# Statistica II - Esercitazione 3

# Stima puntuale: metodi generali per la costruzione di stimatori

Esistono diversi metodi generali per la costruzione di stimatori, ma in questo corso ci occuperemo solo dei più rilevanti.

## Stima di Massima Verosimiglianza

Sia $X \sim \varphi_X(x;\theta)$, $\theta \in \Theta$, la variabile aleatoria che identifichi la popolazione statistica di riferimento e $(X_1, \ldots, X_n)$ un campione casuale a componenti i.i.d. a $X$; sia inoltre $(x_1, \ldots, x_n)$ la realizzazione campionaria osservata.

### La funzione di verosimiglianza

La funzione $L : \Theta \to \mathrm{R}^+ \cup \{0\}$ tale che $\forall\theta \in \Theta$:

$$L(\theta) = L(\theta; (x_1, \ldots, x_n)) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(x_i;\theta)$$

è detta funzione di verosimiglianza del campione $(x_1, \ldots, x_n)$*.
Ad esempio, nel 1898 il Barone Bortkiewicz pubblicò uno studio sui decessi di soldati dell'esercito prussiano in seguito a calcio di cavallo. La seguente tabella mostra la distribuzione di frequenza del numero di decessi dovuti a calcio di cavallo:

| numero di decessi | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | $\geq 5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| frequenza | 109 | 65 | 22 | 3 | 1 | 0 |

Questi dati possono essere pensati come la realizzazione delle v.c. $X_1, \ldots, X_{200}$, indipendenti e identicamente distribuite a $X \sim$ Poisson($\lambda$), $\lambda > 0$. La funzione di verosimiglianza è pari a:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(x_i;\lambda) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{4.6 \cdot 10^{11}} e^{-200\lambda} \lambda^{122}$$

ed è massima per

$$\hat{\lambda} = \bar{x} = \frac{122}{200} = 0.61$$

Naturalmente, anche se ogni valore di $L(\theta)$ è determinato essenzialmente da una funzione di probabilità , e a dispetto dell'apparenza grafica della Figura, la funzione di verosimiglianza non è una funzione di probabilità .

### Stima di Massima Verosimiglianza

Il valore $\hat{\theta} \in \Theta$ che rende massima la funzione $L(\theta)$ sullo spazio parametrico $\Theta$, cioè tale per cui :

$$L(\hat{\theta}) = \sup_{\theta\in\Theta} L(\theta)$$

è detto stima di massima verosimiglianza di $\theta$.

In molti casi, $\hat{\theta}$ può essere determinata per via analitica notando che, essendo il logaritmo in base $e$ funzione monotona strettamente crescente, massimizzare rispetto a $\theta$ la funzione di verosimiglianza è del tutto equivalente a massimizzare rispetto a $\theta$ la funzione di log-verosimiglianza

$$l(\theta) = \ln L(\theta);$$

la stima di massima verosimiglianza di $\theta$ può dunque essere individuata risolvendo rispetto a $\theta$ l'equazione di verosimiglianza:

$$l'(\theta) = 0$$

ed assicurandosi che la soluzione trovata sia punto di massimo globale per $l(\theta)$. A tal proposito, si ricordi che:

$$l''(\theta)|_{\theta=\hat{\theta}} < 0$$

è condizione sufficiente affinché la soluzione trovata sia punto di massimo assoluto per $l(\theta)$.
Nei casi in cui la presente procedura non sia applicabile, $\hat{\theta}$ deve essere necessariamente ricercata attraverso lo studio diretto della funzione $L(\theta)$.
In ogni caso:

- non è detto che la stima di massima verosimiglianza esista;
- se vi sono diversi valori di $\theta$ che rendono massima $L(\theta)$, allora la stima di massima verosimiglianza non è unica;
- può succedere che la stima di massima verosimiglianza $\hat{\theta}$ non è esprimibile esplicitamente come funzione dei dati campionari, ovvero che lo stimatore non è rappresentabile esplicitamente (ovvero non è rappresentabile come ad esempio $\hat{\theta} = \bar{X}_n$). In questo caso è necessario ottenere la stima di massima verosimiglianza per via numerica, per il valore osservato di $x_1, \ldots, x_n$.

## Esercizio 1

*Siano* $X_1, \dots, X_n$ *i.i.d. a* $X \sim \text{Geom}(\theta)$, $\theta \in (0,1)$. *Si determini la stima di massima verosimiglianza di* $\theta$.

## Soluzione

Sia $X \sim \text{Geom}(\theta)$, $\theta \in (0,1)$ ignoto; siano inoltre $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. a $X$. Trattasi di un problema di stima puntuale per $\theta$.

Le funzioni di verosimiglianza e di log-verosimiglianza del campione $(x_1, \dots, x_n)$ hanno rispettivamente espressioni:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(x_i; \theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta(1-\theta)^{x_i} = \theta^n (1-\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i},$$

$$l(\theta) = \log L(\theta) = n \log \theta + \left( \sum_{i=1}^{n} x_i \right) \log(1-\theta), \qquad \theta \in (0,1).$$

L'equazione di verosimiglianza risulta dunque:

$$l'(\theta) = \frac{n}{\theta} - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{1-\theta} = 0;$$

essa ammette come unica soluzione:

$$\hat{\theta} = \frac{n}{n + \sum_{i=1}^n x_i} = \frac{1}{1+\bar{x}}.$$

Poiché:

$$l''(\theta) = -\frac{n}{\theta^2} - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{(1-\theta)^2} < 0, \qquad \forall \theta \in (0,1),$$

$\hat{\theta}$

è punto di massimo assoluto di $l(\theta)$, dunque è stima di massima verosimiglianza di $\theta$.

# Esercizio 2

*Siano* $X_1, \ldots, X_n$ *i.i.d. a* $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ *con* $\mu \in \mathrm{R}$ *nota. Si determini la stima di massima verosimiglianza di* $\sigma^2 \in \mathrm{R}^+$. Si concluda in merito all'efficienza dello stimatore ottenuto.

# Soluzione

Sia $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathrm{R}$ nota, $\sigma^2 \in \mathrm{R}^+$ ignota; siano inoltre $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. a $X$. Trattasi di un problema di stima puntuale per $\sigma^2$.

Si ponga per semplicità $\sigma^2 = \theta$; la funzione di densità di probabilità di $X$ risulta dunque come segue:

$$\varphi_X(x; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\theta}\right\}, \qquad x \in \mathrm{R}, \theta > 0.$$

Le funzioni di verosimiglianza e di log-verosimiglianza del campione $(x_1, \ldots, x_n)$ hanno rispettivamente espressioni:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(x_i; \theta) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \theta^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{2\theta}\right\},$$

$$l(\theta) = \log L(\theta) = -\frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{n}{2}\log\theta - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\theta},$$

$\theta > 0$. L'equazione di verosimiglianza risulta dunque:

$$l'(\theta) = -\frac{n}{2\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\theta^2} = 0;$$

essa ammette come unica soluzione:

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n}.$$

Poichè:

$$l''(\theta) = \frac{n}{2\theta^2} - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\theta^3},$$

si ha che:

$$l''(\theta)\big|_{\theta=\hat{\theta}} = -\frac{n^3}{2\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right]^2} < 0;$$

pertanto, $\hat{\theta}$ è punto di massimo assoluto di $l(\theta)$, dunque è stima di massima verosimiglianza di $\theta$.
Lo stimatore

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \frac{\theta}{n}\chi^2_n$$

è non distorto per $\theta$ ed inoltre

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}) = \frac{2\theta^2}{n}.$$

L'informazione attesa di Fisher per una singola osservazione è

$$\mathcal{I}(\theta) = \mathrm{E}\left\{\left[\frac{n}{2\theta^2}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 - \theta\right)\right]^2\right\} = \frac{1}{2\theta^2}$$

quindi il limite inferiore di Cramér-Rao è $(2\theta^2)/n$. Segue che $\hat{\theta}$ è stimatore efficiente per $\theta$.

# Esercizio 3

*Si conduca una prova nella variabile aleatoria discreta $X$ a valori in $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ e con funzione di probabilità $\varphi_X(x; \theta)$ indicizzata da $\theta \in \{1, 2, 3\}$ tale che:*

| $x$ | $\varphi_X(x;1)$ | $\varphi_X(x;2)$ | $\varphi_X(x;3)$ |
|---|---|---|---|
| *0* | *1/3* | *1/4* | *0* |
| *1* | *1/3* | *1/4* | *0* |
| *2* | *0* | *1/4* | *1/4* |
| *3* | *1/6* | *1/4* | *1/2* |
| *4* | *1/6* | *0* | *1/4* |

*Si determini la stima di massima verosimiglianza di $\theta$.*

# Soluzione

Sia $X \sim \varphi_X(x; \theta)$ proposta in tabella $\forall \theta \in \{1, 2, 3\}$ ignoto. Trattasi di un problema di stima puntuale per $\theta$.

Per ogni valore $x$ di $X$ osservato, la stima di massima verosimiglianza di $\theta$ è data dal valore di $\theta$ che massimizzi $\varphi_X(x; \theta)$, ovvero:

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\hat{\theta}$ | 1 | 1 | 2 oppure 3 | 3 | 3 |

Si noti che se $x = 2$ la stima di massima verosimiglianza di $\theta$ non è unica.

# Esercizio 4

*Siano $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. a $X \sim N(\theta, 1)$. Si determini la stima di verosimiglianza di $\theta$, supponendo che:*

1. $\Theta \equiv \mathrm{R}$;
2. $\Theta \equiv [0, \infty)$.

# Soluzione

Sia $X \sim N(\theta, 1)$, $\theta \in \Theta$ ignoto; siano inoltre $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. a $X$. Trattasi di un problema di stima puntuale per $\theta$.

1. La funzione di verosimiglianza di un campione casuale semplice $(x_1, \dots, x_n)$ in $X \sim N(\theta, 1)$ ha espressione:

$$L(\theta) = \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}}_{c} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2\right\}, \qquad \theta \in \mathrm{R}.$$

Essendo $c > 0$ non dipendente da $\theta$, dunque ininfluente ai fini della risoluzione del problema di massimizzazione di $L(\theta)$ rispetto a $\theta$ e la funzione esponenziale monotona strettamente crescente, il punto di massimo di $L(\theta)$ può essere ottenuto massimizzando rispetto $\theta \in \mathrm{R}$:

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2 = -\frac{n}{2}(m_2 - 2\theta\bar{x} + \theta^2),$$

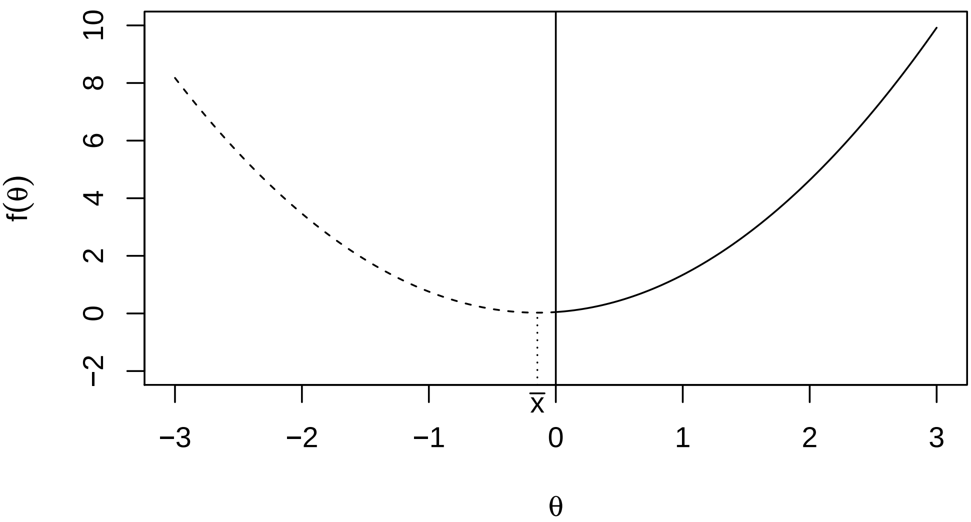
o, equivalentemente, minimizzando rispetto $\theta \in \mathrm{R}$:

$$f(\theta) = m_2 - 2\theta\bar{x} + \theta^2,$$

ove $m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ sia il momento secondo campionario di $X$.
Si noti che $f(\theta) = a\theta^2 + b\theta + c$ con $a = 1$, $b = -2\bar{x}$ e $c = m_2$ è l'equazione di una parabola avente concavità rivolta verso l'alto e asse di equazione:

$$\theta = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-2\bar{x})}{2 \cdot 1} = \bar{x};$$

pertanto, $f(\theta)$ è minima per $\hat{\theta} = \bar{x}$, che identifica la stima di massima verosimiglianza di $\theta$.



2. Supponendo $\Theta \equiv [0, \infty)$, si rende necessario minimizzare la parabola $f(\theta)$ sull'insieme dei reali non negativi. Qualora $\bar{x} \geq 0$, la stima di massima verosimiglianza di $\theta$ rimane immutata rispetto al caso precedente, mentre, qualora negativa, $\bar{x}$ non è un valore ammissibile per $\theta$ e il minimo di $f(\theta)$ si ha in corrispondenza di $\theta = 0$ (come risulta evidente in Figura).

   In definitiva:

$$\hat{\theta} = \begin{cases} \bar{x} & \text{se } \bar{x} \geq 0 \\ 0 & \text{se } \bar{x} < 0 \end{cases} .$$

# Esercizio 5

*Sia* $X \sim \text{Bernoulli}\left(\frac{1}{1+e^\theta}\right), \quad x \in \{0,1\}, \theta \in \text{R}$. *Si determini la stima di massima verosimiglianza per* $x = 1$.

# Soluzione

La funzione di verosimiglianza per $\theta$ risulta

$$L(\theta) = L(\theta; x) = \left(\frac{1}{1+e^\theta}\right)^x \left(1 - \frac{1}{1+e^\theta}\right)^{1-x}$$

quindi per $x = 1$ abbiamo

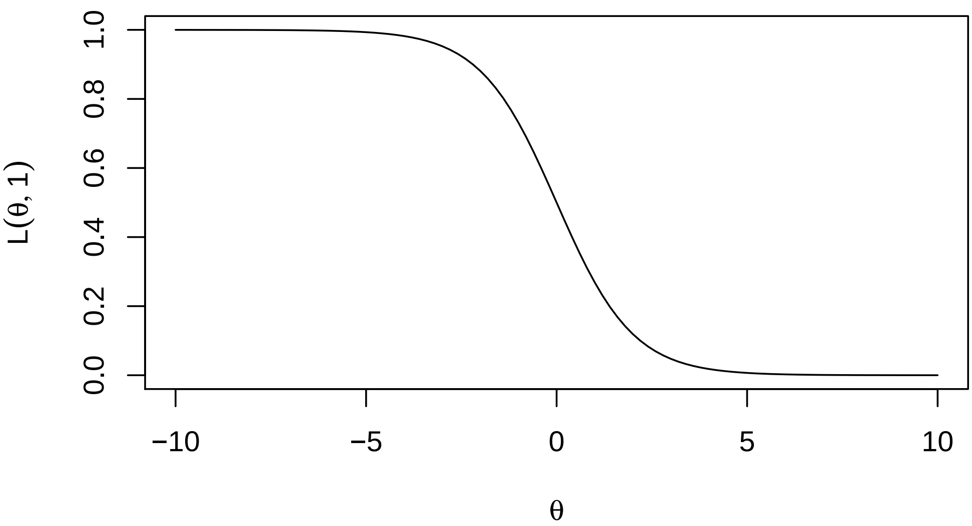
$$L(\theta; 1) = \frac{1}{1+e^\theta}$$

.

La funzione di verosimiglianza è in questo caso funzione strettamente decrescente, ovvero se $\theta_1 < \theta_2$, allora $L(\theta_1; 1) > L(\theta_2; 1)$. Infatti, sia $\theta_2 = \theta_1 + c$, $c > 0$:

$$\frac{1}{1+e^{\theta_1}} > \frac{1}{e^{\theta_1} \underbrace{e^c}_{>1}}$$

Segue che la stima di massima verosimiglianza non esiste, ovvero $\hat{\theta} = -\infty$, come evidenziato in figura:



## Esercizio 6

*Siano $Y_1, \ldots, Y_n$ v.c. mutualmente indipendenti con $Y_i \sim N(\theta x_i, 1)$, con $x_i$ costanti note, $i = 1, \ldots, n$. Si determini lo stimatore di massima verosimiglianza per $\theta$.*

## Soluzione

La funzione di verosimiglianza è data da

$$\begin{aligned}
L(\theta) &= L(\theta; x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(y_i - \theta x_i)^2\right\} \\
&= (2\pi)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \theta x_i)^2\right\} \\
&= (2\pi)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 + \theta^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\theta \sum_{i=1}^{n} y_i x_i\right)\right\}
\end{aligned}$$

quindi la funzione di log-verosimiglianza è pari a

$$l(\theta) = -\frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{\theta^2}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \theta \sum_{i=1}^{n} y_i x_i.$$

L'equazione di verosimiglianza risulta

$$l'(\theta) = -2\theta\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = 0;$$

essa ammette come unica soluzione:

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Poichè

$$l''(\theta) = -\sum_{i=1}^{n} x_i^2 < 0$$

è punto di massimo assoluto di $l(\theta)$, dunque $\hat{\theta}$ è stima di massima verosimiglianza per $\theta$.

## Esercizio 7

*Sia $(X_1, \ldots, X_n)$ un campione casuale semplice in $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.*

1. *Si determini la stima di massima verosimiglianza di $\left(\mu, \sigma^2\right)$;*
2. *si confronti lo stimatore di $\sigma^2$ determinato al punto 1 con $S^2$ in termini di efficienza relativa.*

## Soluzione

Sia $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\left(\mu, \sigma^2\right) \in \left(\mathrm{R}, \mathrm{R}^+\right)$ ignoto; siano inoltre $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. a $X$. Trattasi di un problema di stima puntuale per $\left(\mu, \sigma^2\right)$.

In generale e in analogia al caso unidimensionale, la stima di massima verosimiglianza di un vettore di parametri $\underline{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_r) \in \Theta \subseteq \mathrm{R}^r$ è in molti casi ottenibile tramite la risoluzione del sistema di $r$ equazioni di verosimiglianza:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j} \log L(\underline{\theta}) = 0, \qquad \forall j = 1, \ldots, r$$

e la verifica del fatto che la matrice hessiana della funzione di log-verosimiglianza valutata in corrispondenza della soluzione ottenuta,

$$H(\hat{\theta}) = \left[\frac{\partial^2 \log L(\underline{\theta})}{\partial \theta_j \partial \theta_p}\right]_{\underline{\theta}=\underline{\hat{\theta}}}, \qquad j, p = 1, \ldots, r$$

sia definita negativa, ossia tale che i relativi autovalori siano negativi.

1. Ciò premesso, le funzioni di verosimiglianza e di log-verosimiglianza del campione $(x_1, \ldots, x_n)$ hanno rispettivamente espressioni:

$$L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(x_i; \mu, \sigma^2) = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2},$$

$$\begin{aligned}
\ln L(\mu, \sigma^2) &= -\frac{n}{2} \ln 2\pi\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 = \\
&= -\frac{n}{2} \ln 2\pi\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\mu \sum_{i=1}^{n} x_i + n\mu^2\right) = \\
&= -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{n}{2\sigma^2}(m_2 - 2\mu\bar{x} + \mu^2),
\end{aligned}$$

$(\mu, \sigma^2) \in (\mathrm{R}, \mathrm{R}^+)$, ove $m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ sia il momento secondo campionario di $X$. Il sistema di equazioni di verosimiglianza risulta dunque:

$$\begin{cases}
\frac{\partial}{\partial \mu} \ln L(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{\sigma^2}(-\bar{x} + \mu) = 0 \\
\frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ln L(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{n}{2\sigma^4}(m_2 - 2\mu\bar{x} + \mu^2) = 0
\end{cases};$$

dalla prima equazione si ottiene l'unica soluzione per $\mu$:

$$\hat{\mu} = \bar{x},$$

che, sostituita nella seconda equazione, porta all'ottenimento dell'unica soluzione per $\sigma^2$:

$$\hat{\sigma}^2 = m_2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2.$$

A questo punto, per verificare che la coppia $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$ sia punto di massimo globale per la funzione di verosimiglianza, ossia stima di massima verosimiglianza di $(\mu, \sigma^2)$, si noti che, essendo la media aritmetica il centro di ordine 2, se $\mu \neq \bar{x}$:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 > \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2;$$

pertanto, essendo la funzione esponenziale monotona strettamente crescente, risulta, $\forall\sigma^2 \in \mathrm{R}^+$:

$$L(\bar{x}, \sigma^2) \geq L(\mu, \sigma^2).$$

La risoluzione del problema in oggetto si riduce quindi nella verifica del fatto che $l(\hat{\mu}, \sigma^2)$ raggiunga il proprio massimo globale in $\sigma^2 = \hat{\sigma}^2$, ossia $\frac{\partial^2}{\partial(\sigma^2)^2} l(\hat{\mu}, \sigma^2)|_{\sigma^2=\hat{\sigma}^2} < 0$.
Alternativamente, si rende necessario verificare che la matrice hessiana della funzione di log-verosimiglianza valutata in corrispondenza della soluzione ottenuta sia definita negativa. A tal proposito, le derivate seconde e le derivate seconde miste della funzione di log-verosimiglianza valutate nella soluzione ottenuta per $(\mu, \sigma^2)$ risultano:

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial\mu^2} \ln L(\mu, \sigma^2)\right|_{(\mu,\sigma^2)=(\hat{\mu},\hat{\sigma}^2)} = -\frac{n}{\hat{\sigma}^2},$$

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial^2}{\partial(\sigma^2)^2} \ln L(\mu, \sigma^2)\right|_{(\mu,\sigma^2)=(\hat{\mu},\hat{\sigma}^2)} &= \frac{n}{2\hat{\sigma}^4} - \frac{n}{\hat{\sigma}^6}(m_2 - 2\bar{x}\hat{\mu} + \hat{\mu}^2) = \\
&= \frac{n}{2\hat{\sigma}^4} - \frac{n}{\hat{\sigma}^6}\hat{\sigma}^2 = \\
&= -\frac{n}{2\hat{\sigma}^4},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial^2}{\partial\mu\partial\sigma^2} \ln L(\mu, \sigma^2)\right|_{(\mu,\sigma^2)=(\hat{\mu},\hat{\sigma}^2)} &= \left.\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2\partial\mu} \ln L(\mu, \sigma^2)\right|_{(\mu,\sigma^2)=(\hat{\mu},\hat{\sigma}^2)} = \\
&= \frac{n(\hat{\mu} - \bar{x})}{\hat{\sigma}^4} = 0
\end{aligned}$$

e la matrice hessiana in questione risulta:

$$\begin{aligned}
H(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2) &= \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial^2}{\partial\mu^2} \ln L(\mu, \sigma^2) & \frac{\partial^2}{\partial\mu\partial\sigma^2} \ln L(\mu, \sigma^2) \\ \\ \frac{\partial^2}{\partial\sigma^2\partial\mu} \ln L(\mu, \sigma^2) & \frac{\partial^2}{\partial(\sigma^2)^2} \ln L(\mu, \sigma^2) \end{array}\right]_{(\mu,\sigma^2)=(\hat{\mu},\hat{\sigma}^2)} = \\
&= \left[\begin{array}{cc} -\frac{n}{\hat{\sigma}^2} & 0 \\ \\ 0 & -\frac{n}{2\hat{\sigma}^4} \end{array}\right];
\end{aligned}$$

essendo matrice di tipo diagonale, $H(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$ presenta autovalori coincidenti con i relativi elementi diagonali, che sono negativi: ciò ne garantisce la definita negatività . In definitiva:

$$(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2) = \left(\bar{x}, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right)$$

è stima di massima verosimiglianza di $(\mu, \sigma^2)$.

2. Lo stimatore di massima verosimiglianza di $\sigma^2$ è distorto per $\sigma^2$; infatti, essendo:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{n-1}{n}\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{n-1}{n}S^2,$$

si ha che:

$$\mathrm{E}(\hat{\sigma}^2) = \frac{n-1}{n}\mathrm{E}(S^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2, \qquad \forall\sigma^2 \in \mathrm{R}^+.$$

Inoltre, essendo $S^2 = \sigma^2\frac{\chi^2_{n-1}}{n-1}$, dunque $\hat{\sigma}^2 = \frac{n-1}{n}S^2 = \sigma^2\frac{\chi^2_{n-1}}{n}$, risultano:

$$\mathrm{MSE}\left(\hat{\sigma}^2\right) = \mathrm{Var}\left(\hat{\sigma}^2\right) + [\mathrm{B}\left(\hat{\sigma}^2\right)]^2 = \frac{2\,(n-1)}{n^2}\sigma^4 + \left(-\frac{\sigma^2}{n}\right)^2 = \frac{2n-1}{n^2}\sigma^4,$$

$$\mathrm{MSE}\left(S^2\right) = \mathrm{Var}\left(S^2\right) = \frac{2}{n-1}\sigma^4;$$

pertanto, si ha che:

$$\frac{\mathrm{MSE}\left(\hat{\sigma}^2\right)}{\mathrm{MSE}\left(S^2\right)} < 1, \qquad \forall n \in \mathrm{N}, \forall\sigma^2 \in \mathrm{R}^+,$$

ossia, nonostante distorto per $\sigma^2$, $\hat{\sigma}^2$ è da preferirsi a $S^2$ in termini di errore quadratico medio.

# Esercizio 8

Sia $X$ *con supporto in* $(0,1)$ *e legge di distribuzione* $\varphi_X(x;\theta)$ *indicizzata da* $\theta \in \{0,1\}$ *tale che:*

$$X \sim \begin{cases} U(0,1) & \text{se } \theta = 0 \\ \varphi_X(x;1) = \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{se } \theta = 1 \end{cases}$$

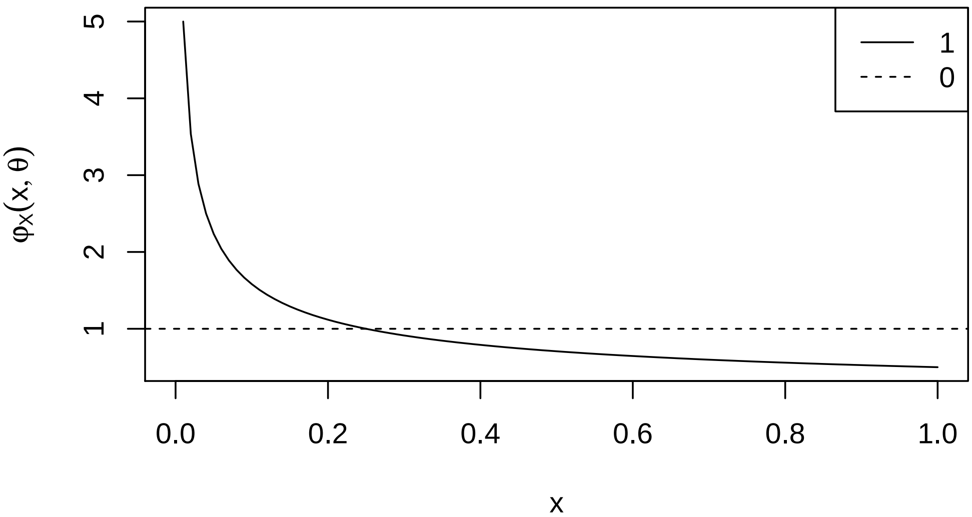
*Si supponga di aver osservato* $x = 0.2$. *Si determini la stima di massima verosimiglianza di* $\theta$. *Infine, siano* $X_1, \dots, X_n$ *i.i.d. a* $X$; *si determini la stima di massima verosimiglianza di* $\theta$.

# Soluzione

Sia $X \sim \varphi_X(x;\theta)$ sopra esplicitata, $x \in (0,1)$, $\theta \in \{0,1\}$ ignoto; siano inoltre $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. a $X$. Trattasi di un problema di stima puntuale per $\theta$.

La funzione di verosimiglianza di $(x_1, \dots, x_n)$ ha espressione:

$$L(\theta) = L(\theta; x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \theta = 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{se } \theta = 1 \end{cases}.$$




Dall'andamento di $\varphi_X(x;\theta)$ proposto $\forall \theta \in \{0,1\}$ in Figura, risulta evidente che $\varphi_X(x;0) \geq \varphi_X(x;1)$ $\forall x \in \left[\frac{1}{4}, 1\right)$.
Quindi per $x = 0.2$, $\hat{\theta} = 1$.
La funzione di verosimiglianza di $(x_1, \dots, x_n)$ ha espressione:

$$L(\theta) = L(\theta; x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{se } \theta = 0 \\ \prod_{i=1}^n \frac{1}{2\sqrt{x_i}} & \text{se } \theta = 1 \end{cases}.$$

Pertanto, la stima di massima verosimiglianza di $\theta$ risulta:

$$\hat{\theta} = \begin{cases} 0 & \text{se } \prod_{i=1}^n \frac{1}{2\sqrt{x_i}} \leq 1 \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

# Esercizio 9

*Siano $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. a $X \sim U(\theta, 2\theta)$, $\theta > 0$. Si determini lo stimatore di massima verosimiglianza di $\theta$.*

# Soluzione

Sia $X \sim U(\theta, 2\theta)$, $\theta > 0$ ignoto; siano inoltre $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. a $X$. Trattasi di un problema di stima puntuale per $\theta$.

La variabile casuale $X$ presenta funzione di densità di probabilità :

$$\varphi_X(x;\theta) = \frac{1}{\theta} I_{(\theta,2\theta)}(x),$$

ove:

$$I_{(\theta,2\theta)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (\theta, 2\theta) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

sia la funzione indicatrice dell'intervallo reale $(\theta, 2\theta)$, $\theta > 0$; a tal proposito, si noti che:

$$\theta < x < 2\theta \Leftrightarrow \frac{x}{2} < \theta < x,$$

quindi:

$$I_{(\theta,2\theta)}(x) = 1 \Leftrightarrow I_{\left(\frac{x}{2},x\right)}(\theta) = 1.$$

La funzione di verosimiglianza del campione $(x_1, \dots, x_n)$ ha dunque espressione:

$$L(\theta) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n \prod_{i=1}^n I_{(\theta,2\theta)}(x_i) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n \prod_{i=1}^n I_{\left(\frac{x_i}{2},x_i\right)}(\theta),$$

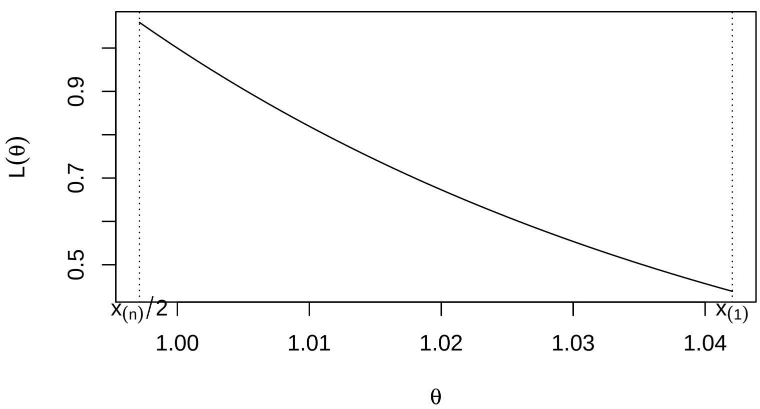
ove:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n I_{\left(\frac{x_i}{2},x_i\right)}(\theta) = 1 \quad & \Leftrightarrow \quad I_{\left(\frac{x_i}{2},x_i\right)}(\theta) = 1, \forall i = 1, \dots, n \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \theta > \frac{x_i}{2} & \forall i = 1, \dots, n \\ \theta < x_i & \forall i = 1, \dots, n \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \theta > \frac{1}{2}\max\{x_1, \dots, x_n\} = \frac{x_{(n)}}{2} \\ \theta < \min\{x_1, \dots, x_n\} = x_{(1)} \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \quad \frac{x_{(n)}}{2} < \theta < x_{(1)}, \end{aligned}$$

quindi:

$$L(\theta) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n I_{\left(\frac{x_{(n)}}{2},x_{(1)}\right)}(\theta).$$

Come risulta evidente dalla Figura, $\theta^{-n}$ è funzione monotona strettamente decrescente in $\theta \in \left(\frac{x_{(n)}}{2}, x_{(1)}\right)$:



dunque:

$$\hat{\Theta} = \frac{X_{(n)}}{2}$$

è stimatore di massima verosimiglianza di $\theta$.

# Esercizio 10

*Si supponga di aver effettuato $n = 3$ prove indipendenti nella variabile casuale $X \sim \text{Bernoulli}(\theta)$ e di essere pervenuti alla terna campionaria $(x_1, x_2, x_3) = (0, 1, 0)$. Si determini la stima di massima verosimiglianza di $\theta$ supponendo che:*

1. $\Theta = \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$;
2. $\Theta \equiv (0, 1)$.

# Soluzione

Sia $X \sim \text{Bernoulli}(\theta)$, $\theta \in \Theta$ ignoto; siano inoltre $X_1, X_2, X_3$ i.i.d. a $X$. Trattasi di un problema di stima puntuale per $\theta$.

La funzione di verosimiglianza del generico campione casuale semplice $(x_1, x_2, x_3)$ di ampiezza $n = 3$ in $X$ presenta espressione:

$$L(\theta; (x_1, x_2, x_3)) = \theta^{\sum_{i=1}^{3} x_i} (1 - \theta)^{3 - \sum_{i=1}^{3} x_i};$$

qualora $(x_1, x_2, x_3) = (0, 1, 0)$, essa si particolarizza dunque in:

$$L(\theta; (0, 1, 0)) = \theta(1 - \theta)^2.$$

1. Nel caso in cui $\Theta = \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$, la stima di massima verosimiglianza di $\theta$ si identifica nel valore che tra i tre costituenti $\Theta$ massimizzi $L(\theta)$; risulta:

| $\theta$ | $L(\theta; (0, 1, 0)) = \theta(1 - \theta)^2$ |
|---|---|
| 1/4 | 0.141 |
| 1/3 | 0.148 |
| 1/2 | 0.125 |

   Pertanto $\hat{\theta} = \frac{1}{3}$ è stima di massima verosimiglianza di $\theta$.

2. Nel caso in cui $\Theta \equiv (0, 1)$, la stima di massima verosimiglianza di $\theta$ può essere ottenuta ricercando per via analitica il punto di massimo di $L(\theta)$, dunque di $l(\theta)$, avente espressione:

$$l(\theta) = \ln \theta + 2 \ln(1 - \theta).$$

   L'equazione di verosimiglianza risulta dunque:

$$l'(\theta) = \frac{1}{\theta} - \frac{2}{1 - \theta} = 0;$$

   essa ammette come unica soluzione:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{3}.$$

   Poichè:

$$l''(\theta) = -\frac{1}{\theta^2} - \frac{2}{(1 - \theta)^2} < 0, \qquad \forall \theta \in (0, 1),$$

   $\hat{\theta} = \frac{1}{3}$ è punto di massimo assoluto di $l(\theta)$, dunque è stima di massima verosimiglianza di $\theta$.

# Esercizio 11

*Siano* $X_1, \ldots, X_n$ *i.i.d. a* $X$ *avente funzione di densità di probabilità :*

$$\varphi_X(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x - \mu)^2}, \qquad x \in \mathrm{R}^+, \mu \in \mathrm{R}$$

*e* $\sigma > 0$ *nota. Si determini la stima di massima verosimiglianza di* $\mu$*.*

# Soluzione

Sia $X \sim \varphi_X(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x - \mu)^2}$, $x > 0$, $\sigma > 0$ nota, $\mu \in \mathrm{R}$ ignota; siano inoltre $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. a $X$. Trattasi di un problema di stima puntuale per $\mu$.
Le funzioni di verosimiglianza e di log-verosimiglianza di $(x_1, \ldots, x_n)$ hanno rispettivamente espressioni:

$$\begin{aligned} L(\mu) &= \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}(x_i; \mu, \sigma) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x_i - \mu)^2} = \\ &= \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)\sigma^n (2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (\ln x_i - \mu)^2}, \end{aligned}$$

$$l(\mu) = \log L(\mu) = -\log\left(\prod_{i=1}^n x_i\right) - n\log\sigma - \frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (\ln x_i - \mu)^2,$$

$\mu \in \mathrm{R}$. L'equazione di verosimiglianza risulta dunque:

$$l'(\mu) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n (\ln x_i - \mu) = \frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n \ln x_i - n\mu\right) = 0;$$

essa ammette come unica soluzione:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln x_i.$$

Poichè:

$$l''(\mu) = -\frac{n}{\sigma^2} < 0, \qquad \forall \mu \in \mathrm{R},$$

$\hat{\mu}$ è punto di massimo assoluto di $l(\mu)$, dunque è stima di massima verosimiglianza di $\mu$.