Statistica II - Esercitazione 7

Esercizio 1

Si supponga di aver effettuato $n = 8$ prove indipendenti in una variabile casuale X di tipo Bernoulli con probabilità di successo θ ignota e di aver ottenuto i seguenti risultati:

$$(0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0)$$

Si voglia sottoporre a verifica l'ipotesi nulla $\mathrm{H}_0 : \theta = 2/3$ contro l'ipotesi alternativa $\mathrm{H}_1 : \theta = 1/3$. A tal fine, si adotti un test caratterizzato da regione di rifiuto:

$$C = \left\{ (x_1, \ldots, x_8) : \sum_{i=1}^{8} x_i < 6 \right\}.$$

1. si decida se rifiutare o meno l'ipotesi nulla;
2. si determini la funzione di potenza del test in questione (mantenendo almeno 5 cifre dopo la virgola);
3. sia

$$\pi'(\theta) = \begin{cases} 0.53178, & \text{se } \theta = 2/3 \\ 0.9, & \text{se } \theta = 1/3 \end{cases}$$

la funzione di potenza associata ad un secondo test. Si decida quale tra i due test è più potente.

Soluzione

Sia $X \sim \mathit{Bernoulli}(\theta)$, con $\theta \in (0, 1)$ ignota ed oggetto di interesse. Siano inoltre $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. a X, con $n = 8$. Trattasi di un problema di verifica di ipotesi per θ.

1. Essendo $(x_1, \ldots, x_8) = (0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0)$, risulta:

$$\sum_{i=1}^{8} x_i = 5 < 6;$$

pertanto

$$(x_1, \ldots, x_8) \in C,$$

dunque si rifiuta H_0.

2. Si noti ora che $\sum_{i=1}^{8} X_i \sim \mathit{Binomiale}(8, \theta)$, dove $\theta = 2/3$ se è vera H_0 e $\theta = 1/3$ se è vera H_1. Pertanto, la funzione di potenza del test, $\pi(\theta)$, risulta di valore pari a:

$$\begin{aligned}
\pi(\theta = 2/3) &= \Pr\{(X_1, \ldots, X_8) \in C | \theta = 2/3\} = \Pr\left\{ \sum_{i=1}^{8} X_i < 6 | \theta = 2/3 \right\} = \\
&= 1 - \Pr\left\{ \sum_{i=1}^{8} X_i \geq 6 | \theta = 2/3 \right\} = \\
&= 1 - \left[\binom{8}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^6 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \binom{8}{7} \left(\frac{2}{3}\right)^7 \left(\frac{1}{3}\right) + \binom{8}{8} \left(\frac{2}{3}\right)^8 \right] = \\
&= 1 - (0.27313 + 0.15607 + 0.03902) = 0.53178,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\pi(\theta = 1/3) &= \Pr\{(X_1, \dots, X_8) \in C | \theta = 1/3\} = \Pr\left\{\sum_{i=1}^{8} X_i < 6 | \theta = 1/3\right\} = \\
&= 1 - \Pr\left\{\sum_{i=1}^{8} X_i \geq 6 | \theta = 1/3\right\} = \\
&= 1 - \left[\binom{8}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^6\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \binom{8}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7\left(\frac{2}{3}\right) + \binom{8}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^8\right] = \\
&= 1 - (0.01707 + 0.00244 + 0.00015) = 0.98034;
\end{aligned}
$$

in definitiva:

$$
\pi(\theta) = \begin{cases} 0.53178, & \text{se } \theta = 2/3 \\ 0.98034, & \text{se } \theta = 1/3 \end{cases}
$$

3. Si noti che i due test considerati hanno ugual ampiezza:

$$
\alpha = \pi(\theta = 2/3) = \pi'(\theta = 2/3) = 0.53178;
$$

Il primo, però, presenta potenza

$$
\pi(\theta = 1/3) = 0.98034 > 0.9 = \pi'(\theta = 1/3)
$$

superiore a quella del secondo. Il primo test è dunque da preferirsi poiché caratterizzato da funzione di potenza non inferiore a quella del secondo e, in particolare, strettamente superiore a quella del secondo sotto H_1 vera,

Esercizio 2

Il natale è alle porte e Babbo Natale, noto per la sua dedizione al lavoro, vuole tenere sotto controllo la produzione dei suoi elfi. In particolare, sospetta che l'elfo Gimpy non sia in linea con il suo standard di produzione. L'elfo Gimpy confeziona trenini di legno, una mansione che in media richiede 10 minuti per ogni pezzo. Babbo Natale sospetta che la media dei tempi dell'elfo Gimpy sia in realtà superiore. Sia:

$$\underline{x} = (9.6, 10.5, 11.3, 11.9, 13.7)$$

un campione estratto casualmente di tempi in cui l'elfo Gimpy confeziona un trenino di legno. Assumendo che i tempi siano distribuiti secondo una legge di distribuzione Normale, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, con varianza ignota, si è interessati a capire se è necessario prendere provvedimenti disciplinari per l'elfo Gimpy.

1. Specificare il parametro di interesse ed il sistema di ipotesi necessario;
2. Verificare l'ipotesi nulla specificata al punto precedente, ad un livello di significatività di $\alpha = 0.05$, identificando la regione critica;
3. calcolare il p-value del test;
4. supponendo un'ipotesi alternativa puntuale $\mu = 12$, calcolare la potenza del test;
5. ripetere il test ed il calcolo della potenza utilizzando l'approssimazione Normale.

Soluzione

Sia $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ con σ^2 ignota. Siano inoltre $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. a X, con $n = 5$. Trattasi di un problema di verifica di ipotesi.

1. Il parametro di interesse è il valore medio dei tempi di produzione, assumendo che seguano una legge di distribuzione Normale, $\mathbb{E}[X] = \mu$. Il sistema di ipotesi da sottoporre a verifica è $\mathrm{H}_0 : \mu \leq 10$ contro $\mathrm{H}_1 : \mu > 10$.
2. Posto che $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, assumendo vera l'ipotesi nulla è possibile ricondursi ad una statistica test per il valore atteso di una variabile casuale Normale, con varianza ignota:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} \overset{\mathrm{H}_0}{\sim} T_{n-1}$$

con S^2 stimatore per la varianza campionaria. Tale statistica test induce una regione critica, a livello di significatività $\alpha = 0.05$, pari a:

$$C = \{\underline{X} : T > t_{1-\alpha}\} = \{\underline{X} : T > 2.13\}$$

dove il valore 2.13 rappresenta il quantile di ordine 0.95 di una variabile casuale T di Student con 4 gradi di libertà. Sostituendo ad $\overline{X}$ e S^2 le opportune stime, la statistica test osservata risulta essere:

$$t_{oss} = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} \overset{\mathrm{H}_0}{=} \frac{11.4 - 10}{\sqrt{\frac{2.4}{5}}} = 2.02$$

ed essendo $t_{oss} = 2.02 < 2.13 \implies t_{oss} \in \overline{C}$, dunque non viene rifiutata l'ipotesi nulla, la produttività dell'elfo Gimpy non è significativamente diversa dagli standard richiesti. Analogamente è possibile definire la regione critica basata sul supporto della variabile casuale X:

$$C' = \left\{\underline{X} : \overline{X} > 2.13\sqrt{\frac{S^2}{n}} + \mu\right\} \overset{\mathrm{H}_0}{=} \left\{\underline{X} : \overline{X} > 2.13\sqrt{\frac{2.4}{5}} + 10\right\} = \{\underline{X} : \overline{X} > 11.48\}$$

ed essendo $\overline{x} = 11.4 < 11.48 \implies \overline{x} \in \overline{C}'$, analogamente a quanto fatto precedentemente, l'ipotesi nulla non viene rifiutata.

3. Il p-value del test è pari a:

$$\begin{aligned}\alpha_{oss} &= \Pr(T > t_{oss}|\mathrm{H}_0) = \Pr(T > 2.02|\mathrm{H}_0) = \\ &= 1 - \Pr(T \leq 2.02|\mathrm{H}_0) = 1 - 0.94 = 0.06\end{aligned}$$

4. Supponendo di avere un'ipotesi alternativa puntuale, la probabilità di commettere un errore di II specie risulta essere:

$$\begin{aligned}\beta &= \Pr(\text{non rifiuto } \mathrm{H}_0|\mathrm{H}_1) = \Pr(\overline{X} \in \overline{C}|\mathrm{H}_1) = \\ &= \Pr\left(T \leq \frac{11.48 - \mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}}\middle|\mathrm{H}_1\right) = \Pr\left(T \leq \frac{11.48 - 12}{\sqrt{\frac{2.4}{5}}}\middle|\mathrm{H}_1\right) = 0.24,\end{aligned}$$

quindi la potenza è pari a $1 - \beta = 1 - 0.24 = 0.76$.

5. Sia T_g una variabile casuale T Student con g gradi di libertà; è noto che $\lim_{g\to\infty} T_g \sim \mathcal{N}$. Nonostante la numerosità campionaria non sia sufficiente per poter giustificare un risultato asintotico, usiamo l'approssimazione Normale per confrontare i risultati con quanto trovato nei punti precedenti. La regione critica, basata sul supporto della variabile casuale X, è pari a:

$$C' = \left\{\underline{X} : \overline{X} > z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{S^2}{n}} + \mu\right\} = \left\{\underline{X} : \overline{X} > 1.96\sqrt{\frac{2.4}{5}} + 10\right\} = \left\{\underline{X} : \overline{X} > 11.36\right\}.$$

Essendo $\overline{x} = 11.4 > 11.36 \Longrightarrow \overline{x} \in C$, l'ipotesi nulla viene rifiutata, differentemente da quanto ottenuto nel punto 2. La potenza del test, usando l'approssimazione precedente, risulta essere:

$$\begin{aligned}1 - \beta &= \Pr(\text{rifiuto } \mathrm{H}_0|\mathrm{H}_1) = \Pr(\overline{X} \in C|\mathrm{H}_1) = \\ &= \Pr\left(Z > \frac{11.36 - \mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}}\middle|\mathrm{H}_1\right) = \Pr\left(Z > \frac{11.36 - 12}{\sqrt{\frac{2.4}{5}}}\middle|\mathrm{H}_1\right) = \\ &= 1 - \Pr\left(Z \leq \frac{11.36 - 12}{\sqrt{\frac{2.4}{5}}}\middle|\mathrm{H}_1\right) = 1 - \Phi(-0.92) = 1 - 0.17 = 0.83,\end{aligned}$$

Il test ottenuto usando l'approssimazione Normale risulta avere potenza maggiore rispetto alla potenza del test esatto, calcolata al punto 4.

Esercizio 3

La produzione dei regali di Natale ha stressato eccessivamente i macchinari del polo nord. Babbo Natale ha deciso di acquistare un nuovo macchinario per produrre spade di acciaio di Valyria. Sia:

$$\underline{x} = (39.5, 39.6, 39.8, 40.1, 40.4, 40.5)$$

un campione i.i.d. estratto casualmente di lunghezze delle spade di acciaio di Valyria prodotte. Assumendo che il fenomeno segua una legge di distribuzione Normale, si è interessati a verificare se la variabilità della produzione del nuovo macchinario è conforme alla variabilità della produzione del vecchio macchinario, $\sigma^2 = 0.2$.

1. Specificare il parametro di interesse ed il sistema di ipotesi necessario;
2. Verificare l'ipotesi nulla specificata al punto precedente, ad un livello di significatività di $\alpha = 0.05$, identificando la regione critica;
3. supponendo un'ipotesi alternativa puntuale $\sigma^2 = 0.8$, calcolare la potenza del test;

Soluzione

Sia $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Siano inoltre $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. a X, con $n = 6$. Trattasi di un problema di verifica di ipotesi per σ^2.

1. Il parametro di interesse è la varianza della lunghezza delle spade di acciaio di Valyria prodotte. Assumendo che il fenomeno segua una legge di distribuzione Normale, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, interesse dello studio è sottoporre a verifica se $Var(X) = \sigma^2$ è conforme con gli standard del vecchio macchinario. Volendosi cautelare dal poter produrre pezzi meno precisi, Babbo Natale decide di verificare il sistema di ipotesi $\mathrm{H}_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 = 0.2$ contro $\mathrm{H}_1 : \sigma^2 > 0.2$.
2. Posto che $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, in accordo con il sistema di ipotesi specificato nel punto precedente, è possibile ricondursi alla statistica test per la varianza di una normale, con media ignota:

   $$D = \frac{S^2}{\sigma_0^2}.$$

   Valori della quantità D prossimi ad 1 portano a non rifiutare l'ipotesi nulla, la varianza campionaria corretta non è significativamente differente dalla varianza ipotizzata. Viceversa, valori della quantità D che si discostano dal valore 1 non supportano l'ipotesi nulla. In particolare, se $D > 1$ allora la varianza campionaria risulta essere maggiore della varianza ipotizzata. Assumendo vera l'ipotesi nulla, $\mathrm{H}_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 = 0.2$, è possibile ricavare una regione critica per la statistica test D, basata sulla distribuzione Chi-Quadrato:

   $$D' = (n-1)D = (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \overset{\mathrm{H}_0}{=} (n-1)\frac{S^2}{\sigma_0^2} \overset{\mathrm{H}_0}{\sim} \chi^2_{n-1}.$$

   La regione critica di interesse, ad un livello di significatività $\alpha = 0.05$, è data da tutti i valori di D' tali per cui D risulta essere significativamente maggiore di 1, quindi:

   $$C = \{\underline{X} : D' > \chi^2_{n-1;1-\alpha}\} \overset{\mathrm{H}_0}{=} \{\underline{X} : D' > 11.07\}$$

   dove 11.07 è il quantile di ordine $1 - \alpha = 0.95$ della variabile casuale χ^2_5. Sostituendo nella statistica test D' le opportune stime, si ottiene la statistica test osservata:

   $$d'_{oss} = (n-1)\frac{s^2}{\sigma_0^2} = 5 \times \frac{0.17}{0.2} = 4.25$$

   ed essendo $4.25 < 11.07 \Longrightarrow d'_{oss} \in \overline{C}$, non viene rifiutata l'ipotesi nulla, la variabilità della lunghezza delle spade in acciaio di Valyria prodotte dal nuovo macchinario non è significativamente differente dalla variabilità della lunghezza nella produzione del vecchio macchinario.

Analogamente è possibile definire la regione critica basata sul supporto della statistica test D:

$$C = \left\{ \underline{X} : D > \frac{\chi^2_{n-1;1-\alpha}}{n-1} \right\} \stackrel{\mathrm{H}_0}{=} \{\underline{X} : D > 2.21\},$$

e la regione critica basata sul supporto della variabile casuale descritta dallo stimatore S^2:

$$C = \left\{ \underline{X} : S^2 > \sigma_0^2 \frac{\chi^2_{n-1;1-\alpha}}{n-1} \right\} \stackrel{\mathrm{H}_0}{=} \{\underline{X} : S^2 > 0.44\}.$$

3. Supponendo un'ipotesi alternativa puntuale $\sigma^2 = 0.8$, la potenza del test risulta essere:

$$\begin{aligned}
1 - \beta &= \Pr(\text{rifiuto } \mathrm{H}_0 | \mathrm{H}_1) = \Pr(S^2 \in C | \mathrm{H}_1) = \\
&= \Pr(S^2 > 0.44 | \mathrm{H}_1) = \Pr\left((n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} > (n-1)\frac{0.44}{\sigma^2} \middle| \mathrm{H}_1 \right) \stackrel{\mathrm{H}_1}{=} \\
&= \Pr\left(\chi^2_5 > 5\frac{0.44}{0.8} \middle| \mathrm{H}_1 \right) = 1 - \Pr(\chi^2_5 \leq 2.75 | \mathrm{H}_1) = 0.74
\end{aligned}$$