Práctica 4: Relaciones de Equivalencia y Orden

Comisión: Rodrigo Cossio-Pérez y Leonardo Lattenero

1. Demostrar que las siguientes relaciones son de equivalencia, indicar sus clases de equivalencia y el conjunto cociente.

   (a) La relación $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid \exists k \in \mathbb{Z} : \ x - y = 2k\}$ donde $x \sim y$ se lee como «x tiene la misma paridad que y».

   (b) La relación $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x^2 = y^2\}$ donde $x \sim y$ se lee como «x tiene el mismo cuadrado que y».

   (c) Considerando un rectángulo L_1 de lados a y b y otro rectángulo L_2 de lados c y d, donde $a, b, c, d \in (0, +\infty)$. Se define la relación $R = \{(L_1, L_2) \mid a.b = c.d \}$ donde $L_1 \sim L_2$ se lee como «L_1 tiene la misma área que L_2».

   (d) Considerando la fracción q_1 representada por $\frac{a}{b}$ y otra fracción q_2 representada por $\frac{c}{d}$, con $a, c \in \mathbb{Z}$ y $b, d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Se define la relación: $R = \{(q_1, q_2) \mid a.d = c.b\}$ donde $q_1 \sim q_2$ se lee como «q_1 es una fracción equivalente a q_2».

2. Averiguar si las siguientes relaciones son de orden amplio u orden estricto y demostrarlo

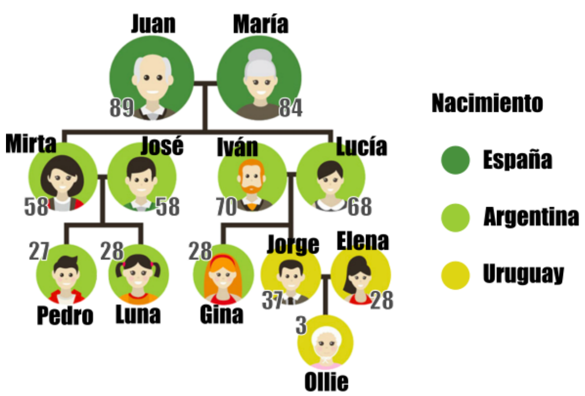
   (a) Dada la relación R definida en $\mathbb{R}$, se establece la relación como «x es menor o igual que y» donde $x \, R \, y$ se anota $x \leq y$ definida de la forma $R = \{(x, y) \mid \exists k \in [0, +\infty) : \ y = x + k\}$

   (b) Dada la relación R definida en $\mathbb{R}$, se establece la relación como «x es divisor de y» donde $x \, R \, y$ se anota $x \mid y$ definida de la forma $R = \{(x, y) \mid \exists n \in \mathbb{N} : \ y = n.x\}$

   (c) Dados dos conjuntos A y B se define la relación «A es subconjunto de en B» donde $x \, R \, y$ se anota $A \subseteq B$ definida de la forma $R = \{(A, B) \mid \forall x \in A : \ x \in A \to x \in B\}$

   (d) Dada la relación R definida en $\mathbb{R}$, se establece la relación «x es menor que y» donde $x \, R \, y$ se anota $x < y$ definida de la forma $R = \{(x, y) \mid \exists k \in (0, +\infty) : \ y = x + k\}$

3. Considerando el siguiente árbol genealógico:



   (a) Verificar que la relación «x tiene el mismo color de pelo que y» es una relación de equivalencia y representarla con un grafo. Indicar las clases de equivalencia y el conjunto cociente.

(b) Verificar que la relación «x nació en el mismo país que y» es una relación de equivalencia y representarla con un grafo. Indicar las clases de equivalencia y el conjunto cociente.

(c) Verificar que la relación «x es descendiente de y» es una relación de orden estricto parcial. Representar la relación en un diagrama de Hasse.

(d) Explicar porque la relación «x es de la misma edad o mayor que y» NO ES una relación de orden amplio.

4. Resolver los siguientes ejercicios variados

(a) Sean R_1 y R_2 dos relaciones de equivalencia en A. Averiguar si $R_1 \cap R_2$ y $R_1 \cup R_2$ son relaciones de equivalencia en A.

(b) Sea R una relación definida en el conjunto de número reales tal que $xRy \Leftrightarrow |x-y| < 1$. Demostrar que R no es una relación de equivalencia.

(c) En $\mathbb{Z}$ se define la relación R mediante: $(a,b) \in R \Leftrightarrow a^2 + a = b^2 + b$. Clasificar R.

(d) En $\mathbb{R}^2$ se define la relación $\sim$ mediante: $(x,y) \sim (x',y') \Leftrightarrow x = x'$. Probar que $\sim$ es de equivalencia, determinar las clases de equivalencia y el conjunto cociente.

(e) En $A = \{1,2,4,6,8\}$ se define la siguiente relación: $xRy \Leftrightarrow 3|(x+y)$. Definir R por extensión, clasificarla y realizar su gráfico o esquema.

(f) En $\mathbb{N}^2$ se define la siguiente relación: $(a,b) \sim (a',b') \Leftrightarrow a + b' = a' + b$. Demostrar que es de equivalencia, obtener las clases de equivalencia, el conjunto cociente y representarla indicando las clases.

(g) El conjunto $\{\{a\},\{b,c\},\{d\}\}$ es una partición de A. Obtener la relación de equivalencia asociada a la partición.

(h) En el conjunto $A = \{1,2,3,4,5\} \subseteq \mathbb{N}$ se considera la relación de menor o igual. Determinar, si los hubiere, los elementos maximales y minimales, el conjunto de cotas superiores e inferiores, y el supremo e ínfimo.

(i) En $\mathbb{R}$, ordenado por la relación de menor o igual, se define el conjunto $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{n} \wedge n \in \mathbb{N}\right\}$. Analizar si A tiene primer y ultimo elemento, indicar el conjunto de cotas superiores, y analizar si el 0 es una cota inferior.

(j) Sea R una relación definida en el conjunto de personas tal que xRy si y solo si x es mayor (en edad) que y. Averiguar si R es una relación de orden amplio/estricto total/parcial.

(k) Se define la relación R en $\mathbb{N}$ de manera que $xRy \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : x = y.10^k$. Estudiar sus propiedades y clasificar la relación. En el caso de que sea de equivalencia dar las clases de equivalencia, en el caso de que sea de orden indicar si es parcial o total.

(l) Sea $A = \{1,2,3,6,9,18\}$ y R la relación en A dada por $xRy \Leftrightarrow x|y$, mostrar que es una relación de orden y trazar su diagrama de Hasse

(m) Definimos la relación R en $\mathbb{N}$ por $xRy \Leftrightarrow \dfrac{x}{y} = 2^n$ para algún $n \in \mathbb{Z}$. Verificar que es una relación de equivalencia y analizar si entre los números 1, 2, 3 y 4, hay algunos que pertenezcan a la misma clase de equivalencia.

5. Dados los siguientes conjuntos (y sus superconjuntos asociados), obtener el conjunto de cotas superiores e inferiores, su supremo y su ínfimo.

(a) $(0,1]$ con la relación $\leq$ definida en $\mathbb{R}$.

(b) $[-6,5]$ con la relación $\leq$ definida en $\mathbb{R}$.

(c) $(-6, 5)$ con la relación $\leq$ definida en $\mathbb{R}$.

(d) $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ con la relación $\subseteq$ definida en $\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})$.

6. Analizar en cada caso si la relación dada en el conjunto A es de equivalencia. En caso de serlo, describir su conjunto cociente.

   (a) $A = \mathbb{R}$ con $xRy \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$

   (b) $A = \mathbb{Z}$ con $xRy \Leftrightarrow x - y$ es un entero par

   (c) $A = \mathbb{R}$ con $xRy \Leftrightarrow x.y > 0$

   (d) $A = \mathbb{R}$ con $xRy \Leftrightarrow x.y \geq 0$

   (e) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ con $xRy \Leftrightarrow x = y \vee x + y = 5$

Respuestas

1. (a) —

   (b) —

   (c) —

   (d) Reflexividad: $\forall a, b : \left(\frac{a}{b}\right) R \left(\frac{a}{b}\right)$ ya que $a.b = a.b$.
   Simetría: $\forall a, b, c, d : \left(\frac{a}{b}\right) R \left(\frac{c}{d}\right) \to \left(\frac{c}{d}\right) R \left(\frac{a}{b}\right)$ ya que $a.d = c.b \to c.b = a.d$.
   Transitividad: $\forall a, b, c, d, e, f : \left(\frac{a}{b}\right) R \left(\frac{c}{d}\right) \wedge \left(\frac{c}{d}\right) R \left(\frac{e}{f}\right) \to \left(\frac{a}{b}\right) R \left(\frac{e}{f}\right)$
   ya que $(a.d = c.b) \wedge (c.f = e.d) \quad \Rightarrow \quad (a.d = c.b) \wedge (c = \frac{e.d}{f}) \quad \Rightarrow \quad a.d = \frac{e.d}{f}.b \quad \Rightarrow \quad a = \frac{e}{f}.b \quad \Rightarrow \quad af = eb$

2. (a) Relación de orden amplio (transitiva, antisimétrica, reflexiva)

   (b) Relación de orden amplio (transitiva, antisimétrica, reflexiva)

   (c) Relación de orden amplio (transitiva, antisimétrica, reflexiva)

   (d) Relación de orden estricto (transitiva, asimétrica e irreflexiva)

3. (a) —

   (b) —

   (c) —

   (d) Porque no es antisimétrica. (Mirta)R(José) $\wedge$ (José)R(Mirta) pero José$\neq$Mirta. También se puede verificar con Luna, Gina y Elena, que tienen la misma edad.

4. (a) $R_1 \cap R_2$ es de equivalencia mientras que $R_1 \cup R_2$ no lo es necesariamente.

   (b) R es reflexiva porque $|x - x| = 0 < 1$.
   R es simétrica ya que $|x - y| = |y - x|$ por lo que $|x - y| < 1 \;\Rightarrow\; |y - x| < 1$.
   R NO es transitiva. Contraejemplo: $x = 2.8$, $y = 1.9$, y $z = 1.1$, donde se ve que $|2.8 - 1.9| = 0.9 < 1$, $|1.9 - 1.1| = 0.8 < 1$, pero $|2.8 - 1.1| = 1.7 > 1$.
   Por lo tanto, R no es una relación de equivalencia.

   (c) —

   (d) Resolución por La mano matemática

   (e) —

(f) Resolución por Science and Tech

(g) —

(h) —

(i) —

(j) —

(k) Resolución por Science and Tech.

(l) Resolución por La mano matemática

(m) Resolución por La mano matemática.

5. —

6. (a) Resolución por La mano matemática

   (b) Resolución por La mano matemática

   (c) Resolución por La mano matemática

   (d) Resolución por La mano matemática

   (e) Resolución por La mano matemática