sigma_i$  : esfuerzo normal aplicado sobre una superficie normal al eje  $i$  (y, por lo tanto, paralelo al eje  $i$ )

$\tau_{ij}$  : esfuerzo tangencial aplicado sobre una superficie normal al eje  $i$ , y en la dirección del eje  $j$



Sobre el volumen  $dV$  actúa una fuerza, debida a los esfuerzos superficiales cuya componente  $x$  es

$$\begin{aligned} dF_x = & -\sigma_x dydz + \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz - \tau_{yx} dx dz + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz \\ & - \tau_{zx} dx dy + \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dx dy dz \end{aligned} \quad (1.2)$$

De la misma forma:

$$dF_y = \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dx dy dz \quad (1.3)$$

$$dF_z = \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dx dy dz \quad (1.4)$$

La fuerza por unidad de volumen, debida a los esfuerzos superficiales es entonces

$$\begin{aligned} \vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dV} = & \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \vec{i} \\ & + \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \vec{j} \\ & + \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) \vec{k} \end{aligned}$$

que se expresa de forma abreviada como

$$\vec{f} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} \quad (1.5)$$

donde  $\vec{\tau}$  es el **tensor de tensiones** (stress tensor)

$$\vec{\tau} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

### 1.4.2 Fuerzas másicas

Actúan a distancia

Son debidas a campos de fuerza (gravitacional, electromagnético, ...)

Fluido eléctricamente cargado : plasma

- Electrohidrodinámica
- Magnetohidrodinámica

Caso más común: sólo campo gravitacional

$$\vec{f}_g = \rho \vec{g}$$

### 1.4.3 Fuerzas lineales (tensión superficial)

En la interfase de separación entre dos líquidos reside una cantidad de energía, correspondiente a la interacción entre moléculas muy próximas a la superficie de separación

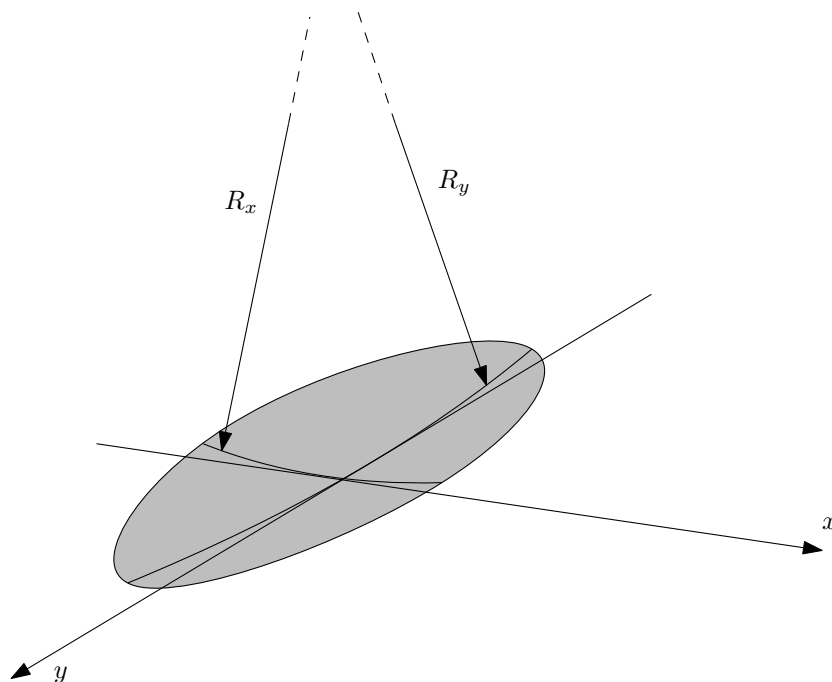
Esta energía es proporcional al área de la interfase.

$$E_s = \sigma S \quad (1.7)$$

El parámetro  $\sigma$  recibe el nombre de **tensión superficial** y tiene unidades de fuerza por unidad de longitud. Esta fuerza es tangente a la superficie, y normal a la línea de aplicación.

El valor de  $\sigma$  depende de la naturaleza de los materiales que separa la interfase y de su estado termodinámico.

P.e. para la interfase entre agua y aire a  $20^\circ\text{C}$ ,  $\sigma = 72.8 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$



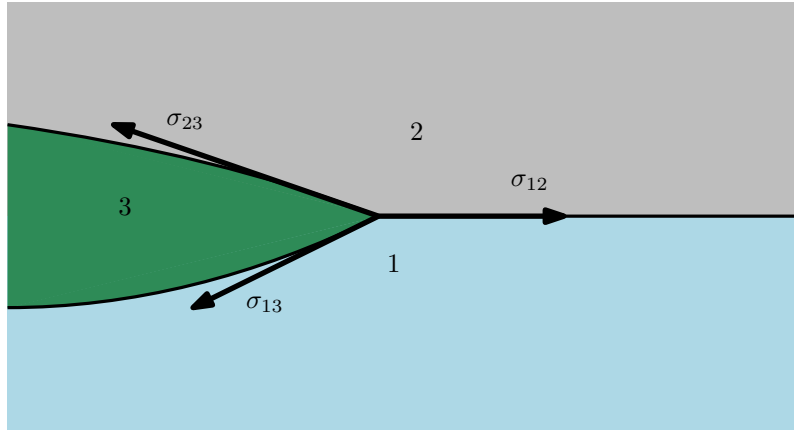
Se puede demostrar (ver [?]) que la tensión provocada en la superficie es equivalente a una diferencia de presión, como indica la **ley de Young-Laplace**

$$\Delta p = \sigma \left( \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} \right) \quad (1.8)$$

Si los dos radios de curvatura son iguales, ( $R_x = R_y = R$ , casquete esférico), esta expresión se reduce a

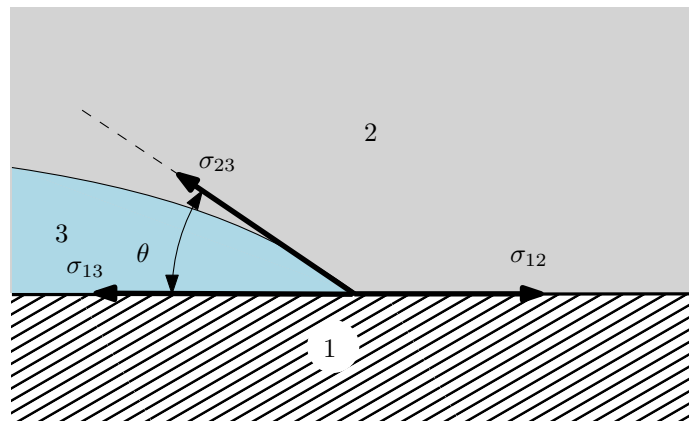
$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R} \quad (1.9)$$

Consideramos el caso de tres fluidos (p.e. una gota de aceite en una superficie de agua)



Si el módulo de una de las tensiones es mayor que la suma de los módulos de las otras dos, este sistema nunca puede llegar al equilibrio, y el fluido se expandirá de forma indefinida hasta llegar al equilibrio, o tener un grosor de tamaño molecular.

Si uno de los materiales es un sólido,



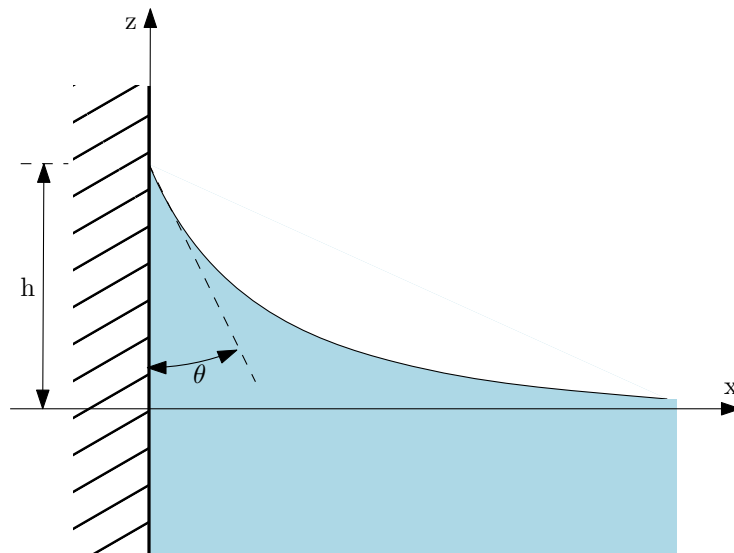
se llega al equilibrio para

$$\sigma_{12} = \sigma_{31} + \sigma_{23} \cos \theta$$

Se considera que cuanto menor es  $\theta$ , más "moja" el fluido sobre la superficie del sólido.

**Ejemplo:**

Líquido en contacto con pared plana vertical



Forma de la interficie:  $z = \zeta(x)$

En un cierto punto de la interficie, la tensión superficial tiene que ser tal que compense la presión de la columna de fluido. Como veremos más adelante, esta es  $\rho g z$ , de forma que

$$\rho g z = \sigma \frac{1}{R_1}$$

$$\rho g \zeta = \sigma \frac{\zeta''}{(1 + \zeta'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Integrando se obtiene

$$\frac{1}{2} \frac{\rho g}{\sigma} \zeta^2 + \frac{1}{(1 + \zeta'^2)^{\frac{1}{2}}} = K$$

Muy lejos de la pared, se cumple que  $\zeta = \zeta' = 0$ , de forma que  $K = 1$

Por otro lado, en  $x = 0$ , se tiene (ver figura)  $\zeta = h$  y  $\zeta' = -\frac{1}{\tan \theta}$ , de forma que

$$h = d \sqrt{2(1 - \sin \theta)}$$

donde  $d^2 = \frac{\sigma}{\rho g}$ .

# Chapter 2

## Hidrostática

### 2.1 Ecuación fundamental de la fluidostática

**Fluido en reposo:** No hay esfuerzos tangenciales, y la única fuerza superficial es la presión.

Equilibrio estático:

$$\vec{f}_m - \vec{\nabla}p = 0 \quad (2.1)$$

Según el calculo diferencial,

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi) = 0 \quad \forall \phi \text{ escalar}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{f}_m = 0.$$

$\Rightarrow \vec{f}_m$  ha de ser un *campo conservativo*.

$$dp = \vec{f}_m \cdot d\vec{r}$$

Integrando sobre un determinado camino,

$$p(\vec{r}) = p(\vec{r}_0) + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{f}_m \cdot d\vec{r}$$

Nos permite calcular la presión en cualquier punto  $\vec{r}$  conociendo el valor en un punto de referencia  $\vec{r}_0$  y el campo de fuerzas  $\vec{f}_m$ .

Si  $\vec{f}_m$  es conservativo

$$\vec{f}_m = -\rho \vec{\nabla}U$$

y, entonces,

$$\vec{\nabla}p = -\rho \vec{\nabla}U$$

Si  $\rho$  varia de forma arbitraria, no existen soluciones para la ecuación , y no es posible llegar al equilibrio,  $\rightarrow$  [corrientes convectivas](#)

La ecuación sólo admite soluciones cuando  $\rho$  es únicamente función de la presión, o bien es constante (fluido incompresible).

$$p + \rho U = cte$$

→ Principio de Pascal

Hidrostática en el campo de la gravedad

$$\vec{f}_m = \rho \vec{g},$$

con

$$\vec{g} = -g\vec{k} \quad \text{donde } g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

y

$$U = gz$$

Superficies isobáricas (superficies de igual presión), incluida la superficie libre de los líquidos, horizontales.

$$\vec{\nabla} p = -\rho g \vec{k} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \end{cases}$$

La presión es únicamente función de la coordenada  $z$ .

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dz} &= -\rho g \Rightarrow p_2 - p_1 \\ &= - \int_{z_1}^{z_2} \rho g dz \end{aligned}$$

### Actividad 1:

- ¿A cuántos metros de columna de agua corresponden la presión atmosférica?
- Si el aire fuese incompresible, con la densidad que tiene a nivel del mar, ¿cuál debería ser la altura de la atmósfera para tener la misma presión?

## 2.2 Presión atmosférica

La presión atmosférica disminuye con la altura. Dado que el aire es un gas, su densidad disminuye, en general, cuando disminuye la presión, por lo que también es menor cuando aumentamos la altura.

Necesitamos información sobre la variación de  $\rho$  con  $z$ , o bien con  $p$ .



Opción: aire gas ideal

$$\rho = \frac{pM}{RT} \quad \text{con } M = 28.9 \text{ g/mol.}$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} dz \quad (2.2)$$

Sin considerar la variación de  $g$  con la altura:

- **Atmósfera isoterma:**

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = - \int_0^z \frac{Mg}{RT} dz$$

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{Mg}{RT} z = -\frac{\rho_0 g}{p_0} z$$

$$\Rightarrow \boxed{p = p_0 \exp \left( -\frac{\rho_0 g}{p_0} z \right) = p_0 \exp \left( -\frac{z}{\alpha} \right)} \quad (2.3)$$

donde

$$\alpha = \frac{p_0}{\rho_0 g}$$

Valores normales:

$$\left. \begin{array}{l} \rho_0 = 1.292 \text{ Kg/m}^3 \\ g = 9.80665 \text{ m/s}^2 \\ p_0 = 760 \text{ mmHg} = 101328 \text{ Pa} \end{array} \right\} \rightarrow \alpha = 7997.35 \text{ m} \approx 8000 \text{ m}$$

- **Atmósfera adiabática:**

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \quad \text{con} \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1.4 \quad \text{para aire}$$

$$dp = -g\rho dz = -\rho_0 \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} g dz$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{p^{\frac{1}{\gamma}}} = -\frac{\rho_0}{p_0^{\frac{1}{\gamma}}} g dz$$

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p^{\frac{1}{\gamma}}} = \int_0^z -\frac{\rho_0}{p_0^{\frac{1}{\gamma}}} g dz = -\frac{\rho_0}{p_0^{\frac{1}{\gamma}}} g z$$

$$\Rightarrow \frac{1}{-\frac{1}{\gamma} + 1} p^{-\frac{1}{\gamma} + 1} \Big|_{p_0}^p = -\frac{\rho_0}{p_0^{\frac{1}{\gamma}}} g z$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{\gamma}{\gamma-1} \left[ p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] &= -\frac{\rho_0}{p_0^{\frac{1}{\gamma}}} g z \\
\Rightarrow p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} &= \frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{\rho_0}{p_0^{\frac{1}{\gamma}}} g z \\
\Rightarrow \boxed{\left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1 + \frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{z}{\alpha}} & \quad (2.4)
\end{aligned}$$

- [Atmósfera estándar:](#)

En realidad, la temperatura media de la atmósfera disminuye de forma casi lineal con la altura

$$T = T_0 - Bz$$

hasta una altura aproximada de 11000 metros (región conocida como *troposfera*). Los valores de  $T_0$  (la temperatura a nivel del mar) y  $B$  (*gradiente térmico*) varían no sólo según el día sino también a lo largo del mismo día. Los valores estándar usados por convenio son

$$\begin{aligned}
T_0 &= 15^\circ C = 288.16K \\
B &= 0.0065K/m
\end{aligned}$$

## Actividad 2:

Integrar la ecuación (2.2) con esta distribución de temperatura para obtener

$$p = p_0 \left( 1 - \frac{Bz}{T_0} \right)^{\frac{Mg}{RB}} \quad (2.5)$$

El valor del exponente para aire es

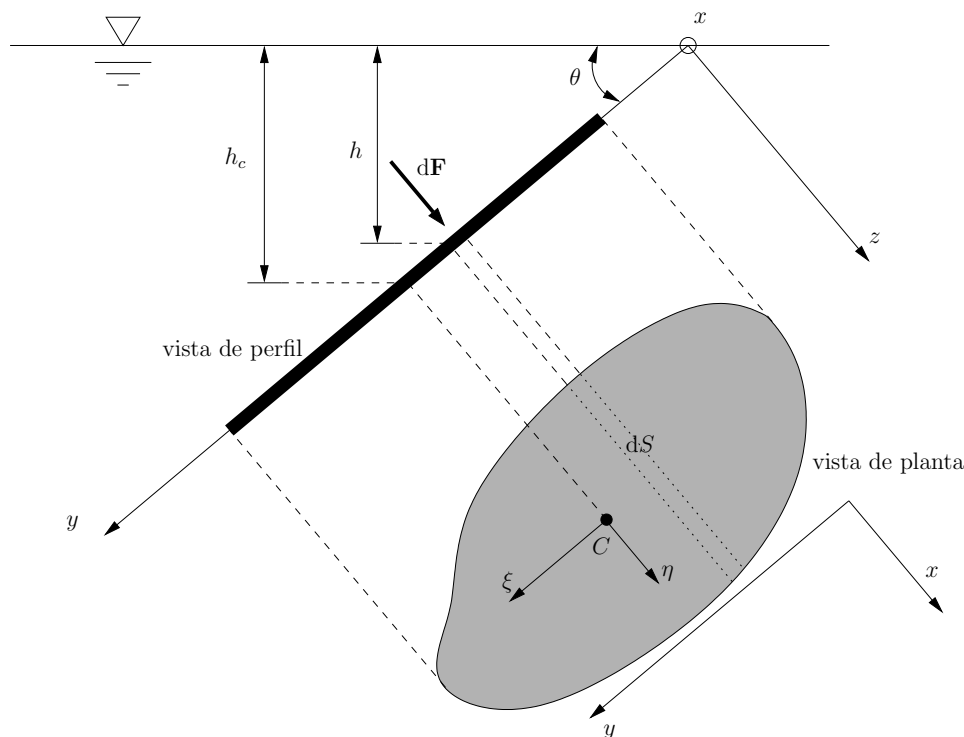
$$\frac{Mg}{RB} = 5.26$$

Después de la troposfera, la temperatura se mantiene constante hasta unos 20000 metros para empezar a aumentar de forma gradual.

Hay que tener siempre en cuenta que esta atmósfera estándar es un valor promediado.

## 2.3 Fuerza de un fluido estático sobre una superficie

### 2.3.1 Cálculo de la fuerza



$$F = \int_S dF = \int_S (p_0 + \rho g h) dS = \int_S (p_0 + \rho g y \sin \theta) dS$$

$$\Rightarrow F = p_0 S + \rho g \sin \theta \int_S y dS$$

$\int_S y dS$  : momento de primer orden de la superficie  $S$  respecto el eje  $x \rightarrow$  coordenada  $y_C$  del centroide  $C$  de la forma

$$y_C S = \int_S y dS \Rightarrow F = (p_0 + \rho g y_C \sin \theta) S = (p_0 + \rho g h_C) S$$

La fuerza ejercida sobre una superficie totalmente sumergida se puede calcular **imaginando** que la presión que actúa es constante en toda la superficie e igual al valor en el centroide.

### 2.3.2 Coordenadas del punto de aplicación

Momento de la fuerza  $\vec{F}$  respecto el eje  $x$ :

$$y_{cp} F = \int_S y dF = \int_S y (p_0 + \rho g y \sin \theta) dS = p_0 \int_S y dS + \rho g \sin \theta \int_S y^2 dS$$

$$\Rightarrow y_{cp} F = \int_S y dF = p_0 y_C S + \rho g \sin \theta I_{xx}$$

donde  $I_{xx}$  es el momento de segundo orden de la superficie  $S$  respecto el eje  $x$ .

Nuevo sistema de coordenadas  $(\xi, \eta, \zeta)$ , paralelo a  $(x, y, z)$  pero con origen en el centroide  $C$ .

$$I_{xx} = I_{\xi\xi} + y_C^2 S \quad (\text{T. de Steiner})$$

$$\Rightarrow y_{cp} = y_C + \frac{I_{\xi\xi}}{\left(y_C + \frac{p_0}{\rho g \sin \theta}\right) S}$$

Para  $x_{cp}$ :

$$\int_S x dF = \int_S x(p_0 + \rho g y \sin \theta) dS = p_0 \int_S x dS + \rho g \sin \theta \int_S xy dS$$

$$\Rightarrow \int_S x dF = p_0 x_C S + \rho g \sin \theta I_{xy}$$

$$I_{xy} = I_{\xi\eta} + x_C y_C S \quad (\text{T. de Steiner})$$

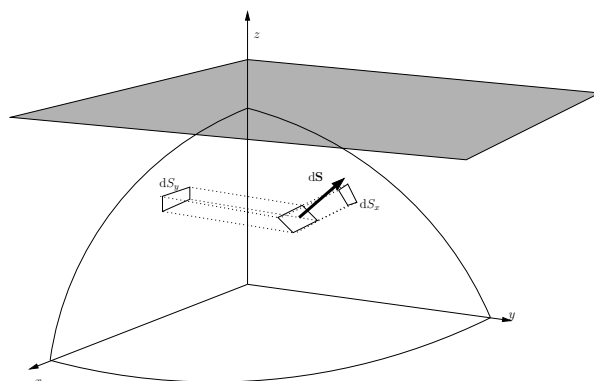
$$\Rightarrow x_{cp} = x_C + \frac{I_{\xi\eta}}{\left(y_C + \frac{p_0}{\rho g \sin \theta}\right) S}$$

Normalmente,  $p_0$  (en general, la presión atmosférica) actúa por igual en las dos caras de la superficie,

$$\begin{aligned} F &= \rho g h_C S \\ x_{cp} &= x_C + \frac{I_{\xi\eta}}{y_C S} \\ y_{cp} &= y_C + \frac{I_{\xi\xi}}{y_C S} \end{aligned}$$

Dado que  $I_{\xi\xi}$  es, por definición, una cantidad siempre positiva, el centro de presiones se encuentra siempre por debajo del centroide.

### 2.3.3 Fuerza sobre una superficie curva totalmente sumergida



$$F_x = - \int_S (p_0 + \rho g h) dS_x$$

$$F_y = - \int_S (p_0 + \rho g h) dS_y$$

Si proyectamos la superficie  $S$  sobre los planos  $x = 0$  y  $y = 0$ , obtenemos  $S_x$  y  $S_y$ , y podemos calcular  $F_x$  y  $F_y$ , así como sus puntos de aplicación.

$F_z$  resulta ser igual al peso total de fluido que se encuentra *por encima* de la superficie curva. La línea de acción de  $F_z$  pasa por el centro de gravedad de la columna de fluido que hay sobre la superficie.

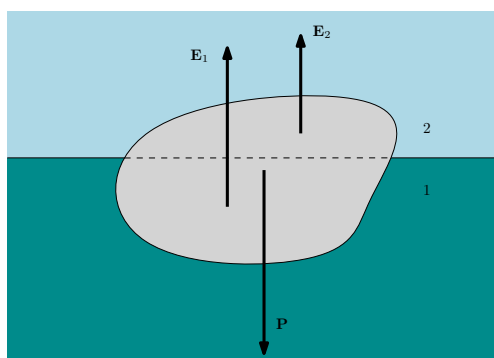
Las expresiones anteriores son válidas únicamente para fluidos con densidad constante. Si el fluido está estratificado, de forma que hay un *gradiente de densidad*, positivo hacia la dirección vertical negativa, los cálculos se complican.

### Actividad 3:

Calcula la fuerza, y su punto de aplicación, que hace un embalse de agua de 50 metros de profundidad y 200 metros de ancho sobre la pared, vertical, de la presa.

## 2.4 Principio de Arquímedes

*Todo cuerpo sumergido, completa o parcialmente, en un fluido experimenta un empuje dirigido verticalmente hacia arriba, con magnitud igual al peso del fluido desalojado y cuya línea de acción pasa por el centro de gravedad del fluido desalojado*



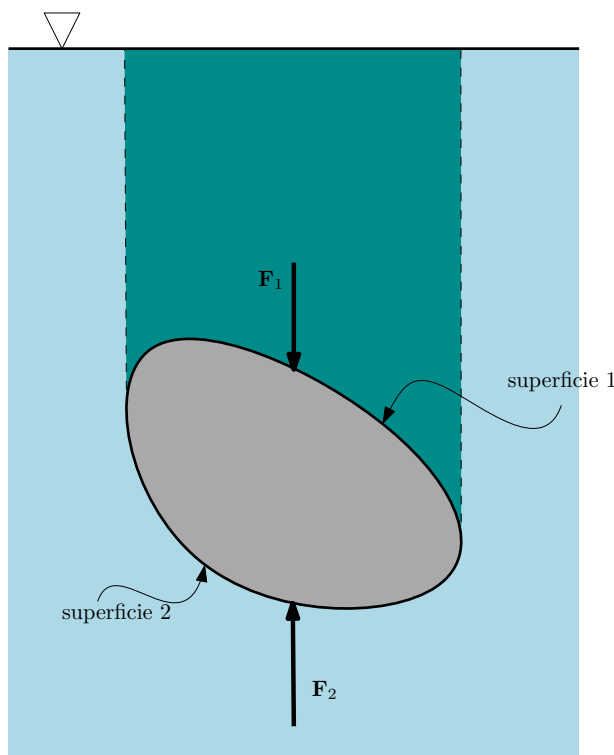
Las líneas de acción de las fuerzas de empuje y el peso no tienen porqué coincidir, y, en este caso, se producen pares de fuerzas.

**carena** volumen del fluido desalojado

**centro de carena o centro de empuje**  
centro de gravedad del fluido desalojado

El principio de Arquímedes no es, en realidad, un principio. Se puede deducir en cualquier caso simplemente calculando la integral de la presión sobre la superficie que limita el cuerpo.

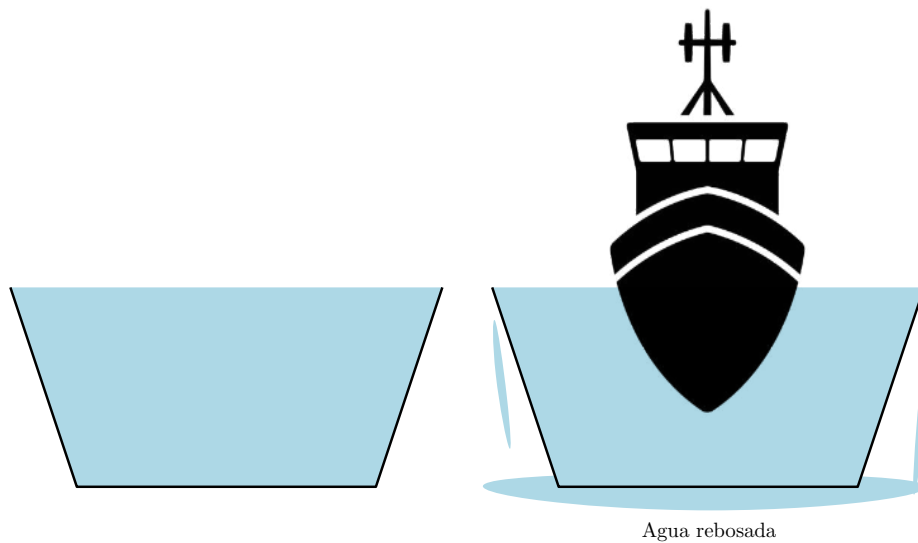
También se puede observar que es la resta del peso de la columna de fluido sobre la superficie superior y sobre la superficie inferior.



## 2.5 Segunda ley de Arquímedes

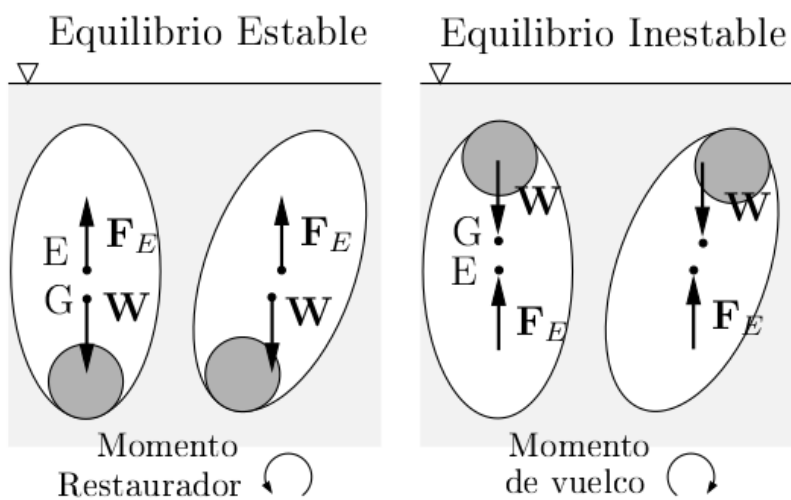
La segunda ley de Arquímedes dice que *un cuerpo que flota desaloja su propio peso de fluido*.

Se puede comprender observando que en la figura, el recipiente con solo fluido y el que tiene fluido y cuerpo flotando, **deben pesar lo mismo**. Pregunta: ¿Cómo sabemos que pesan lo mismo?



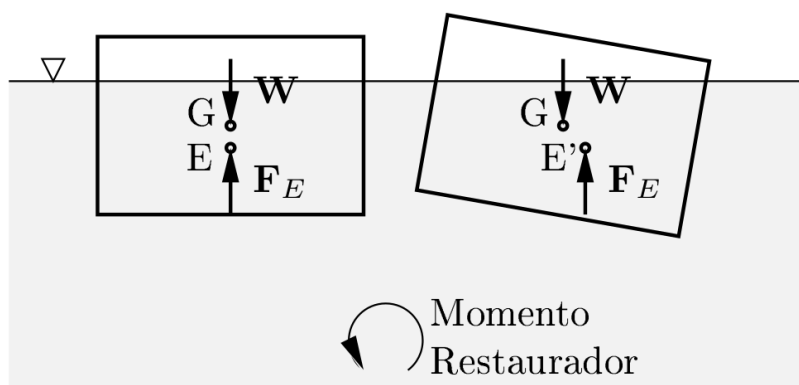
## 2.6 Estabilidad

Para un cuerpo sumergido, el centro de gravedad puede ser diferente del centro de empuje, y esto produce un momento que puede ser restaurador (equilibrio estable) o de vuelco (equilibrio inestable)

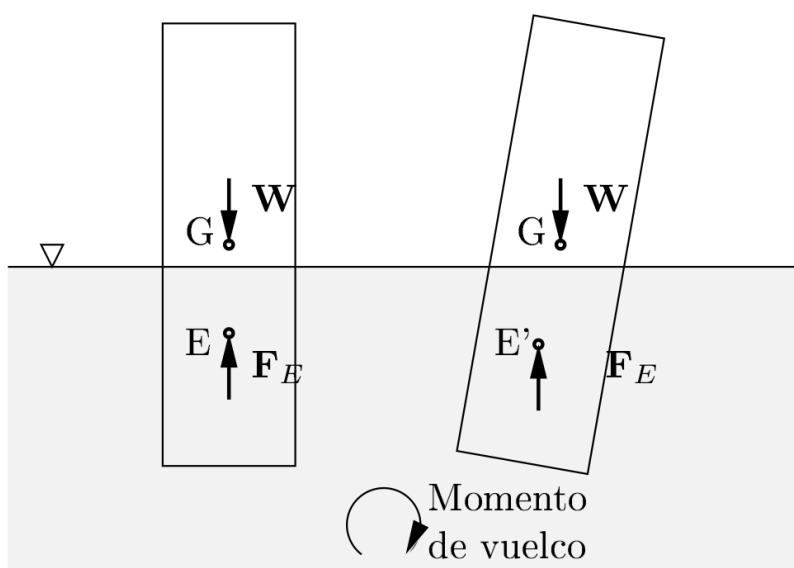


Para un cuerpo flotante, es más complicado, ya que la posición del centro de empuje varía

Equilibrio estable



Equilibrio inestable



Pasos para calcular la estabilidad de un cuerpo flotante, consideremos un cuerpo simétrico:

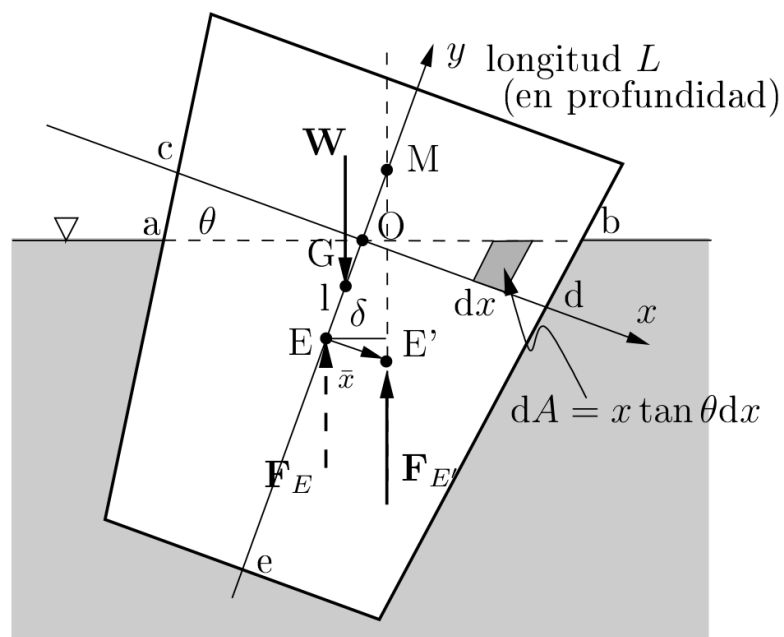
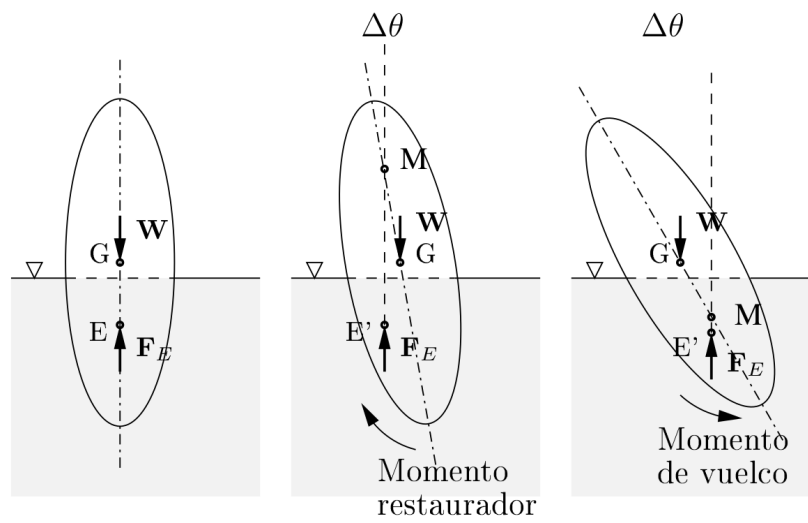
1.- Se calcula posición de equilibrio inicial, mediante las fuerzas  $\vec{F}_E$  y  $\vec{W}$ , y sus puntos de aplicación,  $E$  y  $G$ . Como el cuerpo están en equilibrio, estas fuerza se alinean con el eje de simetría.

2.- Se realiza una pequeña perturbación  $\Delta\theta$ . El centro de empuje se desplaza a una nueva posición  $E'$ . La vertical sobre  $E'$  corta el eje de simetría en un punto  $M$ , denominado **metacentro**. Si el ángulo  $\Delta\theta$  es pequeño, el metacentro no dependerá de él.

3.- Se calcula la **altura metacéntrica**, que es la distancia de  $M$  a  $G$ . Si  $M$  está por encima de  $G$ , la altura metacéntrica es positiva, y la posición es *estable*. Si está por debajo, la altura metacéntrica es negativa, y la posición es *inestable*.

La altura metacéntrica es una característica de la sección transversal del cuerpo y su distribución de masa.





La posición del nuevo centro de empuje se calcula con la estimación del centro de masas:

$$\begin{aligned}
\bar{x}V_{aObdea} &= \int_{Obd} x dV - \int_{cOa} x dV \\
&= \int_{Obd} x L dA - \int_{cOa} x L dA \\
&= \int_{Obd} x L (x \tan \theta dx) - \int_{cOa} x L (-x \tan \theta dx) \\
&= \tan \theta \int x^2 2L dx = \tan \theta \int x^2 dA \\
&= \tan \theta I_0
\end{aligned}$$

La altura metacéntrica es

$$\overline{MG} = \overline{ME} - \overline{GE} = \frac{\bar{x}}{\tan \theta} - \overline{GE} = \frac{I_0}{V_{\text{sumergido}}} - \overline{GE} = \frac{\rho g I_0}{W} - \overline{GE} \quad (2.6)$$

Si  $\overline{MG}$  es positiva, el equilibrio es estable (para pequeñas perturbaciones). Si  $\overline{GE}$  es negativa, el equilibrio es estable siempre

# Chapter 3

## Cinemática de fluidos

### 3.1 Descripción Euleriana y Lagrangiana

Dos formas de identificación de las magnitudes (p. e., la velocidad)

1. **Euleriana:**

Segun la **posición** y el instante.

$$\vec{u}(\vec{x}, t) \quad (3.1)$$

2. **Lagrangiana:**

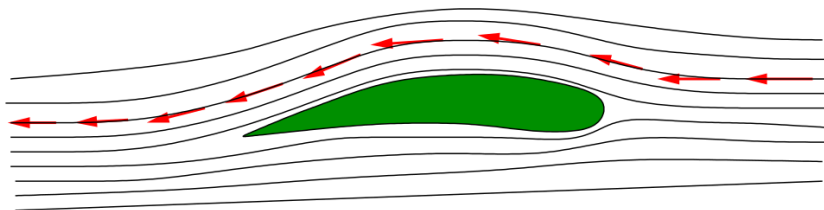
Según la **partícula** y el instante. La partícula queda identificada (marcada) mediante un vector  $\vec{a}$  que puede ser, por ejemplo, la posición que tiene la partícula en un instante de referencia  $t_0$

$$\vec{u}(\vec{a}, t; t_0) \quad (3.2)$$

### 3.2 Líneas de corriente, trayectorias y líneas de traza

- **Líneas de corriente:**

Para un instante dado  $t_0$ , és la tangente a los vectores de velocidad.



Són solución de la ecuación (en 2D)

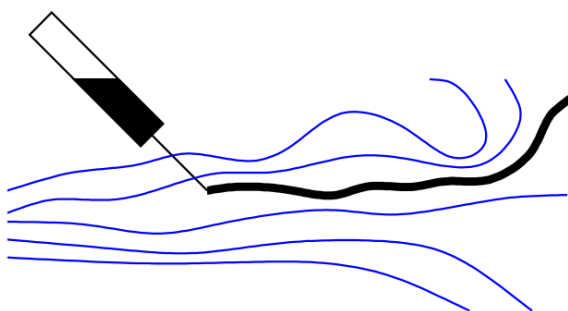
$$\frac{dx}{u(\vec{x}, t = t_0)} = \frac{dy}{v(\vec{x}, t = t_0)} \quad (3.3)$$

- **Trayectoria:**

Para una cierta partícula de fluido, puntos que ocupa en un cierto intervalo de tiempo.

- **Lineas de traza:**

Partículas de fluido que, en un cierto instante anterior, pasaron por un determinado punto.



Si el flujo es estacionario (no depende del tiempo), línea de corriente, trayectoria y línea de traza coinciden para un determinado punto.

### Actividad 1:

Dado el campo de velocidades bidimensional  $\vec{u} = (x + t)\vec{i} + y\vec{j}$ , enconrad las expresiones para:

- la línea de corriente que pasa por  $(1, 1)$  para  $t = 0$
- la trayectoria de la partícula que está en  $(1, 1)$  para  $t = 0$
- la línea de traza, para  $t = 0$ , de todas las partículas que pasaron por  $(1, 1)$

## 3.3 Derivada sustancial

La partícula  $P$ , en el instante  $t$  se encuentra en  $\vec{x}$  con una velocidad  $\vec{u}$ . La aceleración de  $P$  **no** es  $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$ , ya que aunque  $\vec{u}$  sea estacionario,  $P$  puede estar moviéndose a un punto en que  $\vec{u}$  es diferente.

En un instante  $t + \delta t$ ,  $P$  estará en  $\vec{x} + \delta \vec{x} = \vec{x} + \vec{u}\delta t$ , de forma que la variación de velocidad será

$$\delta \vec{u} = \vec{u}(\vec{x} + \vec{u}\delta t, t + \delta t) - \vec{u}(\vec{x}, t)$$

Desarrollando en serie de Taylor hasta primer orden, obtenemos

$$\delta \vec{u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \delta t + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \delta t + O(\delta t^2),$$

de forma que la aceleración es

$$\vec{a}(\vec{x}, t) = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$$

De forma general, consideremos cualquier magnitud  $f$ , asociada a una propiedad del fluido (puede ser un escalar como la temperatura, o densidad, o la velocidad angular).

- Derivada **local**:

$$\frac{\partial f}{\partial t}$$

- Derivada **convectiva**:

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{f} = \left( u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) f = u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

- Derivada **sustancial** o **total**:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{f} = \frac{\partial f}{\partial t} + u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

## 3.4 Circulación, Flujo y Vorticidad

- **Circulación**

$$\Gamma = \oint_L \vec{u} \cdot d\vec{l}$$

$L$  es cualquier contorno cerrado.

Si este contorno está constituido siempre por las mismas partículas (es decir, es una línea material), se puede demostrar ([?]) que

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt} \oint_L \vec{u} \cdot d\vec{l} = 0$$

- **Flujo**

Sea  $F$  una magnitud extensiva propiedad del fluido y  $f$  esta misma magnitud por unidad de volumen. El flujo de  $f$  a través de la superficie  $S$  es

$$\Phi = \int_S f \vec{u} \cdot d\vec{S}$$

Si  $f$  es un escalar,  $f\vec{u}$  es el **vector flujo** de  $f$ .

Si  $f$  es un vector  $\begin{pmatrix} \vec{f} \end{pmatrix}$ ,  $\vec{f}\vec{u}$  es el **tensor flujo** de  $f$ .

Ejemplo:

$$f = 1 \rightarrow \begin{cases} \vec{u} & \text{vector flujo volumétrico} \\ Q = \int_S \vec{u} \cdot d\vec{S} & \text{flujo volumétrico, o caudal} \end{cases}$$

$$f = \rho \rightarrow \begin{cases} \rho \vec{u} & \text{vector flujo másico} \\ \dot{m} = \int_S \rho \vec{u} \cdot d\vec{S} & \text{flujo másico, o gasto} \end{cases}$$

- **Vorticidad**

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u} \quad \text{En componentes:} \quad \omega_k = -\varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Es el doble de la velocidad local de rotación del elemento de fluido. Por definición de vorticidad, se cumple que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} = 0$$

y el flujo a través de una superficie  $S$  cerrada es siempre nulo

$$\oint_S \vec{\omega} \cdot d\vec{S} = 0$$

- Si la superficie es abierta, este flujo está relacionado con la circulación sobre la línea que limita la superficie a través del Teorema de Stokes

$$\int_S \vec{\omega} \cdot d\vec{S} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{u} \cdot d\vec{l}$$

### 3.5 Movimiento relativo en el entorno de un punto

Sea  $\vec{u}$  la velocidad del fluido en un punto  $\vec{r}$ . En un punto  $\vec{r} + \delta\vec{r}$ , la velocidad será  $\vec{u} + \delta\vec{u}$ , con

$$\delta\vec{u} = \vec{\nabla}\vec{u} \cdot \delta\vec{r}; \quad \delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta r_j$$

El tensor **divergencia de velocidad**,  $\vec{\nabla}\vec{u}$ , puede descomponerse como la suma de un tensor simétrico,  $(\vec{\nabla}\vec{u})^S$  y un tensor antisimétrico  $(\vec{\nabla}\vec{u})^A$ , con

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla}\vec{u})^S &= \frac{1}{2} \left( \vec{\nabla}\vec{u} + (\vec{\nabla}\vec{u})^T \right) \\ (\vec{\nabla}\vec{u})^A &= \frac{1}{2} \left( \vec{\nabla}\vec{u} - (\vec{\nabla}\vec{u})^T \right) \end{aligned}$$

Cada uno de estos tensores contribuye a  $\delta\vec{u}$  de una forma diferente

$$\delta\vec{u} = \delta\vec{u}^S + \delta\vec{u}^A = (\vec{\nabla}\vec{u})^S \cdot \delta\vec{r} + (\vec{\nabla}\vec{u})^A \cdot \delta\vec{r}$$

$\delta\vec{u}^S = (\vec{\nabla}\vec{u})^S \cdot \delta\vec{r}$  representa un movimiento de **deformación pura**. Siempre es posible escoger los ejes del sistema de referencia de forma que  $(\vec{\nabla}\vec{u})^S$  sea diagonal. Entonces los tres valores de la diagonal son las velocidades de estiramiento en la dirección de los ejes

principales. Si el fluido es incompresible el volumen del elemento de fluido se mantiene constante y la suma de la diagonal, que es un invariante respecto del cambio de sistema de coordenadas, es nula

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

$\delta \vec{v}^A = \left( \vec{\nabla} \vec{u} \right)^A \cdot \delta \vec{r}$  representa un movimiento de **rotación pura**.

$$\delta u_i^A = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \delta r_j = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \omega_k \delta r_j$$

La velocidad angular de rotación es  $\frac{1}{2} \vec{\omega} = \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \times \vec{u})$ .





# Chapter 4

## Ecuaciones fundamentales de la Dinámica de los Fluidos

### 4.1 Introducción

La Mecánica de los fluidos viene determinada por **3 leyes básicas**<sup>1</sup>

- El principio de **conservación de la masa**. La masa de un sistema fluido se mantiene constante independientemente de su posición o forma.
- La ley de **conservación de la cantidad de movimiento**. La variación de la cantidad de movimiento de un sistema fluido es igual a la suma total de las fuerzas externas que actúan sobre él.
- La ley de **conservación de la energía**. Es, básicamente, la Primera Ley de la Termodinámica. La variación de la energía de un sistema fluido (energía interna + energía cinética) es igual al trabajo realizado por todas las fuerzas externas más el calor recibido por conducción y/o radiación.

A estos principios hay que añadir las **leyes constitutivas**, como la ley de viscosidad de Newton, o la ley de los gases perfectos.

### 4.2 Formulación integral y diferencial

Existen dos enfoques para los problemas de Mecánica de Fluidos:

- **Formulación diferencial**. Se consideran volúmenes elementales de fluido y las ecuaciones que gobiernan su comportamiento. Para resolver los problemas con este planteamiento es necesario conocer las condiciones iniciales en todo el dominio y las condiciones de contorno en todos los límites del mismo.

---

<sup>1</sup>Algunos autores, como [?] toman en consideración también la Segunda Ley de la Termodinámica

- **Formulación integral.** Se trabaja directamente sobre volúmenes de fluido macroscópicos, denominados **volúmenes de control**. Las ecuaciones son promediadas en el volumen de control y sobre su frontera, denominada **superficie de control**.

Para la mayoría de los problemas de Ingeniería ( o, por lo menos, para una primera aproximación) es suficiente con la formulación integral<sup>2</sup>.

### 4.2.1 Sistema y volumen de control

Un **sistema de control** posee una cantidad definida de materia. Su volumen, y, por lo tanto, su densidad, así como otras magnitudes físicas pueden cambiar, pero no la cantidad de masa. En mecánica de sólidos se suele emplear el sistema de control como enfoque de trabajo.

En Mecánica de Fluidos, es conveniente usar el enfoque de **volúmen de control**, que se establece en el espacio, sin relación con una cierta cantidad de materia. Este volumen puede ser estático o no, y puede cambiar tanto de posición como de tamaño.

La diferencia entre sistema y volumen de control se puede relacionar con la diferencia entre los puntos de vista Lagrangiano y Euleriano, ya que un sistema de control siempre sigue el movimiento de las partículas que lo componen.

### 4.2.2 El teorema de arrastre de Reynolds

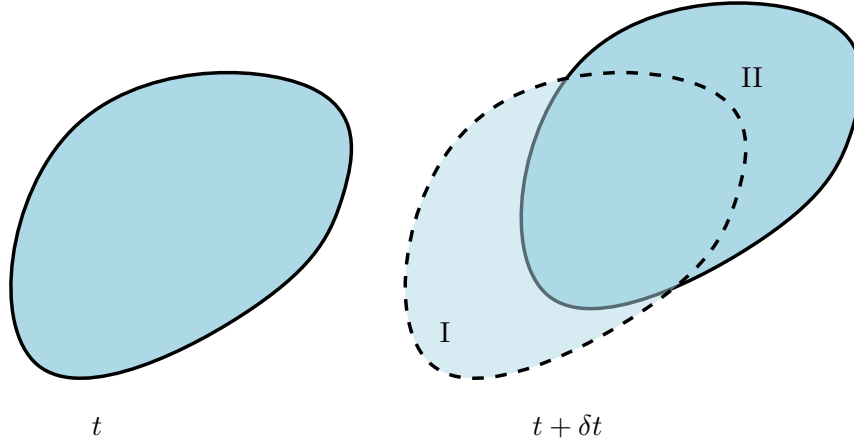
Dado que las ecuaciones de mecánica y termodinámica se refieren a sistemas de control, es necesario deducirlas para el caso en que las aplicamos sobre volúmenes de control.

Consideremos un volumen de control y un sistema de control que, en un instante determinado  $t$ , coinciden en el espacio. El volumen de control  $VC$  está estacionario, mientras que el sistema de control  $V$  se mueve con el flujo.

En el instante  $t + \delta t$  el sistema de control se encuentra en una posición ligeramente desplazada respecto al volumen. Incluso puede que haya cambiado su volumen, si el flujo es compresible

---

<sup>2</sup>La formulación diferencial es más general, y permite determinar detalles del flujo. Es posible extraer los resultados de la formulación integral a partir de los de la diferencial, pero no al contrario.



Consideremos una cierta magnitud extensiva  $F$ , y  $f$  la misma por unidad de masa, de forma que

$$F = \int_V \rho f \, dV \quad (4.1)$$

Consideremos la notación:

- $F_t$  : el valor de  $F$  para el sistema de control en el instante  $t$
- $F_{t+}$  : el valor de  $F$  para el sistema de control en el instante  $t + \delta t$
- $F'_t$  : el valor de  $F$  para el volumen de control en el instante  $t$
- $F'_{t+}$  : el valor de  $F$  para el volumen de control en el instante  $t + \delta t$
- $F_s$  : Cantidad de  $F$  que abandona el volumen de control en el intervalo  $\Delta t$  (a través de I)
- $F_e$  : Cantidad de  $F$  que entra en el volumen de control en el intervalo  $\Delta t$  (a través de II)

Evidentemente,

$$F_t = F'_t$$

Las variaciones de  $F$  en el sistema de control y en el volumen de control son, respectivamente,

$$\begin{aligned} \delta F &= F_{t+} - F_t \\ \delta F' &= F'_{t+} - F'_t \end{aligned}$$

y, por otro lado,

$$F_{t+} = F'_{t+} + F_s - F_e,$$

de forma que

$$\delta F = \delta F' + F_s - F_e$$

Dividiendo por  $\delta t$  y haciendo el límite  $\delta t \rightarrow 0$ , obtenemos

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF'}{dt} + \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{F_s - F_e}{\delta t}$$

Por definición, el último término es el flujo de  $F$  a través de la frontera de  $VC$ , que, como hemos definido en temas anteriores,

$$\begin{aligned} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{F_s - F_e}{\delta t} &= \Phi_F = \oint_{SC} \rho f \vec{u}_r \cdot d\vec{S} \\ \frac{dF}{dt} &= \frac{dF'}{dt} + \oint_{SC} \rho f \vec{u}_r \cdot d\vec{S} \\ \Rightarrow \boxed{\frac{dF}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho f dV + \oint_{SC} \rho f \vec{u}_r \cdot d\vec{S}} \end{aligned} \quad (4.2)$$

,donde  $\vec{u}_r$  es la velocidad del flujo relativa a la Superficie de Control.

Otra forma de expresarlo es, usando el Teorema de Leibniz [?, Sección 3.6]

$$\boxed{\frac{dF}{dt} = \int_{VC} \frac{\partial \rho f}{\partial t} dV + \oint_{SC} \rho f \vec{u} \cdot d\vec{S}} \quad (4.3)$$

,donde  $\vec{u}$  es ahora la velocidad absoluta. Si el VC no se mueve ni se deforma,  $\vec{u} = \vec{u}_r$ .

Se puede usar el Teorema de la Divergencia para transformar la integral de superficie en una integral de volumen, de forma que

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \int_{VC} \frac{\partial \rho f}{\partial t} dV + \int_{VC} \vec{\nabla} \cdot (\rho f \vec{u}) dV \\ \Rightarrow \frac{dF}{dt} &= \int_{VC} \left[ \frac{\partial \rho f}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho f \vec{u}) \right] dV \end{aligned}$$

### 4.3 Ecuación integral de conservación de la masa

En este caso,  $F = m$  y  $f = 1$ . Por definición de sistema físico,  $\frac{dm}{dt} = 0$ , de forma que

$$\begin{aligned} \int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oint_{SC} \rho \vec{u} \cdot d\vec{S} &= 0 \\ \Rightarrow \boxed{\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV} &= - \oint_{SC} \rho \vec{u} \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

Interpretación física: **En un Volumen de Control, la variación local de la masa únicamente puede ser debida a un flujo de masa a través del contorno.**

Simplicaciones de la ecuación integral de conservación de la masa

- Si el flujo es **estacionario** en el interior del VC, entonces  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  y

$$\oint_{SC} \rho \vec{u} \cdot d\vec{S} = 0$$

- Si el flujo es **incompresible**, entonces la densidad es constante en todo el VC, de forma que

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\rho \oint_{SC} \vec{u} \cdot d\vec{S}$$

- Si se cumplen las dos condiciones y el flujo es **incompresible y estacionario**,

$$\oint_{SC} \vec{u} \cdot d\vec{S} = 0$$

### 4.3.1 Definición de velocidad media

Consideremos como caso simple un fluido incompresible circulando por una tubería. La sección de la tubería es  $S$ , y el flujo se puede considerar en todos los puntos axial, de forma que el caudal se calcula con

$$Q = \int_S u dS$$

La **velocidad media** se define como la velocidad uniforme que debería tener el flujo para que el caudal fuese el mismo,  $Q = \bar{u}S$ . De aquí,

$$\bar{u} = \frac{1}{S} \int_S u dS$$

Un documento muy interesante para estudiar la forma integral de la conservación de la masa, es el publicado en 2001 por el prof. Sonin, del MIT, disponible aquí.

## 4.4 Ecuación diferencial de conservación de la masa

Aplicando el Teorema de la Divergencia a la forma integral, para un Volumen de Control estacionario, se obtiene

$$\int_{VC} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) \right] dV = 0$$

Como esto debe cumplirse para cualquier VC, obtenemos la forma diferencial de la conservación de la masa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

En forma de componentes:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0$$

### 4.4.1 Líneas de corriente

Para un fluido incompresible:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$$

$$\text{Flujo 2D} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Consideremos una función  $\psi(x, y)$  que cumple

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad ; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Entonces la ecuación de continuidad se cumple de forma exacta, ya que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \equiv 0$$

$\psi(x, y)$  es la **función de corriente**.

Las líneas  $\psi(x, y) = \psi_i = \text{cte}$  son las **líneas de corriente** y cumplen que

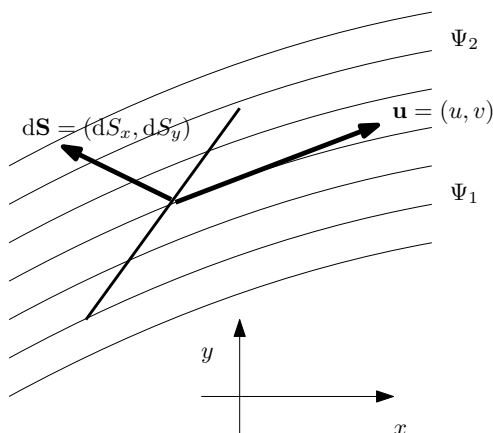
$$d\psi = 0 \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0$$

$$\Rightarrow -v dx + u dy = 0 \Rightarrow \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

es decir, son *tangentes* a  $\vec{u}$  en todos los puntos

Interpretación física:

Flujo bidimensional. Para una profundidad unidad:



$$\begin{aligned}
dQ &= \vec{u} \cdot d\vec{S} \\
&= \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dS_x \\ dS_y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial y} & -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dy \\ -dx \end{pmatrix} (\times 1) \\
&= \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = d\psi \\
\Rightarrow Q &= \psi_2 - \psi_1
\end{aligned}$$

### Actividad 1:

$$\vec{u}(x, y) = u(x, y) \vec{i} + v(x, y) \vec{j}$$

con  $u(x, y) = a(x^2 - y^2)$ . ¿Como tiene que ser de forma general  $v(x, y)$  para que el flujo sea incompresible?

Calcular la función de corriente y dibujar las líneas de corriente para el caso más simple.

## 4.5 Ecuación integral de la conservación de la cantidad de movimiento

En este caso,  $F = m\vec{u}$  y  $f = \vec{u}$  **Importante:** Carácter vectorial de  $F$  y  $f$

T. de Transporte de Reynolds:

$$\frac{dm\vec{u}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \vec{u} dV + \oint_{SC} \rho \vec{u} \vec{u}_r \cdot d\vec{S} \quad (4.4)$$

donde  $\vec{u}_r$  es la velocidad relativa del fluido respecto de la  $SC$ , que no tiene por qué ser igual a  $\vec{u}$ , la velocidad relativa al Sistema de Referencia.

Según la Segunda Ley de la Dinámica de Newton,

$$\frac{dm\vec{u}}{dt} = \vec{F}_T \quad (4.5)$$

donde  $\vec{F}$  es la suma total de todas las fuerzas que actúan sobre el  $VC$ , tanto [superficiales](#) como [másicas](#). Las fuerzas superficiales són producidas por todos los [fluidos](#) y [sólidos](#) incluidos en el  $VC$ .

Debido al caracter vectorial de la cantidad de movimiento:

$$F_{Tx} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho u \, dV + \oint_{SC} \rho u \vec{u}_r \cdot d\vec{S} \quad (4.6)$$

$$F_{Ty} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho v \, dV + \oint_{SC} \rho v \vec{u}_r \cdot d\vec{S} \quad (4.7)$$

$$F_{Tz} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho w \, dV + \oint_{SC} \rho w \vec{u}_r \cdot d\vec{S} \quad (4.8)$$

## 4.6 Cálculo de fuerzas en un $VC$

Supongamos, por simplicidad, que el  $VC$  está en reposo respecto del SR inercial.

Las fuerzas superficiales que actúan sobre el material del  $VC$  són

- tensiones de los sólidos que atraviesan el  $VC$ .
- esfuerzos normales (presión) y tangenciales del fluido.

Cálculo de presiones:

$$\vec{F}_p = - \oint_{SC} p \, d\vec{S}$$

Si la presión es uniforme en toda la  $SC$ ,  $\vec{F}_p = 0$ .

En muchas ocasiones los problemas prácticos de Ingeniería relacionados con la ecuación integral del conservación de la cantidad de movimiento són, básicamente, encontrar la fuerza que se ejerce sobre un cierto sólido en contacto con un fluido en movimiento.

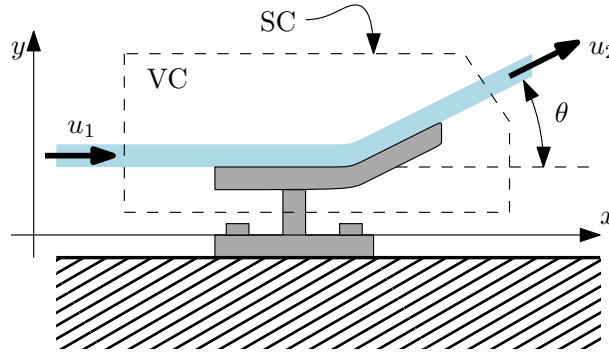
Ejemplos:

- Fuerza sobre uniones en tuberías.
- Fuerza sobre toberas, inyectores, ...
- Fuerza sobre un vehículo aéreo o espacial.
- Fuerza de un chorro sobre un obstáculo.
- Fuerza sobre un vertedero.
- ...

La fuerza que se quiere calcular es siempre uno de los términos de  $\vec{F}_T$ . La raíz del problema estriba en aislar éste término en la relación de conservación de la cantidad de movimiento.



**Ejemplo (extraído de [?]):**



Como hipótesis, suponemos que la sección del chorro es idéntica a la entrada y a la salida, de forma que, por la conservación de la masa,  $\|\vec{u}_1\| = \|\vec{u}_2\|$ .

Queremos calcular la fuerza  $\vec{F}$  que ejerce el chorro sobre el soporte.

En realidad, lo que calcularemos será la fuerza  $\vec{F}'$  que ejerce el soporte sobre el chorro. Según la 3a. Ley de la Dinámica de Newton,  $\vec{F} = -\vec{F}'$ .

$$\vec{F}' + \vec{F}_m + \vec{F}_s = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \vec{u} dV + \oint_{SC} \rho \vec{u} \vec{u}_r \cdot d\vec{S}$$

$\vec{F}_m$ : *Fuerza de la gravedad*. Dado que no tenemos información sobre el volumen del chorro en el interior del VC, adoptamos la hipótesis de que  $\|\vec{F}_m\|$  será muy pequeño en comparación con el resto de términos y, por lo tanto, lo despreciamos. A posteriori, debería comprobarse la validez de esta hipótesis.

$\vec{F}_s$ : *Fuerza superficiales*, que engloban la presión y los esfuerzos tangenciales (fricción). Dado que la presión es uniforme, se anula. En cuanto a las fuerzas debidas a la fricción no hay ningún argumento para calcularlas, de forma que adoptamos la hipótesis de que son menospreciables.

En cuanto al segundo miembro, el chorro es estacionario en el interior del VC, de forma que  $\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \vec{u} dV = 0$

La conservación de la cantidad de movimiento queda como

$$\vec{F}' = \oint_{SC} \rho \vec{u} \vec{u} \cdot d\vec{S}$$

La velocidad sólo está definida en las secciones  $S_1$  y  $S_2$  de  $SC$ , de forma que

$$\vec{F}' = \int_{S_1} \rho \vec{u} \vec{u} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \rho \vec{u} \vec{u} \cdot d\vec{S}$$

En componentes, según el SR de la figura,

$$\begin{aligned} F'_x &= \int_{S_1} \rho u \vec{u} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \rho u \vec{u} \cdot d\vec{S} \\ F'_y &= \int_{S_1} \rho v \vec{u} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \rho v \vec{u} \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

Es fácil ver que

$$\begin{cases} u = u & \text{en } S \\ v = 0 & \text{en } S_1 \end{cases} \quad \begin{cases} u = u \cos \theta & \text{en } S_2 \\ v = u \sin \theta & \text{en } S_2 \end{cases}$$

De forma que

$$\begin{aligned} \begin{cases} F'_x &= \int_{S_1} \rho u \vec{u} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \rho u \cos \theta \vec{u} \cdot d\vec{S} \\ &= \rho v \int_{S_1} \vec{u} \cdot d\vec{S} + \rho u \cos \theta \int_{S_2} \vec{u} \cdot d\vec{S} \\ F'_y &= \int_{S_2} \rho u \sin \theta \vec{u} \cdot d\vec{S} = \rho u \sin \theta \int_{S_2} \vec{u} \cdot d\vec{S} \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} F'_x = \rho u (-Q) + \rho u \cos \theta Q = \rho u Q (\cos \theta - 1) \\ F'_y = \rho u \sin \theta Q \end{cases} \\ \Rightarrow \boxed{\begin{cases} F_x = \rho S u^2 (1 - \cos \theta) \\ F_y = -\rho S u^2 \sin \theta \end{cases}} \end{aligned}$$

### Actividad 1:

Una manguera antiincendios, de 10 cm de diámetro, da 100 l/s de agua con una presión de 1600 kPa. Al final de la manguera hay un inyector que reduce el diámetro a 2,5 cm. Estima suponiendo que ésta es la presión al llegar el agua al inyector, la fuerza que ejerce el agua sobre el mismo.

#### 4.6.1 Sistema de Referencia No Inercial

El SR está ahora acelerado. La conservación de la cantidad de movimiento es

$$\vec{F}_T - \int_{VC} \rho \vec{a}' dV = \int_{VC} \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} dV + \oint_{SC} \rho \vec{u} \vec{u} \cdot d\vec{S}$$

donde

$$\vec{a}' = \underbrace{\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2}}_{\text{ac. lineal del SR}} + \underbrace{\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r}}_{\text{ac. angular del SR}} + \underbrace{2 \left( \vec{\Omega} \times \vec{u} \right)}_{\text{ac. de Coriolis}} + \underbrace{\vec{\Omega} \times \left( \vec{\Omega} \times \vec{r} \right)}_{\text{ac. centrífuga}}$$

#### 4.6.2 Factor de corrección de flujo de cantidad de movimiento

Flujo de cantidad de movimiento:

$$\Phi = \int_S \rho \vec{u} \left( \vec{u} \cdot d\vec{S} \right)$$

Supongamos que  $\vec{u} \parallel d\vec{S}$  y  $\vec{u} = u\vec{i}$  en todo  $S$  (p. e., en una tubería), de forma que  $\Phi = \int_S \rho u^2 dS$

#### 4.7. ECUACIÓN DIFERENCIAL DE LA CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTOS

A veces es conveniente relacionarlo con la velocidad media,  $\Phi = \beta \rho \bar{u}^2 S$ , donde  $\beta > 1$  es un factor de conversión, que se calcula mediante

$$\beta = \frac{1}{S} \int \left( \frac{u}{\bar{u}} \right)^2 dS$$

si el fluido es incompresible.

#### Actividad 2:

Calcular el valor de  $\beta$  para un perfil parabólico de velocidad.

### 4.7 Ecuación diferencial de la conservación de la cantidad de movimiento

La ecuación integral es, aplicando el TRR:

$$\int_{VC} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{u}) dV + \oint_{SC} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot d\vec{S}) = \vec{F}_T \quad (4.9)$$

Aplicando el Teorema de la Divergencia a la integral sobre la Superficie de Control (ver, p.e., [?], pag. 6),

$$\oint_{SC} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot d\vec{S}) = \int_{VC} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \rho \vec{u}) dV \quad (4.10)$$

obtenemos

$$\int_{VC} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{u}) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \rho \vec{u}) \right] dV = \vec{F}_T \quad (4.11)$$

Por tanto, la fuerza sobre un volumen elemental de fluido es

$$\vec{f}_T = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{u}) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \rho \vec{u}) \quad (4.12)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{u}) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \vec{u}) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v \vec{u}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w \vec{u}) \quad (4.13)$$

En forma de componentes:

$$f_{T_x} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v u) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w u) \quad (4.14)$$

$$f_{T_y} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u v) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v^2) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w v) \quad (4.15)$$

$$f_{T_z} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho w) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u w) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v w) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w^2) \quad (4.16)$$

Podemos simplificar un poco usando

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{u}) = \vec{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u \vec{u}) = \vec{u} \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \rho u \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\rho v \vec{u}) = \vec{u} \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \rho v \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho w \vec{u}) = \vec{u} \frac{\partial \rho w}{\partial z} + \rho w \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \quad (4.20)$$

$$\Rightarrow \vec{f}_T = \vec{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} (\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{u}) + \rho (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \quad (4.21)$$

$$= \vec{u} \cdot \underbrace{\left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{u} \right]}_{=0 \text{ por continuidad}} + \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \quad (4.22)$$

La **ecuación diferencial de conservación de la cantidad de movimiento** queda como

$$\boxed{\vec{f}_T = \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}} \quad (4.23)$$

Para simplificar, supongamos que

$$\vec{f}_T = \text{gravedad} + \text{fricción fluido-fluido}$$

$$\vec{f}_T = \rho \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}$$

de forma que

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \rho \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} \quad (4.24)$$

En forma de componentes:

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (4.25)$$

## 4.8 El tensor de tensiones para fluidos newtonianos. La ecuación de Navier-Stokes

El mayor problema de la ecuación anterior es el cálculo de  $\vec{\tau}$ . Éste tensor agrupa tanto los esfuerzos normales como los tangenciales.

#### 4.8. EL TENSOR DE TENSIONES PARA FLUIDOS NEWTONIANOS. LA ECUACIÓN DE NAVIER-STOKES

Los esfuerzos normales no són la presión, ya que ésta no está definida de forma estricta para fluidos en movimiento (ver [?], capítulo 3), pero se puede definir una presión análoga a la usada en fluidostática de la forma  $p = -\frac{1}{3}\tau_{ii}$

De esta forma, el tensor de tensiones es

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \underbrace{-p\mathbb{I}}_{\text{parte isótropa}} + \underbrace{\vec{\tau}'}_{\text{parte anisótropa (con traza nula)}} \\ &= \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{xx} + p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} + p & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} + p \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Se puede demostrar (ver, p.e., [?] o [?]) que, para **fluidos newtonianos**,  $\vec{\tau}'$  está relacionado con la parte simétrica de la divergencia de la velocidad (ver el segundo tema de cinemática) mediante

$$\vec{\tau}' = 2\mu \left[ \left( \vec{\nabla} \vec{u} \right)^S - \frac{1}{3} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right) \mathbb{I} \right] \quad (4.26)$$

donde  $\mu$  es la viscosidad dinámica.

Substituyendo en la ecuación diferencial de la conservación de la cantidad de movimiento,

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \left( \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \left\{ 2\mu \left[ \left( \vec{\nabla} \vec{u} \right)^S - \frac{1}{3} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right) \mathbb{I} \right] \right\} \quad (4.27)$$

,que es la **ecuación de Navier-Stokes**.

En la mayoría de los casos, se puede considerar que  $\mu$  es **uniforme**, de forma que, tras algunas operaciones tensoriales,

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \left( \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \mu \left[ \Delta \vec{u} + \frac{1}{3} \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right) \right] \quad (4.28)$$

con

$$\Delta \equiv \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (4.29)$$

Si el **flujo es incompresible**,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ , y la ecuación de Navier-Stokes queda como

$$\boxed{\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \left( \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{u}} \quad (4.30)$$

En forma de componentes,

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (4.31)$$

Si menospreciamos los efectos de la viscosidad (flujo inviscido), tenemos la **Ecuación de Euler**

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \left( \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p$$

**Actividad 1:**

Escribid las ecuaciones de la dinámica de un flujo laminar entre dos placas paralelas, sin presión pero con viscosidad. La velocidad tan sólo tiene componente  $x$ , y las placas son normales a la dirección  $y$ . El flujo es estacionario.

¿Como cambian las ecuaciones si no hay viscosidad (Ecuación de Euler)?

## 4.9 Ecuación integral de la conservación del momento cinético

Es posible aplicar la forma general de conservación de una magnitud física al momento cinético.

Recordemos que para una partícula, su momento cinético respecto de un punto  $O$  se define como

$$\vec{L}_0 = \vec{r}_0 \times m\vec{u}$$

y la física de partículas dice que la derivada de esta magnitud es igual a la suma de los momentos de las fuerzas que actúan sobre la partícula

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \sum (\vec{r}_0 \times \vec{F}) = \vec{M}_T$$

Apliquemos esto a un Volumen de Control relacionado con un fluido. Para un Sistema de Control, el momento cinético es

$$\vec{L}_0 = \int_{\text{Sist C}} (\vec{r}_0 \times \vec{u}) \rho dV \quad (4.32)$$

y, aplicando el teorema de transporte de Reynolds, con

$$\vec{F} = \vec{r}_0 \times m\vec{u}$$

y

$$\vec{f} = \vec{r}_0 \times \vec{u},$$

la variación de esta magnitud para un Volumen de Control, es

$$\vec{M}_T = \frac{d\vec{L}_0}{dt} = \int_{VC} \frac{\partial (\vec{r}_0 \times \rho\vec{u})}{\partial t} dV + \oint_{SC} (\vec{r}_0 \times \vec{u}) \rho\vec{u} \cdot d\vec{S} \quad (4.33)$$

Es importante no olvidar, igual que en la conservación de la cantidad de movimiento, el caracter vectorial de esta relación.

Omitiendo el subíndice 0, en componentes esta relación es

$$M_{Tx} = \int_{VC} \frac{\partial \rho (yw - zv)}{\partial t} dV + \oint_{SC} \rho (yw - zv) \vec{u} \cdot d\vec{S} \quad (4.34)$$

$$M_{Ty} = \int_{VC} \frac{\partial \rho (zu - xw)}{\partial t} dV + \oint_{SC} \rho (zu - xw) \vec{u} \cdot d\vec{S} \quad (4.35)$$

$$M_{Tz} = \int_{VC} \frac{\partial \rho (xv - yu)}{\partial t} dV + \oint_{SC} \rho (xv - yu) \vec{u} \cdot d\vec{S} \quad (4.36)$$

El momento total  $\vec{M}_T$  es el producido por todas las fuerzas externas, másicas y superficiales.

## 4.10 Cálculo de momentos en un VC

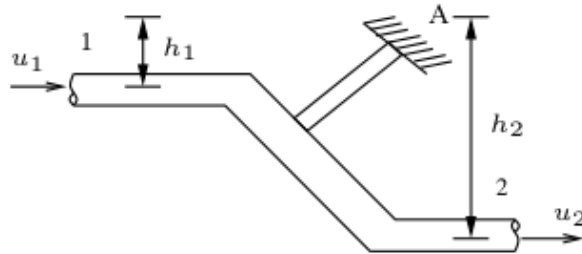
### • Sistema de referencia inercial

Supongamos como caso más simple un Volumen de Control no deformable y inercial, tal que todas las propiedades del fluido (densidad, velocidad, posición, ...) pueden ser consideradas uniformes en las secciones de entrada y salida (es decir, el flujo puede ser considerado unidimensional).

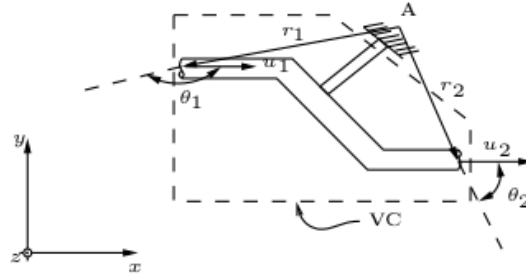
En este caso, la conservación del momento cinético se expresa como

$$\vec{M}_T = \int_{VC} \frac{\partial (\vec{r}_0 \times \rho \vec{u})}{\partial t} dV + \sum_{salidas} (\vec{r} \times \vec{u}) \dot{m}_{sal} - \sum_{entradas} (\vec{r} \times \vec{u}) \dot{m}_{ent} \quad (4.37)$$

### 4.10.1 Ejemplo 1:



Queremos calcular el momento sobre el punto A, usando el Volumen de Control mostrado en la siguiente figura.



Suponemos que las propiedades del fluido (velocidad, densidad, presión) son uniformes en la entrada y en la salida, que el flujo es estacionario y que el peso del fluido y la tubería son menospreciables, así como los efectos del rozamiento. Con estas hipótesis, la conservación del momento cinético es

$$\begin{aligned}\vec{M}_T &= \vec{M}_A + \left[ \vec{r}_1 \times \left( -p_1 \vec{S}_1 \right) \right] + \left[ \vec{r}_2 \times \left( -p_2 \vec{S}_2 \right) \right] \\ &= (\vec{r}_2 \times \vec{u}_2) \dot{m}_2 - (\vec{r}_1 \times \vec{u}_1) \dot{m}_1\end{aligned}$$

$\vec{M}_A$  es el momento realizado por la tubería **sobre** el fluido y transmitido a través del brazo al empotramiento en A.

Dado que el flujo es unidimensional y los vectores de posición solo tienen componentes en  $x$  y en  $y$ , los momentos son en la dirección  $z$ .

Los módulos de los momentos que hacen las presiones son

$$\begin{cases} \left| \vec{r}_1 \times \left( -p_1 \vec{S}_1 \right) \right| &= r_1 p_1 S_1 \sin \theta_1 = p_1 S_1 h_1 \\ \left| \vec{r}_2 \times \left( -p_2 \vec{S}_2 \right) \right| &= -r_2 p_2 S_2 \sin \theta_2 = -p_2 S_2 h_2 \end{cases}$$

La variación de momento cinético del fluido es

$$\begin{aligned}(\vec{r}_2 \times \vec{u}_2) \dot{m}_2 - (\vec{r}_1 \times \vec{u}_1) \dot{m}_1 &= (r_2 u_2 \sin \theta_2 - r_1 u_1 \sin \theta_1) \dot{m} \\ \dot{m} &= (h_2 u_2 - h_1 u_1)\end{aligned}$$

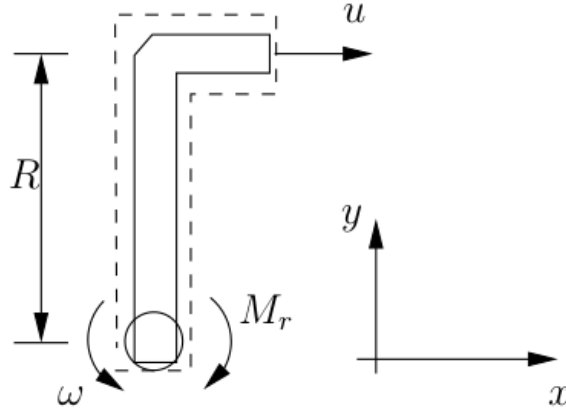
Combinando todo, obtenemos  $M_A$ ,

$$\begin{aligned}M_A &= (h_2 u_2 - h_1 u_1) \dot{m} - p_1 S_1 h_1 + p_2 S_2 h_2 \\ &= h_2 (u_2 \dot{m} + p_2 S_2) - h_1 (u_1 \dot{m} + p_1 S_1)\end{aligned}$$

## Ejemplo 2:

Un irrigador por aspersión de radio  $R$  da vueltas con una velocidad angular  $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$  y expulsa un caudal  $Q$  por una tubería de sección  $S$ . El rozamiento sobre el eje es  $\vec{M}_r = -M_r \vec{k}$ . Queremos encontrar en el equilibrio una expresión para  $\omega$ .





Suponemos que el flujo es estacionario e incompresible, y que el peso del fluido y del irrigador son menospresciables. Despreciamos también los efectos de la fricción en el fluido. El brazo del irrigador no es estacionario, pero **sí** lo es el VC, de forma que la velocidad  $u_2$  que pasa a través de la SC en la salida no es  $u = \frac{Q}{S}$ , sino

$$u_2 = u - \omega R$$

En el equilibrio, se cumple que

$$\vec{M}_T = -M_r \vec{k} = (\vec{r}_2 \times \vec{u}_2) \dot{m}_2 - (\vec{r}_1 \times \vec{u}_1) \dot{m}_1$$

Dado que  $r_1 = 0$ , tenemos  $-M_r \vec{k} = (R\vec{j} \times u_2\vec{i}) \dot{m} = -Ru_2 \dot{m} \vec{k}$

$$M_r = \rho Q R (u - \omega R)$$

$$\omega = \frac{u}{R} - \frac{M_r}{\rho Q R^2} = \frac{Q}{RS} - \frac{M_r}{\rho Q R^2}$$

#### • Sistema de referencia no inercial

La única diferencia es que hay que añadir a los momentos realizados por las fuerzas externas, los momentos de las aceleraciones ficticias,

$$\vec{M}_T - \int_{VC} \rho (\vec{r}_0 \times \vec{a}') dV = \int_{VC} \frac{\partial (\vec{r}_0 \times \rho \vec{u})}{\partial t} dV + \oint_{SC} (\vec{r}_0 \times \vec{u}) \rho \vec{u} \cdot d\vec{S}$$

donde, tal y como vimos en el tema de conservación de la cantidad de movimiento,

$$\vec{a}' = \underbrace{\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2}}_{\text{ac. lineal del SR}} + \underbrace{\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r}}_{\text{ac. angular del SR}} + \underbrace{2 \left( \vec{\Omega} \times \vec{u} \right)}_{\text{ac. de Coriolis}} + \underbrace{\vec{\Omega} \times \left( \vec{\Omega} \times \vec{r} \right)}_{\text{ac. centrífuga}}$$

### Actividad 1:

Resolver el ejemplo 2, pero con un VC no inercial.

Ahora el VC rota solidario con el irrigador, con una velocidad angular  $\omega$ . Se debe obtener el mismo resultado.

## 4.11 Las turbomáquinas hidráulicas

Esta sección puede ser complementada con el capítulo 11 del libro de White [?], o el 14 del de Çengel [?].

### 4.11.1 La conservación del momento cinético y las turbomáquinas hidráulicas

Las turbomáquinas hidráulicas se basan en la conservación del momento cinético para transferir energía entre la máquina y el fluido. Estas máquinas son:

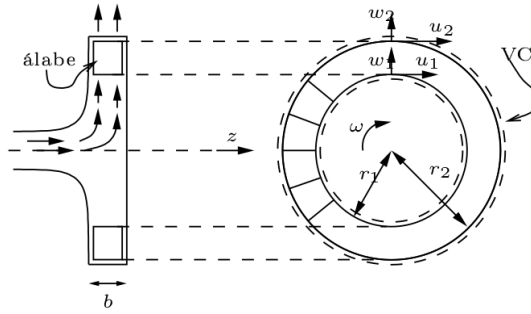
- **Bombas** (agua u otros líquidos)
- **Ventiladores** (aire)
- **Turbinas** (agua)

En los dos primeros casos, la máquina transfiere momento cinético y, por lo tanto, potencia al fluido. En el tercer caso, es el fluido el que transfiere potencia a la máquina.

En todas estas máquinas el fluido es considerado incompresible.

Si el fluido es compresible, hablamos de **Turbomáquinas térmicas** (compresores y turbinas de vapor). No serán tratadas en este curso.

Supongamos para simplificar la turbomáquina especificada en la figura. La parte móvil donde realmente se transfiere la energía recibe el nombre de **rodete**. Está formado por una serie de **álabes** que dirigen el fluido desde el interior hacia el exterior (bombas y ventiladores centrífugos) o a la inversa (turbinas). En este caso, los álabes son rectos.



El fluido entra en el VC con una velocidad  $\vec{c}_1 = \vec{w}_1 + \vec{u}_1$  y sale con una velocidad  $\vec{c}_2 = \vec{w}_2 + \vec{u}_2$

Para mantener este flujo, debemos ejercer un momento mecánico sobre el eje. Por la conservación del momento cinético, este momento será

$$\vec{M}_0 = \oint_{SC} \rho (\vec{r} \times \vec{c}) \vec{c} \cdot d\vec{S} = \rho Q [(\vec{r}_2 \times \vec{c}_2) - (\vec{r}_1 \times \vec{c}_1)]$$

$$M_0 = \rho Q (r_2 u_2 - r_1 u_1)$$

Dado que  $u_1 = \omega r_1$  y  $u_2 = \omega r_2$ , tenemos

$$M_0 = \rho Q \omega (r_2^2 - r_1^2)$$

y la potencia requerida para bombear este fluido será

$$P = M_0 \omega = \rho Q \omega^2 (r_2^2 - r_1^2)$$

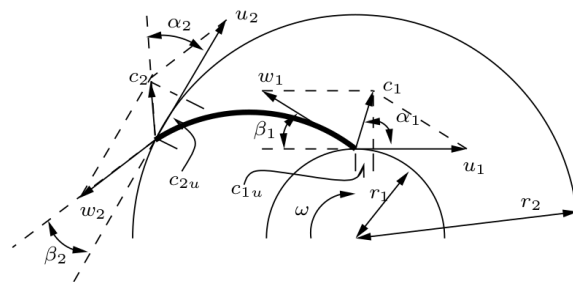
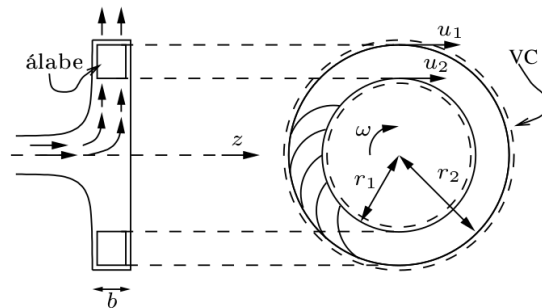
### Actividad 1:

Realizar el cálculo de la potencia transmitida para un caudal de 120 l/min de agua, una velocidad angular de 1725 rpm, unos diámetros del rodete de 15 cm y 25 cm y una anchura de rodete de 5 cm (constante).

#### 4.11.2 El triángulo de velocidades y la ecuación de Euler

Las bombas, los ventiladores y las turbinas reales son algo más complicadas. En realidad los álabes no son rectos, excepto para algunos ventiladores.

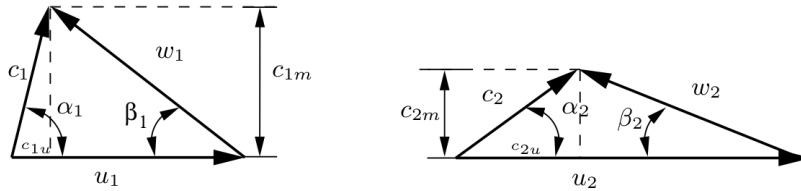
Centrándonos en el caso de las bombas centrífugas, los álabes suelen estar inclinados hacia atrás según el sentido de giro.



El momento cinético es transportado por la componente de la velocidad  $\vec{c}$  perpendicular al radio, es decir,  $c_{1u}$  en la entrada al VC y  $c_{2u}$  en la salida.

$$M_0 = \rho Q (r_2 c_{2u} - r_1 c_{1u}) \quad (4.38)$$

Para calcular  $c_{1u}$  y  $c_{2u}$ , se utilizan los **triángulos de velocidades**



$$c_{1u} = u_1 - \frac{c_{1m}}{\tan \beta_1} \quad c_{2u} = u_2 - \frac{c_{2m}}{\tan \beta_2} \quad (4.39)$$

$c_{1m}$  y  $c_{2m}$  se calculan a partir del caudal,

$$c_{1m} = \frac{Q}{S_1} = \frac{Q}{2\pi r_1 b_1} \quad c_{2m} = \frac{Q}{S_2} = \frac{Q}{2\pi r_2 b_2} \quad (4.40)$$

donde  $b_1$  y  $b_2$  son el ancho del rodete en la entrada y en la salida.

La potencia necesaria para bombear el fluido es

$$P = M_0 \omega = \rho Q \omega (r_2 c_{2u} - r_1 c_{1u}) = \rho Q (u_2 c_{2u} - u_1 c_{1u}) \quad (4.41)$$

y la energía, en forma de altura de fluido, que transmite el rodete al fluido es

$$H_t = \frac{P}{\rho g Q} = \frac{1}{g} (u_2 c_{2u} - u_1 c_{1u}) \quad (4.42)$$

Esta es la **Ecuación de Euler** para Turbomáquinas, y el subíndice  $t$  indica que la expresión es teórica, ya que hay muchos aspectos que no se han considerado:

- Número finito de álabes
- Rozamiento en el flujo a través del rodete
- Perfil de velocidad no uniforme en profundidad

## Actividad 2:

Repetir los cálculos de la Actividad 1, pero ahora los álabes no son rectos, sino que son tales que  $\beta_1 = 35^\circ$  y  $\beta_2 = 25^\circ$ . Calcular la energía teórica que da el rodete, en forma de altura de fluido.

## 4.12 Ecuación integral de la conservación de la energía

Primera ley de la termodinámica para un sistema cerrado:

$$\frac{DE}{Dt} = \dot{Q} - \dot{W} \quad (4.43)$$

$\dot{Q}$  : calor transferido al sistema  
 $\dot{W}$  : trabajo realizado por el sistema

Aplicando el teorema del transporte de Reynolds al sistema:

$$\frac{DE}{Dt} = \int_{VC} \frac{\partial \rho e}{\partial t} dV + \oint_{SC} \rho e \vec{u} \cdot d\vec{S} = \dot{Q} - \dot{W}$$

donde

$$e = \underbrace{\frac{1}{2}u^2}_{\text{E. cinética}} + \underbrace{gz}_{\text{E. potencial}} + \underbrace{u}_{\text{E. interna}}$$

es la energía por unidad de masa.

### 4.12.1 Análisis del trabajo

- trabajo realizado por los esfuerzos normales:

$$\dot{W}_n = - \int_{SC} \tau_{nn} \vec{u} \cdot d\vec{S} \approx \int_{SC} p \vec{u} \cdot d\vec{S}$$

- trabajo realizado por los esfuerzos tangenciales:

$$\dot{W}_t = - \int_{SC} \vec{u} \cdot \underbrace{(\vec{\tau}' \cdot d\vec{S})}_{\vec{\tau}' dS} = - \int_{SC} \vec{u} \cdot \vec{\tau}' dS$$

En general, se intenta escoger el  $VC$  de forma que  $\vec{u} \parallel d\vec{S}$ , y, dado que  $\vec{\tau}'$  está en  $dS$ ,  $\vec{v} \perp \vec{\tau}'$ , y  $\vec{v} \cdot \vec{\tau}' = 0$  (flujos unidimensionales).

- realizado por otros elementos externos, como, p.e., trabajo eléctrico, o trabajo mecánico de un eje (agitador, ...). Lo expresamos como  $\dot{W}_e$ .

Para un Volumen de Control tal que  $\vec{v} \parallel d\vec{S}$  en las entradas y salidas, tendremos

$$\dot{Q} - \dot{W}_e - \oint_{SC} p \vec{u} \cdot d\vec{S} = \int_{VC} \frac{\partial \rho e}{\partial t} dV + \oint_{SC} \rho e \vec{u} \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \dot{Q} - \dot{W}_e = \int_{VC} \frac{\partial \rho e}{\partial t} dV + \oint_{SC} \rho \left( e + \frac{p}{\rho} \right) \vec{u} \cdot d\vec{S},$$

Dado que  $\underline{u} + \frac{p}{\rho} = h$ , la conservación de la energía queda

$$\boxed{\dot{Q} - \dot{W}_e = \int_{VC} \frac{\partial \rho e}{\partial t} dV + \oint_{SC} \rho \left( h + gz + \frac{1}{2} u^2 \right) \vec{u} \cdot d\vec{S}} \quad (4.44)$$

### Actividad 1:

¿Porqué no hemos incluido el trabajo realizado por la gravedad en  $\dot{W}$ ?

### Simplificaciones

- Flujo permanente :

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} = 0$$

en todo el Volumen de Control

- Propiedades constantes en las superficies de entrada (1) y de salida (2) (con flujo unidimensional):

$$\begin{aligned} \oint_{SC} \rho \left( h + gz + \frac{1}{2} u^2 \right) \vec{u} \cdot d\vec{S} = \\ \rho_2 \left[ h_2 + gz_2 + \frac{1}{2} u_2^2 \right] u_2 S_2 - \rho_1 \left[ h_1 + gz_1 + \frac{1}{2} u_1^2 \right] u_1 S_1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\dot{Q} - \dot{W}_e = \rho_2 \left[ h_2 + gz_2 + \frac{1}{2} u_2^2 \right] u_2 S_2 - \rho_1 \left[ h_1 + gz_1 + \frac{1}{2} u_1^2 \right] u_1 S_1}$$

#### 4.12.2 Ecuación de Bernoulli

Flujo permanente, incompresible y no viscoso.  $\dot{Q} = \dot{W} = 0$

$$\Rightarrow \rho_2 \left[ h_2 + gz_2 + \frac{1}{2} u_2^2 \right] u_2 S_2 = \rho_1 \left[ h_1 + gz_1 + \frac{1}{2} u_1^2 \right] u_1 S_1$$

Dado que  $\rho_2 u_2 S_2 = \rho_1 u_1 S_1 = \dot{m}$ , tenemos

$$h_2 + gz_2 + \frac{1}{2} u_2^2 = h_1 + gz_1 + \frac{1}{2} u_1^2$$

Si suponemos también que no hay cambios en la energía interna,

$$\frac{p_2}{\rho} + gz_2 + \frac{1}{2} u_2^2 = \frac{p_1}{\rho} + gz_1 + \frac{1}{2} u_1^2,$$

es decir,

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2}u^2 = cte \quad \text{sobre una línea de corriente} \quad (4.45)$$

Este es la conocida como **Ecuación de Bernoulli**.

## Actividad 2:

Una pareja que vive en una casa en la montaña decide aprovechar el arroyo de cerca de su casa para generar la energía necesaria para su vivienda. Compran una turbina en eBay y estiman que poniendo una presa podrían conseguir una altura en la entrada de la turbina de unos 4 metros. El caudal del arroyo es de unos 800 litros por segundo. Si en la salida de la turbina la velocidad del agua será de 3,6 m/s, estimad la potencia que podrían generar, menospreciando pérdidas por rozamiento.

## 4.13 Ecuación diferencial de la conservación de la energía

$\vec{g}$  : fuerzas másicas

Partiendo de la forma general de la conservación de la energía en un VC

$$\dot{Q} + \int_{VC} \vec{g} \cdot \vec{u} \rho dV + \oint_{SC} \vec{u} \cdot \left( \vec{\tau} \cdot d\vec{S} \right) = \int_{VC} \frac{\partial \rho e}{\partial t} dV + \oint_{SC} \rho e \vec{u} \cdot d\vec{S}$$

donde  $\vec{\tau}$  incluye la diagonal y  $e$  no incluye el término  $gz$

$\dot{Q}$  puede ser debido o bien a un flujo de calor ( $\vec{q}$ ) a través de la  $SC$  o bien a una producción de energía en el interior del  $VC$  ( $s$ , que tiene unidades de W/kg).

$$\dot{Q} = - \oint_{SC} \vec{q} \cdot d\vec{S} + \int_{VC} s \rho dV$$

Usando el Teorema de Gauss sobre las tres  $SC$ , queda

$$\begin{aligned} - \int_{VC} \vec{\nabla} \cdot \vec{q} dV + \int_{VC} s \rho dV + \int_{VC} \vec{g} \cdot \vec{u} \rho dV + \int_{VC} \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{\tau} \cdot \vec{u} \right) dV = \\ = \int_{VC} \frac{\partial \rho e}{\partial t} dV + \int_{VC} \vec{\nabla} \cdot (\rho e \vec{u}) dV \end{aligned}$$

Si lo reescribimos en forma de componentes, usando el convenio de doble índice, y en una sola integral, obtenemos

$$\int_{VC} \left[ -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho s + \rho g_i u_i + \frac{\partial \tau_{ij} u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial e \rho u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho e}{\partial t} \right] dV = 0$$

Dado que esto ha de ser cierto para todo  $VC$ , el integrando debe ser nulo,

$$-\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho s + \rho g_i u_i + \frac{\partial \tau_{ij} u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial e \rho u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho e}{\partial t} = 0$$

Para simplificar esta expresión expandimos en primer lugar todas las derivadas, usando  $e = \underline{u} + \frac{1}{2}u^2$ .

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho s + \rho g_i u_i + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \\ & = \rho u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{u^2}{2} \right) + \frac{u^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) + \underline{u} \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \underline{u} u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho u_i \frac{\partial \underline{u}}{\partial x_i} + \\ & + \rho \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u^2}{2} \right) + \left( \frac{u^2}{2} \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} \end{aligned}$$

Reordenando términos, tenemos

$$\begin{aligned} & \underbrace{u_i \left[ \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i \right]}_{\rho \frac{Du_i}{Dt}} + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho s = \\ & = \frac{\rho}{2} \underbrace{\left[ \frac{\partial u^2}{\partial t} + u_i \frac{\partial u^2}{\partial x_i} \right]}_{\frac{Du^2}{Dt}} + \frac{u^2}{2} \underbrace{\left[ \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right]}_{=0} + \rho \underbrace{\left[ \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + u_i \frac{\partial \underline{u}}{\partial x_i} \right]}_{\frac{Du}{Dt}} + \\ & + \underline{u} \underbrace{\left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right]}_{\frac{D\rho}{Dt}} + \underline{u} \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \end{aligned}$$

... y simplificando,

$$\tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho s = \rho \frac{Du}{Dt} + \underline{u} \underbrace{\left[ \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right]}_{=0}$$

$$\boxed{\tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho s = \rho \frac{Du}{Dt}} \quad (4.46)$$

Si ahora usamos la ley de Fourier

$$q_i = -k \frac{\partial T}{\partial x_i}$$



#### 4.14. DERIVACIÓN DE LA ECUACIÓN DE BERNOULLI A PARTIR DE LA ECUACIÓN DE EULER

y la descomposición  $\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau'_{ij}$ , como hicimos con la conservación de cantidad de movimiento,

$$-p \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta_{ij} + \underbrace{\tau'_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_{\text{función disipación } \Phi} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \rho s = \rho \frac{Du}{Dt}$$

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = -p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \Phi + \rho s + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \quad (4.47)$$

Para un fluido newtoniano,

$$\Phi = \mu \sum_{ij} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2$$

### 4.14 Derivación de la Ecuación de Bernoulli a partir de la Ecuación de Euler

Integramos la Ecuación de Euler

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \left( \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p$$

sobre una línea de corriente. La coordenada  $s$  es la posición sobre la línea, y, dado que la velocidad debe ser tangente a la línea de corriente, sólo hay una ecuación de Euler para el módulo de  $\vec{u}$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \frac{\partial z}{\partial s}$$

Consideremos flujo estacionario,

$$u \frac{\partial u}{\partial s} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \frac{\partial z}{\partial s}$$

Si una partícula de fluido se mueve una distancia  $ds$  sobre la línea de corriente, tendremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial s} ds &= du \\ \frac{\partial p}{\partial s} ds &= dp \\ \frac{\partial z}{\partial s} ds &= dz \end{aligned}$$

de forma que

$$u du = -\frac{1}{\rho} dp - g dz \Rightarrow u du + \frac{1}{\rho} dp + g dz = 0$$

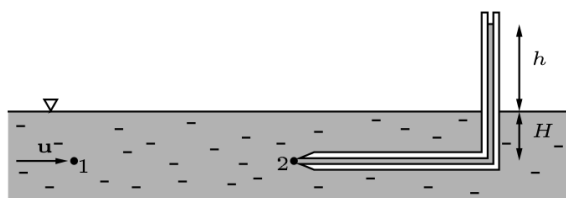
$$\Rightarrow \frac{1}{2}u^2 + \int \frac{dp}{\rho} + gz = \text{cte}$$

y, si el fluido es incompresible, obtenemos la ecuación de Bernoulli

$$\boxed{\frac{1}{2}u^2 + \frac{p}{\rho} + gz = \text{cte}}$$

## 4.15 Presión estática, dinámica y de remanso

Un **tubo de Pitot** es una sonda de diámetro muy pequeño, que se usa para medir la velocidad de un flujo. En la figura se muestra una en ángulo recto, usada para medir la velocidad en un canal.



El fluido penetra en la sonda y sube por el tubo hasta una altura  $h$  por encima del nivel del canal. Esta altura es tal que la presión que crea en la boca del tubo contrarresta la energía que lleva el fluido. El punto 2, justo delante de la boca del tubo, recibe el nombre de **punto de estancamiento o de remanso**. En este punto, la velocidad del fluido es nula. El punto 1 está lo suficientemente lejos como para considerar que no está afectado por la sonda.

Un tubo de Pitot mide la presión en el punto 2, es decir, la **presión de remanso** o **presión total**.

Si aplicamos Bernoulli entre los puntos 1 y 2, que están en la misma línea de corriente,

$$\rho \frac{v_1^2}{2} + p_1 = p_2 = \rho g(H + h)$$

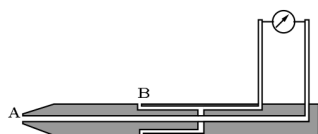
Dado que  $p_1 = \rho gH$ , obtenemos, de forma muy sencilla,

$$\frac{v_1^2}{2} = gh \Rightarrow v_1 = v = \sqrt{2gh}$$

La presión total se compone de **presión estática**  $p$  y **presión dinámica**  $\frac{\rho v^2}{2}$ .

Con un tubo de Pitot podemos medir la presión dinámica y, por tanto, la velocidad, si conocemos la presión estática (como era el caso del canal abierto).

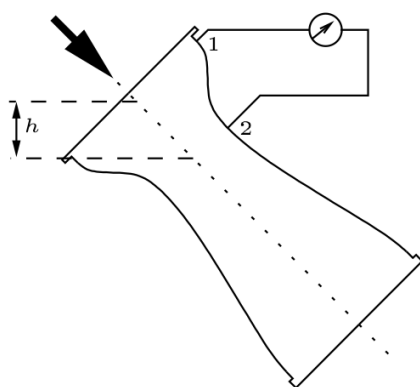
Si no es el caso, utilizamos un **tubo de Pitot estático** o **tubo de Prandtl**.



$$v = \sqrt{\frac{2(p_A - p_B)}{\rho}}$$



### 4.15.1 Tubo de Venturi



$$\frac{1}{2}\rho u_1^2 + p_1 + \rho gh = \frac{1}{2}\rho u_2^2 + p_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(u_2^2 - u_1^2) = \Delta p + \rho gh$$

$$u_1 = u_2 \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^2 = u_2 \beta^2$$

$$\frac{1}{2}\rho [1 - \beta^4] u_2^2 = \Delta p + \rho gh$$

$$\Rightarrow u_2 = \sqrt{\frac{2(\Delta p + \rho gh)}{\rho [1 - \beta^4]}}$$

El caudal es  $Q = u_2 S_2$ . Éste caudal es teórico. El real se calcula multiplicando por un **coeficiente de descarga**  $C_d$  que se obtiene por calibración. Normalmente  $C_d \approx 0.95 \div 1.0$ .

El caudal es, entonces,

$$Q_r = u_{2r} S_2 = C_d S_2 \sqrt{\frac{2(\Delta p + \rho gh)}{\rho [1 - \beta^4]}}$$

### Actividad 1:

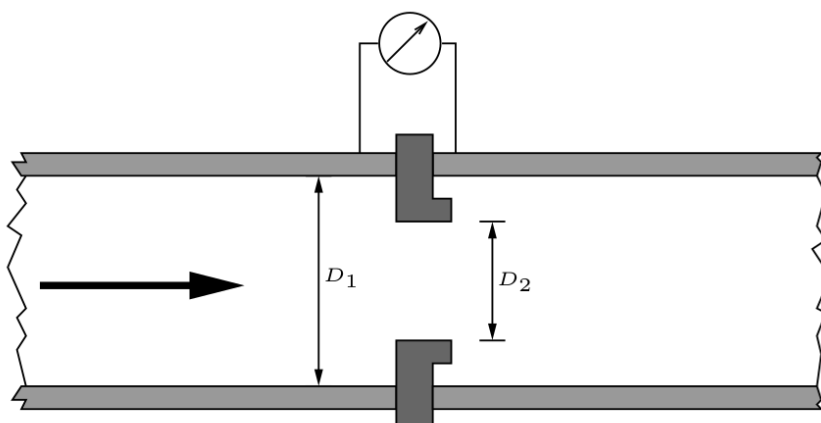
En un tubo de Venturi, de diámetros 200 mm y 160 mm, instalado horizontalmente, se mide una diferencia de presión de 25 mm de mercurio en una instalación de agua. ¿Cuál es el caudal teórico de agua que circula?

### 4.15.2 Diafragma

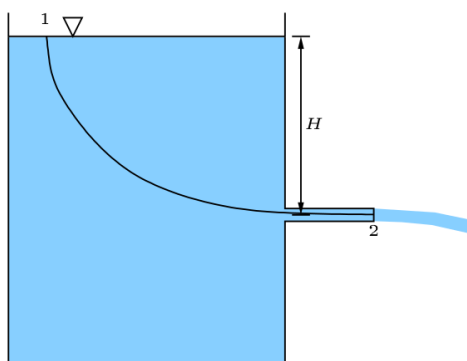
La idea del diafragma es la misma que la del tubo de Venturi, pero carece de la sección de ampliación de la sección corriente abajo. Esto hace que el dispositivo sea más barato, y el

montaje más sencillo.

La ecuación para el caudal es la misma que para el tubo de Venturi, pero  $C_d$  es generalmente menor.



### 4.15.3 Vaciado de un depósito



Menospreciando la viscosidad,

$$\frac{1}{2}\rho u_1^2 + p_1 + \rho g H = \frac{1}{2}\rho u_2^2 + p_2.$$

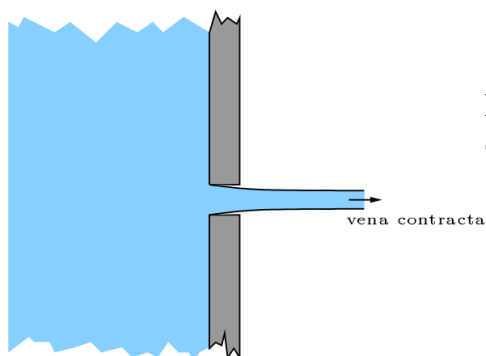
Dado que tanto el punto 1 como el 2 están abiertos,  $p_1 = p_2 = 0$ . Por otro lado, si suponemos que  $S_1 \gg S_2$ , entonces  $u_1^2 \approx 0$ ,

$$\rho g H = \frac{1}{2}\rho u_2^2 \Rightarrow \underbrace{u_2 = \sqrt{2gH}}_{\text{Ec. de Torricelli}},$$

y

$$Q_t = u_2 S_2 \sqrt{2gH} \quad (\text{teórico})$$

Si la descarga se realiza a través de un orificio, se produce una vena contracta de forma que  $S_c \lesssim S_2$ .



$$S_c = C_c S_2$$

$C_c$  : Coeficiente de contracción  $\lesssim 1.0$

Por otro lado, debido al rozamiento, la velocidad disminuye,

$$u_c = C_v u_2$$

$C_v$  : Coeficiente de velocidad  $\lesssim 1.0$

$$\begin{aligned} Q &= u_c S_c = C_c C_v S_2 \sqrt{2gH} \\ &= C_d S_2 \sqrt{2gH} \end{aligned}$$

$C_d$  : Coeficiente de descarga

**Ejemplo: Cálculo de tiempo de vaciado de un depósito.**

$$\begin{aligned} Q &= C_d S_2 \sqrt{\frac{2gH}{1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2}} = \frac{C_d S_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2}} \sqrt{2gH} \\ u_1 &= \frac{Q}{S_1} = \frac{C_d \frac{S_2}{S_1}}{\sqrt{1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2}} \sqrt{2gH} = \underbrace{\frac{C_d \sqrt{2g}}{\sqrt{\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1}}}_{\alpha} \sqrt{H} \\ u_1 &= -\frac{dH}{dt} = \alpha H^{1/2} \Rightarrow \frac{dH}{H^{1/2}} = -\alpha dt \Rightarrow \int_{H_0}^0 H^{-1/2} dH = -\alpha \int_0^t dt \\ 2 H^{1/2} \Big|_{H_0}^0 &= -\alpha t \Rightarrow t = \frac{2}{\alpha} \sqrt{H} = \frac{2 \sqrt{\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1}}{C_d \sqrt{2g}} \sqrt{H} \end{aligned}$$

### Actividad 2:

Estima el tiempo que tarda en vaciarse una botella de agua de 1.5 litros puesta boca abajo.  
¿Porqué en realidad tarda mucho más?

### Actividad 3:

¿Cómo se modifican los cálculos si el depósito no es cilíndrico (p.e., un embudo)?

