Esercitazione 5

ESERCIZIO 1

Una nota azienda che produce alcolici appalta ad una società di comunicazione la sponsorizzazione del proprio prodotto, tramite l'organizzazione di eventi. Ad ogni evento organizzato vengono portate 2000 bottiglie del prodotto che si vuole sponsorizzare. Al termine dell'evento vengono conteggiate le bottiglie consumate. Di seguito sono riportati i consumi degli ultimi eventi

i	x_i
1	1100
2	1250
3	930
4	810
5	8000
6	730
7	1010
8	980

Calcolare media aritmetica, media quadratica, mediana, campo di variazione e differenza interquartile per i dati osservati.
Supponendo che in realtà $x_5 = 800$, determinare media, media quadratica, mediana, campo di variazione e differenza interquartile. Commentare i risultati ottenuti.

SOLUZIONE

Assumendo ormai chiaro il calcolo degli indici di posizione, si ha che:

$$M_1 = 1851,25$$

$$M_2 = 2975,04$$

$$Me = 995$$

$$q_1 = 840$$

$$q_3 = 1212,5$$

Il campo di variazione è lo spazio in cui abbiamo osservato i valori, si ottiene come

$$campo\,variazione = \left(x_{(n)} - x_{(1)}\right) = 8000 - 730 = 7270$$

La distanza interquartile è data dalla distanza tra il primo quartile ed il terzo quartile, ovvero

$$distanza\,interquartile = (q_3 - q_1) = 1212,5 - 840 = 372,5$$

Supponendo che in realtà $x_5 = 800$, i dati diventano

i	x_i^*
1	1100
2	1250
3	930
4	810
5	800
6	730
7	1010
8	980

$$M_1^* = 951,25$$

$$M_2^* = 964,81$$

$$Me^* = 955$$

$$q_1^* = 802,5$$

$$q_3^* = 1077,5$$

Il campo di variazione è lo spazio in cui abbiamo osservato i valori, si ottiene come

$$campo\, variazione^* = \left(x_{(n)}^* - x_{(1)}^*\right) = 1200 - 730 = 470$$

La distanza interquartile è data dalla distanza tra il primo quartile ed il terzo quartile, ovvero

$$distanza\, interquartile^* = (q_3^* - q_1^*) = 1077,5 - 802,5 = 275$$

ESERCIZIO 2

La seguente tabella riporta la distribuzione di 80 docenti di una facoltà classificati in base al numero X di insegnamenti semestrali nell'a.a. 2005/06:

i	x_i	$docenti = n_i$
1	1	6
2	2	18
3	3	21
4	4	24
5	5	8
6	6	3

determinare il campo di variazione, la differenza interquartile, lo scostamento medio dalla media aritmetica e lo scarto quadratico medio di X.

SOLUZIONE

i	x_i	n_i	C_i	$x_i \times n_i$	$x_i - M_1$	$n_i \times \lvert x_i - M_1 \rvert$	$(x_i - M_1)^2$	$n_i \times (x_i - M_1)^2$
1	1	6	6	6	-2,24	13,43	5,01	30,04
2	2	18	24	36	-1,24	22,28	1,53	27,57
3	3	21	45	63	-0,24	4,99	0,06	1,18
4	4	24	69	96	0,76	18,3	0,58	13,95
5	5	8	77	40	1,76	14,1	3,11	24,85
6	6	3	80	18	2,76	8,29	7,63	22,89

Assumendo ormai chiaro il calcolo degli indici di posizione, si ha che:

$$M_1 = 3,24$$

$$q_1 = 2$$

$$q_3 = 4$$

Il campo di variazione è lo spazio in cui abbiamo osservato i valori, si ottiene come

$$campo\, variazione = \left(x_{(n)} - x_{(1)}\right) = 6 - 1 = 5$$

La distanza interquartile è data dalla distanza tra il primo quartile ed il terzo quartile, ovvero

$$distanza\, interquartile = (q_3 - q_1) = 4 - 2 = 2$$

Lo scostamento medio dalla media aritmetica corrisponde alla media aritmetica degli scostamenti dalla media aritmetica, in valore assoluto

$$S_{M_1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \left|x_i - M_1\right| = \frac{1}{80}\sum_{i=1}^{6} n_i \left|x_i - 3,24\right| = \frac{1}{80}(81,38) = 1,02$$

Lo scarto quadratico medio è la media quadratica degli scarti dalla media aritmetica, ovvero

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \left(x_i - M_1\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{80}\sum_{i=1}^{6} n_i \left(x_i - 3,24\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{80}120,49} = \sqrt{1,51} = 1,23$$

ESERCIZIO 3

Al fine di ottimizzare uno sportello postale, sono stati rilevati i seguenti tempi di attesa, espressi in minuti

i	x_i
1	12,2
2	20,5
3	21,3
4	k
5	19,8
6	13,1
7	8,7

dove il valore k è stato perso durante la trascrizione dei dati.
Sapendo che la media aritmetica è pari $M_1 = 16,86$ e la mediana è pari a $Me = 19,8$, trovare il valore di k che rispetti il valore della media aritmetica ed un valore di k che rispetti il valore della mediana.
Calcolare inoltre, utilizzando il valore k che rispetta il valore della media aritmetica, campo di variazione, differenza interquartile, scostamento dalla media aritmetica e scarto quadratico medio.

SOLUZIONE

i	x_i
1	12,2
2	20,5
3	21,3
4	k
5	19,8
6	13,1
7	8,7

Per trovare la media, consideriamo che

$$M_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x} \implies n\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

quindi abbiamo che

$$k = n\bar{x} - \sum_{i\neq 4} x_i = n\bar{x} - [x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_7] = 118,02 - 95,6 = 22,42$$

Essendo la mediana

$$Me = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} = x_{(4)} = 19,8$$

allora, ogni valore che lascia $19,8$ in quarta posizione rispetta la mediana. Ogni valore $k > 19,8$ lascia invariata la mediana.
Fissato $k = 22,42$ abbiamo che

i	x_i	$(x_i - M_1)$	$(x_i - M_1)^2$
1	12,2	-4,66	21,69
2	20,5	3,64	13,27
3	21,3	4,44	19,74
4	22,42	5,54	30,72
5	19,8	2,94	8,66
6	13,1	-3,76	14,12
7	8,7	-8,16	66,54

Il campo di variazione è

$$campo\,variazione = \left(x_{(n)} - x_{(1)}\right) = 22,42 - 8,7 = 13,72$$

La distanza interquartile è

$$distanza\,interquartile = (q_3 - q_1) = 21,3 - 12,2 = 9,1$$

Lo scostamento medio dalla media aritmetica viene calcolato come la media aritmetica dei valori assoluti degli scarti dalla media aritmetica

$$S_{M_1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - M_1| = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} |x_i - 16,86| = \frac{1}{7}(33,14) = 4,73$$

Lo scarto quadratico medio è la media quadratica degli scarti dalla media aritmetica, quindi è la radice quadrata della somma degli scarti al quadrato

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - M_1)^2} = \sqrt{\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} (x_i - 16,86)^2} = \sqrt{\frac{1}{7}(174,74)} = \sqrt{24,96} = 5,00$$

ESERCIZIO 4

Si consideri la seguente distribuzione di frequenze di 120 famiglie secondo il reddito mensile (in migliaia di euro).

i	$x_l - \vert x_u$	n_i	$redd_{tot}\,classe$
1	0,5-|1	15	13,5
2	1-|1,5	35	46,38
3	1,5-|2	35	63,87
4	2-|3	30	72
5	3-|5	5	17,75
	TOTALE	120	213,5

Calcolare lo scostamento medio dalla media aritmetica, lo scarto quadratico medio e lo scostamento medio dalla mediana. Si commentino i valori dei tre indici.

SOLUZIONE

i	$x_l -\vert x_u$	n_i	$redd_{tot}\, classe$	$\bar{x}_i$	$\bar{x}_i - Me$	$\bar{x}_i - M_1$
1	0,5-|1	15	13,5	0,9	-0,92	-0,88
2	1-|1,5	35	46,38	1,33	-0,49	-0,45
3	1,5-|2	35	63,87	1,82	0	0,05
4	2-|3	30	72	2,40	0,58	0,62
5	3-|5	5	17,75	3,55	1,73	1,77
	TOTALE	120	213,5			

Gli indici di posizione sono:

$$M_1 = 1,78$$

$$Me = 1,82$$

Lo scostamento medio dalla mediana è la media aritmetica degli scarti dalla mediana, presi in valore assoluto, ovvero

$$S_{Me} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i \left| x_i - Me \right| = \frac{1}{120} \sum_{i=1}^{5} n_i \left| x_i - 1,82 \right| = \frac{1}{120} (57,34) = 0,48$$

Lo scostamento medio dalla media è la media aritmetica degli scarti dalla media aritmetica, presi in valore assoluto

$$S_{M_1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i \left| x_i - M_1 \right| = \frac{1}{120} \sum_{i=1}^{5} n_i \left| x_i - 1,78 \right| = \frac{1}{120} (58,16) = 0,49$$

Lo scarto quadratico medio è la media quadratica degli scarti dalla media aritmetica, quindi è la radice quadrata della somma degli scarti al quadrato

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i \left(x_i - M_1 \right)^2} = \sqrt{\frac{1}{120} \sum_{i=1}^{5} n_i \left(x_i - 1,78 \right)^2} = \sqrt{\frac{1}{120} (46,12)} = \sqrt{0,38} = 0,62$$

ESERCIZIO 5

Al fine di confrontare due sportelli postali, sono stati rilevati rispettivamente seguenti tempi di attesa X (Milano) ed Y (Padova), espressi in minuti

i	$Milano = x_i$
1	7,2
2	9,7
3	12,3
4	2,4
5	4,4
6	5,1
7	22,9

i	$Padova = y_i$
1	18,2
2	17,7
3	21,8
4	14,5
5	17,3
6	18,5
7	17,0

Interesse dell'analisi è valutare le differenze tra i due comuni, in termini di posizione e dispersione del fenomeno in analisi.
Determinare quindi media aritmetica, media armonica, varianza, scarto quadratico medio e scostamento medio dalla media armonica per ognuno dei due comuni considerati. Commentare i risultati ottenuti.

SOLUZIONE

i	$Milano = x_i$	$x_i - M_1^X$	$x_i - M_{-1}^X$
1	7,2	-1,94	1,40
2	9,7	0,56	3,90
3	12,3	3,16	6,50
4	2,4	-6,74	-3,40
5	4,4	-4,74	-1,40
6	5,1	-4,04	-0,70
7	22,9	13,76	17,10

i	$Padova = y_i$	$y_i - M_1^Y$	$y - M_1^Y$
1	18,2	0,34	0,57
2	17,7	-0,16	0,07
3	21,8	3,94	4,17
4	14,5	-3,36	-3,13
5	17,3	-0,56	-0,33
6	18,5	0,64	0,87
7	17,0	0,86	-0,63

Gli indici di posizione sono:

$$M_1^X = 9,14$$

$$M_{-1}^X = 5,80$$

$$M_1^Y = 17,86$$

$$M_{-1}^Y = 17,63$$

La varianza è la media aritmetica degli scarti dalla media aritmetica, elevati al quadrato. La varianza, per le osservazioni della città di Milano è pari a

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - M_1^X\right)^2 = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7}(x_i - 9,14)^2 = \frac{1}{7}(287,62) = 41,09$$

La varianza per le osservazioni della città di Padova è

$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - M_1^Y\right)^2 = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7}(y_i - 17,86)^2 = \frac{1}{7}(28,42) = 4,06$$

Lo scarto quadratico medio è pari alla radice quadrata della varianza, quindi, per la città di Milano, abbiamo

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = 6,41$$

mentre per la città di Padova

$$\sigma_Y = \sqrt{\sigma_Y^2} = 2,01$$

Lo scostamento medio dalla media armonica è la media aritmetica degli scarti dalla media armonica, presi in valore assoluto. Per la città di Milano otteniamo

$$S_{M_{-1}}^X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - M_{-1}^X\right| = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7}|x_i - 5,80| = \frac{1}{7}(34,40) = 4,91$$

mentre per la città di Padova

$$S_{M_{-1}}^Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|y_i - M_{-1}^Y\right| = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7}|y_i - 17,63| = \frac{1}{7}(9,77) = 1,40$$

Tutti gli indici calcolati portano alle medesime conclusioni: i tempi di attesa risultano essere mediamente più elevati a Padova rispetto a Milano, ma il fenomeno è più variabile nella città di Milano, rispetto a Padova.

ESERCIZIO 6

Una agenzia immobiliare è interessata a conoscere la distribuzione degli appartamenti in vendita nella propria filiale di Monza. I dati sono stati rappresentati in classi (espresse in migliaia di euro).

i	$x_l - \vert x_u$	n_i
1	0-|50	1
2	50-|80	7
3	80-|120	11
4	120-|250	17
5	250-|500	5
6	500-|1000	3
	TOTALE	43

Determinare media aritmetica, mediana, scostamento medio dalla media aritmetica, scostamento medio dalla mediana, varianza e scarto quadratico medio.

SOLUZIONE

i	$x_l - \vert x_u$	n_i	x_i^c
1	0-|50	1	25
2	50-|80	7	65
3	80-|120	11	100
4	120-|250	17	185
5	250-|500	5	375
6	500-|1000	3	750
	TOTALE	43	

Gli indici di posizione sono:

$$M_1 = 205,81$$

$$Me = 139,12$$

Lo scostamento medio dalla mediana è la media aritmetica degli scarti dalla mediana, presi in valore assoluto, ovvero

$$S_{Me} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \left|x_i - Me\right| = \frac{1}{43}\sum_{i=1}^{6} n_i \left|x_i - 139,12\right| = \frac{1}{43}(4855,29) = 112,91$$

Lo scostamento medio dalla media è la media aritmetica degli scarti dalla media aritmetica, presi in valore assoluto

$$S_{M_1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i \left|x_i - M_1\right| = \frac{1}{43}\sum_{i=1}^{6} n_i \left|x_i - 205,81\right| = \frac{1}{43}(5162,79) = 120,60$$

La varianza è la media aritmetica degli scarti dalla media aritmetica, elevati al quadrato

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \left(x_i - M_1\right)^2 = \frac{1}{43}\sum_{i=1}^{6} n_i \left(x_i - 205,81\right)^2 = \frac{1}{43}(1333555,90) = 31012,93$$

Lo scarto quadratico medio è pari alla radice quadrata della varianza

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{31012,93} = 176,10$$

Vengono rispettate le proprietà degli indici di variabilità:

$$S_{Me} \leq S_{M_1}$$

e

$$S_{M_1} \leq \sigma$$