Statistica II - Esercitazione 4

Stima puntuale: metodi generali per la costruzione di stimatori

Stima di Massima Verosimiglianza

Invarianza *Sia* $\hat{\theta}$ *stima di massima verosimiglianza di* $\theta \in \Theta \subseteq \mathrm{R}$ *e* $\tau : \Theta \to \Lambda \subseteq \mathrm{R}$ *una funzione biiettiva di* θ*.Allora,* $\hat{\lambda} = \tau(\hat{\theta})$ *è stima di massima verosimiglianza di* λ*.*

Il metodo dei momenti

Siano $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. ad una variabile casuale X avente legge di distribuzione $\varphi_X(x; \underline{\theta})$, indicizzata da un ignoto vettore $s-$dimensionale di parametri $\underline{\theta} \in \Theta \subseteq \mathrm{R}^s$.
La stima di $\underline{\theta}$ *basata sul metodo dei momenti è rappresentata dalla soluzione rispetto a* $\underline{\theta}$*, qualora esista e sia unica, del sistema di equazioni ottenute imponendo l'uguaglianza tra i momenti teorici di* X, $\mathrm{E}(X^r)$ *e i corrispettivi momenti campionari,* $m_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^r$, $\forall r = 1, \ldots, s$:

$$\begin{cases} \mathrm{E}(X) = \bar{x} \\ \vdots \\ \mathrm{E}(X^r) = m_r \\ \vdots \\ \mathrm{E}(X^s) = m_s \end{cases} .$$

Esercizio 1

Siano $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. a $X \sim \mathrm{Exp}(\theta)$.

1. *Si determini lo stimatore di massima verosimiglianza di θ;*
2. *si determini lo stimatore di massima verosimiglianza di $\tau(\theta) = \frac{1}{\theta}$ e se ne verifichi la correttezza per $\tau(\theta)$;*
3. *sulla base di quanto determinato al punto 2, si concluda in merito alla correttezza per θ dello stimatore determinato al punto 1. Si ricordi che per la diseguaglianza di Jensen, se X è v.c. positiva non degenere, si ha che*
$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{X}\right) > \frac{1}{\mathrm{E}(X)}$$
in quanto $f(x) = 1/x$ è una funzione strettamente convessa sul semiasse positivo.

Soluzione

Sia $X \sim \mathrm{Exp}(\theta)$, $\theta > 0$ ignoto; siano inoltre $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. a X. Trattasi di un problema di stima puntuale per θ e $\tau(\theta) = \frac{1}{\theta}$.

1. Le funzioni di verosimiglianza e di log-verosimiglianza di $(x_1, \dots, x_n)$ hanno rispettivamente espressioni:
$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(x_i; \theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta e^{-\theta x_i} = \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i},$$
$$l(\theta) = \log L(\theta) = n \log \theta - \theta \sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad \theta > 0.$$
L'equazione di verosimiglianza risulta dunque:
$$l'(\theta) = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0;$$
essa ammette come unica soluzione:
$$\hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{\bar{x}}.$$
Poichè:
$$l''(\theta) = -\frac{n}{\theta^2} < 0, \qquad \forall \theta \in \mathrm{R}^+,$$
$\hat{\theta}$ è punto di massimo assoluto di $l(\theta)$, dunque:
$$\hat{\Theta} = \frac{1}{\bar{X}}$$
è stimatore di massima verosimiglianza di θ.

2. Si noti che la funzione $\tau : \Theta \equiv \mathrm{R}^+ \to \Lambda \equiv \mathrm{R}^+$, tale che $\tau : \theta \mapsto \frac{1}{\theta}$, è suriettiva, infatti $\tau(\Theta) = \mathrm{R}^+$; pertanto, per il Teorema di Zehna, si ha che:
$$\hat{\tau}(\Theta) = \tau(\hat{\Theta}) = \frac{1}{\hat{\Theta}} = \bar{X}$$
è stimatore di massima verosimiglianza di $\tau(\theta)$. Essendo:
$$\mathrm{E}(\bar{X}) = \mathrm{E}(X) = \frac{1}{\theta}, \qquad \forall \theta \in \mathrm{R}^+,$$
lo stimatore in questione è non distorto per $\tau(\theta) = \frac{1}{\theta}$.

3. Poichè:
$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{\bar{X}}\right) > \frac{1}{\mathrm{E}(\bar{X})}$$
ed essendo $\frac{1}{\bar{X}} = \hat{\Theta}$ e $\mathrm{E}(\bar{X}) = \frac{1}{\theta}$, segue che:
$$\mathrm{E}(\hat{\Theta}) > \theta, \qquad \forall \theta \in \mathrm{R}^+,$$
ossia $\hat{\Theta}$ è stimatore distorto per θ.

Esercizio 2

Siano $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. a $X \sim$ Poisson(θ).

1. *Si determini la stima di massima verosimiglianza di θ e si verifichi la correttezza per θ del corrispondente stimatore;*

2. *si individuino le stime di massima verosimiglianza di $\alpha(\theta) = e^{\theta}$ e di $\beta(\theta) = 2\theta - 1$.*

Soluzione

Sia $X \sim$ Poisson(θ), $\theta \in \mathrm{R}^+$ ignoto; siano inoltre $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. a X. Trattasi di un problema di stima puntuale per θ.

1. Le funzioni di verosimiglianza e di log-verosimiglianza di $(x_1, \ldots, x_n)$ hanno rispettivamente espressioni:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(x_i; \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\theta}\theta^{x_i}}{x_i!} = \frac{e^{-n\theta}\theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!},$$

$$l(\theta) = \log L(\theta) = -n\theta + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \log\theta - \log\left(\prod_{i=1}^{n} x_i!\right), \qquad \theta > 0.$$

L'equazione di verosimiglianza risulta dunque:

$$l'(\theta) = -n + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta} = 0;$$

essa ammette come unica soluzione:

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{x}.$$

Poichè:

$$l''(\theta) = -\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta^2} < 0, \qquad \forall\theta \in \mathrm{R}^+,$$

$\hat{\theta}$ è punto di massimo assoluto di $l(\theta)$, dunque è stima di massima verosimiglianza di θ.
Evidentemente, $\hat{\Theta} = \bar{X}$ è non distorto per θ, infatti:

$$\mathrm{E}(\hat{\Theta}) = \mathrm{E}(\bar{X}) \overset{\text{lin.}}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(X_i) \overset{\text{i.d.}}{=} \mathrm{E}(X) = \theta, \qquad \forall\theta \in \mathrm{R}^+.$$

2. La funzione $\alpha : \Theta \equiv \mathrm{R}^+ \to \Lambda \equiv \mathrm{R}^+$, tale che $\alpha : \theta \mapsto e^{\theta}$, è suriettiva, infatti $\alpha(\Theta) = \mathrm{R}^+$; pertanto, per il Teorema di Zehna:

$$\hat{\alpha}(\theta) = \alpha(\hat{\theta}) = e^{\hat{\theta}} = e^{\bar{x}}$$

identifica la stima di massima verosimiglianza di $\alpha(\theta)$.
In secondo luogo, si noti che, essendo $\theta > 0$, $\beta(\theta) = 2\theta - 1 > -1$. Pertanto, la funzione $\beta : \Theta \equiv \mathrm{R}^+ \to \Sigma \equiv (-1, \infty)$, tale che $\beta : \theta \mapsto 2\theta - 1$, è suriettiva, infatti $\beta(\Theta) = (-1, \infty)$; pertanto, per il Teorema di Zehna:

$$\hat{\beta}(\theta) = \beta(\hat{\theta}) = 2\hat{\theta} - 1 = 2\bar{x} - 1$$

identifica la stima di massima verosimiglianza di $\beta(\theta)$.

Esercizio 3

Sia $(X_1, \ldots, X_n)$ un campione casuale semplice estratto nella variabile casuale $X \sim U[\theta, 1]$, $0 \le \theta < 1$.

1. *Si determini la stima di massima verosimiglianza di θ;*
2. *si determini la stima di massima verosimiglianza di $\Pr\left(X > \frac{1}{2}\right)$;*
3. *si verifichi se lo stimatore descritto dalla stima ottenuta al punto 2 è corretto e/o asintoticamente corretto per la funzione del parametro di interesse.*

Soluzione

Sia $X \sim U[\theta, 1]$, $\theta \in [0, 1)$ ignoto; siano inoltre $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. a X. Trattasi di un problema di stima puntuale per θ.

1. La variabile casuale X presenta funzione di densità di probabilità :

$$\varphi_X(x; \theta) = \frac{1}{1-\theta} I_{[\theta,1]}(x),$$

ove:

$$I_{[\theta,1]}(x) = 1 \Leftrightarrow I_{[0,x]}(\theta) = 1.$$

La funzione di verosimiglianza del campione $(x_1, \ldots, x_n)$ ha dunque espressione:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(x_i; \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-\theta} I_{[0,x_i]}(\theta) = \frac{1}{(1-\theta)^n} \prod_{i=1}^{n} I_{[0,x_i]}(\theta),$$

ove:

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n} I_{[0,x_i]}(\theta) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad I_{[0,x_i]}(\theta) = 1, \forall i = 1, \ldots, n \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \theta \ge 0 \\ \theta \le x_i \quad \forall i = 1, \ldots, n \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \theta \ge 0 \\ \theta \le \min\{x_1, \ldots, x_n\} = x_{(1)} \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad 0 \le \theta \le x_{(1)},
\end{aligned}$$

quindi:

$$L(\theta) = \frac{1}{(1-\theta)^n} I_{\left[0, x_{(1)}\right]}(\theta).$$

Ai fini della determinazione della stima di massima verosimiglianza di θ, è sufficiente dunque notare che $L(\theta)$ presenta in $\left[0, x_{(1)}\right)$ andamento monotono strettamente crescente, come risulta evidente dalla Figura.

Pertanto:

$$\hat{\theta} = x_{(1)}$$

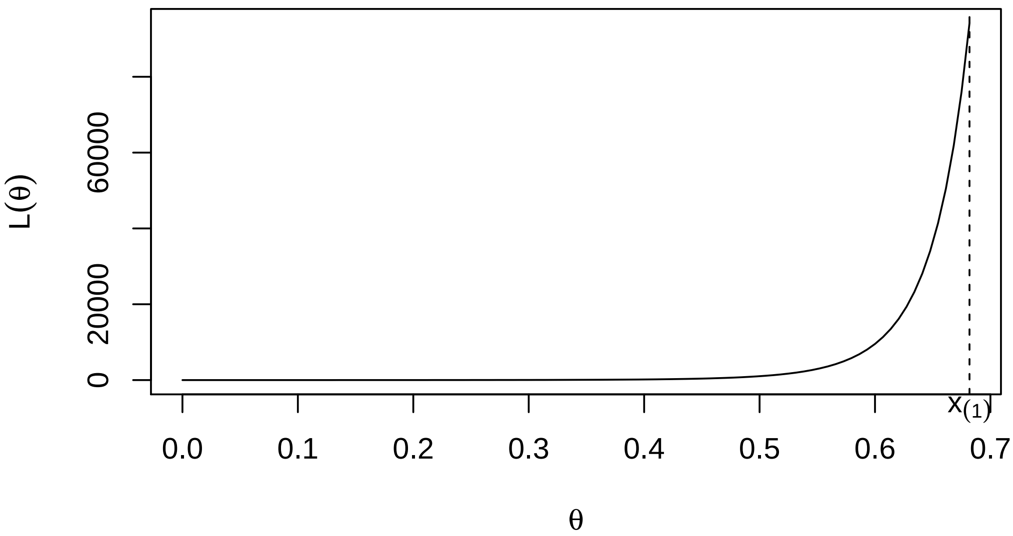
è stima di massima verosimiglianza di θ.

2. Essendo X a valori in $[\theta, 1]$, si ha che:

$$\Pr\left(X > \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 1 & \text{se } \theta \ge \frac{1}{2} \\ \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{1-\theta} dx & \text{se } \theta < \frac{1}{2} \end{cases};$$

pertanto, qualora $\theta \ge \frac{1}{2}$ non si necessita di alcuna stima, mentre se $\theta < \frac{1}{2}$ occorre stimare la funzione di θ:

$$\tau(\theta) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{1-\theta} dx = \frac{1}{1-\theta} x|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1}{2(1-\theta)}.$$



Poiché deve essere $\theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, si ha che:

$$0 \leq \theta < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < 1-\theta \leq 1 \Leftrightarrow 1 < 2(1-\theta) \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2(1-\theta)} < 1,$$

ossia $\tau(\theta) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$. Ciò premesso, la funzione $\tau : \left[0, \frac{1}{2}\right) \to \left[\frac{1}{2}, 1\right)$, tale che $\tau : \theta \mapsto \frac{1}{2(1-\theta)}$, è suriettiva, infatti $\tau(\left[0, \frac{1}{2}\right)) = \left[\frac{1}{2}, 1\right)$; pertanto, per il Teorema di Zehna, la stima di massima verosimiglianza di $\tau(\theta)$ risulta:

$$\hat{\tau}(\theta) = \tau(\hat{\theta}) = \frac{1}{2(1-\hat{\theta})} = \frac{1}{2(1-x_{(1)})}.$$

3. Lo stimatore di massima verosimiglianza di $\tau(\theta)$,

$$\hat{\tau} = \frac{1}{2(1-X_{(1)})},$$

descritto dalla stima ottenuta al punto 2, è funzione della variabile casuale $X_{(1)}$; ai fini della determinazione del valore atteso di $\hat{\tau}$, si rende dunque necessaria la determinazione della legge di distribuzione di $X_{(1)}$. Nella fattispecie, la funzione di ripartizione di $X_{(1)}$ presenta, $\forall x \in \mathrm{R}$, la seguente espressione:

$$\begin{aligned}
\Phi_{X_{(1)}}(x;\theta) &= \Pr(X_{(1)} \leq x) = 1 - \Pr(X_{(1)} > x) = \\
&= 1 - \Pr(X_1 > x, \ldots, X_i > x, \ldots, X_n > x) = \\
&\overset{\text{ind.}}{=} 1 - \prod_{i=1}^{n} \Pr(X_i > x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left[1 - \Pr(X_i \leq x)\right] = \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} \left[1 - \Phi_{X_i}(x;\theta)\right] \overset{\text{i.d.}}{=} 1 - \left[1 - \Phi_X(x;\theta)\right]^n,
\end{aligned}$$

ove, $\forall x \in [\theta, 1)$:

$$\Phi_X(x;\theta) = \int_{\theta}^{x} \frac{1}{1-\theta} dt = \frac{1}{1-\theta} t|_{\theta}^{x} = \frac{x-\theta}{1-\theta},$$

dunque:

$$\Phi_X(x;\theta) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < \theta \\ \frac{x-\theta}{1-\theta} & \text{se } x \in [\theta, 1) \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}.$$

Pertanto, $\forall x \in [\theta, 1)$, si ha che:

$$\Phi_{X_{(1)}}(x;\theta) = 1 - \left(1 - \frac{x-\theta}{1-\theta}\right)^n = 1 - \left(\frac{1-x}{1-\theta}\right)^n,$$

dunque:

$$\Phi_{X_{(1)}}(x;\theta) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < \theta \\ 1 - \left(\frac{1-x}{1-\theta}\right)^n & \text{se } x \in [\theta, 1) \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

e:

$$\begin{aligned} \varphi_{X_{(1)}}(x;\theta) &= \frac{\partial}{\partial x}\Phi_{X_{(1)}}(x;\theta) = n\left(\frac{1-x}{1-\theta}\right)^{n-1}\frac{1}{1-\theta} = \\ &= \frac{n}{(1-\theta)^n}(1-x)^{n-1}, \qquad x \in [\theta, 1). \end{aligned}$$

In definitiva, $\forall \theta \in [0, \frac{1}{2})$, risulta:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\hat{\tau}) &= \mathrm{E}\left[\frac{1}{2(1-X_{(1)})}\right] = \int_\theta^1 \frac{1}{2(1-x)}\frac{n}{(1-\theta)^n}(1-x)^{n-1}dx = \\ &= \frac{n}{2(1-\theta)^n}\int_\theta^1 (1-x)^{n-2}dx = -\frac{n}{2(1-\theta)^n}\left.\frac{(1-x)^{n-1}}{n-1}\right|_\theta^1 = \\ &= -\frac{n}{2(n-1)(1-\theta)^n}\left[-(1-\theta)^{n-1}\right] = \frac{n}{2(n-1)(1-\theta)} = \\ &= \frac{n}{n-1}\frac{1}{2(1-\theta)} = \frac{n}{n-1}\tau(\theta), \end{aligned}$$

ossia $\hat{\tau}$ è distorto per $\tau(\theta)$; poichè, però:

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}(\hat{\tau}) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-1}\tau(\theta) = \tau(\theta),$$

$\hat{\tau}$ è asintoticamente corretto per $\tau(\theta)$.

Esercizio 4

Siano $X_1, \ldots, X_m$ i.i.d. ad una variabile casuale $X \sim \text{Binomiale}(n, p)$.

1. *Si determini lo stimatore di p basato sul metodo dei momenti, supponendo n noto. Si supponga di osservare $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (9, 8, 5, 10)$; si determini la stima di p per $n = 20$;*

2. *Si determinino gli stimatori di p ed n con il metodo dei momenti. Si supponga di osservare $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (9, 8, 5, 10)$; si determinino le stime di p ed n.*

Soluzione

1. La stima di p basata sul metodo dei momenti si identifica nella soluzione rispetto a p dell'equazione:

$$\mathrm{E}(X) = \bar{x},$$

ove $E(X) = np$. Essa ammette come unica soluzione:

$$\tilde{p} = \frac{\bar{x}}{n},$$

che identifica la stima di θ basata sul metodo dei momenti. Per i dati osservati ed $n = 20$, abbiamo $\tilde{p} = \frac{8}{20} = 0.4$.

2. Le stime di p ed n basate sul metodo dei momenti si identificano nelle soluzioni rispetto p ed n del sistema di due equazioni:

$$\begin{cases} \mathrm{E}(X) = \bar{x} \\ \mathrm{E}(X^2) = m_2 \end{cases},$$

ove è noto che $\mathrm{E}(X) = np$ e:

$$\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{Var}(X) + [\mathrm{E}(X)]^2 = np(1-p) + n^2p^2$$

Il sistema in questione risulta dunque:

$$\begin{cases} np = \bar{x} \\ np(1-p) + n^2p^2 = m_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = \frac{\bar{x}}{n} \\ m_2 = n\frac{\bar{x}}{n}\left(1 - \frac{\bar{x}}{n}\right) + n^2\frac{\bar{x}^2}{n^2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p = \frac{\bar{x}}{n} \\ m_2 = \bar{x} - \frac{\bar{x}^2}{n} + \bar{x}^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p = \frac{\bar{x}}{n} \\ \frac{\bar{x}^2}{n} = \bar{x} - \underbrace{(m_2 - \bar{x}^2)}_{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{p} = \frac{\bar{x}}{\tilde{n}} \\ \tilde{n} = \frac{\bar{x}^2}{\bar{x} - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2} \end{cases};$$

quindi per i dati osservati $\tilde{n} = 15$ e $\tilde{p} = 8/15 \approx 0.5333$.

Esercizio 5

Siano $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. ad una variabile casuale X caratterizzata da funzione di densità di probabilità :

$$\varphi_X(x;\theta) = \theta x^{-2}, \qquad 0 < \theta < x < \infty.$$

Si determini lo stimatore di θ basato sul metodo dei momenti.

Soluzione

Sia $X \sim \varphi_X(x;\theta) = \theta x^{-2}$, $x > \theta$, $\theta > 0$ ignoto; siano inoltre $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. a X. Trattasi di un problema di stima puntuale per θ.

La stima di θ basata sul metodo dei momenti si identifica nella soluzione rispetto a θ dell'equazione:

$$\mathrm{E}(X) = \bar{x},$$

ove:

$$\mathrm{E}(X) = \int_\theta^\infty x\,\theta x^{-2} dx = \theta \int_\theta^\infty \frac{1}{x} dx = \theta \log x|_\theta^\infty = \infty.$$

Pertanto, nel presente caso, lo stimatore di θ basato sul metodo dei momenti non esiste: X è infatti variabile casuale di Pareto di parametri $\alpha = \theta$ e $\beta = 1$ ($X \sim$ Pareto(α, β) se $\varphi_X(x;\alpha,\beta) = \beta\alpha^\beta x^{-(\beta+1)}$, $x > \alpha$ e $\alpha, \beta > 0$), che per l'appunto ammette finito $\mathrm{E}(X^r)$ se e solo se $r < \beta$, ossia, nel presente caso, $r < 1$.

Esercizio 6

Siano $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. ad una variabile casuale X avente funzione di densità di probabilità :

$$\varphi_X(x;\theta) = \frac{1+\theta x}{2}, \qquad x \in (-1,1), \theta \in (-1,1).$$

1. *Si stimi θ sulla base del metodo dei momenti;*
2. *si verifichi la consistenza del corrispondente stimatore.*

Soluzione

Sia $X \sim \varphi_X(x;\theta) = \frac{1+\theta x}{2}$, $x \in (-1,1)$, $\theta \in (-1,1)$ ignoto; siano inoltre $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. a X. Trattasi di un problema di stima puntuale per θ.

1. La stima di θ basata sul metodo dei momenti si identifica nella soluzione rispetto a θ della seguente equazione:
$$\mathrm{E}(X) = \bar{x},$$
ove:
$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \int_{-1}^{1} x \frac{1+\theta x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (x + \theta x^2) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left. x^2 \right|_{-1}^{1} + \frac{\theta}{3} \left. x^3 \right|_{-1}^{1} \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \theta = \frac{\theta}{3}. \end{aligned}$$
L'equazione in questione risulta dunque:
$$\frac{\theta}{3} = \bar{x};$$
essa ammette come unica soluzione:
$$\tilde{\theta} = 3\bar{x},$$
che identifica la stima di θ basata sul metodo dei momenti.

2. Lo stimatore di θ determinato al punto 1 è non distorto per θ, infatti:
$$\mathrm{E}(\tilde{\Theta}) \overset{\text{lin.}}{=} 3\mathrm{E}(\bar{X}) \overset{\text{lin.}}{=} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(X_i) \overset{\text{i.d.}}{=} 3\mathrm{E}(X) = 3 \cdot \frac{\theta}{3} = \theta, \qquad \forall \theta \in (-1,1);$$
pertanto, ai fini della verifica della relativa consistenza per θ, è sufficiente verificare che $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(\tilde{\Theta}) = 0$. Si ha che:
$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(\tilde{\Theta}) &= 9\mathrm{Var}(\bar{X}) \overset{\text{ind.}}{=} \frac{9}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) = \\ &\overset{\text{i.d.}}{=} \frac{9}{n} \mathrm{Var}(X) = \frac{9}{n} \left\{ \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2 \right\}, \end{aligned}$$
ove:
$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X^2) &= \int_{-1}^{1} x^2 \frac{1+\theta x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (x^2 + \theta x^3) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} \left. x^3 \right|_{-1}^{1} + \frac{\theta}{4} \left. x^4 \right|_{-1}^{1} \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}; \end{aligned}$$
pertanto:
$$\mathrm{Var}(\tilde{\Theta}) = \frac{9}{n} \left\{ \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2 \right\} = \frac{9}{n} \left(\frac{1}{3} - \frac{\theta^2}{9} \right) = \frac{9}{n} \frac{3-\theta^2}{9} = \frac{3-\theta^2}{n}.$$
In definitiva, poichè:
$$\begin{cases} \mathrm{E}(\tilde{\Theta}) = \theta, \qquad \forall \theta \in (-1,1) \\ \lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(\tilde{\Theta}) = \lim_{n\to\infty} \frac{3-\theta^2}{n} = 0 \end{cases},$$
è soddisfatta la condizione sufficiente di consistenza, dunque $\tilde{\Theta}$ è consistente per θ.

Esercizio 7

Siano $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. a $X \sim U(a,b)$, $a < b$. Si determinino gli stimatori di a e b basati sul metodo dei momenti.

Soluzione

Sia $X \sim U(a,b)$, $a, b \in \mathrm{R}$, $a < b$ ignoti; siano inoltre $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. a X. Trattasi di un problema di stima puntuale per a e b.

Le stime di a e b basate sul metodo dei momenti si identificano nelle soluzioni rispetto a e b del sistema di due equazioni:

$$\begin{cases} \mathrm{E}(X) = \bar{x} \\ \mathrm{E}(X^2) = m_2 \end{cases},$$

ove è noto che $\mathrm{E}(X) = \frac{a+b}{2}$ e:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X^2) &= \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{3(b-a)}\; x^3\Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \\ &= \frac{(b-a)(b^2 + a^2 + ab)}{3(b-a)} = \frac{b^2 + a^2 + ab}{3}. \end{aligned}$$

Il sistema in questione risulta dunque:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{a+b}{2} = \bar{x} \\ \\ \frac{b^2+a^2+ab}{3} = m_2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2\bar{x} - b \\ \\ b^2 + a^2 + ab = 3m_2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2\bar{x} - b \\ \\ b^2 + (2\bar{x} - b)^2 + (2\bar{x} - b)b = 3m_2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2\bar{x} - b \\ \\ (b - \bar{x})^2 = 3(m_2 - \bar{x}^2) \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2\bar{x} - b \\ \\ (b - \bar{x})^2 = \frac{3(n-1)}{n} s^2 \end{cases}; \end{aligned}$$

poichè $x \in (a,b)$, si ha che $\bar{x} < b$, ossia $b - \bar{x} > 0$; pertanto, risulta:

$$\begin{cases} a = 2\bar{x} - b \\ \\ b = \bar{x} + \sqrt{\frac{3(n-1)}{n} s^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \bar{x} - \sqrt{\frac{3(n-1)}{n} s^2} \\ \\ b = \bar{x} + \sqrt{\frac{3(n-1)}{n} s^2} \end{cases}.$$

In conclusione:

$$\tilde{A} = \bar{X} - \sqrt{\frac{3(n-1)}{n} S^2}, \qquad \tilde{B} = \bar{X} + \sqrt{\frac{3(n-1)}{n} S^2}$$

sono rispettivamente gli stimatori di a e b basati sul metodo dei momenti.

Esercizio 8

Sia $(X_1, \dots, X_n)$ *un campione casuale semplice estratto nella variabile casuale* $X \sim \mathrm{Gamma}(\alpha, \beta)$.

1. *Si determinino le stime di* α *e* β *basate sul metodo dei momenti*;
2. *supponendo* $\alpha = 1$, $n = 10$ *e* $\sum_{i=1}^{n} x_i = 20$, *si determini la stima di massima verosimiglianza di* β.

Soluzione

Sia $X \sim \mathrm{Gamma}(\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta \in \mathrm{R}^+$ ignoti; siano inoltre $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. a X. Trattasi di un problema di stima puntuale per α e β.

1. Le stime di α e β basate sul metodo dei momenti si identificano nelle soluzioni rispetto α e β del sistema di due equazioni:
$$\begin{cases} \mathrm{E}(X) = \bar{x} \\ \mathrm{E}(X^2) = m_2 \end{cases},$$
ove è noto che $\mathrm{E}(X) = \frac{\alpha}{\beta}$ e:
$$\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{Var}(X) + [\mathrm{E}(X)]^2 = \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}.$$
Il sistema in questione risulta dunque:
$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta} = \bar{x} \\ \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2} = m_2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta\bar{x} \\ \frac{\beta\bar{x}(\beta\bar{x}+1)}{\beta^2} = m_2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta\bar{x} \\ \frac{\beta\bar{x}+1}{\beta} = \frac{m_2}{\bar{x}} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta\bar{x} \\ \bar{x} + \frac{1}{\beta} = \frac{m_2}{\bar{x}} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta\bar{x} \\ \frac{1}{\beta} = \frac{m_2 - \bar{x}^2}{\bar{x}} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\bar{x}^2}{m_2 - \bar{x}^2} \\ \beta = \frac{\bar{x}}{m_2 - \bar{x}^2} \end{cases}; \end{aligned}$$
pertanto:
$$\tilde{\alpha} = \frac{\bar{X}^2}{M_2 - \bar{X}^2} = \frac{\bar{X}^2}{\frac{n-1}{n}S^2} = \frac{n\bar{X}^2}{(n-1)S^2},$$
$$\tilde{\beta} = \frac{\bar{X}}{M_2 - \bar{X}^2} = \frac{\bar{X}}{\frac{n-1}{n}S^2} = \frac{n\bar{X}}{(n-1)S^2}$$
sono rispettivamente gli stimatori di α e β basati sul metodo dei momenti.

2. Le funzioni di verosimiglianza e di log-verosimiglianza di $(x_1, \dots, x_n)$ hanno rispettivamente espressioni:
$$\begin{aligned} L(\alpha, \beta) &= \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(x_i; \alpha, \beta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x_i^{\alpha-1} e^{-\beta x_i} = \\ &= \left(\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\right)^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\alpha-1} e^{-\beta \sum_{i=1}^{n} x_i} \end{aligned}$$
$$l(\alpha, \beta) = \log L(\alpha, \beta) = n\alpha \log\beta - n \log\Gamma(\alpha) + (\alpha - 1)\log\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) - \beta \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$\alpha, \beta \in \mathrm{R}^+$; ponendo, come suggerito dal testo dell'esercizio, $\alpha = 1$, $n = 10$ e $\sum_{i=1}^{n} x_i = 20$, la funzione di log-verosimiglianza si particolarizza in:

$$l(\beta) = 10 \log \beta - 20\beta.$$

L'equazione di verosimiglianza risulta dunque:

$$l'(\beta) = \frac{10}{\beta} - 20 = 0;$$

essa ammette come unica soluzione:

$$\hat{\beta} = \frac{1}{2}.$$

Poichè:

$$l''(\beta) = -\frac{10}{\beta^2} < 0, \qquad \forall \beta \in \mathrm{R}^+,$$

$\hat{\beta}$ è punto di massimo assoluto di $l(\beta)$, dunque è stima di massima verosimiglianza di β.

Esercizio 9

Sia $X_1, \ldots, X_n$ *i.i.d. a* $X \sim \text{Laplace}(\theta)$ *con da funzione di densità di probabilità :*

$$\varphi_X(x;\theta) = \frac{1}{2}e^{-|x-\theta|}, \qquad x \in R, \theta \in R$$

dove $\mathrm{E}(X) = \theta$*.*

1. *Si stimi* θ *sulla base del metodo dei momenti*;
2. *per* n *dispari, si determini lo stimatore di massima verosimiglianza di* θ *(suggerimento: puó essere utile ricordare che* $\sum_{i=1}^n |x_i - a| = \min \Leftrightarrow a = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$*, ossia l'osservazione che occupa la posizione centrale nella sequenza ordinata* $x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}$*).*

Soluzione

Sia $X \sim \varphi_X(x;\theta) = \frac{1}{2}e^{-|x-\theta|}$, $x \in \mathrm{R}$, $\theta \in \mathrm{R}$ ignoto; siano inoltre $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. a X. Trattasi di un problema di stima puntuale per θ.

1. Si noti che:

$$\varphi_X(x;\theta) = \frac{1}{2}e^{-|x-\theta|} = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-(\theta-x)} & \text{se } x < \theta \\ \frac{1}{2}e^{-(x-\theta)} & \text{se } x \geq \theta \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x-\theta} & \text{se } x < \theta \\ \frac{1}{2}e^{\theta-x} & \text{se } x \geq \theta \end{cases};$$

ció premesso, la stima di θ basata sul metodo dei momenti si identifica nella soluzione rispetto a θ della seguente equazione:

$$\mathrm{E}(X) = \bar{x},$$

dove $\mathrm{E}(X) = \theta$. In definitiva, l'equazione in questione risulta:

$$\theta = \bar{x},$$

dunque:

$$\tilde{\theta} = \bar{x}$$

identifica la stima di θ basata sul metodo dei momenti.

2. Le funzioni di verosimiglianza e di log-verosimiglianza di $(x_1, \ldots, x_n)$ hanno rispettivamente espressioni:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{2}e^{-|x_i-\theta|} = \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-\sum_{i=1}^n |x_i-\theta|},$$

$$l(\theta) = \log L(\theta) = -n\log 2 - \sum_{i=1}^n |x_i - \theta|, \qquad \theta \in \mathrm{R}.$$

A questo punto, è opportuno seguire il suggerimento fornito dal testo dell'esercizio; a tal proposito, si noti che:

$$\max_\theta [l(\theta)] = \min_\theta [-l(\theta)] = \min_\theta \left[\sum_{i=1}^n |x_i - \theta|\right] \Leftrightarrow \hat{\theta} = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}.$$

In conclusione, per n dispari:

$$\hat{\Theta} = X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} = \tilde{M},$$

ossia la Mediana Campionaria è lo stimatore di massima verosimiglianza di θ.

Se n è pari si può dimostrare che ogni valore di $a \in \left(x_{\left(\frac{n}{2}\right)}, x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}\right)$ minimizza $\sum_{i=1}^n |x_i - a|$, quindi ogni valore compreso nell'intervallo $\left(x_{\left(\frac{n}{2}\right)}, x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}\right)$ è SMV, ad esempio la mediana campionaria

$$\tilde{M} = \frac{X_{\left(\frac{n}{2}\right)} + X_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}$$