Práctica 5: Funciones

Comisión: Rodrigo Cossio-Pérez y Leonardo Lattenero

1. Indicar cuáles de las siguientes relaciones son funciones y en caso de que si, demostrarlo/justificarlo y escribir la relación con la notación de funciones.

   (a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = |y|\}$

   (b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2y + 5 = x^2\}$

   (c) $R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid 3y - 7 = x\}$

   (d) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sqrt{x}\}$

   (e) $R = \{(x, y) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x}\}$

   (f) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x + 1 \ \vee \ y = 4x + 1\}$

   (g) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y = 3x + 1 \ \wedge \ x \geq 0) \ \vee \ (y = 4x + 1 \ \wedge \ x < 0)\}$

2. Dada la relación que vincula los elementos indicados, analizar si corresponde a una función o no. De aquellas que son funciones, indicar dominio y codominio. De aquellas que no lo son, especificar què condición es la que no se cumple: existencia, unicidad o ambas.

   (a) Estudiantes del curso con su fecha de nacimiento.

   (b) Estudiantes del curso con las materias que aprobó.

   (c) Autos con el taller en donde se les hizo un mantenimiento.

   (d) Autos con el taller en donde se les hizo el primer mantenimiento.

   (e) Cursos de la UNQ con el aula en que se dictan.

   (f) Palomas con la cantidad de plumas que tienen.

   (g) Ciudades de Argentina con la provincia donde están.

   (h) Ciudades de Argentina con la provincia de la que son capital.

3. Se definen las siguientes relaciones en $A = \{a, b, c, d, e\}$, indicar de estas cuáles son funciones. Para las que sí sean funciones, indicar si son inyectivas, sobreyectivas y/o biyectivas, y cuando sea posible definir por extensión la función inversa.

   (a) $R = \{(a, b), (b, c), (c, d)\}$

   (b) $R = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, e), (e, a)\}$

   (c) $R = \{(a, b), (b, c), (b, d), (d, e), (e, a)\}$

   (d) $R = \{(a, a), (b, a), (c, d), (d, a), (e, a)\}$

   (e) $R = \{(a, c), (b, e), (c, a), (d, b), (e, d)\}$

4. De cada una de estas funciones, indicar si es inyectiva y sobreyectiva, justificando. Para las que sean biyectivas, decir cuál es la función inversa.

(a) La función que indica la fecha de nacimiento de cada estudiante de la Universidad, donde el codominio son los días desde el 1ro de enero de 1800.

(b) La función del número de vagón en el que está cada pasajero de un tren que no tiene vagones vacíos.

(c) La función del número de asiento de los pasajeros de un vuelo. Pensar en dos casos: avión lleno, y avión no lleno.

(d) La función que indica el número de DNI de residentes de Argentina, tomando como codominio los naturales.

(e) La función que relaciona de las personas que viven en un edificio e indica el departamento en que vive cada una.

(f) La función que va de cada provincia de Argentina a su capital, tomando como codominio el conjunto de las ciudades capitales de provincia.

5. Graficar las siguientes funciones $f : D_f \to \mathbb{R}$, indicando el dominio más amplio posible y analizar si es inyectiva, sobreyectiva y/o biyectiva. En caso de que sea posible, definir la inversa.

(a) $f(x) = 2x - 1$

(b) $f(x) = 7 - 3x$

(c) $f(x) = x^2 + 4x - 3$

(d) $f(x) = x^2 - 4x + 4$

(e) $f(x) = x^2 - 5$

(f) $f(x) = -x^2 + 1$

(g) $f(x) = 3(x + 1)(x - 1)$

(h) $f(x) = (x - 1)^2 - 16$

(i) $f(x) = 4(x + 1)^2 - 4$

6. Graficar las siguientes funciones $f : D_f \to \mathbb{R}$, indicando el dominio más amplio posible e imagen.

(a) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & si\ x \leq 1 \\ x^2 & si\ x > 1 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} -x & si\ \ x \leq 0 \\ x & si\ 0 < x \leq 3 \\ -x & si\ x > 3 \end{cases}$

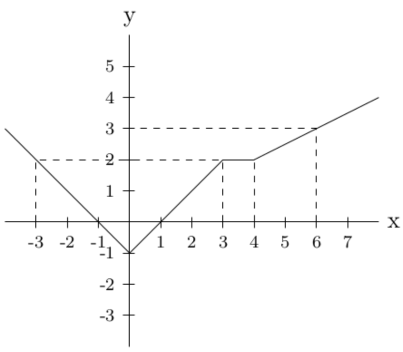
(c) $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & si\ \ x \leq 2 \\ x^2 & si\ \ 2 < x \leq 3 \\ \dfrac{x+6}{9} & si\ x > 3 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 7 & si\ \ x \leq 2 \\ x + 4 & si\ \ x > 2 \end{cases}$

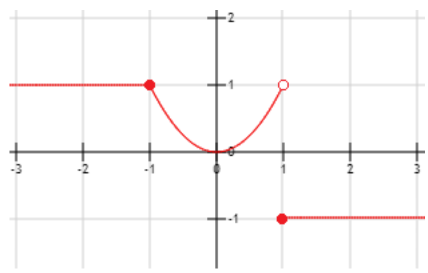
(e) $f(x) = |x|$

7. Indicar a qué función corresponde este gráfico. Observando el gráfico, indicar si la función es inyectiva, y si es sobreyectiva.

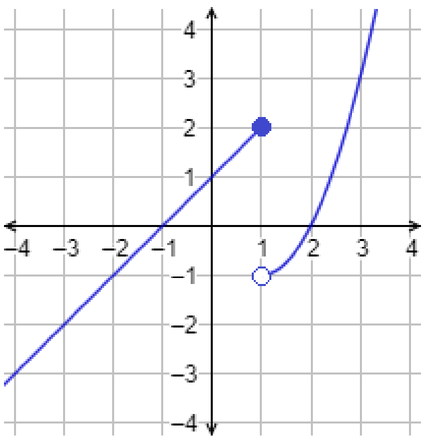
(a)



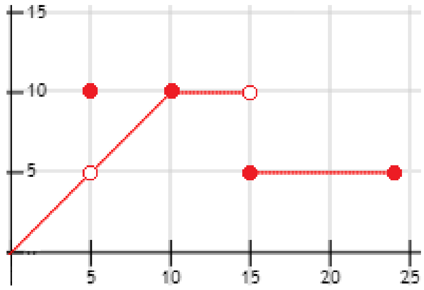
(b)



(c)



(d)



8. Definir una función que describa la situación, indicar el dominio, codominio e imagen y graficarla.

   (a) Un negocio mayorista ofrece la siguiente oferta sobre un tipo de galletitas: hasta 5 paquetes se venden a 6 pesos el paquete; pasando los 5 paquetes hasta los 10, 5 pesos por paquete adicional; pasando los 10 paquetes, 3 pesos por paquete adicional. Por ejemplo, si una persona compra 12 paquetes, paga $(5.6)+(5.5)+(2.3) = 61$ pesos.

   (b) Otro negocio mayorista ofrece una oferta distinta: hasta 5 paquetes se venden a 6 pesos el paquete; entre 6 y 10 paquetes se vende a 5 pesos el paquete; a partir de 11 paquetes, se vende a 4.5 pesos por paquete. Por ejemplo, si una persona compra 13 paquetes, paga 13 x 4.5 = 58.5 pesos.

   (c) El mismo mayorista anterior pero redondeando como no tiene monedas inferiores a un peso para dar vuelto se ve obligado a redondear para abajo el valor cobrado

   (d) Otro negocio mayorista vende las galletitas sueltas por peso y no por paquete. Ofrece lo siguiente: hasta 3kg se vende a 30 pesos el kilo; más de 3kg y hasta 6kg se vende a 25 pesos el kilo; más de 6kg se vende a 20 pesos el kilo. Por ejemplo, si una persona compra 7kg y paga 7 x 20 = 140 pesos. Debido a que el proveedor cobra digitalmente, se puede pagar el monto exacto sin redondear.

9. Considerando la gráfica de $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} \mid f(x) = \sqrt{x}$, graficar las siguientes funciones $g : D_f \to \mathbb{R}$, indicando el dominio más amplio posible e imagen.

   (a) $g(x) = \sqrt{-2x}$

   (b) $g(x) = 2\sqrt{x+1}$

   (c) $g(x) = \sqrt{4x} + 5$

   (d) $g(x) = -\sqrt{x} + 3$

10. Considerando la gráfica de $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \mid f(x) = \dfrac{1}{x}$, graficar las siguientes funciones $g : D_f \to \mathbb{R}$, indicando el dominio más amplio posible e imagen.

   (a) $g(x) = \dfrac{2}{x}$

   (b) $g(x) = \dfrac{1}{3x} - 2$

   (c) $g(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$

   (d) $g(x) = \dfrac{2x+3}{4x-1}$

11. Considerando la gráfica de las funciones trigonométricas básicas, graficar las siguientes funciones $g : D_f \to \mathbb{R}$, indicando el dominio más amplio posible, imagen y período.

(a) $g(x) = \sin(2x)$

(b) $g(x) = 3\sin(x)$

(c) $g(x) = -2\sin(x)$

(d) $g(x) = \sin(x - \pi)$

(e) $g(x) = \sin(\pi x) + 5$

(f) $g(x) = \sin(-x)$

(g) $g(x) = -2\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 4$

(h) $g(x) = 2\cos(3x)$

(i) $g(x) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

(j) $g(x) = \cos(2x + 100\pi)$

(k) $g(x) = \tan(2x) - 1$

12. Con base en los criterios dados, redefine las funciones trigonométricas para que sean biyectivas. Luego, determina y grafica la función inversa especificada, estableciendo su dominio e imagen.

(a) Redefinir el dominio de $\sin(x)$ priorizando los números cercanos a cero para obtener su inversa, $\arcsin(x)$.

(b) Redefinir el dominio de $\cos(x)$ priorizando los números positivos para obtener su inversa, $\arccos(x)$.

(c) Redefinir el dominio de $\tan(x)$ priorizando los números cercanos a cero para obtener su inversa, $\arctan(x)$.

13. Resolver las siguientes ecuaciones hallando todas las soluciones posibles.

(a) $2\sin(x) = 1$

(b) $3\sin(x) = 0$

(c) $4\sin^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$

(d) $\sin(x) - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

(e) $2\cos(-x) = \sqrt{2}$

(f) $20\cos(x) + 60 = -80$

14. Considerando las gráficas de las funciones exponencial y logaritmo, graficar las siguientes funciones $g : D_f \to \mathbb{R}$, indicando el dominio más amplio posible e imagen.

(a) $g(x) = 2\ln(x)$

(b) $g(x) = \ln(x) + 1$

(c) $g(x) = \ln(x - 4)$

(d) $g(x) = -\ln(x)$

(e) $g(x) = -3\ln(x + 1) - 2$

(f) $g(x) = \ln(-x)$

(g) $g(x) = \log_2(x^3)$

(h) $g(x) = e^{2x}$

(i) $g(x) = e^{-x}$

(j) $g(x) = 3e^{x}$

(k) $g(x) = -e^{4x}$

(l) $g(x) = e^{x-2}$

(m) $g(x) = 2^{x+1}$

15. Resolver las siguientes ecuaciones.

(a) $2^x = 10$

(b) $2\ln(x) = 4$

(c) $e^{x^2+1} = \frac{1}{e^2}$

(d) $\ln(x) + \ln(x^2) = -\ln(6)$

16. Hallar la función inversa cuando sea posible, indicando el dominio e imagen.

(a) $f(x) = \frac{2x - 1}{3}$

(b) $g(x) = 2x^2 + x - 1$

(c) $h(x) = \ln(x^2 - 1) + 5$

(d) $i(x) = 4 + 16e^{-\frac{1}{2}x}$

17. Utilizando las funciones parte entera techo/piso y la parte fraccionaria, resolver las siguientes operaciones.

(a) $\lfloor 2 \rfloor$

(b) $\lfloor 2.3 \rfloor$

(c) $\lfloor 2.9 \rfloor$

(d) $\lfloor -6 \rfloor$

(e) $\lfloor -6.8 \rfloor$

(f) $\lfloor -6.1 \rfloor$

(g) $\lceil 1.7 \rceil$

(h) $\lceil 1.2 \rceil$

(i) $\lceil 1 \rceil$

(j) $\lceil -10.5 \rceil$

(k) $\lceil -10 \rceil$

(l) $\mathrm{frac}(4.8)$

(m) $\mathrm{frac}(4)$

(n) $\mathrm{frac}(-5.2)$

(ñ) $\mathrm{frac}(-5)$

18. Graficar las siguientes funciones $f : D_f \to \mathbb{R}$, indicando el dominio más amplio posible e imagen, y estudiar si son inyectivas, sobreyectivas y/o biyectivas.

(a) $\lfloor x \rfloor$

(b) $\lceil x \rceil$

(c) $\text{frac}(x)$

(d) $3(x - \lfloor x \rfloor)$

19. Utilizando la función módulo-n, resolver las siguientes operaciones.

(a) $5 \bmod 3$

(b) $18 \bmod 3$

(c) $-2 \bmod 3$

(d) $100 \bmod 7$

(e) $18 \bmod -3$

(f) $-2 \bmod -3$

20. En cada caso de ser posible, definir las funciones $g \circ f$ y $f \circ g$ indicando su dominio más amplio y codominio. Evidenciar que las mismas son diferentes mediante un par ordenado o su gráfico.

(a) $f(x) = 3x$ y $g(x) = x - 1$

(b) $f(x) = \lfloor x \rfloor$ y $g(x) = x^2$

(c) $f(x) = 2x$ y $g(x) = \sqrt{x}$

(d) $f(x) = \sin(x)$ y $g(x) = 3x + 4$

(e) $f(x) = 3x$ y $g(x) = \begin{cases} x+3 & si \;\; x \le 6 \\ x+5 & si \;\; x > 6 \end{cases}$

(f) $f(x) = |x|$ y $g(x) = x + 4$

(g) $f(x) = \log(x)$ y $g(x) = x^2$

(h) $f(x) = e^x$ y $g(x) = |x|$

(i) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = \cos(x)$

(j) $f(x) = \sin(x)$ y $g(x) = 2x$

(k) $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 3x - 1$

(l) $f(x) = \ln(x)$ y $g(x) = x - 1$

(m) $f(x) = e^{-x}$ y $g(x) = \ln(x)$

(n) $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \ln(x - 1)$

(ñ) $f(x) = \ln(x)$ y $g(x) = x^2 + 4$

(o) $f(x) = \sin(x)$ y $g(x) = x^2 - 2x + 1$

21. Dadas las funciones $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R} \mid f(x) = x^2 - 2x$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid g(x) = \dfrac{x}{4}$ y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid h(x) = x + 12$. Calcular las composiciones indicadas:

(a) $f \circ g \circ h$.

(b) $h \circ g \circ f$

(c) $f \circ h \circ h$

(d) $f \circ g \circ g$

(e) $f \circ f$

(f) $f \circ h \circ g^{-1}$

(g) $g \circ h^{-1} \circ h^{-1}$

(h) $g^{-1} \circ f \circ g^{-1}$

(i) $f \circ f^{-1} \circ f$

22. Definir la función f para que tenga la ley de asignación indicada a través de componer las siguientes funciones reales o sus inversas: $g(x) = x^2$, $h(x) = |x|$, $i(x) = x + 1$, $j(x) = -x$ y $k(x) = 2x$.

(a) $f(x) = -x^2$

(b) $f(x) = 2x^2$

(c) $f(x) = 2|x|$

(d) $f(x) = \left(\dfrac{x}{2}\right)^2$

(e) $f(x) = -|x|$

(f) $f(x) = \dfrac{|x|}{2}$

(g) $f(x) = |x| + 2$

(h) $f(x) = (4x)^2$

(i) $f(x) = -|x + 1|$

(j) $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$

(k) $f(x) = -2|x|$

(l) $f(x) = x^2 + 2$

(m) $f(x) = |x + 2|$

(n) $f(x) = (x + 1)^2 - 1$

(ñ) $f(x) = |x + 1| + 2$

(o) $f(x) = -|x| - 2$

(p) $f(x) = (x - 1)^2 - 1$

(q) $f(x) = -\dfrac{|x|}{2}$

(r) $f(x) = |x| - 2$

(s) $f(x) = -\left|\dfrac{x}{2}\right|$

23. La *cota superior asintótica del uso de recursos de un algoritmo* (también llamada *Big O*) indica cuánto aumenta el uso de recursos en función del tamaño de los datos de entrada n, medidos como un numero natural. Por ejemplo, asumiendo valores grandes de n, un algoritmo caracterizado por $O(n)$ duplicará su tiempo de ejecución cuando se duplique n, ya que se comportará como la función $f(n) = n$, que es lineal. Por otra parte, un algoritmo $O(n^2)$ tardará 4 veces más al duplicar n ya que se comportará como la función $f(n) = n^2$, que es cuadrática. Si se tiene tres algoritmos distintos para realizar una tarea, con las siguientes *Big O*: $O(n^2)$, $O(\log n)$ y $O(2^n)$. ¿Qué algoritmo es el idóneo para trabajar con una gran cantidad de datos de entrada? Para responder esto, realizar un gráfico de las funciones n^2, $\log n$ y 2^n. La mejor será aquella que crece con menor rapidez en función de n.

24. Resolver los siguientes ejercicios sobre funciones de orden superior:

    (a) Se denomina A al conjunto de todas las funciones cuadráticas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax^2 + bx + c$ y se define la función $F : A \to \mathbb{R}$ de la forma $\Delta = F(f) \Leftrightarrow$ «Δ es el discriminante de f». Calcular $F(x^2 + x - 2)$, $F(x^2+5x+4)$ y $F(3x^2-x)$. Realizar un diagrama de Venn enlazado para representar las imágenes calculadas.

    (b) Sea F una función que toma un par ordenado (a, b) y una función real f, y devuelve otro par ordenado: se define F de forma que $F((x, y), f) = (f(x), f(y))$. Por ejemplo, usando la función $f(x) = x^2$ obtenemos $F((1, -4), f) = (1, 16)$. Calcular $F((-4, 100), g)$ con $g(x) = \sqrt{x}$. Por otra parte, definir una función h para que $F((2, 5), h) = (3, 6)$.

    (c) La función F toma funciones reales f y devuelve otra función g de la forma $g = F(f) = f \circ f$. Considerando $h(x) = x + 5$, $i(x) = 3x$ y $j(x) = x^2 + x$, calcular $F(h)$, $F(i)$, $F(j)$ y representar lo en un diagrama de Venn enlazado.

    (d) Dadas las funciones $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f_m(x) = mx + 5$ y la función $F : \mathbb{R} \to B \mid F(m) = f_m$. Obtener $F(2)$ y graficarla. Describir qué elementos contiene el conjunto B (el codominio de F).

Respuestas

1. (a) No es función ya que $|x| = |y| \Rightarrow y = \pm x$, por lo que no hay unicidad. Por ejemplo $(1, 1)$ y $(1, -1)$ pertenecen a R.

    (b) Es función. $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists! y \in \mathbb{R} : 2y + 5 = x^2$ con $y = \dfrac{x^2 - 5}{2} \in \mathbb{R}$ (notar que realizar este cálculo da un valor único para y).

    (c) No es función ya que algunos valores de x no tienen un elemento y relacionado. Si acomodamos la ley de asignación obtenemos $y = \dfrac{x + 7}{3}$ pero esta operación no siempre brindará valores naturales, por ejemplo, con $x = 1$ se obtiene $y = \dfrac{8}{3} \notin \mathbb{N}$

    (d) No es función ya que $\sqrt{x}$ no está definida para $x < 0$, por lo que no cumple con la condición de existencia.

    (e) Es función. $\forall x \in [0, +\infty)\ \exists! y \in \mathbb{R} : y = \sqrt{x}$ ya que la operación $\sqrt{x}$ está definida para $[0, +\infty)$ y brinda un único valor.

    (f) No es función ya que hay valores de x relacionados a más de un valor de y. Por ejemplo $x = 1$ está relacionado a $y = 4$ y $y = 5$.

    (g) Es función. Notar que $(x \geq 0) \Leftrightarrow \neg(x < 0)$, por lo que las expresiones $y = 3x + 1$ y $y = 4x + 1$ no sucederán simultaneamente. Es decir, para cada valor de x hay un único valor de y. Esta función también se puede escribir como $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & si\ x \geq 0 \\ 4x + 1 & si\ x < 0 \end{cases}$

2. (a) Es función, todo estudiante nació en una única fecha. D_f: estudiantes del curso. Cod_f: fechas. $f : D_f \to \mathrm{Cod}_f|$ y es la fecha de nacimiento de x.
   (b) No cumple la condición de unicidad. Hay estudiantes que aprobaron más de una materia.
   (c) No cumple la condición de unicidad ni de existencia. Hay autos a los que se les ha hecho mantenimiento en varios talleres y hay autos a los que nunca se les ha hecho mantenimiento.
   (d) No cumple la condición de existencia. Hay autos a los que nunca se les ha hecho mantenimiento.
   (e) No cumple la condición de unicidad. Hay cursos que son dictados en más de un aula.
   (f) No cumple la condición de unicidad. En distintos días una paloma puede perder o ganar plumas. Notar que si se considera la cantidad de plumas que tiene una paloma en un momento dado, sí es función.
   (g) Es función, toda ciudad está en una única provincia. D_f: ciudades de la Argentina. Cod_f: provincias. $f : D_f \to \mathrm{Cod}_f|$ y es la provincia en la que está x.
   (h) No cumple la condición de existencia. Hay ciudades que no son capitales de ninguna provincia.

3. (a) No es función en A ya que d y e no tienen imagen.
   (b) Es función, por lo que la nombraremos f en vez de R. Como $I_f = \{a, b, c, d, e\} = A = \mathrm{Cod}_f$, es sobreyectiva. Además, por inspección, es inyectiva. Por lo que es biyectiva.
   La inversa es $f^{-1} = \{(b, a), (c, b), (d, c), (e, d), (a, e)\}$.
   (c) No es función ya que c no está relacionado a ningún elemento.
   (d) Es función, por lo que la nombraremos f en vez de R. Como $I_f = \{a, d\} \neq \mathrm{Cod}_f$, no es sobreyectiva. Además, $f(a) = f(b) = f(d) = f(e)$, por lo que no es inyectiva. Por lo que no es biyectiva, ni admite inversa.
   (e) Es función, por lo que la nombraremos f en vez de R. Como $I_f = \{a, b, c, d, e\} = A = \mathrm{Cod}_f$, es sobreyectiva. Además, por inspección, es inyectiva. Por lo que es biyectiva.
   La inversa es $f^{-1} = \{(c, a), (e, b), (a, c), (b, d), (d, e)\}$.

4. (a) La función relaciona estudiante $\to$ fecha. La función no es sobreyectiva ya que no hay personas que hayan nacido el 1ro de enero de 1800. Además, no es inyectiva ya que hay personas que nacieron el mismo día.
   (b) La función relaciona pasajero $\to$ vagón. Es sobreyectiva ya que no hay vagones vacíos. Sin embargo, no es inyectiva ya que hay personas que están en el mismo vagón.
   (c) La función relaciona pasajero $\to$ asiento. Para el caso del avíon lleno: La función es sobreyectiva ya que no hay asientos vacíos, y es biyectiva ya que dos personas no pueden ocupar el mismo asiento. Por lo tanto se puede definir la función inversa que relaciona asiento $\to$ pasajero.
   Para el caso del avíon no lleno: La función no es sobreyectiva ya que hay asientos vacíos.
   (d) La función relaciona residente $\to$ DNI. La función no es sobreyectiva ya que hay números naturales que no son DNI. Sin embargo, es inyectiva ya que hay personas que no hay dos personas con el mismo DNI.
   (e) La función relaciona persona $\to$ departamento. La función no es sobreyectiva ya que puede haber departamentos vacíos ni tampoco es inyectiva ya que puede haber dos o más personas que vivan en el mismo departamento.
   (f) La función relaciona provincia $\to$ capital. La función es sobreyectiva ya que no hay provincias sin capital y además es inyectiva ya que no hay dos provincias con la misma capital. Por lo tanto es biyectiva y se puede definir la función inversa que relaciona capital $\to$ provincia.

5. (a) $D_f = \mathbb{R}$. La función $f(x)$ es biyectiva (inyectiva y sobreyectiva).
   La inversa es $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{2}$.

   (b) $D_f = \mathbb{R}$. La función $f(x)$ es biyectiva (inyectiva y sobreyectiva).
   La inversa es $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f^{-1}(x) = \dfrac{-x+7}{3}$.

   (c) $D_f = \mathbb{R}$. La función no es sobreyectiva ya que $I_f = [-7, +\infty] \neq \mathrm{Cod}_f$. Tampoco es inyectiva ya que existen dos valores de x para los que $f(x) = 0$.

   (d) —

   (e) —

   (f) —

   (g) —

   (h) —

   (i) —

6. —

7. (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = \begin{cases} -x-1 & si\ x \leq 0 \\ x-1 & si\ 0 < x \leq 3 \\ 2 & si\ 3 < x \leq 4 \\ \frac{1}{2}x & si\ 4 < x \end{cases}$

   (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \leq -1 \\ x^2 & si\ -1 < x < 1 \\ -1 & si\ 1 \leq x \end{cases}$

   (c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = \begin{cases} x+1 & si\ x \leq 1 \\ (x-1)^2 - 1 & si\ 1 < x \end{cases}$

   (d) $f : [0, 24] \to \mathbb{R} \mid f(x) = \begin{cases} x & si\ x \in [0, 10) \setminus \{5\} \\ 10 & si\ x \in \{5\} \cup [10, 15) \\ 5 & si\ x \in [15, 24] \end{cases}$

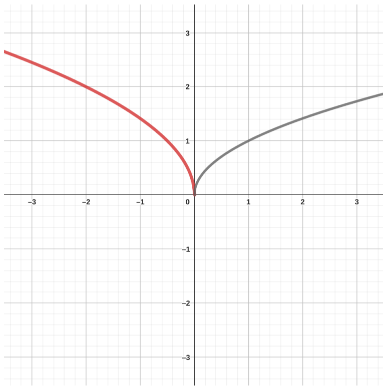
8. (a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f(x) = \begin{cases} 6x & si\ 1 \leq x \leq 5 \\ 30 + 5x & si\ 6 \leq x \leq 10 \\ 55 + 3x & si\ 11 \leq x \end{cases}$

   (b) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \mid f(x) = \begin{cases} 6x & si\ 1 \leq x \leq 5 \\ 5x & si\ 6 \leq x \leq 10 \\ \frac{9}{2}x & si\ 11 \leq x \end{cases}$

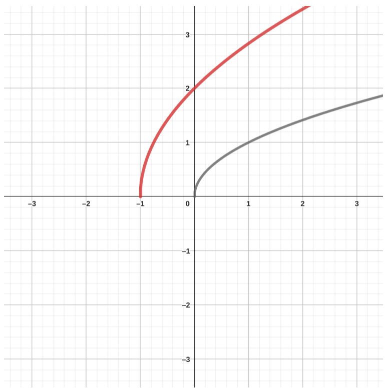
   (c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f(x) = \begin{cases} 6x & si\ 1 \leq x \leq 5 \\ 5x & si\ 6 \leq x \leq 10 \\ \lfloor \frac{9}{2}x \rfloor & si\ 11 \leq x \end{cases}$.

   (d) $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ \mid f(x) = \begin{cases} 30x & si\ 0 \leq x \leq 3 \\ 25x & si\ 30 < x \leq 6 \\ 20x & si\ 30 < x \end{cases}$

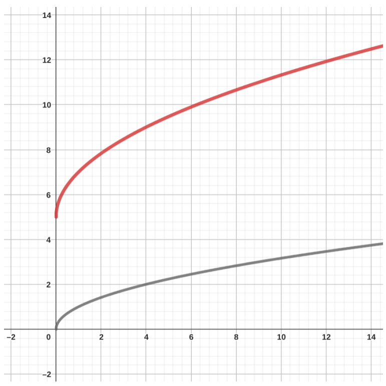
9. (a) La función es $g(x) = f(-2x)$. $D_g = (-\infty, 0]$. $I_g = [0, +\infty)$



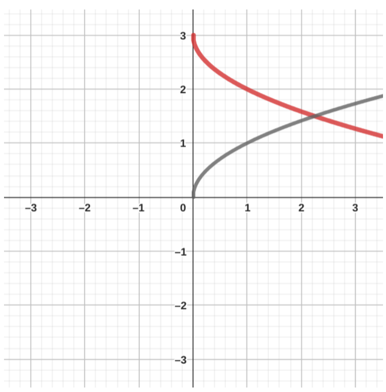
(b) La función es $g(x) = 2f(x+1)$. $D_f = [-1, +\infty)$. $I_f = [0, +\infty)$



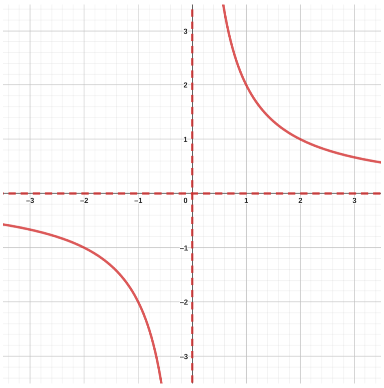
(c) La función es $g(x) = f(4x) + 5$. $D_f = [0, +\infty)$. $I_f = [5, +\infty)$



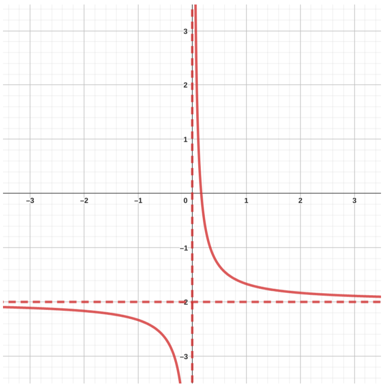
(d) La función es $g(x) = -f(x) + 3$. $D_f = [0, +\infty)$. $I_f = (-\infty, 3]$



10. (a) La función es $g(x) = 2f(x)$. $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $I_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

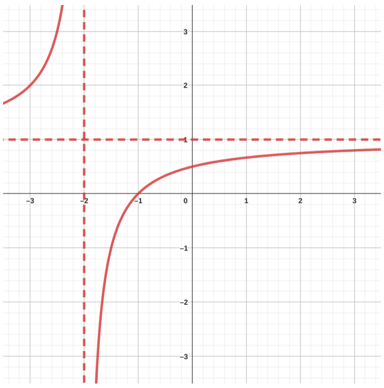


(b) La función es $g(x) = f(3x) - 2$. $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $I_g = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.



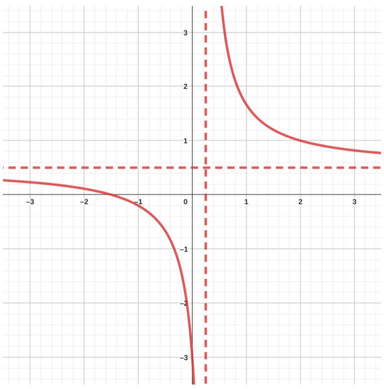
(c) Reformulamos algebraicamente: $\dfrac{x+1}{x+2} = \dfrac{x+2-1}{x+2} = \dfrac{x+2}{x+2} - \dfrac{1}{x+2} = -\dfrac{1}{x+2} + 1$.

La función es $g(x) = -f(x+2) + 1$. $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. $I_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

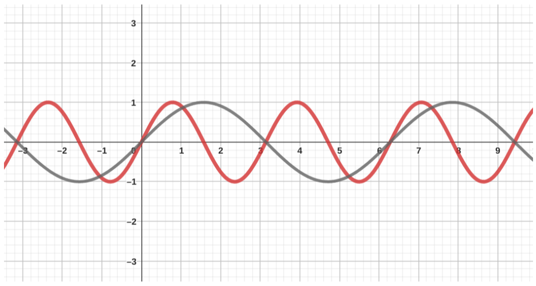


(d) Reformulamos algebraicamente: $\dfrac{2x+3}{4x-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4x+6}{4x-1}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4x-1}{4x-1} + \dfrac{7}{4x-1}\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{7}{2(4x-1)} = \dfrac{7}{8\left(x-\frac{1}{4}\right)} + \dfrac{1}{2}$.

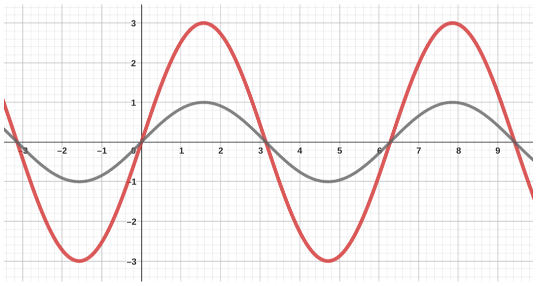
La función es $g(x) = 7.f\left(8\left(x - \frac{1}{4}\right)\right) + \dfrac{1}{2}$. $D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{4}\right\}$. $I_g = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.



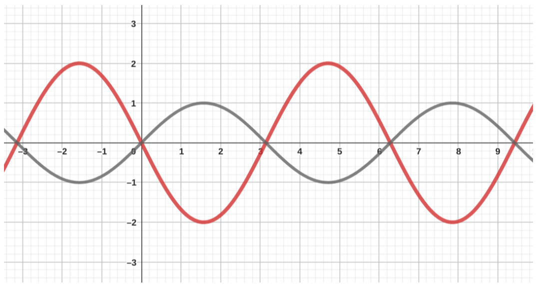
11. (a) Considerando $f(x) = \sin(x)$, la función es $g(x) = f(2x)$. $D_g = \mathbb{R}$. $I_g = [-1, 1]$. $P = \pi$.



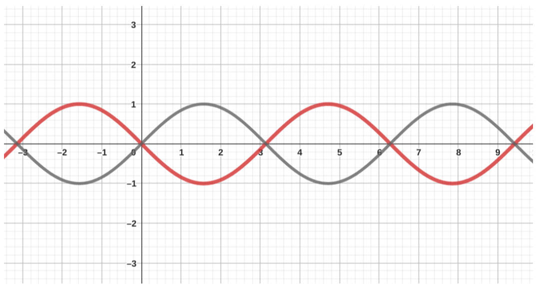
(b) Considerando $f(x) = \sin(x)$, la función es $g(x) = 3f(x)$. $D_g = \mathbb{R}$. $I_g = [-3, 3]$. $P = 2\pi$.



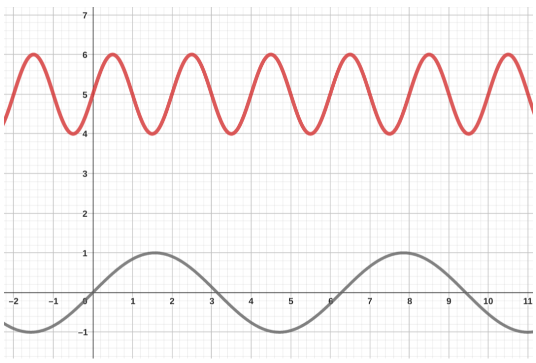
(c) Considerando $f(x) = \sin(x)$, la función es $g(x) = -2f(x)$. $D_g = \mathbb{R}$. $I_g = [-2, 2]$. $P = 2\pi$.



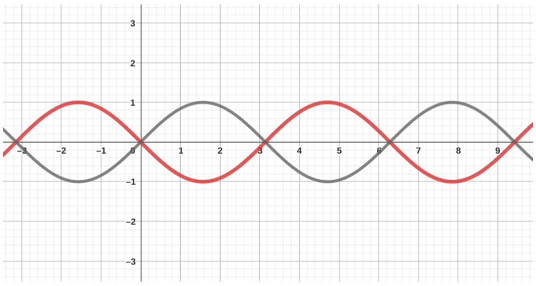
(d) Considerando $f(x) = \sin(x)$, la función es $g(x) = f(x - \pi)$. $D_g = \mathbb{R}$. $I_g = [-1, 1]$. $P = 2\pi$.



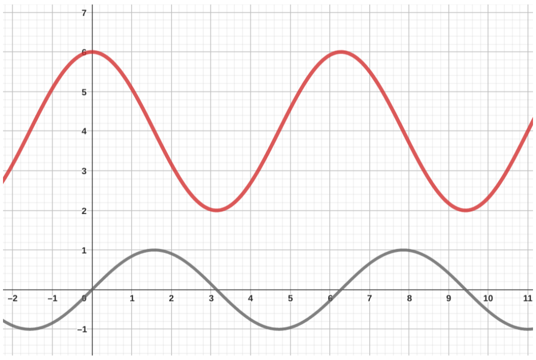
(e) Considerando $f(x) = \sin(x)$, la función es $g(x) = f(\pi x) + 5$. $D_g = \mathbb{R}$. $I_g = [4, 6]$. $P = 2$.



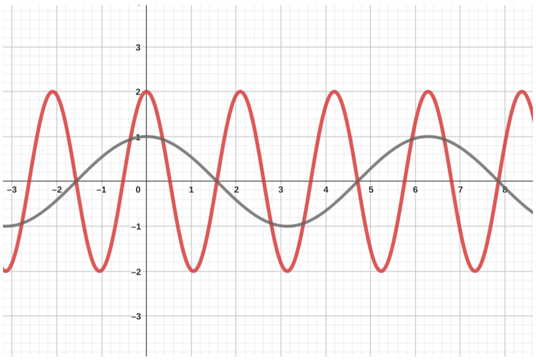
(f) Considerando $f(x) = \sin(x)$, la función es $g(x) = f(-x)$. $D_g = \mathbb{R}$. $I_g = [-1, 1]$. $P = 2\pi$.



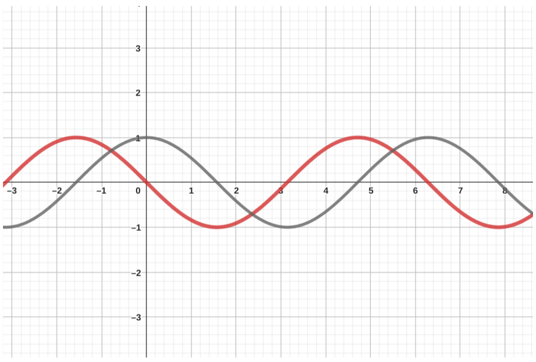
(g) Considerando $f(x) = \sin(x)$, la función es $g(x) = -2f\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) + 4$. $D_g = \mathbb{R}$. $I_g = [2, 6]$. $P = 2\pi$.



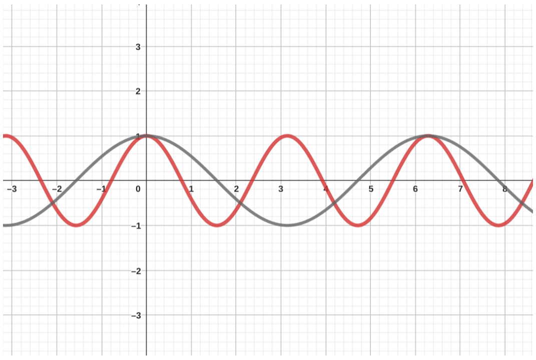
(h) Considerando $f(x) = \cos(x)$, la función es $g(x) = 2f(3x)$. $D_g = \mathbb{R}$. $I_g = [-2, 2]$. $P = \dfrac{2\pi}{3}$.



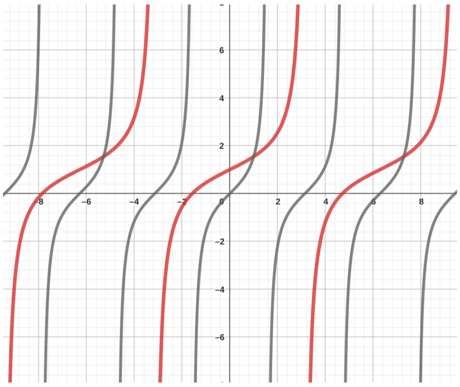
(i) Considerando $f(x) = \cos(x)$, la función es $g(x) = -f\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$. $D_g = \mathbb{R}$. $I_g = [-1, 1]$. $P = 2\pi$.



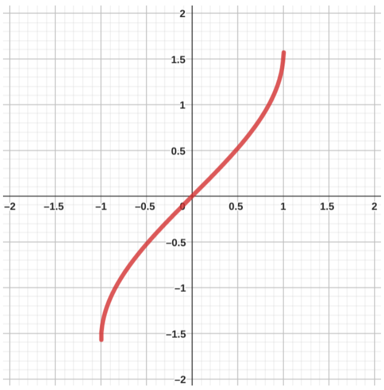
(j) Considerando $f(x) = \cos(x)$, la función es $g(x) = f(2(x + 50\pi))$. $D_g = \mathbb{R}$. $I_g = [-1, 1]$. $P = \pi$.



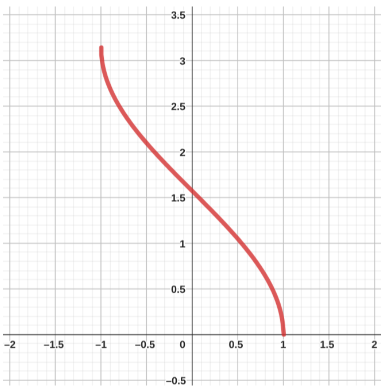
(k) Considerando $f(x) = \tan(x)$, la función es $g(x) = f(2x) - 1$. $D_g = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{k\pi}{2} con k \in \mathbb{Z}\}$. $I_g = \mathbb{R}$. $P = \dfrac{\pi}{2}$.



12. (a) Se define $f : \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1] \mid f(x) = \sin(x)$, que es biyectiva, para que tenga inversa $f^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \mid f^{-1}(x) = \arcsin(x)$.

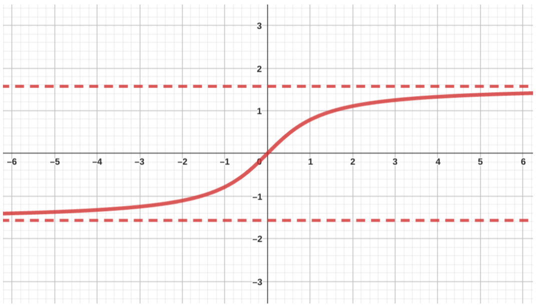


(b) Se define $f : [0, \pi] \to [-1, 1] \mid f(x) = \cos(x)$, que es biyectiva, para que tenga inversa $f^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi] \mid f^{-1}(x) = \arccos(x)$.



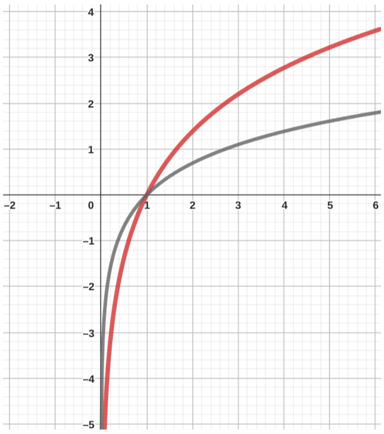
(c) Se define $f : \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R} \mid f(x) = \sin(x)$, que es biyectiva, para que tenga inversa

$f^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \mid f^{-1}(x) = \arctan(x).$

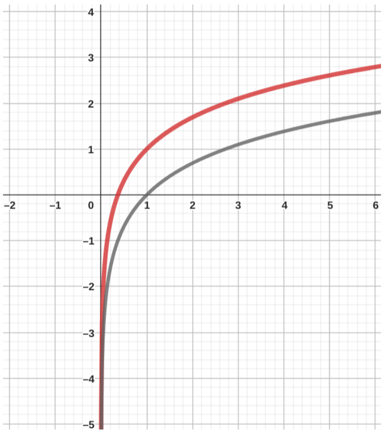


13. —

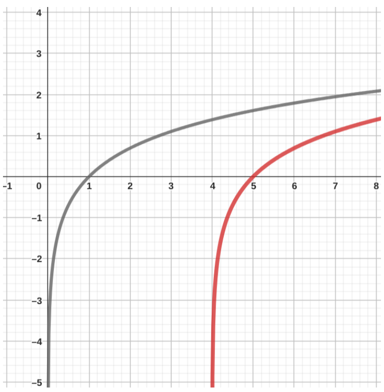
14. (a) Considerando $f(x) = \ln(x)$, la función es $g(x) = 2f(x)$. $D_g = \mathbb{R}^+$. $I_g = \mathbb{R}$.



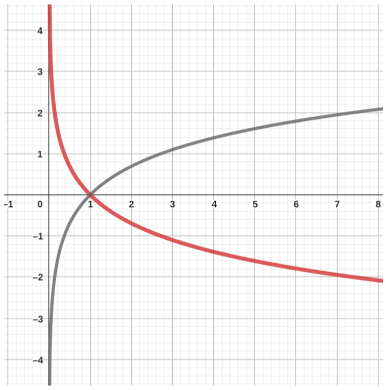
(b) Considerando $f(x) = \ln(x)$, la función es $g(x) = f(x) + 1$. $D_g = \mathbb{R}^+$. $I_g = \mathbb{R}$.



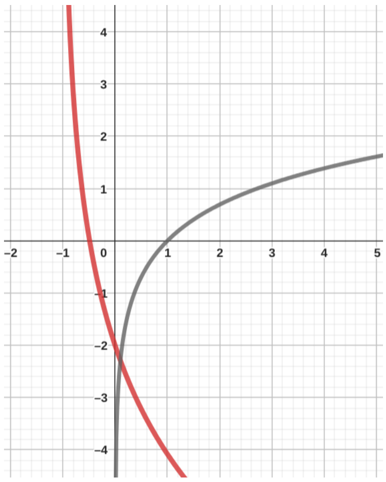
(c) Considerando $f(x) = \ln(x)$, la función es $g(x) = f(x - 4)$. $D_g = (4, +\infty)$. $I_g = \mathbb{R}$.



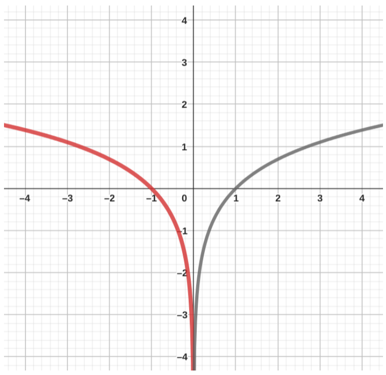
(d) Considerando $f(x) = \ln(x)$, la función es $g(x) = -f(x)$. $D_g = \mathbb{R}^+$. $I_g = \mathbb{R}$.



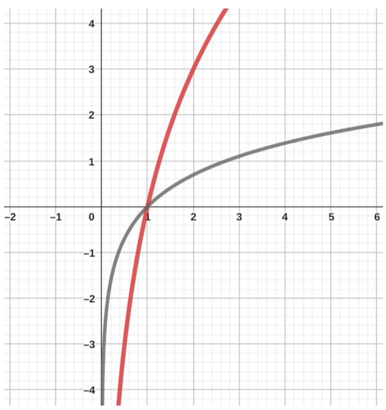
(e) Considerando $f(x) = \ln(x)$, la función es $g(x) = -3f(x+1) - 2$. $D_g = (-1, +\infty)$. $I_g = \mathbb{R}$.



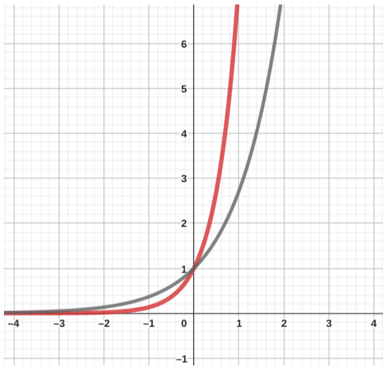
(f) Considerando $f(x) = \ln(x)$, la función es $g(x) = f(-x)$. $D_g = \mathbb{R}^-$. $I_g = \mathbb{R}$.



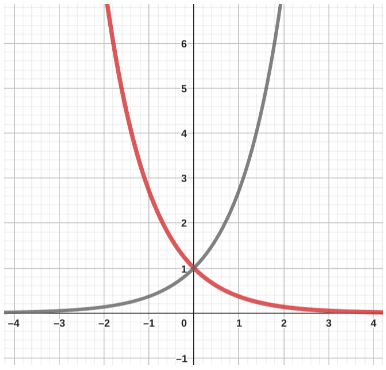
(g) Desarrollo algebraicamente: $\log_2(x^3) = 3\log_2(x) = 3\dfrac{\ln(x)}{\ln 2} = \dfrac{3}{\ln 2}.\ln(x)$. Considerando $f(x) = \ln(x)$, la función es $g(x) = \dfrac{3}{\ln 2}f(x)$. $D_g = \mathbb{R}^+$. $I_g = \mathbb{R}$.



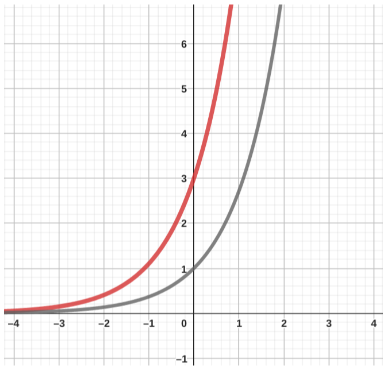
(h) Considerando $f(x) = e^x$, la función es $g(x) = f(2x)$. $D_g = \mathbb{R}$. $I_g = \mathbb{R}^+$.



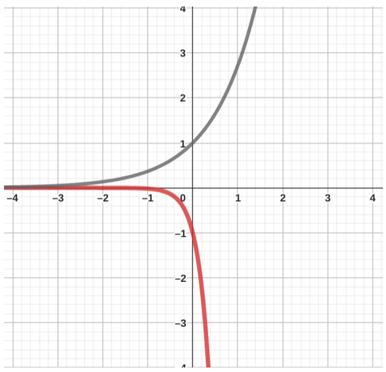
(i) Considerando $f(x) = e^x$, la función es $g(x) = f(-x)$. $D_g = \mathbb{R}$. $I_g = \mathbb{R}^+$.



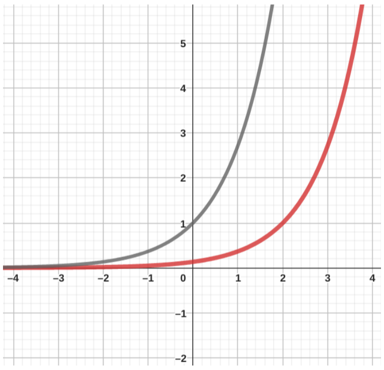
(j) Considerando $f(x) = e^x$, la función es $g(x) = 3f(x)$. $D_g = \mathbb{R}$. $I_g = \mathbb{R}^+$.



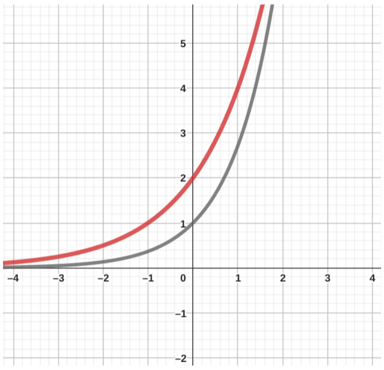
(k) Considerando $f(x) = e^x$, la función es $g(x) = -f(4x)$. $D_g = \mathbb{R}$. $I_g = \mathbb{R}^-$.



(l) Considerando $f(x) = e^x$, la función es $g(x) = f(x-2)$. $D_g = \mathbb{R}$. $I_g = \mathbb{R}^+$.



(m) Reescribimos algebraicamente: $2^{x+1} = e^{\ln\left(2^{x+1}\right)} = e^{(x+1)\cdot\ln(2)}$. Considerando $f(x) = e^x$, la función es $g(x) = f(\ln(2)(x+1))$. $D_g = \mathbb{R}$. $I_g = \mathbb{R}^+$.



15. —

16. —

17. —

18. (a) —
    (b) —
    (c) —
    (d) $D_f = \mathbb{R}$. La función no es sobreyectiva ya que 5 no tiene preimagen. La función no es inyectiva ya que $f(1) = f(2) = 0$.

19. (a) 2
    (b) 0
    (c) 1
    (d) 2
    (e) 0
    (f) -2

20. —

21. —

22. (a) $j \circ g(x)$
    (b) $k \circ g(x)$
    (c) $k \circ h(x)$

(d) $g \circ k^{-1}(x)$

(e) $j \circ h(x)$

(f) $k^{-1} \circ h(x)$

(g) $i \circ i \circ h(x)$

(h) $g \circ k \circ k(x)$

(i) $j \circ h \circ i(x)$

(j) $k^{-1} \circ g(x)$

(k) $j \circ k \circ h(x)$

(l) $i \circ i \circ g(x)$

(m) $h \circ i \circ i(x)$

(n) $i^{-1} \circ g \circ i(x)$

(ñ) $i \circ i \circ h \circ i(x)$

(o) $j \circ i \circ i \circ h(x)$

(p) $i^{-1} \circ g \circ i^{-1}(x)$

(q) $j \circ k^{-1} \circ h(x)$

(r) $i^{-1} \circ i^{-1} \circ h(x)$

(s) $j^{-1} \circ h \circ k^{-1}(x)$

23. —

24. —