Esercitazione 7

ESERCIZIO 1

I redditi annui (in migliaia di Euro) di 7 individui sono dati da

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	26	21	58	33	35	19	41

Si stabilisca se la distribuzione dei redditi è simmetrica. In caso contrario si calcolino le asimmetrie puntuali rispetto alla mediana e un indice del verso di asimmetria.

SOLUZIONE

i	$x_{(i)}$	$x_{(n-i+1)}$	$x_{(i)}+x_{(n-i+1)}$	$x_{(i)}+x_{(n-i+1)} - 2 \times Me$
1	19	58	77	11
2	21	41	62	-4
3	26	35	61	-5
4	33	33	66	0
5	35	26	61	-5
6	41	21	62	-4
7	58	19	77	11

La distribuzione è simmetrica se esiste un valore M tale per cui

$$\begin{cases} \big(x_{(1)} - M\big) + \big(x_{(n)} - M\big) = 0 \\ \big(x_{(2)} - M\big) + \big(x_{(n-1)} - M\big) = 0 \\ \vdots \\ \big(x_{(n)} - M\big) + \big(x_{(1)} - M\big) = 0 \end{cases}$$

ovvero se vale

$$\begin{cases} (19 - M) + (58 - M) = 0 \\ (21 - M) + (41 - M) = 0 \\ (26 - M) + (35 - M) = 0 \\ (33 - M) + (33 - M) = 0 \\ (35 - M) + (26 - M) = 0 \\ (41 - M) + (21 - M) = 0 \\ (58 - M) + (19 - M) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} M = \frac{19+58}{2} = 38,5 \\ M = \frac{21+41}{2} = 31 \\ M = \frac{26+35}{2} = 30,5 \\ M = \frac{33+33}{2} = 33 \\ M = \frac{35+26}{2} = 30,5 \\ M = \frac{41+21}{2} = 31 \\ M = \frac{58+19}{2} = 38,5 \end{cases}$$

Non esiste un valore M tale per cui valgono contemporaneamente tutte le precedenti. Un metodo più rapido per controllare in via preliminare se una distribuzione è asimmetrica consiste nel confrontare media e mediana: se la media è diversa dalla mediana allora la distribuzione non è simmetrica (non vale, invece, il viceversa: se la media è uguale alla mediana NON è detto che sia simmetrica). Nell'esercizio abbiamo che:

$$M_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{7} (233) = 33,285$$

$$Me = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} = x_{(4)} = 33$$

la media è diversa dalla mediana, quindi la distribuzione non è simmetrica.

Le asimmetrie puntuali rispetto alla mediana sono

$$A_i\left(Me\right) = \left(x_{(i)} - Me\right) + \left(x_{(n-i+1)} - Me\right) = x_{(i)} + x_{(n-i+1)} - 2 \times Me$$

ovvero

$$A_1\left(Me\right) = x_{(1)} + x_{(n)} - 2 \times Me = 11$$

$$A_2\left(Me\right) = x_{(1)} + x_{(n)} - 2 \times Me = -4$$

$$A_3\left(Me\right) = x_{(1)} + x_{(n)} - 2 \times Me = -5$$

$$A_4\left(Me\right) = x_{(1)} + x_{(n)} - 2 \times Me = 0$$

L'indice del verso di asimmetria è dato dalla media delle asimmetrie puntuali:

$$M_1\left\{A\left(Me\right)\right\} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A_i\left(Me\right) = \frac{1}{7}\left[11 - 4 - 5 + 0 - 5 - 4 + 11\right] = \frac{1}{7} \times 4 = 0,57$$

Si dimostra essere equivalente a

$$M_1\left\{A\left(Me\right)\right\} = 2 \times \left(M_1 - Me\right) = 2 \times \left(33,285 - 33\right) = 0,57$$

essendo che $M_1\left\{A\left(Me\right)\right\} > 0$ la distribuzione presenta asimmetria positiva, la media è maggiore della mediana e la distribuzione è allungata verso destra.

ESERCIZIO 2

Le altezze (in cm) dei cinque attaccanti di una squadra di calcio sono.

i	1	2	3	4	5
x_i	181	193	186	190	180

Si stabilisca se la distribuzione è simmetrica.

SOLUZIONE

i	$x_{(i)}$	$x_{(n-i+1)}$
1	180	193
2	181	190
3	186	186
4	190	181
5	193	180

Per stabilire se la distribuzione è simmetrica, prima di tutto bisogna confrontare la media con la mediana

$$Me = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} = x_{(6)} = 186$$

$$M_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{5} \times 930 = 186$$

abbiamo che $Me = M_1$, non è sufficiente per stabilire che la distribuzione è simmetrica, bisogna guardare le asimmetrie puntuali (è sufficiente guardare le asimmetrie puntuali rispetto alla mediana)

$$\begin{cases} x_{(1)} + x_{(5)} - 2 \times Me = 180 + 193 - 2 \times 186 = 1 \\ x_{(2)} + x_{(4)} - 2 \times Me = 181 + 190 - 2 \times 186 = -1 \\ x_{(3)} + x_{(3)} - 2 \times Me = 186 + 186 - 2 \times 186 = 0 \\ x_{(4)} + x_{(2)} - 2 \times Me = 190 + 181 - 2 \times 186 = -1 \\ x_{(5)} + x_{(1)} - 2 \times Me = 193 + 180 - 2 \times 186 = 1 \end{cases}$$

essendo che le asimmetrie puntuali sono diverse da 0, la variabile non è simmetrica.

ESERCIZIO 3

La seguente tabella riporta la distribuzione di 15 agenzie immobiliari rispetto al numero X di monolocali in vendita in un comune.

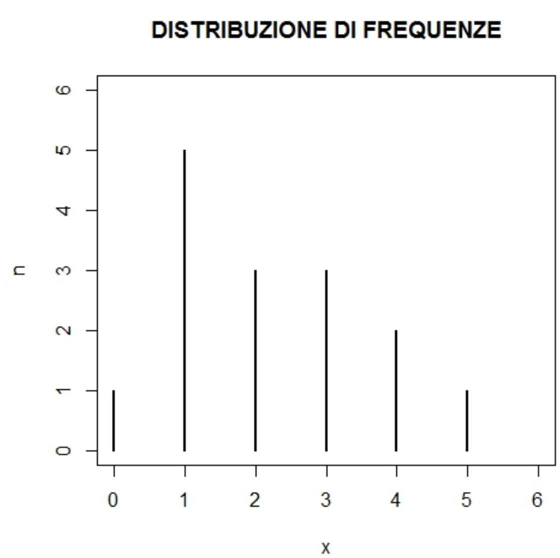
i	1	2	3	4	5	6
x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	1	5	3	3	2	1

Si rappresenti graficamente la distribuzione di frequenze e si stabilisca se è simmetrica. Si calcoli l'indice del verso di asimmetria.

SOLUZIONE

i	x_i	n_i	$n_i \times x_i$
1	0	1	0
2	1	5	5
3	2	3	6
4	3	3	9
5	4	2	8
6	5	1	5

Rappresentazione grafica



Per stabilire se è simmetrica, come primo passaggio confrontiamo la media e la mediana.

$$Me = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} = x_{(8)} = 2$$

$$M_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i \times n_i = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{6} x_i \times n_i = \frac{1}{15} \times 33 = 2,2$$

la media è diversa dalla mediana, la distribuzione è asimmetrica. Calcoliamo l'indice del verso di asimmetria:

$$M_1 \{A\,(Me)\} = 2 \times (M_1 - Me) = 2 \times (2,2 - 2) = 2 \times 0,4 = 0,4$$

L'indice di asimmetria è maggiore di 0, siamo in presenza di asimmetria positiva, la media è maggiore della mediana e la coda destra della distribuzione è più allungata.
Per mostrare la presenza di asimmetria si poteva scegliere studiare le frequenze della distribuzione: in caso di asimmetria deve valere

$$n\,(Me - c) = n\,(Me + c)$$

qualunque sia c, dove $n\,()$ indica la frequenza nel punto. Scegliendo $c = 1$ abbiamo che

$$n\,(Me - c) = n\,(2 - 1) = n\,(1) = 5$$

$$n\,(Me + c) = n\,(2 + 1) = n\,(3) = 3$$

i due valori differiscono tra loro, quindi la distribuzione non è simmetrica.

ESERCIZIO 4

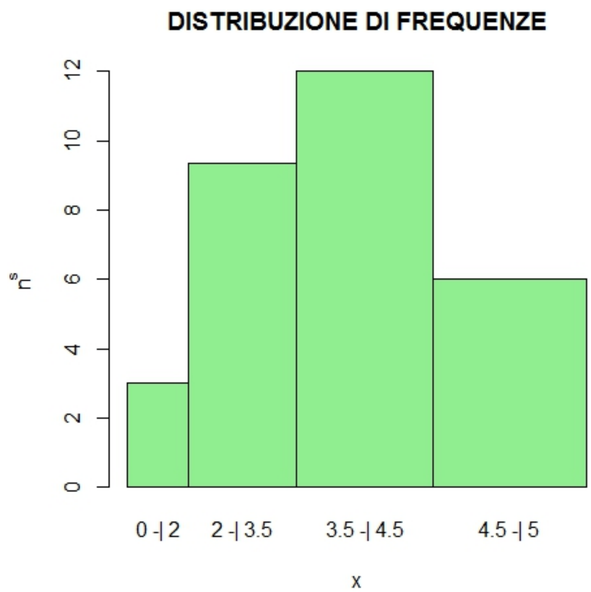
I 35 rappresentanti di un'azienda sono stati classificati in base al numero X di km percorsi (espressi in migliaia) per visitare, durante il mese di febbraio, i propri clienti. I dati ottenuti sono riportati nella tabella seguente:

i	$x_l - \vert x_u$	n_i
1	$0 - \vert 2$	6
2	$2 - \vert 3,5$	14
3	$3,5 - \vert 4,5$	12
4	$4,5 - \vert 5$	3
	Totale	35

SOLUZIONE

i	$x_l - \vert x_u$	n_i	a_i	n_i^s	x_i^c	C_i
1	$0 - \vert 2$	6	2	3	1	6
2	$2 - \vert 3,5$	14	1,5	9,333	2,75	20
3	$3,5 - \vert 4,5$	12	1	12	4	31
4	$4,5 - \vert 5$	3	0,5	6	4,75	35
	Totale	35				

Si fornisca la rappresentazione grafica delle frequenze di X e si stabilisca se la distribuzione è simmetrica rispetto alla mediana e si calcoli l'indice di verso di asimmetria.



Calcoliamo la mediana e la media, per vedere se differiscono tra loro

$$Me = x_l + \left(\frac{n+1}{2} - C_{i-1} - \frac{1}{2}\right) \times \frac{a_i}{n_i} = 2 + \left(18 - 6 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{1,5}{14} = 3,23$$

$$M_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^c \times n_i = \frac{1}{35}\,(105,15) = 3,004$$

La media è diversa dalla mediana, quindi la distribuzione non è simmetrica. Si poteva ottenere lo stesso risultato confrontando tra loro le frequenze specifiche: per ogni valore c deve valere:

$$n^s\,(Me - c) = n^s\,(Me + c)$$

poniamo $c = 0.5$, abbiamo che

$$n^s\,(Me - c) = n^s\,(3,23 - 0,5) = n^s\,(2,73) = 9,333$$

$$n^s\,(Me + c) = n^s\,(3,23 + 0,5) = n^s\,(3,73) = 12$$

essendo diverse, la distribuzione non può essere simmetrica.
L'indice del verso di asimmetria è dato dalla seguente

$$M_1\,\{A\,(Me)\} = 2 \times (M_1 - Me) = 2 \times (3,004 - 3,23) = 2 \times (-0,226) = -0,452$$

Essendo l'indice del verso di asimmetria minore di 0 la distribuzione presenta asimmetria negativa, la media è minore della mediana e la distribuzione è allungata verso sinistra.

ESERCIZIO 5

Le 69 persone iscritte ad un centro di assistenza fiscale lombardo, sono state classificate secondo il numero X di giorni di attesa intercorsi tra la richiesta di assistenza e la convocazione per la compilazione della dichiarazione dei redditi. I dati sono riportati nella seguente tabella.

i	x_i	n_i
1	1	2
2	2	4
3	3	8
4	4	7
5	5	11
6	6	7
7	10	12
8	15 o più	18
	Totale	69

- Si determini la mediana del carattere X.
- Mediante il confronto di opportune frequenze, si stabilisca se la distribuzione è simmetrica rispetto alla mediana.
- Sapendo che il numero massimo di giorni di attesa è stato pari a 20, si calcoli un indice del verso di asimmetria.

SOLUZIONE

i	x_i	n_i	C_i	x_i^c	n_i^s
1	1	2	2	1	2
2	2	4	6	2	4
3	3	8	14	3	8
4	4	7	21	4	7
5	5	11	32	5	11
6	6	7	39	6	7
7	10	12	51	10	12
8	15 o più	18	69	17,5	3
	Totale	69			

La mediana è

$$Me = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} = x_{(35)} = 6$$

Per controllare, utilizzando le frequenze, se la distribuzione è simmetrica bisogna mostrare che

$$n\,(Me - c) = n\,(Me + c)$$

qualunque sia c, quindi, è sufficiente mostrare che non vale per un valore c per dire che è asimmetrica. Poniamo $c = 1$

$$n\,(Me - c) = n\,(6 - 1) = n\,(5) = 11$$

$$n\,(Me + c) = n\,(6 + 1) = n\,(7) = 0$$

essendo che differiscono, la distribuzione non è simmetrica.
Posto che il numero massio di giorni di attesa è stato pari a 20, abbiamo

$$M_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^c \times n_i = \frac{1}{69}(594) = 8,61$$

quindi l'indice del verso di asimmetria risulta essere

$$M_1\{A(Me)\} = 2 \times (M_1 - Me) = 2 \times (8,61 - 6) = 2 \times (2,61) = 5,22$$

Essendo maggiore di 0, la distribuzione presenta un'assimetria positiva, la media è maggiore della mediana e la distribuzione è allungata verso destra.