Esercitazione 4

ESERCIZIO 1

Si considerino i seguenti 10 individui, per essi si osserva l'età. Si individuino mediana e quartili.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
58	36	32	86	52	60	56	19	37	51

SOLUZIONE

Ordiniamo la tabella in ordine crescente

	$x_{(1)}$	$x_{(2)}$	$x_{(3)}$	$x_{(4)}$	$x_{(5)}$	$x_{(6)}$	$x_{(7)}$	$x_{(8)}$	$x_{(9)}$	$x_{(10)}$
x_i	19	32	36	37	51	52	56	58	60	86

La mediana corrisponde a

$$Me = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} = x_{(5,5)} = x_{(5)} + 0,5 \times \left(x_{(6)} - x_{(5)}\right) = 51,5$$

I quartili sono calcolati come

$$q_1 = x_{\left(\frac{n+1}{4}\right)} = x_{(2,75)} = x_{(2)} + 0,75 \times \left(x_{(3)} - x_{(2)}\right) = 35$$
$$q_2 = Me$$
$$q_3 = x_{(8,25)} = x_{(8)} + 0,25 \times \left(x_{(9)} - x_{(8)}\right) = 58,5$$

ESERCIZIO 2

Si considerino i seguenti valori

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	3	5	7	7,5

Calcolare la media aritmetica. Verificare la proprietà di internalità della media e la prima proprietà della media.

SOLUZIONE

Possiamo calcolare la media aritmetica come

$$M_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i = \frac{1}{5}(2+3+5+7+7,5) = \frac{24,5}{5} = 4,9$$

La proprietà di internalità della media aritmetica implica che la media deve essere compresa tra il più piccolo valore osservato ed il più grande valore osservato

$$x_{(1)} \leq M_1 \leq x_{(n)}$$

applicando il risultato ai dati in analisi

$$x_{(1)} = 2 \leq 4,9 \leq 7,5 = x_{(n)}$$

quindi vale la proprietà di internalità.
Prima proprietà della media aritmetica: la somma degli scarti $(x_i - M_1)$ è uguale a 0. Dai dati precedenti abbiamo che

i	x_i	$(x_i - M_1)$
1	2	-2,9
2	3	-1,9
3	5	0,1
4	7	2,1
5	7,5	2,6

la somma degli scarti risulta essere

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - M_1) = -2,9 - 1,9 + 0,1 + 2,1 + 2,6 = 0$$

La prima proprietà della media è verificata.

ESERCIZIO 3

Sono stati intervistati 7 responsabili acquisti e si è rilevata, tra le altre informazioni, la durata in giorni di un Kg di zucchero. I dati osservati sono i seguenti:

d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7
25	30	45	30	60	45	60

Osservando che il consumo giornaliero c_i di un Kg di zucchero è dato da $\frac{1}{d_i}$ essendo di la durata dell'i-mo responsabile acquisti, si fornisca il consumo medio giornaliero che lascia inalterato il consumo globale giornaliero dei 7 responsabili acquisti. Individuare il tipo di media ottenuta in termini di consumi e il tipo di media ottenuta in termini di durate.

SOLUZIONE

i	d_i	$c_i = \frac{1}{d_i}$
1	25	0,0400
2	30	0,0333
3	45	0,0222
4	30	0,0333
5	60	0,0167
6	45	0,0222
7	60	0,0167

Il consumo medio giornaliero che lascia inalterato il consumo globale degli acquisti si ottiene considerando che:

$$c_{TOT} = \sum_{i=1}^{n} c_i = (c_1 + \ldots + c_n) = (\bar{c} + \ldots + \bar{c}) = n\bar{c}$$

da cui si ricava che

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = n\bar{c} \quad \Rightarrow \quad \bar{c} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i$$

la media individuata è quindi una media aritmetica dei consumi

$$M_1^c = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i = \frac{1}{7}\left(0,04 + 0,0333 + 0,0222 + 0,0333 + 0,0167 + 0,0222 + 0,0167\right) = 0.0263$$

In termini di durate, mantenendo invariato il consumo, bisogna risolvere

$$c_{TOT} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i} = \left(\frac{1}{d_1} + \ldots + \frac{1}{d_n}\right) = \left(\frac{1}{\bar{d}} + \ldots + \frac{1}{\bar{d}}\right) = n\frac{1}{\bar{d}}$$

dalla precedente si ricava che

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i} = n\frac{1}{\bar{d}} \quad \Rightarrow \quad \bar{d} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i}}$$

La media delle durate che lascia invariato il consumo globale è la media armonica delle durate

$$M_{-1}^{c} = \frac{1}{\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7}\frac{1}{d_i}} = \frac{1}{\frac{1}{7}\left(\frac{1}{25} + \frac{1}{30} + \frac{1}{45} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60} + \frac{1}{45} + \frac{1}{60}\right)} = 37.951$$

ESERCIZIO 4

Si consideri una popolazione suddivisa in tre gruppi. Si calcoli la media aritmetica di ogni gruppo e la media dell'intera popolazione. Si verifichi la proprietà associativa della media aritmetica

x^A	x^B	x^C
12	90	98
34	76	34
45	34	23
12	45	64
75		34
		83

SOLUZIONE

Posto $n_1 = 5$ numerosità del primo gruppo, $n_2 = 4$ numerosità del secondo gruppo, $n_3 = 6$ numerosità del terzo gruppo e $n = 15$ numerosità totale, calcoliamo le medie aritmetiche dei tre gruppi distinti

$$M_1^{(1)} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} x_i^A = \frac{1}{5}(12 + 34 + 45 + 12 + 75) = \frac{1}{5}(178) = 35,6$$

$$M_1^{(2)} = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} x_i^B = \frac{1}{4}(90 + 76 + 34 + 45) = \frac{1}{4}(245) = 61,25$$

$$M_1^{(3)} = \frac{1}{n_3}\sum_{i=1}^{n_3} x_i^C = \frac{1}{6}(98 + 34 + 23 + 64 + 34 + 83) = \frac{1}{6}(336) = 56$$

la media dell'intera popolazione è pari a

$$M_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{15}(12 + 34 + 45 + \ldots + 64 + 34 + 83) = \frac{1}{15}(759) = 50,6$$

secondo la proprietà associativa, posto $k = 3$ il numero di gruppi differenti

$$M_1 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} n_j \times M_1^{(j)} = \frac{1}{15}(5 \times 35,6 + 4 \times 61,25 + 56 \times 6) = \frac{1}{15}(759) = 50,6$$

che corrisponde al valore precedente.

ESERCIZIO 5

Nel comune di Milano, presso il quartiere Bicocca, sono state rilevate le temperature di una giornata ad intervalli regolari di 3 ore. La seguente tabella riporta i valori osservati espressi in gradi Celsius:

i	x_i
1	8
2	6
3	6
4	6
5	11
6	12
7	10
8	10

si calcoli la media aritmetica. Che valore assumerebbe la media aritmetica se le temperature fossero espresse in gradi Kelvin? E se fossero espresse in gradi Fahrenheit? Si discuta la natura del carattere e delle scale citate. $x_6 = 12°C$ è il doppio di $x_2 = 6°C$?
Si ricordano le relazioni esistenti tra le scale di misurazione della temperatura

$$K = C + 273,15$$
$$F = \tfrac{9}{5}C + 32$$

e che lo zero assoluto corrisponde a 0°K

SOLUZIONE

La media aritmetica delle temperature espresse in gradi Celsius è pari a

$$M_1^C = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{8}(8+6+6+6+11+12+10+10) = \frac{1}{8}(69) = 8,625$$

Stando alla quarta proprietà della media aritmetica, se esiste una relazione lineare tra due quantità allora tale relazione sussiste tra le medie delle due quantità. La media delle temperature in gradi Kelvin può quindi essere ottenuta come

$$M_1^K = M_1^C + 273,15 = 8,625 + 273,15 = 281,775$$

Analogamente la temperatura media in gradi Fahrenheit può essere calcolata come

$$M_1^F = \frac{9}{5}M_1^C + 32 = \frac{9}{5} \times 8,625 + 32 = 47,525$$

Il carattere in analisi è un carattere continuo. Le scale di misura sono: scala di intervalli per i gradi Celsius e Fahrenheit e scala di rapporti per i gradi Kelvin. Per i gradi Celsius ed i gradi Fahrenheit lo zero non indica assenza di temperatura, mentre per i gradi Kelvin lo zero corrisponde allo zero assoluto, ovvero assenza di temperatura.
Per le scale di intervalli non si possono effettuare rapporti, quindi $x_6 = 12°C$ non corrisponde al doppio della temperatura $x_2 = 6°C$.

ESERCIZIO 6

Un automobilista, nel fare un percorso di 100 Km, viaggia a velocità diverse. Percorre i primi 20 Km ad una velocità di 50 Km/h, altri 30 Km ad una velocità di 80 Km/h e gli ultimi 50 Km ad una velocità di 60 Km/h. Valutare la velocità media che lascia inalterato il tempo di percorrenza del tragitto.

SOLUZIONE

Possiamo considerare i Km percorsi come la "frequenza" percorsa ad una determinata velocità. Il tempo (espresso in ore) per percorrere un Km ad una velocità fissata è dato dal reciproco della velocità oraria:

$$t_i = \frac{1}{v_i}$$

abbiamo quindi, per i dati in analisi:

i	d_i	v_i	$t_i = \frac{1}{v_i}$
1	20	50	0,2
2	30	80	0,125
3	50	60	0,167

La velocità media oraria che lascia inalterato il tempo di percorrenza del tragitto è data dalla media che risolve la seguente

$$T_{TOT} = \sum_{i=1}^{k} d_i \times \frac{1}{v_i} = \left(d_1 \times \frac{1}{v_1} + d_2 \times \frac{1}{v_2} + d_3 \times \frac{1}{v_3}\right) = \left(d_1 \times \frac{1}{\bar{v}} + d_2 \times \frac{1}{\bar{v}} + d_3 \times \frac{1}{\bar{v}}\right) = \frac{1}{\bar{v}}(d_1 + d_2 + d_3)$$

da cui si ricava che la media in questione risulta essere la media che risolve

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \times \frac{1}{v_i} = \frac{1}{\bar{v}}(d_1 + d_2 + d_3)$$

che è vera se

$$\bar{v} = \frac{1}{\frac{1}{(d_1+d_2+d_3)} \sum_{i=1}^{k} \frac{d_i}{v_i}}$$

ovvero otteniamo la media armonica della velocità, dove le distanze percorse vengono usate come frequenze. Applicando la media trovata ai dati otteniamo

$$\bar{v} = \frac{1}{\frac{1}{(d_1 + d_2 + d_3)} \sum_{i=1}^{k} \frac{d_i}{v_i}} = \frac{1}{\frac{1}{100}\left(\frac{20}{50} + \frac{30}{80} + \frac{50}{60}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{100} \times 1.608} = 62.176$$

ESERCIZIO 7

La seguente tabella riporta gli immatricolati nell'anno accademico 2006/2007 iscritti ad un corso di laurea di una delle università di Milano suddivisi secondo il voto di maturità

i	*voto*	n_i
1	60-69	71
2	70-79	69
3	80-89	55
4	90-100	82
	Totale	277

Si calcolino la media aritmetica, la media quadratica, la media geometrica e la media armonica.

SOLUZIONE

i	*voto* $(x_l - x_u)$	x_i^c	n_i	$x_i^c \times n_i$	$(x_i^c)^2$	$(x_i^c)^2 \times n_i$	$log\,(x_i^c)$	$log\,(x_i^c) \times n_i$	$\frac{1}{x_i^c}$	$\frac{n_i}{x_i^c}$
1	60-69	64,5	71	4579,5	4160,25	295377,75	4.167	295.833	0.0155	1.101
2	70-79	74,5	69	5140,5	5550,25	382967,25	4.311	297.445	0.0134	0.926
3	80-89	84,5	55	4647,5	7140,25	392713,75	4.437	244.021	0.0118	0.651
4	90-100	95	82	7790,0	9025	740050	4.554	373.418	0.0105	0.863
	Totale		277	22157,5		1811108,75		1210.718		3.541

Per prima cosa dobbiamo calcolare i valori centrali delle classi, il generico valore centrale i-esimo si ottiene come $x_i^c = \frac{(x_l + x_u)}{2}$. Posto k pari al numero di classi ed n la numerosità totale, la media aritmetica è pari a

$$M_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \times x_i^c = \frac{1}{277}\left(71 \times 64,5 + 69 \times 74,5 + 55 \times 84,5 + 82 \times 95\right) = \frac{1}{277}22157,5 = 79.991$$

La media quadratica è pari a

$$M_2 = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \times \left(x_i^c\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{277}\left(71 \times 64,5^2 + \ldots + 82 \times 95^2\right)} = \sqrt{\frac{1}{277}1811108,75} = 80.860$$

La media geometrica è pari a

$$M_0 = e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \times log(x_i^c)} = e^{\frac{1}{277}(71 \times log(64,5) + 69 \times log(74,5) + 55 \times log(84,5) + 82 \times log(95))} = e^{\frac{1}{277}1210.718} = 79.109$$

la media armonica è pari a

$$M_{-1} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \times \frac{1}{x_i^c}} = \frac{1}{\frac{1}{277}\left(71 \times \frac{1}{64,5} + 69 \times \frac{1}{74,5} + 55 \times \frac{1}{84,5} + 82 \times \frac{1}{95}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{277} \times 3.541} = 78.227$$