

Mecánica de Fluidos

Grau de Tecnologies Industrielles - ESEIAAT

Robert Castilla

Dpt. de Mecànica de Fluids

Curso 2023-24

Contents

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introducción. Propiedades básicas de los fluidos | 1 |
| 1.1 | Definición de fluido | 1 |
| 1.2 | Hipótesis del medio continuo | 2 |
| 1.3 | Propiedades de los fluidos | 3 |
| 1.4 | Fuerzas sobre fluidos | 6 |
| 1.4.1 | Fuerzas de superficie | 6 |
| 1.4.2 | Fuerzas másicas | 8 |
| 1.4.3 | Fuerzas lineales (tensión superficial) | 8 |
| 2 | Hidrostática | 11 |
| 2.1 | Ecuación fundamental de la fluidostática | 11 |
| 2.2 | Presión atmosférica | 12 |
| 2.3 | Fuerza de un fluido estático sobre una superficie | 15 |
| 2.3.1 | Cálculo de la fuerza | 15 |
| 2.3.2 | Coordenadas del punto de aplicación | 15 |
| 2.3.3 | Fuerza sobre una superficie curva totalmente sumergida | 17 |
| 2.4 | Principio de Arquímedes | 17 |
| 2.5 | Segunda ley de Arquímedes | 18 |
| 2.6 | Estabilidad | 19 |
| 3 | Cinemática de fluidos | 23 |
| 3.1 | Descripción Euleriana y Lagrangiana | 23 |
| 3.2 | Lineas de corriente, trayectorias y lineas de traza | 23 |
| 3.3 | Derivada sustancial | 24 |
| 3.4 | Circulación, Flujo y Vorticidad | 25 |
| 3.5 | Movimiento relativo en el entorno de un punto | 26 |
| 4 | Ecuaciones de la Dinámica | 29 |
| 4.1 | Introducción | 29 |
| 4.2 | Formulación integral y diferencial | 29 |
| 4.2.1 | Sistema y volumen de control | 30 |
| 4.2.2 | El teorema de arrastre de Reynolds | 30 |
| 4.3 | Ecuación integral de conservación de la masa | 32 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 4.3.1 | Definición de velocidad media | 33 |
| 4.4 | Ecuación diferencial de conservación de la masa | 33 |
| 4.4.1 | Líneas de corriente | 34 |
| 4.5 | Ecuación integral de la conservación de la cantidad de movimiento | 35 |
| 4.6 | Cálculo de fuerzas en un <i>VC</i> | 36 |
| 4.6.1 | Sistema de Referencia No Inercial | 38 |
| 4.6.2 | Factor de corrección de flujo de cantidad de movimiento | 38 |
| 4.7 | Ecuación diferencial de la conservación de la cantidad de movimiento | 39 |
| 4.8 | El tensor de tensiones para fluidos newtonianos. La ecuación de Navier-Stokes | 40 |
| 4.9 | Ecuación integral de la conservación del momento cinético | 42 |
| 4.10 | Cálculo de momentos en un VC | 43 |
| 4.10.1 | Ejemplo 1: | 43 |
| 4.11 | Las turbomáquinas hidráulicas | 46 |
| 4.11.1 | La conservación del momento cinético y las turbomáquinas hidráulicas | 46 |
| 4.11.2 | El triángulo de velocidades y la ecuación de Euler | 47 |
| 4.12 | Ecuación integral de la conservación de la energía | 49 |
| 4.12.1 | Análisis del trabajo | 49 |
| 4.12.2 | Ecuación de Bernoulli | 50 |
| 4.13 | Ecuación diferencial de la conservación de la energía | 51 |
| 4.14 | Derivación de la Ecuación de Bernoulli a partir de la Ecuación de Euler | 53 |
| 4.15 | Presión estática, dinámica y de remanso | 53 |
| 4.15.1 | Tubo de Venturi | 55 |
| 4.15.2 | Diafragma | 55 |
| 4.15.3 | Vaciado de un depósito | 56 |
| 5 | Flujo con viscosidad dominante | 59 |
| 5.1 | Ecuaciones y condiciones de contorno | 59 |
| 5.2 | Flujo entre placas planas paralelas | 61 |
| 5.2.1 | Flujo entre placas planas paralelas con movimiento relativo | 61 |
| 5.2.2 | Flujo entre placas planas fijas con gradiente de presión | 62 |
| 5.3 | Ecuaciones de continuidad y Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas | 63 |
| 5.4 | Flujo de Hagen-Poiseuille | 64 |
| 5.5 | Flujo entre dos cilindros rotatorios concéntricos | 65 |
| 6 | Análisis Dimensional | 67 |
| 6.1 | El Teorema II de Buckingham | 68 |
| 6.2 | Números adimensionales básicos | 71 |
| 6.3 | Adimensionalización de ecuaciones | 72 |
| 6.4 | Similitud | 75 |
| 6.4.1 | Similitud cinemática | 75 |
| 6.4.2 | Similitud dinámica | 76 |

| | |
|--|------------|
| 7 Turbulencia | 79 |
| 7.1 Promediado de Reynolds | 79 |
| 7.2 Interpretación física del tensor de Reynolds | 83 |
| 7.3 Ley de pared y capa límite turbulenta | 84 |
| 8 Capa Límite | 87 |
| 8.1 Capa límite laminar. Ecuación de Blasius | 89 |
| 8.2 Ecuación de von Kármán | 90 |
| 8.3 Capa límite turbulenta | 93 |
| 8.4 Capa límite con gradiente de presiones. Separación de flujo | 96 |
| 8.4.1 El método de Thwaites | 98 |
| 9 Flujo Ideal y Externo | 101 |
| 9.1 Ecuación de Euler | 101 |
| 9.2 Función de corriente | 102 |
| 9.3 La ecuación de vorticidad | 103 |
| 9.4 Flujos potenciales elementales | 104 |
| 9.5 Circulación | 105 |
| 9.5.1 Dos ejemplos de flujos formados como superposición de los tres flujos elementales: | 106 |
| 9.6 Aerodinámica | 107 |
| 9.6.1 Flujo alrededor de un cilindro | 107 |
| 9.7 Fuerzas aerodinámicas | 107 |
| 9.7.1 Arrastre de fricción y de presión | 108 |
| 9.7.2 Coeficientes aerodinámicos | 109 |
| 9.7.3 Perfil aerodinámico | 112 |
| 10 Flujo en tuberías | 115 |
| 10.1 La ecuación de Darcy-Weisbach | 115 |
| 10.2 Flujo laminar | 116 |
| 10.3 Flujo turbulento en tubería lisa | 118 |
| 10.4 Flujo turbulento en tubería rugosa | 120 |
| 10.5 Cálculo de caudales | 123 |
| 10.6 Dimensionamiento de tuberías | 125 |
| 10.7 Conductos no circulares | 125 |
| 10.8 Pérdidas de carga secundarias | 128 |
| 11 Flujo Compresible | 131 |
| 11.1 Repaso de Termodinámica | 131 |
| 11.2 La velocidad del sonido | 132 |
| 11.3 Flujo adiabático | 133 |
| 11.4 Valores sónicos | 134 |
| 11.5 Difusores e inyectores | 135 |

| | |
|--|-----|
| 11.6 Ondas de choque normales | 139 |
| 11.7 Toberas | 142 |
| 11.7.1 Tobera convergente | 142 |
| 11.7.2 Tobera convergente-divergente | 143 |
| 11.8 El cono de Mach | 144 |
| 11.9 Onda de choque oblicua | 146 |

Chapter 1

Introducción. Propiedades básicas de los fluidos

1.1 Definición de fluido

Definición corta:

Material incapaz de resistir esfuerzos tangenciales

- *esfuerzo* : Fuerza por unidad de superficie
- *tangencial* : ni compresión ni dilatación

Simplificación: **los fluidos son materiales muy fácilmente deformables.**

Pero la separación entre sólidos y fluidos no está clara. Hay materiales que se resiten a una clasificación sencilla. P.e. : pinturas, pastas, polímeros, etc ... Serán analizados en detalle en el tema de **Reología**.

A nivel molecular, la diferencia entre líquidos y gases tiene relación con la magnitud de la fuerza entre moléculas.

En d_0 , se produce un equilibrio estable.

Para la mayoría de las moléculas, d_0 es del orden de $3 - 4 \cdot 10^{-10}$ metros.

Para líquidos, la distancia entre moléculas es, aproximadamente, d_0 . P.e., para el agua:

$$\rho \approx 1000 \text{ Kg/m}^3$$

Peso molecular $\approx 0.018 \text{ Kg/mol} \Rightarrow m = 3.0 \cdot 10^{-26} \text{ Kg/molecula}$

$$V_m = \frac{3.0 \cdot 10^{-26} \text{ Kg/molecula}}{1000 \text{ Kg/m}^3} = 3.0 \cdot 10^{-29} \text{ m}^3$$

$$V_m = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow R \approx 1.9 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

Para los gases, la distancia es mucho mayor (Ejercicio: calcular d para el aire).

Así, las fuerzas entre las moléculas de un gas son atractivas y muy débiles. Estas moléculas flotan por el espacio sin prácticamente ninguna interacción excepto las colisiones.

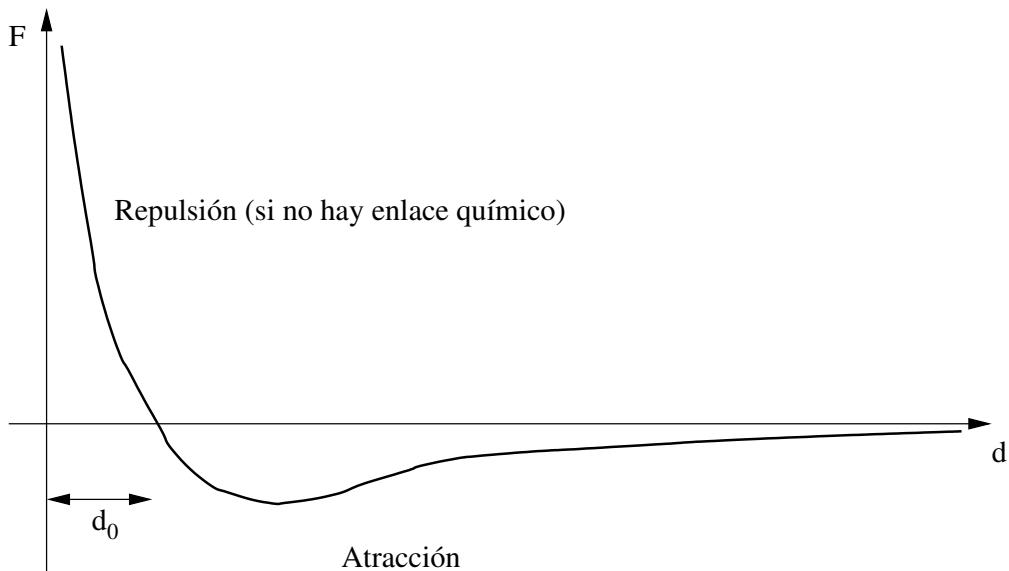


Figure 1.1: Fuerzas intermoleculares

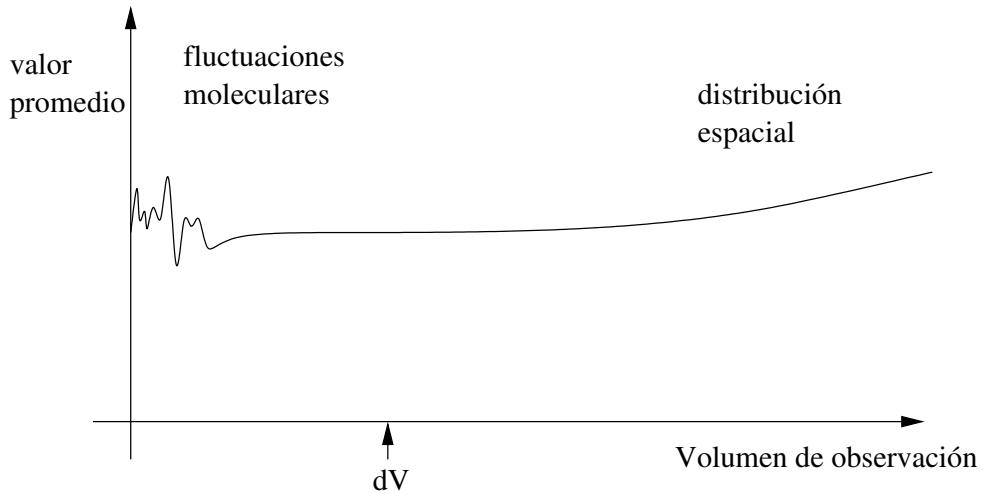
1.2 Hipótesis del medio continuo

Todos los materiales están formados por moléculas. Las propiedades del material no están distribuidas uniformemente. Si la escala de observación es lo bastante pequeña, la composición molecular del material debe tenerse en cuenta (hablamos entonces de *Mecánica Estadística*).

Sin embargo, en *Mecánica de Fluidos*, se habla normalmente de la densidad, la temperatura, la velocidad, como una **distribución uniforme de estas propiedades**, sin considerar la naturaleza discreta de la materia. Es normal hablar de "diferenciales de volumen". Sin embargo, estos diferenciales no son los mismos que los usados en Cálculo Infinitesimal. Son volúmenes finitos, pero

- lo suficientemente grandes como para albergar un número enorme de moléculas, de forma que las fluctuaciones en las propiedades se anulen entre sí, y
- lo suficientemente pequeños como para que la propiedad pueda ser considerada *local*.

Batchelor [1] lo describe muy bien con una figura parecida a esta:



1.3 Propiedades de los fluidos

- Propiedades mecánicas

- densidad - volumen específico

$$\rho = \frac{m}{V} \quad ; \quad [\rho] = \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$$

$$v = \frac{1}{\rho} = \frac{V}{m} \quad ; \quad [v] = \frac{\text{m}^3}{\text{Kg}}$$

- Módulo de elasticidad (isotérmico)

$$\beta_T = -v \left(\frac{dp}{dv} \right)_T = \rho \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_T \quad ; \quad [\beta_T] = \text{Pa}$$

Dado que, para un gas ideal a temperatura constante, $\rho \propto p$, tenemos que $\beta_T = p$. Para una variación de presión Δp , la variación relativa de densidad se puede calcular mediante

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\Delta p}{\beta_T}$$

Criterio de compresibilidad : Todos los fluidos son compresibles, en mayor o menor grado. Es importante saber en qué condiciones un fluido podrá ser considerado compresible y cuándo no. Supongamos que es considerado compresible si $\frac{\Delta \rho}{\rho} \leq 0.01$. Entonces,

$$\frac{\Delta p}{\beta_T} \lesssim 0.01.$$

Como veremos más adelante, se puede relacionar Δp con la velocidad de flujo,

$$\Delta p \sim \frac{1}{2} \rho u^2,$$

de forma que un fluido con velocidad u se puede considerar incompresible si

$$\frac{\rho u^2}{\beta_T} \lesssim 0.02.$$

Como ejemplo, consideremos el aire a presión atmosférica, $\beta_T = p = 10^5 \text{ Pa}$, $\rho \approx 1.2 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$.

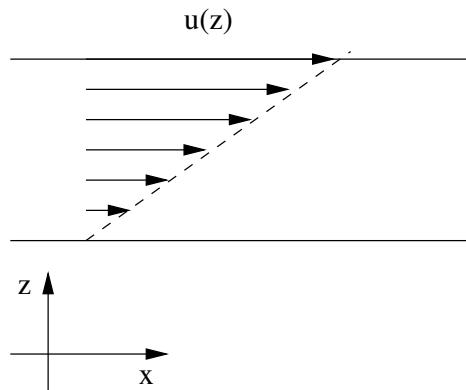
$$\begin{aligned} u^2 &\lesssim \frac{0.02 \beta_T}{\rho} = \frac{0.02 \cdot 10^5}{1.2} = 1.66 \cdot 10^3 \text{ m}^2/\text{s}^2 \\ &\Rightarrow u \approx 40 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Ejercicio

Para el agua, a $20^\circ C$ y presión atmosférica, $\beta_T \approx 2.2 \times 10^9 \text{ Pa}$ y $\rho \approx 1000 \text{ Kg/m}^3$. Calcular para qué orden de magnitud de velocidad de flujo el agua debe empezar a considerarse compresible.

– Viscosidad

Si un fluido fluye en la dirección x , de forma ordenada, por capas, aumentando la velocidad en la dirección z , como muestra la figura,



se produce un intercambio de cantidad de movimiento entre capas que tiende a frenar las más rápidas y acelerar las más lentas. Es decir, se produce un *esfuerzo tangencial*. En muchos casos, éste esfuerzo es proporcional al gradiente de velocidades, y a la constante de proporcionalidad se le denomina *viscosidad dinámica*, μ . Ésta es la conocida como **Ley de Newton de la viscosidad**.

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial z} \quad ; \quad [\mu] = \text{Pa} \cdot \text{s} \quad (1.1)$$

La *viscosidad cinemática* se define como

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} ; \quad [\nu] = \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

Ampliaremos el concepto de viscosidad en el tema siguiente.

- **Propiedades termodinámicas**

entalpía

$$h = u + \frac{p}{\rho} = u + pv ; \quad [h] = [u] = \frac{\text{J}}{\text{Kg}},$$

calor específico

$$c_v = \left(\frac{\partial q}{\partial T} \right)_v = \frac{\partial u}{\partial T} \quad \text{a volumen constante}$$

$$c_p = \left(\frac{\partial q}{\partial T} \right)_p = \frac{\partial h}{\partial T} \quad \text{a presión constante}$$

$$[c_p] = [c_v] = \frac{\text{J}}{\text{Kg} \cdot \text{K}}$$

La relación entre ambos coeficientes es:

$$c_p = c_v + \frac{\partial pv}{\partial T}$$

Para un gas perfecto,

$$\begin{aligned} pv = R'T &\Rightarrow \frac{\partial pv}{\partial T} = R' \\ &\Rightarrow c_p = c_v + R' \end{aligned}$$

, donde $R' = \frac{R}{M}$.

El cociente entre los dos coeficientes se denomina *exponente adiabático*,

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}.$$

coeficiente de expansión térmica

Normalmente, $\uparrow T \Rightarrow \uparrow v (\Rightarrow \downarrow \rho)$.

$$\alpha = \frac{1}{v} \frac{dv}{dT} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT} ; \quad [\alpha] = \text{K}^{-1}$$

Para agua en condiciones normales, $\alpha \approx 1.5 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$.

Consideremos un gas perfecto, a presión constante,

$$\alpha_p = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p ,$$

como $\rho = \frac{p}{R'T}$,

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = -\frac{p}{R'T^2} \quad \Rightarrow \alpha_p = \frac{1}{T}$$

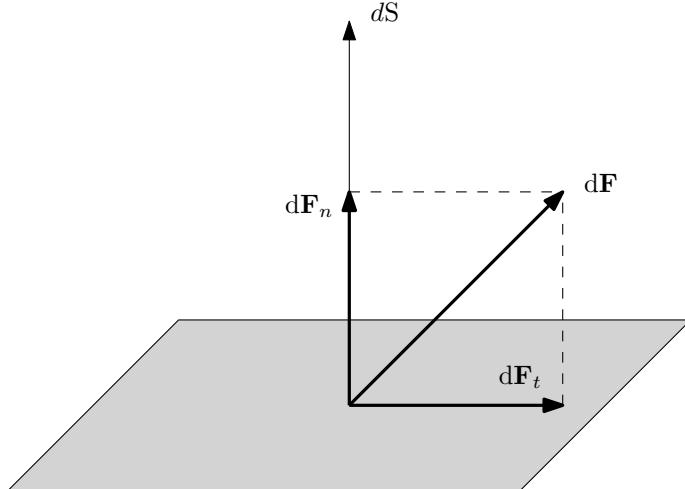
1.4 Fuerzas sobre fluidos

1.4.1 Fuerzas de superficie

Actúan sobre el contorno de un volumen determinado de fluido.

Se crean por contacto bien del mismo fluido, un fluido diferente o un sólido.

Dada una superficie $\delta \vec{S}$, y una fuerza superficial $\delta \vec{F}$ actuando sobre ella, ésta se puede descomponer en una componente normal y una componente tangencial.



Definición de tensión o esfuerzo:

esfuerzo normal :

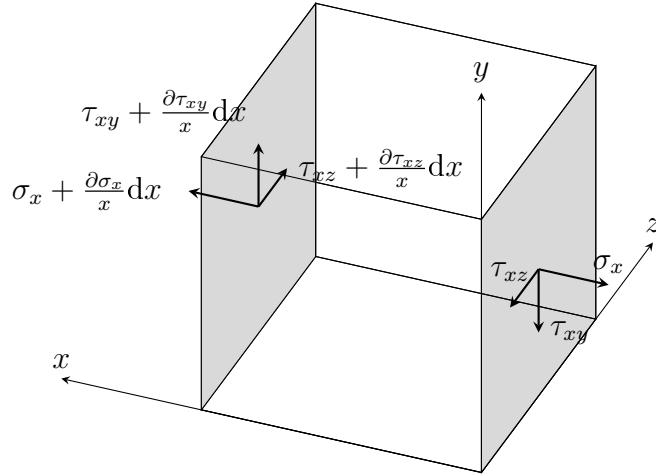
$$\sigma = \lim_{\delta \vec{S} \rightarrow 0} \frac{\delta \vec{F}_n}{\delta \vec{S}}$$

esfuerzo tangencial :

$$\tau = \lim_{\delta \vec{S} \rightarrow 0} \frac{\delta \vec{F}_t}{\delta \vec{S}}$$

σ_i : esfuerzo normal aplicado sobre una superficie normal al eje i (y, por lo tanto, paralelo al eje i)

τ_{ij} : esfuerzo tangencial aplicado sobre una superficie normal al eje i , y en la dirección del eje j



Sobre el volumen dV actúa una fuerza, debida a los esfuerzos superficiales cuya componente x es

$$\begin{aligned} dF_x = & -\sigma_x dy dz + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy dz - \tau_{yx} dx dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) dx dz \\ & - \tau_{zx} dx dy + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dx dy dz \end{aligned} \quad (1.2)$$

De la misma forma:

$$dF_y = \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dx dy dz \quad (1.3)$$

$$dF_z = \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dx dy dz \quad (1.4)$$

La fuerza por unidad de volumen, debida a los esfuerzos superficiales es entonces

$$\begin{aligned} \vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dV} = & \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \vec{i} \\ & + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \vec{j} \\ & + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) \vec{k} \end{aligned}$$

que se expresa de forma abreviada como

$$\vec{f} = \vec{\nabla} \vec{\tau} \quad (1.5)$$

donde $\vec{\tau}$ es el **tensor de tensiones** (stress tensor)

$$\vec{\tau} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

1.4.2 Fuerzas másicas

Actúan a distancia

Son debidas a campos de fuerza (gravitacional, electromagnético, ...)

Fluido eléctricamente cargado : plasma

- Electrohidrodinámica
- Magnetohidrodinámica

Caso más común: sólo campo gravitacional

$$\vec{f}_g = \rho \vec{g}$$

1.4.3 Fuerzas lineales (tensión superficial)

En la interfase de separación entre dos líquidos reside una cantidad de energía, correspondiente a la interacción entre moléculas muy próximas a la superficie de separación

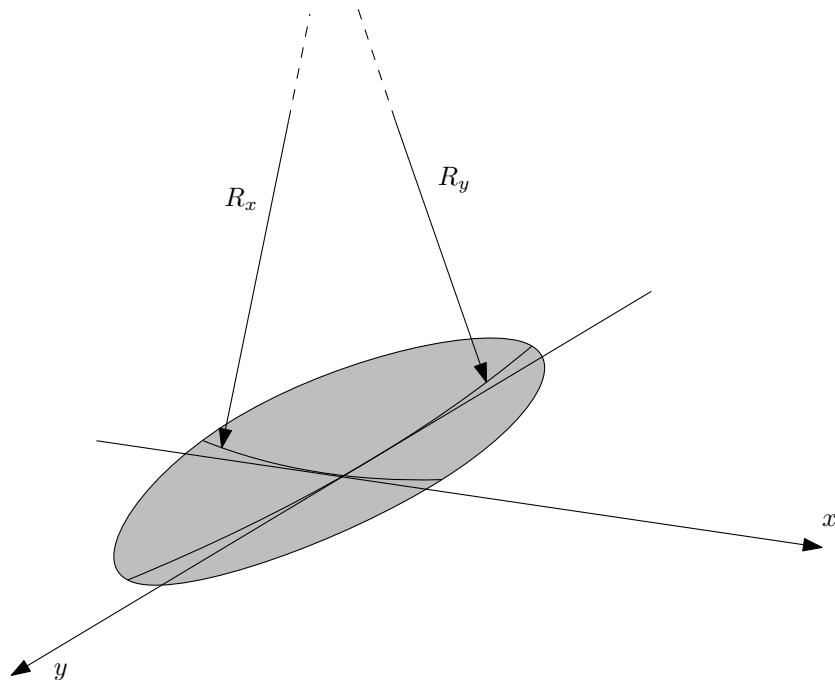
Esta energía es proporcional al área de la interfase.

$$E_s = \sigma S \quad (1.7)$$

El parámetro σ recibe el nombre de **tensión superficial** y tiene unidades de fuerza por unidad de longitud. Esta fuerza es tangente a la superficie, y normal a la línea de aplicación.

El valor de σ depende de la naturaleza de los materiales que separa la interfase y de su estado termodinámico.

P.e. para la interfase entre agua y aire a $20^\circ C$, $\sigma = 72.8 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$



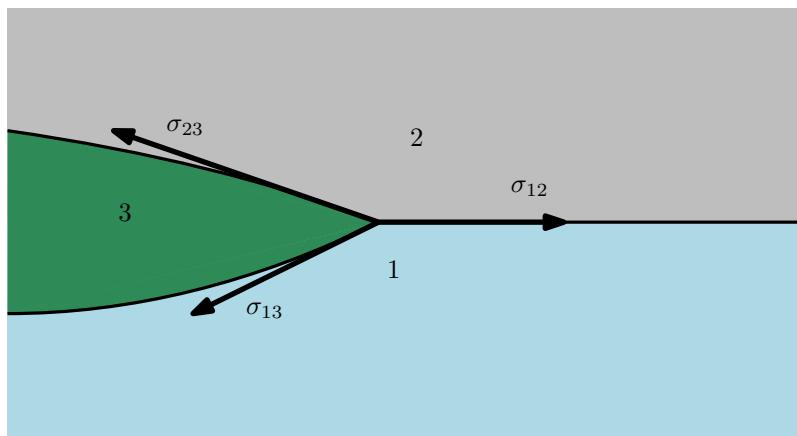
Se puede demostrar (ver [1]) que la tensión provocada en la superficie es equivalente a una diferencia de presión, como indica la **ley de Young-Laplace**

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} \right) \quad (1.8)$$

Si los dos radios de curvatura son iguales, ($R_x = R_y = R$, casquete esférico), esta expresión se reduce a

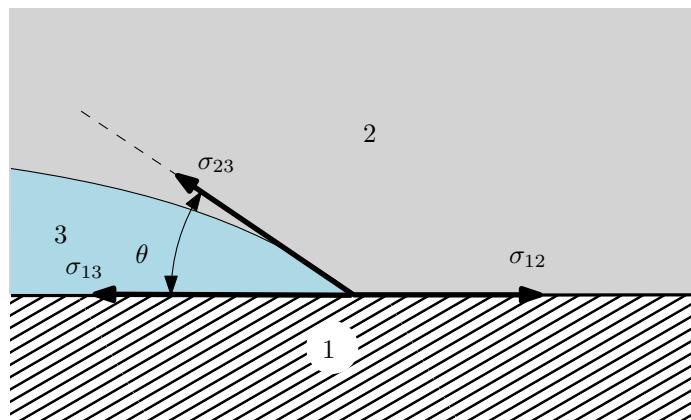
$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R} \quad (1.9)$$

Consideramos el caso de tres fluidos (p.e. una gota de aceite en una superficie de agua)



Si el módulo de una de las tensiones es mayor que la suma de los módulos de las otras dos, este sistema nunca puede llegar al equilibrio, y el fluido se expandirá de forma indefinida hasta llegar al equilibrio, o tener un grosor de tamaño molecular.

Si uno de los materiales es un sólido,



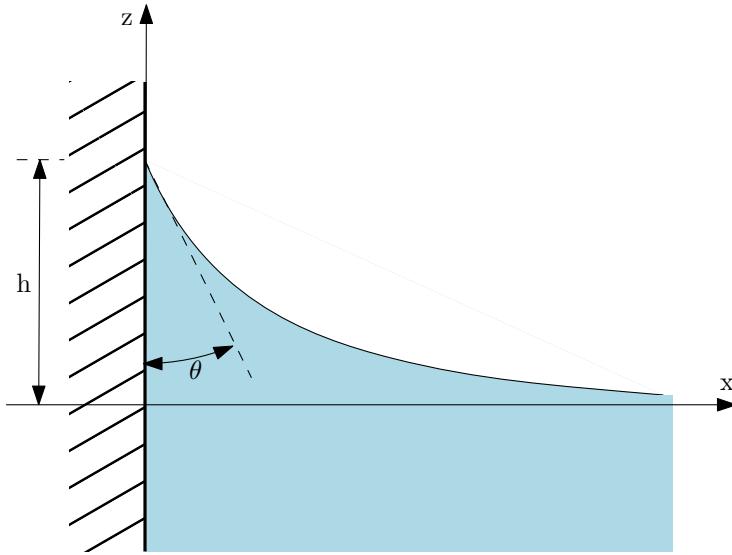
se llega al equilibrio para

$$\sigma_{12} = \sigma_{31} + \sigma_{23} \cos \theta$$

Se considera que cuanto menor es θ , más "moja" el fluido sobre la superficie del sólido.

Ejemplo:

Líquido en contacto con pared plana vertical



Forma de la interficie: $z = \zeta(x)$

En un cierto punto de la interficie, la tensión superficial tiene que ser tal que compense la presión de la columna de fluido. Como veremos más adelante, esta es $\rho g z$, de forma que

$$\rho g z = \sigma \frac{1}{R_1}$$

$$\rho g \zeta = \sigma \frac{\zeta''}{(1 + \zeta'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Integrando se obtiene

$$\frac{1}{2} \frac{\rho g}{\sigma} \zeta^2 + \frac{1}{(1 + \zeta'^2)^{\frac{1}{2}}} = K$$

Muy lejos de la pared, se cumple que $\zeta = \zeta' = 0$, de forma que $K = 1$

Por otro lado, en $x = 0$, se tiene (ver figura) $\zeta = h$ y $\zeta' = -\frac{1}{\tan \theta}$, de forma que

$$h = d \sqrt{2(1 - \sin \theta)}$$

donde $d^2 = \frac{\sigma}{\rho g}$.

Chapter 2

Hidrostática

2.1 Ecuación fundamental de la fluidostática

Fluido en reposo: No hay esfuerzos tangenciales, y la única fuerza superficial es la presión.

Equilibrio estático:

$$\vec{f}_m - \vec{\nabla}p = 0 \quad (2.1)$$

Según el cálculo diferencial,

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi) = 0 \quad \forall \phi \text{ escalar}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{f}_m = 0.$$

$\Rightarrow \vec{f}_m$ ha de ser un *campo conservativo*.

$$dp = \vec{f}_m \cdot d\vec{r}$$

Integrando sobre un determinado camino,

$$p(\vec{r}) = p(\vec{r}_0) + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{f}_m \cdot d\vec{r}$$

Nos permite calcular la presión en cualquier punto \vec{r} conociendo el valor en un punto de referencia \vec{r}_0 y el campo de fuerzas \vec{f}_m .

Si \vec{f}_m es conservativo

$$\vec{f}_m = -\rho \vec{\nabla}U$$

y, entonces,

$$\vec{\nabla}p = -\rho \vec{\nabla}U$$

Si ρ varia de forma arbitraria, no existen soluciones para la ecuación , y no es posible llegar al equilibrio, → corrientes convectivas

La ecuación sólo admite soluciones cuando ρ es únicamente función de la presión, o bien es constante (fluido incompresible).

$$p + \rho U = cte$$

→ Principio de Pascal

Hidrostática en el campo de la gravedad

$$\vec{f}_m = \rho \vec{g},$$

con

$$\vec{g} = -g\vec{k} \quad \text{donde } g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

y

$$U = gz$$

Superficies isobáricas (superficies de igual presión), incluida la superficie libre de los líquidos, horizontales.

$$\vec{\nabla}p = -\rho g \vec{k} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \end{cases}$$

La presión es únicamente función de la coordenada z .

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \Rightarrow p_2 - p_1$$

$$= - \int_{z_1}^{z_2} \rho g dz$$

Actividad 1:

- ¿A cuántos metros de columna de agua corresponden la presión atmosférica?
- Si el aire fuese incompresible, con la densidad que tiene a nivel del mar, ¿cuál debería ser la altura de la atmósfera para tener la misma presión?

2.2 Presión atmosférica

La presión atmosférica disminuye con la altura. Dado que el aire es un gas, su densidad disminuye, en general, cuando disminuye la presión, por lo que también es menor cuando aumentamos la altura.

Necesitamos información sobre la variación de ρ con z , o bien con p .

Opción: aire gas ideal

$$\rho = \frac{pM}{RT} \quad \text{con } M = 28.9 \text{ g/mol.}$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} dz \quad (2.2)$$

Sin considerar la variación de g con la altura:

- Atmósfera isotérmica:

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = - \int_0^z \frac{Mg}{RT} dz$$

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{Mg}{RT} z = -\frac{\rho_0 g}{p_0} z$$

$$\Rightarrow p = p_0 \exp \left(-\frac{\rho_0 g}{p_0} z \right) = p_0 \exp \left(-\frac{z}{\alpha} \right) \quad (2.3)$$

donde

$$\alpha = \frac{p_0}{\rho_0 g}$$

Valores normales:

$$\left. \begin{array}{l} \rho_0 = 1.292 \text{ Kg/m}^3 \\ g = 9.80665 \text{ m/s}^2 \\ p_0 = 760 \text{ mmHg} = 101328 \text{ Pa} \end{array} \right\} \rightarrow \alpha = 7997.35 \text{ m} \approx 8000 \text{ m}$$

- Atmósfera adiabática:

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \quad \text{con} \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1.4 \quad \text{para aire}$$

$$dp = -g\rho dz = -\rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} g dz$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{p^{\frac{1}{\gamma}}} = -\frac{\rho_0}{p_0^{\frac{1}{\gamma}}} g dz$$

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p^{\frac{1}{\gamma}}} = \int_0^z -\frac{\rho_0}{p_0^{\frac{1}{\gamma}}} g dz = -\frac{\rho_0}{p_0^{\frac{1}{\gamma}}} gz$$

$$\Rightarrow \frac{1}{-\frac{1}{\gamma} + 1} p^{-\frac{1}{\gamma} + 1} \Big|_{p_0}^p = -\frac{\rho_0}{p_0^{\frac{1}{\gamma}}} gz$$

$$\begin{aligned}
 & \Rightarrow \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] = -\frac{\rho_0}{p_0^{\frac{1}{\gamma}}} g z \\
 & \Rightarrow p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{\rho_0}{p_0^{\frac{1}{\gamma}}} g z \\
 & \Rightarrow \boxed{\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1 + \frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{z}{\alpha}}
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

- **Atmósfera estándar:**

En realidad, la temperatura media de la atmósfera disminuye de forma casi lineal con la altura

$$T = T_0 - Bz$$

hasta una altura aproximada de 11000 metros (región conocida como *troposfera*). Los valores de T_0 (la temperatura a nivel del mar) y B (*gradiente térmico*) varían no sólo según el día sino también a lo largo del mismo día. Los valores estándar usados por convenio son

$$\begin{aligned}
 T_0 &= 15^\circ C = 288.16 K \\
 B &= 0.0065 K/m
 \end{aligned}$$

Actividad 2:

Integrar la ecuación (2.2) con esta distribución de temperatura para obtener

$$p = p_0 \left(1 - \frac{Bz}{T_0} \right)^{\frac{Mg}{RB}} \tag{2.5}$$

El valor del exponente para aire es

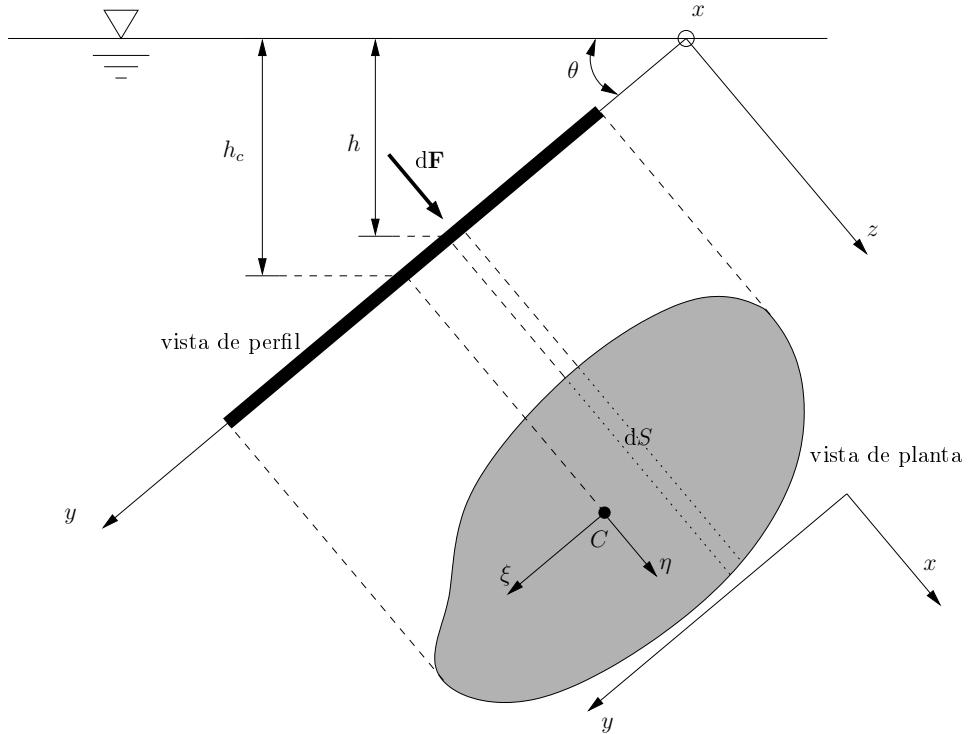
$$\frac{Mg}{RB} = 5.26$$

Después de la troposfera, la temperatura se mantiene constante hasta unos 20000 metros para empezar a aumentar de forma gradual.

Hay que tener siempre en cuenta que esta atmósfera estándar es un valor promediado.

2.3 Fuerza de un fluido estático sobre una superficie

2.3.1 Cálculo de la fuerza



$$\begin{aligned} F &= \int_S dF = \int_S (p_0 + \rho g h) dS == \int_S (p_0 + \rho g y \sin \theta) dS \\ &\Rightarrow F = p_0 S + \rho g \sin \theta \int_S y dS \end{aligned}$$

$\int_S y dS$: momento de primer orden de la superficie S respecto el eje $x \rightarrow$ coordenada y_C del centroide C de la forma

$$y_C S = \int_S y dS \Rightarrow F = (p_0 + \rho g y_C \sin \theta) S = (p_0 + \rho g h_C) S$$

La fuerza ejercida sobre una superficie totalmente sumergida se puede calcular **imaginando** que la presión que actúa es constante en toda la superficie e igual al valor en el centroide.

2.3.2 Coordenadas del punto de aplicación

Momento de la fuerza \vec{F} respecto el eje x :

$$y_{cp} F = \int_S y dF = \int_S y(p_0 + \rho g y \sin \theta) dS = p_0 \int_S y dS + \rho g \sin \theta \int_S y^2 dS$$

$$\Rightarrow y_{cp}F = \int_S y dF = p_0 y_C S + \rho g \sin \theta I_{xx}$$

donde I_{xx} es el momento de segundo orden de la superficie S respecto el eje x .

Nuevo sistema de coordenadas (ξ, η, ζ) , paralelo a (x, y, z) pero con origen en el centroide C .

$$I_{xx} = I_{\xi\xi} + y_C^2 S \quad (\text{T. de Steiner})$$

$$\Rightarrow y_{cp} = y_C + \frac{I_{\xi\xi}}{\left(y_C + \frac{p_0}{\rho g \sin \theta}\right) S}$$

Para x_{cp} :

$$\int_S x dF = \int_S x(p_0 + \rho g y \sin \theta) dS = p_0 \int_S x dS + \rho g \sin \theta \int_S xy dS$$

$$\Rightarrow \int_S x dF = p_0 x_C S + \rho g \sin \theta I_{xy}$$

$$I_{xy} = I_{\xi\eta} + x_C y_C S \quad (\text{T. de Steiner})$$

$$\Rightarrow x_{cp} = x_C + \frac{I_{\xi\eta}}{\left(y_C + \frac{p_0}{\rho g \sin \theta}\right) S}$$

Normalmente, p_0 (en general, la presión atmosférica) actúa por igual en las dos caras de la superficie,

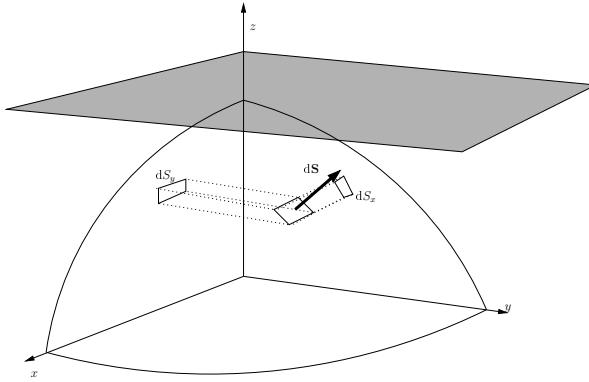
$$F = \rho g h_C S$$

$$x_{cp} = x_C + \frac{I_{\xi\eta}}{y_C S}$$

$$y_{cp} = y_C + \frac{I_{\xi\xi}}{y_C S}$$

Dado que $I_{\xi\xi}$ es, por definición, una cantidad siempre positiva, el centro de presiones se encuentra siempre por debajo del centroide.

2.3.3 Fuerza sobre una superficie curva totalmente sumergida



$$F_x = - \int_S (p_0 + \rho g h) dS_x$$

$$F_y = - \int_S (p_0 + \rho g h) dS_y$$

Si proyectamos la superficie S sobre los planos $x = 0$ y $y = 0$, obtenemos S_x y S_y , y podemos calcular F_x y F_y , así como sus puntos de aplicación.

F_z resulta ser igual al peso total de fluido que se encuentra *por encima* de la superficie curva. La linea de acción de F_z pasa por el centro de gravedad de la columna de fluido que hay sobre la superficie.

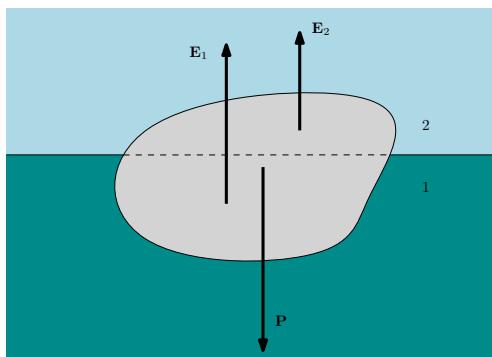
Las expresiones anteriores son válidas únicamente para fluidos con densidad constante. Si el fluido está estratificado, de forma que hay un *gradiente de densidad*, positivo hacia la dirección vertical negativa, los cálculos se complican.

Actividad 3:

Calcula la fuerza, y su punto de aplicación, que hace un embalse de agua de 50 metros de profundidad y 200 metros de ancho sobre la pared, vertical, de la presa.

2.4 Principio de Arquímedes

Todo cuerpo sumergido, completa o parcialmente, en un fluido experimenta un empuje dirigido verticalmente hacia arriba, con magnitud igual al peso del fluido desalojado y cuya linea de acción pasa por el centro de gravedad del fluido desalojado



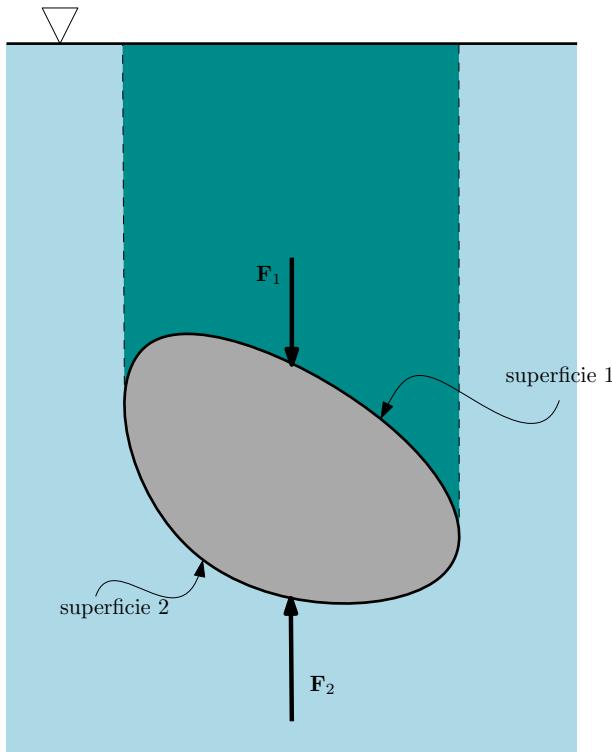
Las líneas de acción de las fuerzas de empuje y el peso no tienen por qué coincidir, y, en este caso, se producen pares de fuerzas.

carena volumen del fluido desalojado

centro de carena o centro de empuje
centro de gravedad del fluido desalojado

El principio de Arquímedes no es, en realidad, un principio. Se puede deducir en cualquier caso simplemente calculando la integral de la presión sobre la superficie que limita el cuerpo.

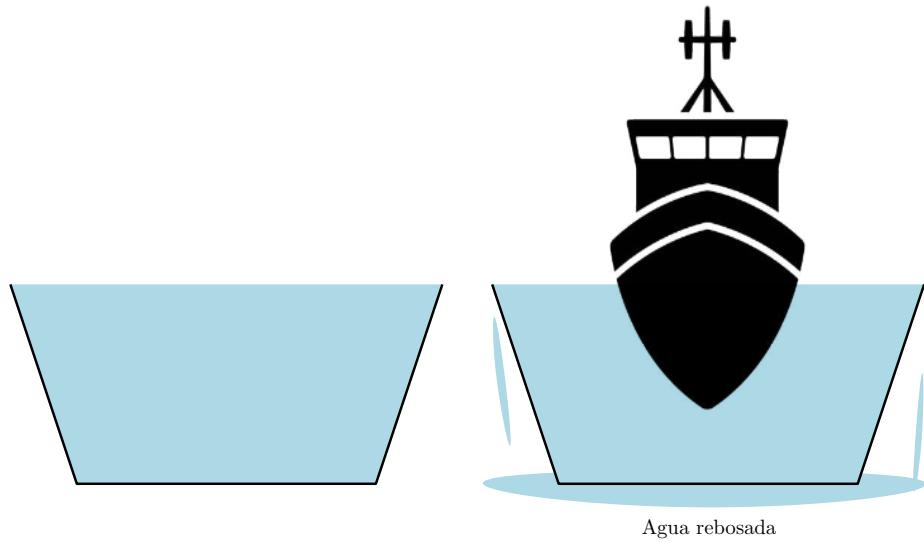
También se puede observar que es la resta del peso de la columna de fluido sobre la superficie superior y sobre la superficie inferior.



2.5 Segunda ley de Arquímedes

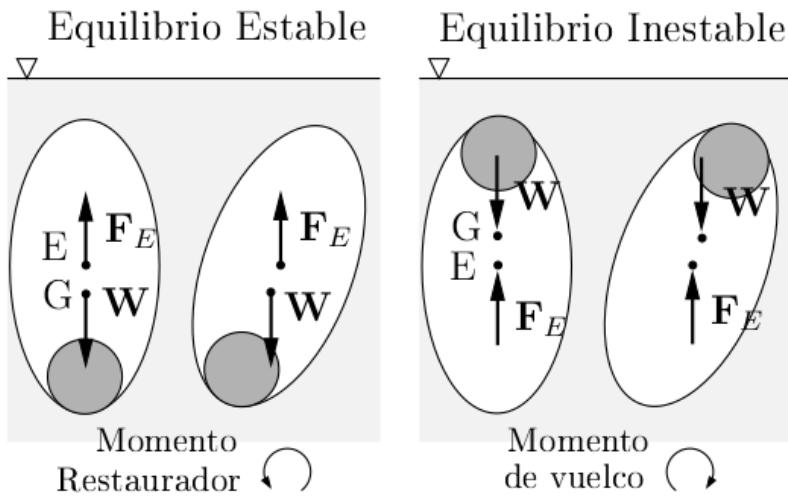
La segunda ley de Arquímedes dice que *un cuerpo que flota desaloja su propio peso de fluido*.

Se puede comprender observando que en la figura, el recipiente con solo fluido y el que tiene fluido y cuerpo flotando, **deben pesar lo mismo**. Pregunta: ¿Cómo sabemos que pesan lo mismo?



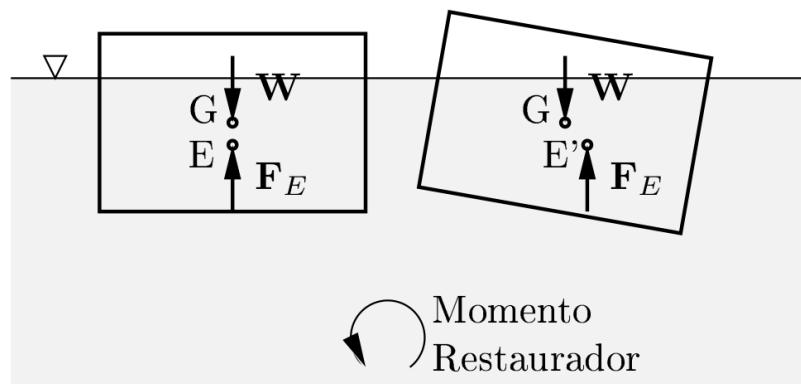
2.6 Estabilidad

Para un cuerpo sumergido, el centro de gravedad puede ser diferente del centro de empuje, y esto produce un momento que puede ser restaurador (equilibrio estable) o de vuelco (equilibrio inestable)

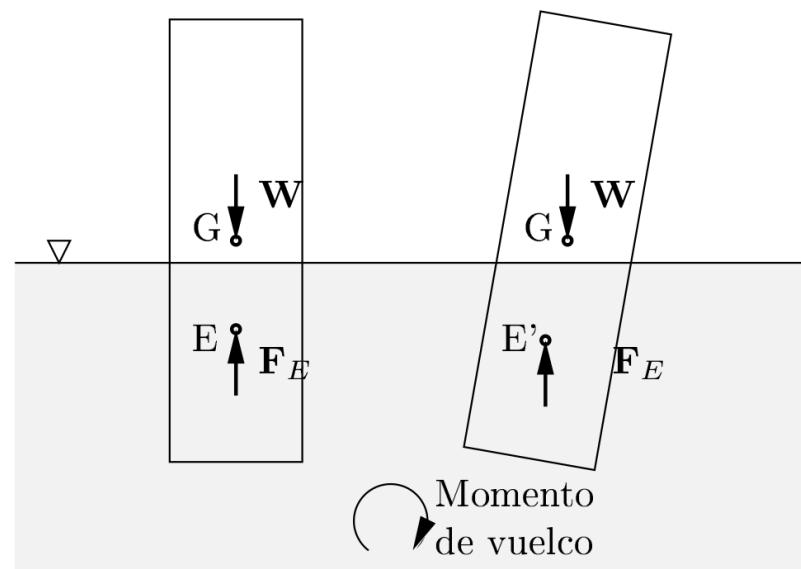


Para un cuerpo flotante, es más complicado, ya que la posición del centro de empuje varía

Equilibrio estable



Equilibrio inestable



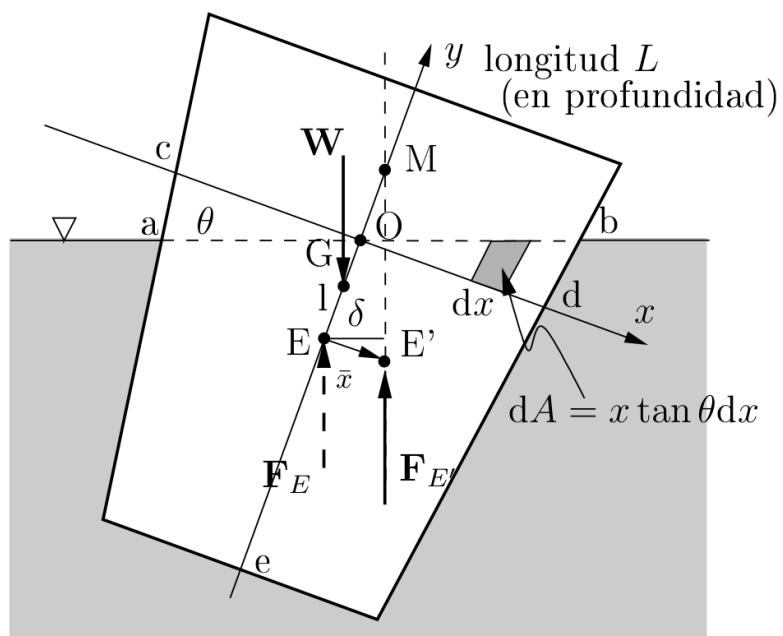
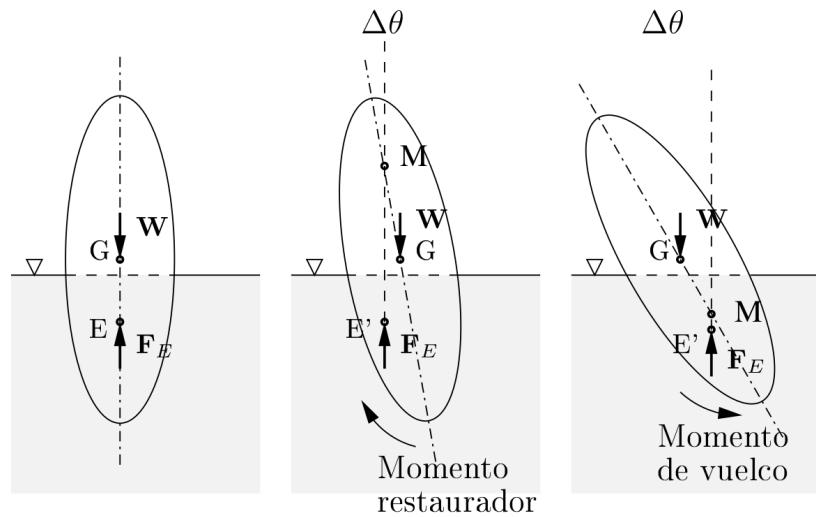
Pasos para calcular la estabilidad de un cuerpo flotante, consideremos un cuerpo simétrico:

1.- Se calcula posición de equilibrio inicial, mediante las fuerzas \vec{F}_E y \vec{W} , y sus puntos de aplicación, E y G . Como el cuerpo están en equilibrio, estas fuerza se alinean con el eje de simetría.

2.- Se realiza una pequeña perturbación $\Delta\theta$. El centro de empuje se desplaza a una nueva posición E' . La vertical sobre E' corta el eje de simetría en un punto M , denominado **metacentro**. Si el ángulo $\Delta\theta$ es pequeño, el metacento no dependerá de él.

3.- Se calcula la **altura metacéntrica**, que es la distancia de M a G . Si M está por encima de G , la altura metacéntrica es positiva, y la posición es *estable*. Si está por debajo, la altura metacéntrica es negativa, y la posición es *inestable*.

La altura metacéntrica es una característica de la sección transversal del cuerpo y su distribución de masa.



La posición del nuevo centro de empuje se calcula con la estimación del centro de masas:

$$\begin{aligned}
\bar{x}V_{aObdea} &= \int_{Obd} x dV - \int_{cOa} x dV \\
&= \int_{Obd} x L dA - \int_{cOa} x L dA \\
&= \int_{Obd} x L (x \tan \theta dx) - \int_{cOa} x L (-x \tan \theta dx) \\
&= \tan \theta \int x^2 2L dx = \tan \theta \int x^2 dA \\
&= \tan \theta I_0
\end{aligned}$$

La altura metacéntrica es

$$\overline{MG} = \overline{ME} - \overline{GE} = \frac{\bar{x}}{\tan \theta} - \overline{GE} = \frac{I_0}{V_{\text{sumergido}}} - \overline{GE} = \frac{\rho g I_0}{W} - \overline{GE} \quad (2.6)$$

Si \overline{MG} es positiva, el equilibrio es estable (para pequeñas perturbaciones). Si \overline{GE} es negativa, el equilibrio es estable siempre

Chapter 3

Cinemática de fluidos

3.1 Descripción Euleriana y Lagrangiana

Dos formas de identificación de las magnitudes (p. e., la velocidad)

1. **Euleriana:**

Segun la **posición** y el instante.

$$\vec{u}(\vec{x}, t) \quad (3.1)$$

2. **Lagrangiana:**

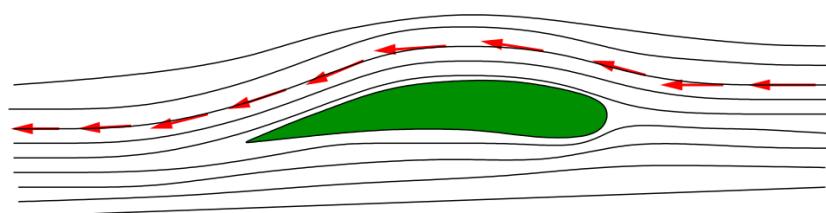
Según la **partícula** y el instante. La partícula queda identificada (marcada) mediante un vector \vec{a} que puede ser, por ejemplo, la posición que tiene la partícula en un instante de referencia t_0

$$\vec{u}(\vec{a}, t; t_0) \quad (3.2)$$

3.2 Lineas de corriente, trayectorias y líneas de traza

• **Lineas de corriente:**

Para un instante dado t_0 , es la tangente a los vectores de velocidad.



Són solución de la ecuación (en 2D)

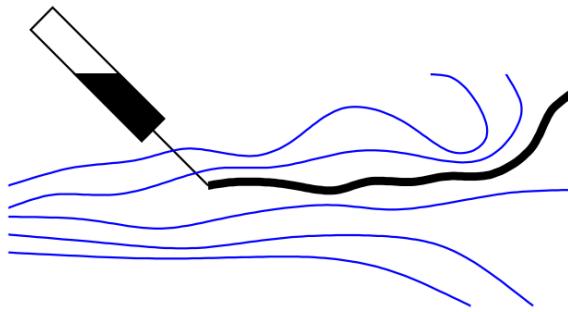
$$\frac{dx}{u(\vec{x}, t = t_0)} = \frac{dy}{v(\vec{x}, t = t_0)} \quad (3.3)$$

- **Trayectoria:**

Para una cierta partícula de fluido, puntos que ocupa en un cierto intervalo de tiempo.

- **Líneas de traza:**

Partículas de fluido que, en un cierto instante anterior, pasaron por un determinado punto.



Si el flujo es estacionario (no depende del tiempo), linea de corriente, trayectoria y linea de traza coinciden para un determinado punto.

Actividad 1:

Dado el campo de velocidades bidimensional $\vec{u} = (x + t)\vec{i} + y\vec{j}$, encontrad las expresiones para:

- la linea de corriente que pasa por $(1, 1)$ para $t = 0$
- la trayectoria de la partícula que está en $(1, 1)$ para $t = 0$
- la línea de traza, para $t = 0$, de todas las partículas que pasaron por $(1, 1)$

3.3 Derivada sustancial

La partícula P , en el instante t se encuentra en \vec{x} con una velocidad \vec{u} . La aceleración de P **no** es $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$, ya que aunque \vec{u} sea estacionario, P puede estar moviéndose a un punto en que \vec{u} es diferente.

En un instante $t + \delta t$, P estará en $\vec{x} + \delta \vec{x} = \vec{x} + \vec{u}\delta t$, de forma que la variación de velocidad será

$$\delta \vec{u} = \vec{u}(\vec{x} + \vec{u}\delta t, t + \delta t) - \vec{u}(\vec{x}, t)$$

Desarrollando en serie de Taylor hasta primer orden, obtenemos

$$\delta \vec{u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \delta t + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \delta t + O(\delta t^2),$$

de forma que la aceleración es

$$\vec{a}(\vec{x}, t) = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$$

De forma general, consideremos cualquier magnitud f , asociada a una propiedad del fluido (puede ser un escalar como la temperatura, o densidad, o la velocidad angular).

- Derivada **local**:

$$\frac{\partial f}{\partial t}$$

- Derivada **convectiva**:

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{f} = \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) f = u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

- Derivada **sustancial** o **total**:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{f} = \frac{\partial f}{\partial t} + u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

3.4 Circulación, Flujo y Vorticidad

- **Circulación**

$$\Gamma = \oint_L \vec{u} \cdot d\vec{l}$$

L es cualquier contorno cerrado.

Si este contorno está constituido siempre por las mismas partículas (es decir, es una línea material), se puede demostrar ([8]) que

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt} \oint_L \vec{u} \cdot d\vec{l} = 0$$

- **Flujo**

Sea F una magnitud extensiva propiedad del fluido y f esta misma magnitud por unidad de volumen. El flujo de f a través de la superficie S es

$$\Phi = \int_S f \vec{u} \cdot d\vec{S}$$

Si f es un escalar, $f \vec{u}$ es el **vector flujo** de f .

Si f es un vector (\vec{f}) , $\vec{f} \vec{u}$ es el **tensor flujo** de f .

Ejemplo:

$$f = 1 \rightarrow \begin{cases} \vec{u} & \text{vector flujo volumétrico} \\ Q = \int_S \vec{u} \cdot d\vec{S} & \text{flujo volumétrico, o caudal} \end{cases}$$

$$f = \rho \rightarrow \begin{cases} \rho \vec{u} & \text{vector flujo másico} \\ \dot{m} = \int_S \rho \vec{u} \cdot d\vec{S} & \text{flujo másico, o gasto} \end{cases}$$

- **Vorticidad**

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u} \quad \text{En componentes: } \omega_k = -\varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Es el doble de la velocidad local de rotación del elemento de fluido. Por definición de vorticidad, se cumple que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} = 0$$

y el flujo a través de una superficie S cerrada es siempre nulo

$$\oint_S \vec{\omega} \cdot d\vec{S} = 0$$

- Si la superficie es abierta, este flujo está relacionado con la circulación sobre la línea que limita la superficie a través del Teorema de Stokes

$$\int_S \vec{\omega} \cdot d\vec{S} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{u} \cdot d\vec{l}$$

3.5 Movimiento relativo en el entorno de un punto

Sea \vec{u} la velocidad del fluido en un punto \vec{r} . En un punto $\vec{r} + \delta\vec{r}$, la velocidad será $\vec{u} + \delta\vec{u}$, con

$$\delta\vec{u} = \vec{\nabla}\vec{u} \cdot \delta\vec{r}; \quad \delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta r_j$$

El tensor **divergencia de velocidad**, $\vec{\nabla}\vec{u}$, puede descomponerse como la suma de un tensor simétrico, $(\vec{\nabla}\vec{u})^S$ y un tensor antisimétrico $(\vec{\nabla}\vec{u})^A$, con

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla}\vec{u})^S &= \frac{1}{2} \left(\vec{\nabla}\vec{u} + (\vec{\nabla}\vec{u})^T \right) \\ (\vec{\nabla}\vec{u})^A &= \frac{1}{2} \left(\vec{\nabla}\vec{u} - (\vec{\nabla}\vec{u})^T \right) \end{aligned}$$

Cada uno de estos tensores contribuye a $\delta\vec{u}$ de una forma diferente

$$\delta\vec{u} = \delta\vec{u}^S + \delta\vec{u}^A = (\vec{\nabla}\vec{u})^S \cdot \delta\vec{r} + (\vec{\nabla}\vec{u})^A \cdot \delta\vec{r}$$

$\delta\vec{u}^S = (\vec{\nabla}\vec{u})^S \cdot \delta\vec{r}$ representa un movimiento de **deformación pura**. Siempre es posible escoger los ejes del sistema de referencia de forma que $(\vec{\nabla}\vec{u})^S$ sea diagonal. Entonces los tres valores de la diagonal son las velocidades de estiramiento en la dirección de los ejes

principales. Si el fluido es incompresible el volumen del elemento de fluido se mantiene constante y la suma de la diagonal, que es un invariante respecto del cambio de sistema de coordenadas, es nula

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

$\delta \vec{v}^A = (\vec{\nabla} \vec{u})^A \cdot \delta \vec{r}$ representa un movimiento de **rotación pura**.

$$\delta u_i^A = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \delta r_j = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \omega_k \delta r_j$$

La velocidad angular de rotación es $\frac{1}{2} \vec{\omega} = \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \times \vec{u})$.

Chapter 4

Ecuaciones fundamentales de la Dinámica de los Fluidos

4.1 Introducción

La Mecánica de los fluidos viene determinada por **3 leyes básicas**¹

- El principio de **conservación de la masa**. La masa de un sistema fluido se mantiene constante independientemente de su posición o forma.
- La ley de **conservación de la cantidad de movimiento**. La variación de la cantidad de movimiento de un sistema fluido es igual a la suma total de las fuerzas externas que actúan sobre él.
- La ley de **conservación de la energía**. Es, básicamente, la Primera Ley de la Termodinámica. La variación de la energía de un sistema fluido (energía interna + energía cinética) es igual al trabajo realizado por todas las fuerzas externas más el calor recibido por conducción y/o radiación.

A estos principios hay que añadir las **leyes constitutivas**, como la ley de viscosidad de Newton, o la ley de los gases perfectos.

4.2 Formulación integral y diferencial

Existen dos enfoques para los problemas de Mecánica de Fluidos:

- **Formulación diferencial**. Se consideran volúmenes elementales de fluido y las ecuaciones que gobiernan su comportamiento. Para resolver los problemas con este planteamiento es necesario conocer las condiciones iniciales en todo el dominio y las condiciones de contorno en todos los límites del mismo.

¹Algunos autores, como [7] toman en consideración también la Segunda Ley de la Termodinámica

- **Formulación integral.** Se trabaja directamente sobre volúmenes de fluido macroscópicos, denominados **volúmenes de control**. Las ecuaciones son promediadas en el volumen de control y sobre su frontera, denominada **superficie de control**.

Para la mayoría de los problemas de Ingeniería (o, por lo menos, para una primera aproximación) es suficiente con la formulación integral².

4.2.1 Sistema y volumen de control

Un **sistema de control** posee una cantidad definida de materia. Su volumen, y, por lo tanto, su densidad, así como otras magnitudes físicas pueden cambiar, pero no la cantidad de masa. En mecánica de sólidos se suele emplear el sistema de control como enfoque de trabajo.

En Mecánica de Fluidos, es conveniente usar el enfoque de **volúmen de control**, que se establece en el espacio, sin relación con una cierta cantidad de materia. Este volumen puede ser estático o no, y puede cambiar tanto de posición como de tamaño.

La diferencia entre sistema y volumen de control se puede relacionar con la diferencia entre los puntos de vista Lagrangiano y Euleriano, ya que un sistema de control siempre sigue el movimiento de las partículas que lo componen.

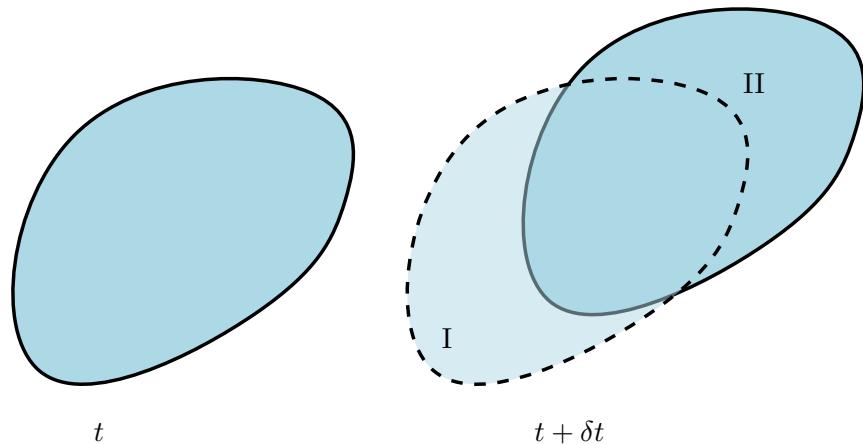
4.2.2 El teorema de arrastre de Reynolds

Dado que las ecuaciones de mecánica y termodinámica se refieren a sistemas de control, es necesario deducirlas para el caso en que las aplicamos sobre volúmenes de control.

Consideremos un volumen de control y un sistema de control que, en un instante determinado t , coinciden en el espacio. El volumen de control VC está estacionario, mientras que el sistema de control V se mueve con el flujo.

En el instante $t + \delta t$ el sistema de control se encuentra en una posición ligeramente desplazada respecto al volumen. Incluso puede que haya cambiado su volumen, si el flujo es compresible

²La formulación diferencial es más general, y permite determinar detalles del flujo. Es posible extraer los resultados de la formulación integral a partir de los de la diferencial, pero no al contrario.



Consideremos una cierta magnitud extensiva F , y f la misma por unidad de masa, de forma que

$$F = \int_V \rho f \, dV \quad (4.1)$$

Consideremos la notación:

- F_t : el valor de F para el sistema de control en el instante t
- F_{t+} : el valor de F para el sistema de control en el instante $t + \delta t$
- F'_t : el valor de F para el volumen de control en el instante t
- F'_{t+} : el valor de F para el volumen de control en el instante $t + \delta t$
- F_s : Cantidad de F que abandona el volumen de control en el intervalo Δt (a través de I)
- F_e : Cantidad de F que entra en el volumen de control en el intervalo Δt (a través de II)

Evidentemente,

$$F_t = F'_t$$

Las variaciones de F en el sistema de control y en el volumen de control son, respectivamente,

$$\begin{aligned} \delta F &= F_{t+} - F_t \\ \delta F' &= F'_{t+} - F'_t \end{aligned}$$

y, por otro lado,

$$F_{t+} = F'_{t+} + F_s - F_e,$$

de forma que

$$\delta F = \delta F' + F_s - F_e$$

Dividiendo por δt y haciendo el límite $\delta t \rightarrow 0$, obtenemos

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF'}{dt} + \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{F_s - F_e}{\delta t}$$

Por definición, el último término es el flujo de F a través de la frontera de VC , que, como hemos definido en temas anteriores,

$$\begin{aligned} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{F_s - F_e}{\delta t} &= \Phi_F = \oint_{SC} \rho f \vec{u}_r \cdot d\vec{S} \\ \frac{dF}{dt} &= \frac{dF'}{dt} + \oint_{SC} \rho f \vec{u}_r \cdot d\vec{S} \\ \Rightarrow \frac{dF}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho f dV + \oint_{SC} \rho f \vec{u}_r \cdot d\vec{S} \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde \vec{u}_r es la velocidad del flujo relativa a la Superficie de Control.

Otra forma de expresarlo es, usando el Teorema de Leibniz [4, Sección 3.6]

$$\frac{dF}{dt} = \int_{VC} \frac{\partial \rho f}{\partial t} dV + \oint_{SC} \rho f \vec{u} \cdot d\vec{S} \quad (4.3)$$

donde \vec{u} es ahora la velocidad absoluta. Si el VC no se mueve ni se deforma, $\vec{u} = \vec{u}_r$.

Se puede usar el Teorema de la Divergencia para transformar la integral de superficie en una integral de volumen, de forma que

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \int_{VC} \frac{\partial \rho f}{\partial t} dV + \int_{VC} \vec{\nabla} \cdot (\rho f \vec{u}) dV \\ \Rightarrow \frac{dF}{dt} &= \int_{VC} \left[\frac{\partial \rho f}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho f \vec{u}) \right] dV \end{aligned}$$

4.3 Ecuación integral de conservación de la masa

En este caso, $F = m$ y $f = 1$. Por definición de sistema físico, $\frac{dm}{dt} = 0$, de forma que

$$\begin{aligned} \int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oint_{SC} \rho \vec{u} \cdot d\vec{S} &= 0 \\ \Rightarrow \int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV &= - \oint_{SC} \rho \vec{u} \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

Interpretación física: **En un Volumen de Control, la variación local de la masa únicamente puede ser debida a un flujo de masa a través de contorno.**

Simplificaciones de la ecuación integral de conservación de la masa

- Si el flujo es **estacionario** en el interior del VC, entonces $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ y

$$\oint_{SC} \rho \vec{u} \cdot d\vec{S} = 0$$

- Si el flujo es **incompresible**, entonces la densidad es constante en todo el VC, de forma que

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\rho \oint_{SC} \vec{u} \cdot d\vec{S}$$

- Si se cumplen las dos condiciones y el flujo es **incompresible y estacionario**,

$$\oint_{SC} \vec{u} \cdot d\vec{S} = 0$$

4.3.1 Definición de velocidad media

Consideremos como caso simple un fluido incompresible circulando por una tubería. La sección de la tubería es S , y el flujo se puede considerar en todos los puntos axial, de forma que el caudal se calcula con

$$Q = \int_S u dS$$

La **velocidad media** se define como la velocidad uniforme que debería tener el flujo para que el caudal fuese el mismo, $Q = \bar{u}S$. De aqui,

$$\bar{u} = \frac{1}{S} \int_S u dS$$

Un documento muy interesante para estudiar la forma integral de la conservación de la masa, es el publicado en 2001 por el prof. Sonin, del MIT, disponible [aqui](#).

4.4 Ecuación diferencial de conservación de la masa

Aplicando el Teorema de la Divergencia a la forma integral, para un Volumen de Control estacionario, se obtiene

$$\int_{VC} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) \right] dV = 0$$

Como esto debe cumplirse para cualquier VC, obtenemos la forma diferencial de la conservación de la masa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

En forma de componentes:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0$$

4.4.1 Líneas de corriente

Para un **fluido incompresible**:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$$

$$\text{Flujo 2D} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Consideremos una función $\psi(x, y)$ que cumple

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad ; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Entonces la ecuación de continuidad se cumple de forma exacta, ya que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \equiv 0$$

$\psi(x, y)$ es la **función de corriente**.

Las líneas $\psi(x, y) = \psi_i = \text{cte}$ son las **líneas de corriente** y cumplen que

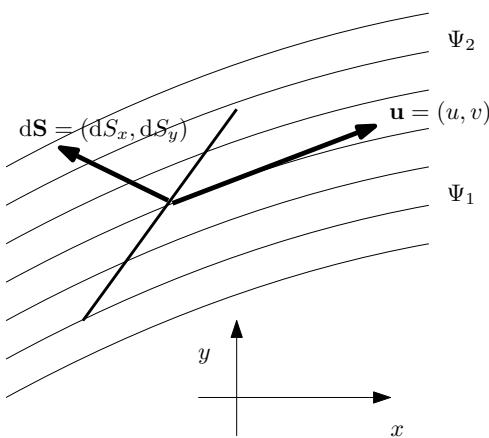
$$d\psi = 0 \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0$$

$$\Rightarrow -v dx + u dy = 0 \Rightarrow \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

es decir, son *tangentes a \vec{u}* en todos los puntos

Interpretación física:

Flujo bidimensional. Para una profundidad unidad:



$$\begin{aligned}
dQ &= \vec{u} \cdot d\vec{S} \\
&= \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dS_x \\ dS_y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial y} & -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dy \\ -dx \end{pmatrix} (\times 1) \\
&= \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = d\psi \\
\Rightarrow Q &= \psi_2 - \psi_1
\end{aligned}$$

Actividad 1:

$$\vec{u}(x, y) = u(x, y) \vec{i} + v(x, y) \vec{j}$$

con $u(x, y) = a(x^2 - y^2)$. ¿Como tiene que ser de forma general $v(x, y)$ para que el flujo sea incompresible?

Calcular la función de corriente y dibujar las líneas de corriente para el caso más simple.

4.5 Ecuación integral de la conservación de la cantidad de movimiento

En este caso, $F = m\vec{u}$ y $f = \vec{u}$ **Importante:** Carácter vectorial de F y f
T. de Transporte de Reynolds:

$$\frac{dm\vec{u}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \vec{u} dV + \oint_{SC} \rho \vec{u} \vec{u}_r \cdot d\vec{S} \quad (4.4)$$

donde \vec{u}_r es la velocidad relativa del fluido respecto de la SC , que no tiene por qué ser igual a \vec{u} , la velocidad relativa al Sistema de Referencia.

Según la Segunda Ley de la Dinámica de Newton,

$$\frac{dm\vec{u}}{dt} = \vec{F}_T \quad (4.5)$$

donde \vec{F} es la suma total de todas las fuerzas que actúan sobre el VC , tanto **superficiales** como **másicas**. Las fuerzas superficiales son producidas por todos los **fluidos** y **sólidos** incluidos en el VC .

Debido al carácter vectorial de la cantidad de movimiento:

$$F_{Tx} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho u \, dV + \oint_{SC} \rho u \vec{u}_r \cdot d\vec{S} \quad (4.6)$$

$$F_{Ty} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho v \, dV + \oint_{SC} \rho v \vec{u}_r \cdot d\vec{S} \quad (4.7)$$

$$F_{Tz} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho w \, dV + \oint_{SC} \rho w \vec{u}_r \cdot d\vec{S} \quad (4.8)$$

4.6 Cálculo de fuerzas en un *VC*

Supongamos, por simplicidad, que el *VC* está en reposo respecto del SR inercial.

Las fuerzas superficiales que actúan sobre el material del *VC* són

- tensiones de los sólidos que atraviesan el *VC*.
- esfuerzos normales (presión) y tangenciales del fluido.

Cálculo de presiones:

$$\vec{F}_p = - \oint_{SC} p \, d\vec{S}$$

Si la presión es uniforme en toda la *SC*, $\vec{F}_p = 0$.

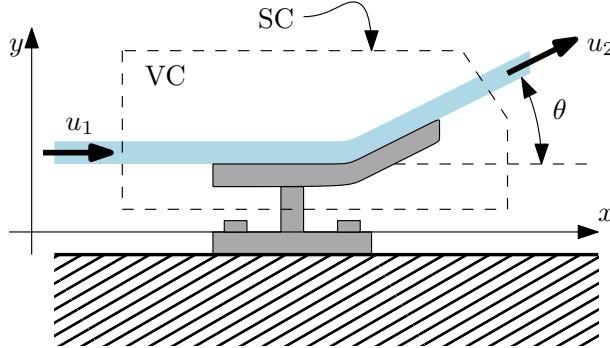
En muchas ocasiones los problemas prácticos de Ingeniería relacionados con la ecuación integral del conservación de la cantidad de movimiento són, básicamente, encontrar la fuerza que se ejerce sobre un cierto sólido en contacto con un fluido en movimiento.

Ejemplos:

- Fuerza sobre uniones en tuberías.
- Fuerza sobre toberas, inyectores, ...
- Fuerza sobre un vehículo aéreo o espacial.
- Fuerza de un chorro sobre un obstáculo.
- Fuerza sobre un vertedero.
- ...

La fuerza que se quiere calcular es siempre uno de los términos de \vec{F}_T . La raíz del problema estriba en aislar éste término en la relación de conservación de la cantidad de movimiento.

Ejemplo (extraido de [10]):



Como hipótesis, suponemos que la sección del chorro es idéntica a la entrada y a la salida, de forma que, por la conservación de la masa, $\|\vec{u}_1\| = \|\vec{u}_2\|$.

Queremos calcular la fuerza \vec{F} que ejerce el chorro sobre el soporte.

En realidad, lo que calcularemos será la fuerza \vec{F}' que ejerce el soporte sobre el chorro. Según la 3a. Ley de la Dinámica de Newton, $\vec{F} = -\vec{F}'$.

$$\vec{F}' + \vec{F}_m + \vec{F}_s = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \vec{u} dV + \oint_{SC} \rho \vec{u} \vec{u}_r \cdot d\vec{S}$$

\vec{F}_m : *Fuerza de la gravedad*. Dado que no tenemos información sobre el volumen del chorro en el interior del VC, adoptamos la hipótesis de que $\|\vec{F}_m\|$ será muy pequeño en comparación con el resto de términos y, por lo tanto, lo despreciamos. A posteriori, debería comprobarse la validez de esta hipótesis.

\vec{F}_s : *Fuerza superficiales*, que engloban la presión y los esfuerzos tangenciales (fricción). Dado que la presión es uniforme, se anula. En cuanto a las fuerzas debidas a la fricción no hay ningún argumento para calcularlas, de forma que adoptamos la hipótesis de que son menoscupables.

En cuanto al segundo miembro, el chorro es estacionario en el interior del VC, de forma que $\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \vec{u} dV = 0$

La conservación de la cantidad de movimiento queda como

$$\vec{F}' = \oint_{SC} \rho \vec{u} \vec{u} \cdot d\vec{S}$$

La velocidad sólo está definida en las secciones S_1 y S_2 de SC , de forma que

$$\vec{F}' = \int_{S_1} \rho \vec{u} \vec{u} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \rho \vec{u} \vec{u} \cdot d\vec{S}$$

En componentes, según el SR de la figura,

$$\begin{aligned} F'_x &= \int_{S_1} \rho u \vec{u} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \rho u \vec{u} \cdot d\vec{S} \\ F'_y &= \int_{S_1} \rho v \vec{u} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \rho v \vec{u} \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

Es fácil ver que

$$\begin{cases} u = u & \text{en } S \\ v = 0 & \text{en } S_1 \end{cases} \quad \begin{cases} u = u \cos \theta & \text{en } S_2 \\ v = u \sin \theta & \text{en } S_2 \end{cases}$$

De forma que

$$\begin{aligned} \begin{cases} F'_x = \int_{S_1} \rho u \vec{u} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \rho u \cos \theta \vec{u} \cdot d\vec{S} \\ F'_y = \rho v \int_{S_1} \vec{u} \cdot d\vec{S} + \rho u \cos \theta \int_{S_2} \vec{u} \cdot d\vec{S} \\ F'_y = \int_{S_2} \rho u \sin \theta \vec{u} \cdot d\vec{S} = \rho u \sin \theta \int_{S_2} \vec{u} \cdot d\vec{S} \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} F'_x = \rho u(-Q) + \rho u \cos \theta Q = \rho u Q(\cos \theta - 1) \\ F'_y = \rho u \sin \theta Q \end{cases} \\ \Rightarrow \boxed{\begin{cases} F_x = \rho S u^2 (1 - \cos \theta) \\ F_y = -\rho S u^2 \sin \theta \end{cases}} \end{aligned}$$

Actividad 1:

Una manguera antiincendios, de 10 cm de diámetro, da 100 l/s de agua con una presión de 1600 kPa. Al final de la manguera hay un inyector que reduce el diámetro a 2,5 cm. Estima suponiendo que ésta es la presión al llegar el agua al inyector, la fuerza que ejerce el agua sobre el mismo.

4.6.1 Sistema de Referencia No Inercial

El SR está ahora acelerado. La conservación de la cantidad de movimiento es

$$\vec{F}_T - \int_{VC} \rho \vec{a}' dV = \int_{VC} \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} dV + \oint_{SC} \rho \vec{u} \vec{u} \cdot d\vec{S}$$

donde

$$\vec{a}' = \underbrace{\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2}}_{\text{ac. lineal del SR}} + \underbrace{\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r}}_{\text{ac. angular del SR}} + \underbrace{2 \left(\vec{\Omega} \times \vec{u} \right)}_{\text{ac. de Coriolis}} + \underbrace{\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})}_{\text{ac. centrífuga}}$$

4.6.2 Factor de corrección de flujo de cantidad de movimiento

Flujo de cantidad de movimiento:

$$\Phi = \int_S \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot d\vec{S})$$

Supongamos que $\vec{u} \parallel d\vec{S}$ y $\vec{u} = u \vec{i}$ en todo S (p. e., en una tubería), de forma que $\Phi = \int_S \rho u^2 dS$

4.7. ECUACIÓN DIFERENCIAL DE LA CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

A veces es conveniente relacionarlo con la velocidad media, $\Phi = \beta \rho \bar{u}^2 S$, donde $\beta > 1$ es un factor de conversión, que se calcula mediante

$$\beta = \frac{1}{S} \int \left(\frac{u}{\bar{u}} \right)^2 dS$$

si el fluido es incompresible.

Actividad 2:

Calcular el valor de β para un perfil parabólico de velocidad.

4.7 Ecuación diferencial de la conservación de la cantidad de movimiento

La ecuación integral es, aplicando el TRR:

$$\int_{VC} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{u}) dV + \oint_{SC} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot d\vec{S}) = \vec{F}_T \quad (4.9)$$

Aplicando el Teorema de la Divergencia a la integral sobre la Superficie de Control (ver, p.e., [5], pag. 6),

$$\oint_{SC} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot d\vec{S}) = \int_{VC} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \rho \vec{u}) dV \quad (4.10)$$

obtenemos

$$\int_{VC} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{u}) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \rho \vec{u}) \right] dV = \vec{F}_T \quad (4.11)$$

Por tanto, la fuerza sobre un volumen elemental de fluido es

$$\vec{f}_T = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{u}) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \rho \vec{u}) \quad (4.12)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{u}) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \vec{u}) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v \vec{u}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w \vec{u}) \quad (4.13)$$

En forma de componentes:

$$f_{Tx} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho vu) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho wu) \quad (4.14)$$

$$f_{Ty} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v^2) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho wv) \quad (4.15)$$

$$f_{Tz} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho w) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho uw) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho vw) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w^2) \quad (4.16)$$

Podemos simplificar un poco usando

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{u}) = \vec{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u \vec{u}) = \vec{u} \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \rho u \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (\rho v \vec{u}) = \vec{u} \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \rho v \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (\rho w \vec{u}) = \vec{u} \frac{\partial \rho w}{\partial z} + \rho w \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \quad (4.20)$$

$$\Rightarrow \vec{f}_T = \vec{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} (\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{u}) + \rho (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \quad (4.21)$$

$$= \vec{u} \cdot \underbrace{\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{u} \right]}_{=0 \text{ por continuidad}} + \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \quad (4.22)$$

La **ecuación diferencial de conservación de la cantidad de movimiento** queda como

$$\boxed{\vec{f}_T = \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}} \quad (4.23)$$

Para simplificar, supongamos que

$$\vec{f}_T = \text{gravedad} + \text{fricción fluido-fluido}$$

$$\vec{f}_T = \rho \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}$$

de forma que

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \rho \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} \quad (4.24)$$

En forma de componentes:

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (4.25)$$

4.8 El tensor de tensiones para fluidos newtonianos. La ecuación de Navier-Stokes

El mayor problema de la ecuación anterior es el cálculo de $\vec{\tau}$. Éste tensor agrupa tanto los esfuerzos normales como los tangenciales.

4.8. EL TENSOR DE TENSIONES PARA FLUIDOS NEWTONIANOS. LA ECUACIÓN DE NAVIER-STOKES

Los esfuerzos normales no són la presión, ya que ésta no está definida de forma estricta para fluidos en movimiento (ver [1], capítulo 3), pero se puede definir una presión análoga a la usada en fluidostática de la forma $p = -\frac{1}{3}\tau_{ii}$

De esta forma, el tensor de tensiones es

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \underbrace{-p\mathbb{I}}_{\text{parte isótropa}} + \underbrace{\vec{\tau}'}_{\text{parte anisótropa (con traza nula)}} \\ &= \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{xx} + p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} + p & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} + p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Se puede demostrar (ver, p.e., [1] o [3]) que, para **fluidos newtonianos**, $\vec{\tau}'$ está relacionado con la parte simétrica de la divergencia de la velocidad (ver el segundo tema de cinemática) mediante

$$\vec{\tau}' = 2\mu \left[(\vec{\nabla} \vec{u})^S - \frac{1}{3} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \mathbb{I} \right] \quad (4.26)$$

donde μ es la viscosidad dinámica.

Substituyendo en la ecuación diferencial de la conservación de la cantidad de movimiento,

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \left\{ 2\mu \left[(\vec{\nabla} \vec{u})^S - \frac{1}{3} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \mathbb{I} \right] \right\} \quad (4.27)$$

, que es la **ecuación de Navier-Stokes**.

En la mayoría de los casos, se puede considerar que **μ es uniforme**, de forma que, tras algunas operaciones tensoriales,

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \mu \left[\Delta \vec{u} + \frac{1}{3} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \right] \quad (4.28)$$

con

$$\Delta \equiv \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (4.29)$$

Si el **flujo es incompresible**, $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$, y la ecuación de Navier-Stokes queda como

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{u} \quad (4.30)$$

En forma de componentes,

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (4.31)$$

Si menospreciamos los efectos de la viscosidad (flujo inviscido), tenemos la **Ecuación de Euler**

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p$$

Actividad 1:

Escribid las ecuaciones de la dinámica de un flujo laminar entre dos placas paralelas, sin presión pero con viscosidad. La velocidad tan sólo tiene componente x , y las placas son normales a la dirección y . El flujo es estacionario.

¿Como cambian las ecuaciones si no hay viscosidad (Ecuación de Euler)?

4.9 Ecuación integral de la conservación del momento cinético

Es posible aplicar la forma general de conservación de una magnitud física al momento cinético.

Recordemos que para una partícula, su momento cinético respecto de un punto O se define como

$$\vec{L}_0 = \vec{r}_0 \times m\vec{u}$$

y la física de partículas dice que la derivada de esta magnitud es igual a la suma de los momentos de las fuerzas que actúan sobre la partícula

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \sum (\vec{r}_0 \times \vec{F}) = \vec{M}_T$$

Aplicemos esto a un Volumen de Control relacionado con un fluido. Para un Sistema de Control, el momento cinético es

$$\vec{L}_0 = \int_{\text{Sist C}} (\vec{r}_0 \times \vec{u}) \rho dV \quad (4.32)$$

y, aplicando el teorema de transporte de Reynolds, con

$$\vec{F} = \vec{r}_0 \times m\vec{u}$$

y

$$\vec{f} = \vec{r}_0 \times \vec{u},$$

la variación de esta magnitud para un Volumen de Control, es

$$\vec{M}_T = \frac{d\vec{L}_0}{dt} = \int_{VC} \frac{\partial (\vec{r}_0 \times \rho\vec{u})}{\partial t} dV + \oint_{SC} (\vec{r}_0 \times \vec{u}) \rho \vec{u} \cdot d\vec{S} \quad (4.33)$$

Es importante no olvidar, igual que en la conservación de la cantidad de movimiento, el carácter vectorial de esta relación.

Omitiendo el subíndice 0, en componentes esta relación es

$$M_{Tx} = \int_{VC} \frac{\partial \rho (yw - zv)}{\partial t} dV + \oint_{SC} \rho (yw - zv) \vec{u} \cdot d\vec{S} \quad (4.34)$$

$$M_{Ty} = \int_{VC} \frac{\partial \rho (zu - xw)}{\partial t} dV + \oint_{SC} \rho (zu - xw) \vec{u} \cdot d\vec{S} \quad (4.35)$$

$$M_{Tx} = \int_{VC} \frac{\partial \rho (xv - yu)}{\partial t} dV + \oint_{SC} \rho (xv - yu) \vec{u} \cdot d\vec{S} \quad (4.36)$$

El momento total \vec{M}_T es el producido por todas las fuerzas externas, másicas y superficiales.

4.10 Cálculo de momentos en un VC

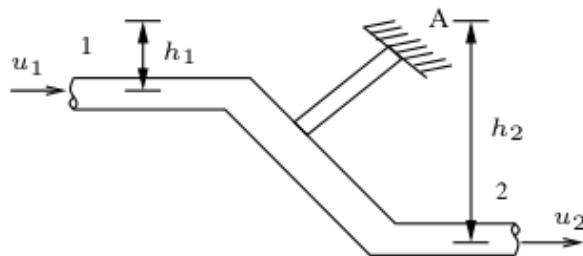
- Sistema de referencia inercial

Supongamos como caso más simple un Volumen de Control no deformable y inercial, tal que todas las propiedades del fluido (densidad, velocidad, posición, . . .) pueden ser consideradas uniformes en las secciones de entrada y salida (es decir, el flujo puede ser considerado unidimensional).

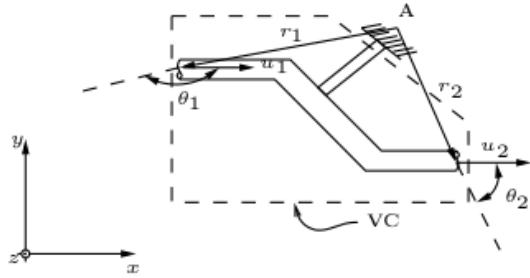
En este caso, la conservación del momento cinético se expresa como

$$\vec{M}_T = \int_{VC} \frac{\partial (\vec{r}_0 \times \rho \vec{u})}{\partial t} dV + \sum_{salidas} (\vec{r} \times \vec{u}) \dot{m}_{sal} - \sum_{entradas} (\vec{r} \times \vec{u}) \dot{m}_{ent} \quad (4.37)$$

4.10.1 Ejemplo 1:



Queremos calcular el momento sobre el punto A, usando el Volumen de Control mostrado en la siguiente figura.



Suponemos que las propiedades del fluido (velocidad, densidad, presión) son uniformes en la entrada y en la salida, que el flujo es estacionario y que el peso del fluido y la tubería son menoscupables, así como los efectos del rozamiento. Con estas hipótesis, la conservación del momento cinético es

$$\begin{aligned}\vec{M}_T &= \vec{M}_A + \left[\vec{r}_1 \times (-p_1 \vec{S}_1) \right] + \left[\vec{r}_2 \times (-p_2 \vec{S}_2) \right] \\ &= (\vec{r}_2 \times \vec{u}_2) \dot{m}_2 - (\vec{r}_1 \times \vec{u}_1) \dot{m}_1\end{aligned}$$

\vec{M}_A es el momento realizado por la tubería sobre el fluido y transmitido a través del brazo al empotramiento en A.

Dado que el flujo es unidimensional y los vectores de posición solo tienen componentes en x y en y , los momentos son en la dirección z .

Los módulos de los momentos que hacen las presiones son

$$\begin{cases} \left| \vec{r}_1 \times (-p_1 \vec{S}_1) \right| = r_1 p_1 S_1 \sin \theta_1 = p_1 S_1 h_1 \\ \left| \vec{r}_2 \times (-p_2 \vec{S}_2) \right| = -r_2 p_2 S_2 \sin \theta_2 = -p_2 S_2 h_2 \end{cases}$$

La variación de momento cinético del fluido es

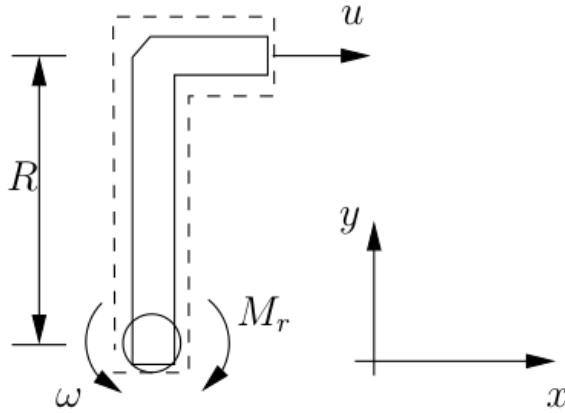
$$\begin{aligned}(\vec{r}_2 \times \vec{u}_2) \dot{m}_2 - (\vec{r}_1 \times \vec{u}_1) \dot{m}_1 &= (r_2 u_2 \sin \theta_2 - r_1 u_1 \sin \theta_1) \dot{m} \\ \dot{m} &= (h_2 u_2 - h_1 u_1)\end{aligned}$$

Combinando todo, obtenemos M_A ,

$$\begin{aligned}M_A &= (h_2 u_2 - h_1 u_1) \dot{m} - p_1 S_1 h_1 + p_2 S_2 h_2 \\ &= h_2 (u_2 \dot{m} + p_2 S_2) - h_1 (u_1 \dot{m} + p_1 S_1)\end{aligned}$$

Ejemplo 2:

Un irrigador por aspersión de radio R da vueltas con una velocidad angular $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$ y expulsa un caudal Q por una tubería de sección S . El rozamiento sobre el eje es $\vec{M}_r = -M_r \vec{k}$. Queremos encontrar en el equilibrio una expresión para ω .



Suponemos que el flujo es estacionario e incompresible, y que el peso del fluido y del irrigador son menoscupables. Despreciamos tambien los efectos de la fricción en el fluido. El brazo del irrigador no es estacionario, pero **sí** lo es el VC, de forma que la velocidad u_2 que pasa a través de la SC en la salida no es $u = \frac{Q}{S}$, sino

$$u_2 = u - \omega R$$

En el equilibrio, se cumple que

$$\vec{M}_T = -M_r \vec{k} = (\vec{r}_2 \times \vec{u}_2) \dot{m}_2 - (\vec{r}_1 \times \vec{u}_1) \dot{m}_1$$

Dado que $r_1 = 0$, tenemos $-M_r \vec{k} = (R \vec{j} \times u_2 \vec{i}) \dot{m} = -R u_2 \dot{m} \vec{k}$

$$\begin{aligned} M_r &= \rho Q R (u - \omega R) \\ \omega &= \frac{u}{R} - \frac{M_r}{\rho Q R^2} = \frac{Q}{RS} - \frac{M_r}{\rho Q R^2} \end{aligned}$$

• Sistema de referencia no inercial

La única diferencia es que hay que añadir a los momentos realizados por las fuerzas externas, los momentos de las aceleraciones ficticias,

$$\vec{M}_T - \int_{VC} \rho (\vec{r}_0 \times \vec{a}') dV = \int_{VC} \frac{\partial (\vec{r}_0 \times \rho \vec{u})}{\partial t} dV + \oint_{SC} (\vec{r}_0 \times \vec{u}) \rho \vec{u} \cdot d\vec{S}$$

donde, tal y como vimos en el tema de conservación de la cantidad de movimiento,

$$\vec{a}' = \underbrace{\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2}}_{\text{ac. lineal del SR}} + \underbrace{\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r}}_{\text{ac. angular del SR}} + \underbrace{2(\vec{\Omega} \times \vec{u})}_{\text{ac. de Coriolis}} + \underbrace{\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})}_{\text{ac. centrífuga}}$$

Actividad 1:

Resolver el ejemplo 2, pero con un VC no inercial.

Ahora el VC rota solidario con el irrigador, con una velocidad angular ω . Se debe obtener el mismo resultado.

4.11 Las turbomáquinas hidráulicas

Esta sección puede ser complementada con el capítulo 11 del libro de White [10], o el 14 del de Çengel [2].

4.11.1 La conservación del momento cinético y las turbomáquinas hidráulicas

Las turbomáquinas hidráulicas se basan en la conservación del momento cinético para transferir energía entre la máquina y el fluido. Estas máquinas son:

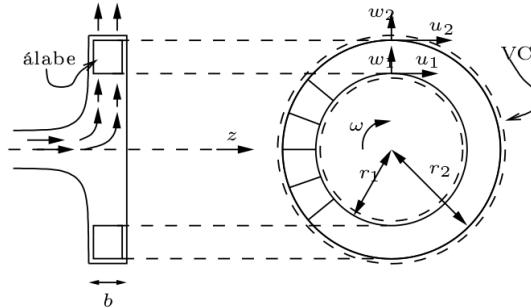
- **Bombas** (agua u otros líquidos)
- **Ventiladores** (aire)
- **Turbinas** (agua)

En los dos primeros casos, la máquina transfiere momento cinético y, por lo tanto, potencia al fluido. En el tercer caso, es el fluido el que transfiere potencia a la máquina.

En todas estas máquinas el fluido es considerado incompresible.

Si el fluido es compresible, hablamos de **Turbomáquinas térmicas** (compresores y turbinas de vapor). No serán tratadas en este curso.

Supongamos para simplificar la turbomáquina especificada en la figura. La parte móvil donde realmente se transfiere la energía recibe el nombre de **rolete**. Está formado por una serie de **álabes** que dirigen el fluido desde el interior hacia el exterior (bombas y ventiladores centrífugos) o a la inversa (turbinas). En este caso, los álabes son rectos.



El fluido entra en el VC con una velocidad $\vec{c}_1 = \vec{w}_1 + \vec{u}_1$ y sale con una velocidad $\vec{c}_2 = \vec{w}_2 + \vec{u}_2$

Para mantener este flujo, debemos ejercer un momento mecánico sobre el eje. Por la conservación del momento cinético, este momento será

$$\vec{M}_0 = \oint_{SC} \rho (\vec{r} \times \vec{c}) \cdot d\vec{S} = \rho Q [(\vec{r}_2 \times \vec{c}_2) - (\vec{r}_1 \times \vec{c}_1)]$$

$$M_0 = \rho Q (r_2 u_2 - r_1 u_1)$$

Dado que $u_1 = \omega r_1$ y $u_2 = \omega r_2$, tenemos

$$M_0 = \rho Q \omega (r_2^2 - r_1^2)$$

y la potencia requerida para bombear este fluido será

$$P = M_0 \omega = \rho Q \omega^2 (r_2^2 - r_1^2)$$

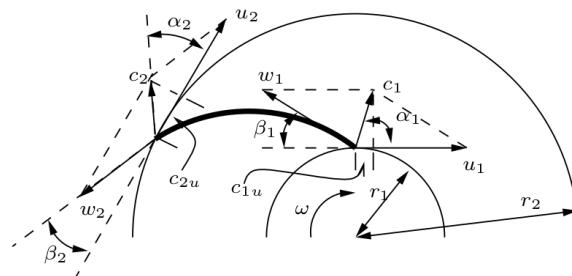
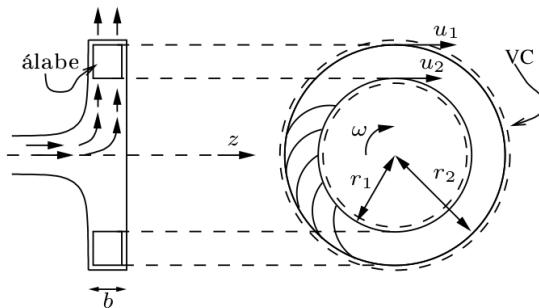
Actividad 1:

Realizar el cálculo de la potencia transmitida para un caudal de 120 l/min de agua, una velocidad angular de 1725 rpm, unos diámetros del rodete de 15 cm y 25 cm y una anchura de rodete de 5 cm (constante).

4.11.2 El triángulo de velocidades y la ecuación de Euler

Las bombas, los ventiladores y las turbinas reales son algo más complicadas. En realidad los álabes no son rectos, excepto para algunos ventiladores.

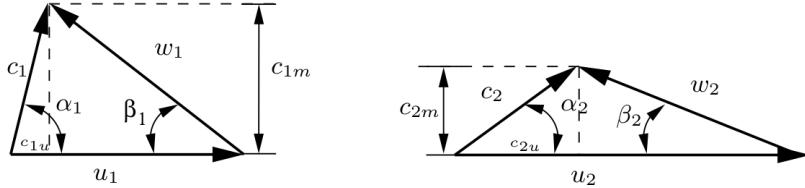
Centrándonos en el caso de las bombas centrífugas, los álabes suelen estar inclinados hacia atrás según el sentido de giro.



El momento cinético es transportado por la componente de la velocidad \vec{c} perpendicular al radio, es decir, c_{1u} en la entrada al VC y c_{2u} en la salida.

$$M_0 = \rho Q (r_2 c_{2u} - r_1 c_{1u}) \quad (4.38)$$

Para calcular c_{1u} y c_{2u} , se utilizan los **triángulos de velocidades**



$$c_{1u} = u_1 - \frac{c_{1m}}{\tan \beta_1} \quad c_{2u} = u_2 - \frac{c_{2m}}{\tan \beta_2} \quad (4.39)$$

c_{1m} y c_{2m} se calculan a partir del caudal,

$$c_{1m} = \frac{Q}{S_1} = \frac{Q}{2\pi r_1 b_1} \quad c_{2m} = \frac{Q}{S_2} = \frac{Q}{2\pi r_2 b_2} \quad (4.40)$$

donde b_1 y b_2 son al ancho del rodete en la entrada y en la salida.

La potencia necesaria para bombear el fluido es

$$P = M_0 \omega = \rho Q \omega (r_2 c_{2u} - r_1 c_{1u}) = \rho Q (u_2 c_{2u} - u_1 c_{1u}) \quad (4.41)$$

y la energía, en forma de altura de fluido, que transmite el rodete al fluido es

$$H_t = \frac{P}{\rho g Q} = \frac{1}{g} (u_2 c_{2u} - u_1 c_{1u}) \quad (4.42)$$

Esta es la **Ecuación de Euler** para Turbomáquinas, y el subíndice t indica que la expresión es teórica, ya que hay muchos aspectos que no se han considerado:

- Número finito de álabes
- Rozamiento en el flujo a través del rodete
- Perfil de velocidad no uniforme en profundidad

Actividad 2:

Repetir los cálculos de la Actividad 1, pero ahora los álabes no son rectos, sino que son tales que $\beta_1 = 35^\circ$ y $\beta_2 = 25^\circ$. Calcular la energía teórica que da el rodete, en forma de altura de fluido.

4.12 Ecuación integral de la conservación de la energía

Primera ley de la termodinámica para un sistema cerrado:

$$\frac{DE}{Dt} = \dot{Q} - \dot{W} \quad (4.43)$$

\dot{Q} : calor transferido al sistema
 \dot{W} : trabajo realizado por el sistema

Aplicando el teorema del transporte de Reynolds al sistema:

$$\frac{DE}{Dt} = \int_{VC} \frac{\partial \rho e}{\partial t} dV + \oint_{SC} \rho e \vec{u} \cdot d\vec{S} = \dot{Q} - \dot{W}$$

donde

$$e = \underbrace{\frac{1}{2} u^2}_{E. \text{ cinética}} + \underbrace{gz}_{E. \text{ potencial}} + \underbrace{\underline{u}}_{E. \text{ interna}}$$

es la energía por unidad de masa.

4.12.1 Análisis del trabajo

- trabajo realizado por los esfuerzos normales:

$$\dot{W}_n = - \int_{SC} \tau_{nn} \vec{u} \cdot d\vec{S} \approx \int_{SC} p \vec{u} \cdot d\vec{S}$$

- trabajo realizado por los esfuerzos tangenciales:

$$\dot{W}_t = - \int_{SC} \vec{u} \cdot \underbrace{(\vec{\tau}' \cdot d\vec{S})}_{\vec{\tau}' dS} = - \int_{SC} \vec{u} \cdot \vec{\tau}' dS$$

En general, se intenta escoger el VC de forma que $\vec{u} \parallel d\vec{S}$, y, dado que $\vec{\tau}'$ está en dS , $\vec{v} \perp \vec{\tau}'$, y $\vec{v} \cdot \vec{\tau}' = 0$ (flujos unidimensionales).

- realizado por otros elementos externos, como, p.e., trabajo eléctrico, o trabajo mecánico de un eje (agitador, ...). Lo expresamos como \dot{W}_e .

Para un Volumen de Control tal que $\vec{v} \parallel d\vec{S}$ en las entradas y salidas, tendremos

$$\begin{aligned} \dot{Q} - \dot{W}_e - \oint_{SC} p \vec{u} \cdot d\vec{S} &= \int_{VC} \frac{\partial \rho e}{\partial t} dV + \oint_{SC} \rho e \vec{u} \cdot d\vec{S} \\ \Rightarrow \dot{Q} - \dot{W}_e &= \int_{VC} \frac{\partial \rho e}{\partial t} dV + \oint_{SC} \rho \left(e + \frac{p}{\rho} \right) \vec{u} \cdot d\vec{S}, \end{aligned}$$

Dado que $\underline{u} + \frac{p}{\rho} = h$, la conservación de la energía queda

$$\boxed{\dot{Q} - \dot{W}_e = \int_{VC} \frac{\partial \rho e}{\partial t} dV + \oint_{SC} \rho \left(h + gz + \frac{1}{2} u^2 \right) \vec{u} \cdot d\vec{S}} \quad (4.44)$$

Actividad 1:

¿Porqué no hemos incluido el trabajo realizado por la gravedad en \dot{W} ?

Simplificaciones

- Flujo permanente :

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} = 0$$

en todo el Volumen de Control

- Propiedades constantes en las superficies de entrada (1) y de salida (2) (con flujo unidimensional):

$$\begin{aligned} \oint_{SC} \rho \left(h + gz + \frac{1}{2} u^2 \right) \vec{u} \cdot d\vec{S} &= \\ \rho_2 \left[h_2 + gz_2 + \frac{1}{2} u_2^2 \right] u_2 S_2 - \rho_1 \left[h_1 + gz_1 + \frac{1}{2} u_1^2 \right] u_1 S_1 & \\ \boxed{\dot{Q} - \dot{W}_e = \rho_2 \left[h_2 + gz_2 + \frac{1}{2} u_2^2 \right] u_2 S_2 - \rho_1 \left[h_1 + gz_1 + \frac{1}{2} u_1^2 \right] u_1 S_1} & \end{aligned}$$

4.12.2 Ecuación de Bernoulli

Flujo permanente, incompresible y no viscoso. $\dot{Q} = \dot{W} = 0$

$$\Rightarrow \rho_2 \left[h_2 + gz_2 + \frac{1}{2} u_2^2 \right] u_2 S_2 = \rho_1 \left[h_1 + gz_1 + \frac{1}{2} u_1^2 \right] u_1 S_1$$

Dado que $\rho_2 u_2 S_2 = \rho_1 u_1 S_1 = \dot{m}$, tenemos

$$h_2 + gz_2 + \frac{1}{2} u_2^2 = h_1 + gz_1 + \frac{1}{2} u_1^2$$

Si suponemos también que no hay cambios en la energía interna,

$$\frac{p_2}{\rho} + gz_2 + \frac{1}{2} u_2^2 = \frac{p_1}{\rho} + gz_1 + \frac{1}{2} u_1^2,$$

es decir,

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2} u^2 = cte \quad \text{sobre una línea de corriente} \quad (4.45)$$

Este es la conocida como **Ecuación de Bernoulli**.

Actividad 2:

Una pareja que vive en una casa en la montaña decide aprovechar el arroyo de cerca de su casa para generar la energía necesaria para su vivienda. Compran una turbina en eBay y estiman que poniendo una presa podrían conseguir una altura en la entrada de la turbina de unos 4 metros. El caudal del arroyo es de unos 800 litros por segundo. Si en la salida de la turbina la velocidad del agua será de 3,6 m/s, estimad la potencia que podrían generar, menospreciando pérdidas por rozamiento.

4.13 Ecuación diferencial de la conservación de la energía

\vec{g} : fuerzas másicas

Partiendo de la forma general de la conservación de la energía en un VC

$$\dot{Q} + \int_{VC} \vec{g} \cdot \vec{u} \rho dV + \oint_{SC} \vec{u} \cdot (\vec{\tau} \cdot d\vec{S}) = \int_{VC} \frac{\partial \rho e}{\partial t} dV + \oint_{SC} \rho e \vec{u} \cdot d\vec{S}$$

donde $\vec{\tau}$ incluye la diagonal y e no incluye el término gz

\dot{Q} puede ser debido o bien a un flujo de calor (\vec{q}) a través de la SC o bien a una producción de energía en el interior del VC (s , que tiene unidades de W/kg).

$$\dot{Q} = - \oint_{SC} \vec{q} \cdot d\vec{S} + \int_{VC} s \rho dV$$

Usando el Teorema de Gauss sobre las tres SC , queda

$$\begin{aligned} - \int_{VC} \vec{\nabla} \vec{q} dV + \int_{VC} s \rho dV + \int_{VC} \vec{g} \cdot \vec{u} \rho dV + \int_{VC} \vec{\nabla} (\vec{\tau} \cdot \vec{u}) dV &= \\ &= \int_{VC} \frac{\partial \rho e}{\partial t} dV + \int_{VC} \vec{\nabla} \cdot (\rho e \vec{u}) dV \end{aligned}$$

Si lo reescribimos en forma de componentes, usando el convenio de doble índice, y en una sola integral, obtenemos

$$\int_{VC} \left[-\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho s + \rho g_i u_i + \frac{\partial \tau_{ij} u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial e \rho u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho e}{\partial t} \right] dV = 0$$

Dado que esto ha de ser cierto para todo VC , el integrando debe ser nulo,

$$-\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho s + \rho g_i u_i + \frac{\partial \tau_{ij} u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial e \rho u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho e}{\partial t} = 0$$

Para simplificar esta expresión expandimos en primer lugar todas las derivadas, usando $e = \underline{u} + \frac{1}{2} \underline{u}^2$.

$$-\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho s + \rho g_i u_i + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} =$$

$$\begin{aligned}
&= \rho u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \frac{u^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) + \underline{u} \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \underline{u} u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho u_i \frac{\partial \underline{u}}{\partial x_i} + \\
&\quad + \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \left(\frac{u^2}{2} \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \underline{u}}{\partial t}
\end{aligned}$$

Reordenando términos, tenemos

$$\begin{aligned}
&u_i \underbrace{\left[\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i \right]}_{\rho \frac{D u_i}{D t}} + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho s = \\
&= \underbrace{\frac{\rho}{2} \left[\frac{\partial u^2}{\partial t} + u_i \frac{\partial u^2}{\partial x_i} \right]}_{= \frac{D u^2}{D t}} + \underbrace{\frac{u^2}{2} \left[\frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right]}_{= 0} + \rho \underbrace{\left[\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + v_i \frac{\partial \underline{u}}{\partial x_i} \right]}_{\frac{D \underline{u}}{D t}} + \\
&\quad + \underline{u} \underbrace{\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right]}_{\frac{D \rho}{D t}} + \underline{u} \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i}
\end{aligned}$$

... y simplificando,

$$\begin{aligned}
\tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho s &= \rho \frac{D \underline{u}}{D t} + \underline{u} \underbrace{\left[\frac{D \rho}{D t} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right]}_{= 0} \\
\boxed{\tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho s = \rho \frac{D \underline{u}}{D t}}
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Si ahora usamos la ley de Fourier

$$q_i = -k \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

y la descomposición $\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau'_{ij}$, como hicimos con la conservación de cantidad de movimiento,

$$\begin{aligned}
&-p \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta_{ij} + \underbrace{\tau'_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_{\text{función disipación } \Phi} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \rho s = \rho \frac{D \underline{u}}{D t} \\
&\rho \frac{D \underline{u}}{D t} = \rho \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + u_i \frac{\partial \underline{u}}{\partial x_i} \right) = -p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \Phi + \rho s + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Para un fluido newtoniano,

$$\Phi = \mu \sum_{ij} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2$$

4.14. DERIVACIÓN DE LA ECUACIÓN DE BERNOULLI A PARTIR DE LA ECUACIÓN DE EULER

4.14 Derivación de la Ecuación de Bernoulli a partir de la Ecuación de Euler

Integramos la Ecuación de Euler

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p$$

sobre una línea de corriente. La coordenada s es la posición sobre la línea, y, dado que la velocidad debe ser tangente a la línea de corriente, sólo hay una ecuación de Euler para el módulo de \vec{u} ,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \frac{\partial z}{\partial s}$$

Consideremos flujo estacionario,

$$u \frac{\partial u}{\partial s} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \frac{\partial z}{\partial s}$$

Si una partícula de fluido se mueve una distancia ds sobre la línea de corriente, tendremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial s} ds &= du \\ \frac{\partial p}{\partial s} ds &= dp \\ \frac{\partial z}{\partial s} ds &= dz \end{aligned}$$

de forma que

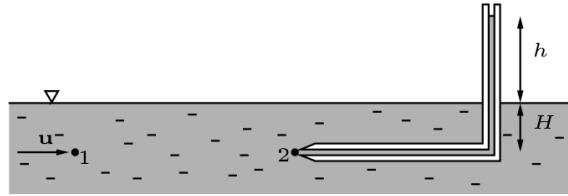
$$\begin{aligned} u du = -\frac{1}{\rho} dp - gdz &\Rightarrow u du + \frac{1}{\rho} dp + gdz = 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} u^2 + \int \frac{dp}{\rho} + gz = \text{cte} \end{aligned}$$

y, si el fluido es incompresible, obtenemos la ecuación de Bernoulli

$$\frac{1}{2} u^2 + \frac{p}{\rho} + gz = \text{cte}$$

4.15 Presión estática, dinámica y de remanso

Un **tubo de Pitot** es una sonda de diámetro muy pequeño, que se usa para medir la velocidad de un flujo. En la figura se muestra una en ángulo recto, usada para medir la velocidad en un canal.



El fluido penetra en la sonda y sube por el tubo hasta una altura h por encima del nivel del canal. Esta altura es tal que la presión que crea en la boca del tubo contrarresta la energía que lleva el fluido. El punto 2, justo delante de la boca del tubo, recibe el nombre de **punto de estancamiento o de remanso**. En este punto, la velocidad del fluido es nula. El punto 1 está lo suficientemente lejos como para considerar que no está afectado por la sonda.

Un tubo de Pitot mide la presión en el punto 2, es decir, la **presión de remanso o presión total**.

Si aplicamos Bernoulli entre los puntos 1 y 2, que están en la misma línea de corriente,

$$\rho \frac{v_1^2}{2} + p_1 = p_2 = \rho g(H + h)$$

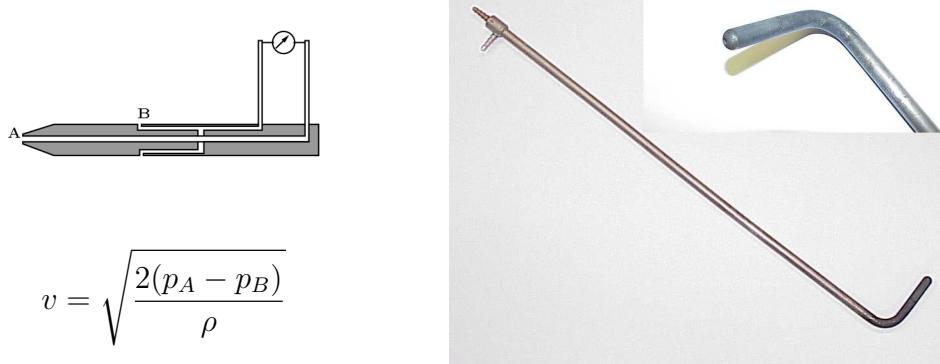
Dado que $p_1 = \rho g H$, obtenemos, de forma muy sencilla,

$$\frac{v_1^2}{2} = gh \Rightarrow v_1 = v = \sqrt{2gh}$$

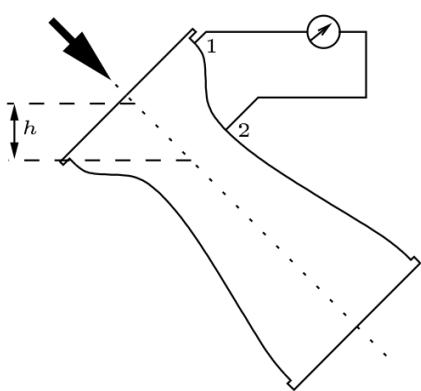
La presión total se compone de **presión estática** p y **presión dinámica** $\frac{\rho v^2}{2}$.

Con un tubo de Pitot podemos medir la presión dinámica y, por tanto, la velocidad, si conocemos la presión estática (como era el caso del canal abierto).

Si no es el caso, utilizamos un **tubo de Pitot estático o tubo de Prandtl**.



4.15.1 Tubo de Venturi



$$\frac{1}{2}\rho u_1^2 + p_1 + \rho gh = \frac{1}{2}\rho u_2^2 + p_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(u_2^2 - u_1^2) = \Delta p + \rho gh$$

$$u_1 = u_2 \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^2 = u_2 \beta^2$$

$$\frac{1}{2}\rho [1 - \beta^4] u_2^2 = \Delta p + \rho gh$$

$$\Rightarrow u_2 = \sqrt{\frac{2(\Delta p + \rho gh)}{\rho[1 - \beta^4]}}$$

El caudal es $Q = u_2 S_2$. Éste caudal es teórico. El real se calcula multiplicando por un **coeficiente de descarga** C_d que se obtiene por calibración. Normalmente $C_d \approx 0.95 \div 1.0$.

El caudal es, entonces,

$$Q_r = u_{2r} S_2 = C_d S_2 \sqrt{\frac{2(\Delta p + \rho gh)}{\rho[1 - \beta^4]}}$$

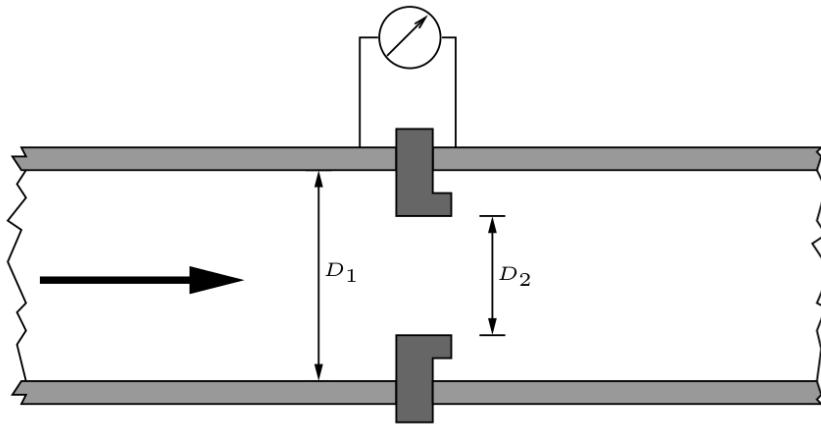
Actividad 1:

En un tubo de Venturi, de diámetros 200 mm y 160 mm, instalado horizontalmente, se mide una diferencia de presión de 25 mm de mercurio en una instalación de agua. ¿Cuál es el caudal teórico de agua que circula?

4.15.2 Diafragma

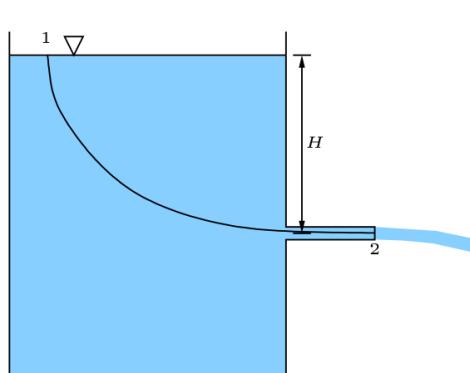
La idea del diafragma es la misma que la del tubo de Venturi, pero carece de la sección de ampliación de la sección corriente abajo. Esto hace que el dispositivo sea más barato, y el montaje más sencillo.

La ecuación para el caudal es la misma que para el tubo de Venturi, pero C_d es generalmente menor.



4.15.3 Vaciado de un depósito

Menospreciando la viscosidad,



$$\frac{1}{2}\rho u_1^2 + p_1 + \rho g H = \frac{1}{2}\rho u_2^2 + p_2.$$

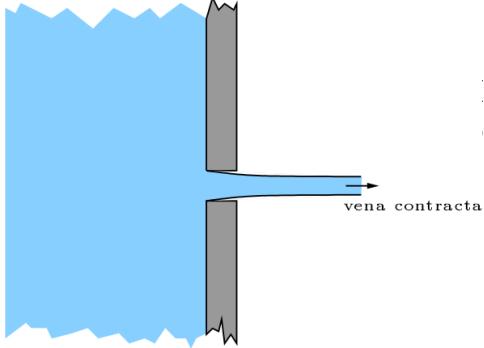
Dado que tanto el punto 1 como el 2 están abiertos, $p_1 = p_2 = 0$. Por otro lado, si suponemos que $S_1 \gg S_2$, entonces $u_1^2 \approx 0$,

$$\rho g H = \frac{1}{2}\rho u_2^2 \Rightarrow \underbrace{u_2 = \sqrt{2gH}}_{\text{Ec. de Torricelli}}$$

y

$$Q_t = u_2 S_2 \sqrt{2gH} \quad (\text{teórico})$$

Si la descarga se realiza a través de un orificio, se produce una vena contracta de forma que $S_c \lesssim S_2$.



$$S_c = C_c S_2$$

$$C_c : \text{Coeficiente de contracción} \lesssim 1.0$$

Por otro lado, debido al rozamiento, la velocidad disminuye,

$$u_c = C_v u_2$$

$$C_v : \text{Coeficiente de velocidad} \lesssim 1.0$$

$$\begin{aligned} Q &= u_c S_c = C_c C_v S_2 \sqrt{2gH} \\ &= C_d S_2 \sqrt{2gH} \end{aligned}$$

$$C_d : \text{Coeficiente de descarga}$$

Ejemplo: Cálculo de tiempo de vaciado de un depósito.

$$Q = C_d S_2 \sqrt{\frac{2gH}{1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2}} = \frac{C_d S_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2}} \sqrt{2gH}$$

$$u_1 = \frac{Q}{S_1} = \frac{C_d \frac{S_2}{S_1}}{\sqrt{1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2}} \sqrt{2gH} = \underbrace{\frac{C_d \sqrt{2g}}{\sqrt{\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1}}}_{\alpha} \sqrt{H}$$

$$u_1 = -\frac{dH}{dt} = \alpha H^{1/2} \Rightarrow \frac{dH}{H^{1/2}} = -\alpha dt \Rightarrow \int_{H_0}^0 H^{-1/2} dH = -\alpha \int_0^t dt$$

$$2 H^{1/2} \Big|_{H_0}^0 = -\alpha t \Rightarrow t = \frac{2}{\alpha} \sqrt{H} = \frac{2 \sqrt{\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1}}{C_d \sqrt{2g}} \sqrt{H}$$

Actividad 2:

Estima el tiempo que tarda en vaciarse una botella de agua de 1.5 litros puesta boca abajo. ¿Porqué en realidad tarda mucho más?

Actividad 3:

¿Cómo se modifican los cálculos si el depósito no es cilíndrico (p.e., un embudo)?

Chapter 5

Flujo con viscosidad dominante

- Si el término de fuerzas viscosas $\mu \Delta \vec{u}$ no es menospreciable en la ecuación de Navier-Stokes, ésta puede ser complicada de resolver.
- No existe una solución general de la ecuación de Navier-Stokes.
- La razón principal es la no-linealidad impuesta por la aceleración convectiva en la interpretación euleriana del flujo.
- Solo en el caso de geometrías muy sencillas y flujo lento es posible encontrar una solución analítica. En estas configuraciones de flujo, se produce de una forma u otra una *linealización* de las ecuaciones de Navier-Stokes.
- A parte de estos flujos sencillos, existen multitud de resoluciones numéricas con geometrías más complicadas y multitud de datos experimentales.
- En este tema de flujo viscoso vamos a estudiar algunos de estos flujos sencillos que pueden ser analizados de forma analítica. Estos flujos están caracterizados por un número de Reynolds bajo.
- Todos los flujos estudiados serán considerados incompresibles, y no tendremos en cuenta otros efectos que pudiesen causar una posible variación de la densidad. Es decir, no consideraremos las ecuaciones de balance de la energía.

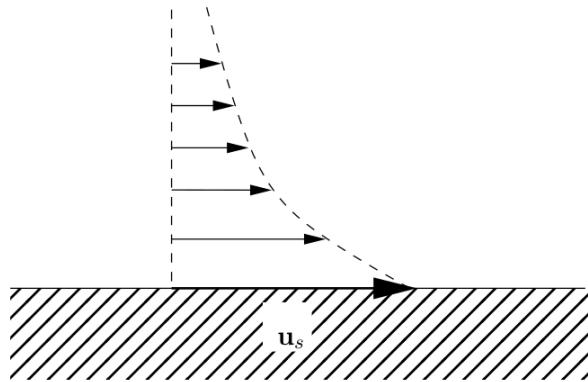
5.1 Ecuaciones y condiciones de contorno

Los flujos de fluidos ideales se caracterizan por que, dado que no hay viscosidad, no existe la condición de *no deslizamiento* en contacto con paredes sólidas.

Los flujos de fluidos viscosos han de cumplir esta condición de contorno, de forma que

$$\vec{u} = \vec{u}_s$$

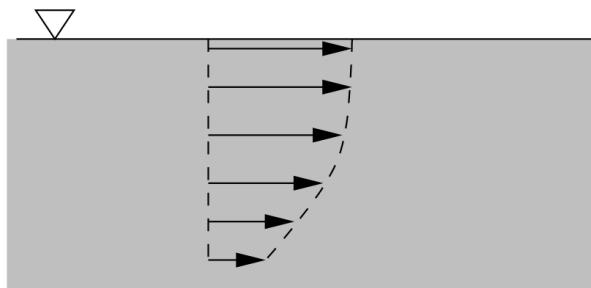
en los puntos en contacto con un sólido, donde \vec{u}_s es la velocidad del sólido. A este tipo de condiciones de contorno se le denominan [condiciones de contorno de Dirichlet](#)



Otra condición que se ha de cumplir en ciertos puntos es la de esfuerzo tangencial nulo.

$$\tau_{nt} = \mu \frac{\partial u_t}{\partial n} = 0.$$

Esta es una **condición de contorno de Neumann**, y se cumple, por ejemplo, en planos de simetría y en superficies libres, cuando el efecto de la tensión superficial no es importante.



Todos estos flujos están descritos por :

- La ecuación de continuidad

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (5.1)$$

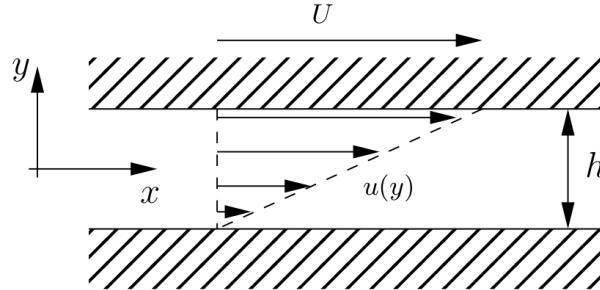
- Las ecuaciones de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{g} + \frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{u} \quad (5.2)$$

- En muchas ocasiones es interesante, o incluso imprescindible, utilizar coordenadas polares en flujos bidimensionales y cilíndricas o esféricas en flujos tridimensionales.
- Las coordenadas esféricas no serán usadas en el presente curso. Las ecuaciones de continuidad y Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas serán vistas en la siguiente sesión.

5.2 Flujo entre placas planas paralelas

5.2.1 Flujo entre placas planas paralelas con movimiento relativo



Si las placas son muy grandes en comparación con h , el flujo sólo tiene dirección x , $v = w = 0$. El flujo es bidimensional,

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0 \quad (5.3)$$

Consideraremos que no hay ningún gradiente de presión, el flujo es estacionario, y no afecta la gravedad.

La ecuación de continuidad es

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (5.4)$$

, es decir, la velocidad u sólo puede depender de y .

Sólo hay una ecuación de Navier-Stokes, la correspondiente a u ,

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{=0 \text{ (est.)}} + \underbrace{u \frac{\partial u}{\partial x}}_{u(y)} + \underbrace{v \frac{\partial u}{\partial y}}_{v=0} = - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}}_{\text{no } \nabla p} + \underbrace{\frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)}_{u(y)=0}$$

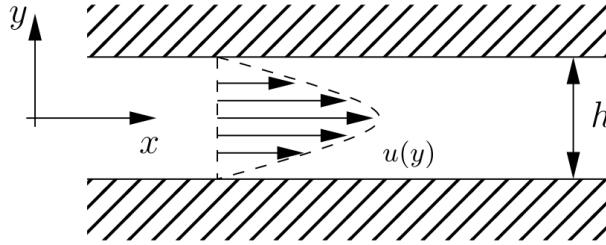
que se reduce a

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = 0 \Rightarrow u = C_1 y + C_2.$$

Aplicando las condiciones de contorno $u = U$ en $y = \frac{h}{2}$ y $u = 0$ en $y = -\frac{h}{2}$, se obtiene

$$\left. \begin{array}{l} U = C_1 \left(\frac{h}{2} \right) + C_2 \\ 0 = C_1 \left(-\frac{h}{2} \right) + C_2 \end{array} \right\} \Rightarrow C_1 = \frac{U}{h}; C_2 = \frac{U}{2} \Rightarrow \boxed{u = \frac{U}{h} y + \frac{U}{2}}$$

5.2.2 Flujo entre placas planas fijas con gradiente de presión



De nuevo el flujo es bidimensional, y u sólo depende de y .

La ecuación de Navier-Stokes para u se reduce a

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{\partial p}{\partial x} \quad (5.5)$$

Por otro lado, las ecuaciones de Navier-Stokes para las direcciones y y z llevan a $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0$. Es decir, $p = p(x)$.

Esto implica que

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{dp}{dx} = \text{const} < 0$$

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2 + C_1 y + C_2$$

Las condiciones de contorno son

$$\begin{aligned} u &= 0 \quad \text{en} \quad y = \frac{h}{2} \\ u &= 0 \quad \text{en} \quad y = -\frac{h}{2} \end{aligned}$$

que llevan a

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left(\frac{h}{2}\right)^2 + C_1 \left(\frac{h}{2}\right) + C_2 \\ 0 &= \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left(-\frac{h}{2}\right)^2 + C_1 \left(-\frac{h}{2}\right) + C_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow C_1 = 0; C_2 = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left[y^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 \right]$$

(5.6)

Recordemos que la parte anisotrópica del tensor de tensiones (no se considera la presión) es de la forma

$$\vec{\tau}' = 2\mu \left(\vec{\nabla} \vec{u} \right)^S = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \approx \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

5.3. ECUACIONES DE CONTINUIDAD Y NAVIER-STOKES EN COORDENADAS CILÍNDRICAS

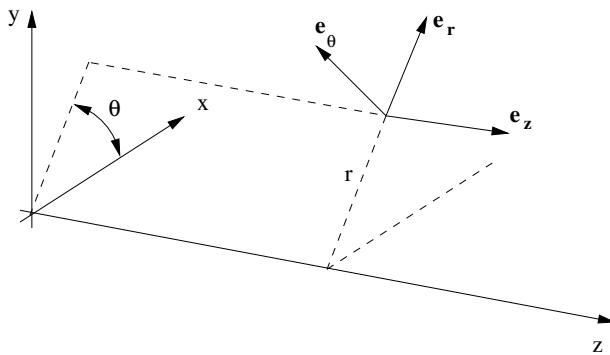
Actividad 1:

Calcular la velocidad máxima del flujo y el esfuerzo tangencial en las placas.

Actividad 2:

Calcular el perfil de velocidades en el caso de dos placas con movimiento relativo y gradiente de presiones.

5.3 Ecuaciones de continuidad y Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas



Los operadores diferenciales son definidos de nuevo según :

ϕ : escalar ; \vec{A} : vector

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{\nabla} &= A_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} A_\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + A_z \frac{\partial}{\partial z} \\ \Delta = \vec{\nabla}^2 &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\end{aligned}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial\theta} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_z$$

El tensor divergencia, en coordenadas cilíndricas, es

$$\nabla \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_r}{\partial r} & \frac{\partial A_\theta}{\partial r} & \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta} - \frac{A_\theta}{r}\right) & \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{A_r}{r}\right) & \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\theta} \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} & \frac{\partial A_\theta}{\partial z} & \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones en coordenadas cilíndricas son:

Continuidad :

$$\boxed{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0} \quad (5.7)$$

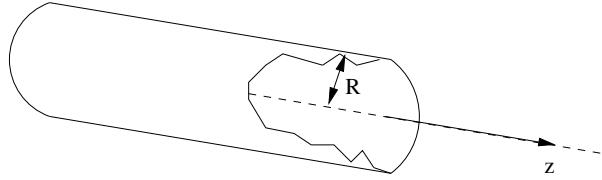
Navier-Stokes :

$$\boxed{\begin{aligned} r : & \frac{\partial u_r}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) u_r - \frac{1}{r} u_\theta^2 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + g_r + \frac{\mu}{\rho} (\Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}) \\ \theta : & \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) u_\theta + \frac{1}{r} u_r u_\theta = -\frac{1}{r \rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + g_\theta + \frac{\mu}{\rho} (\Delta u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}) \\ z : & \frac{\partial u_z}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) u_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g_z + \frac{\mu}{\rho} \Delta u_z \end{aligned}} \quad (5.8)$$

5.4 Flujo de Hagen-Poiseuille

Consideramos el caso de un flujo en el interior de una tubería infinitamente larga, de forma que la velocidad sólo tiene componente en la dirección del eje.

Utilizamos coordenadas cilíndricas con el eje z en el eje de la tubería.



$$u_\theta = u_r = 0 \quad (5.9)$$

Simetría cilíndrica $\rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} = 0$.

Menospreciamos la gravedad y consideramos flujo estacionario.

Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow u_z = u_z(r) \quad (5.10)$$

La ecuación de Navier-Stokes para u_z en coordenadas cilíndricas es

$$\begin{aligned} & \underbrace{\frac{\partial u_z}{\partial t}}_{=0 \text{ (estac.)}} + \underbrace{u_r \frac{\partial u_z}{\partial r}}_{=0 \text{ } u_r=0} + \underbrace{u_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}}_{=0 \text{ } u_\theta=0} + \underbrace{u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}}_{=0 \text{ } u_z=u_z(r)} = \\ & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2}}_{=0 \text{ } u_z=u_z(r)} + \underbrace{\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}}_{=0 \text{ } u_z=u_z(r)} \right] \\ & \Rightarrow \frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_z}{dr} \right) = \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad (5.11)$$

La ecuación de Navier-Stokes para u_r da la condición $\frac{\partial p}{\partial r} = 0$, de forma que $p = p(z)$

$$\frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_z}{dr} \right) = \frac{dp}{dz} = \text{const} < 0$$

Integrando dos veces esta ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_z}{dr} \right) &= \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} r \Rightarrow r \frac{du_z}{dr} = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dz} r^2 + C_1 \\ \frac{du_z}{dr} &= \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dz} r + \frac{C_1}{r} \Rightarrow u_z = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} r^2 + C_1 \ln r + C_2 \end{aligned}$$

Dado que $\ln 0$ es una singularidad y en $r = 0$ la velocidad del flujo ha de ser finita, se tiene que cumplir que $C_1 = 0$.

La condición de contorno $u_z = 0$ en $r = R$, lleva a

$$C_2 = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} R^2$$

El flujo de Hagen-Poiseuille es, entonces,

$$u_z = \left(-\frac{dp}{dz} \right) \frac{1}{4\mu} (R^2 - r^2) \quad (5.12)$$

Actividad 4:

Calcular el caudal y el esfuerzo tangencial en las paredes de la tubería.

5.5 Flujo entre dos cilindros rotatorios concéntricos

Consideramos el flujo entre dos cilindros concéntricos infinitamente largos, de forma que no hay flujo axial ($u_z = 0$, $\frac{\partial}{\partial z} = 0$) ni efectos de final de tubo.

Los radios de los cilindros en contacto con el fluido son R_1 para el interior y R_2 para el exterior. El cilindro exterior está fijo, mientras que el interior rota con una velocidad Ω_1 . Hay simetría cilíndrica, de forma que no hay variación de la velocidad con θ .

La ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas es

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}}_{\stackrel{\theta=0}{\partial \theta=0}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{d(ru_r)}{dr} = 0 \Rightarrow ru_r = \text{const.}$$

Dado que $u_r = 0$ en R_1 y en R_2 , se deduce que $u_r = 0$ en todo el flujo, y la velocidad es siempre tangencial, $u_\theta = u_\theta(r)$.

La ecuación de Navier-Stokes para u_θ es, considerando flujo estacionario y que no hay gravedad,

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) u_\theta + \underbrace{\frac{1}{r} u_r u_\theta}_{\substack{=0 \\ u_r=0}} = - \underbrace{\frac{1}{r\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta}}_{\substack{=0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta}=0}} + \frac{\mu}{\rho} \left(\Delta u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \underbrace{\frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}}_{\substack{=0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta}=0}} \right)$$

La aceleración convectiva también se anula,

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) u_\theta = \underbrace{u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r}}_{\substack{=0 \\ u_r=0}} + \underbrace{\frac{1}{r} u_\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}}_{\substack{=0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta}=0}} + \underbrace{u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z}}_{\substack{=0 \\ u_z=0}} = 0$$

y la ecuación se reduce a $\Delta u_\theta = \frac{u_\theta}{r^2}$.

$$\Delta u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) + \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2}}_{\substack{=0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta}=0}} + \underbrace{\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}}_{\substack{=0 \\ \frac{\partial}{\partial z}=0}} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_\theta}{dr} \right) = \frac{u_\theta}{r^2}$$

La solución general de esta ecuación diferencial ordinaria es

$$u_\theta = C_1 r + \frac{C_2}{r}$$

que, con las condiciones de contorno,

$$\left. \begin{array}{l} r = R_1 \rightarrow u_\theta = \Omega_1 R_1 \rightarrow \Omega_1 R_1 = C_1 R_1 + \frac{C_2}{R_1} \\ r = R_2 \rightarrow u_\theta = 0 \rightarrow 0 = C_1 R_2 + \frac{C_2}{R_2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_1 = -\frac{\Omega_1}{\frac{R_2^2}{R_1^2} - 1} \\ C_2 = \frac{\Omega_1 R_2^2}{\frac{R_2^2}{R_1^2} - 1} \end{array} \right.$$

$$u_\theta = \frac{\Omega_1}{\left(\frac{R_2^2}{R_1^2} - 1\right)} \left(\frac{R_2^2}{r} - r \right) \quad R_1 \leq r \leq R_2$$

Actividad 5:

Demostrar que el esfuerzo tangencial en el caso de $u_\theta(r)$ es

$$\tau_{\theta r} = -2\mu \frac{C_2}{r^2}$$

Actividad 6:

Cilindro interior: $R_1 = 10\text{ cm}$. Exterior: $R_2 = 11\text{ cm}$. Altura: $h = 30\text{ cm}$. Velocidad angular: $\Omega = 1200\text{ rpm}$. El fluido tiene una viscosidad $\mu = 0.2\text{ Pa s}$. Calcular el momento del rozamiento en el cilindro interior y comparar con el caso en que suponíamos una distribución lineal de velocidades.

Chapter 6

Análisis Dimensional y Teoría de Modelos

En experimentos normalmente el número de variables que intervienen es muy grande. El análisis dimensional permite reducir el número de variables mediante el cálculo de **grupos adimensionales**.

El análisis de los datos experimentales es así mucho más claro y sencillo.

El ejemplo más típico es el de arrastre de un flujo sobre una esfera. Si diseñamos un experimento para estudiar éste arrastre en función de las variables físicas, debemos tener en cuenta las variaciones de

- el diámetro de la esfera, d
- la velocidad del flujo, v
- la densidad del fluido, ρ
- la viscosidad del fluido, μ

Ésto representan muchos experimentos.

Sin embargo, el Análisis Dimensional permite demostrar que sólo hay que considerar dos variable o grupos adimensionales. Es usual usar los grupos

$$\frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho v^2 S}$$

y

$$\frac{\rho v d}{\mu}$$

Esto nos permite hacer experimentos variando únicamente la velocidad v , sin preocuparnos por la densidad, diámetro, viscosidad, ... Dos experimentos con la misma relación $\frac{\rho v d}{\mu}$ nos darán como resultado la misma relación $\frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho v^2 S}$.

Ésto es útil para experimentar sobre modelos a escala de un diseño, sin fabricar el prototipo, que puede ser caro. El modelo ha de ser **geométricamente similar** al prototipo. Si la relación $\frac{\rho v d}{\mu}$ es también igual se dicen que el modelo y el prototipo son **dinámicamente similares**.

Ejemplo:

Se mide la fuerza de arrastre que actúa sobre una esfera de diámetro $d = 0.08 \text{ m}$ con una velocidad $v = 2 \text{ m/s}$ en agua a nivel del mar. ¿Cuál debería ser la velocidad para una esfera de diámetro $d = 0.04 \text{ m}$ en aire esténdar a nivel del mar para que los experimentos sean dinámicamente similares? ¿Y cuál sería la fuerza medida?

La densidad del agua es $\rho_1 = 1000 \text{ Kg/m}^3$, y la viscosidad es $\mu_1 = 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, de forma que

$$\frac{\rho_1 v_1 d_1}{\mu_1} = \frac{(1000 \text{ Kg/m}^3)(2 \text{ m/s})(0.08 \text{ m})}{10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}} = 1.6 \times 10^5$$

y

$$\frac{F_{D1}}{\frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 S_1} = \frac{5 \text{ N}}{0.5(1000 \text{ Kg/m}^3)(2 \text{ m/s})^2 \pi (0.04 \text{ m})^2} = 0.497$$

La densidad y la viscosidad del aire a $20^\circ C$ son, respectivamente, $\rho_2 = 1.2 \text{ Kg/m}^3$ y $\mu_2 = 1.8 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, de forma que, si han de ser dinámicamente similares,

$$\frac{\rho_2 v_2 d_2}{\mu_2} = \frac{(1.2 \text{ Kg/m}^3)v_2(1.5 \text{ m})}{1.8 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}} = 1.6 \times 10^5$$

$$\Rightarrow v_2 = 1.6 \text{ m/s}$$

y la fuerza medida será

$$\frac{F_{D2}}{\frac{1}{2}\rho_2 v_2^2 S_2} = \frac{F_{D2}}{0.5(1.2 \text{ Kg/m}^3)(1.6 \text{ m/s})^2 \pi (0.75 \text{ m})^2} = 0.497$$

$$\Rightarrow F_{D2} = 1.35 \text{ N}$$

6.1 El Teorema Π de Buckingham

Los productos adimensionales de variables físicas, como $\frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho v^2 S}$ y $\frac{\rho v d}{\mu}$ reciben el nombre de **grupos adimensionales**, o **grupos Π**. Muchas veces reciben nombre propios. A $\frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho v^2 S}$ se le denota como C_D , y es el coeficiente de arrastre. $\frac{\rho v d}{\mu}$ es Re , el número de Reynolds.

Veamos cómo se calculan de forma general estos grupos:

Las variables físicas vienen definidas en un conjunto de dimensiones básicas. Estas dimensiones suelen ser la masa (M), la longitud (L) y el tiempo (T).

En problemas con variables termodinámicas podemos también tener la temperatura (Θ), pero en general el número de dimensiones básicas será 3.

En las siguientes tablas se listan algunas variables físicas importantes, sus dimensiones y sus unidades en S.I.

| Magnitud | Símbolo | Dimensiones | Sistema Internacional |
|---------------------------|---------------|--------------------------|-----------------------|
| longitud | l | L | m |
| tiempo | t | T | s |
| masa | m | M | Kg |
| fuerza | F | $M L T^{-2}$ | N |
| velocidad | v | $L T^{-1}$ | m/s |
| aceleración | a | $L T^{-2}$ | m/s^2 |
| energía | E | $M L^2 T^{-2}$ | J |
| potencia | P (o N) | $M L^2 T^{-3}$ | W |
| área | A (o S) | L^2 | m^2 |
| volumen | V | L^3 | m^3 |
| caudal | Q | $L^3 T^{-1}$ | m^3/s |
| flujo másico | \dot{m} | $M T^{-1}$ | Kg/s |
| presión | p | $M L^{-1} T^{-2}$ | Pa |
| gravedad | g | $L T^{-2}$ | m/s^2 |
| densidad | ρ | $M L^{-3}$ | Kg/m^3 |
| peso específico | γ | $M L^{-2} T^{-2}$ | N/m^3 |
| viscosidad dinámica | μ | $M L^{-1} T^{-1}$ | $Kg/m s$ (o Pas) |
| viscosidad cinemática | ν | $L^2 T^{-1}$ | m^2/s |
| velocidad del sonido | c | $L T^{-1}$ | m/s |
| tensión superficial | σ | $M T^{-2}$ | N/m |
| módulo de compresibilidad | B | $M L^{-1} T^{-2}$ | Pa |
| temperatura | T | Θ | K |
| conductividad térmica | k | $M L T^{-3} \Theta^{-1}$ | W/m K |
| difusividad térmica | α | $L^2 T^{-1}$ | m^2/s |
| difusividad | \mathcal{D} | $L^2 T^{-1}$ | m^2/s |
| capacidad calorífica | c_p | $L^2 T^{-2} \Theta^{-1}$ | J/Kg K |

El Teorema II de Buckingham garantiza que, [dado un cierto fenómeno descrito por \$n\$ variables físicas, éste número puede reducirse a una relación de \$k\$ grupos adimensionales](#),

donde $j = n - k$ es igual al número de variables que no pueden formar un Π y siempre es igual o menor que el número de dimensiones que describen las variables.

Para formar los Π 's, seleccionamos j variables independientes (en el sentido de que no pueden formar ellas solas un Π), y escribimos cada grupo adimensional añadiendo al producto general de potencias de estas variables cada una del resto de las variables, que puede estar elevada a una cierta potencia también. Cada una de estas combinaciones ha de ser adimensional. De esta condición se obtienen las potencias adecuadas de las variables.

Parece un poco complicado, pero en realidad es muy simple y tan sólo hace falta un poco de práctica. Veamos un ejemplo.

Ejemplo:

En el arrastre de la bola, sabemos que intervienen:

- la fuerza de arrastre F_D , que es la variable dependiente, y que tiene unidades N , es decir, MLT^{-2}

- el diámetro de la bola, d , con unidades L
- la velocidad del flujo v , con LT^{-1}
- la densidad del fluido ρ , con ML^{-3}
- la viscosidad del fluido μ , con $ML^{-1}T^{-1}$

j será como mucho 3, debido a que no tenemos la temperatura Θ . Después de estudiar el sistema, vemos que ρ , v y d sería una buena selección, ya que no pueden formar un Π , y son bastante generales. Evidentemente, hay múltiples posibilidades correctas. Habrán entonces $5 - 3 = 2$ grupos adimensionales.

El primer Π lo formaremos como

$$\Pi_1 = \rho^a v^b d^c F_D$$

Como ha de ser adimensional, las potencias a , b y c han de ser tales que se anulen las potencias de cada dimensión, es decir,

$$(ML^{-3})^a (LT^{-1})^b (L)^c (MLT^{-2}) = M^0 L^0 T^0,$$

y de aquí obtenemos tres ecuaciones para las potencias,

$$\begin{cases} a + 1 &= 0 \\ -3a + b + c + 1 &= 0 \\ -b - 2 &= 0 \end{cases}$$

cuya solución es $(a = -1, b = -2, c = -2)$.

Por tanto,

$$\Pi_1 = \rho^{-1} v^{-2} d^{-2} F_D = \frac{F_D}{\rho v^2 d^2}.$$

El coeficiente de arrastre C_D es proporcional a este Π .

El segundo Π lo calculamos añadiendo la viscosidad al producto de las tres potencias de las variables, $\Pi_2 = \rho^a v^b d^c \mu$, y la relación para obtener las potencias será

$$(ML^{-3})^a (LT^{-1})^b (L)^c (ML^{-1}T^{-1}) = M^0 L^0 T^0,$$

que dará lugar al sistema

$$\begin{cases} a + 1 &= 0 \\ -3a + b + c - 1 &= 0 \\ -b - 1 &= 0 \end{cases}$$

cuya solución es $a = b = c = -1$.

Por tanto,

$$\Pi_2 = \rho^{-1} v^{-1} d^{-1} \mu = \frac{\mu}{\rho v d}.$$

El número de Reynolds es el inverso de este Π .

Actividad 1:

La potencia consumida por una bomba es función del caudal Q , el tamaño de la bomba D (es el diámetro externo del rolete, por ejemplo), la velocidad angular ω , la densidad del fluido ρ y su viscosidad μ . Escribir como relación adimensional.

6.2 Números adimensionales básicos

Existe una serie de grupos adimensionales clásicos en Mecánica de Fluidos. Algunos son más importantes que otros. En total existen cientos, pero en la siguiente tabla sólo vamos a indicar los más usados.

| | | |
|--|---|--|
| número de Reynolds | $Re = \frac{\rho u L}{\mu}$ | El más importante. Interviene siempre o casi siempre |
| número de Euler | $Eu = \frac{\Delta p}{\rho u^2}$ | Si Δp está relacionada con la presión de vapor, éste número es el coeficiente de cavitación |
| número de Froude | $Fr = \frac{u^2}{gL}$ | Flujos con superficie libre |
| número de Weber | $We = \frac{\rho u^2 L}{\sigma}$ | Flujos con superficie libre. σ es la tensión superficial |
| número de Mach | $Ma = \frac{u}{c}$ | Flujos compresibles. c es la velocidad del sonido |
| número de Rossby | $Ro = \frac{u}{\Omega L}$ | Flujos geofísicos. Ω es la velocidad angular de la Tierra |
| coeficiente adiabático | $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ | Flujos compresibles |
| número de Prandtl | $Pr = \frac{\mu c_p}{k}$ | Convección térmica |
| número de Ecker | $Ec = \frac{u^2}{c_p T_0}$ | Disipación térmica |
| número de Strouhal | $St = \frac{\omega L}{u}$ | Flujos oscilatorios |
| rugosidad relativa y coeficiente de fricción | $\frac{\epsilon}{D}, \quad f = \frac{\Delta h_T}{\frac{L}{D} \frac{u^2}{2g}}$ | Flujos en tuberías |
| coeficientes de presión | $C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho u^2}$ | Aerodinámica |
| coef. de sustentación | $C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2} \rho u^2 S}$ | Aerodinámica |
| coef. de arrastre | $C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho u^2 S}$ | Aerodinámica |

6.3 Adimensionalización de ecuaciones

En muchas ocasiones, es interesante escribir las ecuaciones básicas en forma adimensional. De esta forma se están describiendo fenómenos con independencia de la magnitud de las escalas, y se puede apreciar mejor la relación entre términos.

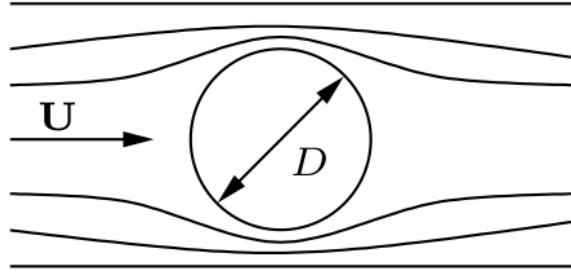
Ejemplo:

Como ejemplo, vamos a adimensionalizar la ecuación de Navier-Stokes para flujo incomprimible (ver sesión "Conservación de cantidad de movimiento II") para el estudio típico de una esfera de diámetro D en una corriente de un flujo con velocidad V de un fluido de densidad ρ y viscosidad μ ,

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{u}$$

En el problema que se está estudiando tenemos una velocidad de referencia U y una longitud de referencia D . La velocidad y la posición pueden ser escritas de forma adimensional tomando estas magnitudes como referencia

$$\vec{u}^* = \frac{\vec{u}}{U} ; \quad \vec{r}^* = \frac{\vec{r}}{D}$$



No olvidemos que estas relaciones son vectoriales,

$$\begin{cases} u_x^* = \frac{u_x}{U} \\ u_y^* = \frac{u_y}{U} \\ u_z^* = \frac{u_z}{U} \end{cases} ; \quad \begin{cases} x^* = \frac{x}{D} \\ y^* = \frac{y}{D} \\ z^* = \frac{z}{D} \end{cases}$$

El tiempo adimensional se puede calcular usando como referencia D/V , que tiene dimensiones de tiempo, $t^* = \frac{t}{\frac{D}{V}} = \frac{tU}{D}$,

la gravedad adimensional es $\vec{g}^* = \frac{\vec{g}}{\frac{U^2}{D}} = \frac{D\vec{g}}{U^2}$,

y la presión adimensional es $p^* = \frac{p}{\rho U^2}$.

Por otro lado, hay que tener en cuenta que las derivadas también son adimensionales,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial (Dx^*)} = \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial x^*} \Rightarrow \begin{cases} \vec{\nabla} = \frac{1}{D} \vec{\nabla}^* \\ \Delta = \frac{1}{D^2} \Delta^* \end{cases}$$

Adimensionalización de los términos de la Ecuación de Navier-Stokes:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} &= \frac{\partial (U \vec{u}^*)}{\partial (\frac{D}{U} t^*)} = \frac{U^2}{D} \frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} \\ (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} &= \left((U \vec{u}^*) \cdot \frac{1}{D} \vec{\nabla}^* \right) (U \vec{u}^*) = \frac{U^2}{D} \left(\vec{u}^* \cdot \vec{\nabla}^* \right) \vec{u}^* \\ \vec{g} &= \frac{U^2}{D} \vec{g}^* \\ \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{D} \vec{\nabla}^* \right) (\rho U^2 p^*) = \frac{U^2}{D} \vec{\nabla}^* p^* \\ \frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{u} &= \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{1}{D^2} \Delta^* \right) (U \vec{u}^*) = \frac{\mu U}{\rho D^2} \Delta^* \vec{u}^*\end{aligned}$$

Ecuación de Navier-Stokes adimensional:

$$\frac{U^2}{D} \frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} + \frac{U^2}{D} \left(\vec{u}^* \cdot \vec{\nabla}^* \right) \vec{u}^* = \frac{U^2}{D} \vec{g}^* - \frac{U^2}{D} \vec{\nabla}^* p^* + \frac{\mu U}{\rho D^2} \Delta^* \vec{u}^*$$

Dividiendo todos los términos por la aceleración de referencia $\frac{U^2}{D}$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} + \left(\vec{u}^* \cdot \vec{\nabla}^* \right) \vec{u}^* &= \vec{g}^* - \vec{\nabla}^* p^* + \frac{\mu}{\rho D U} \Delta^* \vec{u}^* \\ \frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} + \left(\vec{u}^* \cdot \vec{\nabla}^* \right) \vec{u}^* &= \vec{g}^* - \vec{\nabla}^* p^* + \frac{1}{\text{Re}} \Delta^* \vec{u}^*\end{aligned}$$

Actividad 1:

Consideremos la ecuación diferencial de conservación de la energía con las siguientes simplificaciones:

- Sin fuentes puntuales de calor puntuales ($s = 0$)
- Flujo de calor únicamente debido a los gradientes de temperatura
- Conductividad térmica uniforme
- Flujo newtoniano

Esta ecuación es

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \left(\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \underline{u} = -\frac{1}{\rho} p \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right) + \frac{1}{\rho} \Phi + \frac{1}{\rho} k \Delta T$$

con

$$\Phi = \mu \sum_{ij} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2$$

Para simplificar más aún, supongamos que el fluido es incompresible, de forma que $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$,

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \underline{u} = \frac{1}{\rho} \Phi + \frac{1}{\rho} k \Delta T$$

Para adimensionalizar esta expresión, conviene utilizar estos valores de referencia:

- Temperatura: T_0
- Energía interna: $c_p T_0$
- Velocidad: U
- Tiempo: $\frac{k}{\rho c_p^2 T_0}$ (comprobar que tiene dimensiones de tiempo)
- Espacio: $\frac{kU}{\rho c_p^2 T_0}$

Con estas referencias, adimensionalizar la ecuación de conservación de la energía y identificar los números adimensionales involucrados.

6.4 Similitud

Antes de fabricar un prototipo y probarlo, se suelen realizar pruebas sobre un modelo a escala. Para que las pruebas sean válidas deben cumplirse ciertas condiciones:

- **Similitud geométrica** : El prototipo y el modelo deben guardar las mismas proporciones espaciales en las tres dimensiones. Los ángulos relativos de la geometría deben ser iguales.
- **Similitud cinemática** : Las velocidades deben guardar las mismas proporciones para el modelo y el prototipo.
- **Similitud dinámica** : Las fuerzas (o bien las masas) en el prototipo y en el modelo deben guardar las mismas proporciones.

6.4.1 Similitud cinemática

Es evidente que la similitud geométrica se ha de cumplir siempre. El factor de escala viene determinado por los recursos experimentales.

En ocasiones la similitud cinemática está condicionada por la geométrica.

Ejemplo:

En un experimento se prueba un modelo a escala de un barco. El barco real (prototipo, posiblemente no fabricado aun) hace 70 metros de largo ($L_p = 70\text{ m}$). En el barco modelo la longitud es de 70 centímetros ($L_m = 0.7\text{ m}$). El resto de dimensiones están a la misma escala 1:100.

Queremos calcular la fricción que sufrirá el barco moviéndose a una velocidad de 50 nudos (25.7 m/s). Dado que en un barco los efectos de la superficie libre son importantes, el número de Froude debe ser el mismo en el modelo.

El número de Froude es un número puramente cinemático (no interviene ninguna variable dinámica), y en el prototipo su valor es

$$\text{Fr}_p = \frac{u_p^2}{gL_p} = \frac{25.7^2}{9.8 \times 70} = 0.96$$

Para el modelo, el valor del número de Froude debe ser el mismo,

$$\text{Fr}_m = \frac{u_m^2}{gL_m} = \frac{u_m^2}{9.8 \times 0.7} = 0.96,$$

de forma que

$$u_m = \sqrt{0.96 \times 9.8 \times 0.7} = 2.57\text{ m/s.}$$

En general, si A es el factor de escala geométrica, el factor de velocidades será \sqrt{A} .

6.4.2 Similitud dinámica

En función del tipo de fenómeno que estemos estudiando, algún número adimensional como Reynolds, Mach, Ecker o Euler deberá conservarse. Esto condiciona valores de velocidades, densidades, viscosidades, etc...

Ejemplo:

Siguiendo con el ejemplo anterior, además del número de Froude, el número de Reynolds deberá también ser igual. Esto implica

$$\text{Re}_p = \text{Re}_m$$

$$\frac{\rho_p u_p L_p}{\mu_p} = \frac{\rho_m u_m L_m}{\mu_m}$$

Para el agua, que es donde navegará el prototipo, $\rho_p = 1000\text{ Kg/m}^3$ y $\mu_p = 10^{-3}\text{ N/m s}$, de forma que

$$\text{Re}_p = \frac{1000 \times 25.7 \times 70}{10^{-3}} = 1.8 \times 10^9$$

Esto da una condición para el fluido que debe usarse con el modelo,

$$\frac{\rho_m}{\mu_m} = \frac{Re_p}{u_m L_m} = \frac{1.8 \times 10^9}{2.57 \times 0.7} = 10^9 \text{ s/m}^2 \Rightarrow \nu_m = 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$$

Quizás sería posible encontrar un fluido con esta característica, pero no sería barato (y probablemente sería bastante peligroso). El líquido más barato disponible es el agua y, desde luego, no tiene esta viscosidad cinemática. En muchas ocasiones se sacrifica la similitud dinámica en beneficio de la cinemática. Todo depende del experimento en concreto, y de la experiencia del ingeniero.

Actividad 2:

La potencia P que genera un aerogenerador depende del diámetro D , la densidad del aire ρ , la velocidad del viento U y de la velocidad angular del aerogenerador Ω .

Escribir esta relación en forma adimensional.

Se ha diseñado un aerogenerador que tendrá 5 metros de diámetro y funcionará a 2000 metros de altitud con vientos de 12 m/s. Antes de construirlo, fabricamos un modelo a escala, con 50 centímetros de diámetro y lo probamos en un tunel de viento a nivel de mar con una velocidad de 40 m/s y girando a 4800 rpm. La potencia que medimos es de 2700 w.

Calcular la potencia que generará el prototipo y la velocidad a la que girará.

Chapter 7

Breve introducción a la turbulencia

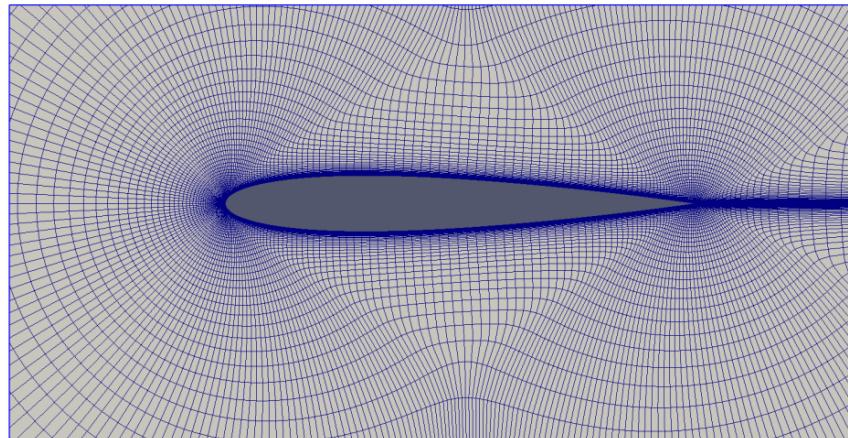
7.1 Promediado de Reynolds

- Los flujos que encontramos en la industria, en el laboratorio, en la naturaleza son, normalmente, turbulentos.
 - Excepciones: lubricación, microfluidos, ...
- La [transición a la turbulencia](#) ocurre para un determinado número de Reynolds, que no tiene porqué ser muy alto. Este [número de Reynolds crítico](#) depende del fenómeno en particular.
 - Por ejemplo, para flujo alrededor de una esfera, el flujo empieza a mostrarse turbulento para $Re \approx 3 \times 10^5$. En el caso de flujos en el interior de una tubería, la transición puede empezar incluso para $Re \approx 2000$, en función de las características.
- Un flujo turbulento esta caracterizado por
 - la [imprevisibilidad](#)
 - el [desorden](#) y
 - las rápidas [fluctuaciones](#).

En teoría, debería ser posible su estudio con las ecuaciones de la dinámica ya estudiadas, pero, como se comentó anteriormente, estas ecuaciones son no-lineales, y tan solo se pueden resolver de forma analítica en muy pocos casos.

Una solución es la resolución numérica. Pero esto implica un problema:

Para poder resolver numéricamente las ecuaciones de Navier-Stokes, antes hay que discretizar el dominio de estudio, creando una malla.



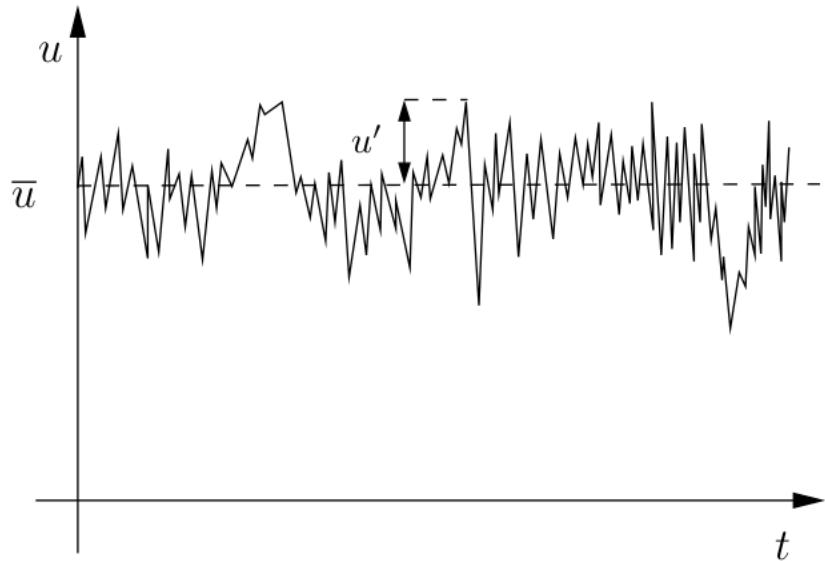
- Las fluctuaciones espaciales de flujo turbulento son de varias escalas. Cuanto mayor es Re, más pequeñas pueden llegar a ser las fluctuaciones, y más fina tiene que ser la malla.
- Pero, por otro lado, la resolución de la malla está limitada por la potencia del ordenador que se utilice. De este modo, el hardware nos limita Re.
- La potencia de los superordenadores crece de forma espectacular (ley de Moore), y el número de Reynolds de las simulaciones directas de las ecuaciones de Navier-Stokes va creciendo. Pero no todo el mundo tiene acceso a ellos.
- Cuando no es posible resolver de forma directa las ecuaciones de Navier-Stokes debido a que Re es muy grande y, por lo tanto, tendríamos que llegar a fluctuaciones de muy pequeño tamaño, se recurre a modelos de turbulencia, que nos predicen el comportamiento de las pequeñas escalas, de forma que sólo tenemos que preocuparnos de simular las grandes.

Idea fundamental : magnitud = magnitud media + fluctuaciones de magnitud.

P.e., cualquier componente de la velocidad, o la presión :

$$u = \bar{u} + u'; p = \bar{p} + p'$$

Consideremos que L es una distancia típica macroscópica de nuestro problema (podría ser el tamaño medio de la discretización que nos podemos permitir con nuestro ordenador).



$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u dt$$

$$u'(x) = u - \bar{u}$$

$$\bar{u}' = \overline{\bar{u} - \bar{u}} = \bar{u} - \bar{\bar{u}} = \bar{u} - \bar{u} = 0$$

$$\overline{u'^2} = \frac{1}{T} \int_0^T u'^2 dt \neq 0$$

La **intensidad de la turbulencia** se define como $I = \sqrt{\frac{\overline{u'^2}}{\bar{u}}}$
 Por regla general, I en flujos típicos en Ingeniería es del orden del 10% o 20%.
 El producto de promedios no es necesariamente nulo.

$$\begin{aligned}\overline{u'v'} &\neq 0 \\ \overline{u'p'} &\neq 0\end{aligned}$$

Descomponemos en promedios y fluctuaciones las tres componentes de la velocidad,

$$\begin{aligned}u &= \bar{u} + u' \\ v &= \bar{v} + v' \\ w &= \bar{w} + w'\end{aligned}$$

y escribimos la ecuación de continuidad para fluido incompresible

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

usando esta descomposición

$$\frac{\partial}{\partial x}(\bar{u} + u') + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{v} + v') + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{w} + w') = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \vec{\nabla} \cdot \vec{u}' = 0$$

Realizamos un promedio sobre esta expresión,

$$\overline{\vec{\nabla} \cdot \vec{u}} + \overline{\vec{\nabla} \cdot \vec{u}'} = \vec{\nabla} \cdot \bar{u} + \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \bar{u}'}_{=0} = 0.$$

Esto indica que tanto la velocidad promedio como la fluctuación deben cumplir la condición de continuidad.

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \bar{u} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \bar{u}' &= 0\end{aligned}$$

Escribimos también las ecuaciones de NS con esta descomposición y, a continuación, las promediamos.

Esto es lo que se conoce como **Ecuaciones de Navier Stokes con Promediado de Reynolds** (en inglés, RANS, Reynolds Averaged Navier Stokes).

Consideremos, por simplicidad, únicamente el caso de la componente x :

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}$$

donde el tensor de tensiones es sin traza, incluida en el término de las presiones.

El primer término, después de promediar queda

$$\rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t},$$

igual que el término del gradiente de presión

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}.$$

En cambio, en la aceleración convectiva aparecen unos términos extras,

$$\begin{aligned}\overline{u \frac{\partial u}{\partial x}} &= \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} = \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \overline{u' u'} - \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} \\ \overline{v \frac{\partial u}{\partial y}} &= \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \overline{v' \frac{\partial u'}{\partial y}} = \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{v' u'} - \overline{u' \frac{\partial v'}{\partial y}} \\ \overline{w \frac{\partial u}{\partial z}} &= \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \overline{w' \frac{\partial u'}{\partial z}} = \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{w' u'} - \overline{u' \frac{\partial w'}{\partial z}}\end{aligned}$$

Actividad 1:

Deducir las expresiones anteriores

La ecuación de NS se puede escribir, después de reordenar términos, como

$$\boxed{\rho \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right] = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx} - \rho \bar{u}' \bar{u}') + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} - \rho \bar{v}' \bar{u}') + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{xz} - \rho \bar{w}' \bar{u}')}}$$

dado que

$$\overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{u' \frac{\partial v'}{\partial y}} + \overline{u' \frac{\partial w'}{\partial z}} = \overline{u'} \underbrace{\left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right)}_{=0} = 0$$

7.2 Interpretación física del tensor de Reynolds

- Las ecuaciones de Navier-Stokes para las velocidades y presión promedios son idénticas, excepto por la aparición de unos términos $-\rho \bar{u}'_i \bar{u}'_j$, que se comportan como unos esfuerzos.
- Estos esfuerzo son los debidos a la cantidad de movimiento turbulenta transportada en el flujo, y son los responsables de la disipación de energía debida a las fluctuaciones.
- Estos términos $-\rho \bar{u}'_i \bar{u}'_j$ forman el **tensor de esfuerzos turbulento**, o **tensor de Reynolds**.

$$\tau_{ij}^t = -\rho \bar{u}'_i \bar{u}'_j$$

Nadie sabe a ciencia cierta cómo es este tensor, pero Prandtl propuso en 1930 el concepto de **viscosidad turbulenta**, μ_t , como analogía con la viscosidad molecular y la ley de viscosidad de Newton,

$$\tau_{ij}^t \approx \mu_t \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}.$$

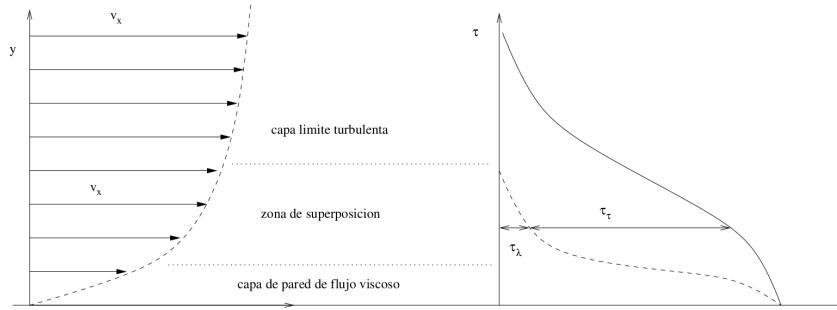
Pero de nuevo nos encontramos con el problema del valor de μ_t . Existen muchos modelos para calcularla, y el más sencillo fue propuesto también por Prandtl, y es conocido como el **modelo de la longitud de mezcla**,

$$\mu_t \approx \rho l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right|$$

La longitud de mezcla l es algo equivalente al recorrido libre medio de las partículas de un gas en mecánica estadística. Su valor dependerá del problema en concreto que queramos resolver.

7.3 Ley de pared y capa límite turbulenta

El estudio de casos generales de flujos turbulentos es extremadamente complicado. Un caso relativamente sencillo es el estudio del flujo cerca de un sólido. Esta zona, en la que la velocidad del fluido tiende de forma suave a la del sólido es conocida como **capa límite**. Aquí tan sólo vamos a estudiarla de forma superficial, dejando este importante tema para más adelante.



- El espesor de la capa límite se define como la coordenada y para la cual la velocidad alcanza el 99% de la velocidad que tiene asintóticamente para $y \rightarrow \infty$.
- τ_p es el esfuerzo tangencial en la pared.
- En la zona de la capa de pared, el flujo es laminar ya que la velocidad es pequeña y la viscosidad domina.
- En esta zona, Prandtl dedujo en 1930 que el perfil de velocidad no puede depender del espesor de la capa límite, δ .

$$u = f(\mu, \tau_p, \rho, y)$$

- Por análisis dimensional, sabemos que esta ley estará definida por 2 grupos adimensionales.

$$u^+ = F(y^+)$$

donde

$$u^+ = \frac{u}{u^*}; \quad y^+ = \frac{\rho u^* y}{\mu}; \quad u^* = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}}$$

- u^* se denomina **velocidad de fricción** y, aunque tiene unidades de velocidad, en realidad no lo es.
- A la expresión $u^+ = F(y^+)$ se conoce como **ley de pared**, y llega hasta $y^+ \approx 10$.
 - Esta ley puede ser, por ejemplo, lineal, $u^+ = y^+$.

En cuanto a la capa externa turbulenta, el mismo Prandtl en 1933 dedujo que, dado que es turbulenta, la viscosidad no es importante, y la diferencia de la velocidad respecto de u_∞ es función únicamente de y , del espesor de la capa límite, δ , del esfuerzo tangencial en la pared, τ_p , y de la densidad ρ , $u_\infty - u = g(\delta, \tau_p, \rho, y)$. De nuevo, el teorema II de Buckingham nos indica que esta ley viene dada por dos grupos adimensionales,

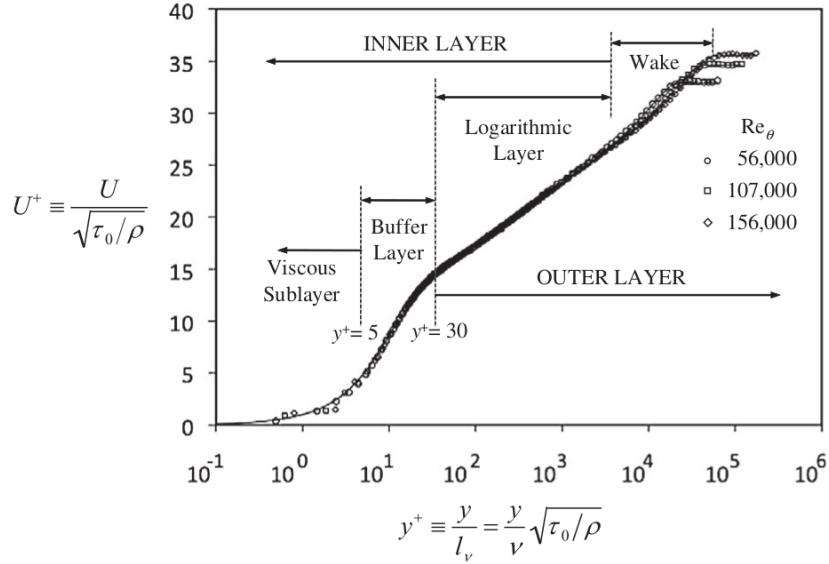
$$\frac{u_\infty - u}{u^*} = G\left(\frac{y}{\delta}\right).$$

En la zona intermedia, sean cuales sean las formas de F y G , éstas deben superponerse de forma suave. Se puede demostrar que ésto es sólo posible si la ley de velocidades en esta zona es logarítmica.

$$\boxed{\frac{u}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{\rho u^* y}{\mu} + B}$$

con $\kappa \approx 0.41$ y $B \approx 5.0$. Ésta es la **ley logarítmica de superposición**, y se extiende hasta $y^+ \approx 1000$

Del Kundu[4] (figura 12.18):



Actividad 2:

Si se considera el modelo de longitud de mezcla de Prandtl, cerca de la pared, con $l = \kappa y$, ($\kappa = 0.41$ es la constante de Prandtl), se puede obtener la ley logarítmica de superposición, considerando que la ley de pared es lineal, $u^+ = y^+ +$ hasta $y^+ = 10$.

Pista: considerar que $\tau_t \approx \tau_p$ independientemente de y .

Actividad 3:

Para agua a 10 m/s de velocidad máxima, entre dos placas separadas 1 cm, suponiendo que el flujo sigue la ley logarítmica, calcular τ_p y el espesor de la subcapa laminar. Compara con el valor obtenido de τ_p si hubiesemos supuesto un flujo laminar viscoso,

$$u = \frac{4u_{max}}{h^2}y(h - y)$$

Chapter 8

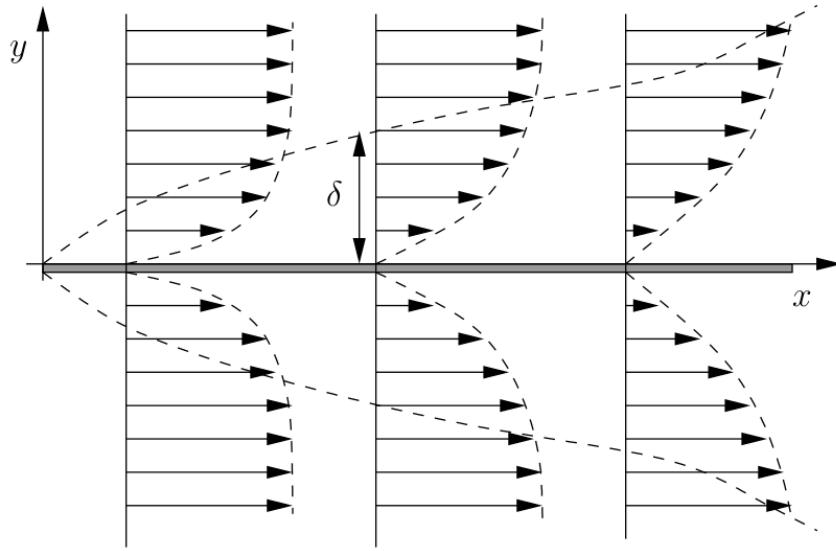
Capa Límite

- Por muy baja que sea la viscosidad de un fluido, en contacto con un sólido, la velocidad es la del sólido (generalmente, cero).
- Esto implica una zona de aumento progresivo de la velocidad desde 0 hasta la velocidad del flujo en zonas no influenciadas por el sólido, U_∞ .
- Esta zona se denomina **capa límite**, y en ella se producen los efectos que realmente actúan sobre el sólido (arrastre, ...).
- La capa límite puede ser laminar o turbulenta. El **número de Reynolds local** que controla el régimen se define como

$$\text{Re}_x = \frac{\rho U_\infty x}{\mu} = \frac{U_\infty x}{\nu},$$

donde ρ es la densidad del fluido, μ es la viscosidad dinámica, ν es la viscosidad cinemática y x es la distancia desde el punto en el que el flujo entra en contacto con el sólido. No hay un número concreto para la transición a capa límite turbulenta, pero está alrededor de 10^6 .

Consideremos, como ejemplo, el flujo sobre y bajo una placa lisa.



El **espesor δ** de la capa límite se define como la distancia de la placa para la cual la velocidad v del flujo alcanza el 99% de U_∞ .

Pero se definen otros espesores de la capa límite:

- **espesor de desplazamiento δ^*** . Debido a la disminución de velocidad en la proximidad del sólido, se produce una pérdida de caudal. Se define δ^* como la distancia que habría que desplazar la placa con un fluido ideal sin viscosidad (no hay, por tanto, la condición de no deslizamiento) para que la pérdida de caudal fuese la misma.

$$U_\infty \delta^* b = \int_0^\delta (U_\infty - u) b dy$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy} \quad (8.1)$$

- **espesor de cantidad de movimiento θ** . Es la misma idea, pero con pérdida de cantidad de movimiento, en lugar de caudal.

$$U_\infty^2 \theta = \int_0^\delta u (U_\infty - u) dy$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U_\infty} \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy} \quad (8.2)$$

Sobre cada pared de la placa se realiza un esfuerzo τ_p , dado por

$$\tau_p = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}$$

El **coeficiente de esfuerzo superficial de pared** se define como

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} \quad (8.3)$$

8.1 Capa límite laminar. Ecuación de Blasius

Considerando flujo estacionario, sin gradiente de presión, y que $\frac{\partial u}{\partial y} \gg \frac{\partial u}{\partial x}$, las ecuaciones de continuidad y NS son

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (8.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (8.5)$$

con las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} y = 0 &\rightarrow u = 0 \\ y = \infty &\rightarrow \begin{cases} u = U_\infty \\ \frac{du}{dy} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Estas son conocidas como *Ecuaciones de Prandtl*.

Dado que el flujo es bidimensional, podemos usar la función de corriente ψ ,

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned}$$

de esta forma, la ecuación de continuidad de cumple de forma automática. La ecuación de NS queda entonces como

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}$$

Para poder tratar esta ecuación se definen las variables adimensionales f y η , con $\eta = \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} y$ y f es tal que $\frac{df}{d\eta} = \frac{u}{U_\infty} = \frac{1}{U_\infty} \frac{\partial \psi}{\partial y}$.

Al substituir en la ecuación de NS y tras varias operaciones algebraicas, obtenemos

$$2 \frac{d^3 f}{d\eta^3} + f \frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0$$

con las condiciones de contorno

$$\begin{cases} \eta = 0 &\rightarrow f = \frac{df}{d\eta} = 0 \\ \eta = \infty &\rightarrow \frac{df}{d\eta} = 1 \end{cases}$$

Esta es la conocida como **ecuación de Blasius** (1908), y no se puede resolver analíticamente.

La resolución numérica de esta ecuación indica que el espesor de la capa límite se alcanza para $\eta \approx 5.0$. Es decir,

$$\delta \approx \frac{5.0}{\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}} = \frac{5.0x}{\sqrt{\text{Re}_x}}.$$

Los otros espesores son, calculados mediante integración numérica,

$$\begin{aligned}\delta^* &= 0.344 \delta \\ \theta &= 0.133 \delta\end{aligned}$$

El esfuerzo superficial sobre la placa viene dado por

$$\tau_p = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \mu U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \left. \frac{d^2 f}{d\eta^2} \right|_{\eta=0}$$

De la misma solución numérica de la ecuación de Blasius, se comprueba que

$$\tau_p = 0.332 U_\infty \sqrt{\frac{\rho \mu U_\infty}{x}} = \frac{0.332 \rho U_\infty^2}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

y el coeficiente de esfuerzo superficial es

$$C_f = \frac{0.664}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

Podemos calcular la fuerza de arrastre sobre una placa de longitud L y amplitud b ,

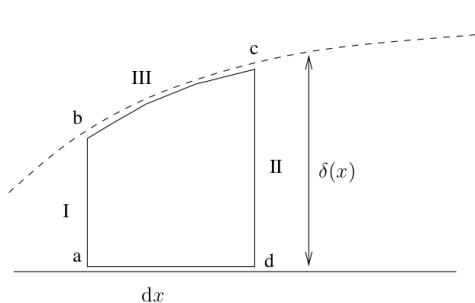
$$F_D = b \int_0^L \tau_p dx = 0.332 \rho U_\infty^2 b \int_0^L \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_x}} dx = 0.664 b \sqrt{\rho \mu L U_\infty^3}$$

El **coeficiente de arrastre** sobre la placa será

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 b L} = \frac{1.328}{\sqrt{\text{Re}_L}}$$

8.2 Ecuación integral de von Kármán

Continuidad:



$$\begin{aligned}\text{I : } Q_{ab} &= - \int_0^\delta u(y) b dy \\ \text{II : } Q_{cd} &= - \left[Q_{ab} + \frac{\partial Q_{ab}}{\partial x} dx \right]\end{aligned}$$

De aquí obtenemos el caudal que entra por III:

$$Q_{bc} = -b \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^\delta u(y) dy \right] dx$$

Por otro lado, aplicamos la conservación de la cantidad de movimiento,

$$F_S = \int_{SC} \rho u \vec{u} \cdot d\vec{S}$$

$$\begin{aligned} \text{I : } & -b \int_0^\delta \rho u(y)^2 dy \\ \text{II : } & b \left[\int_0^\delta \rho u(y)^2 dy + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta \rho u(y)^2 dy \right) dx \right] \\ \text{III : } & -U_\infty b \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^\delta \rho u(y) dy \right] dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_S &= \left[-\frac{dp}{dx} dx \delta - \tau_p dx \right] b \\ -\frac{dp}{dx} \delta - \tau_p &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta \rho u(y)^2 dy \right) - U_\infty \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho u(y) dy \end{aligned}$$

El gradiente de presiones se obtiene haciendo Bernoulli por la parte exterior de la capa límite,

$$\frac{dp}{dx} = -\rho U_\infty \frac{dU_\infty}{dx}$$

y, operando, llegamos a

$$\boxed{\tau_p = \rho \frac{d}{dx} (U_\infty^2 \theta) + \rho \delta^* U_\infty \frac{dU_\infty}{dx}}$$

Esta es la **ecuación integral de cantidad de movimiento**, y es una ecuación diferencial ordinaria, que nos permite calcular δ a partir de una suposición sobre la forma del perfil de velocidades.

Si **no hay gradiente de presiones**, $\frac{dU_\infty}{dx} = 0$, y la ecuación se reduce a

$$\tau_p = \rho \frac{d}{dx} (U_\infty^2 \theta)$$

Ejemplo:

Supongamos que el perfil de velocidades es de forma parabólica,

$$u = a + by + cy^2$$

Las condiciones de contorno son, para $y = 0$, $u = 0$, y para $y = \delta$, $u = U_\infty$ y $\frac{du}{dy} = 0$. Esto lleva a

$$\frac{u}{U_\infty} = 2\zeta - \zeta^2$$

con $\zeta = \frac{y}{\delta}$. El esfuerzo tangencial sobre la pared, según este perfil, es

$$\tau_p = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 2 \frac{U_\infty \mu}{\delta}$$

El espesor de cantidad de movimiento es

$$\theta = \int_0^\delta \frac{u(y)}{U_\infty} \left(1 - \frac{u(y)}{U_\infty}\right) dy = \delta \int_0^1 \frac{u(\zeta)}{U_\infty} \left(1 - \frac{u(\zeta)}{U_\infty}\right) d\zeta = \frac{2}{15} \delta$$

Substituyendo en la ecuación integral de cantidad de movimiento sin gradiente de presiones, obtenemos

$$2 \frac{U_\infty \mu}{\delta} = \frac{2}{15} \rho U_\infty^2 \frac{d\delta}{dx}$$

que nos lleva a

$$\frac{1}{2} \delta^2 = \frac{15\mu}{\rho U_\infty} x + C$$

Dado que, para $x = 0$, el inicio de la placa, la capa límite ha de tener un espesor nulo, $C = 0$, de forma que

$$\delta = \sqrt{\frac{30\mu x}{\rho U_\infty}} = \frac{5.48x}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

El esfuerzo tangencial en la pared es, para el perfil parabólico,

$$\tau_p = \frac{0.365\rho U_\infty^2}{\sqrt{\text{Re}_x}},$$

y los coeficientes de fricción y arrastre son

$$C_f = \frac{0.730}{\sqrt{\text{Re}_x}}, \quad C_D = \frac{1.460}{\sqrt{\text{Re}_L}}$$

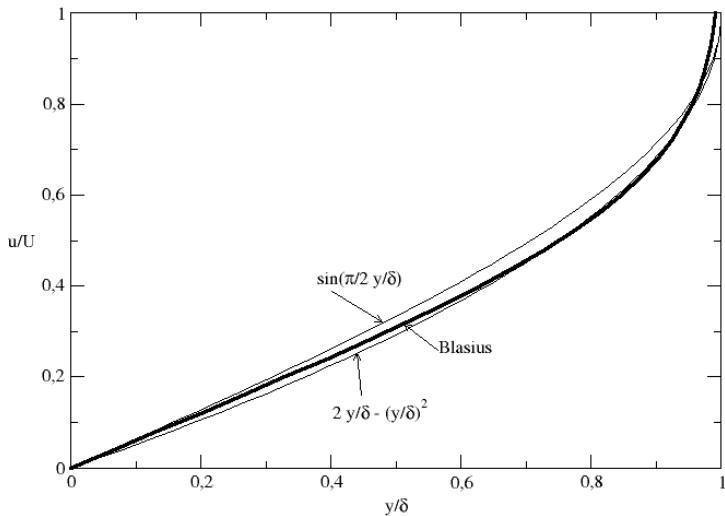
Actividad 1:

Repetir todos los pasos del ejemplo con un perfil sinusoidal,

$$\frac{u}{U_\infty} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\zeta\right)$$

Estos son los valores numéricos para el perfil de Blasius.

| y/δ | u/U_∞ |
|------------|--------------|
| 0.0 | 0.0 |
| 0.04 | 0.06641 |
| 0.08 | 0.13277 |
| 0.12 | 0.19894 |
| 0.16 | 0.26471 |
| 0.2 | 0.32979 |
| 0.24 | 0.39378 |
| 0.28 | 0.45627 |
| 0.32 | 0.51676 |
| 0.36 | 0.57477 |
| 0.4 | 0.62977 |
| 0.44 | 0.68132 |
| 0.48 | 0.72899 |
| 0.52 | 0.77246 |
| 0.56 | 0.81152 |
| 0.6 | 0.84605 |
| 0.64 | 0.87609 |
| 0.68 | 0.90177 |
| 0.72 | 0.92333 |
| 0.76 | 0.94112 |
| 0.8 | 0.95552 |
| 0.84 | 0.96696 |
| 0.88 | 0.97587 |
| 0.92 | 0.98269 |
| 0.96 | 0.98779 |
| 1 | 0.99155 |



8.3 Capa límite turbulenta

Partimos de la ecuación integral de cantidad de movimiento, que es válida tanto para flujo laminar como para turbulento. Consideraremos que no hay gradiente de presiones.

$$\tau_p = \rho U_\infty^2 \frac{d\theta}{dx}$$

Esta ecuación se puede escribir en términos adimensionales

$$C_f = 2 \frac{d\theta}{dx}$$

Como vimos en el tema de Turbulencia, el perfil turbulento de velocidades cerca de la pared se puede escribir como una ley logarítmica

$$\frac{u}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{\rho u^* y}{\mu} + B \quad ; \quad u^* = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}} \quad (\text{velocidad de fricción})$$

Esta velocidad de fricción también se puede escribir como

$$u^* = \sqrt{\frac{1}{2} C_f U_\infty^2} = U_\infty \sqrt{\frac{C_f}{2}}$$

Para $y = \delta$, la velocidad de fricción debe cumplir la ley logarítmica

$$\begin{aligned} \frac{U_\infty}{u^*} &= \frac{1}{\kappa} \ln \frac{\rho u^* \delta}{\mu} + B \\ \sqrt{\frac{2}{C_f}} &= \frac{1}{\kappa} \ln \left[\frac{\delta}{\nu} U_\infty \sqrt{\frac{C_f}{2}} \right] + B = \frac{1}{\kappa} \ln \left[\text{Re}_\delta \sqrt{\frac{C_f}{2}} \right] + B \end{aligned}$$

Debería ser posible resolver esta ecuación para obtener C_f en función de Re_δ , pero es imposible hacerlo de forma explícita, y usamos una forma aproximada

$$C_f = \frac{0.02}{\text{Re}_\delta^{1/6}}$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación integral de cantidad de movimiento, obtenemos

$$\frac{0.02}{\text{Re}_\delta^{1/6}} = 2 \frac{d\theta}{dx}$$

Con una expresión para el perfil de velocidades, podemos calcular

$$\theta = \delta \int_0^1 \frac{u(\zeta)}{U_\infty} \left(1 - \frac{u(\zeta)}{U_\infty} \right) d\zeta$$

con $\zeta = y/\delta$.

La expresión podría ser la ley logarítmica, pero complicaría de nuevo enormemente el cálculo, de forma que se usa una ley aproximada de potencia, $\frac{u(\zeta)}{U_\infty} = \zeta^{1/7}$, y se obtiene

$$\theta = \delta \int_0^1 \zeta^{1/7} (1 - \zeta^{1/7}) d\zeta = \frac{7}{72} \delta.$$

La ecuación integral de cantidad de movimiento queda entonces

$$\frac{0.02}{\text{Re}_\delta^{1/6}} = \frac{7}{36} \frac{d\delta}{dx}$$

$$\Rightarrow \text{Re}_\delta^{-1/6} = 9.72 \frac{d\delta}{dx} = 9.72 \frac{d\text{Re}_\delta}{d\text{Re}_x}$$

$$\Rightarrow \text{Re}_\delta = 0.16 \text{Re}_x^{6/7} \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{0.16x}{\text{Re}_x^{1/7}}}$$

y de aqui es posible obtener tambiéen C_f ,

$$C_f = 0.02 \text{Re}_\delta^{-1/6} = \frac{0.027}{\text{Re}_x^{1/7}}$$

Ejemplo:

Consideremos agua con sobre una placa plana rugosa, de forma que se induce una capa límite turbulenta desde el principio de la placa. Queremos calcular los espesores , y y el esfuerzo superficial para . Compararemos con los resultados si la placa fuese completamente lisa.Calculamos en primer lugar el número de Reynolds local, $\text{Re}_x = \frac{U_\infty x}{\nu} = \frac{1 \times 1}{10^{-6}} = 10^6$, de forma que los espesores son

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{0.16x}{\text{Re}_x^{1/7}} = \frac{0.16 \times 1}{10^{6/7}} = 0.022 \text{ m} \\ \delta^* &= \delta \int_0^1 (1 - \zeta^{1/7}) d\zeta = \frac{1}{8} \delta = 0.0028 \text{ m} \\ \theta &= \delta \int_0^1 \zeta^{1/7} (1 - \zeta^{1/7}) d\zeta = \frac{7}{72} \delta = 0.0022 \text{ m}\end{aligned}$$

y el esfuerzo superficial es

$$\tau_p = C_f \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 = \frac{0.027}{\text{Re}_x^{1/7}} \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 = \frac{0.027}{10^{6/7}} \times \frac{1}{2} \times 1000 \times 1 = 1.88 \text{ N/m}^2$$

Los cálculos de los espesores para una placa completamente lisa, y, por tanto, capa límite laminar, dan

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{5.0x}{\sqrt{\text{Re}_x}} = \frac{5.0 \times 1}{\sqrt{10^6}} = 0.005 \text{ m} = 5 \text{ mm} \\ \delta^* &= 0.344 \delta = 0.0017 \text{ m} = 1.7 \text{ mm} \\ \theta &= 0.133 \delta = 0.00066 \text{ m} = 0.66 \text{ mm}\end{aligned}$$

es decir, unas 4 veces más pequeños.

El esfuerzo superficial es

$$\tau_p = C_f \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 = \frac{0.664}{\sqrt{\text{Re}_x}} \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 = \frac{0.664}{\sqrt{10^6}} \frac{1}{2} \times 1000 \times 1 = 0.332 \text{ N/m}^2,$$

unas 6 veces más pequeño que en el caso de placa rugosa.

Supongamos que la placa hace un metro de ancho. La fuerza que hace el flujo de agua sobre una cara, hasta $L = 1$ m, es

$$F_D = \int_S \tau_p dS = b \int_0^L C_f \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 dx = b \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \int_0^L C_f dx = C_D \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 b L$$

En el caso turbulento,

$$F_D = b \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \int_0^L \frac{0.027}{\text{Re}_x^{1/7}} dx = \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 b L \frac{0.031}{\text{Re}_L^{1/7}} = \frac{1}{2} \times 1000 \times 1 \times 1 \times \frac{0.031}{10^{6^{1/7}}} = 2.15 \text{ N}$$

En el caso laminar,

$$F_D = b \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \int_0^L \frac{0.664}{\text{Re}_x^{1/2}} dx = \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 b L \frac{1.328}{\text{Re}_L^{1/2}} = \frac{1}{2} \times 1000 \times 1 \times 1 \times \frac{1.328}{10^{6^{1/2}}} = 0.664 \text{ N}$$

8.4 Capa límite con gradiente de presiones. Separación de flujo

¿Qué ocurre cuando hay gradiente de presiones, o, lo que es lo mismo, $\frac{dU_\infty}{dx} \neq 0$?

- Si

$$\frac{dU_\infty}{dx} > 0 \Rightarrow \frac{dp}{dx} < 0$$

se dice que tenemos un **gradiente de presiones favorable**, y no ocurre nada especial. Solo que la ecuación integral de cantidad de movimiento es más complicada.

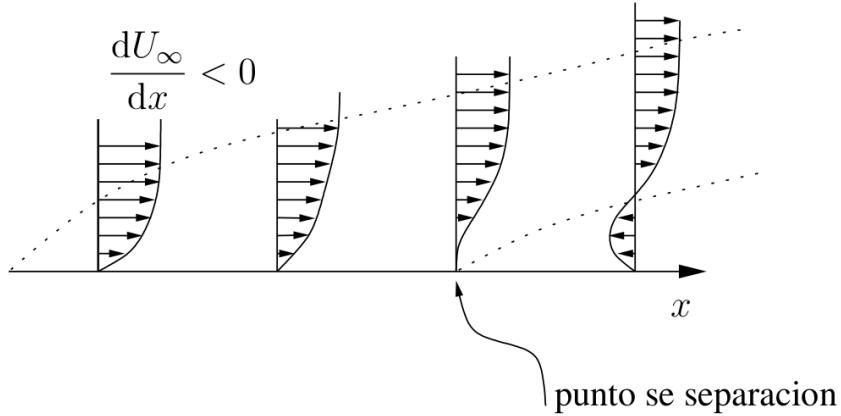
- Pero si

$$\frac{dU_\infty}{dx} < 0 \Rightarrow \frac{dp}{dx} > 0$$

hay un **gradiente de presiones adverso** y es posible que ocurra una **separación de flujo**.

Ésto último ocurre cuando la capa límite crece tanto que no sólo el flujo en la pared es nulo, sino también su derivada

$$\left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0} = 0 \Rightarrow \tau_p = 0.$$



Recordemos que las expresiones para $C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2}$ son

$$C_f = \frac{\text{cte}}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad \text{para flujo laminar}$$

$$C_f = \frac{\text{cte}}{\text{Re}_x^{1/7}} \quad \text{para flujo turbulento}$$

lo cual implica que τ_p se anula únicamente para $\text{Re}_x \rightarrow \infty$. Sin embargo, estas expresiones fueron deducidas para el caso de gradiente de presiones nulo.

La ecuación integral de cantidad de movimiento es

$$\tau_p = \rho \frac{d}{dx} (U_\infty^2 \theta) + \rho \delta^* U_\infty \frac{dU_\infty}{dx}$$

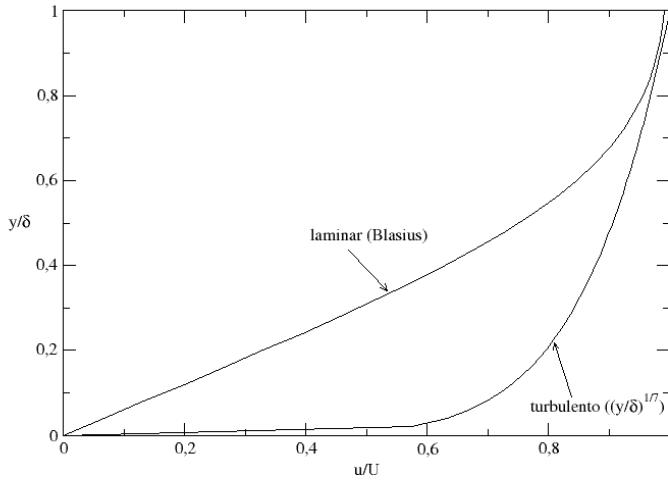
Desarrollándola y con la definición de C_f podemos deducir

$$\frac{C_f}{2} = \frac{d\theta}{dx} + (H+2) \frac{\theta}{U_\infty} \frac{dU_\infty}{dx} ; \text{ con } H = \frac{\delta^*}{\theta} \quad \text{factor de forma}$$

Si calculamos $U_\infty(x)$, podemos integrar esta ecuación si conocemos $H(\theta)$ y $C_f(\theta)$ para encontrar el punto x en el que ocurre la separación de flujo ($C_f = 0$).

Para flujo turbulento el cálculo es demasiado complicado y se deja fuera de este curso. Pero es importante notar que el hecho de que en la capa límite turbulenta θ sea mucho menor (en relación a δ) que en la laminar hace que separarla de la superficie sólida sea más difícil.

Esta gráfica muestra la comparación, para el mismo espesor, del perfil laminar (Blasius) y turbulento.



8.4.1 El método de Thwaites

Para capa límite laminar, en 1949 Thwaites encontró de forma experimental la relación

$$S(\lambda) = (\lambda + 0.09)^{(0.62)},$$

donde $S = \frac{\tau_p \theta}{\mu U_\infty} = \frac{1}{2} C_f Re_\theta$ es un esfuerzo superficial adimensional, y $\lambda = \frac{\theta^2}{\nu} \frac{dU_\infty}{dx}$ es un espesor de cantidad de movimiento adimensional. Es necesario conocer el valor de θ , que se puede calcular con la expresión también de Thwaites

$$\theta^2(x) = \theta_0^2 \left(\frac{U_0}{U_\infty(x)} \right)^6 + \frac{0.45\nu}{U_\infty^6(x)} \int_0^x U_\infty^5(x) dx$$

Con esta expresión es posible calcular τ_p con gradiente de presiones y el punto x en el que se produce la separación ($\lambda = -0.09$) con un error relativamente pequeño ($\pm 10\%$) respecto a la resolución numérica de las ecuaciones de capa límite.

Ejemplo:

Consideremos una ley lineal de velocidad

$$U_\infty = U_0 \left(1 - \frac{x}{L} \right).$$

Dado que la velocidad U_∞ decrece con x , la presión crece, y tendremos un gradiente de presiones adverso. Si nos aseguramos de que en todo momento el flujo es laminar, podemos usar el método de Thwaites para calcular el punto de separación del flujo.

8.4. CAPA LÍMITE CON GRADIENTE DE PRESIONES. SEPARACIÓN DE FLUJO99

Suponiendo que $\theta_0 = 0$, el espesor de cantidad de movimiento de la capa límite es

$$\begin{aligned}\theta^2(x) &= \frac{0.45\nu}{U_\infty^6(x)} \int_0^x U_\infty^5(x) dx = \frac{0.45\nu}{U_0^6} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^{-6} \int_0^x U_0^5 \left(1 - \frac{x}{L}\right)^5 dx \\ \theta^2(x) &= 0.075 \frac{\nu L}{U_0} \left[\left(1 - \frac{x}{L}\right)^{-6} - 1 \right]\end{aligned}$$

y λ es entonces

$$\lambda = \frac{\theta^2}{\nu} \frac{dU_\infty}{dx} = -\frac{\theta^2 U_0}{\nu L} = -0.075 \left[\left(1 - \frac{x}{L}\right)^{-6} - 1 \right]$$

La separación del flujo se da para $\lambda_{sep} = -0.09$, es decir,

$$\begin{aligned}\lambda_{sep} &= -0.09 = -0.075 \left[\left(1 - \frac{x_{sep}}{L}\right)^{-6} - 1 \right] \\ \Rightarrow \frac{x_{sep}}{L} &= 0.123\end{aligned}$$

La solución exacta obtenida mediante simulación numérica es $x_{sep} = 0.120L$.

Para calcular C_f en cualquier punto $\frac{x}{L}$ antes de la separación utilizamos

$$S = \frac{\tau_p \theta}{\mu U_\infty} = \frac{1}{2} C_f \text{Re}_\theta = (\lambda + 0.09)^{0.62}$$

En el caso del ejemplo anterior:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} C_f \text{Re}_\theta &= \left\{ -0.075 \left[\left(1 - \frac{x}{L}\right)^{-6} - 1 \right] + 0.09 \right\}^{0.62} \\ C_f \text{Re}_\theta &= \left\{ 0.165 - 0.229 \left(1 - \frac{x}{L}\right)^{-6} \right\}^{0.62}\end{aligned}$$

Para poder calcular $\text{Re}_\theta = \frac{U_0 \theta}{\nu}$, usamos

$$\begin{aligned}\theta^2(x) &= 0.075 \frac{\nu L}{U_0} \left[\left(1 - \frac{x}{L}\right)^{-6} - 1 \right] \\ \frac{U_0^2 \theta^2(x)}{\nu^2} &= \text{Re}_\theta^2 = 0.075 \frac{U_0 L}{\nu} \left[\left(1 - \frac{x}{L}\right)^{-6} - 1 \right] = 0.075 \text{Re}_L \left[\left(1 - \frac{x}{L}\right)^{-6} - 1 \right] \\ \text{Re}_\theta &= 0.274 \sqrt{\text{Re}_L} \left[\left(1 - \frac{x}{L}\right)^{-6} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Para poder calcular Re_θ y, por lo tanto, C_f , se debe conocer Re_L .

Actividad:

Repetir los cálculos del ejemplo con

$$U_{\infty} = U_0 \left(1 - \frac{x^2}{L^2} \right)$$

Cálculos precisos dan como punto de separación $\frac{x}{L} = 0.271$.

Chapter 9

Flujo Ideal y Externo

9.1 Ecuación de Euler

Consideremos un flujo no viscoso ($\mu = 0$). La ecuación de Navier-Stokes queda entonces como

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \quad (9.1)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \quad (9.2)$$

La aceleración convectiva se puede escribir en términos da la vorticidad, que no es más que el rotacional de la velocidad, $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) + \vec{\omega} \times \vec{u} \quad (9.3)$$

Podemos entonces escribir

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) + \vec{\omega} \times \vec{u} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - \vec{g} = 0 \quad (9.4)$$

e integrarlo sobre un cierto camino

$$\int_A^B \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) + \vec{\omega} \times \vec{u} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - \vec{g} \right] \cdot d\vec{r} = 0 \quad (9.5)$$

Si, por simplicidad, consideramos que el flujo es estacionario, esta integral puede ser realizada siempre y cuando $(\vec{\omega} \times \vec{u}) \cdot d\vec{r} = 0$. Esto ocurre, por ejemplo, si $\vec{u} \cdot d\vec{r} = 0$. Es decir, si el camino es una **Línea de corriente**.

En este caso,

$$\int_A^B \left[\vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - \vec{g} \right] \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} (u_B^2 - u_A^2) + g(z_B - z_A) + \int_A^B \frac{dp}{\rho} = 0 \text{ con } \vec{g} = -g\vec{k}$$

Esta relación es la conocida [Ecuación de Bernoulli](#), y es válida a lo largo de una línea de corriente. Pero si el flujo es irrotacional, es decir, es tal que

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = 0$$

en todo el dominio, entonces la ecuación de Bernoulli se cumple entre dos puntos cualesquiera.

En este caso se cumple que la velocidad, como todo campo vectorial conservativo, se puede escribir como gradiente de una función ϕ

$$\vec{u} = \vec{\nabla}\phi$$

que recibe el nombre de **potencial de velocidad** y este tipo de flujo se conoce como **flujo potencial**.

El potencial de velocidad es una función escalar del tiempo y el espacio, $\phi(t, x, y, z)$ y se puede definir para cualquier campo de velocidades que sea irrotacional.

Las líneas del espacio definidas por $\phi = \text{cte}$ son las [líneas de potencial](#) del flujo.

Para un flujo potencial la ecuación de continuidad se reduce a una [ecuación de Laplace](#)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla}\phi \right) = \nabla^2\phi = 0 ; \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$$

9.2 Función de corriente

Recordemos que, para [un flujo bidimensional](#), la función de corriente se define como una función ψ tal que $u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$ de forma que

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = -vdx + udy$$

Si $d\psi = 0$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \Rightarrow \psi = \text{cte} \text{ define las líneas de corriente}$$

Si el flujo es irrotacional

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{u} \right)_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow -\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \nabla^2\psi = 0$$

La función de corriente también cumple la ecuación de Laplace.

En muchas ocasiones es conveniente (o imprescindible) trabajar en coordenadas polares. En estas coordenadas, las relaciones entre la velocidad, la función de corriente y el potencial de flujo son

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (9.6)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (9.7)$$

y las ecuaciones de Laplace son

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (9.8)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (9.9)$$

9.3 La ecuación de vorticidad

Si volvemos a considerar la viscosidad, la ecuación de Navier-Stokes, se puede expresar como

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) + \vec{\omega} \times \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{g} + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad (9.10)$$

Considerando flujo incompresible y, dado que $\vec{g} = -\nabla g z$, obtenemos

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{u} = -\vec{\nabla} \left[\frac{p}{\rho} + \left(\frac{1}{2} u^2 \right) + gz \right] + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad (9.11)$$

Si el flujo es estacionario, inviscido e irrotacional, recuperamos la ecuación de Bernoulli.

Y ahora hacemos el rotacional de toda esta ecuación, de forma que el gradiente desaparece.

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{u}) = \nu \nabla^2 \vec{\omega} \quad (9.12)$$

Esto ya da una información importante: Si el flujo es inviscido, y el rotacional es inicialmente cero, se mantendrá nulo de forma indefinida

Podemos escribirlo en forma de transporte, usando la relación de cálculo vectorial

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = [(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})] \vec{A} - [(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})] \vec{B}$$

de forma que

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{u}) = (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \quad (9.13)$$

Dado que, para flujo incompresible, $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} = 0$, la **ecuación de la vorticidad** queda como

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \nu \nabla^2 \vec{\omega} \quad (9.14)$$

Actividad 1:

¿ Cómo se simplifica esta expresión para flujo bidimensional? ¿Qué conclusiones se pueden extraer en 2D?

Actividad 2:

Expresar la ecuación de vorticidad en términos de la función de corriente

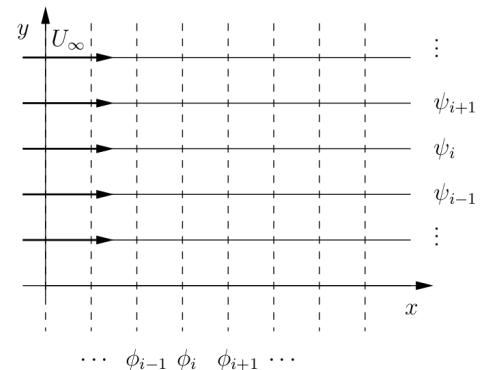
9.4 Flujos potenciales elementales

- Dado que las ecuaciones de Laplace son lineales, se puede formar cualquier flujo potencial como superposición de varios.
- Se consideran tres flujos potenciales elementales a partir de los cuales se pueden construir una gran variedad.

Estos son:

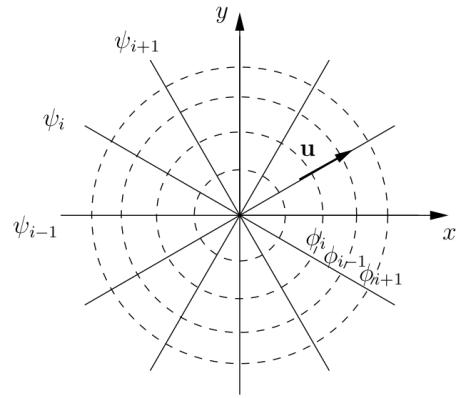
- Flujo uniforme

| coord. cartesianas | coord. polares |
|---------------------|------------------------------------|
| $u = U_\infty$ | $u_r = U_\infty \cos \theta$ |
| $v = 0$ | $u_\theta = -U_\infty \sin \theta$ |
| $\psi = U_\infty y$ | $\psi = U_\infty r \sin \theta$ |
| $\phi = U_\infty x$ | $\phi = U_\infty r \cos \theta$ |



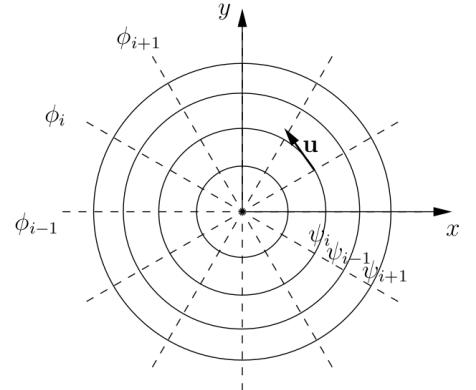
- Fuente o sumidero

| coord. cartesianas | coord. polares |
|---------------------------------|------------------|
| $u = mx/(x^2 + y^2)$ | $u_r = m/r$ |
| $v = my/(x^2 + y^2)$ | $u_\theta = 0$ |
| $\psi = m \arctan(y/x)$ | $\psi = m\theta$ |
| $\phi = m \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ | $\phi = m \ln r$ |



- Vórtice o remolino

| coord. cartesianas | coord. polares |
|----------------------------------|-------------------|
| $u = -Ky/(x^2 + y^2)$ | $u_r = 0$ |
| $v = Kx/(x^2 + y^2)$ | $u_\theta = K/r$ |
| $\psi = -K \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ | $\phi = -K \ln r$ |
| $\phi = K \arctan(y/x)$ | $\psi = K\theta$ |



9.5 Circulación

El [teorema de Stokes](#) afirma que para un cierto campo vectorial bidimensional \vec{u} , la integral sobre una linea cerrada es igual a la integral del rotacional del campo sobre la superficie que define la linea

$$\oint_C \vec{u} \cdot d\vec{r} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \cdot d\vec{S}$$

En el caso de un campo de velocidades, la integral sobre una linea cerrada recibe el nombre de circulación del flujo

$$\Gamma = \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{r}$$

Evidentemente, si el campo es irrotacional, la circulación sobre cualquier linea cerrada será nula. Esto es cierto excepto en el caso del vórtice.

Actividad 3:

Comprobar que en un vórtice el rotacional es nulo en todos los puntos del plano excepto en el origen de coordenadas, donde tiene un valor infinito.

En el caso del vórtice, la vorticidad tiene la forma de una delta de Dirac (función de valor nulo en todos los puntos excepto en uno, en el que tiene valor infinito, y integral finita). El valor de la integral de la vorticidad se puede calcular mediante la circulación.

Actividad 4:

Comprobar que la circulación de un vórtice sobre un círculo cualquiera que encierra el origen de coordenadas es $\Gamma = 2\pi K$.

Ésta circulación es la **fuerza** del vórtice. Puede ser positiva o negativa en función de la dirección del flujo del vórtice (horario o antihorario).

9.5.1 Dos ejemplos de flujos formados como superposición de los tres flujos elementales:

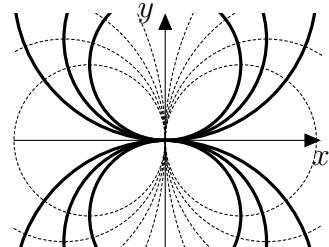
- **El dipolo.** Formado por una fuente y un sumidero, con el mismo valor de m , separados una distancia $2a$.

$$\psi = -m \arctan \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \quad ; \quad \phi = \frac{1}{2}m \ln \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}$$

cuando $m \rightarrow \infty$ y $a \rightarrow 0$,

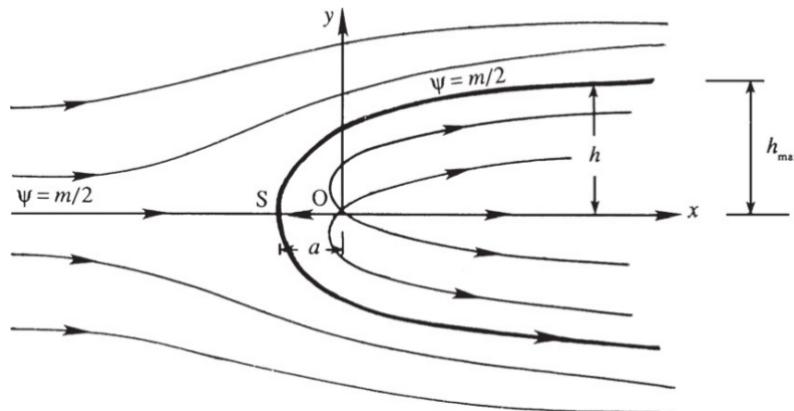
$$\psi = -\frac{d}{r} \sin \theta \quad ; \quad \phi = \frac{d}{r} \cos \theta$$

con $d = ma$



- **El semióvalo de Rankine.** Formado por una fuente (o sumidero) y un flujo uniforme.

$$\psi = U_\infty r \sin \theta + m\theta \quad ; \quad \phi = U_\infty r \cos \theta + m \ln r$$



9.6 Aerodinámica

Se habla de flujo externo cuando un cuerpo sólido se encuentra completamente sumergido en un flujo.

En Flujo Ideal hemos visto las ecuaciones de Euler, cuando no se considera la viscosidad, y en flujo potencial cuando, además, el flujo es irrotacional. El flujo real se parece más al potencial (irrotacional) cuanto menor es el número de Reynolds)

9.6.1 Flujo alrededor de un cilindro

Pero esto llevaba a la paradoja de D'Alembert, que se resolvía con la capa límite.

Los flujo externos reales se estudian conectando ambos modelos:

flujo ideal muy lejos del cuerpo, y que determina la forma del campo de velocidades y presiones alrededor de él, y

capa límite muy cerca del cuerpo, que determina las fuerzas superficiales que actúan sobre él.

En la zona intermedia, ambos modelos deben conectar de forma suave.

La mayor parte de los resultados presentados en el estudio de flujos externos son o bien experimentales, o bien numéricos, dada la complejidad del problema.

9.7 Fuerzas aerodinámicas

Un flujo externo produce sobre el cuerpo sólido una fuerza \vec{F} , denominada *aerodinámica*, aunque el fluido no sea necesariamente aire.

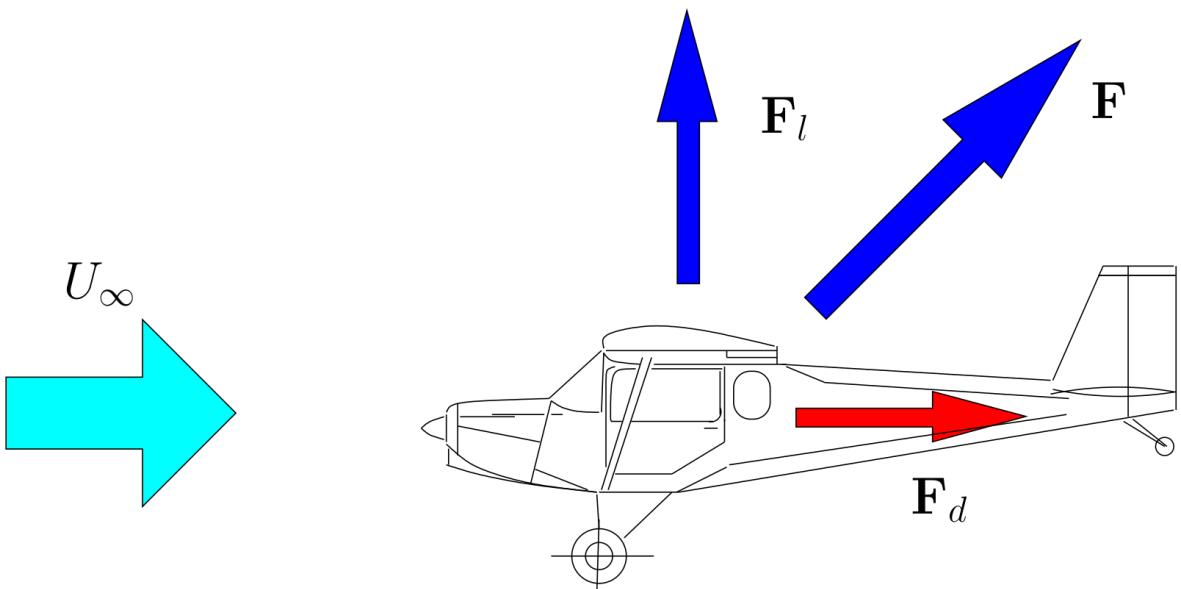
Esta fuerza se descompone en un sistema de coordenadas definido por la dirección del flujo (x) y una normal (z). La componente en la dirección del flujo, F_x recibe el nombre

de fuerza de arrastre, o, simplemente, *arrastre*. En inglés, *drag*, y, por esta razón tanto se encuentra escrita como F_x , como F_a , como F_d .

La componente en la dirección normal, F_z , recibe el nombre de fuerza de sustentación, o, simplemente, *sustentación*. En inglés *lift*, y, por esta razón tanto se encuentra escrita como F_z , como F_s , como F_l .

Es importante hacer dos comentarios:

1. Ni la fuerza de arrastre tiene porqué ser horizontal ni la de sustentación vertical
2. La velocidad del viento incidente es la *velocidad relativa* al cuerpo



9.7.1 Arrastre de fricción y de presión

En el estudio de capa límite vimos cómo actúa la fricción (esfuerzo superficial) sobre una placa plana. Pero el arrastre también puede ser producido por una diferencia de presión entre la parte anterior y posterior del objeto.

Consideremos el ejemplo de una esfera. Si $\text{Re} < 1$, no hay prácticamente separación, y el arrastre se produce casi por completo por fricción. Stokes calculó el valor de este arrastre,

$$F_d = 3\pi\mu U_\infty D \quad (9.15)$$

Sin embargo, para Re mayores, el desprendimiento del flujo produce una zona de baja presión en la estela, y un reflujo en la misma. En estas condiciones, el arrastre se debe tanto a la fricción como a la presión.

9.7.2 Coeficientes aerodinámicos

Como es habitual, se suelen utilizar magnitudes adimensionales para el estudio del flujo externo. La fuerza aerodinámica se compara con la presión dinámica del flujo lejano multiplicado por un área de referencia.

El **coeficiente de arrastre** es

$$C_d = \frac{F_d}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 S_x} \quad (9.16)$$

donde S_x es la sección proyectada por el cuerpo en la dirección del flujo.

Para el **coeficiente de sustentación**

$$C_l = \frac{F_l}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 S} \quad (9.17)$$

el área S se define de forma diferente.

Dado que, para que un cuerpo tenga sustentación tiene que ser, normalmente, diseñado para ello (perfles aerodinámicos), y el área S_x varía mucho con la orientación del cuerpo, en estos casos, tanto para C_d como para C_l se utiliza el área máxima proyectada del cuerpo, S .

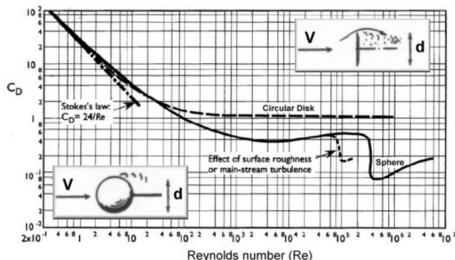
Los coeficientes de arrastre y de sustentación son coeficientes *globales*, en el sentido que describen el comportamiento del perfil en su totalidad. El **coeficiente de presión**, C_p , es un coeficiente *local*, definido sobre la superficie del perfil.

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} \quad (9.18)$$

Aplicando la ley de Stokes para el arrastre viscoso en una esfera, el coeficiente de arrastre es

$$C_d = \frac{24}{\Re} \quad (9.19)$$

Pero esto es válido únicamente para $\Re < 1$. Para mayores números de Reynolds no hay una expresión analítica para C_d



Hasta $\Re \approx 1000$, el arrastre se produce por combinación de la fricción y la presión, debido a la separación de la capa límite. A medida que aumenta \Re , disminuye la contribución de la fricción, de forma que para $\Re \approx 1000$ es apenas el 5% del arrastre total.

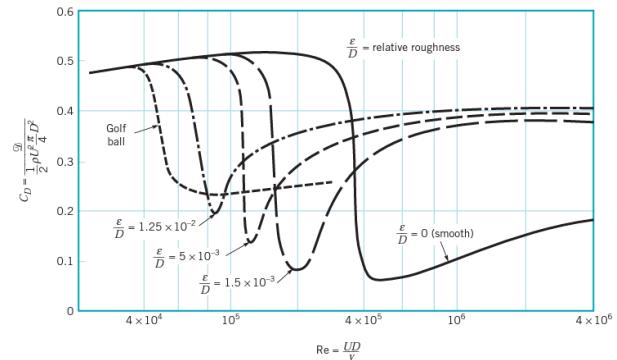
- Para $10^3 < \Re < 3 \times 10^5$, la separación del flujo ocurre justo en la sección media de la esfera, y la presión en la estela, detrás de la esfera es prácticamente constante. Y, por lo tanto, también lo es C_d . La capa límite en la parte delantera de la esfera es laminar

- Para $\Re > 3 \times 10^5$, la capa límite en la parte delantera es turbulenta, y, por lo tanto, se resiste más al desprendimiento. El punto de separación se retrasa y esto produce una disminución de C_d debido a la menor sección expuesta a alto gradiente de presiones.

De Munson[6]:

Esta transición a capa límite turbulenta se puede provocar a menores números de Reynolds con la rugosidad de la superficie.

Esta es la razón de la forma rugosa de las pelotas de golf

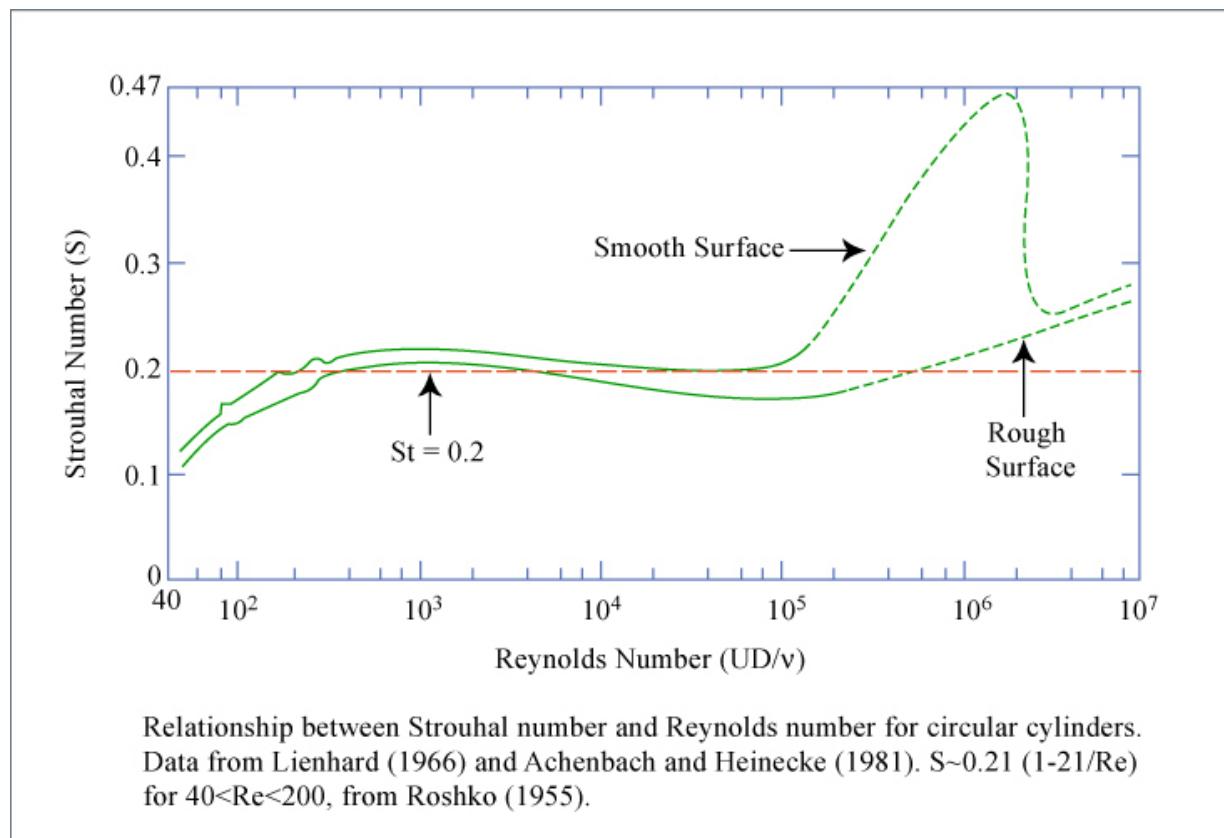


En el caso de un **cilindro** (flujo bidimensional) la curva $C_d - \Re$ es muy parecida, aunque C_d es aproximadamente el doble.



La simetría del cilindro puede provocar la aparición de una serie de vórtices uniformemente espaciados en la estela, producidos por el desprendimiento alternativo del flujo. Se conoce como estela de vórtices o *calle de von Kármán*, y aparece para $60 < \Re < 5000$.

Esta estela es responsable de la oscilación de las banderas, del zumbido de los cables. Se pueden eliminar con elementos que destruyan la simetría. Para $\Re > 1000$ el número de Strouhal ($St \equiv fD / V_\infty$) de esta calle de vórtices es aproximadamente 0,21.



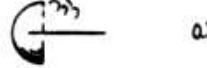
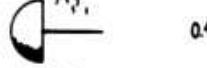
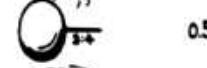
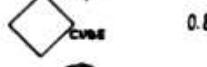
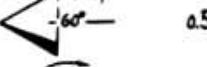
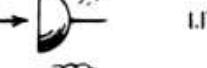
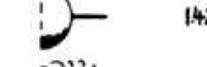
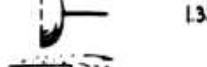
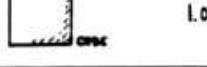
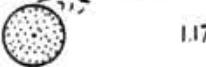
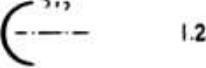
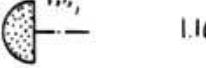
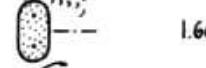
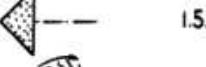
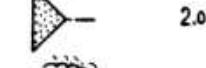
Actividad 1:

Una chimenea cilíndrica de 1 m de diámetro y 25 metros de alto está expuesta a un viento uniforme de 50 km/h en condiciones atmosféricas estándar. Los efectos de los extremos se pueden despreciar.

Estimar el momento de flexión en la base de la chimenea debido a la fuerza del viento.

Estimar la frecuencia de los vórtices de von Kármán creados en la chimenea.

En esta tabla se presentan algunos C_d de cuerpos 2D y 3D, para $\mathfrak{R} \gtrsim 10^3$. Dado que el arrastre se produce mayoritariamente por presión, el coeficiente es prácticamente constante.

| | SHAPE | C_D |
|-----|--|-------|
| 1) |  | 0.47 |
| 2) |  | 0.38 |
| 3) |  | 0.42 |
| 4) |  | 0.59 |
| 5) |  | 0.80 |
| 6) |  | 0.50 |
| 7) |  | 1.17 |
| 8) |  | 1.17 |
| 9) |  | 1.42 |
| 10) |  | 1.38 |
| 11) |  | 1.05 |
| 12) |  | 1.17 |
| 13) |  | 1.20 |
| 14) |  | 1.16 |
| 15) |  | 1.60 |
| 16) |  | 1.55 |
| 17) |  | 1.55 |
| 18) |  | 1.98 |
| 19) |  | 2.00 |
| 20) |  | 2.30 |
| 21) |  | 2.20 |
| 22) |  | 2.05 |

Actividad 2:

Un coche de competición, con una masa de 1000 Kg, que circula con una velocidad de 350 km/h frena con un paracaídas de 3 m^2 . Estima el tiempo y la distancia necesarios para reducir la velocidad a la mitad.

Nota: Un paracaídas se puede aproximar a una semiesfera abierta contra el viento.

9.7.3 Perfil aerodinámico

Si se hace un fuselaje a un cilindro en la parte trasera se puede evitar el desprendimiento del flujo. Por otro lado, se aumenta el área y, por lo tanto, el arrastre por fricción. La forma óptima de un perfil aerodinámico es la que minimiza el arrastre total, con una gran sustentación.

Definiciones:

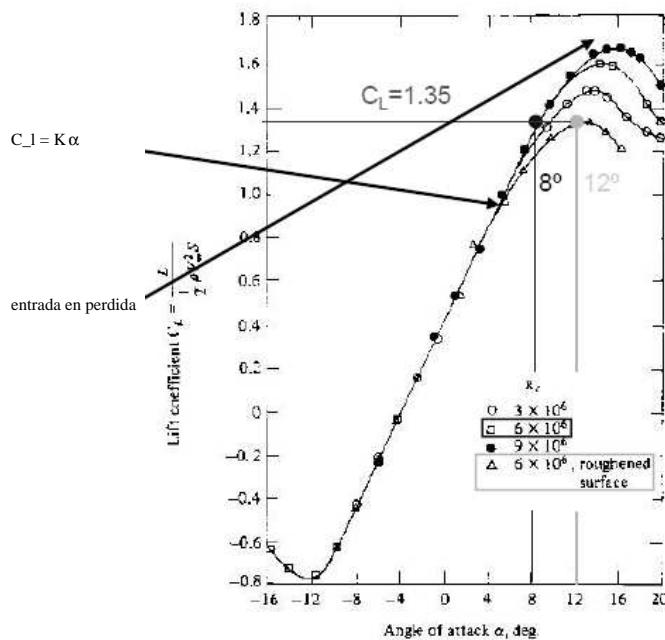
- **cuerda:** linea recta que une el borde delantera y el borde posterior del perfil. Normalmente se denomina así también a su longitud.
- **linea media:** linea formada por los puntos medios entre curva superior (extradós) y curva inferior (intradós) del perfil, según la perpendicular a ella misma. Los perfiles NACA son normalmente diseñados combinando una linea media y una distribución de espesor. Si la linea media es recta y coincide con la cuerda, se dice que el perfil es simétrico.

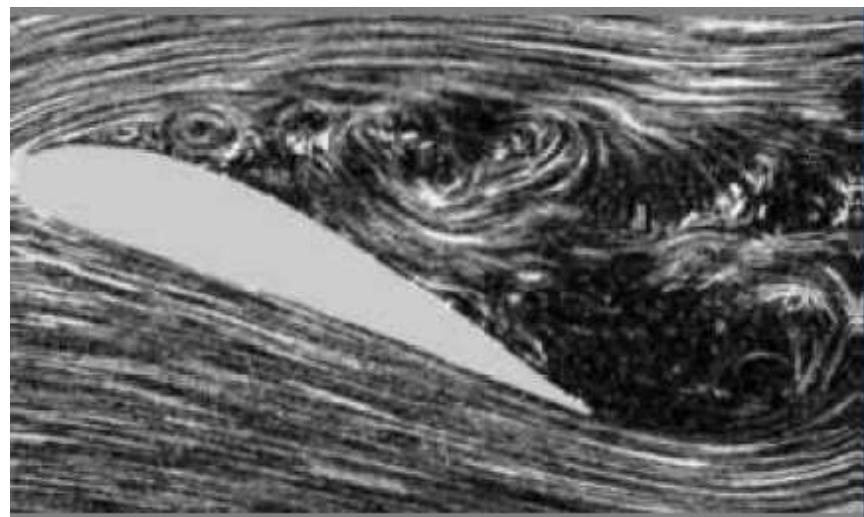
Una característica importante de un perfil aerodinámico es el lugar de la cuerda en el que se encuentra el espesor máximo. Si este punto se retrasa hacia el borde de fuga, el flujo se mantiene laminar gracias al gradiente favorable de presión.

Este tipo de perfil *laminar* tiene muy poco arrastre, pero, por otro lado, es más susceptible de entrar en pérdida.

Los coeficientes aerodinámicos dependen del ángulo de ataque, que es el ángulo que forman la cuerda y la dirección del flujo externo no perturbado.

Cuando el perfil está en pérdida, el flujo está completamente desprendido en el extradós, y el perfil se hace inestable, bajando C_l , y aumentando considerablemente C_d .





Chapter 10

Flujo interno en tuberías

10.1 La ecuación de Darcy-Weisbach

Cuando un fluido pasa por una tubería pierde energía debido a la fricción con las paredes. ésta pérdida de energía se mide normalmente como una pérdida de presión, ya que la velocidad está determinada por el caudal. Pero en realidad, se pierde una parte de la energía total, como se indica en la [ecuación de Bernoulli generalizada](#).

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2 + \Delta p_f \quad (10.1)$$

La pérdida de presión Δp_f dependerá de la longitud L , el diámetro D y la rugosidad e de las paredes de la tubería y, por otra parte, de la velocidad media v , la densidad ρ y la viscosidad μ del fluido,

$$\Delta p_f = f(L, D, e, v, \rho, \mu). \quad (10.2)$$

Son 7 variables. Del Teorema II de Buckingham sabemos que podemos reducirlas a 4 grupos adimensionales. La forma convencional de hacerlo es

$$\frac{\Delta p_f}{\frac{1}{2}\rho v^2} = f\left(\frac{L}{D}, \frac{e}{D}, \frac{\rho v D}{\mu}\right) \quad (10.3)$$

Es lógico pensar, y se comprueba experimentalmente, que ésta pérdida de presión ha de ser proporcional a la longitud L de la tubería, de forma que

$$\frac{\Delta p_f}{\frac{1}{2}\rho v^2} = \frac{L}{D} f\left(\frac{e}{D}, \frac{\rho v D}{\mu}\right) \quad (10.4)$$

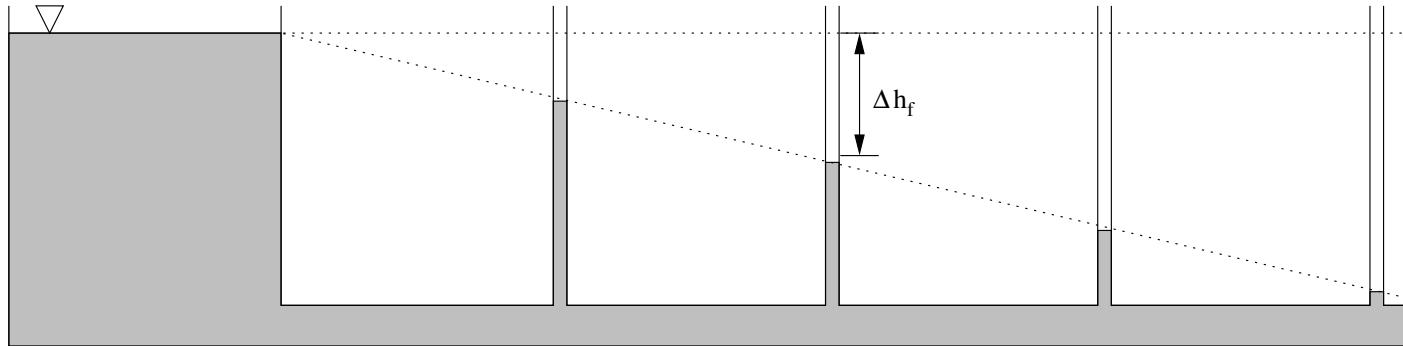
$\frac{e}{D} = \varepsilon$ es la [rugosidad relativa](#) de la tubería y $\frac{\rho v D}{\mu} = \text{Re}_D$ es el [número de Reynolds](#) del flujo. y la expresión

$$\boxed{\frac{\Delta p_f}{\frac{1}{2}\rho v^2} = \frac{L}{D} f(\varepsilon, \text{Re}_D)} \quad (10.5)$$

es la **ecuación de Darcy-Weisbach** (1850). f es el **factor de fricción de Darcy**.

A veces es conveniente expresar la ecuación de Darcy-Weisbach en términos de pérdida de altura, en lugar de pérdida de presión, $\Delta h_f = \frac{\Delta p}{\rho g}$,

$$\Delta h_f = f(\varepsilon, \text{Re}_D) \frac{L}{D} \frac{1}{2g} v^2. \quad (10.6)$$



10.2 Flujo laminar

Cuando Re_D es pequeño (menor que aproximadamente 2300), en la tubería tenemos un flujo de Poiseuille, estudiado en el tema sobre Flujo Viscoso,

$$v_x(r) = -\frac{dp}{dx} \frac{1}{4\mu} (R^2 - r^2), \quad (10.7)$$

donde ahora consideramos que el eje de la tubería está en la dirección x , y no hay variación de altura z .

$-\frac{dp}{dx} = \frac{\Delta p_f}{L}$, y el hecho de que Δp_f sea considerada una pérdida ya implica el signo negativo de la derivada,

$$v_x(r) = \frac{\Delta p_f}{L} \frac{1}{4\mu} (R^2 - r^2) \quad (10.8)$$

La velocidad media del flujo es

$$v = \frac{1}{S} \int_S v_x dS = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R v_x(r) 2\pi r dr = \frac{\Delta p_f}{L} \frac{R^2}{8\mu}. \quad (10.9)$$

Vamos a ver cuánto vale f en este caso,

$$\frac{1}{2g} v^2 = \frac{\Delta p_f}{L} \frac{R^2 v}{16\mu g} = \frac{\Delta p_f}{\rho g} \frac{D}{L} \frac{\rho D v}{64\mu}$$

$$\frac{\Delta p_f}{\rho g} = h_f = \frac{64\mu}{\rho D v} \frac{L}{D} \frac{1}{2g} v^2$$

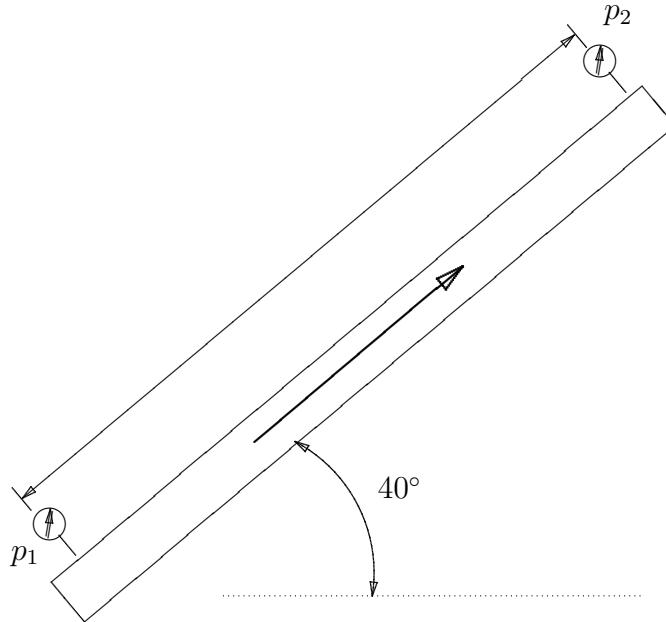
Por lo tanto,

$$f = \frac{64\mu}{\rho D v} = \frac{64}{Re_D} \quad (10.10)$$

que no depende de la rugosidad del material de la tubería.

Ejemplo 1:

Un aceite de densidad $\rho = 900 \text{ Kg/m}^3$ y viscosidad $\nu = 2 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ fluye hacia arriba por una tubería inclinada de 6 cm de diámetro, como se indica en la figura. Las presiones en los puntos 1 y 2, separados 10 metros, son $p_1 = 3.5 \times 10^5 \text{ Pa}$ y $p_2 = 2.5 \times 10^5 \text{ Pa}$, respectivamente. Vamos a calcular el caudal que circula por la tubería.



La ecuación de Bernoulli generalizada es

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2 + \Delta p_f.$$

Dado que no hay cambio de sección, $v_1 = v_2$, y la ecuación queda como

$$p_1 + \rho g z_1 = p_2 + \rho g z_2 + \Delta p_f$$

$$\Rightarrow \Delta p_f = p_1 - p_2 + \rho g(z_1 - z_2) = \Delta p - \rho g L \sin \beta$$

Supongamos que el flujo es laminar. En este caso,

$$\Delta p_f = f \frac{L}{D} \frac{1}{2} \rho v^2 = \frac{64}{Re_D} \frac{L}{D} \frac{1}{2} \rho v^2 = \frac{64\nu}{vD} \frac{L}{D} \frac{1}{2} \rho v^2 = \frac{32\nu\rho Lv}{D^2}.$$

Igualando las dos expresiones,

$$\frac{32\nu\rho Lv}{D^2} = \Delta p - \rho g L \sin \beta \Rightarrow v = \frac{D^2}{32\nu\rho L} (\Delta p - \rho g L \sin \beta)$$

Haciendo las operaciones obtenemos $v = 2.7 \text{ m/s}$ y,

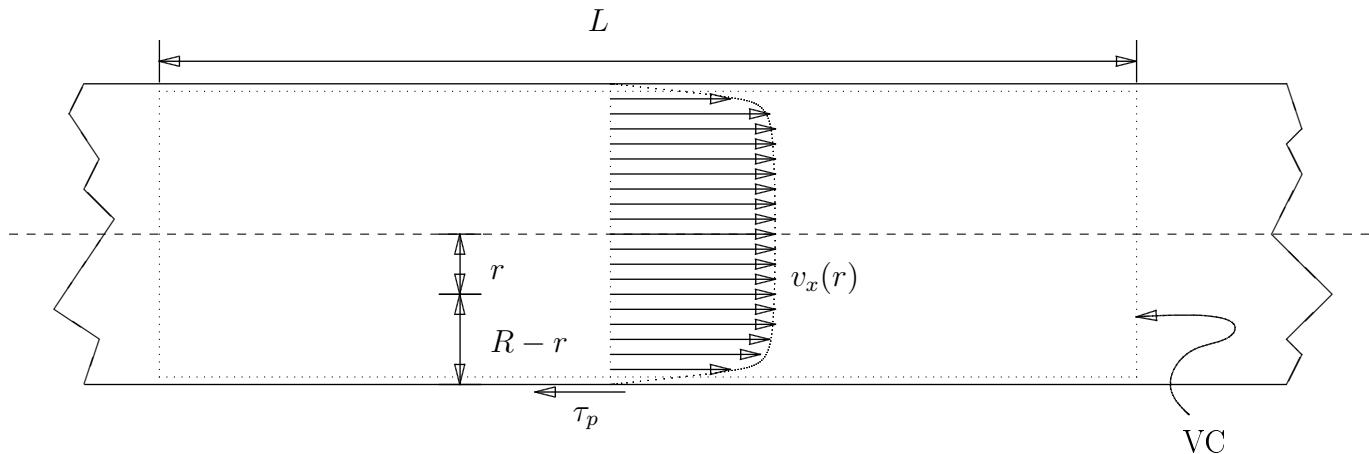
$$Q = v\pi R^2 = 7.65 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

10.3 Flujo turbulento en tubería lisa

Supongamos que el perfil de velocidades sigue la ley logarítmica en toda la sección de la tubería¹,

$$\frac{v_x(r)}{v^*} \approx \frac{1}{\kappa} \ln \frac{(R-r)v^*}{\nu} + B, \quad (10.11)$$

donde $(R-r)$ es la distancia hasta la pared.



La velocidad media es

$$v = \frac{1}{S} \int_S v_x(r) dS = \frac{v^*}{\pi R^2} \int_0^R \left[\frac{1}{\kappa} \ln \frac{(R-r)v^*}{\nu} + B \right] 2\pi r dr$$

$$v = \frac{v^*}{2} \left[\frac{2}{\kappa} \ln \frac{Rv^*}{\nu} + 2B - \frac{3}{\kappa} \right] \quad (10.12)$$

Si introducimos los valores conocidos $\kappa = 0.41$, $B = 5.0$, obtenemos

¹Ver capítulos sobre Turbulencia y Capa Límite.

$$\frac{v}{v^*} = 2.44 \ln \frac{Rv^*}{\nu} + 1.34 \quad (10.13)$$

La relación de esta velocidad media v con la pérdida de presión en la tubería Δp_f viene dada a través de $v^* = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}}$.

Aplicando conservación de cantidad de movimiento sobre le Volumen de Control de la figura, considerando que el flujo es horizontal (no hay efectos de la gravedad) y estacionario, tenemos

$$\begin{aligned} -p_1S_1 + p_2S_2 - \tau_p 2\pi RL &= \dot{m}(v_2 - v_1) = 0 \\ \Rightarrow \Delta p_f \pi R^2 - \tau_p 2\pi RL &= 0 \Rightarrow \tau_p = \Delta p_f \frac{R}{2L} \end{aligned}$$

de forma que la velocidad de fricción v^* es

$$v^* = \sqrt{\frac{\Delta p_f R}{2\rho L}}, \quad (10.14)$$

y

$$\frac{v}{v^*} = \frac{v}{\sqrt{\frac{\Delta p_f R}{2\rho L}}} = \sqrt{\frac{2\rho v^2 L}{R \Delta p_f}} = \sqrt{\frac{4\rho v^2 L}{\Delta p_f D}} = \sqrt{8 \frac{1/2 \rho v^2 L}{\Delta p_f D}} = \sqrt{\frac{8}{f}} \quad (10.15)$$

Por otro lado,

$$\frac{Rv^*}{\nu} = \frac{R}{\nu} \frac{v}{\sqrt{\frac{8}{f}}} = \frac{Rv}{\nu} \sqrt{\frac{f}{8}} = \frac{1}{2} \frac{Dv}{\nu} \sqrt{\frac{f}{8}} = \frac{1}{2} \text{Re}_D \sqrt{\frac{f}{8}}$$

De forma que podemos transformar la relación de la velocidad media V en función de v^* en una relación del factor de fricción f en función de Re_D ,

$$\sqrt{\frac{8}{f}} = 2.44 \ln \left[\frac{1}{2} \text{Re}_D \sqrt{\frac{f}{8}} \right] + 1.34, \quad (10.16)$$

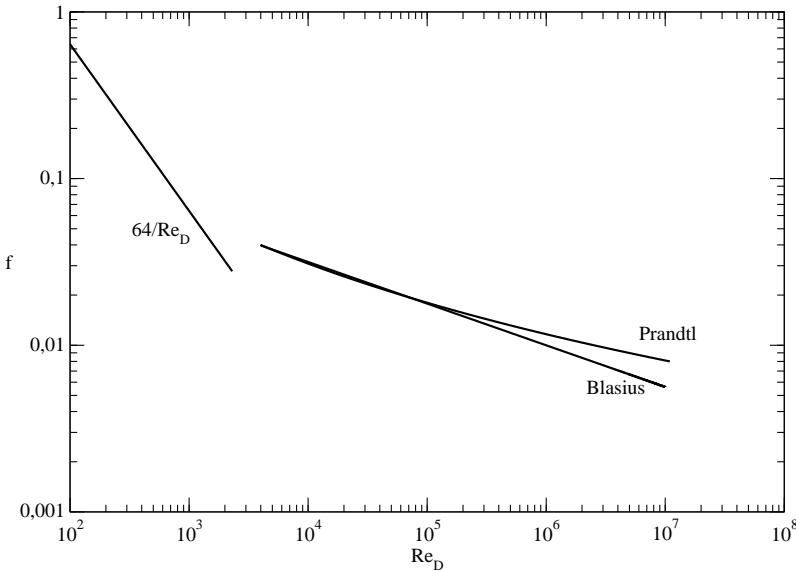
que se suele expresar en términos de logaritmo en base 10, y con las constantes ajustadas para concordar con los experimentos, dando la [ecuación de Prandtl](#),

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.0 \log \left[\text{Re}_D \sqrt{f} \right] - 0.8$$

(10.17)

Una relación explícita aproximada dada por Blasius es

$$f = \frac{0.316}{\text{Re}_D^{1/4}} \quad (10.18)$$



10.4 Flujo turbulento en tubería rugosa

Nikuradse estudió el efecto que tiene la rugosidad de la tubería sobre el flujo turbulento, descubriendo que cuando la variable adimensional $e^+ = \frac{ev^*}{\nu}$ es mayor que 70, el efecto sobre el flujo es independiente de Re_D , y la velocidad en la ley logarítmica se reduce en una cantidad $\frac{1}{\kappa} \ln e^+ - 3.5$,

$$\frac{v_x(r)}{v^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{(R-r)v^*}{\nu} + B - \left(\frac{1}{\kappa} \ln \frac{ev^*}{\nu} - 3.5 \right) = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{(R-r)}{e} + 8.5.$$

Repitiendo el análisis anterior calculando la velocidad media se llega a la relación entre f y ε con flujo completamente rugoso, en la que no hay dependencia con Re_D ,

$$\begin{aligned} \frac{v}{v^*} &= -2.0 \ln \frac{D}{e} + 3.2 \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{f}} &= -2.0 \log \frac{\varepsilon}{3.7} \end{aligned} \tag{10.19}$$

Más tarde Colebrook llegó a la expresión general que combinaba la relación para tubería lisa, y la del flujo completamente rugoso,

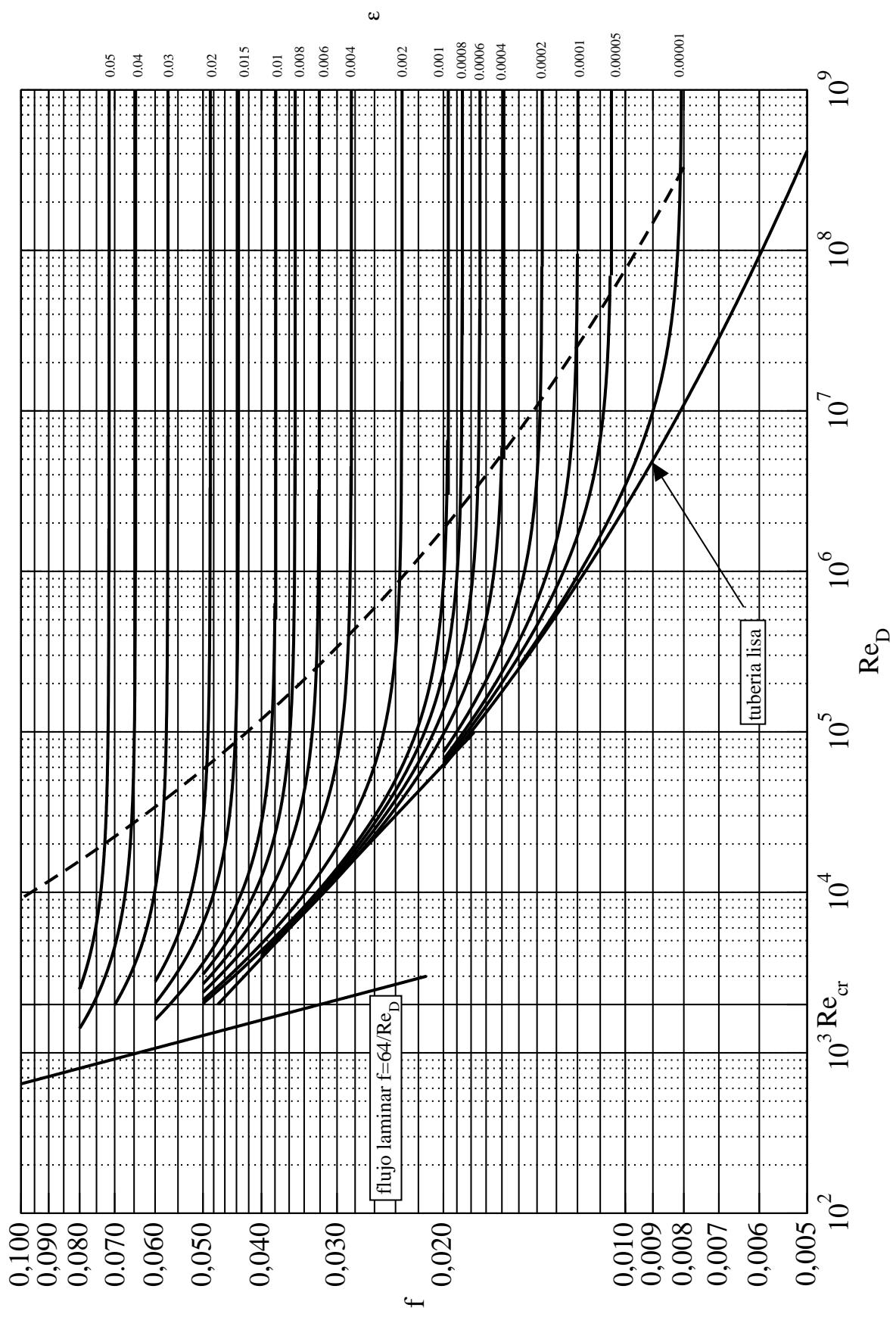
$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log \left(\frac{\varepsilon}{3.7} + \frac{2.51}{Re_D \sqrt{f}} \right) \tag{10.20}$$

y todas estas expresiones fueron condensadas en el [diagrama de Moody](#) que es la herramienta normalmente usada para el cálculo de pérdidas de presión en tuberías.

Indicación de algunas rugosidades típicas de materiales comunes usados en la construcción de tuberías

| Material | rugosidad (mm) | Material | rugosidad (mm) |
|---------------------|----------------|---------------------|----------------|
| Acero inox. nuevo | 0.002 | Hierro galvanizado | 0.15 |
| Acero comercial | 0.046 | Fundición alfaltado | 0.12 |
| Acero oxidado | 2.0 | Hormigón | 0.04 - 2.0 |
| Hierro de fundición | 0.26 | Plástico | 0.0015 |
| Hierro forjado | 0.046 | Latón | 0.002 |

Diagrama de Moody



Ejemplo :

Queremos calcular la pérdida de presión en una tubería de fundición asfaltada de 150 mm de diámetro y 50 metros de longitud por la que circula agua con una velocidad media de 2,5 m/s.

En primer lugar calculamos Re_D y la rugosidad relativa,

$$\text{Re}_D = \frac{vD}{\nu} = \frac{2.5 \times 0.15}{10^{-6}} = 3.75 \times 10^5$$

$$\varepsilon = \frac{e}{D} = \frac{0.12}{150} = 8 \times 10^{-4}$$

Con estos valores estamos en la zona de flujo turbulento, aunque no es completamente rugoso, de forma que el factor de fricción va a venir dado por

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log \left(\frac{\varepsilon}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re}_D \sqrt{f}} \right) = -2.0 \log \left(2.162 \times 10^{-4} + \frac{6.693 \times 10^{-6}}{\sqrt{f}} \right)$$

Hay, por lo menos, dos formas de resolver esta ecuación.

La primera es mediante un proceso iterativo. Iniciamos el cálculo con una aproximación de f que podemos obtener del diagrama de Moody. Por ejemplo, $f_0 = 0.019$. Calculamos f_1 mediante

$$\frac{1}{\sqrt{f_1}} = -2.0 \log \left(2.162 \times 10^{-4} + \frac{6.693 \times 10^{-6}}{\sqrt{f_0}} \right) \rightarrow f_1 = 0.01954$$

y seguimos iterando

$$\frac{1}{\sqrt{f_2}} = -2.0 \log \left(2.162 \times 10^{-4} + \frac{6.693 \times 10^{-6}}{\sqrt{f_1}} \right) \rightarrow f_2 = 0.01953$$

hasta que obtenemos una convergencia suficiente.

La segunda es con una calculadora que resuelva ecuaciones de forma implícita (el proceso es el mismo, pero lo hace la calculadora de una forma mucho más rápida).

El valor correcto es $f = 0.01953$, de forma que la pérdida de presión es

$$\Delta p_f = f \frac{L}{D} \frac{1}{2} \rho v^2 = 0.01953 \times \frac{50}{0.15} \times \frac{1}{2} \times 1000 \times 2.5^2 = 20340 \text{ Pa}$$

10.5 Cálculo de caudales

Calcular la pérdida de presión Δp_f a partir de los datos de la geometría de la tubería y las propiedades del fluido y su caudal es fácil.

Más interesante es calcular el caudal conocida la pérdida de presión. La forma de resolver este tipo de problemas es mediante un proceso iterativo, en el que se inicia considerando que el flujo es completamente rugoso, de forma que f no dependa de Re_D

$$\frac{1}{\sqrt{f_0}} = -2.0 \log \frac{\varepsilon}{3.7}$$

Una vez tenemos f , calculamos la velocidad con

$$\Delta p_f = f_0 \frac{L}{D} \frac{1}{2} \rho v_0^2$$

y, de aquél caudal.

Con esta velocidad se calcula $\text{Re}_{D0} = \frac{v_0 D}{\nu}$ y verificamos si el flujo es totalmente rugoso. Si es así, el problema está terminado. Si no, tenemos que volver a calcular f_1 mediante la expresión de Colebrook

$$\frac{1}{\sqrt{f_1}} = -2.0 \log \left(\frac{\varepsilon}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re}_D \sqrt{f_1}} \right)$$

e iterar hasta obtener la convergencia.

Ejemplo :

En una tubería de fundición asfaltada de 150 mm de diámetro y 20 metros de largo, circula agua y la pérdida de presión es de 4 m.c.a. Queremos saber cuánto es el caudal de agua.

Suponemos flujo completamente rugoso con

$$\varepsilon = \frac{e}{D} = \frac{0.12}{150} = 8.0 \times 10^{-4}$$

y calculamos f_0 ,

$$\frac{1}{\sqrt{f_0}} = -2.0 \log \frac{8.0 \times 10^{-4}}{3.7} \rightarrow f_0 = 0.0186$$

El primer valor tentativo de la velocidad del flujo vendrá dado por

$$\begin{aligned} \rho g h_f &= f_0 \frac{L}{D} \frac{1}{2} \rho v_0^2 \\ v_0 &= \sqrt{\frac{g h_f 2D}{f_0 L}} \rightarrow v_0 = 5.62 \text{ m/s.} \end{aligned}$$

Calculamos el número de Reynolds

$$\text{Re}_{D0} = \frac{v_0 D}{\nu} = 8.43 \times 10^5$$

Con este valor, no estamos en flujo completamente rugoso. De forma que volvemos a calcular el factor de fricción y la velocidad

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{f_1}} &= -2.0 \log \left(\frac{8.0 \times 10^{-4}}{3.7} + \frac{2.51}{8.43 \times 10^5 \sqrt{f_1}} \right) \\ \rightarrow f_1 &= 0.0190 \rightarrow v_1 = 5.56 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Si el grado de exactitud que se requiere no es muy elevado, podemos quedarnos con $v = 5.6 \text{ m/s}$ y $Q = v \pi D^2 / 4 = 0.1 \text{ m}^3/\text{s}$.

10.6 Dimensionamiento de tuberías

A veces se quiere saber cuál es el diámetro necesario de una tubería que debe llevar un determinado caudal con una pérdida de presión determinada. El problema no es sencillo, ya que para poder calcular f es necesario Re_D y ε , y los dos dependen del diámetro D .

Debemos de usar de nuevo un proceso iterativo. Iniciamos con un valor de f . Un valor típico es $f_0 = 0.02$.

A partir de este valor de f calculamos el diámetro mediante

$$\Delta p_f = f_0 \frac{L}{D} \frac{1}{2} \rho v_0^2 = \frac{8f_0 \rho L Q^2}{\pi^2 D_0^5}$$

$$\Rightarrow D_0 = \sqrt[5]{\frac{8\rho f_0 L Q^2}{\pi^2 \Delta p_f}}$$

Con este valor de D_0 calculamos ε_0 y $\text{Re}_{D_0} = \frac{v_0 D_0}{\nu} = \frac{4Q}{\pi D_0 \nu}$, y con estos valores calculamos f_1 , y continuamos el proceso iterativo hasta conseguir la convergencia deseada.

Ejemplo :

En el ejemplo anterior, queremos que el caudal sea el doble. ¿Cuál tendrá que ser el diámetro?

Queremos que $Q = 0.2 \text{ m}^3/\text{s}$. Iniciamos el proceso con $f_0 = 0.02$, y obtenemos

$$D_0 = \sqrt[5]{\frac{8\rho f_0 L Q^2}{\pi^2 \rho g h_f}} = \sqrt[5]{\frac{8f_0 L Q^2}{\pi^2 g h_f}} = 0.201 \text{ m}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{e}{D_0} = \frac{0.12}{0.201} = 5.96 \times 10^{-4}$$

$$\text{Re}_{D_0} = \frac{4Q}{\pi D_0 \nu} = 1.27 \times 10^6$$

$$\frac{1}{\sqrt{f_1}} = -2.0 \log \left(\frac{5.96 \times 10^{-4}}{3.7} + \frac{2.51}{1.27 \times 10^6 \sqrt{f_1}} \right) \rightarrow f_1 = 0.0177$$

$$D_1 = \sqrt[5]{\frac{8f_1 L Q^2}{\pi^2 g h_f}} = 0.197 \text{ m}$$

y seguiríamos quizás con una segunda iteración. Al final, de todas formas, hemos de escoger una medida de diámetro normalizada. En nuestro caso, 200 mm.

10.7 Conductos no circulares

Cuando el conducto no es circular los cálculos son más o menos los mismos, pero se complica un poco el álgebra.

Como medida equivalente al radio de la tubería se usa el concepto de **radio hidráulico**, definido como la relación entre la sección de paso del flujo y el perímetro mojado en el conducto

$$R_h = \frac{A}{P} \quad (10.21)$$

donde hay que tener en cuenta que P es todo el perímetro en el que haya esfuerzo tangencial.

La pérdida de presión se calcula entonces como

$$\Delta p_f = f \frac{L}{D_h} \frac{1}{2} \rho v^2$$

donde $D_h = 4R_h$ es el **diámetro hidráulico**, y f es función de nuevo de la rugosidad relativa, $\varepsilon = e/D_h$ y el número de Reynolds se calcula como

$$\text{Re}_{D_h} = \frac{v D_h}{\nu}. \quad (10.22)$$

Por desgracia, para el cálculo de f no sirven las expresiones deducidas para los conductos circulares ni el diagrama de Moody, aunque dan un valor bastante aproximado (dentro del 15%) para flujo turbulento. Para flujo laminar el error es mayor, pero, por otro lado, el cálculo directo es más sencillo.

Ejemplo :

Calcular el factor de fricción f para el flujo en un conducto rectangular mucho más ancho que alto ($b \gg h$) para flujo laminar y comparar con $f = 64/\text{Re}_D$.

En este caso podemos considerar el flujo como el producido entre dos placas paralelas separadas por una distancia h . Sabemos que la distribución de velocidades es una parábola. Con el eje z según la dirección del flujo y el eje y perpendicular a las placas, tenemos

$$v_z(y) = \frac{1}{\mu} \frac{\Delta p}{L} [yh - y^2]$$

La velocidad media es

$$v = \frac{1}{h} \int_0^h \frac{1}{\mu} \frac{\Delta p}{L} [yh - y^2] dy = \frac{1}{12\mu} \frac{\Delta p}{L} h^2$$

Suponiendo que la velocidad es constante y que no hay ningún otro tipo de aporte o consumo de presión (gravedad, bombas, etc...), la variación de presión Δp es la pérdida de presión por fricción, Δp_f ,

$$\Delta p_f = \frac{12\mu Lv}{h^2}$$

Vamos a relacionarlo con el número de Reynolds, que se define como

$$\text{Re}_{D_h} = \frac{\rho D_h v}{\mu}$$

donde $D_h = 4R_h = 4bh/(2a + 2b) = 2h$ si consideramos la aproximación $b \gg h$, de forma que, eliminado μ entre Re_{D_h} y Δp_f , obtenemos

$$\Delta p_f = \frac{24\rho Lv^2}{h\text{Re}_{D_h}} = \frac{96}{\text{Re}_{D_h}} \frac{L}{D_h} \frac{1}{2} \rho v^2$$

es decir, $f = 96/\text{Re}_{D_h}$, un 50% más alto de lo correspondiente a un conducto circular. La razón es que para un mismo diámetro hidráulico, un rectángulo siempre tiene mayor perímetro y, por lo tanto, mayor zona de actuación del esfuerzo tangencial de pared.

Para un conducto rectangular con $b \approx h$ el cálculo es mucho más complicado. Se suele usar entonces el concepto de **diámetro efectivo**, que es el diámetro que habría de tener un conducto circular que, en régimen laminar, tuviese la misma pérdida de carga con la misma velocidad media. Ya que para un conducto circular,

$$\Delta p_f = \frac{64}{\text{Re}} \frac{L}{D_e} \frac{1}{2} \rho v^2$$

obtenemos

$$\frac{64}{\text{Re}} \frac{L}{D_e} \frac{1}{2} \rho v^2 = f \frac{L}{D_h} \frac{1}{2} \rho v^2$$

$$\Rightarrow D_e = \frac{64}{f\text{Re}} D_h$$

donde $f\text{Re}$ se determina a partir de cálculos de la teoría laminar. éste diámetro se usa entonces también el cálculo de f con flujo turbulento.

| b/h | $f\text{Re}$ |
|-------|--------------|
| 0.0 | 96.00 |
| 0.05 | 89.91 |
| 0.1 | 84.68 |
| 0.125 | 82.34 |
| 0.167 | 78.81 |
| 0.25 | 72.93 |
| 0.4 | 65.47 |
| 0.5 | 62.19 |
| 0.75 | 57.89 |
| 1.0 | 56.91 |

Ejemplo :

Por un conducto rectangular de 200×150 mm y 30 metros de largo, con una rugosidad $e = 0.1$ mm, circulan $0.7 \text{ m}^3/\text{s}$ de aire a 20°C y 1 atmósfera de presión. Calcular la pérdida de presión.

La velocidad media del flujo es

$$v = \frac{0.7}{0.03} = 23,3 \text{ m/s}$$

y el diámetro hidráulico es

$$D_h = 4 \frac{A}{P} = 4 \frac{ab}{2(a+b)} = \frac{2ab}{a+b} = 171.43 \text{ mm}$$

El diámetro efectivo es, de la tabla de $f\text{Re}$,

$$D_e = \frac{64}{57.89} D_h = 189.5 \text{ mm.}$$

Con este diámetro calculamos el factor de fricción,

$$\text{Re}_{D_e} = \frac{v D_e}{\nu} = 2.5 \times 10^5$$

$$\varepsilon = \frac{e}{D_e} = \frac{0.1}{189.5} = 5.3 \times 10^{-4},$$

usando el diagrama de Moody, $f = 0.0185$, y la pérdida de presión

$$\Delta p_f = f \frac{L}{D_e} \frac{1}{2} \rho v^2 = 0.0185 \times \frac{30}{0.1895} \times \frac{1}{2} 1.2 \times 23.3^2 = 954 \text{ Pa}$$

Si hubiésemos hecho el cálculo sin la corrección del diámetro efectivo, directamente con D_e , habríamos obtenido $\Delta p_f = 1087 \text{ Pa}$, es decir, un 15% más grande.

10.8 Pérdidas de carga secundarias

Además de la pérdida de carga provocada por fricción con las paredes de las tuberías y conductos, existen también las *pérdidas de carga de forma, o secundarias*, creadas en puntos concretos de la instalación donde el flujo sufre cambios bruscos de módulo y/o dirección de la velocidad. Esto puede darse en:

- Codos
- T's
- Bifurcaciones
- Válvulas
- Entradas/salidas de depósitos
- Filtros
- Toberas/difusores
- etc...

La pérdida de carga en estos elementos se caracteriza mediante el *coeficiente de pérdidas secundarias*

$$k = \frac{\Delta p_s}{\frac{1}{2} \rho v^2} \tag{10.23}$$

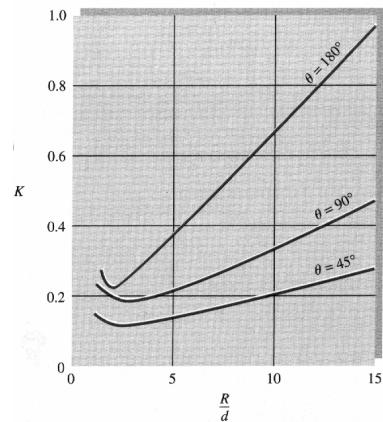
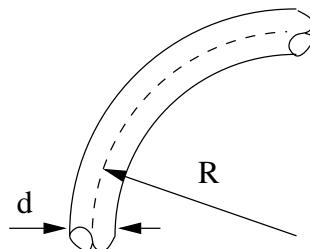
donde v es la velocidad del flujo en la tubería asociada al elemento.

Debido a la gran variedad de geometrías y a la complejidad del flujo, no hay una teoría que permita calcular el valor de k . éste viene dado por tablas o gráficas experimentales que a menudo, como en el caso de las válvulas, son facilitadas por el fabricante.

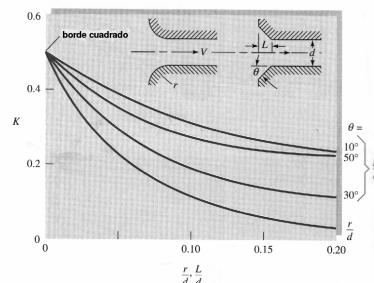
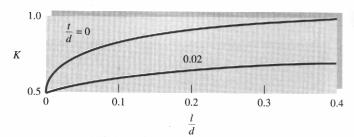
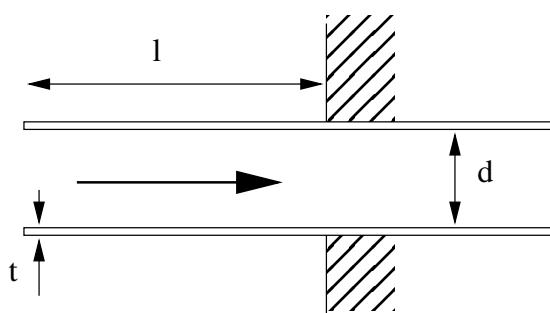
En general, se considera que el flujo es turbulento.

Como ejemplo, mostramos el valor de k para un codo de 45° , 90° y 180° en función de la relación entre el diámetro de la tubería d y el radio de curvatura del codo R

La forma de las gráficas es debida al efecto conjunto de la pérdida de carga primaria, que aumenta con R/d y la secundaria, que disminuye.



En la salida brusca a un depósito, independientemente de la forma de ésta, $k = 1$, debido a que, simplemente, se pierde la presión dinámica que lleva el flujo en la tubería. Sin embargo, en la *entrada de un depósito a una tubería*, el valor de k depende fuertemente de la geometría, como se puede observar en las gráficas.



En una expansión, o contracción brusca, el valor de k depende de la relación de diámetros de las tuberías. En el caso de la expansión, el esfuerzo tangencial producido en la zona de aguas muertas es negligible, y un análisis simple de conservación de cantidad de movimiento y energía lleva a la expresión

$$k = \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)^2$$

Para la contracción brusca, el flujo que llega de la tubería grande se contrae por debajo del diámetro de la tubería pequeña, dando lugar a la vena contracta. Experimentalmente se encuentra que

$$k \approx 0.42 \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)$$

si d/D no es muy cercano a 1.

Si la contracción es gradual, las pérdidas de carga secundarias son muy pequeñas, y se pueden aproximar por los valores experimentales

| 2θ | 30 | 45 | 60 |
|-----------|------|------|------|
| k | 0.02 | 0.04 | 0.07 |

Para una expansión gradual, también conocida como difusor, el valor de k es como se muestra en la figura.

El papel de un difusor es aumentar la presión estática del flujo. Esta característica viene dada por el coeficiente de recuperación de presión

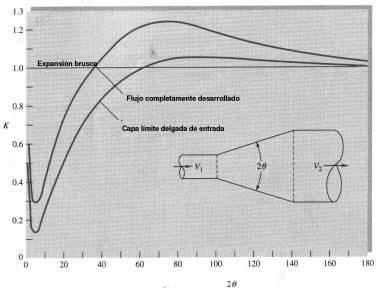
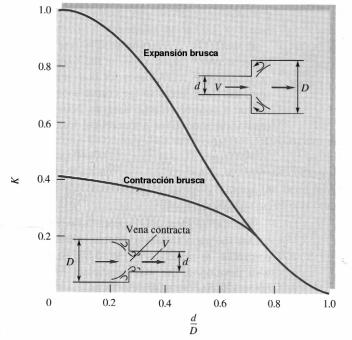
$$C_p = \frac{p_2 - p_1}{\frac{1}{2} \rho v_1^2}$$

El coeficiente de pérdida de carga secundaria y el coeficiente de recuperación de presión están relacionados mediante

$$k = 1 - \frac{d_1^4}{d_2^4} - C_p$$

Actividad:

Demostrar esta expresión y discutir usando la gráfica, cuál es el mejor valor de θ para un difusor. ¿A qué es debido el aumento de k para pequeños valores de θ ?



Chapter 11

Flujo Compresible

En las sesiones introductorias del curso vimos que el criterio de compresibilidad relacionaba la presión con la velocidad del flujo. Para el aire la velocidad a partir de la cual el flujo puede y debe ser considerado compresible está alrededor de 40 m/s. Teóricamente también los líquidos en ciertas condiciones pueden ser considerados compresibles. Pero estas condiciones son difíciles de conseguir en la práctica (unos 200 m/s y/o más de 200 atm).

En el estudio de flujo compresible tiene un papel importante la termodinámica del proceso.

El parámetro más importante en el estudio del flujo compresible es el número de Mach,

$$\text{Ma} = \frac{u}{c} \quad (11.1)$$

donde c es la velocidad del sonido en el fluido, que depende, como veremos de la temperatura del fluido.

11.1 Repaso de Termodinámica

La variación de entropía se calcula a partir de las dos primeras leyes de la Termodinámica, que, para un gas perfecto, da

$$Tds = dh - \frac{dp}{\rho} = c_p dT - \frac{dp}{\rho} \quad (11.2)$$

Dado que

$$\frac{p}{\rho} = rT; \text{ con } r = \frac{R}{M} = c_p - c_v,$$

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - r \frac{dp}{p}$$

$$\Rightarrow \int_1^2 ds = \int_1^2 c_p \frac{dT}{T} - r \ln \frac{p_2}{p_1}$$

Si c_p es variable, la integral se resuelve de forma numérica o con la ayuda de tablas. Si puede ser considerada constante,

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - r \ln \frac{p_2}{p_1} \quad (11.3)$$

Si realizamos el mismo cálculo, pero a partir de $ds = c_v dT - pd\frac{1}{\rho}$ habríamos llegado a

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} - r \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (11.4)$$

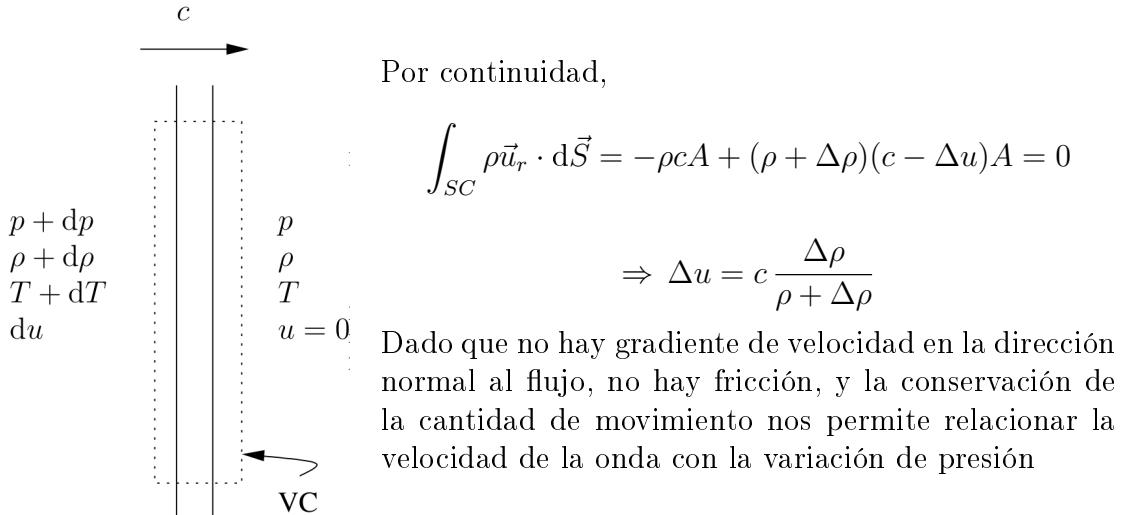
Estas relaciones nos permiten calcular la variación de entropía en procesos no isoentrópicos, como puede ser, por ejemplo el frente de una onda de choque.

Si el proceso es isoentrópico, $s_2 - s_1 = 0$ y podemos escribir las conocidas relaciones

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^\gamma = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \text{ con } \gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (11.5)$$

11.2 La velocidad del sonido

El sonido no es más que una onda de presión de amplitud pequeña.



$$-\Delta p A = \dot{m}(u_2 - u_1) = \rho A c (-\Delta u) \Rightarrow \Delta p = \rho c \Delta u$$

$$\begin{aligned} \Delta p &= \rho c \left[c \frac{\Delta\rho}{\rho + \Delta\rho} \right] = c^2 \frac{\rho \Delta\rho}{\rho + \Delta\rho} \\ &\Rightarrow c^2 = \frac{\Delta p}{\Delta\rho} \left[1 + \frac{\Delta\rho}{\rho} \right] \end{aligned}$$

En el límite $\Delta\rho \rightarrow 0$, hablamos de velocidad del sonido,

$$c = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} \quad (11.6)$$

Si el proceso es adiabático (no hay gradientes de temperatura en el interior o exterior de la onda)

$$c = \sqrt{\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s} = \sqrt{\gamma \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_T}$$

Para un gas perfecto, $\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_T = rT$, de forma que

$$c = \sqrt{\gamma r T}$$

Para el aire, $\gamma = 1.4$ y $r = 287$, de forma que

$$c \approx 20\sqrt{T}$$

con T en Kelvins y c en m/s. A $20^\circ C$, $c \approx 340 \text{ m/s} \approx 1220 \text{ km/h}$

11.3 Flujo adiabático

Ecuación de Bernoulli (la poca densidad del fluido hace que el término de gravedad sea menoscindible)

$$h + \frac{u^2}{2} = \text{cte} = h_0 \quad (11.7)$$

h_0 : entalpía de estancamiento. Entalpía que obtendríamos en el fluido si lo llevássemos al reposo de forma adiabática.

Para gases reales, el cálculo de la entalpía para una cierta temperatura debe realizarse con tablas. Para gases perfectos, $h = c_p T$,

$$c_p T + \frac{u^2}{2} = c_p T_0 \quad (11.8)$$

T_0 : Temperatura de estancamiento

Si la entalpía (o la temperatura) son llevados a cero de forma adiabática, la velocidad del flujo alcanza su valor máximo,

$$u_{max} = \sqrt{2h_0}$$

$$u_{max} = \sqrt{2c_p T_0} \quad \text{para un gas perfecto}$$

Podemos obtener la forma adimensional de la ecuación de Bernoulli,

$$1 + \frac{u^2}{2c_p T} = \frac{T_0}{T} \quad (11.9)$$

o bien, usando $c_p T = \gamma r T / (\gamma - 1) = c^2 / (\gamma - 1)$,

$$\boxed{1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 = \frac{T_0}{T}} \quad (11.10)$$

Dado que la velocidad del sonido es proporcional a \sqrt{T} ,

$$\frac{c_0}{c} = \sqrt{\frac{T_0}{T}} = \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \right]^{1/2} \quad (11.11)$$

Estas expresiones son válidas siempre que el flujo sea adiabático. Si, además, es isoentrópico (es decir, reversible), para un gas perfecto tenemos

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} \text{Ma}^2 \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (11.12)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2 \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (11.13)$$

11.4 Valores sónicos

Además de T_0 , p_0 , ρ_0 y c_0 , también son útiles los valores denominados **sónicos**, o **críticos**, obtenidos cuando $\text{Ma} = 1.0$,

$$p^* = p_0 \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}; T^* = T_0 \frac{2}{\gamma+1}; \rho^* = \rho_0 \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}; c^* = c_0 \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{2}} (= u^*)$$

Ejemplo :



$$u_1 = 240 \text{ m/s}$$

$$T_1 = 320 \text{ K}$$

$$p_1 = 170 \text{ kPa}$$

Flujo adiabático de aire

Queremos calcular T_{01} , p_{01} , ρ_{01} , Ma_1 , $u_{\max 1}$ y u_1^* .

Si $u_2 = 290 \text{ m/s}$ y $p_2 = 135 \text{ kPa}$, calcular p_{02} :

Dado que no sabemos si el flujo es isoentrópico o no, sólo podemos usar las relaciones isoentrópicas para calcular p_0 y ρ_0 de forma local en 1.

$$\begin{aligned} r &= 287 \text{ J/Kg K} \\ \gamma &= 1.4 \\ c_p &= 1005 \text{ J/Kg K} \end{aligned}$$

Empezamos calculando Ma,

$$c_1 = \sqrt{\gamma r T_1} = 358.6 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \text{Ma}_1 = \frac{240}{358.6} = 0.67$$

$$T_{01} = \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} \text{Ma}^2 \right] T_1 = 348.7 \text{ K}$$

Otra forma de calcularlo habría sido con

$$T_{01} = T_1 + \frac{u_1^2}{2c_p}$$

En el punto 2 podemos calcular la temperatura, dado que el flujo es adiabático y, por lo tanto, $T_{01} = T_{02}$,

$$T_2 = T_{02} - \frac{u_2^2}{2c_p} = 306.9 \text{ K}$$

y la presión de estancamiento en 2 es

$$p_{02} = p_2 \left(\frac{T_{02}}{T_2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 211 \text{ kPa}$$

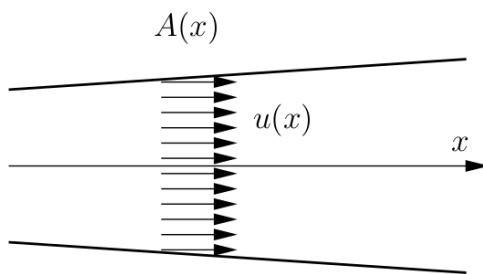
Actividad 1:

- 1.- $p_{02} < p_{01}$. ¿Porqué?
- 2.- ¿Es el conducto de sección constante?
- 3.- ¿Cuál es la variación de entropía?

11.5 Difusores e inyectores

Consideremos un conducto de sección variable. Por simplificación, supondremos que el flujo es unidimensional, y la única variable dimensional importante es el eje x del conducto. En cualquier punto x se cumple, por continuidad,

$$\rho(x)u(x)A(x) = \dot{m} = \text{cte} \quad (11.14)$$



Si derivamos esta ecuación obtenemos

$$uAd\rho + u\rho dA + \rho Adu = 0 \quad (11.15)$$

y, dividiendo por \dot{m} ,

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{du}{u} = 0 \quad (11.16)$$

Esto significa que la variación relativa de cualquiera de las tres cantidades implica una variación en sentido contrario de, al menos, una de las otras dos.

Para ver cómo ocurre esto, consideremos la ecuación de Euler (menospreciamos la fricción) para la dirección x , estacionaria y sin el término de gravedad

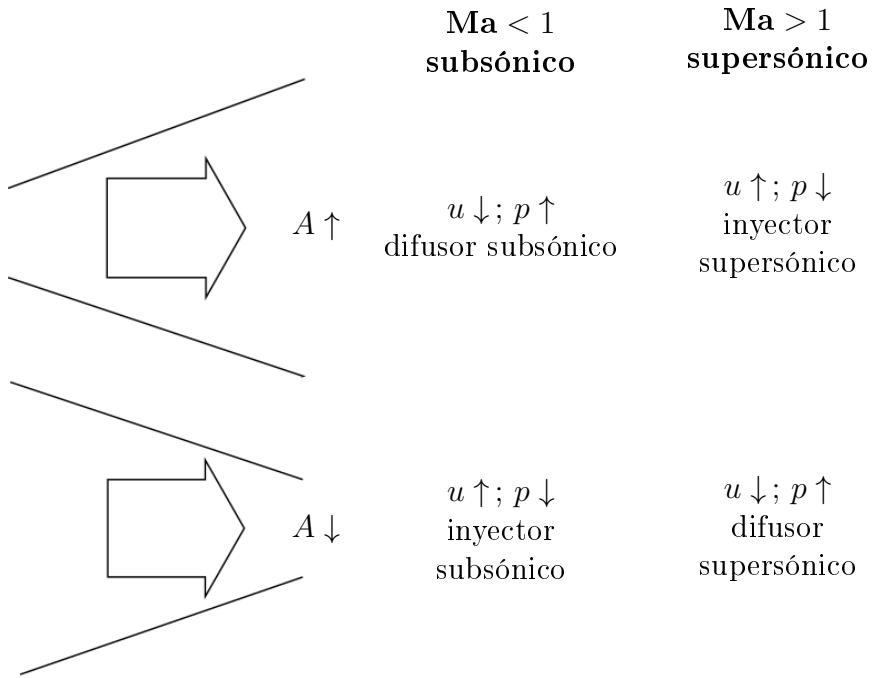
$$u \frac{du}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{du}{u} = -\frac{dp}{\rho u^2} \quad (11.17)$$

y, por otro lado, de la expresión de la velocidad del sonido,

$$dp = c^2 d\rho \Rightarrow \frac{du}{u} = -\frac{c^2 d\rho}{\rho u^2} \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -Ma^2 \frac{du}{u} \quad (11.18)$$

Introduciendo esto en la ecuación de continuidad, obtenemos

$$\frac{du}{u} = -\frac{dp}{\rho u^2} = \frac{1}{Ma^2 - 1} \frac{dA}{A} \quad (11.19)$$



$Ma = 1$ (flujo sónico o crítico) sólo es posible cuando $dA = 0$, es decir, cuando hay un mínimo o un máximo de sección.

En condiciones críticas o sónicas, el flujo másico sigue siendo el mismo

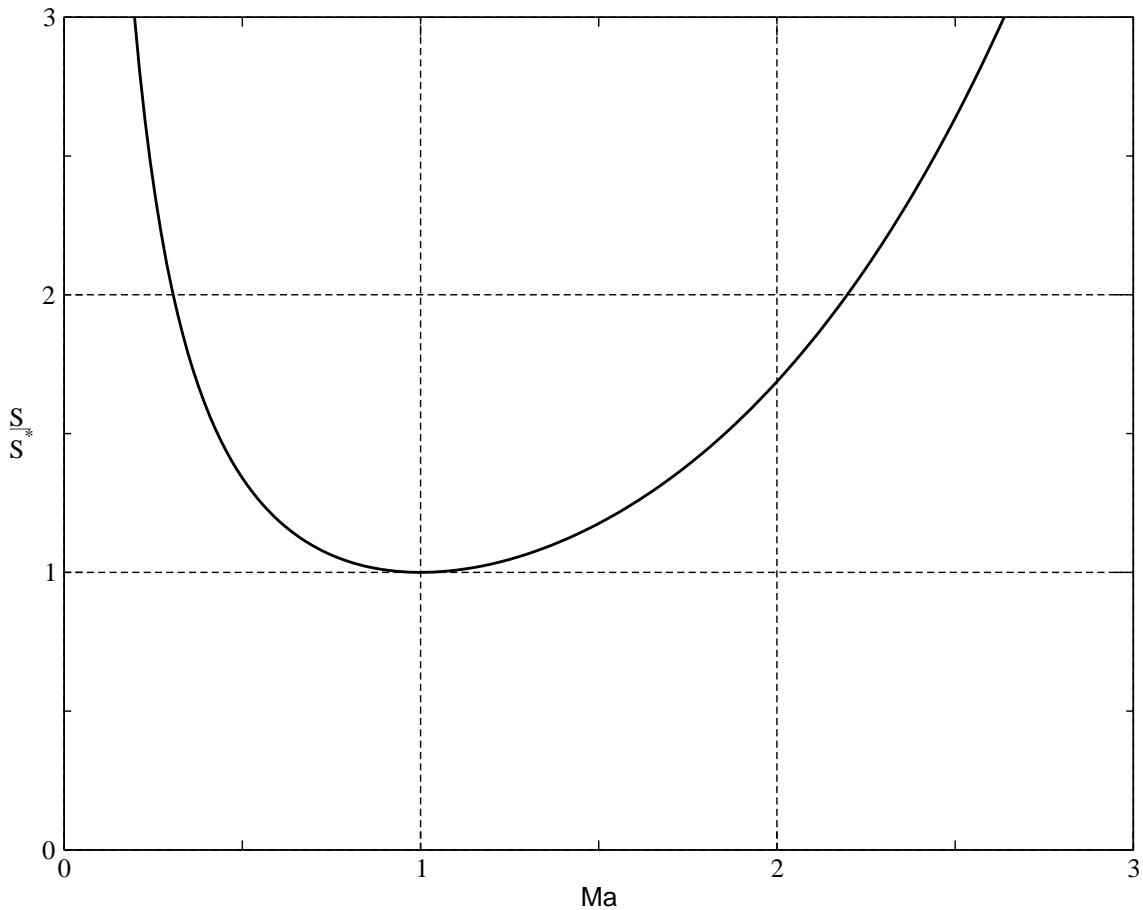
$$\rho^* u^* A^* = \rho u A = \dot{m} \Rightarrow \frac{A}{A^*} = \frac{\rho^* u^*}{\rho u}, \quad (11.20)$$

que se puede expresar en función de γ y Ma (ver Flujo Compresible I)

$$\begin{aligned}\frac{\rho^*}{\rho} &= \frac{\rho^* \rho_0}{\rho_0 \rho} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \\ \frac{u^*}{u} &= \frac{c^*}{u} = \frac{c}{u} \frac{c^*}{c} = \frac{1}{Ma} \frac{c^* c_0}{c} = \frac{1}{Ma} \sqrt{\frac{T^*}{T_0}} \sqrt{\frac{T_0}{T}} = \frac{1}{Ma} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \Rightarrow \frac{A}{A^*} &= \frac{1}{Ma} \left[\frac{2 + (\gamma - 1) Ma^2}{\gamma + 1} \right]^{\frac{1}{2}(\gamma+1)}\end{aligned}\quad (11.21)$$

Para el caso particular de aire, $\gamma = 1.4$,

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{Ma} \frac{(2 + 0.4 Ma^2)^3}{13.824} \quad (11.22)$$



En un flujo isoentrópico en un conducto, las condiciones críticas sólo pueden darse en un cuello (área mínima).

Para cualquier valor de $A/A^* > 1$ hay dos posibles soluciones de Ma , una con $Ma < 1$ (flujo subsónico) y otra con $Ma > 1$ (flujo supersónico).

Ejemplo :

Flujo isoentrópico de aire en un conducto. En la sección 1 las condiciones son:

$$\begin{aligned} A_1 &= 0.05 \text{ m}^2 \\ u_1 &= 180 \text{ m/s} \\ p_1 &= 500 \text{ kPa} \\ T_1 &= 470 \text{ K} \end{aligned}$$

Calcular Ma_1 , T_0 , p_0 , A^* y \dot{m} . En la sección 2 el área es $A_2 = 0.036 \text{ m}^2$. Calcular Ma_2 y p_2 suponiendo que el flujo es a) subsónico y b) supersónico.

Calcular la temperatura de estancamiento es fácil,

$$T_0 = T_1 + \frac{u_1^2}{2c_p} = 470 + \frac{180^2}{2 \times 1005} = 486 \text{ K}$$

y la velocidad del sonido es

$$c_1 = \sqrt{\gamma r T_1} = \sqrt{1.4 \times 287 \times 470} = 435 \text{ m/s}$$

y, por lo tanto,

$$\text{Ma}_1 = \frac{u}{c} = \frac{180}{435} = 0.414$$

Con Ma_1 podemos calcular la presión de estancamiento

$$p_0 = p_1 (1 + 0.2\text{Ma}_1^2)^{3.5} = 500 (1 + 0.2 \times 0.414^2)^{3.5} = 563 \text{ kPa}$$

y el área en las condiciones críticas,

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{A^*} &= \frac{1}{\text{Ma}_1} \frac{(2 + 0.4\text{Ma}_1^2)^3}{13.824} = \frac{1}{0.414} \frac{(2 + 0.4 \times 0.414^2)^3}{13.824} = 1.547 \\ \Rightarrow A^* &= \frac{A_1}{1.547} = \frac{0.05}{1.547} = 0.0323 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Es completamente imposible tener en el conducto un área menor que éste.

Por otro lado, si el flujo ha de pasar a supersónico, sólo es posible pasando a través de un estrechamiento con este área.

El flujo másico es

$$\dot{m} = \rho_1 u_1 A_1 = \frac{p_1}{rT_1} u_1 A_1 = \frac{500 \times 10^3}{287 \times 170} \times 180 \times 0.05 = 33.4 \text{ kg/s}$$

Si $A_2 = 0.036$, $A_2/A^* = 1.115$. Esto nos ofrece dos posibles valores de Ma_2

$$\begin{aligned} \text{Ma}_2 &= 0.673 \quad (\text{subsónico}) \\ \text{Ma}_2 &= 1.400 \quad (\text{supersónico}) \end{aligned}$$

a) En el primer caso,

$$p_2 = \frac{p_0}{[1 + 0.2 \times 0.673^2]^{3.5}} = 415.5 \text{ kPa}.$$

b) En el segundo caso,

$$p_2 = \frac{p_0}{[1 + 0.2 \times 1.400^2]^{3.5}} = 176.9 \text{ kPa}.$$

En éste último caso en algún punto anterior a 2 debe haber un cuello de área $A^* = 0.0323 \text{ m}^2$.

11.6 Ondas de choque normales

En flujo supersónico pueden ocurrir variaciones irreversibles ($\Delta s \neq 0$) de las propiedades del flujo en un espacio muy pequeño, de forma que pueden ser consideradas discontinuidades. Estas discontinuidades se conocen como **ondas de choque**.

Consideremos que los puntos 1 y 2 son, respectivamente, antes y despues de la onda de choque. Para simplificar, vamos a suponer que ésta es inmóvil. Procedemos de forma parecida al cálculo de la velocidad del sonido.

La ecuación de continuidad debe cumplirse, $\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 = \text{cte}$, así como la conservación de la cantidad de movimiento $p_1 - p_2 = \rho_2 u_2^2 - \rho_1 u_1^2$ y la ecuación de la energía

$$h_1 + \frac{1}{2} u_1^2 = h_2 + \frac{1}{2} u_2^2 = h_0 \quad (11.23)$$

si se considera que no hay fricción.

Eliminando las velocidades de las ecuaciones anteriores, se obtiene la [relación de Rankine-Hugoniot](#)

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2} (p_2 - p_1) \left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1} \right) \quad (11.24)$$

Actividad 1: Deducir esta expresión

Si el gas es perfecto, la entalpía se relaciona con la temperatura, la presión y la densidad mediante

$$h = c_p T = \frac{\gamma p}{(\gamma - 1)\rho}$$

y tras unas cuantas operaciones, se llega a la relación

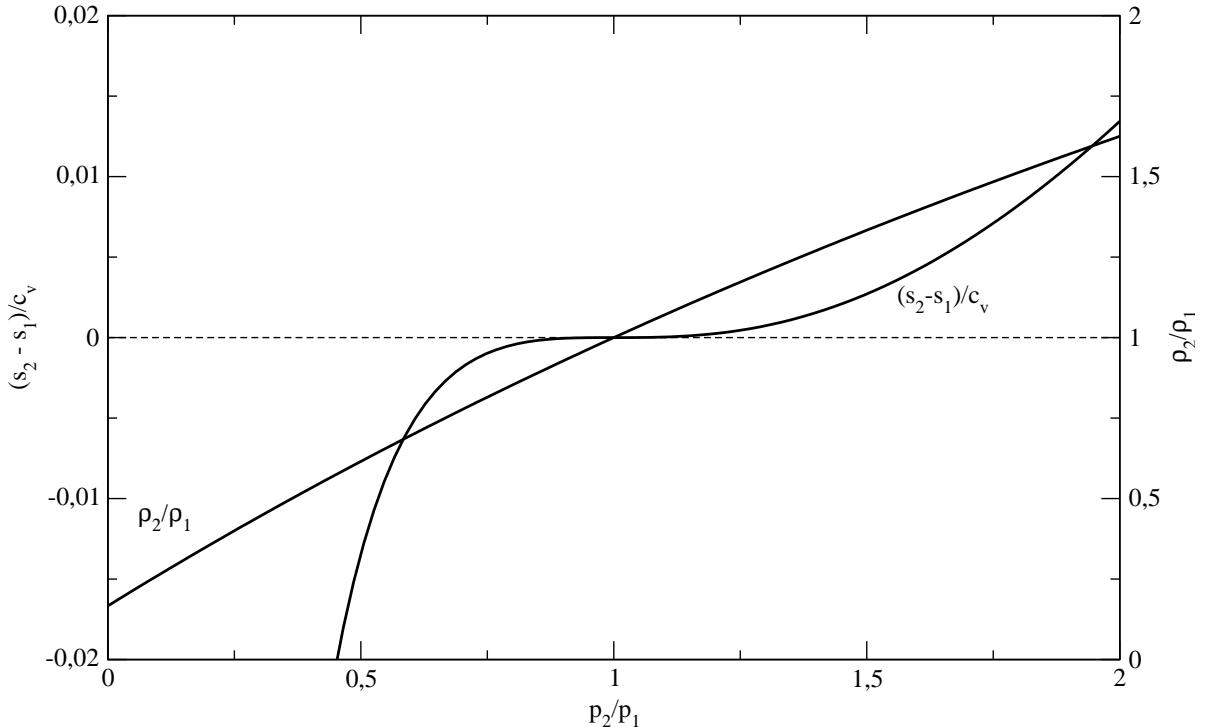
$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + \beta \frac{p_2}{p_1}}{\beta + \frac{p_2}{p_1}} \quad \text{con } \beta = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}. \quad (11.25)$$

Este proceso no es isoentrópico. Si hubiese sido isoentrópico, la relación entre variaciones de presión y de densidad habría sido

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (11.26)$$

De hecho, se puede calcular la variación de entropía que se produce en una onda de choque, suponiendo, como siempre, que el gas es ideal, mediante

$$\frac{s_2 - s_1}{c_v} = \ln \left[\frac{p_2}{p_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^\gamma \right] = \ln \left[\frac{p_2}{p_1} \left(\frac{\beta + \frac{p_2}{p_1}}{1 + \beta \frac{p_2}{p_1}} \right)^\gamma \right] \quad (11.27)$$



De la gráfica anterior se deduce que es imposible una onda de choque en la que $p_2 < p_1$ (rarefacción), ya que esto implicaría una disminución de la entropía.

En general, las ondas de choque son procesos, aunque adiabáticos, no isoentrópicos. Sólo para ondas muy débiles ($p_2 \approx p_1$) se pueden considerar isoentrópicos.

Dado que para un gas perfecto, la relación entre presión dinámica y presión estática se puede expresar de forma adimensional en función de γ y el número de Mach,

$$\frac{\rho u^2}{p} = \frac{u^2}{rT} = \frac{\gamma u^2}{\gamma rT} = \frac{\gamma u^2}{c^2} = \gamma Ma^2, \quad (11.28)$$

es posible expresar la relación de presiones antes y después de la onda de choque en función de γ y el número de Mach en 1,

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma Ma_1^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}. \quad (11.29)$$

Es importante observar que, para cualquier valor de γ , si debemos tener $\frac{p_2}{p_1} > 1$ de forma que el proceso sea real, **debe cumplirse que $Ma_1 > 1$** .

Por otro lado, es posible deducir una expresión que relacione el número de Mach antes y después de la onda de choque,

$$Ma_2^2 = \frac{\gamma - 1 Ma_1^2 + 2}{2\gamma Ma_1^2 - (\gamma - 1)} \quad (11.30)$$

Actividad 2: Deducir esta expresión y la anterior.

En esta última expresión, para $Ma_1 > 1$, el denominador siempre es mayor que el numerador, de forma, que $Ma_2 < 1$

En conclusión, una onda de choque, es una transición, casi singular, **siempre de flujo supersónico a flujo subsónico**. Además, el proceso **no es isoentrópico y la presión después es mayor que antes** de la onda.

Actividad 3: Deducir las relaciones

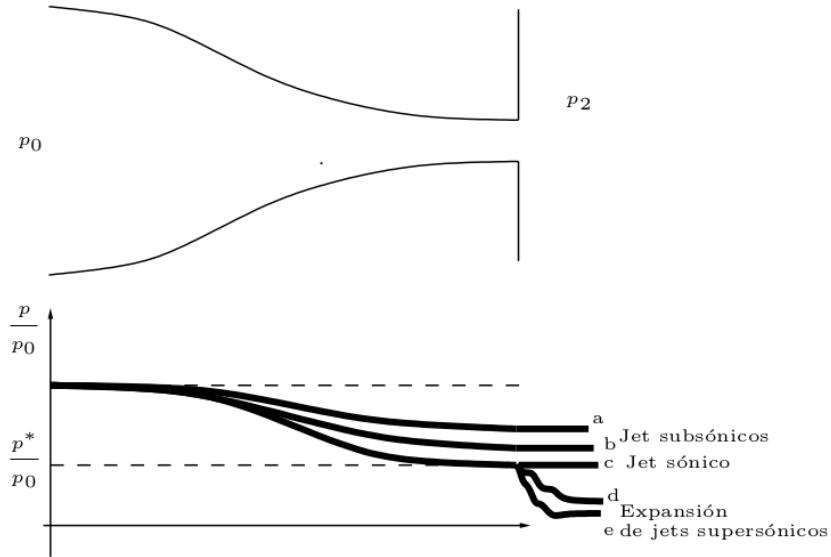
$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{(\gamma + 1) Ma_1^2}{(\gamma - 1) Ma_1^2 + 2} \quad (11.31)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = [2 + (\gamma - 1) Ma_1^2] \frac{2\gamma Ma_1^2 - (\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2 Ma_1^2} \quad (11.32)$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} = \left[\frac{(\gamma + 1) Ma_1^2}{2 + (\gamma - 1) Ma_1^2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left[\frac{\gamma + 1}{2\gamma Ma_1^2 - (\gamma - 1)} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (11.33)$$

11.7 Toberas

11.7.1 Tobera convergente



Como vimos en anteriormente, el flujo másico se puede calcular como

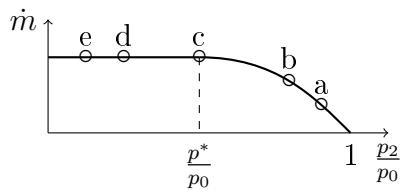
$$\dot{m} = \rho^* u^* S^*$$

Por otro lado, las propiedades críticas son función únicamente de las propiedades totales, y γ . Las recordamos:

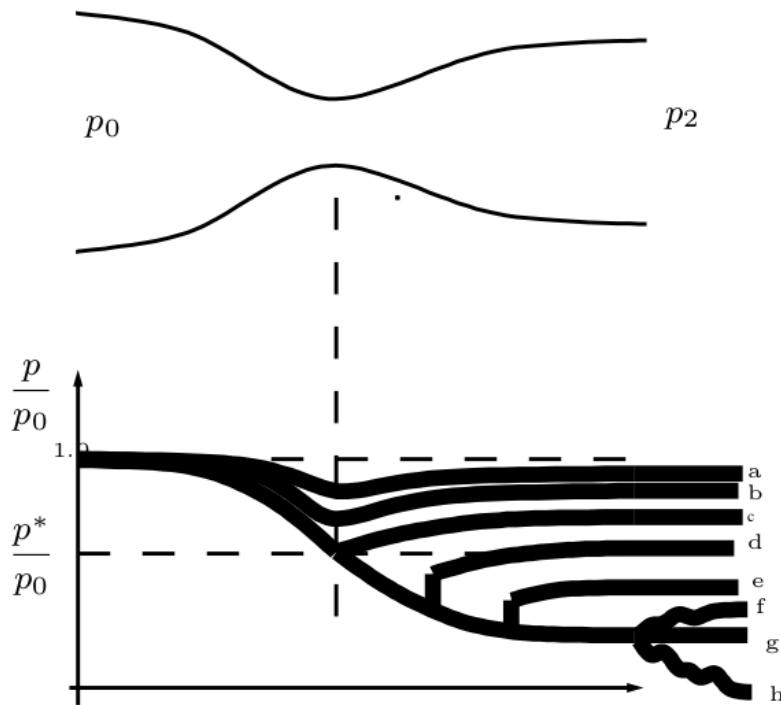
$$\begin{aligned} p^* &= p_0 \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}; & T^* &= T_0 \frac{2}{\gamma+1} \\ \rho^* &= \rho_0 \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}; & c^* &= c_0 \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{2}} (= u^*) \end{aligned}$$

Por lo tanto, si las propiedades totales (aguas arriba) no cambian, el flujo másico tampoco, independientemente de las condiciones aguas abajo (en la salida). Se dice entonces que el flujo está **bloqueado**.

La interpretación física es que si el flujo es supersónico, su velocidad es mayor que la cualquier perturbación (es decir, información) que se pueda trasmisir a través del medio. Y por lo tanto, la información que se transmite hacia atrás (aguas arriba) nunca llega a destino. Es decir, que el fluido que se encuentra en la sección crítica no tiene forma de saber qué condiciones hay aguas abajo y éstas no le pueden afectar.

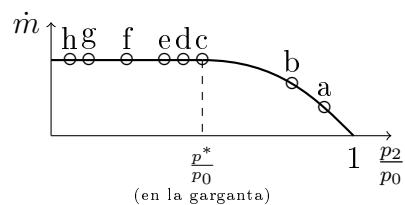


11.7.2 Tobera convergente-divergente



Si el flujo es supersónico (está bloqueado) pero las condiciones en la salida no son las adecuadas para mantenerlo en este estado, el flujo salta de forma irreversible, con una onda de choque, a un estado subsónico que le permita llegar al exterior con las condiciones.

Las condiciones para la que el flujo se mantiene supersónico sin crear una onda de choque (caso g) se dicen que son las *condiciones de diseño de la tobera*.



Si la presión en la descarga (\$p_2\$) es inferior a la presión de diseño de la tobera (\$p^*\$ para la tobera convergente y \$p_g\$ para la convergente-divergente) el flujo no puede bajar su presión mediante ondas de choque, ya que esto implicaría una disminución de la entropía. El flujo se expande en este caso mediante una *expansión de Prandtl-Meyer*. Es una compleja expansión supersónica isentrópica en forma de abanico, en la que Ma aumenta, y la presión disminuye.

Ejemplo: En un tanque hay aire con una presión de 300 kPa y una temperatura de 20 °C. A través de un conducto convergente, con un diámetro final de 4 cm, se descarga el

aire en otro tanque en el que la presión es de 200 kPa. Considerando $\gamma = 1.4$, queremos calcular el flujo másico.

La presión para la cual obtendríamos flujo sónico y, por lo tanto bloqueado, es

$$p^* = p_0 \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = 0.5283 p_0 = 158.48 \text{ kPa}$$

La presión que tenemos en la salida es mayor, por lo que el flujo no se bloquea.

El flujo másico lo calculamos mediante las condiciones en la salida, suponiendo flujo isentrópico,

$$\dot{m} = \rho_2 u_2 S_2 = p_2 \sqrt{\frac{\gamma}{rT_2}} \text{Ma}_2 S_2 = p_0 \sqrt{\frac{\gamma}{rT_0}} \text{Ma}_2 S_2 \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} \text{Ma}_2^2 \right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}$$

Para calcular el número de Mach en la salida

$$\frac{p_0}{p_2} = \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} \text{Ma}_2^2 \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \Rightarrow \text{Ma}_2 = 0.784$$

y el flujo es entonces 0.852 kg/s.

Si la presión en el recipiente de descarga estuviese por debajo de 158.48 kPa, el flujo másico sería máximo,

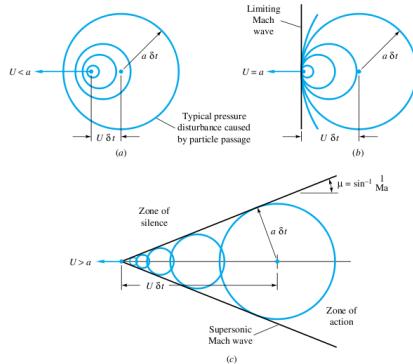
$$\dot{m}_{\max} = \rho^* u^* S^* = p^* \sqrt{\frac{\gamma}{rT^*}} S^* = p_0 \sqrt{\frac{\gamma}{rT_0}} S_2 \left[\frac{\gamma + 1}{2} \right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} = 0.890 \text{ kg/s}$$

y es independiente del valor de p_2 .

11.8 El cono de Mach

En la figura, tomada del White[10], una fuente sonora se mueve con una velocidad U ,

que puede ser menor, igual o mayor que la velocidad del sonido (en la figura, denominada *a*)



Si la velocidad del objeto es mayor que la del sonido, se forma el denominado *cono de Mach* (hay que considerar que es tridimensional). Lo que hay fuera del cono en un cierto instante es la zona de silencio. Un objeto en esta zona no es capaz de “oir” la fuente de sonido hasta que la onda de Mach no le alcance. **Actividad 1:** Un micrófono está situado en la cima de una colina, y “oye” un objeto supersónico cuando éste se encuentra a 500 m en horizontal de su posición. Sabiendo que el objeto vuela a 850 m/s y que la temperatura ambiente es de 288 K, calcular la altura a la que vuela el objeto por encima del micrófono.

11.9 Onda de choque oblicua

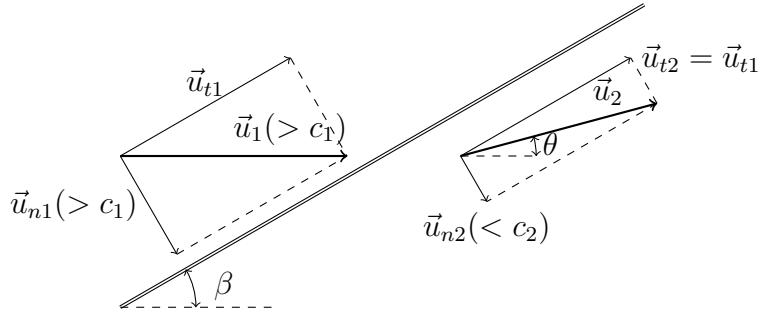
En ocasiones un flujo supersónico es desviado por un objeto. Se crea entonces una onda de choque oblicua que forma un ángulo β con el flujo, que es más o menos arbitrario. El flujo es entonces deflectado un ángulo θ que es función de β y de las condiciones aguas arriba.

El flujo antes de la onda de choque es supersónico. Después puede ser subsónico, sónico o supersónico, dependiendo de las condiciones.

Aplicando la conservación de masa, cantidad de movimiento y energía en un VC que encierra únicamente un área S de la onda de choque, obtenemos

$$\begin{aligned} \rho_1 u_{n1} &= \rho_2 u_{n2} & p_1 - p_2 &= \rho_2 u_{n2}^2 - \rho_1 u_{n1}^2 \\ h_0 &= h_1 + \frac{1}{2} u_1^2 = h_2 + \frac{1}{2} u_2^2 & 0 &= \rho_1 u_{n1} (u_{t2} - u_{t1}) \end{aligned}$$

Onda de choque oblicua



La única diferencia entre estas ecuaciones y las relativas a la onda de choque normal es que se añade una velocidad tangencial, que es idéntica a ambos lados de la onda, $u_{t1} = u_{t2} = u_t$, y cuyo único efecto es aumentar en $\frac{1}{2}u_t^2$ la energía.

Por lo demás son idénticas, con las velocidades normales u_{n1} y u_{n2} en los papeles de velocidades en la onda de choque normal.

Lo único que hay que hacer es definir un *número de Mach normal*,

$$\text{Ma}_n = \frac{u_n}{c} \quad (11.34)$$

y las relaciones que obtuvimos para ondas de choque normales se escriben ahora como

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma\text{Ma}_{n1}^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1} \quad (11.35)$$

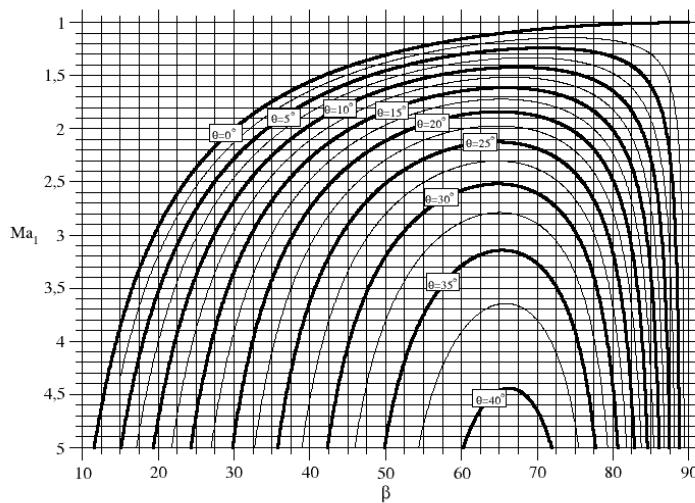
$$\text{Ma}_{n2}^2 = \frac{(\gamma - 1)\text{Ma}_{n1}^2 + 2}{2\gamma\text{Ma}_{n1}^2 - (\gamma - 1)} \quad (11.36)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_{n1}}{u_{n2}} = \frac{(\gamma + 1)\text{Ma}_{n1}^2}{(\gamma - 1)\text{Ma}_{n1}^2 + 2} = \frac{\tan \beta}{\tan(\beta - \theta)} \quad (11.37)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = [2 + (\gamma - 1)\text{Ma}_{n1}^2] \frac{2\gamma\text{Ma}_{n1}^2 - (\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2\text{Ma}_{n1}^2} \quad (11.38)$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} = \left[\frac{(\gamma + 1)^2\text{Ma}_{n1}^2}{2 + (\gamma - 1)\text{Ma}_{n1}^2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left[\frac{\gamma + 1}{2\gamma\text{Ma}_{n1}^2 - (\gamma - 1)} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (11.39)$$

En la siguiente gráfica se ha representado Ma_{n1} en función de β para diferentes valores de θ , usando la primera de las expresiones dadas.



Calculemos el ángulo de deflección θ . De la figura de la onda de choque oblicua se puede deducir por trigonometría que

$$\theta = \arctan \frac{u_t}{u_{n2}} - \arctan \frac{u_t}{u_{n1}} \quad (11.40)$$

Podemos ahora calcular el valor de u_t para el cuál el ángulo de deflección es máximo,

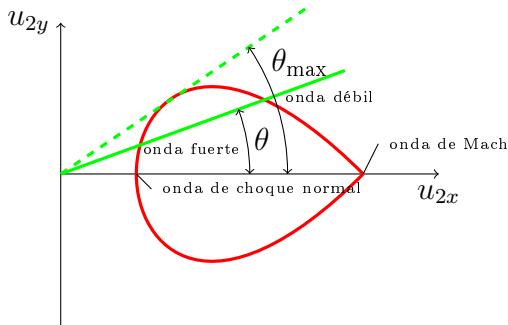
$$\frac{d\theta}{du_t} = 0 \Rightarrow \frac{u_t}{u_{n1}} = \sqrt{\frac{u_{n2}}{u_{n1}}}; \frac{u_t}{u_{n2}} = \sqrt{\frac{u_{n1}}{u_{n2}}} \quad (11.41)$$

$$\Rightarrow \theta_{\max} = \arctan \sqrt{\frac{u_{n1}}{u_{n2}}} - \arctan \sqrt{\frac{u_{n2}}{u_{n1}}} \quad (11.42)$$

Esto limita bastante los posibles valores de deflección **Ejemplo:** Para $\text{Ma}_{n1} = 5.0$ y $\gamma = 1.4$, se tiene $\frac{u_{n1}}{u_{n2}} = 5$ y el ángulo de deflección máxima es $\theta_{\max} = 41.81^\circ$

Actividad 2: Calcular el ángulo de deflección máximo para un flujo incidente con $\text{Ma}_{n1} \rightarrow \infty$.

Para una \vec{u}_1 , c_1 y γ dadas, es posible resolver las ecuaciones para encontrar todos los valores posibles de $\vec{u}_2 = u_{2x}\vec{i} + u_{2y}\vec{j}$. El resultado es una *hodografía*.



Bibliography

- [1] G. K. Batchelor. *Introducción a la dinámica de fluidos*. Ministerio de Medio Ambiente, Dirección General del Instituto Nacional de Meteorología, 1997. ISBN: 8483200155.
- [2] Yunus A. Çengel and John M. Cimbala. *Fluid Mechanics*. Third Edit. McGraw-Hill, 2014.
- [3] Antonio Crespo Martínez. *Mecánica de fluidos*. Madrid : Thomson, 2006, pp. XIX, 728. ISBN: 8497322924.
- [4] Pijush K. Kundu, Ira M. Cohen, and David R. Dowling. *Fluid mechanics*. Academic Press, 2012, p. 891. ISBN: 9780123821003.
- [5] James A. Liggett. *Fluid mechanics*. New York [etc.] : McGraw-Hill, 1994, p. 495. ISBN: 0070378053.
- [6] Bruce Roy Munson et al. *Fluid mechanics*. Wiley Singapore, 2013.
- [7] Irving Herman Shames. *Mechanics of fluids*. McGraw-Hill, 2003. ISBN: 007119889X.
- [8] L. Virto. *Mecànica de Fluids. Fonaments I*. Edicions UPC, Barcelona, 1993.
- [9] L. Virto. *Mecànica de Fluids. Fonaments II*. Edicions UPC, Barcelona, 1993.
- [10] Frank M. White. *Mecánica de fluidos*. McGraw-Hill, 2008. ISBN: 8448166035.