
Práctica 1: Lógica proposicional y de primer orden

Comisión: Rodrigo Cossio-Pérez y Leonardo Lattenero

1. Demostrar que las siguientes relaciones son de equivalencia, indicar sus clases de equivalencia y el conjunto cociente.

- (a) La relación $\sim = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid \exists k \in \mathbb{Z} \ (x - y = 2k)\}$ donde $x \sim y$ se lee como “ x tiene la misma paridad que y ”.
- (b) La relación $\sim = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x^2 = y^2\}$ donde $x \sim y$ se lee como “ x tiene el mismo cuadrado que y ”.
- (c) Considerando un rectángulo L_1 de lados a y b con área $a.b$ y otro rectángulo L_2 de lados c y d con área $c.d$, donde $a, b, c, d \in (0, +\infty)$. Se define la relación $\sim = \{(L_1, L_2) \mid a.b = c.d\}$ donde $L_1 \sim L_2$ se lee como “ L_1 tiene la misma área que L_2 ”.
- (d) Considerando la fracción q_1 representada por $\frac{a}{b}$ y otra fracción q_2 representada por $\frac{c}{d}$, con $a, c \in \mathbb{Z}$ y $b, d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Se define la relación: $\sim = \{(q_1, q_2) \mid a.d = c.b\}$ donde $q_1 \sim q_2$ se lee como “ q_1 es una fracción equivalente a q_2 ”.

** Reflexividad: $\forall a, b : \left(\frac{a}{b}\right) R \left(\frac{a}{b}\right)$ ya que $a.b = a.b$.

Simetría: $\forall a, b, c, d : \left(\frac{a}{b}\right) R \left(\frac{c}{d}\right) \rightarrow \left(\frac{c}{d}\right) R \left(\frac{a}{b}\right)$ ya que $a.d = c.b \rightarrow c.b = a.d$.

Transitividad: $\forall a, b, c, d, e, f : \left(\frac{a}{b}\right) R \left(\frac{c}{d}\right) \wedge \left(\frac{c}{d}\right) R \left(\frac{e}{f}\right) \rightarrow \left(\frac{a}{b}\right) R \left(\frac{e}{f}\right)$

ya que $(a.d = c.b) \wedge (c.f = e.d) \Rightarrow (a.d = c.b) \wedge (c = \frac{e.d}{f}) \Rightarrow a.d = \frac{e.d}{f}.b \Rightarrow a = \frac{e}{f}.b \Rightarrow af = eb$

2. Averiguar si las siguientes relaciones son de orden amplio u orden estricto y demostrarlo

- (a) Dada la relación R definida en \mathbb{R} , se establece la relación como “ x es menor o igual que y ” donde $x R y$ se anota $x \leq y$ definida de la forma $R = \{(x, y) \mid \exists k \in [0, +\infty) \ (y = x + k)\}$

** Relación de orden amplio (transitiva, antisimétrica, reflexiva)

- (b) Dada la relación R definida en \mathbb{R} , se establece la relación como “ x es divisor de y ” donde $x R y$ se anota $x \mid y$ definida de la forma $R = \{(x, y) \mid \exists n \in \mathbb{N} \ (y = n.x)\}$

** Relación de orden amplio (transitiva, antisimétrica, reflexiva)

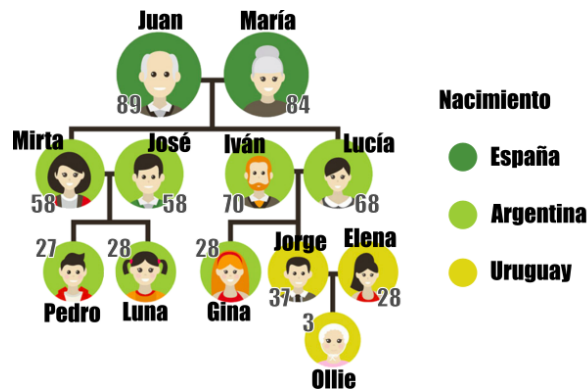
- (c) Dados dos conjuntos A y B se define la relación “ A es subconjunto de B ” donde $x R y$ se anota $A \subseteq B$ definida de la forma $R = \{(A, B) \mid \forall x \in A \ (x \in A \rightarrow x \in B)\}$

** Relación de orden amplio (transitiva, antisimétrica, reflexiva)

- (d) Dada la relación R definida en \mathbb{R} , se establece la relación “ x es menor que y ” donde $x R y$ se anota $x < y$ definida de la forma $R = \{(x, y) \mid \exists k \in (0, +\infty) \ (y = x + k)\}$

** Relación de orden estricto (transitiva, asimétrica e irreflexiva)

3. Considerando el siguiente árbol genealógico:



- (a) Verificar que la relación “x tiene el mismo color de pelo que y” es una relación de equivalencia y representarla con un grafo. Indicar las clases de equivalencia y el conjunto cociente.
- (b) Verificar que la relación “x nació en el mismo país que y” es una relación de equivalencia y representarla con un grafo. Indicar las clases de equivalencia y el conjunto cociente.
- (c) Verificar que la relación “x es descendiente de y” es una relación de orden estricto parcial. Representar la relación en un diagrama de Hasse.
- (d) Explicar porque la relación “x es de la misma edad o mayor que y” NO ES una relación de orden amplio.
- ** Porque no es antisimétrica. $(Mirta)R(José) \wedge (José)R(Mirta)$ pero $José \neq Mirta$. También se puede verificar con Luna, Gina y Elena, que tienen la misma edad.

4. Resolver los siguientes ejercicios variados

- (a) Sean R_1 y R_2 dos relaciones de equivalencia en A . Averiguar si $R_1 \cap R_2$ y $R_1 \cup R_2$ son relaciones de equivalencia en A .
- ** $R_1 \cap R_2$ es de equivalencia mientras que no necesariamente lo es $R_1 \cup R_2$.
- (b) Sea R una relación definida en el conjunto de número reales tal que xRy si y solo si x e y difieren por menos de 1, es decir, $|x - y| < 1$. Demostrar que R no es una relación de equivalencia.
- ** R es reflexiva porque $|x - x| = 0 < 1$.
- R es simétrica ya que $|x - y| = |y - x|$ por lo que $|x - y| < 1 \Rightarrow |y - x| < 1$.
- R NO es transitiva. Contraejemplo: $x = 2.8$, $y = 1.9$, y $z = 1.1$, donde se ve que $|2.8 - 1.9| = 0.9 < 1$, $|1.9 - 1.1| = 0.8 < 1$, pero $|2.8 - 1.1| = 1.7 > 1$.
- Por lo tanto, R no es una relación de equivalencia.
- (c) En \mathbb{Z} se define la relación R mediante: $(a, b) \in R \Leftrightarrow a^2 + a = b^2 + b$. Clasificar R .
- (d) En \mathbb{R}^2 se define la relación \sim mediante: $(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow y = y'$. Probar que \sim es de equivalencia, determinar las clases de equivalencia y el conjunto cociente.
- (e) En $A = \{1, 2, 4, 6, 8\}$ se define la siguiente relación: $xRy \Leftrightarrow 3|x + y$. Definir R por extensión, clasificarla y realizar su gráfico o esquema.
- (f) En \mathbb{N}^2 se define la siguiente relación: $(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a + b' = a' + b$. Demostrar que es de equivalencia, obtener las clases de equivalencia, el conjunto cociente y representarla indicando las clases.
- (g) El conjunto $\{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}\}$ es una partición de A . Obtener la relación de equivalencia asociada a la partición.

- (h) En el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \subseteq B$ se considera la relación de menor o igual. Determinar, si los hubiere, los elementos maximales y minimales, el conjunto de cotas superiores e inferiores, y el supremo e ínfimo.
- (i) En \mathbb{R} , ordenado por la relación de menor o igual, se define el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{n} \wedge n \in \mathbb{N}\}$. Averiguar si A tiene primer y último elemento, si es un conjunto bien ordenado, y en el caso de que admita cotas, si tiene supremo e ínfimo.
- (j) Sea R una relación definida en el conjunto de personas tal que xRy si y solo si x es mayor (en edad) que y . Averiguar si R es una relación de orden amplio/estricto total/parcial.
5. Obtener, si existen, el conjunto de cotas superiores e inferiores de los siguientes conjuntos y el supremo e ínfimo, considerando el superconjunto y la relación de orden dados.
- (a) $A = (0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ con la relación \leq (menor o igual).
- (b) $B = [-6, 5] \subseteq \mathbb{R}$ con la relación \leq (menor o igual).
- (c) $C = (-6, 5) \subseteq \mathbb{R}$ con la relación \leq (menor o igual).
- (d) $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ con la relación \subseteq (subconjunto de) con $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$.