Statistica II - Esercitazione 2

Stima puntuale: criteri di valutazione degli stimatori

Come anticipato nella precedente esercitazione, ai fini del confronto di due qualsivoglia stimatori di un medesimo parametro, è possibile ricorrere al rapporto dei rispettivi errori quadratici medi, ossia alla cosiddetta efficienza relativa. Esistono casi, però, in cui il confronto diretto tra stimatori sulla base dell'efficienza relativa non risulta in uno stimatore preferibile, poiché $\mathrm{MSE}\,(T_1) < \mathrm{MSE}\,(T_2)$ per alcuni valori di $\theta \in \Theta$ e $\mathrm{MSE}\,(T_1) > \mathrm{MSE}\,(T_2)$ per altri.
E' possibile dimostrare che non esiste lo stimatore ottimo in termini di MSE, ossia lo stimatore caratterizzato da errore quadratico medio uniformemente minimo, dunque minimo per ogni valore del parametro. Si consideri ad esempio lo stimatore $T = 8$ per l'ignoto parametro $\theta \in \mathrm{R}$, ossia lo stimatore che assume valore costantemente pari a 8 indipendentemente dal campione osservato. Evidentemente, si ha che $\mathrm{MSE}\,(T) = [\mathrm{B}\,(T)]^2 = (8-\theta)^2$ e, nel caso particolare in cui $\theta = 8$, $\mathrm{MSE}\,(T) = 0$, cioè il minimo valore assumibile da tale quantità . Non esiste dunque alcuno stimatore per θ uniformemente preferibile a $T = 8$, poichè l'unico stimatore con errore quadratico medio nullo per $\theta = 8$ è per l'appunto $T = 8$ e, in tal caso, un qualunque altro stimatore $T_1 \neq 8$ ha errore quadratico medio superiore a quello di T.

Restringendosi, però, alla classe dei soli stimatori non distorti per il parametro di interesse, è possibile identificare stimatori caratterizzati da varianza minima (dunque da MSE minimo) rispetto a tutti i possibili valori del parametro.

Stimatore non distorto a varianza uniformemente minima. *Uno stimatore T^* non distorto per θ e tale che per ogni altro stimatore T non distorto per θ:*

$$\mathrm{Var}\,(T^*) \leq \mathrm{Var}\,(T)\,, \qquad \forall\theta \in \Theta$$

è detto stimatore non distorto a varianza uniformemente minima o, in inglese, stimatore UMVUE (Uniformly Minimum Variance Unbiased Estimator).

Unicità dello stimatore UMVUE. *Se T^* è uno stimatore UMVUE per θ, allora T^* è unico.*

Dimostrazione. Si proceda per assurdo, ossia si assuma come ipotesi aggiuntiva la negazione della tesi; si supponga dunque l'esistenza di un secondo stimatore U non distorto per θ e a varianza uniformemente minima, ossia tale che: $\mathrm{Var}(U) = \mathrm{Var}(T^*), \forall\theta \in \Theta$. Si introduca ora un terzo stimatore per θ, $V = \frac{T^*+U}{2}$, combinazione lineare convessa di T^* e U; evidentemente, altresì V è corretto per θ, infatti:

$$\mathrm{E}(V) = \mathrm{E}\left(\frac{T^*+U}{2}\right) \overset{\text{lin.}}{=} \frac{1}{2}[\mathrm{E}(T^*) + \mathrm{E}(U)] = \theta, \qquad \forall\theta \in \Theta$$

e presenta varianza pari a:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(V) &= \mathrm{Var}\left(\frac{T^*+U}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{4}[\mathrm{Var}(T^*) + \mathrm{Var}(U) + 2\mathrm{Cov}(T^*, U)] = \\ &\overset{\mathrm{Var}(U)=\mathrm{Var}(T^*)}{=} \frac{1}{2}[\mathrm{Var}(T^*) + \mathrm{Cov}(T^*, U)]. \end{aligned}$$

A tal proposito, essendo $\rho = \mathrm{Corr}(T^*, U)$ il coefficiente di correlazione lineare di T^* e U e $\sqrt{\mathrm{Var}(T^*)}$, la deviazione standard di T^*, si ha che:

$$\mathrm{Cov}(T^*, U) = \rho\,\sqrt{\mathrm{Var}(T^*)}\sqrt{\mathrm{Var}(U)} \overset{\sqrt{\mathrm{Var}(T^*)}=\sqrt{\mathrm{Var}(U)}}{=} \rho\,\mathrm{Var}(T^*),$$

quindi:

$$\mathrm{Var}(V) = \frac{1+\rho}{2}\mathrm{Var}(T^*).$$

A questo punto, si noti che:

$$\frac{1+\rho}{2} > 1 \Leftrightarrow \rho > 1,$$

caso, questo, impossibile e che:

$$\frac{1+\rho}{2} < 1 \Leftrightarrow \mathrm{Var}(V) < \mathrm{Var}(T^*),$$

caso anch'esso impossibile, essendo per ipotesi T^* stimatore a varianza uniformemente minima per θ. Deve dunque essere:

$$\frac{1+\rho}{2} = 1 \Leftrightarrow \rho = 1 \Leftrightarrow T^* = a + bU,$$

ossia T^* e U devono essere legati tra loro da una perfetta relazione lineare. Passando ai valori attesi ed essendo T^* e U corretti per θ, deve essere:

$$\mathrm{E}(T^*) = \mathrm{E}(a + bU) \overset{\text{lin.}}{=} a + b\mathrm{E}(U) \Leftrightarrow \theta = a + b\theta;$$

perchè valga l'uguaglianza in oggetto, necessariamente deve essere: $a = 0$ e $b = 1$, ossia $T^* = U$. In conclusione, se esiste lo stimatore *UMVUE* per θ, esso è unico, come volevasi dimostrare.

.... □

Evidentemente, le considerazioni in questione possono essere generalizzate in maniera del tutto naturale alla classe degli stimatori non distorti per $\tau(\theta)$, essendo $\tau(\cdot)$ una funzione di θ, ad esempio $\tau(\theta) = \sqrt{\theta}$.

Diseguaglianza di Cramèr-Rao. *Considerato un problema regolare di stima, sia T uno stimatore non distorto per θ; allora, vale la diseguaglianza di Cramèr-Rao:*

$$\mathrm{Var}(T) \geq \frac{1}{n\mathcal{I}(\theta)},$$

ove:

$$\mathcal{I}(\theta) = \mathrm{E}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\log\varphi_X(X;\theta)\right]^2$$

è l'informazione attesa di Fisher fornita da una singola osservazione campionaria a proposito di θ.
Più in generale, con riferimento ad uno stimatore T non distorto per $\tau(\theta)$, vale che:

$$\mathrm{Var}(T) \geq \frac{[\tau'(\theta)]^2}{n\mathcal{I}(\theta)}.$$

Si noti tuttavia che:

1. non è detto che esista uno stimatore che raggiunga effettivamente il limite inferiore in questione. Ad esempio, nel caso in cui sia di interesse la stima della varianza σ^2 di $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ con μ ignota sulla base del campione casuale $X_1, \ldots, X_n$ a componenti i.i.d. a X, il limite inferiore della diseguaglianza di Cramèr-Rao si dimostra essere pari a $2\sigma^4/n$ ed è raggiungibile dal solo stimatore $T = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)}{n}$ che, però, è inutilizzabile, essendo μ ignota. Stante l'unicità dello stimatore UMVUE, il limite inferiore di Cramèr-Rao non è raggiungibile da nessun altro stimatore, quindi di fatto il limite inferiore in questione non è raggiungibile.

2. La diseguaglianza di Cramèr-Rao vale nell'ipotesi di problema regolare di stima. Senza entrare nei dettagli tecnici che identificano un problema regolare, si segnala l'esistenza di problemi "non regolari" caratterizzati dalla presenza di stimatori non distorti con varianza inferiore al limite inferiore di Cramèr-Rao. Ad esempio, nel caso "non regolare" in cui $X_1, \ldots, X_n$ siano i.i.d. a $X \sim U(0, \theta)$, lo stimatore $T^* = \frac{n+1}{n}X_{(n)}$ è non distorto per θ con $\mathrm{Var}(T^*) = \frac{\theta^2}{n(n+2)}$. Poichè $\mathcal{I}(\theta) = \theta^{-2}$, si ha però che per la diseguaglianza di Cramèr-Rao $\mathrm{Var}(T) \geq \theta^2/n$, mentre $\mathrm{Var}(T^*) < \theta^2/n$, $\forall n \in \mathrm{N}$ e $\forall\theta > 0$: naturalmente, non vi è contraddizione con quanto detto finora perchè il caso in esame non rappresenta un problema regolare di stima. Infine, è possibile dimostrare (sulla base di argomentazioni più avanzate di quelle previste dal corso) che lo stimatore T^* in questione è stimatore UMVUE per θ.

Stimatore efficiente. *Considerato un problema regolare di stima, qualora uno stimatore T per θ (o per $\tau(\theta)$), non distorto per θ (o per $\tau(\theta)$), abbia varianza pari al limite inferiore di Cramèr-Rao, T è detto efficiente per θ (o per $\tau(\theta)$) e, poichè caratterizzato da varianza uniformemente minima nella classe degli stimatori non distorti per θ (o per $\tau(\theta)$), stante l'unicità dello stimatore UMVUE, è l'unico a godere di tale proprietà .*
Si noti che se uno stimatore è efficiente per $\tau(\theta)$, allora è UMVUE, ma non viceversa. Infatti può esistere uno stimatore UMVUE la cui varianza non raggiunge il limite inferiore di Cramèr-Rao. Inoltre, se uno stimatore è efficiente per $\tau(\theta)$, esso è anche unico.

Proprietà asintotiche

Consideriamo ora delle proprietà di uno stimatore $T_n = t(X_1, \dots, X_n)$ di natura asintotica, ossia proprietà che presuppongono che la numerosità campionaria n diverga all'infinito.

Correttezza asintotica. *Uno stimatore T_n per θ è detto asintoticamente corretto per θ se:*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\,(T_n) = \theta, \qquad \forall\theta \in \Theta.$$

Più in generale, uno stimatore T_n per $\tau(\theta)$ è detto asintoticamente corretto per $\tau(\theta)$ se:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\,(T_n) = \tau(\theta), \qquad \forall\theta \in \Theta.$$

Consistenza di uno stimatore. *Uno stimatore T_n è detto consistente in senso debole o, più semplicemente, consistente per θ se, comunque si scelga $\epsilon > 0$:*

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(|T_n - \theta| > \epsilon\right) = 0,$$

o, equivalentemente, se:

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(|T_n - \theta| < \epsilon\right) = 1.$$

Più in generale, uno stimatore T_n è detto consistente per $\tau(\theta)$ se, comunque si scelga $\epsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(|T_n - \tau(\theta)| > \epsilon\right) = 0.$$

La consistenza di uno stimatore equivale dunque alla convergenza in probabilità dello stimatore stesso al reale e ignoto valore del parametro.

Condizione sufficiente per la consistenza.
Condizione sufficiente (ma non necessaria) per la consistenza per θ (o per $\tau(\theta)$) di uno stimatore T_n è che:

1. *T_n sia asintoticamente corretto per θ (o per $\tau(\theta)$),*
2. $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}\,(T_n) = 0$.

Esercizio 1

Sia X una variabile casuale di Poisson di parametro θ.

1. *Si dica se lo stimatore $\bar{X}$ è efficiente per θ;*
2. *sulla base della conclusione tratta al punto precedente, si concluda in merito all'efficienza di S^2 (varianza campionaria corretta) per θ;*
3. *si verifichi che $\bar{X}$ é consistente per θ.*

Soluzione

Sia $X \sim \text{Poisson}(\theta)$, $\theta \in \mathrm{R}^+$ ignoto; siano inoltre $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. a X. Trattasi di un problema di stima puntuale per θ.

1. Essendo $\bar{X}$ stimatore corretto per $\mathrm{E}(X) = \theta$ e trattandosi di un problema regolare di stima, vale la diseguaglianza di Cramèr-Rao. A tal proposito, essendo:

$$\log \varphi_X(x;\theta) = \log \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!} = -\theta + x\log\theta - \log x!,$$

quindi:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log\varphi_X(x;\theta) = -1 + \frac{x}{\theta},$$

l'informazione attesa di Fisher recata da una singola osservazione campionaria a proposito di θ risulta:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(\theta) &= \mathrm{E}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\log\varphi_X(X;\theta)\right]^2 = \\
&= \mathrm{E}\left(-1 + \frac{X}{\theta}\right)^2 = \\
&= \mathrm{E}\left(1 - \frac{2X}{\theta} + \frac{X^2}{\theta^2}\right) = \\
&\overset{\text{lin.}}{=} 1 - \frac{2}{\theta}\mathrm{E}(X) + \frac{1}{\theta^2}\mathrm{E}\left(X^2\right) = \\
&= 1 - \frac{2}{\theta}\theta + \frac{1}{\theta^2}\left\{\mathrm{Var}(X) + [\mathrm{E}(X)]^2\right\} = \\
&= 1 - 2 + \frac{1}{\theta^2}\left(\theta + \theta^2\right) = \frac{1}{\theta}.
\end{aligned}$$

Pertanto:

$$\mathrm{Var}\left(\bar{X}\right) \geq \frac{1}{n\mathcal{I}(\theta)} = \frac{1}{n\frac{1}{\theta}} = \frac{\theta}{n};$$

d'altra parte:

$$\mathrm{Var}\left(\bar{X}\right) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right) \overset{\text{ind.}}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i) \overset{\text{i.d.}}{=} \frac{1}{n^2}n\theta = \frac{\theta}{n},$$

quindi $\bar{X}$ è stimatore efficiente per θ, poichè la relativa varianza coincide con il limite inferiore della diseguaglianza di Cramèr-Rao. Inoltre, poichè non esiste alcun altro stimatore corretto per θ con varianza inferiore a quella di $\bar{X}$ per almeno un valore di $\theta \in \mathrm{R}^+$, $\bar{X}$ è altresì stimatore UMVUE per θ ed è l'unico a possedere tale proprietà .

2. Essendo $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n\left(X_i - \bar{X}\right)^2$ stimatore corretto per $\mathrm{Var}(X) = \theta$ e stante l'unicità dello stimatore efficiente, segue che S^2 non può essere efficiente per θ.

3. Poichè:

$$\begin{cases} \mathrm{E}(\bar{X}) = \theta, & \forall\theta \in \mathrm{R}^+ \\ \lim_{n\to\infty}\mathrm{Var}(\bar{X}) = \lim_{n\to\infty}\frac{\theta}{n} = 0 \end{cases},$$

in virtù della condizione sufficiente di consistenza, $\bar{X}$ risulta consistente per θ.

Esercizio 2

Sia $(X_1, \ldots, X_n)$ *un campione casuale estratto da* $X \sim U(0, \theta)$, $\theta > 0$. *Ai fini della stima di* θ, *si considerino i due seguenti stimatori:*

$$A = aX_{(n)}, a \in \mathrm{R}, \qquad B = 2\bar{X},$$

ove $\bar{X}$ *sia la Media Campionaria e:*

$$X_{(n)} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

1. *Si determini il valore di* a *che renda lo stimatore* A *non distorto per* θ;
2. *fissato* a *nel valore determinato al punto precedente, si dica quale statistica fra* A *e* B *sia preferibile come stimatore di* θ;
3. *si determini il limite inferiore di Cramèr-Rao e si commenti il risultato.*

Soluzione

Sia $X \sim U(0, \theta)$, $\theta \in \mathrm{R}^+$ ignoto; siano inoltre $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. a X. Trattasi di un problema di stima puntuale per θ.

1. Lo stimatore A è non distorto per θ se:

$$\mathrm{E}(A) \stackrel{\text{lin.}}{=} a\mathrm{E}(X_{(n)}) = \theta, \qquad \forall \theta > 0;$$

a tal fine, si rende dunque necessario determinare la legge di distribuzione della variabile casuale $X_{(n)}$. Nella fattispecie, la funzione di ripartizione di $X_{(n)}$ risulta, $\forall x \in \mathrm{R}$, come segue:

$$\begin{aligned}
\Phi_{X_{(n)}}(x;\theta) &= \Pr\left(X_{(n)} \le x\right) = \Pr\left(X_1 \le x, X_2 \le x, \ldots, X_n \le x\right) = \\
&\stackrel{\text{ind.}}{=} \Pr\left(X_1 \le x\right)\Pr\left(X_2 \le x\right)\ldots\Pr\left(X_n \le x\right) = \\
&= \prod_{i=1}^{n} \Pr\left(X_i \le x\right) = \prod_{i=1}^{n} \Phi_{X_i}(x;\theta) \stackrel{\text{i.d.}}{=} \left[\Phi_X(x;\theta)\right]^n
\end{aligned}$$

ed essendo la funzione di ripartizione di $X \sim U(0, \theta)$:

$$\Phi_X(x;\theta) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ (x/\theta) & 0 \le x < \theta \\ 1 & x \ge \theta \end{cases},$$

si ha che:

$$\Phi_{X_{(n)}}(x;\theta) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ (x/\theta)^n & 0 \le x < \theta \\ 1 & x \ge \theta \end{cases};$$

in definitiva, $X_{(n)}$ risulta caratterizzata da funzione di densità di probabilità avente espressione:

$$\varphi_{X_{(n)}}(x;\theta) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\Phi_{X_{(n)}}(x;\theta)\right] = \begin{cases} \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} & 0 \le x < \theta \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

A questo punto, è possibile determinare $\mathrm{E}(X_{(n)})$, che risulta come segue:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_{(n)}) &= \int_0^\theta x\frac{nx^{n-1}}{\theta^n}dx = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta x^n dx = \\
&= \frac{n}{\theta^n}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^\theta = \frac{n}{\theta^n}\frac{\theta^{n+1}}{n+1} = \\
&= \frac{n}{n+1}\theta;
\end{aligned}$$

pertanto, affinchè A sia non distorto per θ, deve essere, $\forall \theta > 0$:

$$\mathrm{E}(A) = a\mathrm{E}(X_{(n)}) = a\frac{n}{n+1}\theta = \theta,$$

ossia: $a = \frac{n+1}{n}$. In definitiva, lo stimatore per θ cercato è:

$$A = \frac{n+1}{n}X_{(n)}.$$

2. Poichè $\mathrm{E}(X) = \frac{\theta}{2}$, risulta:

$$\mathrm{E}(B) \overset{\text{lin.}}{=} 2\mathrm{E}(\bar{X}) \overset{\text{lin.}}{=} \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_i) \overset{\text{i.d.}}{=} \frac{2}{n} n \frac{\theta}{2} = \theta, \qquad \forall \theta > 0$$

dunque B è stimatore corretto per θ.
Ciò premesso, si ha che:

$$\begin{aligned} \mathrm{MSE}(A) &= \mathrm{Var}(A) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \mathrm{Var}(X_{(n)}) = \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \left\{\mathrm{E}(X_{(n)}^2) - \left[\mathrm{E}(X_{(n)})\right]^2\right\}, \end{aligned}$$

ove:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X_{(n)}^2) &= \int_0^\theta x^2 \frac{n x^{n-1}}{\theta^n} = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta x^{n+1} dx = \\ &= \frac{n}{\theta^n}\left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^\theta = \frac{n}{n+2}\theta^2; \end{aligned}$$

si ha dunque:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(A) &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \left[\frac{n}{n+2}\theta^2 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \theta^2\right] = \\ &= \frac{(n+1)^2}{n^2}\frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2} = \frac{\theta^2}{n(n+2)}. \end{aligned}$$

D'altra parte, essendo $\mathrm{Var}(X) = \frac{\theta^2}{12}$, risulta:

$$\mathrm{Var}(B) = 4\mathrm{Var}(\bar{X}) \overset{\text{i.i.d.}}{=} \frac{4}{n}\mathrm{Var}(X) = \frac{4}{n}\frac{\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{3n}.$$

In definitiva:

$$\mathrm{Var}(A) < \mathrm{Var}(B) \Longleftrightarrow \frac{\theta^2}{n(n+2)} < \frac{\theta^2}{3n} \Longleftrightarrow n(n+2) > 3n \Longleftrightarrow n > 1;$$

A è dunque preferibile a B.

3. L'informazione attesa di Fisher per una singola osservazione a proposito di θ è pari a:

$$\mathcal{I}(\theta) = \mathrm{E}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\log\varphi_X(x;\theta)\right]^2\right\} = \mathrm{E}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial\theta} - \log\theta\right]^2\right\} = \mathrm{E}\left\{\left[-\frac{1}{\theta}\right]^2\right\} = \frac{1}{\theta^2}$$

quindi il limite inferiore di Cramèr-Rao risulta pari a θ^2/n. Segue che $\mathrm{Var}(A) = \frac{\theta^2}{n(n+2)} < \theta^2/n$ per ogni $n \in \mathrm{N}$, ovvero lo stimatore A ha varianza inferiore al limite di Cramèr-Rao. In questo caso il Teorema di Cramèr-Rao non si applica poichè non si tratta di un problema regolare di stima.

Esercizio 3

Siano $Y_1, \ldots, Y_n$ v.c. mutualmente indipendenti con $Y_i \sim N(\theta x_i, 1)$, con x_i costanti note, $i = 1, \ldots, n$. Ai fini della stima di θ, si consideri il seguente stimatore:

$$T = \frac{\sum_{i=1}^n x_i Y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

1. *Si determini la distribuzione di T;*
2. *si dica quale stimatore fra T e $T' = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n x_i}$ sia preferibile come stimatore di θ;*
3. *si verifichi se T è consistente per θ se poniamo $x_i = 1/i$ per $i = 1, 2, \ldots$ (si noti che $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{i}\right)^2 = 2$).*

Soluzione

Si noti che $Y_1, \ldots, Y_n$ sono v.c. indipendenti ma non identicamente distribuite. Trattasi di un problema di stima puntuale per θ.

1. Abbiamo
$$\mathrm{E}(T) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \mathrm{E}(Y_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \theta x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \theta$$
Possiamo scrivere
$$T = \frac{\sum_{i=1}^n x_i Y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \right) Y_i$$
ed otteniamo
$$\mathrm{Var}(T) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \right)^2 \mathrm{Var}(Y_i) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{(\sum_{i=1}^n x_i^2)^2} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$
Infine, poichè combinazione lineare di variabili casuali Normali tra loro indipendenti, T ha anch'esso distribuzione Normale; nella fattispecie, per quanto determinato in precedenza:
$$T \sim N\left(\theta, \frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right).$$

2. Abbiamo
$$\mathrm{E}(T') = \frac{\sum_{i=1}^n \mathrm{E}(Y_i)}{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \theta x_i}{\sum_{i=1}^n x_i} = \theta$$
e
$$\mathrm{Var}(T') = \mathrm{Var}\left(\frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n x_i} \right) = \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i} \right)^2 \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(Y_i) = \frac{n}{n^2 \bar{x}^2} = \frac{1}{n\bar{x}^2}.$$
Poichè $\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \geq 0$, allora $\sum_{i=1}^n x_i^2 \geq n\bar{x}^2$, quindi
$$\mathrm{Var}(T) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \leq \frac{1}{n\bar{x}^2} = \mathrm{Var}(T')$$
, quindi T è preferibile a T'.

3. Per $x_i = 1/i$ abbiamo
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(T) = \frac{1}{2}.$$
Quindi non è soddisfatta la condizione sufficiente per la consistenza.

   Applicando la definizione di consistenza, abbiamo, per $\epsilon > 0$ arbitrario
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(|T - \theta| < \epsilon) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(-\epsilon < \underbrace{T - \theta}_{\overset{n\to\infty}{\sim} N(0,1/2)} < \epsilon \right) \to \Phi(\sqrt{2}\epsilon) - \Phi(-\sqrt{2}\epsilon) < 1$$
dove $\Phi(\cdot)$ è la funzione di ripartizione di una v.c. $N(0,1)$. Segue che lo stimatore T non è consistente per θ perchè non soddisfa la definizione di consistenza.