Esercitazione 8

ESERCIZIO 1

La seguente tabella riporta il capitale x_i (in migliaia di Euro) conferito dai 6 soci di una società per azioni.

Socio	A	B	C	D	E	F
x_i	4650	1120	956	2010	3518	805

1. Si tracci il diagramma di Lorenz e si calcoli il rapporto di concentrazione R di Gini.
2. Si commenti il punto di coordinate (p_3, q_3).
3. Senza effettuare calcoli si dica come varierebbe l'indice di concentrazione se:
   (a) il socio D dovesse conferire 100 mila Euro in più e il socio E 100 mila Euro in meno
   (b) il socio D dovesse conferire 100 mila Euro in meno e il socio E 100 mila Euro in più
   (c) tutti i soci dovessero conferire 200 mila Euro in più
   (d) tutti i soci dovessero conferire 200 mila Euro in meno
   (e) i conferimenti fossero espressi in migliaia di Dollari Statunitensi.
4. Si calcolino le medie superiori e le medie inferiori
5. Si calcoli l'indice di ineguaglianza di Zenga

SOLUZIONE

i	$x_{(i)}$	q'_i	q_i	c_i	$(2 \times i - n - 1)$	$x_i \times (2 \times i - n - 1)$
1	805	805	0,062	0,167	-5	-4025
2	956	1761	0,135	0,333	-3	-2868
3	1120	2881	0,221	0,500	-1	-1120
4	2010	4891	0,375	0,667	1	2010
5	3518	8409	0,644	0,833	3	10554
6	4650	13059	1,000	1,000	5	23250

Calcoliamo il capitale cumulato:

$$q'_i = \sum_{j=1}^{i} x_{(j)}$$

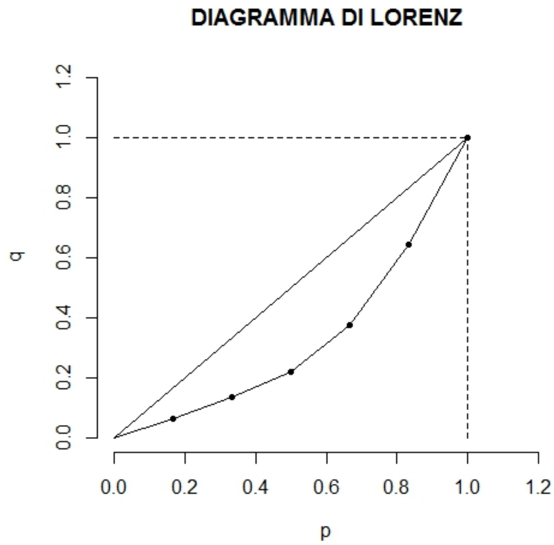
calcoliamo il valore relativo, dividendo per il capitale totale (ovvero la somma di tutte le osservazioni $x_{(i)}$)

$$q_i = \frac{q'_i}{T} \qquad T = \sum_{j=1}^{n} x_{(j)}$$

e le frequenze cumulate relative

$$c_i = \frac{C_i}{n}$$

Il diagramma di Lorenz si ottiene ponendo sull'asse orizzontale i valori c_i e sull'asse verticale q_i ed collegando con dei segmenti i punti



Il rapporto di concentrazione di Gini può essere calcolato come

$$R = \frac{Area\,concentrazione}{Area\,max\,concentrazione} = \frac{\Delta}{2 \times M_1}$$

Per i dati precedenti si ha che:

$$S = 2 \times \sum_{i=1}^{n} x_{(i)} \times (2 \times i - n - 1) = 2 \times 27801 = 55602$$

$$\Delta = \frac{S}{n\,(n-1)} = \frac{55602}{6 \times 5} = 1853,4$$

La media è pari a

$$M_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{6} \times (13059) = 2176,5$$

quindi il rapporto di concentrazione di Gini è uguale a

$$R = \frac{1853,4}{2 \times 2176,5} = 0,462$$

- L'indice diminuisce, posto $0 < h \leq x_i < x_j$, se definiamo nuovi valori $x_i* = x_i + h$ e $x_j* = x_j - h$ allora la concentrazione diminuisce
- L'indice aumenta, posto $0 < h \leq x_i < x_j$, se definiamo nuovi valori $x_i* = x_i - h$ e $x_j* = x_j + h$ allora la concentrazione aumenta
- L'indice deve diminuire, si è più vicini ad una situazione di equa ripartizione. Per le proprietà degli indici di concentrazione, se tutti i valori vengono aumentati di una costante allora l'indice diminuisce.
- L'indice aumenta, si è più vicini ad una situazione di massima concentrazione.
- L'indice è invariante rispetto a trasformazioni di scala.

i	$x_{(i)}$	q'_i	$M_i^-(x)$	$T-q'_i$	$M_i^+(x)$	$I_i(x)$
1	805	805	807	12254	2450,800	0,672
2	956	1761	880,500	11298	2824,500	0,688
3	1120	2881	960,333	10178	3392,667	0,717
4	2010	4891	1222,750	8168	4084	0,701
5	3518	8409	1681,800	4650	4650	0,638
6	4650	13059	2176,500	0	4650	0,532

Le medie inferiori sono calcolate come

$$M_i^-(x) = \frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i} x_{(j)} = \frac{q'_i}{i}$$

mentre le medie superiori

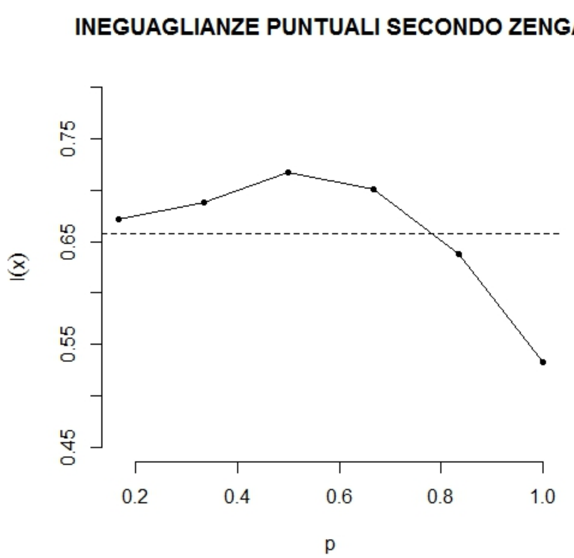
$$M_i^+(x) = \frac{1}{n-i}\sum_{j=i+1}^{n} x_{(j)} = \frac{T-q'_i}{n-i}$$

dove T è il capitale totale, $T=\sum_{i=1}^{n} x_{(i)}$ e per convenzione $M_i^+(x) = M_{n-1}^+(x) = x_{(n)}$
Partendo dalle quantità definite precedentemente, è possibile definire le ineguaglianze puntuali

$$I_i(x) = \frac{M_i^+(x) - M_i^-(x)}{M_i^+(x)} = 1 - \frac{M_i^-(x)}{M_i^+(x)}$$

e rappresenta la variazione relativa della media del gruppo inferiore rispetto al gruppo superiore.
Le ineguaglianze puntuali possono essere usate per calcolare un indice di ineguaglianza, l'indice di ineguaglianza di Zenga:

$$I(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_i(x) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} I_i(x) = \frac{1}{6}\times(3,948) = 0,658$$



ESERCIZIO 2

La seguente tabella riporta la distribuzione di 100 progetti di ricerca rispetto alle risorse finanziarie (in migliaia di Euro) impegnate.

$x_l - \vert x_u$	$n.\,progetti$	$tot.\,classe$
$0 - \vert 10$	62	496
$10 - \vert 25$	28	563
$25 - \vert 50$	6	256
$50 - \vert 80$	4	281
Totale	100	1596

Si calcoli il valore del rapporto di concentrazione di Gini. Si calcoli inoltre l'indice di concentrazione di Zenga.

SOLUZIONE

i	$x_l - \vert x_u$	n_i	C_i	x_i^T	$(2 \times C_i - n - n_i)$	$x_i^T \times (2 \times C_i - n - n_i)$
1	$0 - \vert 10$	62	62	496	-38	-18848
2	$10 - \vert 25$	28	90	563	52	29276
3	$25 - \vert 50$	6	96	256	86	22016
4	$50 - \vert 80$	4	100	281	96	26976
	Totale	100		1596		

Il rapporto di concentrazione di Gini può essere calcolato come

$$R = \frac{Area\,concentrazione}{Area\,max\,concentrazione} = \frac{\Delta}{2 \times M_1}$$

Per i dati in analisi, avendo a disposizione le risorse totali per ogni classe:

$$S = 2 \times \sum_{i=1}^{k} x_i^T \times (2 \times C_i - n - n_i) = 2 \times 59420 = 118840$$

$$\Delta = \frac{S}{n\,(n-1)} = \frac{118840}{100 \times 99} = 12,004$$

La media è pari a

$$M_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} x_i^T = \frac{1}{100} \times 1596 = 15,96$$

quindi il rapporto di concentrazione di Gini è uguale a

$$R = \frac{12,004}{2 \times 15,96} = 0,376$$

i	$x_l - \vert x_u$	n_i	C_i	x_i^T	q'_i	$M_i^-(x)$	$T - q'_i$	$M_i^+(x)$	$I_i(x)$
1	$0 - \vert 10$	62	62	496	496	8	1100	28,947	0,724
2	$10 - \vert 25$	28	90	563	1059	11,767	537	53,700	0,781
3	$25 - \vert 50$	6	96	256	1315	13,698	281	70,250	0,805
4	$50 - \vert 80$	4	100	281	1596	15,960	0	70,250	0,773
	Totale	100		1596					

Calcoliamo le risorse finanziarie cumulate:

$$q_i' = \sum_{j=1}^{i} x_j^T$$

Poniamo inoltre

$$T = \sum_{j=1}^{k} x_j^T$$

pari alle risorse finanziarie totali. Avendo a disposizione le risorse totali per classe, le medie inferiori possono essere calcolate come

$$M_i^-(x) = \frac{1}{C_i}\sum_{j=1}^{i} x_j^T = \frac{q_i'}{C_i}$$

mentre le medie superiori

$$M_i^+(x) = \frac{1}{n-C_i}\sum_{j=i+1}^{k} x_j^T = \frac{T-q_i'}{n-C_i}$$

dove T è il capitale totale, $T = \sum_{i=1}^{k} x_i^T$ e per convenzione $M_i^+(x) = M_{n-1}^+(x)$
Le ineguaglianze puntuali sono calcolate partendo dalle precedenti quantità

$$I_i(x) = \frac{M_i^+(x) - M_i^-(x)}{M_i^+(x)} = 1 - \frac{M_i^-(x)}{M_i^+(x)}$$

e rappresenta la variazione relativa della media del gruppo inferiore rispetto al gruppo superiore.
L'indice di ineguaglianza di Zenga:

$$I(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \times I_i(x) = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{4} n_i \times I_i(x) = \frac{1}{100}\times(74,651) = 0,747$$

ESERCIZIO 3

In 10 edizioni di un festival della musica sono stati assegnati premi per il maggior numero di copie vendute e premi della critica. La seguente tabella riporta il numero di premi vinti da ciascun artista per ogni tipologia di premio.

n. premi	*premi vendite*	*premi critica*
1	3	4
2	2	1
3	1	1
Totale	6	7

Si valuti se vi è maggiore concentrazione nel caso del premio per le vendite o nel caso del premio della critica, utilizzando sia il rapporto di concentrazione di Gini che l'indice di ineguaglianza di Zenga. Le conclusioni sono le stesse?

SOLUZIONE

i	x_i	n_i^V	C_i^V	q_i'	$\left(2\times C_i - n^V - n_i^V\right)$	$x_i \times n_i^V \times (\ldots)$	$M_i^-(x)$	$T^V - q_i'$	$M_i^+(x)$	$I_i^V(x)$
1	1	3	3	3	-3	-9	1	7	2,333	0,571
2	2	2	5	7	2	8	1,400	3	3	0,533
3	3	1	6	10	5	15	1,667	0	3	0,444

Calcoliamo i premi per le vendite cumulati:

$$q_i' = \sum_{j=1}^{i} n_j^V \times x_j$$

il cui totale è pari a

$$T = \sum_{j=1}^{k} n_j^V \times x_j$$

Il rapporto di concentrazione di Gini è dato da

$$R = \frac{Area\,concentrazione}{Area\,max\,concentrazione} = \frac{\Delta}{2 \times M_1}$$

Per i dati in analisi, avendo a disposizione le risorse totali per ogni classe:

$$S = 2 \times \sum_{i=1}^{k} x_i \times n_i^V \times \left(2 \times C_i - n^V - n_i^V\right) = 2 \times 14 = 28$$

$$\Delta = \frac{S}{n^V \left(n^V - 1\right)} = \frac{28}{6 \times 5} = 0,933$$

La media è pari a

$$M_1 = \frac{1}{n^V} \sum_{i=1}^{k} n_i^V \times x_i = \frac{1}{6} \times 10 = 1,667$$

quindi il rapporto di concentrazione di Gini è uguale a

$$R = \frac{0,933}{2 \times 1,667} = 0,280$$

Le medie inferiori sono

$$M_i^- \left(x\right) = \frac{1}{C_i^V} \sum_{j=1}^{i} n_j^V \times x_j = \frac{q_i'}{C_i^V}$$

mentre le medie superiori

$$M_i^+ \left(x\right) = \frac{1}{n^V - C_i^V} \sum_{j=i+1}^{k} n_j^V \times x_j^T = \frac{T^V - q_i'}{n^V - C_i^V}$$

Le ineguaglianze puntuali sono calcolate partendo dalle precedenti quantità

$$I_i^V \left(x\right) = \frac{M_i^+ \left(x\right) - M_i^- \left(x\right)}{M_i^+ \left(x\right)} = 1 - \frac{M_i^- \left(x\right)}{M_i^+ \left(x\right)}$$

L'indice di ineguaglianza di Zenga:

$$I^V \left(x\right) = \frac{1}{n^V} \sum_{i=1}^{k} n_i^V \times I_i^V \left(x\right) = \frac{1}{6} \times \left(3,225\right) = 0,537$$

Ripetendo calcoli analoghi per i premi della critica

i	x_i	n_i^C	C_i^C	q_i'	$\left(2 \times C_i - n^C - n_i^C\right)$	$x_i \times n_i^C \times (\dots)$	$M_i^-(x)$	$T^C - q_i'$	$M_i^+(x)$	$I_i^C(x)$
1	1	5	5	5	-2	-10	1	5	2,5	0,600
2	2	1	6	7	6	12	1,167	3	3	0,611
3	3	1	7	10	8	24	1,429	0	3	0,524

Quindi

$$S = 2 \times \sum_{i=1}^{k} x_i \times n_i^C \times \left(2 \times C_i - n^C - n_i^C\right) = 2 \times 26 = 52$$

$$\Delta = \frac{S}{n^V\left(n^V - 1\right)} = \frac{52}{7 \times 6} = 1,238$$

La media è pari a

$$M_1 = \frac{1}{n^C} \sum_{i=1}^{k} n_i^C \times x_i = \frac{1}{7} \times 10 = 1,429$$

quindi il rapporto di concentrazione di Gini è uguale a

$$R = \frac{1,238}{2 \times 1,429} = 0,433$$

L'indice di ineguaglianza di Zenga:

$$I^C(x) = \frac{1}{n^C} \sum_{i=1}^{k} n_i^C \times I_i^C(x) = \frac{1}{7} \times (2,865) = 0,591$$

I due indici portano alle medesime conclusioni, i premi della critica presentano una ineguaglianza maggiore rispetto ai premi per le vendite.