Algoritmos em Grafos

Rodrigo Caetano de Oliveira Rocha

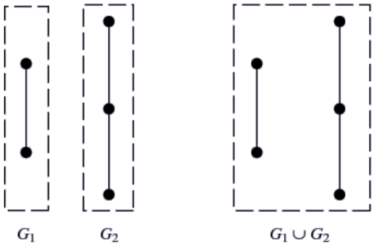
Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

2015

Operações em Grafos - União

- Sejam $G_1(V_1, E_1)$ e $G_2(V_2, E_2)$ grafos não direcionados, com vértices disjuntos, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.
  A **união** entre G_1 e G_2 é definida como a união dos conjuntos de vértices e a união dos conjuntos de arestas, isto é:

$$G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$$



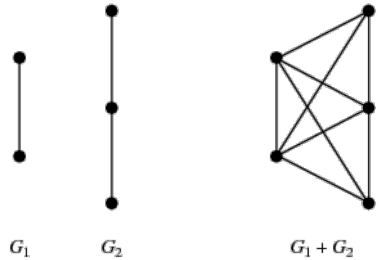
Operações em Grafos - União

- O que podemos concluir sobre a conectividade da **união** de dois grafos?
- O grafo resultante de uma **união** é sempre **desconectado**.
  - Pois o conjunto de vértices é disjunto, logo não existe aresta que conecta os dois grafos originais.

Operações em Grafos - Join (Soma)

- Sejam $G_1(V_1, E_1)$ e $G_2(V_2, E_2)$ grafos não direcionados, com vértices disjuntos, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.
  O **join** entre G_1 e G_2 é definida como a união entre G_1 e G_2 em conjunto com a criação de todas as arestas ligando os vértices entre os grafos, isto é:

$$G_1 + G_2 = G_1 \cup G_2 \cup \{v_1 v_2 | v_1 \in V_1 e v_2 \in V_2\}$$

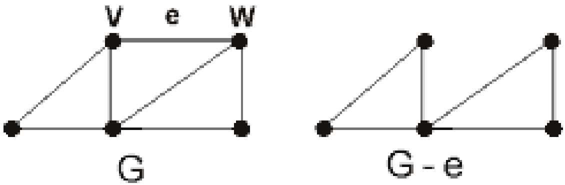


Operações em Grafos - Join (Soma)

- O que podemos concluir sobre a conectividade do **join** entre dois grafos?
- O grafo resultante de um **join** é sempre **conectado**.
  - Pois são criadas arestas conectando todos os vértices entre os dois grafos originais, logo existe pelo menos um caminho entre quaisquer dois vértices, por exemplo, um caminho que alterna os vértices de um grafo ao outro.

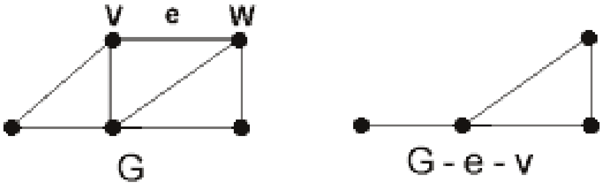
Operações em Grafos - Remoção de arestas

- Se e é uma aresta de um grafo G, denota-se $G - e$ o grafo obtido pela remoção da aresta e de G.
- De maneira geral, se S é um subconjunto de arestas de G, $G - S$ remove de G todas as arestas em S.



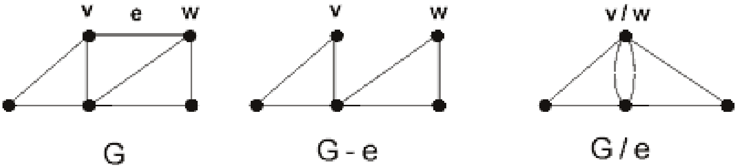
Operações em Grafos - Remoção de vértices

- Se v é um vértice de um grafo G, denota-se $G - v$ o grafo obtido pela remoção do vértice v juntamente com as arestas incidentes a v.
- De maneira geral, se S é um subconjunto de vértices de G, $G - S$ remove de G todos os vértices em S.

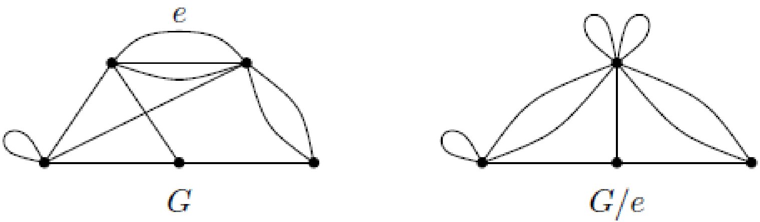


Operações em Grafos - Contração de arestas

- A contração da aresta $e = (u, v)$ do grafo G é representada por G/e.
- A contração G/e resulta em remover a aresta e, substituindo os vértices u e v por um único vértice adjacente à todas as arestas de u e v.

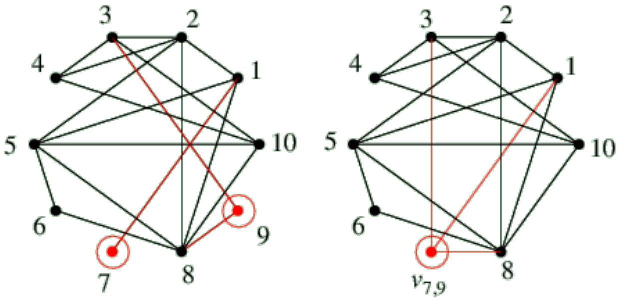


Operações em Grafos - Contração de arestas



Operações em Grafos - Contração de arestas

- A contração de dois vértices u e v, não necessariamente vizinhos, do grafo G é representada por $G/\{u, v\}$.
- A contração $G/\{u, v\}$ resulta em substituir os vértices u e v por um único vértice adjacente à todas as arestas de u e v.

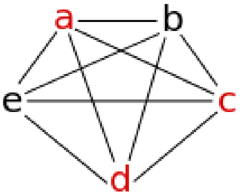


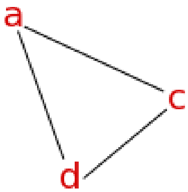
Subgrafos

- Seja G um grafo. H é um subgrafo de G, se $V(H) \subset V(G)$ e $E(H) \subset E(G)$.
  - Os vértices de H representam um subconjunto dos vértices de G.
  - As arestas de H representam um subconjunto das arestas de G.

Subgrafos induzido por vértices

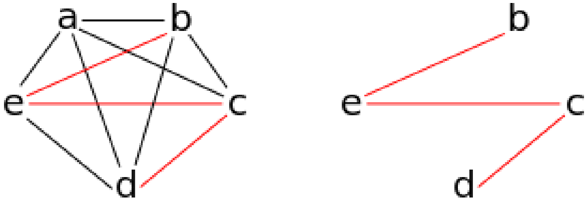
- Sejam G um grafo e $S \subset V(G)$. O subgrafo induzido pelos vértices S possui S como vértices e todas as arestas foramadas por pares de vértices de S.





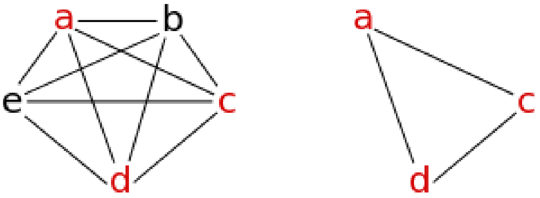
Subgrafos induzido por arestas

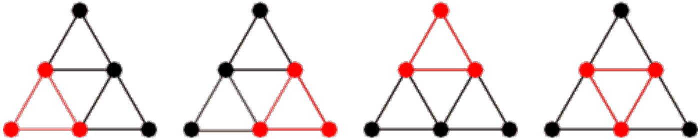
- Sejam G um grafo e $S \subset E(G)$. O subgrafo induzido pelas arestas S possui S como seu conjunto de arestas e todos os vértices adjacentes as arestas em S.



Clique

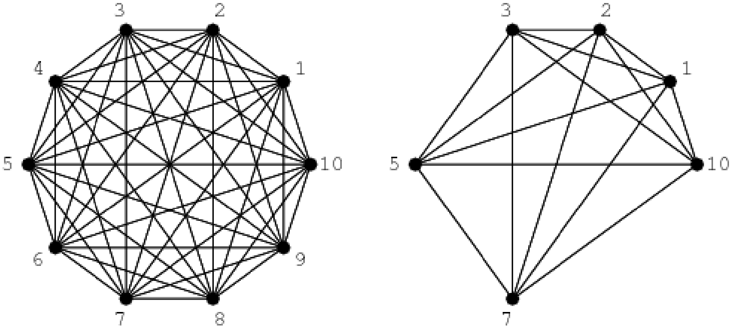
- Um subgrafo induzido que seja completo é chamado de **clique**.





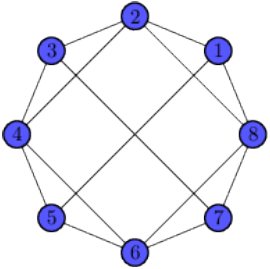
Clique

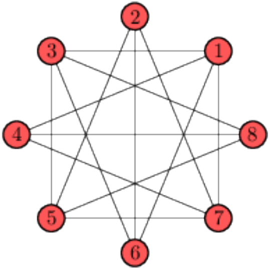
- Um subgrafo induzido que seja completo é chamado de **clique**.



Grafo complementar

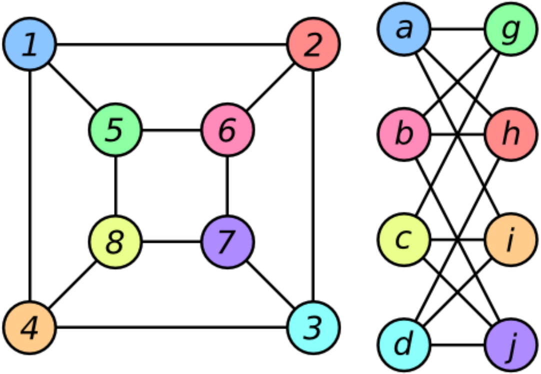
- Um complemento de um grafo G, representado por $C(G)$, é um grafo formado por:
  - Os vértices de $C(G)$ são todos os vértices de G.
  - As arestas de $C(G)$ são exatamente as arestas que **faltam** em G para formar um grafo completo.





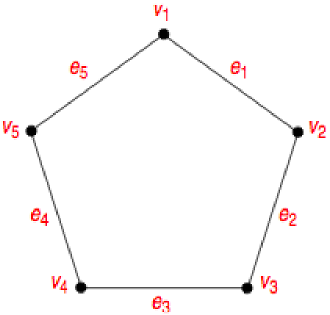
Isomorfismo

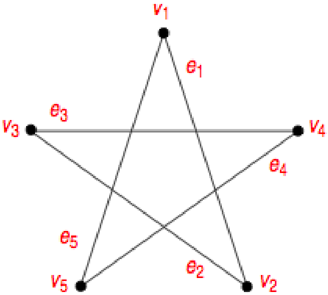
- Dois grafos G e H são ditos isomorfos se existir uma correspondência de um-para-um entre seus vértices e suas arestas.



Isomorfismo

- Dois grafos G e H são ditos isomorfos se existir uma correspondência de um-para-um entre seus vértices e suas arestas.





Isomorfismo

- Dois grafos G e H são ditos isomorfos se existir uma correspondência de um-para-um entre seus vértices e suas arestas.
- Condições necessárias mas **não** suficientes para que G e H sejam isomorfos:
  - Mesmo número de vértices
  - Mesmo número de arestas
  - Mesmo número de vértices com o mesmo grau
  - Mesmo número de componentes

Isomorfismo

- Exemplo de grafos **não** isomorfos.

- **Obs.:** Não existe um algoritmo eficiente para determinar se dois grafos são isomorfos.