Trabalho em Grupo
Lei de Coulomb

Fundamentos de Física 3 - 2023/2
UFES-Alegre

Resolução do prof . Roberto Colistete Jr

Histórico

- 31/08/2023 : 1a questão completa (exceto diagramas vetoriais);
- 01/09/2023 : mais comentários na 1a questão, 2a questão completa (exceto diagramas vetoriais);

Objetivos de uso de Wolfram Mathematica nessa resolução dos problemas :

- primeiro contato dos alunos com tal ambiente de computação numérica, simbólica e gráfica;
- pode ser usado como editor de textos e expressões matemáticas;
- pode ser usado para cálculos diversos, numéricos ou simbólicos/analíticos;
- exemplos de programação com :
    - definição de variáveis (via “=”);
    - solução de equação (via “Solve”);
    - extração de elementos de uma lista (via “lista[[elemento]]”);
    - aplicação de uma regra de transformação em uma expressão (via “expr /. x -> v”);
    - gráfico de função de uma variável (via “Plot”);
    - derivada primeira (via “D”).

Questão 1 - Decide-se dividir uma carga elétrica *Q* em duas partes, localizadas em partículas separadas por uma distância *d*, sendo que uma carga teria *q* e outra (Q - q). Para *q* arbitrário (porém de mesmo sinal que Q), calcule a posição ao longo da linha que une as partículas tal que a força Coulombiana seja nula (nessa posição). Qual é o valor de *q* tal que a força de repulsão Coulombiana entre as partículas seja máxima ? Com esse q, qual é a posição entre as partículas tal que a força Coulombiana seja nula (nessa posição) ? Não precisa usar notação vetorial.

Resolução :

1a parte :

$$q_1 = q,\ \ q_2 = Q - q,\ \ r_{01} = d,\ \ r_{02} = d - x$$

$$F_0 = F_{01} + F_{02} = \frac{q_0\, q_1}{4\,\pi\,\epsilon_0\, r_{01}{}^2} - \frac{q_0\, q_2}{4\,\pi\,\epsilon_0\, r_{02}{}^2} = 0\ \mathrm{N}$$

$$F_0 = \frac{q_0\, q}{4\,\pi\,\epsilon_0\, x^2} - \frac{q_0\,(Q - q)}{4\,\pi\,\epsilon_0\,(d - x)^2} = 0\ \mathrm{N}$$

Cancelando os termos comuns :

$$\frac{q}{x^2} - \frac{(Q - q)}{(d - x)^2} = 0$$

Equação no *Mathematica* usa duplo igual, “==”. Enquanto que “=” é para atribuir valor a um objeto (variável). Evite usar nomes de variáveis com acentos, então use letras, números (não pode começar com número) e “_” :

```
equacao = q/x^2 - (Q - q)/(d - x)^2 == 0
```

$$-\frac{-q + Q}{(d - x)^2} + \frac{q}{x^2} == 0$$

Função “Solve[ ]” resolve equações (uma ou um sistema), o segundo argumento é a variável em relação a qual resolver a equação. Notar que funções pré-existentes do *Wolfram Mathematica* sempre começam com letra maiúscula, têm argumentos entre colchetes, separados por vírgula :

```
solucaox = Solve[equacao, x]
```

$$\left\{\left\{x \to \frac{d\,q - \sqrt{-d^2\,q^2 + d^2\,q\,Q}}{2\,q - Q}\right\}, \left\{x \to \frac{d\,q + \sqrt{-d^2\,q^2 + d^2\,q\,Q}}{2\,q - Q}\right\}\right\}$$

A saída do "Solve[ ]" é na forma de uma lista (usando chaves), com cada solução na forma de uma regra de transformação do tipo "{x -> valor}".

Extraindo a 1ª solução, usamos duplos colchetes abrindo e fechando, e o número (começando de 1) para obter a 1a ou 2a solução, que é mostrada na forma de uma regra de transformação (com setinha) :

```
solucaox[[1]]
```

$$\left\{x \to \frac{d\,q - \sqrt{-d^2\,q^2 + d^2\,q\,Q}}{2\,q - Q}\right\}$$

Aplicando a regra de transformação via "/." (tipo "tal que") :

```
x /. solucaox[[1]]
```

$$\frac{d\,q - \sqrt{-d^2\,q^2 + d^2\,q\,Q}}{2\,q - Q}$$

Simplificando, considerando *d* positivo, atribuindo o resultado a uma variável :

```
sol1x = Simplify[x /. solucaox[[1]], d > 0]
```

$$\frac{d\left(q - \sqrt{-q\,(q - Q)}\right)}{2\,q - Q}$$

Extraindo a 2a solução, atribuindo o resultado a outra variável :

```
sol2x = Simplify[x /. solucaox[[2]], d > 0]
```

$$\frac{d\left(q + \sqrt{-q\,(q - Q)}\right)}{2\,q - Q}$$

Notar que as 2 soluções não são válidas para q=Q/2, quando ocorre uma singularidade devido ao denominador nulo.

2a parte :

$$F_{12} = \frac{q_1\,q_2}{4\,\pi\,\epsilon_0\,r_{12}{}^2} = \frac{q\,(Q - q)}{4\,\pi\,\epsilon_0\,d^2}$$

Para tal força ser máxima, veremos os extremos via método da derivada primeira :

$$\frac{d\,F_{12}}{d\,q} = \frac{d}{dq}\left(\frac{q\,(Q-q)}{4\,\pi\,\epsilon_0\,d^2}\right) = 0$$

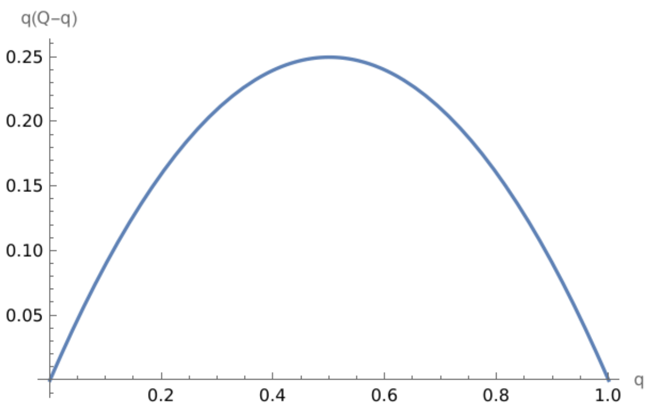
$$\frac{d\,F_{12}}{d\,q} = \frac{d}{dq}\left(\frac{q\,Q-q^2}{4\,\pi\,\epsilon_0\,d^2}\right) = \frac{Q-2\,q}{4\,\pi\,\epsilon_0\,d^2} = 0$$

$$Q - 2\,q = 0$$

$$q = \frac{Q}{2}$$

Via computador se torna muito fácil visualizar graficamente esse problema de máximo/mínimo para a função F_{12} (removendo o denominador, que é mera constante em relação a *q*), porém precisamos atribuir valor numérico a *Q*, por exemplo, Q=1C. Vemos que o máximo ocorre em q=Q/2=0,5C. Para tanto usamos a função “Plot[]” do *Wolfram Mathematica*, para funções matemáticas de uma variável, com 1º argumento sendo a função, 2º argumento o domínio da variável independente :

```
Plot[q (1 - q), {q, 0, 1}, AxesLabel → {"q", "q(Q-q)"}]
```



Onde a opção "AxesLabel" significa rótulos/nomes dos eixos, com 1º sendo horizontal e 2º sendo vertical.

3a parte :

Não é possível substituir a solução acima para *q* nas 2 soluções para *x* :

```
sol1x /. q → Q/2
```

Power : Infinite expression $\frac{1}{0}$ encountered .

```
ComplexInfinity
```

Então resolvemos novamente a equação inicial, usando q=Q/2 :

$$\text{equacao} = \frac{(Q/2)}{x^2} - \frac{(Q/2)}{(d-x)^2} == 0$$

$$-\frac{Q}{2\,(d-x)^2} + \frac{Q}{2\,x^2} == 0$$

```
solucaox = Solve[equacao, x]
```

$$\left\{\left\{x \to \frac{d}{2}\right\}\right\}$$

Ou seja, com 2 cargas elétricas iguais a *Q/2* separadas por distância *d*, então o ponto médio entre elas, (*d/2*), tem força Coulombiana nula.

Questão 2 - Duas partículas, com cargas elétricas $q_1 = q_2 = 3,20 \times 10^{-19}\,C$ estão ao longo do eixo y, sendo $y_1 = d = +1,0\,m$ e $y_2 = -d = -1,0\,m$. Uma terceira partícula, com carga $q_3 = -1,60 \times 10^{-19}\,C$, está situada ao longo do eixo *x*, com *x* podendo variar entre 0,0 m e d = +1,0 m. Para qual valor de *x* a soma das forças eletrostáticas sobre q_3 é mínima em módulo ? E máxima ? Diagrame vetorialmente as duas forças e a força resultante sobre q_3 para os dois valores de *x* encontrados. Use notação vetorial em toda a resolução e faça analiticamente, substituindo numericamente somente ao final.

Resolução :

1a parte :

Dados :

$$q_1 = q_2 = 3,20 \times 10^{-19}\,C \quad , \quad q_3 = -1,60 \times 10^{-19}\,C$$
$$y_1 = +d = 1,0\,m \quad , \quad y_2 = -3\,d = -1,0\,m$$

Vetorialmente os vetores-posição são :

$$\vec{r}_3 = d\,\hat{j}, \quad \vec{r}_2 = -d\,\hat{j}, \quad \vec{r}_3 = x\,\hat{i}$$

Força Coulombiana sobre q_3 :

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} = \frac{q_3\, q_1\, \vec{r}_{31}}{4\,\pi\,\epsilon_0\, r_{31}{}^3} + \frac{q_3\, q_2\, \vec{r}_{32}}{4\,\pi\,\epsilon_0\, r_{32}{}^3}$$

Como :

$$\vec{r}_{31} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1 = x\,\hat{i} - d\,\hat{j}, \quad |\,\vec{r}_{31}\,| = r_{31} = \sqrt{x^2 + (-d)^2} = \sqrt{x^2 + d^2}$$
$$\vec{r}_{32} = \vec{r}_3 - \vec{r}_2 = x\,\hat{i} - \left(-d\,\hat{j}\right) = x\,\hat{i} + d\,\hat{j}, \quad |\,\vec{r}_{32}\,| = r_{32} = \sqrt{x^2 + d^2}$$

Então :

$$\vec{F}_3 = \frac{q_3\, q_1\, \left(x\,\hat{i} - d\,\hat{j}\right)}{4\,\pi\,\epsilon_0\, \left(x^2 + d^2\right)^{3/2}} + \frac{q_3\, q_2\, \left(x\,\hat{i} + d\,\hat{j}\right)}{4\,\pi\,\epsilon_0\, \left(x^2 + d^2\right)^{3/2}}$$

$$\vec{F}_3 = \frac{q_3\, q_1}{4\,\pi\,\epsilon_0\, \left(x^2 + d^2\right)^{3/2}} \left[\left(x\,\hat{i} - d\,\hat{j}\right) + \left(x\,\hat{i} + d\,\hat{j}\right)\right] = \frac{2\, q_3\, q_1\, x\,\hat{i}}{4\,\pi\,\epsilon_0\, \left(x^2 + d^2\right)^{3/2}}$$

onde só x é incógnita, variando x queremos o mínimo e máximo de $|\,\vec{F}_3\,|$ entre $x \in [0, d]$.

Removendo as constantes, temos que obter os extremos da função simplificada :

$$\frac{x}{\left(x^2 + d^2\right)^{3/2}}$$

Via método da derivada primeira em relação a *x*, onde no *Wolfram Mathematica* a derivada é via função “D[ ]” :

$$D\left[\frac{x}{(x + d)^{3/2}}, x\right] == 0$$

$$-\frac{3\,x}{2\,(d + x)^{5/2}} + \frac{1}{(d + x)^{3/2}} == 0$$

Obtendo a solução para x do extremo :

$$\text{Solve}\left[D\left[\frac{x}{(x + d)^{3/2}}, x\right] == 0, x\right]$$

$$\{\{x \to 2\,d\}\}$$

vemos que ocorre para $x = 2d$, fora do domínio $x \in [0, d]$.

Calculando a função simplificada para x=0 m e x=d :

$$\frac{x}{(x+d)^{3/2}} \text{ /. } x \to 0$$

0

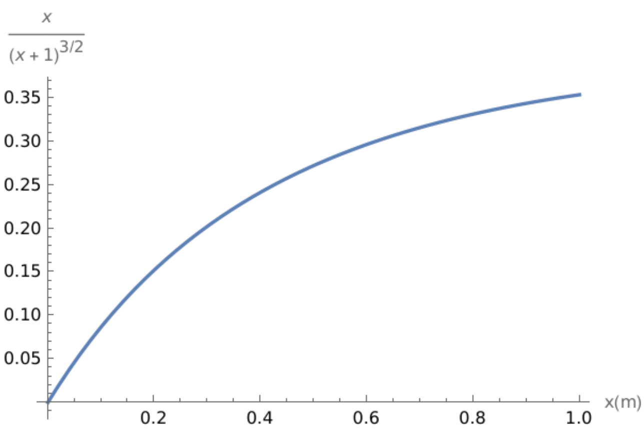
$$\frac{x}{(x+d)^{3/2}} \text{ /. } x \to d$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{d}}$$

então a função simplificada é sempre positiva, começando com valor nulo e crescendo no domínio, tal que o mínimo ocorre em *x=0* m e o máximo em *x=d*.

Via computador a visualização gráfica confirma o mínimo e máximo da função simplificada nas bordas do domínio x∈[0,d]. Para tanto usamos a função “Plot[]” do *Wolfram Mathematica* com *d=1* m :

$$\text{Plot}\left[\frac{x}{(x+1)^{3/2}}, \{x, 0, 1\}, \text{AxesLabel} \to \left\{\text{"x(m)"}, \text{"}\frac{x}{(x+1)^{3/2}}\text{"}\right\}\right]$$



2a parte :

$$\vec{F}_3\,(x) = \frac{2\, q_3\, q_1\, x\, \hat{i}}{4\,\pi\,\epsilon_0\,\left(x^2+d^2\right)^{3/2}}$$

Diagrama vetorial para *x=0* m é trivial, um vetor força nulo sobre q_3 :

$$\vec{F}_3\left(x = 0\text{ m}\right) = \vec{0}\text{ N}$$

Diagrama vetorial para x=d=1 m :

$$\vec{F}_3\,(x=d) = \frac{2\, q_3\, q_1\, d\, \hat{i}}{4\,\pi\,\epsilon_0\,\left(d^2+d^2\right)^{3/2}} = \frac{2\, q_3\, q_1\, d\, \hat{i}}{4\,\pi\,\epsilon_0\, 2\,\sqrt{2}\, d^3} = \frac{q_3\, q_1\, \hat{i}}{4\,\pi\,\epsilon_0\,\sqrt{2}\, d^2}$$

$$\vec{F}_3\ (x = d) \simeq \frac{\left(-1,\ 60 \times 10^{-19}\ \text{C}\right)\ \left(3,\ 20 \times 10^{-19}\ \text{C}\right)\ \hat{\imath}}{4\,\pi\ \left(8,\ 8\,541\,878\,817 \times 10^{-12}\ \text{C}^2\ \text{N}^{-1}\ \text{m}^{-2}\right)\ \sqrt{2}\ \left(1\ \text{m}\right)^2}$$

Usando o *Wolfram Mathematica* como calculadora :

$$\frac{\left(-1.60 \times 10^{-19}\right)\ \left(3.20 \times 10^{-19}\right)}{4\,\pi\ \left(8.8541878817 \times 10^{-12}\right)\ \sqrt{2}\ (1)^2}$$

-3.25384×10^{-28}

$$\vec{F}_3\ (x = d) \simeq \left(-3,\ 25\,384 \times 10^{-28}\ \text{N}\right)\ \hat{\imath}$$

Ou seja, a força sobre q_3 na posição x=d é uma força somente horizontal apontando para o sentido negativo do eixo x.

Created with the Wolfram Language