Statistica II - Esercitazione 8

Esercizio 1

Si supponga che la lunghezza dei pezzi prodotti da un macchinario abbia distribuzione Normale. Il produttore dichiara che i pezzi in questione presentano lunghezza media pari a 25 cm. Al fine di verificare l'attendibilità di tale asserzione, viene estratto un campione casuale semplice di 50 pezzi caratterizzati da lunghezza media pari a 26.5 cm con varianza campionaria corretta $s^2 = 729\ cm^2$.

1. Si verifichi ad un livello di significatività $\alpha = 0.01$ se il produttore dichiara la verità;
2. si valuti il p-value associato.

Soluzione

Sia $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, con $\mu \in \mathbb{R}$ ignota ed oggetto di interesse e $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$ ignota. Siano inoltre $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. a X, con $n = 50$. Trattasi di un problema di verifica di ipotesi per μ.

1. L'ipotesi che si intende sottoporre a verifica è:

$$H_0 : \mu = \mu_0 = 25.$$

A tal fine, si consideri la variabile casuale

$$D = \overline{X} - \mu_0$$

che interpreti il divario tra la media campionaria, stimatore puntuale di μ, e μ_0, valore di tale parametro assunta vera l'ipotesi H_0. Si vuole trovare il valore d_α tale per cui il divario descritto dalla variabile casuale D è da ritenersi troppo elevato. Ciò può essere realizzato fissando in α la probabilità che, assunta vera H_0, il divario sia elevato, ossia maggiore di d_α o minore di $-d_\alpha$. Formalmente:

$$\Pr(D \leq -d_\alpha | H_0) + \Pr(D \geq d_\alpha | H_0) = 2 \cdot \Pr(|D| \geq d_\alpha | H_0) = \alpha$$

A tal proposito, assumendo H_0 vera, si ha che $D \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/n)$. Pertanto, stimando l'ignota σ^2 tramite la varianza campionaria corretta, si ha che:

$$T = \frac{D}{\sqrt{S^2/n}} \overset{H_0}{\sim} T_{n-1}.$$

Alla luce della simmetria della distribuzione T di Student rispetto alla propria media (zero), si ha che:

$$\Pr\left(T \leq -\frac{d_\alpha}{s/\sqrt{n}} \middle| H_0\right) = \Pr\left(T \geq \frac{d_\alpha}{s/\sqrt{n}} \middle| H_0\right) = \frac{\alpha}{2}$$

da cui:

$$-\frac{d_\alpha}{s/\sqrt{n}} = t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}, \qquad \frac{d_\alpha}{s/\sqrt{n}} = t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$$

dove $t_{g,\alpha}$ identifica il quantile di ordine $\alpha \in (0,1)$ della variabile casuale T di Student con g gradi di libertà. Si è dunque portati a rifiutare H_0 qualora:

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \in C = \left\{\underline{X} : \left|\frac{\overline{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}\right| \geq t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right\}$$

dove C rappresenta la regione critica. Essendo $n = 50$ e $1 - \frac{\alpha}{2} = 0.995$, si ha che

$$t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} = t_{49,0.995}.$$

Il valore non è disponibile sulle tavole, si può usare come approssimazione

$$t_{50,0.995} = 2.6778$$

La regione critica diventa quindi

$$C = \left\{ \underline{X} : \left| \frac{\overline{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \right| \geq 2.6778 \right\}$$

Essendo $\overline{x} = 26.5$, $s^2 = 729$, $\mu_0 = 25$, risulta dunque:

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{26.5 - 25}{27/\sqrt{50}} = \frac{1.5}{3.8184} = 0.3928 \notin C$$

in definitiva, ad un livello di significatività $\alpha = 0.01$, l'ipotesi in questione non viene rifiutata.

2. Si ricordi che per "p-value" o "livello di significatività osservato" si intende la probabilità che, assunta vera H_0, il divario assuma valori pari a quello osservato o più sfavorevoli rispetto ad esso nei confronti dell'accettazione di H_0. Essendo portati a non accettare l'ipotesi nulla per valori elevati del divario sia in positivo che in negativo, quanto richiesto dal quesito corrisponde a:

$$p - value = \Pr(|T| \geq |t||H_0) = \Pr(|T| \geq 0.3928|H_0)$$

e per la relativa valutazione si deve necessariamente ricorrere all'approssimazione Normale standard per una variabile casuale T di Student. In definitiva, risulta:

$$\begin{aligned}\Pr(|T| \geq 0.3928|H_0) \approx & \Pr(|Z| \geq 0.3928) = \\ & = \Pr(Z \leq -0.3928) + \Pr(Z \geq 0.3928) = \\ & = 2 \cdot \Pr(Z \leq -0.3928) = 2 \cdot 0.3483 = 0.6966.\end{aligned}$$

A conferma della conclusione tratta al punto precedente, si noti che, essendo

$$p - value = 0.6966 > 0.01 = \alpha$$

non si è portati a rifiutare H_0, ad un livello di significatività $\alpha = 0.01$.

Esercizio 2

Si supponga che sulla base di $n = 16$ prove indipendenti in $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si siano ottenuti $\overline{x} = 2.5$ e $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 110$. Si verifichi l'ipotesi $H_0 : \sigma = \sigma_0 = 2$ ad un libello di significatività $\alpha = 0.01$.

Soluzione

Sia $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$ ignota ed oggetto dell'interesse inferenziale e $\mu \in \mathbb{R}$ ignota. Siano inoltre $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. a X, con $n = 16$. Trattasi di un problema di verifica di ipotesi per σ^2. L'ipotesi nulla può essere riformulata in funzione della varianza come.

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 = 4.$$

La decisione nei riguardi di H_0 può essere tratta considerando il quoziente

$$d = \frac{s^2}{\sigma_0^2}$$

tra la varianza campionaria corretta ed il valore di tale parametro, postulato da H_0. Si noti che:

- qualora d sia di valore unitario o prossimo a uno, l'eventuale relativo scostamento da uno è da imputarsi al mero caso e H_0 viene accettata poiché ben suffragata dai dati osservati;
- qualora d sia di valore sensibilmente diverso da uno, ossia minore di un certo valore $d_L < 1$ o maggiore di un certo valore $d_U > 1$, H_0 viene rifiutata poiché mal suffragata dalle risultanze campionarie.

Si consideri quindi la variabile casuale

$$D = \frac{S^2}{\sigma_0^2}$$

che interpreti il divario tra la varianza campionaria corretta e σ_0^2. Ai fini della verifica dell'ipotesi in questione, è necessario determinare i valori d_L e d_U sopra citati, valori rispettivamente al di sotto ed al di sopra dei quali il divario debba ritenersi sensibilmente differente da uno, quindi incompatibile con H_0.
Assumendo vera l'ipotesi nulla, gli estremi d_L e d_U si ottengono risolvendo la seguente equazione probabilistica:

$$\Pr(D \leq d_L | H_0) + \Pr(D \geq d_U | H_0) = \alpha.$$

Assumendo vera l'ipotesi nulla, è possibile ricondursi ad una distribuzione nota per la quantità D, ovvero:

$$R = (n-1) \cdot D = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \overset{H_0}{\sim} \chi^2_{n-1}.$$

Posto

$$\Pr(R \leq (n-1)d_L | H_0) = \Pr(R \geq (n-1)d_U | H_0) = \frac{\alpha}{2},$$

si ha che:

$$(n-1)d_L = \chi^2_{n-1, \frac{\alpha}{2}}, \qquad (n-1)d_U = \chi^2_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}},$$

dove $\chi^2_{g,\alpha}$ identifica il quandile di ordine $\alpha \in (0, 1)$ della variabile casuale Chi Quadrato con g gradi di libertà. Si è dunque portati a rifiutare l'ipotesi nulla H_0 qualora:

$$r = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \in C = \left[0, \chi^2_{n-1, \frac{\alpha}{2}}\right] \cup \left[\chi^2_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}, +\infty\right),$$

o, equivalentemente, se:

$$s^2 \in C' = \left[0, \frac{\sigma_0^2}{n-1} \chi^2_{n-1, \frac{\alpha}{2}}\right] \cup \left[\frac{\sigma_0^2}{n-1} \chi^2_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}, +\infty\right)$$

dove C e C' rappresentano, rispettivamente, la regione critica in funzione della statistica r e della statistica s^2. Fissato il livello di significatività $\alpha = 0.01$, da cui:

$$\alpha = 0.01 \;\Rightarrow\; \frac{\alpha}{2} = 0.005,\; 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.995,$$

i quantili della distribuzione Chi Quadrato, necessari per costruire la regione critica associata alla statistica r, risultano essere:

$$\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}} = \chi^2_{15,0.005} = 4.6009, \qquad \chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} = \chi^2_{15,0.005} = 32.8013,$$

pertanto

$$C = [0,\, 4.6009] \cup [32.8013,\, +\infty).$$

Essendo inoltre $\sigma_0^2 = 4$ e

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{n}{n-1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \\ &= \frac{n}{n-1}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \overline{x}^2\right] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \frac{n}{n-1}\overline{x}^2 = \\ &= \frac{1}{15}\cdot 110 - \frac{16}{15}\cdot 2.5^2 = 0.6667, \end{aligned}$$

risulta:

$$c = \frac{15 \cdot 0.6667}{4} = 2.5 \in C.$$

In conclusione, l'ipotesi nulla viene rifiutata ad un livello di significatività $\alpha = 0.01$.

Esercizio 3

Sia X una variabile casuale con legge di distribuzione Beta, $X \sim Beta(\alpha, \beta)$, e funzione di densità:

$$\varphi(x, \theta, \eta) = \frac{x^{\theta-1}(1-x)^{\eta-1}}{B(\theta, \eta)} \qquad x \in [0,1], \theta \in \mathbb{R}^+, \eta \in \mathbb{R}^+$$

dove

$$B(\theta, \eta) = \int_0^1 x^{\theta-1}(1-x)^{\eta-1} dx.$$

1. Esplicitare la funzione di densità, posto $\eta = 1$;
2. Riconoscere la legge di distribuzione, posto $\theta = 1$ e $\eta = 1$.
3. Supponendo di avere una sola osservazione per la variabile casuale X, $x = 0.6$, posto inoltre $\eta = 1$, ricorrendo al lemma di Neyman Pearson, determinare la regione critica del test più potente, a livello $\alpha = 0.01$, dato il sistema di ipotesi $H_0 : \theta = 2$ contro $H_1 : \theta = 1$, e decidere se rifiutare o non rifiutare l'ipotesi nulla. Calcolare inoltre la potenza del test.

Soluzione

Sia $X \sim Beta(\theta, \eta)$, $\theta \in \mathbb{R}^+$ e $\eta \in \mathbb{R}^+$.

1. Posto $\eta = 1$, la funzione di densità assume forma:

   $$\varphi(x, \theta, 1) = \frac{x^{\theta-1}}{B(\theta, 1)}$$

   dove

   $$B(\theta, 1) = \int_0^1 x^{\theta-1} dx = \left.\frac{x}{\theta}\right|_0^1 = \frac{1}{\theta}.$$

   Sostituendo il precedente risultato nella funzione di densità si ottiene:

   $$\varphi(x, \theta) = \varphi(x, \theta, 1) = \theta x^{\theta-1} \qquad x \in [0,1],$$

   funzione di densità di una variabile casuale Beta, fissato $\eta = 1$.

2. Supponendo ora che, oltre $\eta = 1$, il parametro θ assume valore pari a 1, la funzione di densità diventa:

   $$\varphi(x, \theta = 1) = \theta x^{1-1} = 1 \qquad x \in [0,1],$$

   ovvero descrive una variabile casuale che può assumere valori compresi tra $[0,1]$ con probabilità costante, una variabile casuale $Unif([0,1])$.

3. Il rapporto di verosimiglianza, data la variabile casuale identificata nel punto 1 ed il sistema di ipotesi $H_0 : \theta = 2$ contro $H_1 : \theta = 1$, risulta essere:

   $$\lambda = \frac{L(\theta = 1, x)}{L(\theta = 2, x)} = \frac{\varphi(x, 1)}{\varphi(x, 2)} = \frac{1 \cdot x^0}{2 \cdot x} = \frac{1}{2x}.$$

   Essendo che la verosimiglianza misura la plausibilità che un parametro assuma un determinato valore, dato un campione $\underline{x}$, il rapporto assumerà valori elevati quando il parametro θ_1 è più plausibile rispetto al parametro θ_0, viceversa assumerà valori contennuti quando il parametro θ_0 è più plausibile rispetto al parametro θ_1. Volendo testare il precedente sistema di ipotesi, si vuole identificare un valore k oltre il quale l'ipotesi nulla viene rifiutata, tale per cui:

$$\begin{aligned}
&\lambda \geq \lambda_\alpha \\
&\frac{1}{2x} \geq \lambda_\alpha \\
&2x \leq \frac{1}{\lambda_\alpha} \\
&x \leq \frac{1}{2\lambda_\alpha} = k
\end{aligned}$$

dove il valore k è tale da rispettare l'ampiezza del test, può essere quindi ottenuto come quel valore k tale per cui:

$$\alpha = \Pr(X \in [0,k]|H_0) = \int_0^k 2x dx = x^2\Big|_0^k = k^2.$$

Posto $\alpha = 0.01$, si ha che $k = \sqrt{\alpha} = 0.1$, quindi la regione critica diventa $C = [0, \sqrt{\alpha}] = [0, 0.1]$. Essendo $x = 0.6 > 0.1 \Rightarrow x \notin C$, il dato osservato non supporta il rifiuto dell'ipotesi nulla. La potenza del test trovato è pari a:

$$1 - \beta = \Pr(X \in [0,k]|H_1) = \int_0^k 1dx = x\Big|_0^k = k = 0.1$$

Esercizio 4

Sia X una variabile casuale Normale, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, con varianza $\sigma^2 = 10$ nota ed $n = 30$. Si vuole testare un sistema di ipotesi relativo al parametro di posizione μ, in particolare si vuole testare l'ipotesi nulla $H_0 : \mu = 10$ contro l'ipotesi alternativa $H_1 : \mu = 8$.

1. Utilizzando il lemma di Neyman Pearson, determinare la regione critica del test più potente, a livello $\alpha = 0.05$;
2. Calcolare la potenza del test identificato nel punto precedente.

Soluzione

Sia $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, con σ^2 nota ed $n = 30$. Trattasi di un problema di verifica di ipotesi per il parametro μ.

1. Dal problema in analisi, è noto che $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, con funzione di densità:

$$\varphi(x, \mu, \sigma^2) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}(\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\},$$

e, dato un campione $\underline{x}$ di numerosità n, funzione di verosimiglianza per il parametro μ:

$$L(\mu, \underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} \varphi(x_i, \mu, \sigma^2) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}(\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\right\}.$$

Stando al sistema di ipotesi, oggetto di interesse, con ipotesi alternativa semplice, $H_0 : \mu = 10$ contro $H_1 : \mu = 8$, è possibile identificare la regione critica associata al test più potente partendo dalla costruzione del rapporto di verosimiglianza:

$$\begin{aligned}
\lambda = \frac{L(\mu = 8, \sigma^2, \underline{x})}{L(\mu = 10, \sigma^2, \underline{x})} &= \frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}(\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - 8)^2\right\}}{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}(\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - 10)^2\right\}} = \\
&= \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - 8)^2 + \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - 10)^2\right\} = \\
&= \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\cdot 8\sum_{i=1}^{n} x_i - 8^2\cdot n - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\cdot 10\sum_{i=1}^{n} x_i - 10^2\cdot n\right]\right\} = \\
&= \exp\left\{\frac{1}{2\sigma^2}\left[-2\cdot 8\cdot n\overline{x} + 2\cdot 10\cdot n\overline{x} + \underbrace{8^2\cdot n - 10^2\cdot n}_{\delta}\right]\right\} = \\
&= \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[(20-16)n\overline{x} + \delta]\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{20}[120\overline{x} + \delta]\right\}
\end{aligned}$$

Al variare del campione, la statistica λ descrive una variabile casuale Λ. Se la statistica λ assume valori elevati, maggiori di 1, è più plausibile che il vero parametro sia il parametro specificato dall'ipotesi alternativa, essendo maggiore il valore della funzione di verosimiglianza assunta vera H_1, rispetto al valore sotto H_0. Quindi, l'ipotesi nulla viene rifiutata per valori elevati della variabile casuale Λ, se $\Lambda \geq \lambda_\alpha$, fissato un livello di significatività α. La regione critica è identificata da:

$$\begin{aligned}
\alpha = \Pr(\Lambda \geq \lambda_\alpha | H_0) &= \Pr\left(\exp\left\{-\frac{1}{20}[120\overline{X} + \delta]\right\} \geq \lambda_\alpha \big| H_0\right) = \\
&= \Pr\left(-\frac{1}{20}[120\overline{X} + \delta] \geq \ln(\lambda_\alpha)\big| H_0\right) = \\
&= \Pr\left(120\overline{X} \leq -\delta - 20\ln(\lambda_\alpha)\big| H_0\right) = \\
&= \Pr\left(\overline{X} \leq \underbrace{\frac{-\delta - 20\ln(\lambda_\alpha)}{120}}_{\Delta_\alpha}\big| H_0\right) = \\
&= \Pr\left(\overline{X} \leq \Delta_\alpha | H_0\right) = \\
&= \Pr\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \leq \frac{\delta - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\big| H_0\right) = \\
&= \Pr\left(Z \leq z_\alpha | H_0\right).
\end{aligned}$$

Posto $\alpha = 0.05$, $z_\alpha = -1.64$, la regione critica diventa:

$$\begin{aligned}
C = \{\underline{X} : Z \leq -1.64\} &= \left\{\underline{X} : \overline{X} \leq z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} + \mu\right\} = \\
&= \left\{\underline{X} : \overline{X} \leq -1.64 \cdot \sqrt{\frac{10}{30}} + 10\right\} = \left\{\underline{X} : \overline{X} \leq 9.04\right\}.
\end{aligned}$$

2. La potenza del test, data la regione critica identificata nel punto precedente, è pari a:

$$\begin{aligned}
1 - \beta &= \Pr\left(\overline{X} \leq 9.04\big| H_1\right) = \\
&= \Pr\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \leq \frac{9.04 - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\big| H_1\right) = \\
&= \Pr\left(\frac{\overline{X} - 8}{\sqrt{\frac{10}{30}}} \leq \frac{9.04 - 8}{\sqrt{\frac{10}{30}}}\big| H_1\right) = \\
&= \Pr(Z \leq 1.82) = 0.96.
\end{aligned}$$

Esercizio 5

Sia X una variabile casuale Normale, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, con media $\mu = 7$ nota ed $n = 60$. Si vuole testare un sistema di ipotesi relativo al parametro di dispersione σ^2, in particolare si vuole testare l'ipotesi nulla $H_0 : \sigma^2 = 130$ contro l'ipotesi alternativa $H_1 : \sigma^2 = 80$.

1. Utilizzando il lemma di Neyman Pearson, determinare la regione critica del test più potente, a livello $\alpha = 0.01$. Posto $s^2 = 125$, decidere se rifiutare o meno l'ipotesi nulla;

2. Calcolare la potenza del test identificato nel punto precedente.

Soluzione

Sia $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, con μ parametro noto ed $n = 60$. Trattasi di un problema di verifica di ipotesi per il parametro σ^2.

1. Dal problema in analisi, è noto che $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, con funzione di densità:

$$\varphi(x, \mu, \sigma^2) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}(\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\},$$

e, dato un campione $\underline{x}$ di numerosità n, funzione di verosimiglianza per il parametro σ^2:

$$L(\sigma^2, \underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} \varphi(x_i, \mu, \sigma^2) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}(\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}.$$

Stando al sistema di ipotesi, oggetto di interesse, con ipotesi alternativa semplice, $H_0 : \sigma^2 = 130$ contro $H_1 : \sigma^2 = 80$, è possibile identificare la regione critica associata al test più potente partendo dalla costruzione del rapporto di verosimiglianza:

$$\begin{aligned}
\lambda = \frac{L(\sigma^2 = 80, \mu, \underline{x})}{L(\sigma^2 = 130, \mu, \underline{x})} &= \frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}(\sigma_1^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}}{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}(\sigma_0^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}} = \\
&= \frac{(\sigma_1^2)^{-\frac{n}{2}}}{(\sigma_0^2)^{-\frac{n}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 + \frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\} = \\
&\propto \exp\left\{-\underbrace{\left[\frac{1}{2\sigma_1^2} - \frac{1}{2\sigma_0^2}\right]}_{\delta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\} = \\
&= \exp\left\{-\delta\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}
\end{aligned}$$

Al variare del campione, la statistica λ descrive una variabile casuale Λ. L'ipotesi nulla viene rifiutata per valori elevati della variabile casuale Λ, se $\Lambda \geq \lambda_\alpha$, fissato un livello di significatività α. La regione critica è identificata da:

$$
\begin{aligned}
\alpha = \Pr(\Lambda \geq \lambda_\alpha | H_0) = \Pr & \left(\exp\left\{ -\delta \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \right\} \geq \lambda_\alpha \middle| H_0 \right) = \\
= \Pr & \left(-\delta \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \geq \ln(\lambda_\alpha) \middle| H_0 \right) = \\
= \Pr & \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \leq -\frac{\ln(\lambda_\alpha)}{\delta} \middle| H_0 \right) = \\
= \Pr & \left(\sigma_0^2 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \mu}{\sqrt{\sigma_0^2}} \right)^2 \leq -\frac{\ln(\lambda_\alpha)}{\delta} \middle| H_0 \right) = \\
= \Pr & \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \mu}{\sqrt{\sigma_0^2}} \right)^2 \leq -\frac{\ln(\lambda_\alpha)}{\sigma_0^2 \delta} \middle| H_0 \right) = \\
= \Pr & \left(\chi_n^2 \leq \chi_\alpha^2 \middle| H_0 \right) = \Pr \left(\chi_{60}^2 \leq \chi_\alpha^2 \middle| H_0 \right)
\end{aligned}
$$

Posto $n = 60$, $\alpha = 0.01$, si ha che $\chi^2_{60,0.01} = 37.48$, quantile di ordine 0.01 di una variabile casuale Chi Quadrato con 60 gradi di libertà. La regione critica risulta essere:

$$
C = \left\{ \underline{X} : \chi^2_{oss} \leq \chi^2_\alpha \right\} = \left\{ \underline{X} : \chi^2_{oss} \leq 37.48 \right\}
$$

Inoltre, dato un valore s^2:

$$
s^2 = \frac{\chi^2_{oss} \cdot \sigma^2}{n} \qquad \Longrightarrow \qquad \chi^2_{oss} = \frac{s^2 \cdot n}{\sigma^2} \overset{H_0}{=} \frac{s^2 \cdot n}{\sigma_0^2}
$$

Essendo $s^2 = 125$ e $\sigma_0^2 = 130$, si ha che $\chi^2_{oss} = 57.69$. Data la regione critica trovata precedentemente, $\chi^2_{oss} = 57.69 > 37.48 = \chi^2_{60,0.01}$, l'ipotesi nulla non viene rifiutata.

2. Per poter calcolare la potenza, se sotto H_0, l'estremo della regione critica è pari a $\chi^2_{H_0} = 37.48$. Assunta vera l'ipotesi alternativa si ha che:

$$
\chi^2_{H_1} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \mu}{\sqrt{\sigma_1^2}} \right)^2 = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \mu}{\sqrt{\sigma_0^2}} \right)^2 = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} \chi^2_{H_0} = \frac{130}{80} 37.48 = 60.91
$$

La potenza del test, data la regione critica identificata nel punto precedente, è pari a:

$$
\begin{aligned}
1 - \beta = & \Pr \left(\overline{X} \in C \middle| H_1 \right) = \\
= & \Pr \left(\chi^2_{60} \leq \chi^2_{H_1} \middle| H_1 \right) = \\
= & \Pr \left(\chi^2_{60} \leq 60.91 \middle| H_1 \right) = 0.56
\end{aligned}
$$