# Motivação

## Porque estudar grafos?

- Arcabouço matemático com aplicação em diversas áreas do conhecimento
- Utilizados na definição e/ou resolução de problemas
- Estudar grafos é mais uma forma de solucionar problemas computáveis
- Os estudos teóricos em grafos buscam o desenvolvimento de algoritmos mais eficientes.
- Abstração matemática que representa situações reais através de um diagrama.

# Motivação

## Porque estudar grafos?

- Arcabouço matemático com aplicação em diversas áreas do conhecimento
- Utilizados na definição e/ou resolução de problemas
- Estudar grafos é mais uma forma de solucionar problemas computáveis
- Os estudos teóricos em grafos buscam o desenvolvimento de algoritmos mais eficientes.
- Abstração matemática que representa situações reais através de um diagrama.

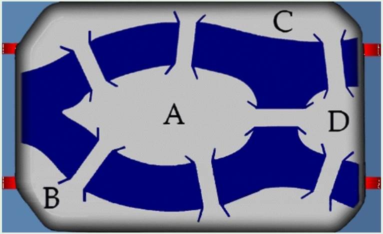
## Áreas de conhecimento

Genética, química, pesquisa operacional, telecomunicações, engenharia elétrica, redes de computadores, conexão de vos aéreos, restrições de precedência, fluxo de programas, dentre outros

# Motivação

## Pontes de Königsberg

O rio Pregel divide o centro da cidade de Königsberg (Prússia no século XVII, atual Kaliningrado, Rúsia) em quatro regiões. Essas regiões são ligadas por um complexo de sete (7) pontes, conforme mostra a figura. Discutia-se nas ruas da cidade a possibilidade de atravessar todas as pontes, voltando ao lugar de onde se saiu, sem repetir alguma. Havia-se tornado uma lenda popular a possibilidade da façanha quando **Euler**, em 1736, provou que **não existia caminho** que possibilitasse tais restrições.



# Motivação

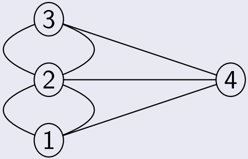
## Pontes de Königsberg

- Resolvido em 1736 por Leonhard Euler
- Necessário um modelo para representar o problema
- Abstração de detalhes irrelevantes:
  - Área de cada ilha
  - Formato de cada ilha
  - Tipo da ponte, etc.

# Motivação

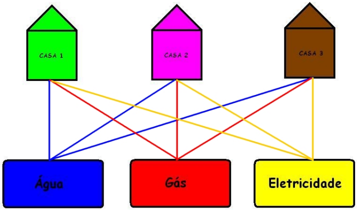
## Pontes de Königsberg

- Resolvido em 1736 por Leonhard Euler
- Necessário um modelo para representar o problema
- Abstração de detalhes irrelevantes:
  - Área de cada ilha
  - Formato de cada ilha
  - Tipo da ponte, etc.
- Euler generalizou o problema através de um modelo de grafos



# Problemas das 3 casas

É possível conectar os 3 serviços às 3 casas sem haver cruzamento de tubulação?



# Colorir um mapa

Quantas cores são necessárias para colorir o mapa do Brasil, sendo que estados adjacentes não podem ter a mesma cor?

# Caminho mínimo

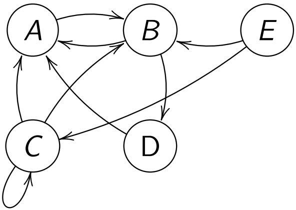
De forma a reduzir seus custos operacionais, uma empresa de transporte de cargas deseja oferecer aos motoristas de sua frota um mecanismo que os auxilie a selecionar o melhor caminho (o de menor distância) entre quaisquer duas cidades por ela servidas, de forma a que sejam minimizados os custos de transporte.

# Terminologia

## Grafo direcionado

Par G=(V,E), onde V é um conjunto finito e E é uma relação binária em V.

- Grafo orientado.
- Dígrafo.



# Terminologia

## Grafo direcionado

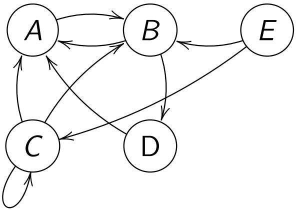
Par G=(V,E), onde V é um conjunto finito e E é uma relação binária em V.

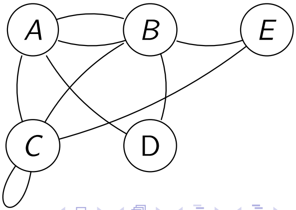
- Grafo orientado.
- Dígrafo.

## Grafo não direcionado

Par G=(V,E) onde o conjunto de arestas E consiste em pares de vértices não orientados. A aresta $(v_i, v_j)$ e $(v_j, v_i)$ são consideradas a mesma aresta.

- Grafo não orientado.

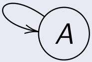


# Terminologia

## Loop

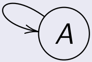
uma aresta associada ao par de vértices $(v_i, v_i)$



# Terminologia

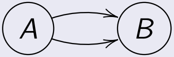
## Loop

uma aresta associada ao par de vértices $(v_i, v_i)$




## Arestas paralelas

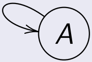
quando mais de uma aresta está associada ao mesmo par de vértices



# Terminologia

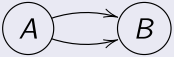
## Loop

uma aresta associada ao par de vértices $(v_i, v_i)$



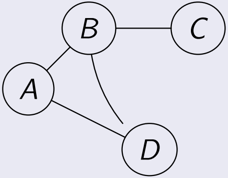

## Arestas paralelas

quando mais de uma aresta está associada ao mesmo par de vértices




## Grafo simples

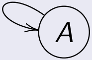
um grafo que não possui loops e nem arestas paralelas



# Terminologia

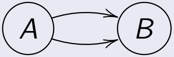
## Loop

uma aresta associada ao par de vértices $(v_i, v_i)$



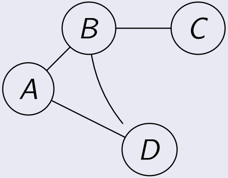

## Arestas paralelas

quando mais de uma aresta está associada ao mesmo par de vértices




## Grafo simples

um grafo que não possui loops e nem arestas paralelas




## Vértices adjacentes

Dois vértices são ditos adjacentes se eles são pontos finais de uma mesma aresta

# Terminologia

## Grau de um vértice

- Grafo não direcionado:
    - grau $d(v)$ - número de arestas que incidem em v.
- Grafo direcionado:
    - grau de entrada $d^{-}(v)$- número de arestas que chegam em v
    - grau de saída $d^{+}(v)$- número de arestas que saem em v

# Terminologia

## Grau de um vértice

- Grafo não direcionado:
  - grau $d(v)$ - número de arestas que incidem em v.
- Grafo direcionado:
  - grau de entrada $d^{-}(v)$- número de arestas que chegam em v
  - grau de saída $d^{+}(v)$- número de arestas que saem em v

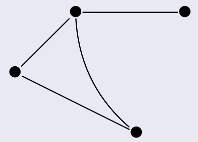
Um laço conta duas vezes para o grau de um vértice

# Terminologia

## Grau de um vértice

- Grafo não direcionado:
  - grau $d(v)$ - número de arestas que incidem em v.
- Grafo direcionado:
  - grau de entrada $d^{-}(v)$- número de arestas que chegam em v
  - grau de saída $d^{+}(v)$- número de arestas que saem em v

Um laço conta duas vezes para o grau de um vértice

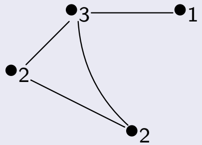


# Terminologia

## Grau de um vértice

- Grafo não direcionado:
  - grau $d(v)$ - número de arestas que incidem em v.
- Grafo direcionado:
  - grau de entrada $d^{-}(v)$- número de arestas que chegam em v
  - grau de saída $d^{+}(v)$- número de arestas que saem em v

Um laço conta duas vezes para o grau de um vértice

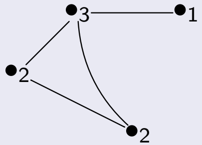


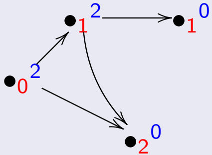
# Terminologia

## Grau de um vértice

- Grafo não direcionado:
  - grau $d(v)$ - número de arestas que incidem em v.
- Grafo direcionado:
  - grau de entrada $d^{-}(v)$- número de arestas que chegam em v
  - grau de saída $d^{+}(v)$- número de arestas que saem em v

Um laço conta duas vezes para o grau de um vértice



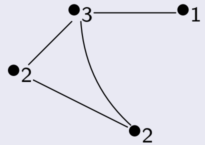



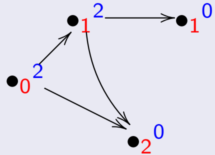
# Terminologia

## Grau de um vértice

- Grafo não direcionado:
  - grau $d(v)$ - número de arestas que incidem em v.
- Grafo direcionado:
  - grau de entrada $d^{-}(v)$- número de arestas que chegam em v
  - grau de saída $d^{+}(v)$- número de arestas que saem em v

Um laço conta duas vezes para o grau de um vértice



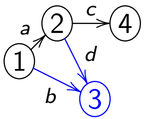



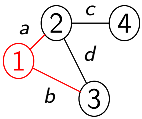

## Sequência de graus

Consiste em escrever em ordem crescente o grau de todos os seus vértices

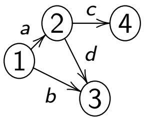
# Terminologia

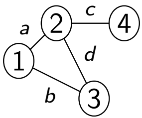
- Duas arestas não paralelas são adjacentes se elas são incidentes a um vértice comum



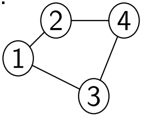




- Quando um vértice $v_i$ é o vértice final de alguma aresta $e_j$, $v_i$ e $e_j$ são incidentes



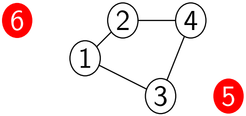




- Um grafo no qual todos os vértices possuem o mesmo grau é chamado de grafo regular.

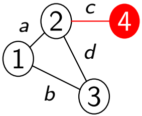


# Terminologia

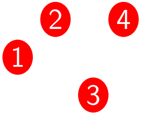
- Um vértice com nenhuma aresta incidente é chamado de vértice isolado.




- Um vértice com grau 1 é chamado de vértice pendente



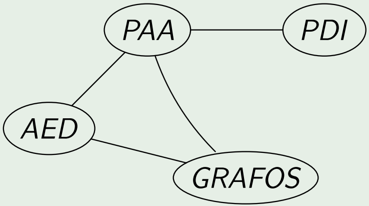

- Um grafo sem nenhuma aresta é chamado de grafo nulo. Todos os vértices em um grafo nulo são vértices isolados



# Grafos valorado e rotulado

## Grafo rotulado

Um grafo G(V,A) é dito ser rotulado em vértices (ou arestas) quando a cada vértice (ou aresta) estiver associado um rótulo



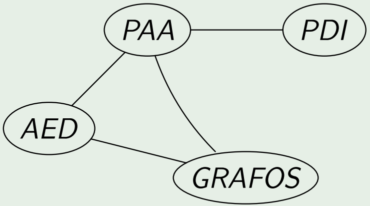
# Grafos valorado e rotulado

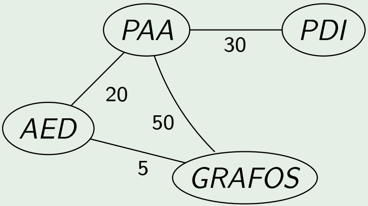
## Grafo rotulado

Um grafo G(V,A) é dito ser rotulado em vértices (ou arestas) quando a cada vértice (ou aresta) estiver associado um rótulo

## Grafo valorado

Um grafo G(V,A) é dito ser valorado quando existe uma ou mais funções relacionando V e/ou A com um conjunto de números.



# Terminologia

## Grafo completo

Um grafo G=(V,E) é completo se para cada par de vértices $v_i$ e $v_j$ existe uma aresta entre $v_i$ e $v_j$. Em um grafo completo quaisquer dois vértices distintos são adjacentes ($K_n$)


## Arestas no grafo completo

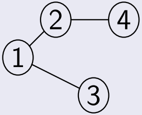
Seja $K_n$ um grafo completo com $n$ vértices. O número de arestas é:

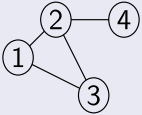
$$|E| = \frac{(n-1) \times \; n}{2}$$

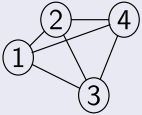
# Terminologia

## Grafo conexo

Existe pelo menos um caminho entre todos os pares de vértices

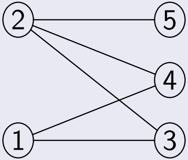


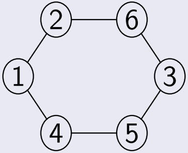




## Grafo bipartido

Um grafo é dito ser bipartido quando seu conjunto de vértices $V$ puder ser particionado em dois subconjuntos $V_1$ e $V_2$, tais que toda aresta de $G$ une um vértice de $V_1$ a outro de $V_2$.

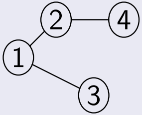


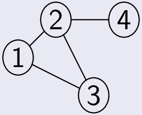



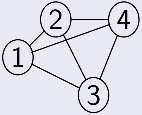
# Terminologia

## Grafo conexo

Existe pelo menos um caminho entre todos os pares de vértices

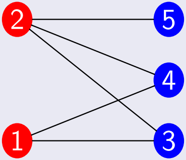


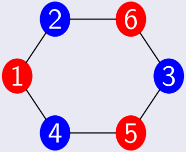




## Grafo bipartido

Um grafo é dito ser bipartido quando seu conjunto de vértices $V$ puder ser particionado em dois subconjuntos $V_1$ e $V_2$, tais que toda aresta de $G$ une um vértice de $V_1$ a outro de $V_2$.

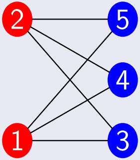


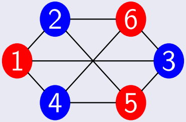



# Grafo bipartido completo

## Grafo bipartido completo

Um grafo é dito ser bipartido quando seu conjunto de vértices $V$ puder ser particionado em dois subconjuntos $V_1$ e $V_2$, tais que toda aresta de $G$ une um vértice de $V_1$ a outro de $V_2$, e que todo vértice de $V_1$ é adjacente a todo vértice de $V_2$.

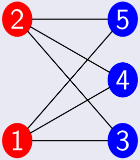


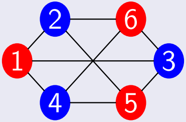



# Grafo bipartido completo

## Grafo bipartido completo

Um grafo é dito ser bipartido quando seu conjunto de vértices $V$ puder ser particionado em dois subconjuntos $V_1$ e $V_2$, tais que toda aresta de $G$ une um vértice de $V_1$ a outro de $V_2$, e que todo vértice de $V_1$ é adjacente a todo vértice de $V_2$.




## Arestas no grafo bipartido completo

Seja $K_{mn}$ um grafo bipartido completo com $n$ vértices em $V_1$ e $m$ vértices em $V_2$. O número de arestas é:

$$|E| = n \times \ m$$

# Propriedade de grau

## Grau par

O número de arestas incidentes a um vértice $v_i$ é chamado de grau, $d(v_i)$, do vértice $i$. A **soma** dos graus de todos os vértices de um grafo G é duas vezes o número de arestas de G.

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2e$$

# Propriedade de grau

## Grau par

O número de arestas incidentes a um vértice $v_i$ é chamado de grau, $d(v_i)$, do vértice $i$. A **soma** dos graus de todos os vértices de um grafo G é duas vezes o número de arestas de G.

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2e$$

## TEOREMA: Vértice de grau ímpar

O número de vértices de grau ímpar em um grafo é par

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = \sum_{d(v_j) par} d(v_j) + \sum_{d(v_k) impar} d(v_k)$$