Práctica 1: Lógica proposicional y de primer orden

Comisión: Rodrigo Cossio-Pérez y Leonardo Lattenero

EJERCICIOS JR.

1. Reconocer las funciones del lenguaje e indicar qué casos son proposiciones. Si son proposiciones, indicar su valor de verdad.

   (a) Hoy es martes

   ** Función informativa, es proposición. El valor de verdad dependerá del día.

   (b) ¡Auch!

   ** Función exclamativa, no es una proposición. Notar que gritar "Me acabo de lastimar" sí sería es una proposición.

   (c) Fuí a visitar las playas de la costa de Buenos Aires

   ** Función informativa, es proposición. El valor de verdad depende de la persona que lo lea.

   (d) Vaya a visitar las playas de la costa de Buenos Aires

   ** Función imperativa, no es proposición.

   (e) ¿Venís hoy a clase?

   ** Función interrogativa, no es proposición.

   (f) 5 es múltiplo de 2

   ** Función informativa, es proposición. Su valor es falso ya que no se puede multiplicar a 2 por otro número entero y obtener 5. Más adelante se verá como escribir esto matemáticamente.

   (g) Si estudiás continuamente, siempre vas a aprender cosas nuevas

   ** Función informativa, es proposición. La proposición es verdadera pero tiene detalles discutibles. Para afirmar que para alguna persona es falsa deberiamos pensar en una persona que estudie continuamente pero que no aprenda cosas nuevas.

   (h) $x = 6$ y $x + 4 = 10$

   ** Función informativa, es proposición. Aunque sean simbolos matemáticos, esta proposición se puede leer como "El número x es seis y el número x sumado a 4 es igual a 10". Lo que hace que esto sea una proposición es que estamos afirmando las igualdades, que el número es igual a 6 y que sumado a 4 es igual a 10. La proposición es V.

   (i) $x + 4$

   ** No es proposición. Se puede leer como "El número x más 4" y no se afirma nada al respecto. Es similar al inciso de "En las aulas de la UNQ".

   (j) $x^2 - 4$ no tiene raíces reales

   ** Función afirmativa, es una proposición. Para averiguar su valor de verdad debemos buscar las raíces de la parábola, es decir, $x^2 - 4 = 0$. Mediante la fórmula de Bhaskara (la resolvente cuadrática) podemos obtener que $x = 2$ o $x = -2$. 2 y -2 son números reales. Por lo que la proposición es falsa.

2. Simbolizar las siguientes proposiciones, indicar el diccionario de lenguaje cuando sea necesario y cuando amerite hallar una proposición equivalente considerando las propiedades y definiciones de los operadores.

   (a) La manzana es una fruta y la lechuga una verdura.

   ** $p \wedge q$ con p:"*La manzana es una fruta*" y q:"*La lechuga una verdura*". Un equivalente es $q \wedge p$:"*La lechuga es una verdura y la manzana es una fruta*".

   (b) No está lloviendo.

** $\neg p$ con p:"*Está lloviendo*".

(c) Si estás en la estación Bernal, estás cerca de la UNQ

** $p \rightarrow q$ con p:"*Estás en la estación Bernal*" y q:"*Estás cerca de la UNQ*". Un equivalente es $\neg q \rightarrow \neg p$: "*Si no estás cerca de la UNQ, no estás en la estación de Bernal*".

(d) No es buen deportista pero sus notas son excelentes.

** $\neg p \wedge q$ con p:"*Es buen deportista*" y q:"*Sus notas son excelentes*". Un equivalente es $q \wedge \neg p$:"*Sus notas son excelentes pero no es buen deportista*". Notar que linguisticamente las frases son distintas porque se le da distinta importancia relevancia al orden de las proposiciones, en la primera se rescata que es buen estudiante, en la segunda se condena que es mal deportista. En este caso la lógica no logra mostrar estas diferencias linguisticas. Resolución por Tu Profe en Linea.

(e) El caballo está galopando, o se detuvo y relinchó.

** $p \vee (q \wedge r)$ con p:"*El caballo está galopando*", q:"*El caballo de detuvo*" y r:"*El caballo relinchó*". Resolución por Christian Omar Arias López.

(f) En la UNQ hay wi-fi si y sólo si hay luz.

** $p \leftrightarrow q$ con p:"*En la UNQ hay wi-fi*" y q:"*Hay luz*". Un equivalente es $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$:"*Si en la UNQ hay wi-fi, hay luz.Si hay luz, en la UNQ hay wi-fi*".

(g) Una de dos: o mañana lloverá o estará soleado.

** $p \veebar q$ con p:"*Mañana lloverá*" y q:"*Mañana estará soleado*". Un equivalente es $(p \wedge \neg q) \wedge (\neg p \wedge q)$:"*Mañana lloverá y no estará soleado, o bien, mañana estará soleado y no lloverá*".

(h) La materia se aprueba promocionando los parciales, aprobando el final o dando exitosamente el exámen libre.

** $p \vee q \vee r$ con p:"*La materia se aprueba promocionando los parciales*", q:"*La materia se aprueba aprobando el final*" y r:"*La materia se aprueba dando exitosamente el exámen libre*". También se acepta $p \vee q \vee r \rightarrow s$ con el diccionario p:"*Promociono los parciales*", q:"*Apruebo el final*", r:"*Doy exitosamente el exámen libre*" y s:"*Apruebo la materia*". Esta simbología captura mejor la situación, pero por otro lado tuvimos que llevarla a la primera persona (yo) y podria haber sido cualquier estudiante. Para mejorar esto se puede utilizar lógica de predicados, que se verá al final de la unidad. Dejo la respuesta para que se revise más adelante. $\forall x : p(x) \vee q(x) \vee r(x) \rightarrow s(x)$ con el diccionario $p(x)$:"*x promociona los parciales*", $q(x)$:"*x aprueba el final*", $r(x)$:"*x da exitosamente el exámen libre*" y $s(x)$:"*x aprueba la materia*".

(i) El pan no levará si le ponés mucha sal. Tampoco levará si lo dejás en un lugar frío.

** $(q \rightarrow \neg p) \wedge (r \rightarrow \neg p)$ con p:"*El pan levará*", q:"*Le pones mucha sal*" y r:"*Lo dejas en un lugar frío*". Un equivalente es $(q \vee r) \rightarrow \neg p$:"*Si le pones mucha sal o lo dejas en un lugar frío, el pan no levará*".

(j) Si te tomás el 324 te deja cerca de la UNQ, si te tomás el 65 no.

** $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow \neg q)$ con p:"*Te tomas el 324*", q:"*Te deja cerca de la UNQ*" y p:"*Te tomás el 65*".

3. Determinar si las siguientes proposiciones son tautologías, contradicciones o contingencias mediante la realización de su tabla de verdad.

(a) $(\neg p \vee q) \wedge \neg q$

** Contingencia. Resolución.

(b) $p \wedge \neg p$

** Contradicción. Resolución.

(c) $p \wedge F_0 \vee q$

** Contingencia.Resolución, ver solo donde r es F.

(d) $(p \rightarrow q) \rightarrow r$

** Contingencia. Resolución.

(e) $p \leftrightarrow (q \veebar r)$

** Contingencia. Resolución.

(f) $(p \uparrow q) \downarrow r$

** Contingencia. Resolución

(g) $((\neg p \vee q) \to (r \vee p)) \vee (p \to q)$

** Es tautología. Resolución por ProfeGuille.

4. Averiguar si las siguientes proposiciones son equivalentes mediante tablas de verdad y/o reglas de equivalencia. Dar un ejemplo en lenguaje natural que lo evidencie. Nota: no siempre el mismo método.

(a) $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$

** La tabla de verdad revelea que es una tautología. Por lo tanto, son equivalentes. Esta regla de equivalencia se llama Doble Negación.

(b) $p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$

** La tabla de verdad revela que es una tautología. Por lo tanto, son equivalentes. Esta regla de equivalencia se llama Definición de la Implicación.

(c) $p \to q \Leftrightarrow \neg p \to \neg q$

** La tabla de verdad revela que es una contingencia. Por lo tanto, NO son equivalentes.

(d) $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

** La tabla de verdad revela que es una tautología. Esta regla de equivalencia se llama Absorción Total.

(e) $p \to q \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \to F_0$

** La tabla de verdad (ver dónde r es F) revela que es una tautología. Por lo tanto, son equivalentes. Esta regla de equivalencia se llama Reducción al absurdo.

(f) $(p \wedge q) \to r \Leftrightarrow p \to (q \to r)$

** La tabla de verdad revela que es una tautología. Por lo tanto, son equivalentes. Esta regla de equivalencia se llama Exportación.

(g) $p \vee q \to r \Leftrightarrow (p \to r) \wedge (q \to r)$

** La tabla de verdad revela que es una tautología. Por lo tanto, son equivalentes. Esta regla de equivalencia se llama Demostración por casos.

5. Simplificar las siguientes expresiones

(a) $\neg((p \wedge \neg q) \to p) \vee q$

** La expresion más simple es q. Resolución por Tu Profe en Linea.

(b) $(\neg q \to \neg p) \wedge \neg(\neg p \to \neg q)$

** $\neg p \wedge q$. Resolución por ProfesorTriquero.

(c) $(\neg q \vee p) \vee (p \wedge \neg q)$

** Puede ser $q \to p$, o bien $p \vee \neg q$. Resolución por ProfesorTriquero.

(d) $(p \wedge (p \to q)) \to q$

** Es equivalente a T_0 (es una tautología). Resolución por Tu Profe en Linea.

(e) $\neg((\neg p \wedge q) \to p) \vee q$

** La expresión mas simple es q. Resolución por ProfeGuille.

(f) $(\neg p \to q) \wedge \neg(q \to \neg p)$

** $p \wedge q$. Resolución por ProfeGuille.

6. Escribir en forma normal disyuntiva (DNF) y en forma normal conjuntiva (CNF) las siguientes proposiciones.

(a) $p \veebar q$

** DNF: $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

CNF: $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

(b) $\neg(p \uparrow q) \vee \neg p$

** DNF: $(p \wedge \neg q)$

CNF: $(\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$

(c) $p \to (q \wedge r)$

** DNF: $(p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

CNF: $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$

7. Verificar mediante una tabla de verdad si las siguientes proposiciones son reglas de inferencia. Dar un ejemplo en lenguaje natural que lo evidencie.

(a) $p \wedge q \Rightarrow p$

** Es tautología, por lo que es una regla de inferencia. Se la llama *Simplificación*. Ver la tabla de verdad.

(b) $p \vee q \Rightarrow q$

** Es contingencia, no es regla de inferencia. Ver la tabla de verdad.

(c) $p \wedge T_0 \Rightarrow q$

** Contingencia.

(d) $(\neg p \wedge q) \Rightarrow (\neg p \vee q)$

** Es tautología, por lo que es una regla de inferencia que no tiene nombre. Resolución por Tu Profe en Linea.

(e) $(p \leftrightarrow q) \Rightarrow (p \rightarrow q)$

** Es tautología, por lo que es una regla de inferencia. Se la llama *Elimiaciónn del bicondicional.* Ver la tabla de verdad.

(f) $((p \leftrightarrow q) \wedge r) \Rightarrow \neg(q \wedge r)$

** Es contingencia, no es regla de inferencia. Resolución por Tu Profe en Linea.

8. Sin utilizar las tablas de verdad, demostrar si los siguientes razonamientos son válidos o no.

(a)
$$\begin{array}{l} \neg p \rightarrow p \\ \hline p \end{array}$$

**
$$\begin{array}{ll} \neg p \rightarrow p & \\ \hline \neg\neg p \vee p & (\text{def. } \rightarrow) \\ p \vee p & (\text{doble } \neg) \\ \hline p & (\text{idempotencia}) \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \neg p \end{array}$$

**
$$\begin{array}{ll} p \rightarrow q & \\ \neg q & \\ \hline \neg p & (\text{modus tollens}) \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ p \\ \hline r \end{array}$$

**
$$\begin{array}{ll} p \rightarrow q & \\ q \rightarrow r & \\ p & \\ \hline p \rightarrow r & (\text{tran. del } \rightarrow) \\ \hline r & (\text{modus ponens}) \end{array}$$

(d)
$$\begin{array}{l} \neg p \\ \hline \neg(p \wedge q) \end{array}$$

**
$$\begin{array}{ll} \neg p & \\ \hline \neg p \vee \neg q & (\text{adición}) \\ \hline \neg(p \wedge q) & (\text{De Morgan}) \end{array}$$

(e)
$$\begin{array}{l} p \rightarrow r \\ q \rightarrow r \\ r \rightarrow s \wedge t \\ p \vee q \\ \hline s \end{array}$$

**
$$\begin{array}{ll} p \rightarrow r & \\ q \rightarrow r & \\ r \rightarrow s \wedge t & \\ p \vee q & \\ \hline r & (\text{elim. disy.}) \\ s \wedge t & (\text{modus ponens}) \\ \hline s & (\text{simplificación}) \end{array}$$

(f)
$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \wedge r \rightarrow s \\ \hline p \wedge r \rightarrow s \end{array}$$

** Aplicamos exportación:

$$\begin{array}{ll} p \rightarrow q & \\ q \wedge r \rightarrow s & \\ p & \\ r & \\ \hline q & (\text{modus ponens}) \\ \hline s & (\text{conj. y mod. pon.}) \end{array}$$

(g)
$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \leftrightarrow r \\ \neg r \\ \hline \neg p \end{array}$$

**
$$\begin{array}{ll} p \rightarrow q & \\ q \leftrightarrow r & \\ \neg r & \\ \hline q \rightarrow r & (\text{elim. } \leftrightarrow) \\ \neg q & (\text{mod. tollens}) \\ \hline \neg p & (\text{mod. tollens}) \end{array}$$

(h)
$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \vee s \\ \neg q \\ \hline s \end{array}$$

**
$$\begin{array}{ll} p \rightarrow q & \\ p \vee s & \\ \neg q & \\ \hline \neg p & (\text{mod. toll.}) \\ \hline s & (\text{mod. toll. pon.}) \end{array}$$

9. Averiguar si los siguientes razonamientos son válidos y evaluar su solidez.

(a) Por el pronóstico semanal, sabemos que si es martes, llueve y hace frío. Sabemos que es martes. Demostrar que hace frío.

** Razonamiento válido. Usamos m:"*es martes*", l:"*llueve*", f:"*hace frio*". Por lo que el razonamiento será

$m \to l \wedge f$
m
———
$l \wedge f$ (mod. pon.)
———
f (simpl.)

(b) El ladrón tenía llave de la puerta o entró por la ventana. Si entró por la ventana, pisoteó las macetas. Las macetas no están pisoteadas. Por lo tanto, el ladrón tenía llave de la puerta.

** Razonamiento válido. Utilizando l:"*el ladron tenía llave*", v:"*el ladron entró por la ventana*" y p:"*el ladron pisoteó las macetas*", se demuestra:

$l \vee v$
$v \to p$
$\neg p$
———
$\neg v$ (mod. tollens)
———
l (mod. toll. ponens)

Planteo por Maria Alicia Piñeiro.

(c) El producto de dos enteros impares es impar

** Razonamiento válido. Utilizamos los números enteros $x, y \in \mathbb{Z}$:

x es impar
y es impar
———
$x = 2k + 1$ con $k \in \mathbb{Z}$
$y = 2m + 1$ con $m \in \mathbb{Z}$
$x.y = (2k + 1).(2m + 1) = 2(2km + k + m) + 1$ con $(2km + k + m) \in \mathbb{Z}$
———
$x.y$ es impar

(d) La suma de dos números naturales pares es un número natural impar

** Razonamiento inválido. Contraejemplo: $2 + 4 = 6$. 2 y 4 son pares, pero 6 no es impar.

(e) Si el cuadrado de un número entero es impar, dicho número es impar.

** Razonamiento válido. Demostraremos el contrarrecíproco: "*Si un número entero no es impar, el cuadrado de dicho número no es impar*". Utilizamos el numero entero $n \in \mathbb{Z}$:

n no es impar
———
n es par
$n = 2k$ con $k \in \mathbb{Z}$
$n^2 = (2k).(2k) = 2(2.k.k)$ con $(2.k.k) \in \mathbb{Z}$
n^2 es par
———
n^2 no es impar

(f) Si un número entero es múltiplo de 6, entonces dicho número es múltiplo de 2 y de 3.

** Razonamiento válido. Utilizamos el numero entero $n \in \mathbb{N}$:

n es múltiplo de 6
———
$n = k.6$ con $k \in \mathbb{N}$
$n = (k.2).3$ con $2k \in \mathbb{N}$
$n = (k.3).2$ con $3k \in \mathbb{N}$
———
n es multiplo de 3 y de 2

(g) Si un número entero es menor que otro, el primer número es menor o igual que el sucesor del segundo

** Razonamiento válido.

$$\frac{x < y}{\begin{array}{l} y < y+1 \quad \text{(prop. suma en } \mathbb{R}) \\ x < y+1 \quad \text{(transit. del } <) \\ (x < y+1) \lor (\text{x=y+1}) \quad \text{(adición)} \end{array}}$$
$$x \leq y+1$$

(h) Si se cumple que $x^2 - x - 6 > 0$, entonces se cumple que $|x| > 1$.

** Razonamiento válido.

$$\frac{x^2 - x - 6 > 0}{\begin{array}{l} (x+2)(x-3) > 0 \quad \text{(factorizo)} \\ (x > 3) \lor (x < -2) \quad \text{(prop. desigualdad)} \\ (x > 3) \to |x| > 3 \quad \text{(prop. val. abs.)} \\ (x < -2) \to |x| > 2 \quad \text{(prop. val. abs.)} \\ (|x| > 3) \lor (|x| > 2) \quad \text{(dilema constr.)} \\ |x| > 3 \to |x| > 1 \\ |x| > 3 \to |x| > 1 \end{array}}$$
$$|x| > 1 \quad \text{(elim. disy.)}$$

(i) Si $|x| = |y|$, entonces $y = x$ o $y = -x$.

** Razonamiento válido.

$$\frac{|x| = |y|}{\begin{array}{l} (x = |y|) \lor (x = -|y|) \quad \text{(prop. val. abs.)} \\ (x = |y|) \lor (-x = |y|) \quad \text{(opero algebr.)} \\ (x = y) \lor (-x = y) \lor (-x = y) \lor (-(-x) = y) \quad \text{(prop. val. abs.)} \end{array}}$$
$$(y = x) \lor (y = -x) \quad \text{(idempot.)}$$

(j) Si $a.b = 0$, la recta $y = mx + b$ pasa por $P(0,0)$ o bien la recta $y = ax + 3$ es horizontal.

** Razonamiento válido.

$$\frac{a.b = 0}{\begin{array}{l} (a = 0) \lor (b = 0) \\ (a = 0) \to y = ax + 3 \text{ es horizontal} \\ (b = 0) \to y = mx + b \text{ pasa por } P(0,0) \end{array}}$$
$$y = mx + b \text{ pasa por } P(0,0) \lor y = ax + 3 \text{ es horizontal} \quad \text{(dilema construc.)}$$

10. Simbolizar las siguientes proposiciones, indicando el diccionario de lenguaje y el conjunto universal. Cuando se indique, negar la proposición.

(a) Alguien canta o toca la guitarra. (Adicionalmente, negar esta expresión)

** Dado el universo $U = \{x \mid x \text{ es una persona}\}$, y los predicados $C(x)$: *"la persona x canta"* y $G(x)$: *"la persona x toca la guitarra"*. Se simboliza $\exists x : C(x) \lor G(x)$ con su negación $\neg(\exists x : C(x) \lor G(x)) \Leftrightarrow \forall x : \neg C(x) \land \neg G(x)$. Resolución por MathLogic.

(b) Todos los números naturales son pares o negativos. (Adicionalmente, negar esta expresión)

** Dado el universo $U = \mathbb{N}$ y los predicados $P(x)$: *"x es par"* y $N(x)$: *"x es negativo"*. Se simboliza $\forall x : P(x) \lor N(x)$ con su negación $\neg(\forall x : P(x) \lor N(x)) \Leftrightarrow \exists x : \neg P(x) \land \neg N(x)$.

(c) Si un automóvil es cómodo, entonces es caro

** ado el universo $U = \{x \mid x \text{ es un automóvil}\}$ y los predicados $P(x)$: *"x es cómodo"* y $Q(x)$: *"x es caro"*. Se simboliza $\forall x : P(x) \to Q(x)$

(d) Hay gente que cuando tiene frío toma mate, y cuando no lo tiene no

** Dado el universo $U = \{x \mid x \text{ es una persona}\}$, y los predicados $F(x)$: *"x tiene frío"* y $M(x)$: *"x toma mate"*. Se simboliza $\exists x : F(x) \leftrightarrow M(x)$.

(e) Ningún pájaro es un anfibio. Si un animal no es un anfibio, tampoco será un pez. Por lo tanto, ningun pájaro es pez.

** Dado el universo $U = \{x \mid x \text{ es un animal}\}$, y los predicados $P(x)$: *"x es un pájaro"*, $A(x)$: *"x es un anfibio"* y $Z(x)$: *"x es un pez"*. Se simboliza

$$\begin{array}{l} \forall x : P(x) \to \neg A(x) \\ \forall x : \neg A(x) \to \neg Z(x) \\ \hline \forall x : P(x) \to Z(x) \end{array}$$

Resolución por MathLogic.

11. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones cuantificadas.

(a) $\exists x$: $P(x)$: *"Según el pronóstico semanal, el día x llueve"* con $U = \{$Lunes, Martes, Miércoles, Jueves, Viernes, Sábado, Domingo$\}$

** Depende del pronóstico del clima de esa semana

(b) $\forall x \in U : x^2 < 26$, con $U = \{1, 3, 5\}$

** Verdadera, ya que $1 < 26 \quad \wedge \quad 9 < 26 \quad \wedge \quad 25 < 26$. Resolución por Tu Profe en Linea.

(c) $\exists x \in U : x^2 < 26$, con $U = \{1, 3, 5\}$

** Verdadera, ya que $1 < 26$ (y con eso basta). Resolución por Tu Profe en Linea.

(d) $\forall x \in \mathbb{N} : x^2 - 9 = 0$

** Falso, ya que $5^2 - 9 = 25 - 9 = 16 \neq 0$. Resolución por Tu Profe en Linea.

(e) $\forall x \in \mathbb{R} : x + 3 < 6$

** Falso, ya que $10 + 3 = 13 \not< 6$. Resolución por Tu Profe en Linea.

(f) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 1$

** La proposición es verdadera ya que $x = -1$ cumple

(g) Dado $U = \mathbb{N}$, $(\forall x : x < 5) \vee \left(\exists x : x^2 = 4\right)$

** La proposición es verdadera ya que $(\forall x : x < 5)$ es falsa pero $\left(\exists x : x^2 = 4\right)$ es verdadera en $x = 2$

(h) $\forall x \exists y : x < y$, donde x e y pertenecen al conjunto $\{1, 2, 3\}$.

** La proposiciòn es falsa ya que para $x = 3$ no existe un y que cumpla.

12. Averiguar si los siguientes razonamientos son válidos y, en el caso de que tengan un contexto, evaluar su solidez.

(a) Dada la variable x y la constante a, se plantea:

$$\begin{array}{l} \forall x : P(x) \to Q(x) \wedge R(x) \\ P(a) \\ \hline \exists x : R(x) \end{array}$$

** Razonamiento válido.

$\forall x : P(x) \to Q(x) \wedge R(x)$
$P(a)$

$P(a) \to Q(a) \wedge R(a)$ (part. univ. en a)
$Q(a) \wedge R(a)$ (mod. ponens)
$R(a)$ (simplif.)

$\exists x : R(x)$ (general. exist.)

(b) $Q(a) \to R(a)$
$Q(a) \to \neg R(a)$

$\exists x : \neg Q(x)$

** Razonamiento válido. Resolución por MathLogic.

(c) Considerando $U = \{3, 4, 6\}$ y los predicados $A(x)$: *"x es entero"*, $B(x)$: *"x es par"* y $C(x)$: *"x es múltiplo de 4"* se plantea:

$\exists x : A(x) \to \neg B(x)$
$C(6) \vee B(6)$
$\neg C(6)$

$\exists x : \neg A(x)$

** Razonamiento inválido. Resolución por Maria Alicia Piñeiro.

(d) $\neg \forall x : P(x) \to Q(x)$

$\exists x : P(x)$

** Razonamiento válido.

$\neg(\forall x : P(x) \to Q(x))$
$\exists x : \neg(P(x) \to Q(x))$

$\neg(P(a) \to Q(a))$ (part. exist.)
$\neg(\neg P(a) \vee Q(a))$ (def. $\to$)
$P(a) \wedge \neg Q(a)$ (De. Morgan)
$P(a)$ (simpl.)

$\exists x : P(a)$ (general. exist.)

(e) $\neg \exists x : \neg P(x) \wedge \neg Q(x)$
$\neg P(a)$

$Q(a)$

** Razonamiento válido.

$\neg \exists x : \neg P(x) \wedge \neg Q(x)$
$\neg P(a)$

$\forall x : \neg(\neg P(x) \wedge \neg Q(x))$ (neg. cuantif.)
$\neg(\neg P(a) \wedge \neg Q(a))$ (part. en a)
$P(a) \vee Q(a)$ (De Morgan)

$Q(a)$ (mod. toll. pon.)

(f) $\neg \exists x : \neg P(x) \wedge Q(x)$
$\forall x : P(x) \to R(x)$
$Q(a)$

$R(a)$

** Razonamiento válido.

$\neg\exists x : \neg P(x) \wedge Q(x)$
$\forall x : P(x) \rightarrow R(x)$
$Q(a)$

$\forall x : \neg(\neg P(x) \wedge Q(x))$ (neg. cuantif.)
$\neg(\neg P(a) \wedge Q(a))$ (part. en a)
$P(a) \vee \neg Q(a)$ (De Morgan)
$P(a)$ (mod. toll. pon.)
$P(a) \rightarrow R(a)$ (part. en a)

$R(a)$ (mod. pon.)

(g) $\forall x : P(x) \rightarrow Q(x) \wedge R(x)$
$\forall x : R(x) \vee S(x) \rightarrow T(x)$
$P(a)$

$T(a)$

** $\forall x : P(x) \rightarrow Q(x) \wedge R(x)$
$\forall x : R(x) \vee S(x) \rightarrow T(x)$
$P(a)$

$P(a) \rightarrow Q(a) \wedge R(a)$ (part. en a)
$Q(a) \wedge R(a)$ (mod. pon.)
$R(a)$ (simplif.)
$R(a) \vee S(a)$ (adición)
$R(a) \vee S(a) \rightarrow T(a)$ (part. en a)

$T(a)$ (mod. pon.)

(h) $\forall x \forall y \forall z : P(x, y) \wedge P(y, x) \rightarrow (P(x, z) \leftrightarrow P(y, z))$
$P(a, b)$
$P(b, c)$
$P(b, a)$

$P(a, c)$

** $\forall x \forall y \forall z : P(x, y) \wedge P(y, x) \rightarrow (P(x, z) \leftrightarrow P(y, z))$
$P(a, b)$
$P(b, c)$
$P(b, a)$

$P(a, b) \wedge P(b, a) \rightarrow (P(a, c) \leftrightarrow P(b, c))$ (part. $x = a$, $y = b$, $z = c$)
$P(a, c) \leftrightarrow P(b, c)$ (mod. ponens)

$P(a, c)$ (mod. pon. del $\leftrightarrow$)

(i) $\forall x \forall y : \neg(R(x) \rightarrow \neg S(x, y))$
$\forall x \exists y : P(x) \rightarrow Q(x, y)$
$\exists x \forall y : R(x) \wedge Q(x, y) \rightarrow \neg S(x, y)$

$\forall x : \neg P(x)$

** Razonamiento válido. Resolución por MathLogic.

(j) $\forall x \forall y : \neg(R(x) \rightarrow \neg S(x, y))$
$\forall x \exists y : P(x) \rightarrow Q(x, y)$
$\exists x \forall y : R(x) \wedge Q(x, y) \rightarrow \neg S(x, y)$

$\exists x : \neg P(x)$

** Razonamiento válido. Resolución por Maria Alicia Piñeiro.

(k) Todos los hombres son mortales. Sócrates es un hombre. Por lo tanto, Sócrates es mortal.

** Razonamiento válido. Resolución por Maria Alicia Piñeiro.

(l) Hay productos tienen buen precio o buena calidad. Todos los productos de buena calidad son resistentes. Entonces, hay productos que tienen buen precio o que son resistentes.

** Razonamiento válido. Ejercicio parecido por Maria Alicia Piñeiro.

(m) Si compro un cuaderno, tendré cómo tomar notas de clase. Tambien tendré cómo tomas notas de clase si traigo mi notebook. No traje mi notebook. Por lo tanto, no tendré como tomar notas de clase.

** Razonamiento inválido (falacia) ya que no es una tautología. Se puede demostrar que es una falacia por contraejemplo: se puede dar que compro un cuaderno, que no traiga mi notebook y que si pueda tomar tonas de clase. Ejercicio parecido por Tu Profe en Linea.

(n) Todas las personas invitadas a la cena estudiaron abogacía o ingeniería. Quienes estudiaron ingeniería estudiaron en la UNQ. Ariel, uno de los invitados, no estudió en la UNQ. Por lo tanto, al menos una persona invitada es abogada.

** Razonamiento válido. Resolución por Jonathan Castro.

(o) Todos los dulces contienen carbohidratos. Existen comidas sin carbohidratos que tienen proteínas. Por lo tanto, todas las comidas tienen carbohidratos o proteinas.

** Razonamiento inválido. Se puede demostrar por contraejemplo: asumiendo que todos los dulces tienen carbohidratos y que hay comidas sin carbohidratos y proteínas, aun puede suceder que no todas las comidas tengan carbohidratos o proteínas, como es el caso de la manteca. Ejercicio parecido por Jonathan Castro.

(p) Algunos sillones están tapizados. Algunos sillones son blancos. Todos los sillones blancos tienen almohadones. Por lo tanto, algunos sillones están tapizados y tienen almohadones.

** Razonamiento inválido. Se puede demostrar por contraejemplo, definiendo un universo de sillones a elección. Resolución por Maria Alicia Piñeiro.

(q) Todos los sillones están tapizados. Algunos sillones son blancos. Todos los sillones blancos tienen almohadones. Por lo tanto, algunos sillones están tapizados y tienen almohadones.

** Razonamiento válido. Se puede demostrar por contraejemplo, definiendo un universo de sillones a elección. Resolución por Maria Alicia Piñeiro.

(r) Todos los bebes de terapia estaban en incubadora o con respirador. Los que estaban en incubadora eran prematuros y de bajo peso. Lucio, uno de los bebes de terapia, tenía buen pesos. Por lo tanto, al menos un bebé de terapia estaba con respirador.

** Razonamiento válido. Resolución por Maria Alicia Piñeiro y su continuación.

EJERCICIOS SR.

13. Reconocer las funciones del lenguaje e indicar qué casos son proposiciones. Si son proposiciones, indicar su valor de verdad.

(a) Tal vez llueve

** Función informativa, es proposición. Podemos indicar si es verdadero en momentos y lugares donde es posible que llueva, mientras que será falsa si en lugares donde no es posible que llueva.

(b) ¿Está lloviendo?

** Función interrogativa, no es proposición.

(c) Dadas las rectas $R_1 : y = x + 1$ y $R_2 : y = -x + 7$, $R_1 \perp R_2$.

** Función afirmativa, es proposición. Se puede leer como “R_1 es perpendicular a R_2”. Para ver si son perpendiculares debemos revisar la relacion entre sus pendientes. Podemos ver que $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ se cumple ya que $1 = -\frac{1}{-1}$. Por lo que la proposición es verdadera.

(d) $[0, \infty)$

** No es una proposición. Se puede leer como “El intervalo que va desde cero a infinito”. Pero carece de afirmación, simplemente enuncia un objeto, es similar al inciso x+4.

(e) Gracias

** Función exclamativa, no es proposición. Notar que “Estoy agradecido con vos” sí sería una proposición.

(f) Me parece que sí

** Función informativa, es proposición. El valor de verdad no depende de si llueve o no, depende de si quien lo dice le parece que llueve o no. Si el narrador está engañando será falsa, si realmente cree que sí será verdadera.

(g) ¡No me digas!

** No está clara la función pero es exclamativa o imperativa, en cualqueir caso, no es proposición.

(h) $x = 9$ y $2 < x < 7$

** Función afirmativa, es una proposición. Puede leerse como “x es igual a 9 y 2 es menor que x y x es menor que 7”. La proposición será verdadera.

(i) En las aulas de la UNQ

** No es proposición ya que se está enunciando un objeto sin afirmar nada sobre el mismo. Gramaticalmente podemos decir que es una oración sin verbo. Por otra parte, la función del lenguaje no es clara ya que carecemos de contexto. Notar que si esta oración fuese la respuesta a la pregunta “¿En dónde se cursa?”, entonces podríamos interpretar que la respuesta es “(Se cursa) en las aulas de la UNQ” y sí sería una proposición.

(j) $2 < x < 7$ (donde x no está definido)

** No es una proposición. Como x no tiene un valor el enunciado no tendrá un valor de verdad. Este tipo de enunciados los veremos al final de la unidad y se llaman esquemas proposicionales, predicados o enunciados abiertos. Notar que si x fuera un número definido pero desconocido para nosotros sí sería una proposicion con valor de verdad definido (aunque desconocido).

(k) Si tan solo me hubiese acordado de regar el potus...

** Función exclamativa, no es proposición.

(l) A caballo regalado no se le miran los dientes

** Es complicado. Debemos preguntarnos si hay una afirmación en esta frase. Primero deberíamos reformularla para entender si hay un verbo implicito. “Si alguien te regala un caballo, no deberías mirarle los dientes”. Aquí se observa que hay una afirmación sobre si deberíamos mirarle los dientes al caballo o no. Esta afirmación sí es una proposición pero puede ser verdadera o falsa. Si nuestra interpretación de la frase es una órden como “Si te regalan un caballo, no le mires los dientes” esta oración no será una proposición, notar que se pierde el verbo *deberías*. El hecho de que no haya una respuesta clara y correcta sobre este ejercicio muestra que la lógica esta limitada a la interpretación previa del lenguaje.

14. Simbolizar las siguientes proposiciones, indicar el diccionario de lenguaje cuando sea necesario y cuando amerite hallar una proposición equivalente considerando las propiedades y definiciones de los operadores.

(a) Luis es feliz, si escribe poemas.

** $p \to q$ con q:“*Luis es feliz*” y p:“*Luis escribe poemas*”. Un equivalente es $\neg p \vee q$: “Luis no escribe poemas o luis es feliz”. Resolución por Tu Profe en Linea.

(b) No es cierto que estudiamos y no aprobamos.

** $\neg(p \wedge \neg q)$ con p:“*Estudiamos*” y q:“*Aprobamos*”. Un equivalente es $\neg p \vee q$:“*No estudiamos o* *aprobamos*". Otro equivalente es $p \to q$:"*Si estudiamos, aprobamos*". Resolución por Tu Profe en Linea.

(c) No me gusta la pizza ni las empanadas.

** $\neg p \wedge \neg q$ con p:"*Me gusta la pizza*" y q:"*Me gustan las empanadas*". Un equivalente es $p \downarrow q$, que se lee igual:"*No me gusta la pizza ni las empanadas*".

(d) Hoy no es jueves, ya que ayer no fue miércoles.

** Una manera inicial de plantearlo es $\neg q \to \neg p$ con p:"*Hoy es jueves*" y q:"*Ayer fue miércoles*". Sin embargo esto es equivalente a $p \to q$ que se lee "*Si ayer fue miércoles, hoy es jueves*". La frase original no sólo nos indica la relación entre los días sino que afirma que *ayer no fue miércoles*. Por lo que una manera más correcta de interpretarlo es $\neg q \wedge (\neg q \to \neg p)$.

(e) Si llueve traigo el impermeable y las botas.

** $p \to (q \wedge r)$ con p:"*Llueve*", q:"*Traigo el impermeable*" y r:"*Traigo las botas*". Un equivalente es $(p \to q) \wedge (p \to r)$:"*Si llueve traigo el impermeable y si llueve traigo las botas*".

(f) Si has amado sabés lo que se siente amar, sino no.

** $(p \to q) \wedge (\neg p \to \neg q)$ con p:"*Has amado*" y p:"*Sabés lo que se siente amar*". Un equivalente es $p \leftrightarrow q$: "*Has amado si y sólo si sabes lo que se siente amar*".

(g) El anciano ingresó a la cabaña y tomo asiento, o permaneció afuera; si y solo si regresó de viaje.

** $((p \wedge q) \vee r) \leftrightarrow s$ con p:"*El anciano ingresó a la cabaña*", q:"*El anciano tomó asiento*", r:"*El anciano permaneció afuera*" y s:"*El anciano regresó de viaje*". Resolución por Christian Omar Arias López.

(h) Caminamos sin prisa pero sin pausa.

** $\neg p \wedge \neg q$ con p:"*Caminamos con prisa*" y q:"*Caminamos con pausa*". Un equivalente es $p \downarrow q$:"*Ni caminamos con prisa ni caminamos con pausa*"

(i) Python es un lenguaje de programación interpretado, de propósito general y de alto nivel, por lo tanto resulta útil para procesar datos o automatizar tareas simples.

** $(p \wedge q \wedge r) \to (s \vee t)$ con p:"*Python es un lenguaje de programación interpretado*", q:"*Python es un lenguaje de programación de propósito general*", r:"*Python es un lenguaje de programación de alto nivel*", s:"*Python resulta útil para procesar datos*" y t:"*Python resulta útil para automatizar tareas simples*".

(j) Ir rápido equivale a ir despacio pero sin pausas.

** Hay varias simbolizaciones posibles. Por ejemplo, primero reformulamos el enunciado para obtener proposiciones: "*Que alguien vaya rápido equivale a que vaya despacio pero sin pausas*". Con las proposiciones p:"*Alguien va rápido*", $\neg p$:"*Alguien va despacio*" y q:"*Alguien va con pausas*" obtenemos en símbolos $p \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$.

(k) O termino las tareas en la semana, con lo que tendría el fin de semana libre, o las termino durante el fin de semana, con lo que tendría que abastecerme de café o mate.

** $(p \to q) \veebar (r \to (s \vee t))$ con p:"*Termino las tareas en la semana*", q:"*Tendré el fin de semana libre*", r:"*Termino las tareas durante el fin de semana*", s:"*Tendría que abastecerme de café*" y t:"*Tendría que abastecerme de mate*".

(l) Para aprobar, basta dedicar tiempo y atención a la materia.

** Primero reformulamos el enunciado:"*Para que alguien apruebe, le debe dedicar tiempo y atención a la materia*". Entonces tenemos la proposición $(q \wedge r) \to p$ con p:"*Alguien aprueba*", q:"*Alguien le dedica tiempo a la materia*" y r:"*Alguien le dedica atención a la materia*".

(m) Calavera no chilla y piola se la banca.

** Una opcion simple es $\neg p \wedge r$ con p:"*Calavera chilla*" y q:"*Piola se la banca*". Pero podríamos tener $(p \to q) \wedge (r \to s)$ considerando p:"*Alguien es calavera*", q:"*Alguien chilla*", q:"*Alguien es piola*" y q:"*Alguien se la banca*"

(n) Vine en tren y suspendieron el servicio, así que tengo que volver en colectivo o caminando.

** $(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$ con p:"*Vine en tren*", q:"*Suspendieron el servicio*", r:"*Tengo que volver en colectivo*" y s:"*Tengo que volver caminando*".

(o) En un juego son importantes las mecánicas y la historia. Las mecánicas mantienen a la persona jugadora activa. La historia la mantiene interesada.

** $(p \wedge q) \wedge r \wedge s$. p:"*En un juego son importantes las mecánicas*", q:"*En un juego es importantes la historia*", r:"*Las mecánicas mantienen a la persona jugadora activa*" y s:"*La historia la mantiene interesada*".

(p) Decir que los fantasmas se ponen azules cuando el pacman come la fruta, es lo mismo que decir que los fantasmas están azules o el pacman no se comió la fruta.

** $(q \rightarrow p) \leftrightarrow (p \vee \neg q)$ con p:"*Los fantasmas se ponen azules*" y q:"*El pacman come la fruta*".

15. Determinar si las siguientes proposiciones son tautologías, contradicciones o contingencias mediante la realización de su tabla de verdad.

(a) $p \veebar (\neg q \veebar r)$

** Contingencia. Resolución

(b) $p \wedge q \vee r$

** Contingencia. Resolución.

(c) $p \nrightarrow (q \wedge r)$

** Contingencia. Resolución.

(d) $(T_0 \downarrow q) \nrightarrow r$

** Contradicción. Resolución, ver sólo donde p es V.

(e) $(\neg p \leftrightarrow q) \wedge \neg(q \rightarrow \neg p)$

** Es contradicción. Resolución por ProfeGuille.

(f) $((p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r) \vee (p \veebar q)$

** Es tautología. Resolución por ProfeGuille.

(g) $\neg((r \rightarrow p) \wedge (\neg q \vee p)) \wedge (p \wedge (p \rightarrow r))$

** Es contradicción. Resolución por ProfeGuille.

(h) $\neg((\neg p \wedge q) \rightarrow p) \vee q$

** Es contingencia. Resolución por ProfeGuille.

16. Averiguar si las siguientes proposiciones son equivalentes mediante tablas de verdad y/o reglas de equivalencia. Dar un ejemplo en lenguaje natural que lo evidencie. Nota: no siempre el mismo método.

(a) $\neg p \rightarrow p \Leftrightarrow p$

** La tabla de verdad revela que es una tautología. Por lo tanto, son equivalentes. Esta regla de equivalencia no tiene nombre (ni es muy útil).

(b) $\neg p \vee \neg q \Leftrightarrow (p \wedge q)$

** La tabla de verdad revela que es una contradicción. Por lo tanto, las proposiciones no son equivalentes.

(c) $(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$

** La tabla de verdad revela que es una contradicción. Por lo tanto, las proposiciones no son equivalentes. También pueden ver la resolución por Tu Profe en Linea.

(d) $(p \rightarrow (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge r) \rightarrow \neg q)$

** La tabla de verdad revela que es una contingencia. Por lo tanto, las proposiciones no son equivalentes. Para más detalles ver la resolución por Julio Profe.

(e) $\neg(p \wedge q \rightarrow \neg r) \Leftrightarrow p \wedge q \vee r$

** La tabla de verdad revela que es una contingencia. Por lo tanto, no son equivalentes.

(f) $p \rightarrow (q \wedge r \wedge s) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (p \rightarrow s)$

** La tabla de verdad revela que es una tautología. Por lo tanto, son equivalentes. Esta regla de equivalencia no tiene nombre.

17. Simplificar las siguientes expresiones

(a) $(p \veebar q) \to (q \to p)$

** Puede ser $q \to p$, o bien $p \vee \neg q$. Resolución por ProfeGuille.

(b) $((p \vee \neg q) \to \neg p) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$

** $\neg p \wedge q$. Resolución por ProfeGuille.

(c) $((\neg q \to p) \to (p \vee \neg q)) \wedge \neg(p \wedge q)$

** La expresión más simple es $\neg q$. Resolución por Tu Profe en Linea.

(d) $(p \to \neg(q \to p)) \to \neg q$

** Puede ser $q \to p$, o bien $p \vee \neg q$. Resolución por Tu Profe en Linea.

(e) $(q \to \neg p) \wedge ((p \wedge q) \to (p \leftrightarrow q))$

** Puede ser $p \to \neg q$, o bien $\neg(p \wedge q)$, o también $\neg p \vee \neg q$. Resolución por ProfesorTriquero.

(f) $(p \vee (\neg q \wedge r)) \to (p \to (\neg p \wedge q))$

** La expresión mas simple es $\neg p$. Resolución por ProfeGuille.

(g) $((p \to q) \vee \neg(\neg q \vee \neg p)) \to \neg q$

** La expresión mas simple es $\neg q$. Resolución por ProfeGuille.

18. Escribir en forma normal disyuntiva (DNF) y en forma normal conjuntiva (CNF) las siguientes proposiciones.

(a) $\neg(p \to q)$

** DNF: $(p \wedge \neg q)$

CNF: $(\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$

(b) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$

** DNF: $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$

CNF: $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee r)$

(c) $p \wedge (q \to r)$

** DNF: $p \wedge q \wedge \neg r$

CNF: $(\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee r)$

19. Sin utilizar las tablas de verdad, demostrar si los siguientes razonamientos son válidos o no.

(a)
$$\begin{array}{l} p \to q \\ r \wedge p \\ q \leftrightarrow s \\ \hline q \wedge s \end{array}$$

**
$$\begin{array}{ll} p \to q & \\ r \wedge p & \\ q \leftrightarrow s & \\ \hline q \to s & \text{(elim. } \leftrightarrow) \\ p & \text{(simplif.)} \\ q & \text{(mod. ponens)} \\ s & \text{(mod. ponens)} \\ \hline q \wedge s & \text{(conjunción)} \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \vee r \to s \\ \hline p \vee r \to s \end{array}$$

** Aplicamos exportación y casos.

Caso 1:
$$\begin{array}{ll} p \to q & \\ q \vee r \to s & \\ p & \\ \hline q & \text{(modus ponens)} \\ q \vee r & \text{(adición)} \\ \hline s & \text{(modus ponens)} \end{array}$$

Caso2:
$$\begin{array}{ll} p \to q & \\ q \vee r \to s & \\ r & \\ \hline q \vee r & \text{(adic. y conmut.)} \\ \hline s & \text{(modus ponens)} \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{l} p \to q \\ r \to s \\ \hline (p \wedge r) \to (q \wedge s) \end{array}$$

** Aplicamos exportación:
$$\begin{array}{ll} p \to q & \\ r \to s & \\ p & \\ r & \\ \hline q & \text{(mod. ponens)} \\ s & \text{(mod. ponens)} \\ \hline q \wedge s & \text{(conjunción)} \end{array}$$

(d)
$$\begin{array}{l} p \to q \\ s \vee \neg q \\ \neg s \\ \hline \neg p \end{array}$$

**
$$\begin{array}{ll} p \to q & \\ s \vee \neg q & \\ \neg s & \\ \hline \neg q & \text{(mod. toll. pon.)} \\ \hline \neg p & \text{(mod. toll.)} \end{array}$$

(e)
$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ (p \vee r) \to t \\ \hline p \wedge t \end{array}$$

** $p \wedge q$
$(p \vee r) \to t$

---

p (simpl.)
$p \vee r$ (adición)
t (mod. ponens)

$p \wedge t$ (conjunción)

(f) $p \vee q$
$r \vee s$
$p \to r$
$q \to s$
$\neg r$

---

s

** Recordar que no hace falta usar todas las premisas:

$p \vee q$
$r \vee s$
$p \to r$
$q \to s$
$\neg r$

---

s (m.t.p. premisas 2 y 5)

(g) $p \to q$
$q \to r$
$s \to t$
$p \vee s$

$r \vee t$

** $p \to q$
$q \to r$
$s \to t$
$p \vee s$

$p \to r$ (transit. de $\to$)

$r \vee t$ (dilema construc.)

(h) $p \to q$
$(p \wedge q) \to r$
$\neg(p \wedge q)$

$\neg p$

** Por contradicción (asumo p):

$p \to q$
$(p \wedge q) \to r$
$\neg(p \wedge q)$
p

---

q (mod pon.)
$(p \wedge q) \wedge \neg(p \wedge q)$ (conj.)

F_0 (binarismo excl.)

(i) $q \to r$
$\neg s \to (t \to u)$
$s \vee (q \vee t)$
$\neg s$

$r \vee u$

** $q \to r$
$\neg s \to (t \to u)$
$s \vee (q \vee t)$
$\neg s$

$t \to u$ (mod. pon.)
$q \vee t$ (mod. tol. pon)

$r \vee u$ (dilema construc.)

(j) $p \vee q \to r$
$r \to p \wedge s$

$p \leftrightarrow r$

** Demostramos $p \to r$ usando exportación:

$p \vee q \to r$
$r \to p \wedge s$
p

$p \vee q$ (adición)

---

r (mod. ponens)

Demostramos $r \to p$ usando exportación:

$p \vee q \to r$
$r \to p \wedge s$
r

$p \wedge s$ (mod. ponens)

---

p (simpl.)

Por lo tanto, $p \leftrightarrow r$.

20. Dado el valor de verdad de algunas propociciones, averiguar el valor de otras utilizando tablas de verdad, reglas lógicas, razonamientos, etc. Se sugiere no siempre usar el mismo método.

(a) Dado que la proposición $(r \wedge \neg p) \to \neg q$ es V, p es F y q es V, hallar el valor de r.

** r es F

(b) Dado que la proposición $(p \vee \neg q) \leftrightarrow (r \to s)$ es F y r es F, hallar el valor de p y de q.

** p es F y q es V

(c) Dado que la proposición $\neg(p \wedge q) \veebar (r \vee s)$ es V y r es V, hallar el valor de p y de q.

** p es V y q es V

(d) Dado que la proposición $(p \veebar q) \wedge \neg(r \vee s)$ es V y p es V, hallar el valor de q, r y s.

** q es F, r es F y s es F

(e) Dado que la proposición $(p \vee r) \veebar (q \wedge p \leftrightarrow r)$ es F y r es V, hallar el valor de p y de q.

** p es V y q es V

(f) r es F. Averiguar el valor de $((r \to q) \veebar \neg r) \wedge p$.

** $((r \to q) \veebar \neg r) \wedge p$ es F. Resolución por Tu Profe en Linea.

(g) p es V. Averiguar el valor de $((r \wedge \neg p) \wedge (q \vee p)) \to r$.

** $((r \wedge \neg p) \wedge (q \vee p)) \rightarrow r$ es V. Resolución por Tu Profe en Linea.

(h) $(p \rightarrow q) \vee \neg r$ es F. Averiguar el valor de p, q y r.

** p es V, q es F y r es V. Resolución por Tu Profe en Linea.

(i) $(p \wedge \neg q) \rightarrow \neg(r \rightarrow \neg s)$ es F. Averiguar el valor de p, q, r y s.

** p es V, q es F, r es V y s es V. Resolución por Tu Profe en Linea.

(j) $((p \rightarrow q) \leftrightarrow t) \vee (p \rightarrow t)$ es F. Averiguar el valor de p, q y t.

** p es V, q es V y t es F. Resolución por Tu Profe en Linea.

(k) $((s \rightarrow p) \rightarrow (p \leftrightarrow q)) \vee (p \wedge r)$ es F y s es V. Averiguar el valor de p, q y r.

** p es V, q es F y r es F. Resolución por Tu Profe en Linea.

(l) $\neg((p \rightarrow q) \rightarrow s(s \rightarrow r))$ es V. Averiguar el valor de $(\neg q \rightarrow \neg p) \veebar (r \rightarrow s)$ y de $(\neg p \vee q) \wedge (s \wedge \neg r)$

** $(\neg q \rightarrow \neg p) \veebar (r \rightarrow s)$ es F y $(\neg p \vee q) \wedge (s \wedge \neg r)$ es V. Resolución por ProfesorTriquero.

(m) $(((p \veebar q) \wedge r) \rightarrow (s \leftrightarrow r)) \vee ((q \rightarrow p) \rightarrow (\neg s \wedge t))$ es F. Averiguar el valor de $p \rightarrow q$, de $r \veebar s$ y de $(p \vee q) \rightarrow (\neg s \veebar t)$

** $p \rightarrow q$ es F, $r \veebar s$ es V y $(p \vee q) \rightarrow (\neg s \veebar t)$ es V. Resolución por Tu Profe en Linea.

21. Averiguar si los siguientes razonamientos son válidos y evaluar su solidez.

(a) Por el pronóstico semanal, sabemos que si es martes, llueve y hace frío. También sabemos que no llueve. Demostrar que no es martes.

** Razonamiento válido. Usamos m:"*es martes*", l:"*llueve*", f:"*hace frio*". Por lo que el razonamiento será

$m \rightarrow l \wedge f$
$\neg l$

$\neg l \vee \neg f$ (adición)
$\neg(l \wedge f)$ (De Morgan)

$\neg m$ (mod. tol.)

(b) Para bajar de peso debo hacer dieta o ir al gimnasio. Si voy al gimnasio gasto dinero. Quiero bajar de peso sin gastar dinero. Entonces voy a hacer dieta.

** Razonamiento válido. Utilizando b:"*bajo de peso*", d:"*hago dieta*", g:"*voy al gimnasio*" y s:"*gasto dinero*", se demuestra:

$b \rightarrow d \vee g$
$g \rightarrow s$
b
$\neg s$

$d \vee g$ (mod. pon.)
$\neg g$ (mod. tol.)

---

d (mod. tol. pon.)

Planteo por Maria Alicia Piñeiro.

(c) Este disco está roto o fue borrado. Si estuviera roto, tendría marcas en las pistas. Si el disco está protegido, no se puede borrar. Por lo tanto, este disco tiene marcas en las pistas o no está proteigo.

** Razonamiento válido. Resolución por Maria Alicia Piñeiro.

(d) Si n es un número entero impar, entonces n^2 es impar.

** Razonamiento válido. Resolución por Aula de Matemática.

(e) Si $3n + 2$ es un número entero impar, entonces n es impar.

** Razonamiento válido. Resolución por Aula de Matemática.

(f) Si n^2 es un número entero par, entonces n es par.

** Razonamiento válido. Resolución por Aula de Matemática.

(g) Si el resultado de multiplicar un número entero por 5 y sumarle 3 es un número par, el número inicial es impar

** Razonamiento válido. Demostraremos el contrarrecíproco: "*Si un nùmero no es impar, el resultado de multiplicarlo por 5 y sumarle 3 no será par*": Utilizamos el numero entero $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{l} n \text{ es par} \\ \hline n = 2k \text{ con } k \in \mathbb{Z} \\ 5n + 3 = 10k + 3 = 2(5k + 1) + 1 \text{ con } (5k + 1) \in \mathbb{Z} \\ 5n + 3 \text{ es impar} \\ \hline 5n + 3 \text{ no es par} \end{array}$$

(h) La suma de dos múltiplos de 3 es un número par

** Razonamiento inválido. Contraejemplo: $3 + 6 = 9$. 3 y 6 son múltiplos de 3, pero 9 no es par

(i) La suma de un múltiplo de 3 y de un múltiplo de 2 nunca es múltiplo de 3

** Razonamiento inválido. Contraejemplo: $3 + 6 = 9$. 3 es múltiplo de 3 y 6 es múltiplo de 2, pero 9 es múltiplo de 3.

(j) Si un número natural es múltiplo de 10, entonces es múltiplo de 100

** Razonamiento inválido. Contraejemplo: 30 es múltiplo de 10, pero no es múltiplo de 100.

(k) Dados dos números racionales, r y s. La suma de r y s es un número racional. Tambien se podría leer como: La suma de dos números racionales es racional.

** Razonamiento válido. Resolución por Aula de Matemática.

(l) El producto de dos números números racionales es racional.

** Razonamiento válido. Resolución por Aula de Matemática.

(m) Para cualquier número natural n se verifica que $n^2 - (n-1)^2 < 20$ o que $n^2 - (n-1)^2 > 50$.

(n) Dadas tres rectas no verticales R_1, R_2 y R_3. Si $R_1 \perp R_2$ y $R_2 \perp R_3$, entonces $R_1 \parallel R_3$ o bien $R_1 \sim R_3$.

** Razonamiento válido. Utilizamos las rectas R_1, R_2 y R_3 a partir de la ecuación $y = mx + b$.

$$\begin{array}{l} R_1 \perp R_2 \\ R_2 \perp R_3 \\ \hline m_2 = -\frac{1}{m_1} \\ m_2 = -\frac{1}{m_3} \\ m_1 = m_3 \quad \text{(despeje)} \\ (m_1 = m_3) \wedge T_0 \quad \text{(identidad)} \\ (m_1 = m_3) \wedge [(b_1 = b_3) \vee (b_1 \neq b_3)] \quad \text{(binar. excl.)} \\ [(m_1 = m_3) \wedge (b_1 = b_3)] \vee [(m_1 = m_3) \wedge (b_1 \neq b_3)] \quad \text{(distribut.)} \\ \hline (R_1 \sim R_3) \vee (R_1 \parallel R_3) \quad \text{(props. } \sim \text{ y } \parallel\text{)} \end{array}$$

(o) Si $k > 2$, la parábola $x^2 + k.x + 1$ no tiene raíces.

** Razonamiento inválido. Se puede refutar mediante:

$$\begin{array}{l} k > 2 \\ \hline k^2 > 4 \\ k^2 - 4 > 0 \\ b^2 - 4ac = k^2 - 4 \quad \text{(calc. discrim.)} \\ b^2 - 4ac > 0 \\ \hline x^2 + k.x + 1 \text{ tiene 2 raíces reales} \end{array}$$

También se puede buscar un contraejemplo: $k = 3$ y $x^2 + 3.x + 1$ tiene las raíces reales $x_1 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ y $x_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$.

(p) Si $a.b < 0$ y $|a| > b > 0$, la parábola $x^2 + a$ tiene dos raíces reales.

** Razonamiento válido.

$$\begin{array}{l} a.b < 0 \\ |a| > b > 0 \\ \hline (a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0) \quad \text{(condición desigualdad)} \\ b > 0 \quad \text{(simplif.)} \\ a > 0 \quad \text{(distr., ident. y simplif.)} \\ -4a > 0 \quad \text{(calc. discrim.)} \\ \hline x^2 + a \text{ tiene dos raíces reales.} \end{array}$$

22. Simbolizar las siguientes proposiciones, indicando el diccionario de lenguaje y el conjunto universal.

(a) Hay automóviles veloces y cómodos

** Dado el universo $U = \{x \mid x \text{ es un automóvil}\}$ y los predicados $V(x)$: *"x es veloz"*, $C(x)$: *"x es cómodo"*. Se simboliza $\exists x : V(x) \wedge Q(x)$

(b) No todos los número enteros múltiplos de 5 son impares

** Dado el universo $U = \mathbb{Z}$ y los predicados $P(x)$: *"x es múltiplo de 5"* y $Q(x)$: *"x es impar"*. Se simboliza $\neg(\forall x : P(x) \to Q(x))$

(c) Existen números naturales que son múltiplos de 2 pero no de 3

** Dado el universo $U = \mathbb{N}$ y los predicados $P(x)$: *"x es múltiplo de 2"* y $Q(x)$: *"x es múltiplo de 3"*. Se simboliza $\exists x : P(x) \wedge \neg Q(x)$

(d) Considerando las tazas en mi cocina, escribir las siguientes variantes de proposiciones: Las tazas que me regaló mi abuela son de porcelana. Algunas de las tazas que me regaló mi abuela son de porcelana. Todas mis tazas me las regaló mi abuela y son de porcelana.

** Dado el universo $U = \{x \mid x \text{ es una taza de mi cocina }\}$ y los predicados $P(x)$: *"mi abuela me regaló la taza x"* y $Q(x)$: *"la taza x es de porcelana"*. Se simboliza $\forall x : P(x) \to Q(x)$, $\exists x : P(x) \wedge Q(x)$, $\forall x : P(x) \wedge Q(x)$. Resolución por Maria Alicia Piñeiro.

(e) Si todo es fácil y agradable entonces Marta no estudiará. No hay cosas desagradables. Además, todo es fácil. Entonces, Marta no estudiará.

** Dado el universo $U = \{x \mid x \text{ es una cosa }\}$ y los predicados $F(x)$: *"x es fácil"*, $A(x)$: *"x es agradable"*, $E(y)$: *"y estudiará"* y la constante m =Marta. Se simboliza

$$\begin{array}{l} (\forall x : F(x) \wedge A(x)) \to \neg E(m) \\ \neg(\exists x : \neg A(x)) \\ \forall x : F(x) \\ \hline \neg E(m) \end{array}$$

.

Resolución por MathLogic.

(f) Todo ejecutivo que sea poeta no es un hombre imaginativo. Todo hombre imaginativo es amante del riesgo. Por consiguiente, si todo hombre imaginativo no es poeta, ningún ejecutivo es poeta.

** Resolución por MathLogic.

(g) Ana no duerme. Todos los que tienen sueño, duermen. Hay una persona joven que no tiene sueño. Todos los arquitectos que no tienen sueño escuchan la radio. En todos los casos los jóvenes tienen sueño o usan la computadora. Marcos es un arquitecto que usa la computadora. No hay nadie que escuche la radio y use la computadora. Hay alguien que no es arquitecto, escucha la radio y tiene sueño.

** Dado el universo $U = \{x \mid x \text{ es una persona}\}$, y los predicados $D(x)$: *"x duerme"*, $S(x)$: *"x tiene sueño"*, $J(x)$: *"x es joven"*, $A(x)$: *"x es arquitecto"*, $R(x)$: *"x escucha la radio"* y $C(x)$: *"x usa la computadora"*. Se simboliza $\neg D(Ana)$, $\forall x : S(x) \to D(x)$, $\exists x : J(x) \wedge S(x)$, $\forall x : A(x) \wedge \neg S(x) \to R(x)$, $\forall x : J(x) \to S(x) \vee C(x)$, $A(Marcos) \wedge C(Marcos)$, $\neg(\exists x : R(x) \wedge C(x))$ y finalmente $\exists x : \neg A(x) \wedge R(x) \wedge S(x)$.

23. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones cuantificadas.

(a) $\exists x \in U : x^2 < 26$, con $U = \{7, 8\}$

** Falso. Resolución por Tu Profe en Linea.

(b) $\exists x \in \mathbb{N} : x^2 - 9 = 0$

** Verdadero, ya que $3^2 - 9 = 9 - 9 = 0$. Resolución por Tu Profe en Linea.

(c) $\exists x \in \mathbb{R} : x + 3 < 6$

** Verdadero, ya que $2 + 3 = 5 \not< 6$. Resolución por Tu Profe en Linea.

(d) $\forall x \in \mathbb{Z} : x - 5 < 8$

** La proposición es falsa, ya que $20 \in \mathbb{Z} \wedge 20 - 5 = 13 \not< 8$. Resolución por MathLogic.

(e) Dado $U = \{1, 2, 3, 4\}$ y los predicados $P(x)$: *"x es múltiplo de 2"* y $Q(x)$:$x \leq 3$, determinar el valor de $(\exists x : P(x) \wedge Q(x)) \wedge (\forall x : P(x) \vee Q(x)) \wedge (\forall x : P(x) \to Q(x))$

** Como $(\forall x : P(x) \to Q(x))$ es falsa, toda la proposición es falsa

(f) Dadas dos variables $x, y \in \{1, 2, 3\}$. Hallar el valor de verdad de $(\forall x \exists y : x + y = 2) \vee \neg(\forall x \exists y : x + y = 4) \vee (\forall x \forall y : x + y \geq 4)$

** La proposiciòn es falsa. $(\forall x \exists y : x + y = 2)$ es falsa ya que para $x = 3$ no existe y que cumpla, $\neg(\forall x \exists y : x + y = 4)$ es falsa ya que para $x = 1$ tenemos $y = 3$, para $x = 2$ tenemos $y = 2$, para $x = 3$ tenemos $y = 1$ y finalmente $(\forall x \forall y : x + y \geq 4)$ es falsa ya que para $x = 2$ e $y = 1$ no se cumple.

(g) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 1$

** La proposición es verdadera. Dado un x genérico puedo elegir $y = 1 - x$ que cumple la proposición.

(h) $\exists x \in \mathbb{N} \forall y \in \mathbb{N} : x > y \wedge x^2 < y$

** La proposición es falsa. Para un determinado y debo elegir un x que cumpla $x^2 < y < x$, es decir, $x^2 < x$. Ningún $x \in \mathbb{N}$ cumple esa condición.

(i) $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : x - y \leq 0 \to x < y + 2$

** La proposición es verdadera. Como $x \leq y < y + 2$, si x cumple el antecedente $x \leq y$, seguro cumple el consecuente $x < y + 2$.

(j) Dados $x, y, z \in \mathbb{R}$, hallar el valor de verdad de $\forall x \forall y \exists z : x < y \to x < z < y$

** Verdadero, si elegimos $z = \dfrac{x+y}{2}$ (el promedio), cumplirá la condición. F, por las propiedades de la igualdad, que se cumplen para todos los número reales.

(k) Dados $x, y, z \in \mathbb{R}$, hallar el valor de $\exists x \exists y \exists z : x = y \wedge y = z \to x \neq z$

** Falso, por las propiedades de la igualdad, que se cumplen para todos los número reales.

24. Resuelve los siguientes ejercicios variados

(a) Dado el esquema proposicional $F(x) : -x < 1 \to x > 5$ donde x es un número entero, encontrar dos constantes para x tales que se conviertan en una proposicion verdadera y otros dos para que sea falsa.

** Por ejemplo, 10 y 12 para que sea V, y -6 y -7 para que sea F. Resolución por MathLogic.

(b) Analizar si las siguientes proposiciones son equivalentes: $(\exists x : p(x)) \wedge (\forall x : p(x) \to q(x))$ con $\exists x : q(x)$.

** Las expresiones no son equivalentes. Resolución por Maria Alicia Piñeiro.

(c) Utilizando el predicado $P(x) = 2x + 1 > 2$ con el conjunto $U = \{1, 2, 3\}$, encontrar por lo menos cinco proposiciones verdaderas.

** Algunos ejemplos son $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $\forall x : 2x + 1 > 2$, $P(1) \wedge P(2)$, $\exists x : 2x + 1 \leq 2$. Resolución por MathLogic.

25. A partir del webinar La lógica y los circuitos, responder:

►**(a)** ¿Qué elementos físicos se han usado para representar los dos estados lógicos (0/1 o F/V)?

** Historicamente se ha utilizado la corriente electrica para para tener dichos estados. Cuando los transistores tienen un voltaje *alto* se activa el paso de corriente emulando el estado V, mientras que si tienen un voltaje *bajo* no pasará corriente y estarán en estado F. Sin embargo para establecer los dos estados se puede utilizar cualquier tipo de corriente, Steve Mould utilizó agua y varias personas han experimentado con dominos, entre ellos, Neil Fraser, Stand-up Maths y Numberphile.

(b) ¿Cómo se podría armar físicamente una lógica de 3 valores?

** Una opción es utilizar tres corrientes: baja, uno mediana y uno alta. La dificultad a partir de allí es armar maquinas físicas que logren representar las compuertas lógicas a partir de dichos voltajes. Análogamente cualquier cosa que represente una corriente (como agua o dominós) podría ser empleada.

(c) ¿Qué dificultades existen al utilizar lógica en los circuitos?

** La dificultad principal para representar los estados lógicos es pasar de procesos físicos analógicos, con posibilidad de tener infinitos valores, a valores digitales con dos estados bien definidos.

►**(d)** ¿Qué es el álgebra de Boole y que relación tiene con la lógica?

** El álgebra de Boole es un sistema matemático para representar variables lógicas. Para constituir el sistema se definen operaciones complemento, suma, producto, etc), valores que pueden tomar las variables (0,1) y otras notaciones y reglas que permiten modelar circuitos lógicos.

►**(e)** ¿Cómo se representan los operadores lógicos típicos en el álgebra de Boole?

** Negación $\neg p$ se escribe $\bar{p}$, conjunción $p \wedge q$ es producto $p.q$ y disyunción $p \vee q$ es suma $p + q$. Estas operaciones se definen para ser utilizadas con los valores 0 y 1 a partir de reglas internas, por ejemplo los casos que definen a la siyunción son $0 + 0 = 0$, $1 + 0 = 1$, $0 + 1 = 1$, $1 + 1 = 1$, que son análogos a la tabla de verdad.

(f) ¿Cómo se conoce a las formas normales disyuntiva (DNF) y conjuntiva (CNF) en el álgebra de Boole?

** A la DNF se le suele llamar *suma de productos* y a la CNF *producto de sumas*.

(g) A partir de las tablas de verdad mostradas en el webinar, indicar cuál es la expresión lógica que representa la salida de los circuitos lógicos:

- salida del Multiplexor,
- Sum y Carry en Half Adder,
- Sum y CarryOut en Full Adder,
- Difference y Borrow en Half Subtractor,
- salidas del Decodificador,
- salidas del Demultiplexor.

(h) Encontrar algún error en el webinar o tema sobre el cuál se debe aclarar algo

(i) Buscar algún aspecto de la relación entre matemática discreta y teoría de circuitos que no haya sido tratado en el webinar